Ю. В. СИДОРОВ, М. В. ФЕДОРЮК, М. И. ШАБУНИН

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебника для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161.5
С34
УДК 517.53/55(075.8)

Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. **Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. для вузов.— 3-е изд.,** испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 480 с.— ISBN 5-02-013954-8.

Изложены основы теории функций комплексного переменного. Наряду с традиционными разделами курса в книге подробно рассмотрены многозначные аналитические функции и элементарные асимптотические методы. Кроме того, в ней рассмотрены аналитическая теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, задачи Дирихле для уравнения Пуассона на плоскости, некоторые физические задачи теории поля, операционное исчисление.

2-е изд.— 1982 г.

Для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов.

$\frac{1602070000-027}{053(02)-89}$ 53-89

ISBN 5-02-013954-8

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы, 1976;
с изменениями, 1982;
исправленное, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. Введение 7

§ 1. Комплексные числа 7
§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел . . . 18
§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости 24
§ 4. Непрерывные функции комплексного переменного . . . 35
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного . . 44
§ 6. Функция $\arg z$ 50

Глава II. Регулярные функции 57

§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши — Римана 57
§ 8. Геометрический смысл производной 64
§ 9. Интегральная теорема Коши 75
§ 10. Интегральная формула Коши 83
§ 11. Степенные ряды 86
§ 12. Свойства регулярных функций 89
§ 13. Обратная функция 101
§ 14. Теорема единственности 107
§ 15. Аналитическое продолжение 109
§ 16. Интегралы, зависящие от параметра 111

Глава III. Ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера 121

§ 17. Ряд Лорана 121
§ 18. Изолированные особые точки однозначного характера . . 126
§ 19. Теорема Лиувилля 136

Глава IV. Многозначные аналитические функции 139

§ 20. Понятие аналитической функции 139
§ 21. Функция $\ln z$ 145
§ 22. Степенная функция. Точки ветвления аналитических функций 153
§ 23. Первообразная аналитической функции. Обратные тригонометрические функции 164
§ 24. Регулярные ветви аналитических функций 169
§ 25. Граничные особые точки 187
§ 26. Особые точки аналитических функций. Понятие о римановой поверхности 192
§ 27. Аналитическая теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка 203

Глава V. Теория вычетов и ее приложения 218

§ 28. Теоремы о вычетах 218
§ 29. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов 228

§ 30. Принцип аргумента и теорема Руше 252
§ 31. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби 256

Глава VI. Конформные отображения 267
§ 32. Локальные свойства отображений регулярными функциями 267
§ 33. Общие свойства конформных отображений 273
§ 34. Дробно-линейная функция 279
§ 35. Конформные отображения элементарными функциями . . 288
§ 36. Принцип симметрии 312
§ 37. Интеграл Кристоффеля — Шварца 323
§ 38. Задача Дирихле 335
§ 39. Векторные поля на плоскости 350
§ 40. Некоторые физические задачи теории поля 358

Глава VII. Элементарные асимптотические методы 366
§ 41. Простейшие асимптотические оценки 366
§ 42. Асимптотические разложения 383
§ 43. Метод Лапласа 390
§ 44. Метод стационарной фазы 402
§ 45. Метод перевала 410
§ 46. Метод контурного интегрирования Лапласа 425

Глава VIII. Операционное исчисление 436
§ 47. Основные свойства преобразования Лапласа 436
§ 48. Восстановление оригинала по изображению 444
§ 49. Применение преобразования Лапласа к решению линейных уравнений 457
§ 50. Колебания струны под действием мгновенных толчков 464

Список литературы 473
Предметный указатель 475

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана авторами на основе их более чем двадцатилетнего опыта преподавания теории функций комплексного переменного в Московском физико-техническом институте. Эта книга является учебником для студентов высших технических учебных заведений с повышенным курсом математики. Авторы полагают, что она может оказаться полезной также при самостоятельном изучении курса ТФКП.

Основное внимание в книге уделяется методам ТФКП, которые часто применяются в прикладных задачах (разложения в ряды, конформные отображения, вычисление интегралов с помощью теории вычетов, асимптотические методы). Материал книги авторы старались изложить так, чтобы максимально помочь читателю овладеть основами ТФКП. С этой целью в книге подробно разобрано большое количество примеров. Авторы надеются, что эти примеры помогут читателю глубже усвоить теоретический материал курса и приобрести навыки в решении задач.

Книгу условно можно разделить на две части. Первая часть (главы I—III, V, VI) содержит тот необходимый минимум сведений по ТФКП, которым должен овладеть современный инженер-исследователь. Глава I носит вводный характер, в ней содержатся основные сведения о комплексных числах и непрерывных функциях комплексного переменного. В главе II изложены основные свойства регулярных функций, включая понятие аналитического продолжения и аналитические свойства интегралов, зависящих от параметра. В главе III рассматриваются ряды Лорана и особые точки однозначного характера. Глава V посвящена теории вычетов и ее приложениям. Рассмотрено много важных типов интегралов от однозначных и неоднозначных аналитических функций, в частности интегральные преобразования математической физики (Фурье, Меллина, Лапласа), интегралы типа бета-функции. В главе VI рассматриваются свойства конформных отображений, подробно изучаются отображения элементарными функциями и даются приложения: задача Дирихле, векторные поля на плоскости, некоторые физические задачи теории поля.

Вторая часть (главы IV, VII) рассчитана на более подготовленного читателя. Глава IV посвящена многозначным аналитическим функциям. В ней подробно изучены аналитические свойства и приведены основные формулы для вычисления значений важнейших элементарных функций. Особое внимание уделяется вопросу о выделении регулярных ветвей многозначных аналитических функций. Эта глава содержит аналитическую теорию обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В главе VII изложены основные асимптотические методы (метод Лапласа, метод стационарной фазы, метод перевала, метод контурного интегрирования Лапласа и некоторые другие методы). В главе VIII рассмотрены основы операционного исчисления.

Первое издание книги вышло в 1976 году. Для второго издания (1982 г.) книга была дополнена и частично переработана. Настоящее третье издание печатается с небольшими изменениями.

Авторы с глубокой благодарностью вспоминают профессора Б. В. Шабата, прочитавшего рукопись первого издания книги и сделавшего много полезных предложений.

Авторы

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа

1. Определение комплексного числа. *Комплéксными числами* называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

2. *Суммой* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

3. *Произведением* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2; \qquad (1)$$

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (3)$$

Из формул (2), (3) вытекают, в частности, соотношения

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами x. Поэтому комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляются с действительными числами: $(x, 0) = x$.

Комплексное число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i, т. е. $i = (0, 1)$. Вычислим по формуле (3) произведение $i \cdot i = i^2$. Имеем

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Из формул (2), (3) вытекают также равенства

$$(0, y)=(0, 1)(y, 0)=iy,$$
$$(x, y)=(x, 0)+(0, y)=x+iy.$$

Таким образом, каждое комплексное число (x, y) можно представить в виде $x+iy$. Запись комплексного числа в виде $x+iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида iy называются *чисто мнимыми*. В частности, число 0, т. е. комплексное число $(0, 0)$, является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

С помощью алгебраической формы комплексного числа формулы (1)—(3) записываются так:

$x_1+iy_1=x_2+iy_2$ тогда и только тогда, когда

$$x_1=x_2 \text{ и } y_1=y_2; \quad (4)$$
$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \quad (5)$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \quad (6)$$

Комплексное число $x+iy$ принято обозначать одной буквой z, т. е. $z=x+iy$. Число x называется *действительной частью*, а число y — *мнимой частью* комплексного числа $z=x+iy$. Для этих чисел приняты следующие обозначения:

$$x=\operatorname{Re}(x+iy)=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im}(x+iy)=\operatorname{Im} z\ *).$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $z=x+iy$ предполагается, что x и y — действительные числа.

Комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z=x+iy$ и обозначается $\bar{z}$:

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy. \quad (7)$$

Очевидно, $(\bar{z})=z$ для любого комплексного числа z. Из (4) вытекает, что равенство $\bar{z}=z$ имеет место в том и только в том случае, когда z — действительное число.

Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$:

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (8)$$

Очевидно, $|z|\geqslant 0$, причем $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа.

---

*) Обозначения Re и Im являются сокращениями французских слов Réel (действительный) и Imaginaire (мнимый).

Отметим две формулы:

$$|z| = |\bar{z}|, \tag{9}$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \tag{10}$$

которые вытекают из (7), (8) и равенства

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Дальнейшие свойства, связанные с понятиями $\bar{z}$ и $|z|$, будут рассмотрены ниже.

2. Свойства операций. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1. Коммутативности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. Ассоциативности:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. Дистрибутивности:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Докажем, например, коммутативность сложения. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда по формуле (5) имеем

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_2 + z_1 = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1).$$

Но по свойству коммутативности сложения действительных чисел $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ и $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$. Следовательно, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Аналогично проверяются остальные свойства 1—3.

Из свойств 1—3 вытекает, что операции сложения и умножения над комплексными числами $x + iy$ обладают формально такими же свойствами, как если бы число i было действительным. В частности, нет необходимости запоминать формулы (5) и (6), их можно получить по обычным правилам алгебры. Например, (6) вытекает из равенства

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$$

и равенства $i^2 = -1$.

Числа нуль и единица в множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

В множестве комплексных чисел можно ввести операцию, обратную к операции сложения. Эта операция, как обычно,

называется *вычитанием.* Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению

$$z + z_2 = z_1. \tag{11}$$

Это число называется *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначается $-z$.

Из (4), (5) вытекает, что для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ уравнение (11) имеет единственное решение $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. Таким образом,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{12}$$

Введем операцию деления комплексных чисел. Операция, обратная умножению, называется *делением,* а *частным* двух чисел z_1 и z_2 называется такое число z, которое удовлетворяет уравнению

$$zz_2 = z_1, \tag{13}$$

и обозначается $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Докажем, что уравнение (13) имеет единственное решение для любых комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$. Умножая обе части уравнения (13) на число $\bar{z}_2$ и используя формулу (10), получаем $z|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2$, откуда умножением на число $\dfrac{1}{|z_2|^2}$ находим $z = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$. Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \qquad z_2 \neq 0. \tag{14}$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формулу (14) можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Эту формулу можно не запоминать — достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

Пример 1.

$$\frac{2 - 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 9i + 12i^2}{3^2 + 4^2} =$$

$$= \frac{6 - 17i - 12}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}\,i. \quad \square$$

3. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1). Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости, очевидно, является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Ясно, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси, так как, если $z = x + iy$, то $-z = (-x) + i(-y)$, а $\bar{z} = x + i(-y)$ (рис. 1).

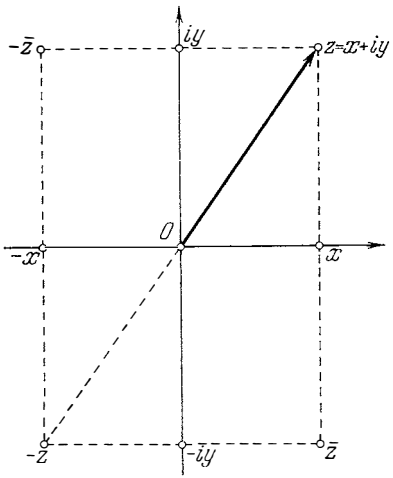


Рис. 1

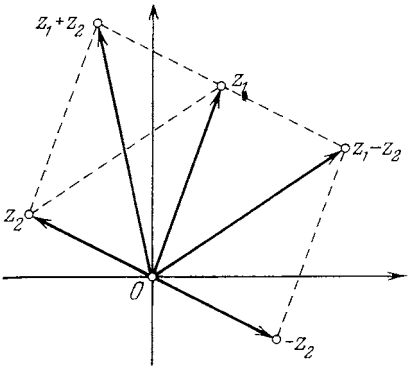


Рис. 2

Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (рис. 1). Такое соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости с началом в точке 0 также является взаимно однозначным. Поэтому вектор, изображающий комплексное число z, обозначается той же буквой z.

Из формулы (8) и рис. 1 видно, что *длина вектора* z *равна* $|z|$ и имеют место неравенства $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$.

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Из формулы (5) вытекает, что число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 2). Вектор $z_1 - z_2$ строится как сумма векторов z_1 и $-z_2$ (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что *расстояние между точками* z_1 *и* z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. *равно* $|z_1 - z_2|$.

Пример 2. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$, есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0. □

Пример 3. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$, есть множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2. Следовательно, это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проведенной через его середину. □

Пример 4. а) Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, есть эллипс с фокусами в точках z_1, z_2 и с большой полуосью, равной a, так как $|z - z_1| + |z - z_2|$ — сумма расстояний от точки z до точек z_1 и z_2.

б) Аналогично, уравнение $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$, где $a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, является уравнением гиперболы с фокусами в точках z_1, z_2 и с действительной полуосью, равной a. □

Неравенства треугольника. *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *имеют место неравенства*

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{15}$$

Доказательство. Длины сторон треугольника с вершинами в точках 0, z_1, $z_1 + z_2$ равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (рис. 2). Следовательно, неравенства (15) являются известными из элементарной геометрии неравенствами для длин сторон треугольника.

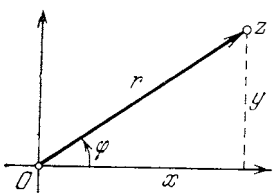


Рис. 3

Следствие. *Для любых комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \tag{16}$$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ (рис. 3), где $r = |z|$ — расстояние от точки 0 до точки z, а φ — угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$) и обозна-

чается так: $\varphi = \arg z$*). Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$.

Из рис. 3 видно, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{17}$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{18}$$

Запись комплексного числа в виде (18) называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Из формул (17) вытекает, что если $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$, то

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{19}$$

Из рис. 3 видно, что справедливо и обратное утверждение: число φ является аргументом комплексного числа $z = x + iy$ только тогда, когда выполняются оба равенства (19). Следовательно, для нахождения аргумента комплексного числа $z = x + iy$ нужно решить систему уравнений (19).

Система (19) имеет бесконечно много решений, и все эти решения задаются формулой $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где φ_0 — одно из решений системы (19). Таким образом, аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 — одно из значений аргумента комплексного числа z, то все значения аргумента этого числа находятся по формуле

$$\arg z = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

Из системы (19) вытекает, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{21}$$

Следует иметь в виду, что не все решения уравнения (21) являются решениями системы (19).

Пример 5. Найдем аргумент комплексного числа $z = -1 - i$. Так как точка $z = -1 - i$ лежит в третьей четверти и $\operatorname{tg}\varphi = 1$, то $\arg(-1 - i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ □

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то по формуле (18) имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{22}$$

*) Обозначение arg является сокращением французского слова argument (аргумент).

В частности, $e^{2\pi i}=1$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\pi i/2}=i$, $e^{-\pi i/2}=-i$ (рис. 4). Отметим, что $|e^{i\varphi}|=1$ для любого действительного числа φ. Из (22) заменой φ на $-\varphi$ получается равенство

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi. \tag{23}$$

Сложением и вычитанием равенств (22) и (23) получаются *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}),$$
$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}), \tag{24}$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

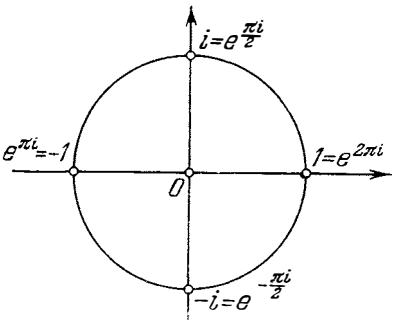


Рис. 4

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из них:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{25}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{26}$$

$$(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{27}$$

Докажем равенство (25). Имеем

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Аналогично проверяется равенство (26). Равенство (27) получается из (25) и (26) по индукции.

Из (27) и (22) вытекает *формула Муавра*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{28}$$

Пример 6. Вычислим суммы

$$S_1=\cos x+\cos(x+\alpha)+\cos(x+2\alpha)+\ \ldots\ +\cos(x+n\alpha),$$
$$S_2=\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+2\alpha)+\ldots+\sin(x+n\alpha).$$

Положим $S=S_1+iS_2$, тогда по формуле Эйлера (22) имеем

$$S=(\cos x+i\sin x)+(\cos(x+\alpha)+i\sin(x+\alpha))+\ldots$$
$$\ldots+(\cos(x+n\alpha)+i\sin(x+n\alpha))=$$
$$=e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+\ldots+e^{i(x+n\alpha)}.$$

Суммируя эту геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{i\alpha}$, получаем $S = \frac{e^{ix}(e^{i(n+1)\alpha}-1)}{e^{i\alpha}-1}$. Так как $S_1 = \operatorname{Re} S$, $S_2 = \operatorname{Im} S$, то из этой формулы можно сразу найти обе суммы S_1 и S_2. Поделим числитель и знаменатель на $e^{i\alpha/2}$, тогда знаменатель будет равен $2i \sin(\alpha/2)$, а числитель будет равен

$$\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+$$
$$+i\left[\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$=2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\left[-\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)+i\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\right].$$

Отсюда находим

$$S_1=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),$$

$$S_2=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right). \quad \square$$

Из формул (18) и (22) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi}, \tag{29}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Запись комплексного числа в виде (29) называется *показательной формой* комплексного числа.

С помощью равенств (25) и (26) легко получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{30}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{31}$$

Из формулы (30) следует, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения:

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2, \quad \text{то } \varphi_1+\varphi_2 = \arg(z_1 z_2). \tag{32}$$

Аналогично из формулы (31) вытекает, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad z_2 \neq 0,$$

а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного:

$$\text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2, \text{ то } \varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{z_1}{z_2}. \tag{33}$$

Пример 7.

$$(1 - i\sqrt{3})^3 (1+i)^2 = (2e^{-\pi i/3})^3 (\sqrt{2}\, e^{\pi i/4})^2 =$$
$$= 2^3 e^{-\pi i} 2 e^{\pi i/2} = 2^3 (-1)\, 2i = -16i. \quad \square$$

Отметим, что из геометрической интерпретации (рис. 3) вытекает правило равенства комплексных чисел, записанных в показательной форме: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то равенство $z_1 = z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, где k — некоторое целое число. Таким образом, $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{и} \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi, \tag{34}$$

где k — целое число.

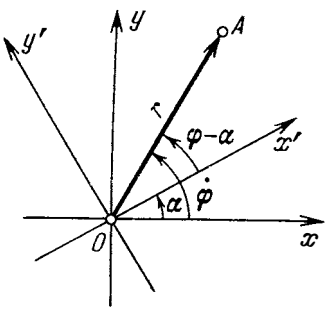


Рис. 5

С помощью комплексных чисел удобно записывать многие формулы аналитической геометрии. Пусть $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $O = (0, 0)$ — точки на плоскости (x, y), $a_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $a_2 = \overrightarrow{OA_2}$ — векторы. Этим векторам отвечают комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Имеем

$$\bar{z}_1 z_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Действительная часть этого выражения равна скалярному произведению векторов a_1, a_2:

$$(a_1, a_2) = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2),$$

а его мнимая часть равна $2S$, где S — ориентированная площадь S треугольника с вершинами в точках O, A_1, A_2:

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть $A = (x, y)$ — точка плоскости (x, y). Найдем ее координаты (x', y') в новой системе координат, полученной из ста-

рой поворотом на угол α (рис. 5). Точке A отвечает комплексное число $x+iy=re^{i\varphi}$. Тогда $x'+iy'=re^{i(\varphi-\alpha)}=re^{i\varphi}\cdot e^{-i\alpha}=(x+iy)e^{-i\alpha}$, т. е.

$$x'+iy'=(x+iy)(\cos\alpha-i\sin\alpha).$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, находим

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n=a, \tag{35}$$

где $a\neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число. Пусть $a=\rho e^{i\theta}$, $z=re^{i\varphi}$. Тогда

$$r^n e^{in\varphi}=\rho e^{i\theta}.$$

Из этого уравнения с помощью свойства (34) находим $r^n=\rho$, $n\varphi=\theta+2k\pi$, откуда $r=\sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k=(\theta+2k\pi)/n$ и

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{(\theta+2k\pi)i/n},\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{36}$$

Покажем, что среди комплексных чисел (36) ровно n различных. Заметим, что числа z_0, z_1, ..., z_{n-1} различны, так как их аргументы

$$\varphi_0=\frac{\theta}{n},$$

$$\varphi_1=\frac{\theta+2\pi}{n},\ \ldots,$$

$$\varphi_{n-1}=\frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}$$

различны и отличаются друг от друга меньше, чем на 2π (см. (34)). Далее $z_n=z_0$, так как $|z_n|=|z_0|=\sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi_n=\varphi_0+2\pi$. Аналогично $z_{n+1}=z_1$, $z_{-1}=z_{n-1}$ и т. д.

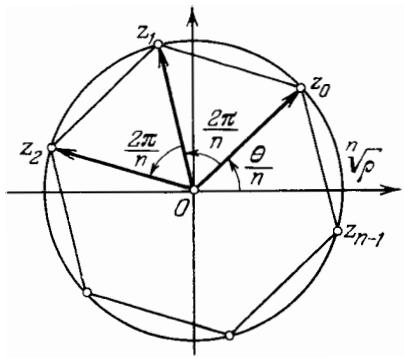


Рис. 6

Таким образом, уравнение (35) при $a\neq 0$ имеет ровно n различных корней:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{(\theta+2k\pi)i/n},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{37}$$

На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0 (рис. 6).

Замечание. Комплексное число z называется *корнем n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n=a$. Выше пока-

зано, что при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n-й степени из числа a.

6. Дальнейшие свойства комплексно сопряженных чисел. Если $z = x + iy$, то по определению (7) $\bar{z} = x - iy$. Как уже отмечалось (см. (9)), модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$. Установим связь между их аргументами.

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда из (22) и (23) (или из рис. 7) видно, что $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Следовательно, если $\varphi = \arg z$, то $-\varphi = \arg \bar{z}$.

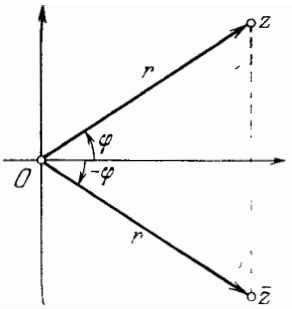


Рис. 7

Отметим, что операция сопряжения перестановочна с арифметическими операциями над комплексными числами:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0,$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad z \neq 0 \text{ при } n < 0.$$

Эти равенства проверяются непосредственно.

Пример 8. Пусть $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с действительными коэффициентами. Тогда

$$\overline{P(z)} = a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_n = P(\bar{z}).$$

Если $P(z_0) = 0$, то $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0$, т. е. если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряженное число $\bar{z}_0$ также является корнем этого многочлена. □

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

1. Последовательности. Определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ формально такое же, как и определение предела последовательности действительных чисел.

Определение. Комплексное число a называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$.

Другими словами, число a называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - a| = 0. \tag{2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Геометрический смысл неравенства (1) заключается в том, что точка z_n лежит в круге радиуса ε с центром в точке a (рис. 8). Этот круг, т. е. множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-a|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, называется ε-окрестностью точки a. Следовательно, точка a является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки a содержатся все члены этой последовательности, за исключением их конечного числа.

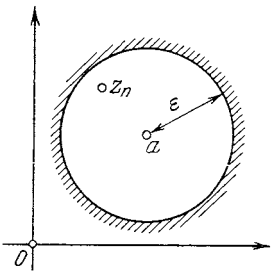


Рис. 8

Таким образом, определение предела последовательности $\{z_n\}$ является обычным определением предела последовательности точек плоскости, сформулированным в терминах комплексных чисел.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$ Имеет место

Теорема 1. *Существование предела* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, *где* $a=\alpha+i\beta$ *равносильно существованию двух пределов*:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n=\beta.$$

Доказательство. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, т. е. выполняется условие (2). Тогда из неравенств $|x_n-\alpha|\leqslant|z_n-a|$ и $|y_n-\beta|\leqslant|z_n-a|$ следует существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$.

Обратное утверждение вытекает из оценки

$$|z_n-a|=|(x_n-\alpha)+i(y_n-\beta)|\leqslant|x_n-\alpha|+|y_n-\beta|$$

(см. (15), § 1).

Из теоремы 1 и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел вытекают следующие свойства последовательностей комплексных чисел: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=b$, то

$$\lim_{n\to\infty}(z_n\pm\zeta_n)=a\pm b, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n\zeta_n)=ab, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{\zeta_n}=\frac{a}{b} \qquad (\zeta_n\neq 0 \text{ при } n=1, 2, \ldots;\ b\neq 0). \tag{5}$$

Точно так же, как и в курсе математического анализа, доказывается

Критерий Коши. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *и* $m > N$ *выполняется неравенство* $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число R, что $|z_n| < R$ для всех номеров n.

Из геометрической интерпретации предела последовательности вытекает, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако, имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что из ограниченности последовательности $\{z_n\}$ вытекает ограниченность последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, затем применить теорему Вейерштрасса для последовательностей действительных чисел и воспользоваться теоремой 1.

Рассмотрим свойства последовательностей комплексных чисел, связанные со свойствами последовательностей модулей и аргументов этих чисел.

1. Из определения предела последовательности и неравенства $||z_n| - |a|| \leqslant |z_n - a|$ (см. (15), § 1) вытекает следующее свойство:

$$\text{если} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|.$$

2. Достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является следующее условие. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\alpha}$.

Это свойство вытекает из формулы $z_n = r_n \cos\varphi_n + ir_n \sin\varphi_n$ и теоремы 1.

2. **Расширенная комплексная плоскость.** Понятие «бесконечность» вводится с помощью следующего определения.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся к бесконечности*,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{6}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{7}$$

Это определение формально совпадает с соответствующим определением для действительных чисел, так как соотношение (7) означает, что для любого $R>0$ существует такой номер N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|z_n|>R. \tag{8}$$

Для бесконечно больших последовательностей комплексных чисел справедливы следующие свойства.

1. Если $z_n\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{z_n}=0$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=a\neq\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+\zeta_n)=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\zeta_n}{z_n}=0$.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=a\neq 0,\ \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\zeta_n)=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{\zeta_n}=\infty$.

Рассмотрим геометрический смысл соотношения (7). Неравенство (8) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке 0 (рис. 9). Это множество называется *окрестностью бесконечности*. Следовательно, точка $z=\infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z=\infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением их конечного числа.

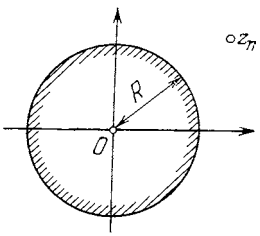


Рис. 9

Таким образом, «числу» $z=\infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью*. Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке 0 (рис. 10). Обозначим через P точку сферы S, диаметрально противоположную точке 0. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P (рис. 10). Ясно, что при этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z=\infty$ поставим в соответствие точку P.

Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однознач-

ным. Оно называется *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

Комплексные числа (включая $z=\infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

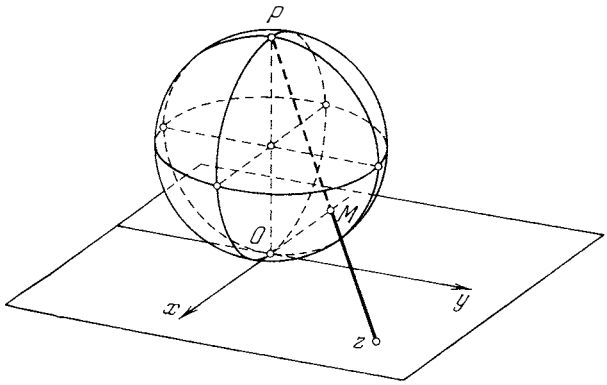


Рис. 10

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана [15].

Замечание. Понятия суммы, произведения и т. п. для комплексного числа z и символа ∞ не определены, т. е. записи $z+\infty$, $z\cdot\infty$, $\infty+\infty$ и т. п. не имеют смысла. Однако употребляются обозначения вида:

$$(-\infty,\ +\infty) \text{ — действительная ось,}$$
$$(-i\infty,\ +i\infty) \text{ — мнимая ось,}$$
$$(\alpha-i\infty,\ \alpha+i\infty) \text{ — прямая } \operatorname{Re} z=\alpha,$$
$$(\beta i-\infty,\ \beta i+\infty) \text{ — прямая } \operatorname{Im} z=\beta \quad \text{и т. п.}$$

Теорема. *Расширенная комплексная плоскость компактна, т. е. из любой последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся (может быть, к бесконечности) подпоследовательность.*

Доказательство. Если последовательность $\{z_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность по теореме Вейерштрасса. Если же последовательность $\{z_n\}$ неограничена, то для любого целого $k>0$ существует номер n_k такой, что $|z_{n_k}|>k$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}=\infty$.

3. Ряды.

Определение. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{9}$$

называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. При этом предел s последовательности $\{s_n\}$ называется *суммой* ряда (9): $s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Ряд (9) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Таким образом, исследование сходимости ряда сводится к исследованию сходимости последовательности его частичных сумм. В частности, из свойств сходящихся последовательностей вытекают следующие свойства:

1. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, где $z_k = x_k + iy_k$. При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} az_k$, где a — комплексное число, также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} az_k = a \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

3. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ сходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \zeta_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \zeta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k.$$

4. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ сходятся и их суммы соответственно равны s и σ, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} z_n \zeta_{k-n+1} \right)$ также сходится и его сумма равна $s\sigma$.

5. Критерий Коши. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ и $m \geqslant n > N$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{m} z_k \right| < \varepsilon.$$

6. Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ необходимо, чтобы $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

7. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ также сходится.

§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости

1. Комплекснозначные функции действительного переменного. Пусть функция $z = \sigma(t)$ определена на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и принимает комплексные значения. Эту комплекснозначную функцию можно представить в виде $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, где $\xi(t) = \operatorname{Re}\sigma(t)$ и $\eta(t) = \operatorname{Im}\sigma(t)$ — действительные функции. Многие свойства действительных функций естественным образом переносятся на комплекснозначные функции.

Предел функции $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ определяется формулой

$$\lim_{t\to t_0} \sigma(t) = \lim_{t\to t_0} \xi(t) + i \lim_{t\to t_0} \eta(t). \tag{1}$$

Таким образом, предел $\lim_{t\to t_0} \sigma(t)$ существует, если существуют пределы $\lim_{t\to t_0} \xi(t)$ и $\lim_{t\to t_0} \eta(t)$.

Это определение эквивалентно следующему: $\lim_{t\to t_0} \sigma(t) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\sigma(t) - a| < \varepsilon$ для всех t таких, что $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$.

Это же определение можно сформулировать с помощью предела последовательности: $\lim_{t\to t_0} \sigma(t) = a$, если $\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n) = a$ для любой последовательности $\{t_n\}$ такой, что $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, $t_n \neq t_0$ при $n = 1, 2, \ldots$

Пределы комплекснозначных функций обладают следующими свойствами: если существуют пределы $\lim_{t\to t_0} \sigma_1(t) = a_1$ и $\lim_{t\to t_0} \sigma_2(t) = a_2$, то существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0} [\sigma_1(t) \pm \sigma_2(t)] = a_1 \pm a_2, \quad \lim_{t\to t_0} [\sigma_1(t)\,\sigma_2(t)] = a_1 a_2,$$

а если $a_2 \neq 0$, то и

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Аналогичны определения и свойства пределов $\lim_{t \to t_0 - 0} \sigma(t)$ и $\lim_{t \to t_0 + 0} \sigma(t)$.

Введем понятие непрерывности комплекснозначной функции. Функция $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ называется *непрерывной* в точке (или на отрезке), если в этой точке (на отрезке) непрерывны функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Это определение эквивалентно следующему: функция $\sigma(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если $\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = \sigma(t_0)$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\sigma(t) - \sigma(t_0)| < \varepsilon$ для всех t таких, что $|t - t_0| < \delta$.

Ясно, что сумма, разность и произведение непрерывных комплекснозначных функций являются непрерывными функциями, а частное двух непрерывных комплекснозначных функций является непрерывной функцией в тех точках, в которых знаменатель не равен нулю. Отметим также, что комплекснозначная функция $\sigma(t)$, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$, ограничена на этом отрезке: $|\sigma(t)| \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Производная функции $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ определяется формулой

$$\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t). \tag{2}$$

Следовательно, производная $\sigma'(t)$ существует, если существуют производные $\xi'(t)$ и $\eta'(t)$.

Это определение эквивалентно определению производной с помощью формулы

$$\sigma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что если существуют производные $\sigma_1'(t)$ и $\sigma_2'(t)$, то существуют производные

$$(\sigma_1 \pm \sigma_2)' = \sigma_1' \pm \sigma_2', \quad (\sigma_1 \sigma_2)' = \sigma_1' \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2',$$

а если $\sigma_2(t) \neq 0$, то и

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)' = \frac{\sigma_1' \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2'}{\sigma_2^2}.$$

Однако не все свойства дифференцируемых действительных функций переносятся на комплекснозначные функции. В частности, для комплекснозначных функций теоремы Ролля и Лагранжа, вообще говоря, неверны.

Пример 1. Функция $\sigma(t)=e^{it}$ дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$, $\sigma'(t)=ie^{it}$, $|\sigma'(t)|=1$ при всех $t\in[0, 2\pi]$. Таким образом, $\sigma'(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[0, 2\pi]$, хотя $\sigma(0)=\sigma(2\pi)=1$. □

Интеграл от функции $\sigma(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ определяется формулой

$$\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \xi(t)\,dt+i\int_\alpha^\beta \eta(t)\,dt. \tag{4}$$

Это определение эквивалентно определению интеграла с помощью предела интегральных сумм:

$$\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sigma(\tau_k)\,\Delta t_k, \tag{5}$$

где $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $t_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant t_k$, $\Delta=\max\limits_{(k)}\Delta t_k$.

Очевидно, комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке. Имеют место формулы:

1. $\int_\alpha^\beta a\sigma(t)\,dt=a\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt$, $\quad a=\text{const}$.

2. $\int_\alpha^\beta [\sigma_1(t)\pm\sigma_2(t)]\,dt=\int_\alpha^\beta \sigma_1(t)\,dt\pm\int_\alpha^\beta \sigma_2(t)\,dt$.

3. $\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt=-\int_\beta^\alpha \sigma(t)\,dt$.

4. $\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt=\int_\alpha^\delta \sigma(t)\,dt+\int_\delta^\beta \sigma(t)\,dt$.

Имеет место *формула Ньютона — Лейбница*

5. $\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$, где функция $\Phi(t)$ — первообразная функции $\sigma(t)$, т. е. $\Phi'(t)=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

6. Если комплекснозначная функция $\sigma(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то функция $|\sigma(t)|$ также интегрируема на этом отрезке и имеет место неравенство

$$\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,dt\right|\leqslant\int_\alpha^\beta |\sigma(t)|\,dt. \tag{6}$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|\sigma(t)|$ следует из свойств интегрируемых действительных функций. Докажем неравенство (6). Используя неравенство (16) § 1, имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sigma(\tau_k)\,\Delta t_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\sigma(\tau_k)|\,\Delta t_k.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta \to 0$, где $\Delta = \max\limits_{(k)} \Delta t_k$, получаем формулу (6).

Следствие. Из формулы (6) вытекает неравенство

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(t)\,dt\right| \leqslant (\beta-\alpha)\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\sigma(t)|, \qquad \beta>\alpha. \tag{7}$$

Заметим, что для комплекснозначных функций теорема о среднем неверна.

Пример 2. $\int\limits_0^{2\pi} e^{it}dt = 0$, а функция e^{it} не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[0, 2\pi]$. □

Замечание. Комплекснозначную функцию $\sigma(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ можно рассматривать как вектор-функцию $(\xi(t), \eta(t))$. Рассмотренные выше определения предела, непрерывности и производной для функции $\sigma(t)$ являются обычными определениями соответствующих понятий для вектор-функции, сформулированными в терминах комплексных чисел.

Комплекснозначная функция $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на некоторое множество точек комплексной плоскости, которое можно рассматривать как «график» этой функции. В частности, если функция $z=\sigma(t)$ непрерывна, то ее «графиком» является некоторая кривая на комплексной плоскости.

2. Кривые. Пусть на конечном отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z=\sigma(t)$. Тогда говорят, что задана *непрерывная кривая* *)

$$z=\sigma(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{8}$$

а уравнение (8) называется *параметрическим уравнением* этой *кривой*. При этом, если $z_1=\sigma(t_1)$ и $z_2=\sigma(t_2)$, где $\alpha\leqslant t_1<t_2\leqslant\beta$, то говорят, что точка z_2 кривой (8) следует за точкой z_1 (или: точка z_1 предшествует точке z_2). Таким образом, *кривая* (8) *является упорядоченным множеством точек комплексной плоскости.* Другими словами, кривая (8) всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t. *Направление* движения точки z вдоль кривой (8), соответствующее возраста-

*) В дальнейшем для краткости слово «непрерывная» опускается.

нию параметра t, называется *положительным*. Точка $a=\sigma(\alpha)$ называется *началом* (или начальной точкой) *кривой* (8), а точка $b=\sigma(\beta)$ — ее *концом* (или конечной точкой).

Пусть кривая γ задана уравнением (8). Тогда на комплексной плоскости точки $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, образуют некоторое множество $M(\gamma)$. Это множество отличается от самой кривой, во-первых, тем, что кривая является упорядоченным множеством точек.

Рис. 11

Пример 3. Кривая $z=\cos t$, $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, является отрезком $[-1, 1]$, ориентированным в направлении от точки $z=-1$ к точке $z=1$ (рис. 11). □

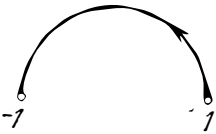


Рис. 12

Пример 4. Кривая $z=e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, является полуокружностью $|z|=1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, ориентированной против часовой стрелки (рис. 12). □

Второе отличие кривой γ от множества $M(\gamma)$ состоит в том, что различным точкам кривой может отвечать одна и та же точка плоскости: если $\sigma(t_1)=\sigma(t_2)$ при $t_1\neq t_2$, то точки $z_1=\sigma(t_1)$ и $z_2=\sigma(t_2)$ являются различными на кривой γ, но как точки плоскости они совпадают. Такие точки называются *точками самопересечения кривой* (8). Исключением является совпадение начала и конца кривой: если $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, то эта точка не считается самопересечением кривой (8).

Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой кривой*. Кривая, у которой начало и конец совпадают, называется *замкнутой кривой*.

Кривые в примерах 3 и 4 являются простыми незамкнутыми (рис. 11 и 12).

Пример 5. Кривая $z=e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, является окружностью $|z|=1$, ориентированной против часовой стрелки, с началом и концом в точке $z=1$. Это пример простой замкнутой кривой (рис. 13). □

Пример 6. Кривая $z=\sigma(t)$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 2\pi$, где

$$\sigma(t)=\begin{cases} e^{it}, & -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi,\\ \frac{3t}{\pi}-4, & \pi\leqslant t\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

является незамкнутой с самопересечением в точке $z=1$ (рис. 14). При этом точки $z_1=\sigma(0)$ и $z_2=\sigma(5\pi/3)$ являются различными на данной кривой, хотя как точки плоскости они совпадают: $z_1=z_2=1$. □

Пример 7. Кривая $z=\cos t$, $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$, является отрезком $[-1, 1]$, проходимым дважды: сначала от точки $z=-1$ к

точке $z=1$ и затем от точки $z=1$ к точке $z=-1$ (рис. 15). Это пример замкнутой кривой, у которой каждая точка интервала $(-1, 1)$ является точкой самопересечения. □

Замечание. Две кривые $z=\sigma_1(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$ и $z=\sigma_2(\tau)$, $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$ считаются совпадающими, если существует действительная функция $t=s(\tau)$, непрерывная и монотонно возрастающая на отрезке $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, такая, что $s(\alpha_2)=\alpha_1$, $s(\beta_2)=\beta_1$ и $\sigma_1(s(\tau)) \equiv \sigma_2(\tau)$ при $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$.

Совпадающим кривым, очевидно, отвечает одно и то же множество точек плоскости.

Ясно, что уравнение любой кривой $z=\sigma_1(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, можно записать в виде $z=\sigma_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, например, с помощью

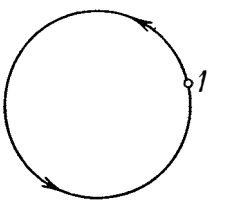


Рис. 13

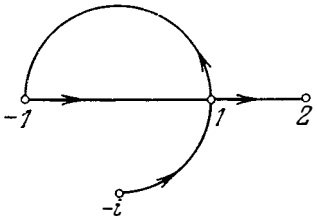


Рис. 14

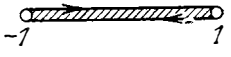


Рис. 15

замены $t=\alpha+(\beta-\alpha)\tau$; $\sigma_1(t)=\sigma_1(\alpha+(\beta-\alpha)\tau)=\sigma_2(\tau)$. Таким образом, не теряя общности, уравнение кривой можно записывать с помощью комплекснозначной функции, определенной на отрезке $[0, 1]$.

Пример 8. Уравнение кривой, рассмотренной в примере 3, можно записать в виде $z=t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, или в виде $z=2t-1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. □

Рассмотрим кривую γ, заданную уравнением $z=\sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Обозначим через γ^{-1} кривую, полученную из кривой γ изменением ориентации на противоположную. Тогда уравнение кривой γ^{-1} можно записать в виде $z=\sigma(-t)$, $-\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$. Часть кривой γ, проходимая от точки $z_1=\sigma(t_1)$ до точки $z_2=\sigma(t_2)$, где t_1 и t_2 принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, называется *дугой кривой* γ.

Пусть $\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta$ и γ_k — дуга кривой γ, проходимая от точки $z_{k-1}=\sigma(t_{k-1})$ до точки $z_k=\sigma(t_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда будем говорить, что *кривая* γ *разбита на дуги* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *или кривая* γ *состоит из дуг* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Этот факт будем обозначать так: $\gamma=\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$. Ломаная с последовательными вершинами в точках $z_k=\sigma(t_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$, называется *ломаной, вписанной в кривую* γ (рис. 16).

Рассмотрим совокупность всех ломаных, вписанных в кривую γ. Если множество длин этих ломаных ограничено, то *кривая* γ называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань этого множества называется *длиной кривой* γ.

Кривая называется *гладкой*, если ее уравнение можно записать в виде $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где функция $\sigma(t)$ имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывную и отличную от нуля производную $\sigma'(t)\neq 0$, причем, если кривая замкнута, то должно выполняться равенство $\sigma'(\alpha)=\sigma'(\beta)$.

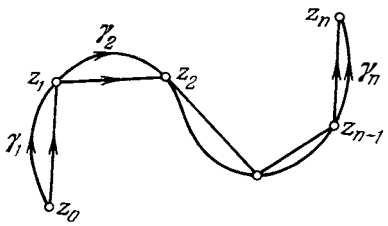


Рис. 16

Кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых. Простейшим примером кусочно гладкой кривой является ломаная.

Уравнение кусочно гладкой кривой можно записать в виде $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где функция $\sigma(t)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и на этом отрезке $\sigma'(t)\neq 0$. Всюду в дальнейшем уравнение кусочно гладкой кривой будем записывать только с помощью таких функций.

Геометрический смысл производной комплекснозначной функции состоит в следующем: если кривая γ задана уравнением $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, и в некоторой точке $t_0\in[\alpha, \beta]$ существует $\sigma'(t)\neq 0$, то кривая γ в точке $z_0=\sigma(t_0)$ имеет касательный вектор $\sigma'(t_0)$ (см. замечание на с. 27). Следовательно, кусочно гладкая кривая во всех точках имеет касательную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых существует предельное положение касательной слева и справа. Эти исключительные точки называются *угловыми точками кривой*.

Из курса математического анализа известно, что кусочно гладкая кривая γ: $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, спрямляема и ее длина $l(\gamma)$ выражается формулой

$$l(\gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}|\sigma'(t)|\,dt,$$

так как $|\sigma'(t)|\,dt=dl$ — элемент длины кривой γ.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только кусочно гладкие кривые.

Введем понятие неограниченной кривой. Пусть на луче $t\geqslant\alpha$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z=\sigma(t)$ и $\sigma(+\infty)=\infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=\infty$. Тогда говорят, что задана *неограниченная кривая*

$$z=\sigma(t),\quad \alpha\leqslant t<\infty, \tag{9}$$

а уравнение (9) называется *параметрическим уравнением* этой *кривой*. Неограниченная кривая (9) называется *кусочно глад-*

кой, если для каждого конечного $\beta > \alpha$ кривая $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ является кусочно **гладкой.**

Аналогично определяются неограниченные кривые в случае, когда параметр t пробегает полуось $-\infty < t \leqslant \alpha$ или всю числовую ось.

Уравнение неограниченной кривой (9) можно записать в виде $z = \sigma_1(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau < \beta_1$, где $\sigma_1(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \beta_1$, β_1 — конечное число. Для определенности уравнение такой кривой будем записывать только в виде (9).

3. Области. Множество D точек расширенной комплексной плоскости называется *областью*, если это множество

открытое, т. е. для каждой точки, принадлежащей D, существует окрестность этой точки, принадлежащая D;

связное, т. е. любые две точки, принадлежащие D, можно соединить кривой, быть может, неограниченной, все точки которой принадлежат D.

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D. Множество граничных точек области называется

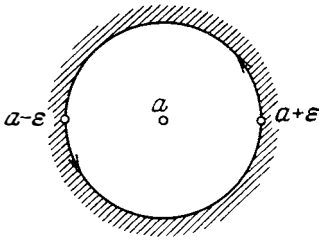


Рис. 17

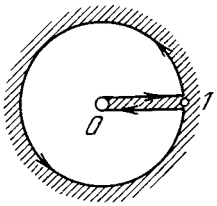


Рис. 18

границей этой области. Область D, дополненная всеми своими граничными точками, называется *замыканием области* D и обозначается $\overline{D}$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие области, границы которых состоят из конечного числа кусочно гладких кривых и изолированных точек.

Кроме того, будем считать, что все граничные кривые области D ориентированы так, что *при движении точки вдоль граничной кривой в направлении этой ориентации область* D *остается слева.* Поясним это на примерах.

Пример 9. Границей области $0 < |z-a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, является точка $z = a$ и окружность $|z-a| = \varepsilon$, ориентированная против часовой стрелки и проходимая один раз (рис. 17). Эту область будем называть так: «*круг* $|z-a| < \varepsilon$ *с выколотой точкой* a» или «*проколотая окрестность точки* a». □

Пример 10. Область $|z| < 1$, $0 < \arg z < 2\pi$ будем изображать, как указано на рис. 18, и называть так: «круг $|z| < 1$ с

разрезом по отрезку [0, 1]». Граничная кривая Γ этой области состоит из следующих частей: отрезок [0, 1], проходимый от точки $z=1$ до точки $z=0$ — нижний берег разреза; отрезок [0, 1], проходимый от точки $z=0$ до точки $z=1$ — верхний берег разреза; окружность $|z|=1$, проходимая против часовой стрелки один раз. Отметим, что каждой точке полуинтервала (0, 1] соответствуют две различные точки граничной кривой Γ. □

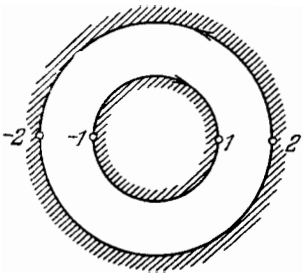


Рис. 19

Пример 11. Граница Γ области $1<|z|<2$ **состоит из двух кривых:** $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 — **окружность** $|z|=2$, **ориентированная против часовой стрелки,** Γ_2 — **окружность** $|z|=1$, **ориентированная по часовой стрелке (рис. 19).** □

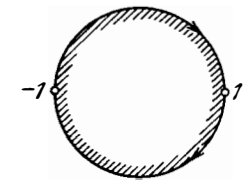
Область D называется *ограниченной*, если существует такой круг K: $|z|<R$, что $D\subset K$. Примерами ограниченных областей являются области на рис. 17—19.

Пример 12. Следующие области являются неограниченными (рис. 20):

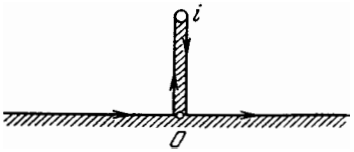
а) $|z|>1$;

б) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по отрезку $[0, i]$;

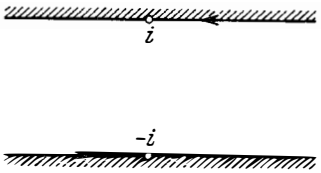
в) полоса $|\operatorname{Im} z|<1$;



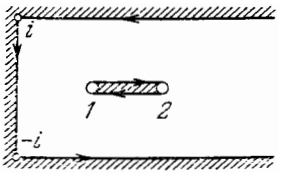
а



б



в



г

Рис. 20

г) полуполоса $|\operatorname{Im} z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ с разрезом по отрезку $[1, 2]$. □

Область D на комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в D, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D. Непрерывную деформацию кривой достаточно понимать наглядно геометрически (рис. 21), но можно дать и строгое аналитическое определение (см. п. 4 § 3).

Примерами односвязных областей являются области на рис. 18 и 20, *б*, *в*; неодносвязными являются области на рис. 17, 19, 20, *г*.

Определение односвязной области на расширенной комплексной плоскости такое же, как и на нерасширенной комплексной плоскости, только непрерывную деформацию кривой в точку $z = \infty$ нужно рассматривать на сфере Римана.

Пример 13. Следующие области расширенной комплексной плоскости являются односвязными:

а) $|z| > 1$ (рис. 20, *а*);

б) вся расширенная комплексная плоскость;

в) $z \neq a$ — вся расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой a. □

Пример 14. Следующие области являются неодносвязными:

а) $z \neq 1$, i — вся расширенная комплексная плоскость с выколотыми точками 1 и i;

б) вся расширенная комплексная плоскость с разрезами по отрезкам $[0, 1]$ и $[i, 2i]$;

в) $1 < |z| < \infty$. □

Для областей с кусочно гладкими границами имеет место следующее свойство: граница односвязной области на расширенной комплексной плоскости состоит только из одной замкнутой кривой, может быть неограниченной, или только из одной точки, или не имеет ни одной точки — вся расширенная комплексная плоскость.

Имеет место

Теорема Жордана. *Простая замкнутая непрерывная кривая разбивает расширенную комплексную плоскость на две односвязные области.*

Для ограниченной простой замкнутой кривой эти области будем называть так: *внутренность кривой* — та из двух областей, которая не содержит бесконечно удаленную точку, и *внешность кривой* — вторая область. Будем говорить, что простая замкнутая кривая γ *ориентирована положительно*, если при движении точки вдоль γ в направлении этой ориентации внутренность γ остается слева.

Ясно, что область D на комплексной плоскости является односвязной тогда и только тогда, когда внутренность любой про-

стой замкнутой кривой, лежащей в D, целиком принадлежит области D. Образно односвязную область можно представлять как лист бумаги произвольной формы, может быть, с разрезами по краям, но без «дырок» внутри.

4. Гомотопные кривые. Непрерывную деформацию кривой можно представить наглядно геометрически (рис. 21, 22). Строгое аналитическое понятие этого определения вводится следующим образом.

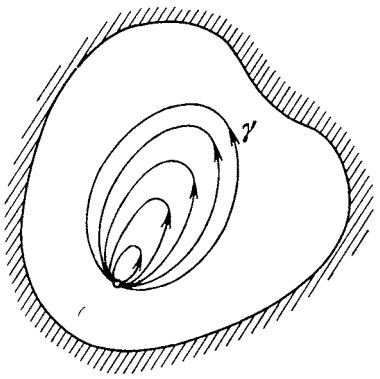


Рис. 21

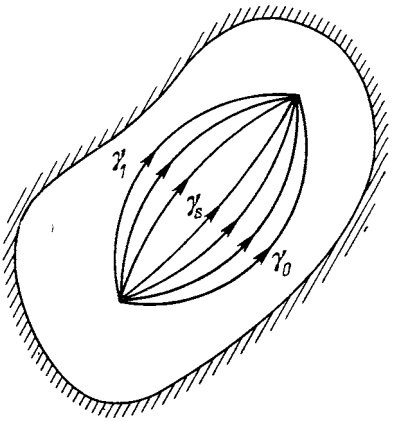


Рис. 22

Пусть кривые γ_0: $z = \sigma_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и γ_1: $z = \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в области D и имеют общее начало в точке $a = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ и общий конец в точке $b = \sigma_0(1) = \sigma_1(1)$.

Будем говорить, что кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, оставаясь в области D, если существует функция $\sigma(t, s)$, непрерывная в квадрате $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ кривая γ_s: $z = \sigma(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежит в области D;

2) $\sigma(t, 0) \equiv \sigma_0(t)$, $\sigma(t, 1) \equiv \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

3) $\sigma(0, s) \equiv a$, $\sigma(1, s) \equiv b$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

В частности, если кривая γ_0 замкнутая ($a = b$) и $\sigma(t, 1) \equiv a$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то будем говорить, что кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D.

Кривые γ_0 и γ_1 называются *гомотопными в области* D (обозначение: $\gamma_0 \approx \gamma_1$ в D), если кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, оставаясь в области D (рис. 22). Замкнутая кривая γ называется *гомотопной нулю в области* D (обозначение: $\gamma \approx 0$ в D), если эту кривую можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D (рис. 21).

Имеют место следующие свойства:

1. В односвязной области любые две кривые с общим началом и общим концом гомотопны между собой, а любая замкнутая кривая гомотопна нулю.

2. Пусть кривые $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ и $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ лежат в области D. Тогда, если $\gamma_1 \approx \tilde{\gamma}_1$ в D и $\gamma_2 \approx \tilde{\gamma}_2$ в D, то $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ в D.

3. Кривая $\gamma\gamma^{-1}$ гомотопна нулю в любой области, содержащей кривую γ.

§ 4. Непрерывные функции комплексного переменного

Пусть на множестве E комплексной плоскости z определена комплекснозначная функция $w=f(z)$, т. е. каждой точке $z=x+iy\in E$ поставлено в соответствие комплексное число $w=u+iv$. Эту функцию можно представить в виде $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, где $u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$. Таким образом, комплекснозначную функцию комплексного переменного можно рассматривать как пару действительных функций двух действительных переменных.

1. Предел функции. Пусть точка a является *предельной* точкой множества E, т. е. любая окрестность точки a содержит бесконечное число точек множества E. Число A называется *пределом функции* $f(z)$ *при* $z\to a$ *по множеству* E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $z\in E$, удовлетворяющих условию $0<|z-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{z\to a,\, z\in E} f(z)=A$$

или $f(z)\to A$ при $z\to a$, $z\in E$.

Данное определение предела функции эквивалентно следующему: $\lim\limits_{z\to a,\, z\in E} f(z)=A$, если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n\in E$, $z_n\neq a$ $(n=1, 2, \ldots)$, сходящейся к a, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к A, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

В дальнейшем для краткости вместо $\lim\limits_{z\to a,\, z\in E} f(z)$ часто будем писать $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Из теоремы 1 § 2 вытекает, что существование предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, где $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, $a=\alpha+i\beta$, равносильно существованию двух пределов $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} u(x, y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} v(x, y)$, причем

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} u(x, y)+i\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} v(x, y).$$

Пределы функций комплексного переменного обладают такими же свойствами, как и пределы функций действительного переменного: если существуют пределы $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$ и $\lim\limits_{z\to a} g(z)=B$, то $\lim\limits_{z\to a}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$, $\lim\limits_{z\to a}[f(z)\,g(z)]=AB$, $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

В дальнейшем будут использоваться символы $\sim$, o, O. Значение этих символов разъясняется в приводимой ниже таблице,

где функции $f(z)$ и $g(z)$ определены на множестве E, a — предельная точка множества E.

Формула $f(z)=o(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$ означает, что функция $f(z)$ есть бесконечно малая по сравнению с функцией $g(z)$ при $z\to a$, $z\in E$. В частности, запись $f(z)=o(1)$ $(z\to a,\ z\in E)$ означает, что $f(z)$ — бесконечно малая при $z\to a$, $z\in E$.

Аналогично, формула $f(z)=O(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$ означает, что функция $f(z)$ ограничена по сравнению с функцией $g(z)$

Формула	Разъяснение
$f(z)\sim g(z)$ $(z\to a,\ z\in E)$	$\lim\limits_{z\to a,\ z\in E} \dfrac{f(z)}{g(z)}=1$
$f(z)=o(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$	$\lim\limits_{z\to a,\ z\in E} \dfrac{f(z)}{g(z)}=0$
$f(z)=O(g(z))$ $(z\in E)$	Отношение $f(z)/g(z)$ ограничено на множестве E: $\lvert f(z)/g(z)\rvert\leqslant M$, $z\in E$
$f(z)=O(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$	Отношение $f(z)/g(z)$ ограничено в пересечении некоторой окрестной точки a с множеством E

при $z\to a$, $z\in E$. В частности, запись $f(z)=O(1)$ $(z\to a,\ z\in E)$ означает, что функция $f(z)$ ограничена при $z\to a$, $z\in E$.

Формулы вида $f(z)\sim g(z)$ $(z\to a,\ z\in E)$ называются *асимптотическими формулами*, а формулы вида $f(z)=o(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$, $f(z)=O(g(z))$ $(z\to a,\ z\in E)$ называются *асимптотическими оценками*.

Ясно, что свойства символов $\sim$, o, O для функций комплексного переменного такие же, как и для функций действительного переменного. Часто вместо записи $(z\to a,\ z\in E)$ будем писать коротко $(z\to a)$.

Пример 1. Пусть m и n — целые числа, причем $m>n$. Тогда $z^m=o(z^n)$ $(z\to 0)$; $z^n=o(z^m)$ $(z\to\infty)$; $z^n=O(z^m)$ $(z\in E,\ E\colon |z|\geqslant 1)$. □

Пример 2. Пусть $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m$, причем $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Тогда $P_n(z)\sim a_0z^n$ $(z\to\infty)$, $Q_m(z)\sim b_0z^m$ $(z\to\infty)$. При этом, если $m>n$, то $P_n(z)/Q_m(z)=o(1)$ $(z\to\infty)$, а если $m=n$, то $P_n(z)/Q_m(z)\sim a_0/b_0$ $(z\to\infty)$. □

2. Непрерывность функции на множестве. Пусть функция $f(z)$ определена на множестве E и точка a принадлежит множеству E. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z \in E$, удовлетворяющих условию $|z-a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon.$$

Если точка a является предельной точкой множества E, то непрерывность функции $f(z)$ в точке a означает, что

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Это определение эквивалентно следующему: функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется непрерывной в точке $a = \alpha + i\beta$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (α, β).

Функция $f(z)$ называется *непрерывной на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Ясно, что сумма, разность и произведение непрерывных функций комплексного переменного являются непрерывными функциями, а частное двух непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ является непрерывной функцией в тех точках, в которых знаменатель $g(z)$ не равен нулю.

Имеет место также непрерывность суперпозиции непрерывных функций: если функция $f(z)$ непрерывна в точке a и функция $F(\zeta)$ непрерывна в точке $\zeta = f(a)$, то функция $F(f(z))$ непрерывна в точке a.

Пример 3. Функции z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$ непрерывны во всей комплексной плоскости. □

Пример 4. Многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ с комплексными коэффициентами является непрерывной функцией во всей комплексной плоскости. □

Пример 5. Рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены, непрерывна во всех точках комплексной плоскости, в которых $Q(z) \neq 0$. □

Введем определение: функция $f(z)$, определенная на множестве E, называется *равномерно непрерывной на множестве* E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(z_1)-f(z_2)| < \varepsilon$$

для любых $z_1 \in E$, $z_2 \in E$, удовлетворяющих неравенству $|z_1 - z_2| < \delta$.

Так как равномерная непрерывность на множестве E функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равносильна равномерной непрерывности на множестве E двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то из курса математического анализа следует, что функция $f(z)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве E, равномер-

но непрерывна на этом множестве. (Напомним, что множество E называется замкнутым, если все предельные точки множества E принадлежат этому множеству.)

В дальнейшем часто будут рассматриваться функции, непрерывные в области и непрерывные в замыкании области. Имеют место следующие утверждения:

1. Непрерывная в области D функция равномерно непрерывна в любой ограниченной области D_1, такой, что $\overline{D}_1 \subset D$.

2. Если функция $f(z)$ равномерно непрерывна в ограниченной области D, то ее можно доопределить в граничных точках области D так, что получится функция, непрерывная в $\overline{D}$.

3. Последовательности и ряды. Последовательность $\{f_n(z)\}$ называется *равномерно сходящейся на множестве E к функции* $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что неравенство

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $n > N$ и всех $z \in E$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ называется *равномерно сходящимся на множестве E*, если последовательность его частичных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(z)$ сходится равномерно на множестве E.

Справедливы следующие утверждения:

1. Критерий Коши (для последовательностей). *Для того чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, чтобы для всех $n > N$, $m > N$ и всех $z \in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

2. Критерий Коши (для рядов). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, чтобы для всех $n > N$, $m \geqslant n > N$ и всех $z \in E$ выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} g_k(z) \right| < \varepsilon.$$

3. Признак Вейерштрасса. *Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ удовлетворяют оценке $|g_k(z)| \leqslant c_k$ для всех $z \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ ..., а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ сходится равномерно на множестве E.*

4. *Пусть* $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, *где* $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$,— *непрерывные функции на множестве* E. *Если последовательность* $\{f_n(z)\}$ *сходится равномерно на множестве* E, *то функция* $f(z)$ *также непрерывна на множестве* E.

5. *Пусть* $g_k(z)$, $k=1, 2, \ldots$,— *непрерывные функции на множестве* E. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *сходится равномерно на множестве* E, *то его сумма* $S(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *также непрерывна на множестве* E.

4. Непрерывность функции на кривой. Пусть дана кривая γ: $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, и пусть на отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ задана комплекснозначная функция $w=\psi(t)$. Эту функцию можно рассматривать как функцию на кривой γ: каждой точке $z_t=\sigma(t)$ кривой γ поставлено в соответствие комплексное число $w=\psi(t)$. Таким образом, функция определена на кривой γ, если задана пара функций:

$$z=\sigma(t),\ w=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1}$$

Если γ — простая незамкнутая кривая, то соотношения (1) определяют функцию $w=f(z)$, однозначную на множестве M точек плоскости $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, так что $w=f(\sigma(t))\equiv\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

В общем случае соотношения (1) также определяют функцию $w=f(z)$, но, быть может, неоднозначную как функцию точки плоскости: если кривая γ имеет самопересечение $\sigma(t_1)=\sigma(t_2)$, $t_1\neq t_2$, то в точке $z=\sigma(t_1)=\sigma(t_2)$ функция $f(z)$ может иметь два различных значения. Однако и в этом случае вместо записи (1) для краткости будем писать $w=f(z)=f(\sigma(t))$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Введем определение: функция $w=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, называется непрерывной на кривой γ: $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, если функция $w=\psi(t)$ непрерывна на отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, причем, если кривая γ замкнутая, должно выполняться равенство $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$.

Имеют место следующие утверждения:

1. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D, то она непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D.

2. Если функция $f(z)$ определена в области D и непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D, то функция $f(z)$ непрерывна в области D.

5. Непрерывность функции в области вплоть до границы. Пусть a и b — внутренние или граничные точки области D. *Расстоянием между точками* a *и* b *по области* D называется величина

$$\rho_D(a, b)=\inf_{\gamma} l(\gamma),$$

где $l(\gamma)$ — длина кривой γ, а нижняя грань берется по всем кривым γ, соединяющим точки a, b и лежащим в области D.

Ясно, что $\rho_D(a, b) \geqslant |a-b|$ и $\rho_D(a, b) = |a-b|$, если отрезок $[a, b]$ принадлежит области D.

Замечание. Существенно, что если a и b — различные точки граничной кривой области D, то $\rho_D(a, b) > 0$ даже в том случае, когда a и b совпадают как точки плоскости.

Пример 6. Пусть D — круг $|z| < 2$ с разрезом по отрезку $[0, 2]$ (рис. 23). Тогда $\rho_D(-i, i) = 2$, $\rho_D(1-i, 1+i) = 2\sqrt{2}$. Если $a = 1$ — точка верхнего берега разреза, а $b = 1$ — точка нижнего берега разреза (рис. 23), то $\rho_D(a, b) = 2$, $\rho_D(a, 0) = 1$, $\rho_D(a, 1-i) = 1+\sqrt{2}$. □

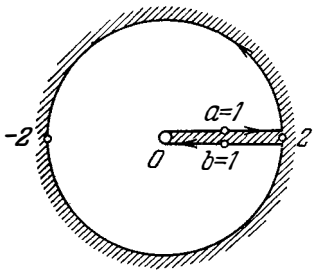


Рис. 23

Рассмотрим ограниченную область D, граница которой Γ состоит из конечного числа замкнутых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Пусть функция $f(z)$ определена в области D и на каждой граничной кривой Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Введем

Определение. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области D вплоть до ее границы* Γ, если для каждой точки a, принадлежащей области D или границе Γ, имеет место равенство

$$\lim_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z) = f(a).$$

Заметим, что если граничная точка a не является точкой самопересечения граничной кривой, или если a — внутренняя точка области D, то

$$\lim_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z) = \lim_{z\to a,\, z\in D} f(z).$$

Пример 7. В обозначениях примера 6 имеем:

$$\lim_{\rho_D(z,2i)\to 0} f(z) = \lim_{z\to 2i,\, z\in D} f(z),$$

$$\lim_{\rho_D(z,0)\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0,\, z\in D} f(z). \quad \square$$

Таким образом, если граница Γ области D состоит из простых замкнутых кривых, то непрерывность функции в области D вплоть до границы Γ равносильна непрерывности этой функции в $\overline{D}$. Но если граничная кривая области D не является простой кривой, то из непрерывности функции в области D вплоть до границы, вообще говоря, не следует непрерывность этой функции в $\overline{D}$.

Пример 8. В области D примера 6 (рис. 23) рассмотрим функцию $f(z)=\sqrt{z}=r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, где $z=re^{i\varphi}$, $0<\varphi<2\pi$, доопределенную в каждой граничной точке a этой области по формуле $f(a)=\lim\limits_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z)$. Эта функция $f(z)$ является непрерывной в области D вплоть до границы. В частности, если точка $z=x>0$ принадлежит верхнему берегу разреза, то

$$\lim_{\rho_D(z,x)\to 0} f(z)=\lim_{z\to x,\,\mathrm{Im}\,z>0} f(z)=f(x+i0)=\sqrt{x}.$$

Аналогично, для точки $z=x>0$, принадлежащей нижнему берегу разреза, имеем $f(x-i0)=-\sqrt{x}$. Следовательно, функция $f(z)$ не является непрерывной в $\overline{D}$ — эту функцию нельзя «склеить» вдоль разреза так, чтобы она осталась непрерывной. □

6. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции.

Показательная функция. Функция e^z для комплексных $z=x+iy$ определяется формулой

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\,e^z=e^x\cos y,\quad \mathrm{Im}\,e^z=e^x\sin y.$$

Из этого определения вытекают следующие свойства функции e^z:

1. Для любых комплексных z_1 и z_2 имеет место равенство

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}.$$

2. Функция e^z периодична с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i}=e^z.$$

3. Функция e^z непрерывна во всей комплексной плоскости.

4. Для любого комплексного $z=x+iy$ имеют место равенства

$$|e^z|=e^x,\quad \arg e^z=y.$$

5. Функция e^z принимает все значения, кроме нуля, т. е. уравнение $e^z=A$ разрешимо для любого комплексного числа $A\neq 0$. Если $\alpha=\arg A$, то все решения уравнения $e^z=A$ даются формулой

$$z=\ln|A|+i(\alpha+2k\pi),\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \qquad (2)$$

В частности, если $e^z=1$, то $z=2k\pi i$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Замечание. Если $e^z=A$, то комплексное число z называется логарифмом комплексного числа $A\neq 0$ и обозначается $\ln A$.

Из формулы (2) следует, что

$$\ln A = \ln |A| + i \arg A.$$

В частности, $\ln 1 = 2k\pi i$, $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$, $\ln i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ (k — целое число).

Тригонометрические функции. Функции $\sin z$ и $\cos z$ для комплексных значений z определяются формулами

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \tag{3}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства функций $\sin z$ и $\cos z$:

1. Функции $\sin z$ и $\cos z$ непрерывны во всей комплексной плоскости.

2. Функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все значения, т. е. уравнения $\sin z = A$ и $\cos z = A$ имеют решения для любого комплексного числа A.

3. Все формулы элементарной тригонометрии, справедливые при всех действительных значениях x, остаются справедливыми и при всех комплексных значениях z. Например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \text{ *)}, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

В частности,

а) $$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$

т. е. функции $\sin z$ и $\cos z$ являются периодическими с периодом 2π;

б) $$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

т. е. $\sin z$ — нечетная функция, а $\cos z$ — четная функция.

4. Для любого $z = x + iy$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \leqslant |\cos z| \leqslant \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}). \tag{5}$$

Докажем неравенства (4). Из формулы (3) с помощью неравенства треугольника (см. (15), § 1) получаем

$$\frac{1}{2}\big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}(|e^{iz}| + |e^{-iz}|).$$

*) Эта формула будет доказана в § 15 (пример 2) другим способом.

Отсюда, учитывая, что

$$|e^{iz}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y}|e^{ix}| = e^{-y}, \quad |e^{-iz}| = e^{y},$$

получаем (4). Аналогично доказываются неравенства (5).

Из (4) и (5) следует, что при $y \to \infty$ имеют место асимптотические формулы (равномерно относительно x, где $z = x + iy$):

$$|\sin z| \sim \frac{1}{2} e^{|y|}, \quad |\cos z| \sim \frac{1}{2} e^{|y|}.$$

Следовательно, функции $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными на всей комплексной плоскости (это вытекает также из свойства 2).

5. Имеют место формулы

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$
$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Из этих формул (или из (4) и (5)) вытекает, в частности, что уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ имеют решения только при $y = 0$, т. е. только на действительной оси. Следовательно, все решения уравнения $\sin z = 0$ даются формулой $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а все решения уравнения $\cos z = 0$ находятся по формуле $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Из свойств 1 и 5 следует, что функция $\operatorname{tg} z$ непрерывна при $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, а функция $\operatorname{ctg} z$ непрерывна при $z \neq k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Гиперболические функции. Функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}). \tag{6}$$

Из (3) и (6) видно, что $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$, $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$. Таким образом, свойства функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ непосредственно вытекают из свойств функций $\sin z$ и $\cos z$. Отметим, в частности, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ непрерывны во всей комплексной плоскости; все решения уравнения $\operatorname{sh} z = 0$ находятся по формуле $z = k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а все решения уравнения $\operatorname{ch} z = 0$ находятся по формуле $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются формулами

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функция $\operatorname{th} z$ непрерывна при $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, а функция $\operatorname{cth} z$ непрерывна при $z \neq k\pi i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отметим, что формулы для тригонометрических и гиперболических функций, справедливые при действительных x, остаются в силе и для комплексных z.

§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

1. Определение интеграла. Пусть на кривой γ определена комплекснозначная функция $f(z)$. Рассмотрим разбиение кривой γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$, взятыми в порядке следования по кривой γ, где z_0 — начало, а z_n — конец кривой γ (рис. 24). Обозначим через l_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ длину дуги γ_k (z_{k-1} — начало, а z_k — конец дуги γ_k) и пусть $l = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} l_k$. На каждой дуге γ_k выберем точку $\zeta_k \in \gamma_k$ и составим интегральную сумму

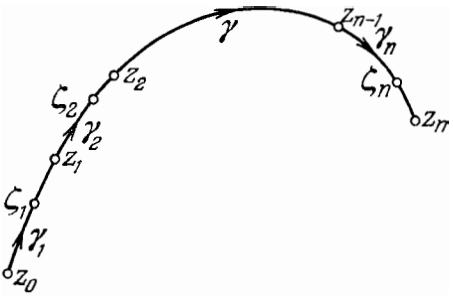


Рис. 24

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \qquad (1)$$

Если при $l \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм (1), не зависящий от выбора точек z_k, ζ_k, то этот предел называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ*:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \lim_{l \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \qquad (2)$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Введем обозначения $z_k = x_k + iy_k$, $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k),$$

где $u_k = u(\xi_k, \eta_k)$, $v_k = v(\xi_k, \eta_k)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $l \to 0$, получаем

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma} u\, dx - v\, dy + i \int_{\gamma} v\, dx + u\, dy. \qquad (3)$$

Следовательно, существование интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz$ равносильно существованию следующих двух криволинейных интегралов

от действительных функций:

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy \text{ и } \int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Если кривая γ задана уравнением $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то в формуле (3) $dx = \xi'(t)\,dt$, $dy = \eta'(t)\,dt$ и, следовательно,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta (u\xi' - v\eta')\,dt + i\int_\alpha^\beta (v\xi' + u\eta')\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (u + iv)(\xi' + i\eta')\,dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt. \quad (4)$$

Пример 1. Пусть $f(z) \equiv 1$, a и b — соответственно начало и конец кривой γ. Тогда интегральная сумма (1) равна

$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} =$$

$$= z_n - z_0 = b - a,$$

откуда $\int_\gamma dz = b - a$. Таким образом, $\int_\gamma dz$ зависит только от начальной и конечной точек кривой γ и *не зависит от пути интегрирования*. В этом случае вместо $\int_\gamma dz$ можно писать $\int_a^b dz$.

В частности, если $a = b$, то $\int_\gamma dz = 0$, т. е. интеграл $\int_\gamma dz$ по любой замкнутой кривой равен нулю. □

2. Свойства интегралов. Из формулы (3) следует, что непрерывная на кривой функция интегрируема на этой кривой. Из свойств криволинейных интегралов вытекает также, что имеют место следующие формулы:

1. $$\int_\gamma [af(z) + bg(z)]\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma g(z)\,dz, \quad (5)$$

где a и b — любые комплексные числа (линейность интеграла).

2. $$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz, \quad (6)$$

т. е. при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак.

3. $$\int_{\gamma_1\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \quad (7)$$

Пример 2. Пусть $f(z)=z$, γ — кривая с началом в точке a и концом в точке b. Так как функция $f(z)=z$ непрерывна на кривой γ, то интеграл $\int\limits_{\gamma} z\,dz$ существует и предел (2) не зависит от выбора точек z_k, ζ_k. Полагая $\zeta_k = z_{k-1}$. Тогда $\int\limits_{\gamma} z\,dz = \lim\limits_{l\to 0} S$, где $S = \sum\limits_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1})$. Полагая $\zeta_k = z_k$, получаем $\int\limits_{\gamma} z\,dz =$ $= \lim\limits_{l\to 0} \widetilde{S}$, где $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1})$. Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} z\,dz = \frac{1}{2}\lim_{l\to 0}(S+\widetilde{S}),$$

$$S+\widetilde{S} = \sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2) =$$

$$= z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \ldots + z_n^2 - z_{n-1}^2 = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2,$$

откуда находим

$$\int\limits_{\gamma} z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_{\gamma} z\,dz$ не зависит от пути интегрирования. В частности, интеграл $\int\limits_{\gamma} z\,dz$ по любой замкнутой кривой равен нулю. □

Пример 3. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_{C_\rho} (z-a)^n dz$, где n — целое число, C_ρ — окружность $|z-a| = \rho$, $\rho > 0$, ориентированная против часовой стрелки.

Уравнение окружности C_ρ запишем в виде $z = a + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $dz = i\rho e^{it}\,dt$ и по формуле (4) находим

$$I_n = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt,$$

откуда при $n=-1$ получаем $I_{-1} = 2\pi i$, а при $n \neq -1$ по формуле Ньютона — Лейбница (§ 3) находим

$$I_n = \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\,e^{it(n+1)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad \square \tag{8}$$

Имеет место следующее свойство: если ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из непрерывных на кривой γ функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходится равномерно на γ, то его можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\, dz.$$

Это вытекает из (3) и теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда, составленного из действительных функций.

3. Оценки интегралов.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кривой γ. Тогда имеет место оценка*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)|\, |dz|\ , \tag{9}$$

где $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ — элемент длины кривой γ.

Доказательство. Имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\, |z_k - z_{k-1}|,$$

откуда, переходя к пределу, получаем оценку (9).

Замечание. Оценку (9) можно также получить из (4) с помощью неравенства (6) § 3.

Следствие. *Из неравенства* (9) *вытекает оценка*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant M l(\gamma), \tag{10}$$

где $M = \max\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$, $l(\gamma)$ — длина кривой γ.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и кривая γ лежит в D. Тогда интеграл от $f(z)$ по γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная C, лежащая в области D, такая, что*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - \int\limits_{C} f(z)\, dz \right| < \varepsilon. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим область D_1 такую, что $\overline{D}_1 \subset D$ и кривая γ лежит в D_1 (существование такой области D_1

будет доказано ниже в лемме 4). По свойству 1, п. 2 § 4 функция $f(z)$ равномерно непрерывна в D_1, т. е. для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $z \in D_1$, $\zeta \in D_1$, $|z - \zeta| < \delta$ имеет место неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3l}, \tag{12}$$

где l — длина кривой γ.

Разобьем кривую γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ последовательными точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы длина l_k дуги γ_k была меньше δ и чтобы круги $|z - z_k| < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежали D_1 (это можно сделать так же, как и в лемме 4). Пусть C — ломаная с последовательными вершинами в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$, c_k — отрезок $[z_{k-1}, z_k]$, $\lambda_k = |z_k - z_{k-1}|$ — длина c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как $l_k < \delta$, то $\lambda_k \leqslant l_k < \delta$, т. е. дуга γ_k и отрезок c_k лежат в круге $|z - z_k| < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, для всех $z \in \gamma_k$ и $z \in c_k$ в силу (12) имеет место оценка

$$|f(z) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{3l}. \tag{13}$$

Докажем оценку (11). Имеем

$$\int_\gamma f(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{\gamma_k} f(z)\,dz - \int_{c_k} f(z)\,dz \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\int_{\gamma_k} f(z)\,dz - \int_{\gamma_k} f(z_k)\,dz \right] - \left[\int_{c_k} f(z)\,dz - \int_{\gamma_k} f(z_k)\,dz \right] \right\},$$

откуда, используя равенство

$$\int_{\gamma_k} f(z_k)\,dz = \int_{c_k} f(z_k)\,dz = f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

(см. пример 1), получаем

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)]\,dz \right| + \left| \int_{c_k} [f(z) - f(z_k)]\,dz \right| \right\}. \tag{14}$$

Применяя для каждого слагаемого в правой части неравенства (14) оценки (10) и (13), окончательно получаем

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{3l} l_k + \frac{\varepsilon}{3l} \lambda_k \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3l} \cdot 2l < \varepsilon.$$

Лемма 3. *Пусть D — ограниченная односвязная область, Γ — граница области D. Если функция $f(z)$ непрерывна в обла-*

сти D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по Γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по замкнутой ломаной, лежащей в области D.

Доказательство леммы 3 выходит за рамки нашего курса.

Рассмотрим неодносвязную область. Пусть граница Γ ограниченной области D состоит из кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$: $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы Γ, то интеграл от $f(z)$ по Γ определяется формулой

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz. \tag{15}$$

Из леммы 3 вытекает

Следствие. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по границе области D можно с любой точностью приблизить суммой интегралов от $f(z)$ по замкнутым ломаным, лежащим в области D.*

Лемма 4. *Кривую γ, лежащую в области D, можно покрыть конечной системой кругов, принадлежащих области D.*

Доказательство. Пусть Γ — граница области D, $\rho(\gamma, \Gamma) = \inf_{z\in\gamma, \zeta\in\Gamma} |z-\zeta|$ — расстояние между кривой γ и границей Γ области D. Из курса математического анализа известно, что $\rho(\gamma, \Gamma) > 0$.

Разобьем кривую γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ последовательными точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$, где z_0 — начало, а z_n — конец кривой γ, так, чтобы длина l_j дуги γ_j была меньше $\frac{1}{4}\rho(\gamma, \Gamma)$:

$$l_j < \tfrac{1}{4}\rho(\gamma, \Gamma), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем, что кривая γ покрывается следующей системой кругов:

$$K_j: \quad |z - z_j| < \tfrac{1}{2}\rho(\gamma, \Gamma), \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{16}$$

В самом деле, если $z \in \gamma_j$, то

$$|z - z_j| \leqslant l_j < \tfrac{1}{4}\rho(\gamma, \Gamma) < \tfrac{1}{2}\rho(\gamma, \Gamma), \tag{17}$$

т. е. дуга γ_j лежит в круге K_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Следствие. *Пусть область D_1 — объединение всех кругов (16): $D_1 = \bigcup_{j=0}^{n} K_j$. Тогда кривая γ лежит в области D_1 и $\overline{D}_1 \subset D$, причем $\rho(\gamma, \Gamma_1) \geqslant \frac{1}{4}\rho(\gamma, \Gamma)$, где Γ_1 — граница области D_1.*

§ 6. Функция arg z

Функция $\ln z$ была определена в § 4 формулой $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. В главе IV будет показано, что все элементарные многозначные функции выражаются через логарифмическую функцию. Поэтому необходимо тщательно исследовать многозначную функцию $\arg z$.

Свойства функции $\arg z$ и, в особенности, свойства приращения аргумента вдоль кривой (см. ниже п. 2) будут широко использоваться, начиная с § 21. Однако некоторые из них нам понадобятся уже в § 13.

1. Полярные координаты. Известно, что декартовы и полярные координаты точки z ($z = x + iy$) комплексной плоскости связаны формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Если полярные координаты (r, φ) заданы, то декартовы координаты (x, y) однозначно определяются формулами (1). Если известны декартовы координаты (x, y), то из (1) однозначно находится $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Однако φ определяется неоднозначно: из уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

число $\varphi = \arg z$ находится только с точностью до $2k\pi$, где k — целое число.

Это обстоятельство (неоднозначность соответствия между (x, y) и (r, φ)) не играет существенной роли при исследовании однозначных функций. Но при исследовании многозначных функций (например, функции $\ln z$) оно становится весьма существенным.

Заметим, что формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всей комплексной плоскостью z и множеством $\{0 < r < \infty, \ -\pi < \varphi \leqslant \pi\} \cup \{r = 0, \ \varphi = 0\}$ на плоскости (r, φ). Это множество не является областью (т. е. открытым связным множеством), в то время как плоскость z является областью. Взаимно однозначное соответствие между областями получается, например, если рассмотреть полуполосу Π: $\{0 < r < \infty, \ -\pi < \varphi < \pi\}$. На плоскости z полуполосе Π отвечает область D_0: плоскость с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$ (рис. 25).

В области D_0 будем отсчитывать полярный угол φ от полуоси $x > 0$ (при $x > 0$ полагаем $\varphi = 0$). Тогда φ будет изменяться в пределах $-\pi < \varphi < \pi$, и каждой точке $z \in D_0$ отвечает только одно значение $\varphi = \varphi(z)$. Тем самым в области D_0 задана однозначная и непрерывная функция $\varphi(z)$. Эта функция бесконечно дифференцируема по переменным (x, y) в области D_0, так как отображение (1) полуполосы Π на область D_0 беско-

нечно дифференцируемо, взаимно однозначно и его якобиан $J = r$ не обращается в нуль.

Функция $\varphi(z)$ однозначно определяется уравнениями (2), так как $-\pi < \varphi < \pi$. В любой точке z области D_0 значение $\varphi(z)$ совпадает с одним из значений многозначной функции $\arg z$ (см. п. 4 § 1). Поэтому функция $\varphi(z)$ называется *однозначной*

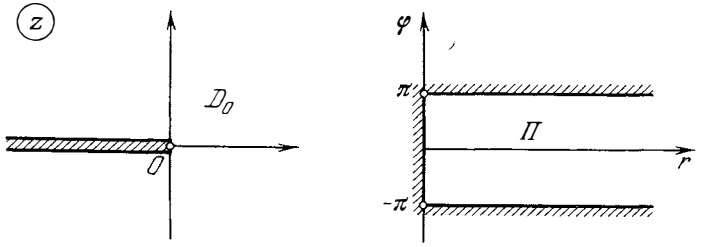


Рис. 25

непрерывной ветвью функции $\arg z$. Для простоты будем обозначать эту ветвь $\varphi = \arg z$.

В области D_0 существует бесконечно много однозначных непрерывных ветвей $\varphi_k(z)$ функции $\arg z$. Все они описываются формулами

$$\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функцию $\varphi = \arg z$, определенную выше, можно выразить из формул (2) через обратные тригонометрические функции:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{если} \quad x > 0;$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{если} \quad x < 0, \ y > 0;$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{если} \quad x < 0, \ y < 0.$$

Однако в случае произвольной области нельзя получить простую формулу, которая выражала бы непрерывную ветвь функции $\arg z$ через обратные тригонометрические функции, так как эти функции меняются в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ или от 0 до π, а функция $\arg z$ может меняться в любых пределах. Более удобным является интегральное представление функции $\arg z$, которое рассматривается ниже (см. (15)).

2. Приращение аргумента вдоль кривой. Пусть кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Угол поворота вектора z при движении точки z вдоль кривой γ от начальной до конечной точки этой кривой назовем *приращением аргумента z вдоль кривой* γ и обозначим его $\Delta_\gamma \arg z$ (рис. 26).

Пример 1. а) Если γ — отрезок прямой с началом в точке $1-i$ и концом в точке $1+i$, то $\Delta_\gamma \arg z = \frac{\pi}{2}$;

б) если γ_+ — полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированная против часовой стрелки, то $\Delta_{\gamma_+} \arg z = \pi$ (рис. 27);

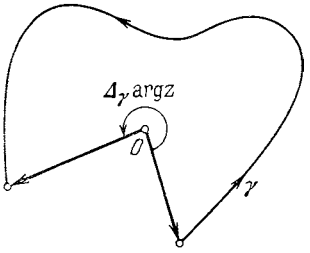


Рис. 26

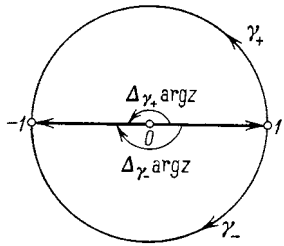


Рис. 27

в) если γ_- — полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированная по часовой стрелке, то $\Delta_{\gamma_-} \arg z = -\pi$ (рис. 27). □

Выведем формулу для $\Delta_\gamma \arg z$. Из формул (1) имеем

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi, \tag{3}$$

откуда $r\, d\varphi = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy$. Следовательно,

$$d\varphi = d\arg z = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_\gamma d\arg z$. Этот интеграл равен разности значений аргумента z в конечной и начальной точках кривой γ, т. е. равен приращению аргумента вдоль кривой: $\Delta_\gamma \arg z$. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2}. \tag{5}$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{6}$$

так как $\operatorname{Im} \frac{dz}{z} = \operatorname{Im} \frac{dx + i\, dy}{x+iy} = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2}$, а переменную интегрирования в (6) можно обозначить любой буквой.

Рассмотрим свойства приращения аргумента.

1. Пусть кривую γ можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, не проходя через точку $z=0$ (т. е. кривые γ и γ_1 гомотопны в области $0<|z|<\infty$) (рис. 28). Тогда имеет место

равенство

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy, \tag{8}$$

где функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D, и кривая γ лежит в области D. В курсе математического анализа [9] доказана

Теорема. *Если область D односвязна, то для того чтобы интеграл* (8) *по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы во всей области D выполнялось равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{9}$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие. *Если в области D (может быть, не односвязной) выполняется равенство* (9) *и кривую γ можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, оставаясь в области D (т. е. кривые γ и γ_1 гомотопны в области D), то имеет место равенство*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy. \tag{10}$$

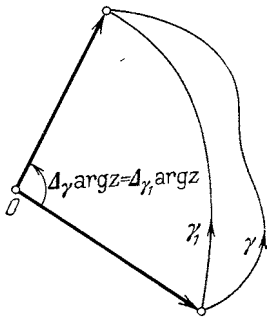


Рис. 28

Положим в (10)

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (9) в области $0 < |z| < \infty$. Таким образом, из (5) и (10) получаем равенство (7).

Формула (7) следует также из геометрического смысла приращения аргумента вдоль кривой (рис. 28).

Из свойства 1 вытекает, в частности, свойство

2. Если замкнутая кривая γ не проходит через точку $z = 0$ и эту кривую можно непрерывно деформировать в точку, не проходя через точку $z = 0$ (т. е. кривая γ гомотопна нулю в области $0 < |z| < \infty$), то имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \arg z = 0. \tag{11}$$

Заметим, что равенство (7) выполняется не для любых кривых γ и γ_1 с общим началом и общим концом (ср. пример 1, б

и в)). Также и равенство (11) справедливо не для любой замкнутой кривой γ.

Пример 2. Если γ — окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки и проходимая один раз, то $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$. □

Отметим еще два свойства приращения аргумента:

3. Если кривая γ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^{-1}} \arg z. \tag{12}$$

4. Если кривая $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z. \tag{13}$$

Эти свойства вытекают из формулы (6) и свойств интегралов (формулы (6) и (7) § 5).

3. Непрерывные ветви функции $\arg z$. Пусть D — односвязная область, не содержащая точек $z = 0$ и $z = \infty$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и выберем $\arg z_0$ — одно из значений аргумента z_0. Положим

$$\arg z = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z, \tag{14}$$

где кривая γ с началом в точке z_0 и концом в точке z лежит в области D.

По свойству 1 п. 2 приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ не зависит от кривой γ, так как в односвязной области любые кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D (п. 4 § 3). Следовательно, функция (14) однозначна в области D. Эта функция непрерывна в области D, так как ее можно записать в виде

$$\arg z = \arg z_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}. \tag{15}$$

Таким образом, функция (14) является *однозначной непрерывной ветвью многозначной функции* $\arg z$ *в области* D.

Очевидно, таких ветвей бесконечно много:

$$(\arg z)_k = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{16}$$

т. е. многозначная функция $\arg z$ в области D распадается на однозначные непрерывные ветви (16). Отсюда следует, что непрерывная ветвь функции $\arg z$ в области D полностью определяется своим значением в одной точке $z_0 \in D$.

Пример 3. Пусть D_0 — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$. Положим $z_0 = 1$, $\arg 1 = 0$. Тогда

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z, \tag{17}$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$ и концом в точке z лежит в области D_0 (рис. 29). Очевидно, функция (17) совпадает

с функцией $\varphi(z)$, рассмотренной в п. 1. В частности, имеем:

$$\arg x = 0, \qquad \text{если} \quad x > 0,$$

$$\arg(iy) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{если} \quad y > 0,$$

$$\arg(iy) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \text{если} \quad y < 0 \quad \text{и т. д.} \ \square$$

В формуле (14) точка z_0 может быть граничной точкой области D.

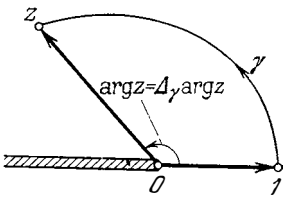


Рис. 29

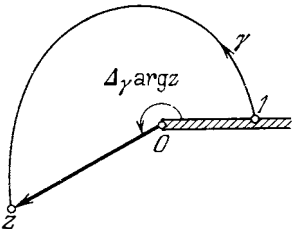


Рис. 30

Пример 4. Пусть D_1 — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. Пусть $z_0 = 1$ — точка верхнего берега разреза, $\arg z_0 = \arg 1 = 0$. Тогда

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z, \tag{18}$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$ и концом в точке z лежит в области D_1 (рис. 30). В частности, имеем:

$$\arg(iy) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{если} \quad y > 0,$$

$$\arg x = \pi, \qquad \text{если} \quad x < 0,$$

$$\arg(iy) = \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{если} \quad y < 0$$

и т. д. (ср. пример 3).

Найдем значения функции (18) на верхнем и нижнем берегах разреза. При $x > 0$ имеем $\arg(x + i0) = \lim\limits_{y \to +0} \arg(x + iy) = 0$, аналогично $\arg(x - i0) = 2\pi$. Следовательно, функцию (18) нельзя «склеить» вдоль луча $(0, +\infty)$ так, чтобы эта функция осталась непрерывной. (Функцию (17) также нельзя склеить непрерывно вдоль луча $(-\infty, 0)$.) Отсюда, в частности, следует, что в области $0 < |z| < \infty$ нельзя выделить непрерывную ветвь функции $\arg z$. $\square$

Из формулы (14) видно, что для того, чтобы функция (14) была однозначна в области D, необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ не зависело от кривой γ, т. е. чтобы для любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D,

имело место равенство $\Delta_\gamma \arg z = 0$. Другими словами, в области D не должно быть простых замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку $z = 0$, т. е. нужно, чтобы в области D нельзя было обойти вокруг точки $z = 0$ (одновременно вокруг точки $z = \infty$). Такой областью является, например, вся комплексная плоскость с разрезом по неограниченной кривой, соединяющей

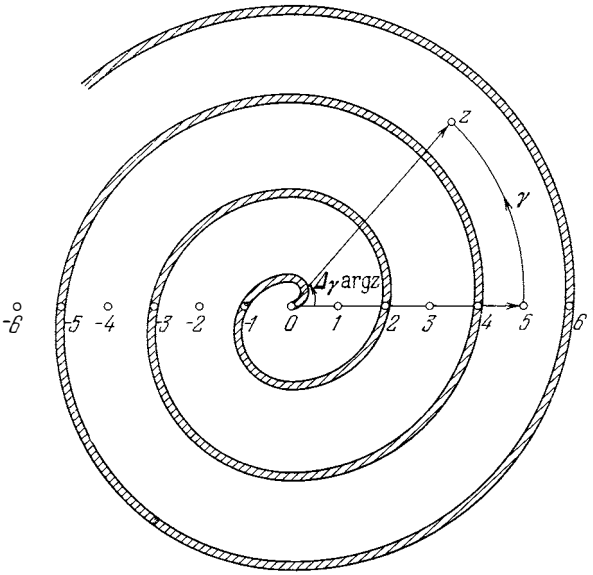


Рис. 31

точки $z = 0$ и $z = \infty$. В такой области и в любой ее подобласти многозначная функция $\arg z$ допускает выделение однозначных непрерывных ветвей.

Заметим, что значения функции (17) изменяются в пределах от $-\pi$ до π: $-\pi < \arg z < \pi$, $z \in D_0$, а значения функции (18) — от 0 до 2π: $0 < \arg z < 2\pi$, $z \in D_1$. Но в случае произвольной области непрерывная ветвь функции $\arg z$ может меняться в любых пределах.

Пример 5. Пусть D_2 — вся комплексная плоскость с разрезом по кривой $z = \frac{t}{\pi} e^{it}$, $0 \leqslant t < \infty$. Положим $\arg 5 = 2\pi$. Тогда

$$\arg z = 2\pi + \Delta_\gamma \arg z,$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 5$ и концом в точке z лежит в области D_2 (рис. 31). В частности, вычисляя значения приращения аргумента, находим: $\arg(-6) = 3\pi$, $\arg 7 = 4\pi$, $\arg(-4) = \pi$, $\arg 3 = 0$, $\arg(-2) = -\pi$, $\arg 1 = -2\pi$ и т. д. □

Глава II

РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши — Римана

1. Производная. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный предел отношения $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 и обозначается $f'(z_0)$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1}$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Пусть $\Delta f = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$. Тогда соотношение (1) примет вид

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0). \tag{2}$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

имеет место, если $0 < |\Delta z| < \delta$. Из (2) следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \qquad (\Delta z \to 0).$$

Обратно, если приращение Δf функции $f(z)$ представляется в виде

$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z), \tag{3}$$

где A — комплексная постоянная, не зависящая от Δz, то функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $A = f'(z_0)$.

Таким образом, равенство (3) является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $f(z)$ в точке

z_0. Из (3), в частности, следует, что функция, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в этой точке.

Пример 1. Функция $f(z)=z^n$ ($n\geqslant 1$ — целое) дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{nz^{n-1}\Delta z+o(\Delta z)}{\Delta z}=nz^{n-1}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$(z^n)'=nz^{n-1}. \tag{5}$$

Из определения производной и свойств пределов вытекает, что на функции комплексного переменного распространяются известные из курса математического анализа правила дифференцирования.

1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в точке z, то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(z)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства

$$(f\pm g)'=f'\pm g',\quad (cf)'=cf'\quad (c=\text{const}),$$
$$(fg)'=f'g+fg',\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}. \tag{6}$$

2. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, а функция $F(w)$ дифференцируема в точке $w=f(z)$, то функция $\Phi(z)=F[f(z)]$ дифференцируема в точке z, причем

$$\Phi'(z)=F'(w)f'(z). \tag{7}$$

Пример 2. Из формул (5) и (6) следует, что

а) функция $f(z)=z^m$, где $m<0$ — целое, дифференцируема во всей комплексной плоскости, кроме точки $z=0$, и $(z^m)'=mz^{m-1}$; в частности,

$$(z^{-1})'=\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2};$$

б) многочлен $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$ — дифференцируемая во всей комплексной плоскости функция и

$$P_n'(z)=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}z+a_{n-1};$$

в) рациональная функция $R(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ имеет производную во всех точках, где $Q_m(z)\neq 0$, причем формула для $R'(z)$ имеет тот же вид, что и соответствующая формула для действительных x.

В определении производной содержится требование, чтобы предел (1) не зависел от способа стремления Δz к нулю. Это накладывает на дифференцируемую функцию комплексного переменного значительно более сильные ограничения, чем на диф-

ференцируемую функцию действительного переменного. В § 12 будет доказано, что функция комплексного переменного, дифференцируемая в области, обладает производными всех порядков в этой области.

В § 4 было отмечено, что непрерывность функции комплексного переменного $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ в точке $z=x+iy$ равносильна непрерывности функций u и v в точке (x, y). Аналогичное утверждение не имеет места для дифференцируемости. Именно, требование дифференцируемости функции $f(z)=u+iv$ налагает дополнительные условия на частные производные функций u и v.

2. Условия Коши — Римана.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ *была дифференцируема в точке* $z=x+iy$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *были дифференцируемы в точке* (x, y);

2) *в точке* (x, y) *выполнялись условия Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{8}$$

Для производной $f'(z)$ *справедлива формула*

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z. Тогда в силу (3) имеем

$$\Delta f=f'(z)\Delta z+\varepsilon(\rho), \tag{10}$$

где $\varepsilon(\rho)=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Здесь обозначено $\rho=|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Функция $\varepsilon(\rho)$ комплекснозначная, представим ее в виде $\varepsilon(\rho)=\varepsilon_1(\rho)+i\varepsilon_2(\rho)$, где функции $\varepsilon_1(\rho)$, $\varepsilon_2(\rho)$ принимают действительные значения. Так как $\frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$, то $\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\rho}\to 0$, $\frac{\varepsilon_2(\rho)}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$, и поэтому

$$\varepsilon_1(\rho)=o(\rho), \quad \varepsilon_2(\rho)=o(\rho) \quad (\rho\to 0). \tag{11}$$

Обозначим $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $f'(z)=A+iB$ и подставим в (10), тогда получим

$$\Delta u+i\Delta v=(A+iB)(\Delta x+i\Delta y)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2. \tag{12}$$

Приравнивая в этом соотношении действительные и мнимые части, получаем

$$\Delta u=A\Delta x-B\Delta y+\varepsilon_1, \quad \Delta v=B\Delta x+A\Delta y+\varepsilon_2. \tag{13}$$

Тем самым доказано, что функции u, v дифференцируемы в точке (x, y).

Из равенств (13) находим

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда следуют условия Коши — Римана и формула (9), так как $f'(z) = A + iB$.

Достаточность. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и пусть выполняются условия (8). Тогда имеют место равенства (13), где $\varepsilon_1 = o(\rho)$, $\varepsilon_2 = o(\rho)$. Умножая второе из этих равенств на i и складывая с первым, получаем

$$\Delta u + i\,\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

или

$$\Delta f = (A + iB)(\Delta x + i\,\Delta y) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

или

$$\Delta f = (A + iB)\Delta z + \varepsilon(\rho),$$

где $\varepsilon(\rho) = o(\rho)$, откуда в силу (3) вытекает дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z. Теорема доказана.

Пример 3. а) Функция $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

По формуле (9) находим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

т. е.

$$(e^z)' = e^z. \tag{14}$$

б) Функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ дифференцируемы во всей комплексной плоскости, и их производные вычисляются по формулам

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \tag{15}$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \tag{16}$$

в) Рассмотрим функцию $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$. Условия (8) выполняются только при $x = y = 0$, следовательно, функция $\bar{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$. □

Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, и условия Коши — Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{18}$$

Пример 4. Пусть D — плоскость z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси.

а) Функция $\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, удовлетворяет условиям (17) и поэтому $\sqrt{z}$ — дифференцируемая в области D функция. По формулам (18) находим $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}}$, т. е.

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \tag{19}$$

б) Функция $\ln z = \ln r + i\varphi$ $(z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi)$ удовлетворяет условиям (17) и

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}. \quad \square \tag{20}$$

3. Сопряженные гармонические функции. Пусть функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в области D и, кроме того, функции u и v имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда, дифференцируя первое из равенств (8) по x, а второе — по y, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что производные $\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ в силу их непрерывности равны, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Действительная функция $u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению (21), называется *гармонической* в области D, а уравнение (21) — *уравнением Лапласа.*

Выше было указано, что дифференцируемая в области D функция имеет производные любого порядка в этой области и, следовательно, обладает непрерывными частными производными любого порядка. Поэтому действительная и мнимая части

функции $f(z)=u+iv$, дифференцируемой в области D, являются гармоническими функциями в этой области.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши — Римана, называются *сопряженными*. Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой в области функции являются в этой области сопряженными гармоническими функциями.

Обратно, если в области D даны две сопряженные гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то, по теореме 1, функция $f(z)=u+iv$ дифференцируема в области D. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для дифференцируемости функции* $f(z)=u+iv$ *в области* D *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *были сопряженными гармоническими в этой области.*

Зная одну из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, можно в односвязной области найти другую функцию.

Теорема 3. *Для всякой функции* $u(x, y)$, *гармонической в односвязной области* D, *можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Доказательство. Так как $u(x, y)$ — гармоническая в односвязной области D функция, то

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

и следовательно, выражение $-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $v(x, y)$, определяемой с точностью до произвольного постоянного слагаемого C формулой (§ 6, п. 2)

$$v(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+C. \tag{22}$$

Здесь $(x_0, y_0)\in D$ и $(x, y)\in D$ (интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), а зависит лишь от точки (x, y), если точка (x_0, y_0) фиксирована).

Из (22) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

откуда следует, что $v(x, y)$ — гармоническая в области D функция, сопряженная с $u(x, y)$.

Из теорем 2 и 3 следует, что если задана гармоническая функция $u(x, y)$ в односвязной области D, то можно найти, с точностью до постоянного слагаемого, дифференцируемую в

области D функцию $f(z)=u+iv$, т. е. восстановить дифференцируемую функцию по заданной ее действительной (или мнимой) части. Если область D многосвязна, то функция v, определяемая интегралом (22), а также функция $f(z)=u+iv$ могут оказаться неоднозначными.

Отметим, что при нахождении функции $v(x, y)$ по заданной функции $u(x, y)$ (или наоборот) часто бывает более удобным вместо формулы (22) непосредственно использовать условия Коши — Римана (см. пример 5).

Пример 5. Найдем дифференцируемую функцию $f(z)$, если

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x, y)=y^3-3x^2y.$$

Функция $u=y^3-3x^3y$ является гармонической во всей комплексной плоскости. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$$

откуда

$$v=-3xy^2+g(x). \tag{23}$$

Из (23) находим

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x). \tag{24}$$

С другой стороны, в силу (8) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2. \tag{25}$$

Сравнивая (24) и (25), находим $g'(x)=3x^2$, откуда $g(x)=x^3+C$, где C — действительная постоянная, и из (23) получаем $v=-3xy^2+x^3+C$. Искомая функция

$$f(z)=u+iv=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2)+iC=i(z^3+C)$$

дифференцируема во всей комплексной плоскости. □

4. Понятие регулярной функции. Введем одно из основных понятий теории функций комплексного переменного — понятие регулярной функции.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки $z=a$ $(a\neq\infty)$ и разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{26}$$

сходящийся в некоторой окрестности точки $z=a$ (т. е. в круге $|z-a|<\rho$, $\rho>0$). Тогда функция $f(z)$ называется *регулярной в точке* $z=a$.

Функция $f(z)$ называется *регулярной в области* D, если она регулярна в каждой точке области D.

Теорема 4. *Если функция $f(z)$ регулярна в точке $z=a$, то она дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. По условию, степенной ряд (26) сходится в некоторой окрестности точки a, откуда следует, что $f(a)=c_0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{f(z)-c_0}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}. \tag{27}$$

Так как ряд (27) равномерно сходится в круге $|z-a|\leqslant\rho_1<\rho$, то его сумма непрерывна в этом круге и в правой части (27) можно почленно перейти к пределу при $z\to a$ (более подробно теория степенных рядов будет изложена в § 11), и этот предел равен c_1. Поэтому существует предел и левой части (27) при $z\to a$, т. е. существует $f'(a)=c_1$.

Замечание 1. В дальнейшем (§ 12) будет показано, что функция, дифференцируемая в области, регулярна в этой области.

Пример 6. Функция $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ регулярна в точке $z=0$ (ряд сходится в круге $|z|<1$). □

Определение 2. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности бесконечно удаленной точки и разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}, \tag{28}$$

сходящийся в некоторой окрестности точки $z=\infty$ (т. е. в области $|z|>R$). Тогда функция $f(z)$ называется *регулярной в бесконечно удаленной точке.*

Замечание 2. Из определения 2 следует, что функция $f(z)$ регулярна в точке $z=\infty$ в том и только в том случае, когда функция $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ регулярна в точке $\zeta=0$.

Пример 7. Функция $f(z)=z/(z-1)$ регулярна в точке $z=\infty$, так как функция $g(\zeta)=f(1/\zeta)=1/(1-\zeta)$ регулярна в точке $\zeta=0$. □

§ 8. Геометрический смысл производной

1. Понятие однолистности. В § 4 было введено понятие функции комплексного переменного. Этому понятию можно дать следующую геометрическую интерпретацию.

Пусть на множестве E расширенной комплексной плоскости z определена функция $w=f(z)$ и пусть E' — множество ее значений на плоскости w (рис. 32). Тогда говорят, что задано *отображение множества E* на множество E'. Точка $w\in E'$ называ-

ется *образом точки* $z \in E$, а точка z — *прообразом точки* w при отображении $w = f(z)$.

Может оказаться, что некоторые точки множества E' имеют не один, а несколько прообразов, т. е. отображение $w = f(z)$ может не быть взаимно однозначным. Если отображение $w = f(z)$ является взаимно однозначным, то функция $f(z)$ называется

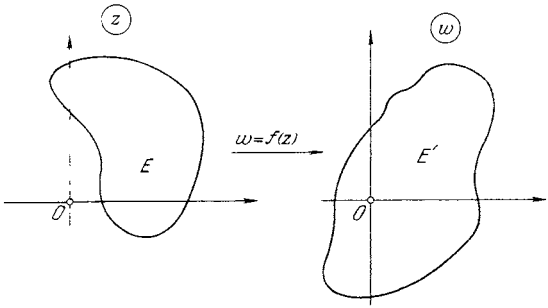


Рис. 32

однолистной. Приведем более подробное определение однолистности.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется *однолистной на множестве* E, если она в различных точках множества E принимает различные значения.

Отображение $w = f(z)$, осуществляемое однолистной функцией, является *взаимно однозначным* и называется *однолистным*.

Очевидно, функция $w = f(z)$ является однолистной на множестве E, если для любых точек z_1 и z_2 этого множества равенство $f(z_1) = f(z_2)$ имеет место в том и только в том случае, когда $z_1 = z_2$. Иными словами, функция $w = f(z)$ однолистна на множестве E, если это множество не содержит ни одной пары точек z_1 и z_2 $(z_1 \neq z_2)$ таких, что $f(z_1) = f(z_2)$.

Из определения однолистности следует, что если функция однолистна на множестве E и $E_1 \subset E$, то эта функция однолистна на множестве E_1.

Суперпозиция (результат последовательного выполнения) однолистных отображений есть однолистное отображение, т. е. если функция $\zeta = f(z)$ однолистна на множестве E $(E \to E_1)$, а функция $w = g(\zeta)$ однолистна на E_1 $(E_1 \to E_2)$, то функция $w = g[f(z)]$ однолистна (рис. 33) на E $(E \to E_2)$.

Если отображение $w = f(z)$: $E \to E'$ является однолистным, то каждой точке $w \in E'$ ставится в соответствие одна и только одна точка $z \in E$ такая, что $f(z) = w$. Тем самым на множестве E' определена функция $z = h(w)$, *обратная* к функции $f(z)$. Справедливы тождества:

$$f[h(w)] \equiv w, \quad w \in E'; \qquad h[f(z)] \equiv z, \quad z \in E.$$

Функция $w=f(z)$, заданная на множестве E и отображающая E на E', является однолистной на E тогда и только тогда, когда обратная функция $z=h(w)$ однозначна на множестве E'.

2. Примеры однолистных отображений.

Пример 1. Линейная функция

$$w=f(z)=az+b, \tag{1}$$

где a, b — комплексные постоянные $(a\neq 0)$, однолистна во всей комплексной плоскости, так как обратная функция

$$z=h(w)=\frac{1}{a}w-\frac{b}{a} \tag{2}$$

однозначна.

Функция (1) отображает взаимно однозначно расширенную комплексную плоскость z на расширенную комплексную плоскость w. При этом точка $z=\infty$ переходит в точку $w=\infty$, а соответствие между конечными точками плоскостей z и w определяется формулами (1), (2).

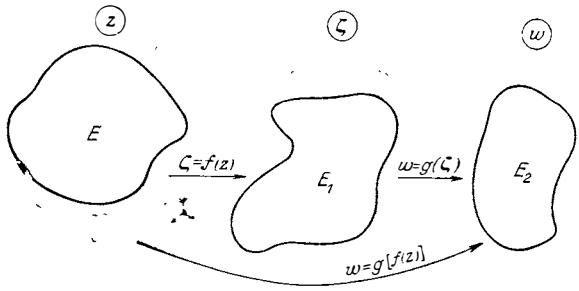


Рис. 33

Рассмотрим случай $b=0$. Тогда

$$w=az, \tag{3}$$

откуда

$$|w|=|a|\,|z|, \quad \arg w=\arg a+\arg z. \tag{4}$$

Из равенств (4) следует, что отображение (3) сводится к подобному растяжению плоскости z в $|a|$ раз с центром подобия в начале координат и повороту всей плоскости вокруг точки $z=0$ на угол $\alpha=\arg a$. При отображении (3) луч $\arg z=\varphi$ переходит в луч $\arg w=\varphi+\alpha$, а окружность $|z|=r$ — в окружность $|w|=|a|r$ (рис. 34). Круг $|z|<R$ при этом отображении переходит в круг $|w|<|a|R$.

Если $|a|=1$, т. е. $a=e^{i\alpha}$, то преобразование (3) есть поворот плоскости на угол α. В частности, преобразование $w=iz$ есть поворот на угол $\pi/2$, а преобразование $w=-z$ есть поворот на угол π.

Преобразование (1) есть суперпозиция преобразований

$$\zeta = |a|z, \quad \tau = \zeta e^{i \arg a}, \quad w = \tau + b.$$

Поэтому преобразование $w = az + b$ можно осуществить, выполнив в указанном порядке следующие преобразования:

а) подобное растяжение плоскости z в $|a|$ раз (центр подобия — в точке $z = 0$);

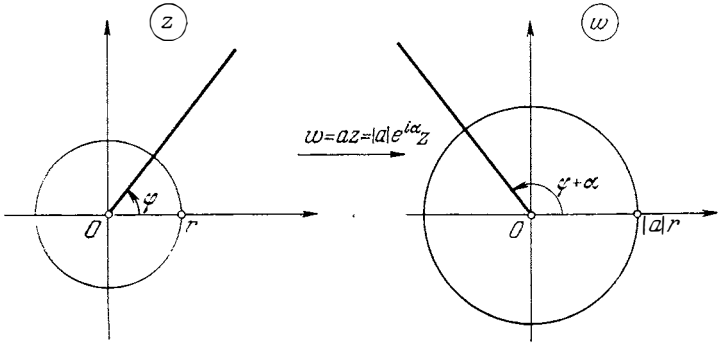


Рис. 34

б) поворот плоскости ζ вокруг точки $\zeta = 0$ на угол $\alpha = \arg a$;

в) параллельный перенос (сдвиг) плоскости τ на вектор b. □

Пример 2. Функция

$$w = \frac{1}{z} \tag{5}$$

отображает взаимно однозначно расширенную комплексную плоскость z на расширенную комплексную плоскость w (обратная функция $z = 1/w$ однозначна). При этом точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$, а точке $z = \infty$ — точка $w = 0$. Луч $\arg z = \varphi$ переходит при отображении (5) в луч $\arg w = -\varphi$, окружность $|z| = r$ — в окружность $|w| = 1/r$, круг $|z| < R$ — на область $|w| > 1/R$. □

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$w = z^2. \tag{6}$$

Если $z_1^2 = z_2^2$, то либо $z_1 = z_2$, либо

$$z_1 = -z_2. \tag{7}$$

Две точки, связанные равенством (7), симметричны относительно начала координат. Следовательно, функция $w = z^2$, однолистна в области D в том и только в том случае, когда эта область не содержит ни одной пары точек, симметричных относительно точ-

ки 0. В частности, функция (6) однолистна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Рассмотрим луч $\arg z = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, лежащий в верхней полуплоскости (рис. 35). При отображении (6) этот луч переходит в луч $\arg w = 2\alpha$. Будем вращать луч $\arg z = \alpha$, непрерывно увеличивая α от 0 до π. Тогда луч $\arg w = 2\alpha$, являющийся образом луча $\arg z = \alpha$, будет поворачиваться против часовой

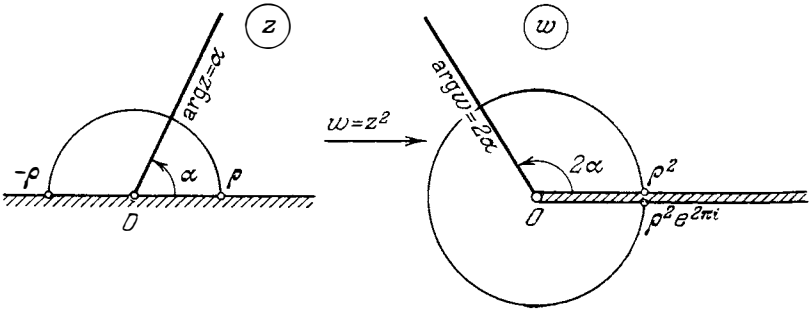


Рис. 35

стрелки. Если луч на плоскости z опишет верхнюю полуплоскость, то его образ опишет всю плоскость w. При этом лучи $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, образующие границу области $\operatorname{Im} z > 0$, перейдут соответственно в лучи $\arg w = 0$ и $\arg w = 2\pi$. Геометрически эти лучи совпадают с положительной действительной полуосью на плоскости w. Для того чтобы отображение (6) было взаимно однозначным не только внутри области $\operatorname{Im} z > 0$, но и на ее границе, проведем в плоскости w «разрез» по положительной части действительной оси и будем считать, что луч $\arg z = 0$ (т. е. положительная полуось на плоскости z) отображается на верхний, а луч $\arg z = \pi$ — на нижний берег этого разреза.

Итак, функция $w = z^2$ однолистна в верхней полуплоскости и отображает эту область на плоскость w с разрезом вдоль положительной действительной полуоси (рис. 35). Отметим еще, что при отображении $w = z^2$ полуокружность $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ перейдет в «незамкнутую» окружность $|w| = \rho^2$ (точки $w_1 = \rho^2$ и $w_2 = \rho^2 e^{2\pi i}$, являющиеся образами точек $z_1 = \rho$ и $z_2 = \rho e^{i\pi} = -\rho$, совпадают, но лежат на разных берегах указанного выше разреза).

Функция $w = z^2$ является однолистной и в нижней полуплоскости и отображает область $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость w с разрезом вдоль положительной действительной полуоси (рис. 36). При этом отображении лучи $\arg z = \pi$ и $\arg z = 2\pi$, образующие границу области $\operatorname{Im} z < 0$, переходят соответственно в верхний и нижний берега разреза. В самом деле, луч $\arg z = \pi + \delta$ $(\delta > 0$, δ — достаточно мало), который «примыкает» к лучу $\arg z = \pi$, перехо-

дит в луч $\arg w = 2\pi + 2\delta$, расположенный выше верхнего берега разреза. Аналогично, луч $\arg z = 2\pi - \delta$ переходит в луч $\arg w = 4\pi - 2\delta$, примыкающий к нижнему берегу разреза.

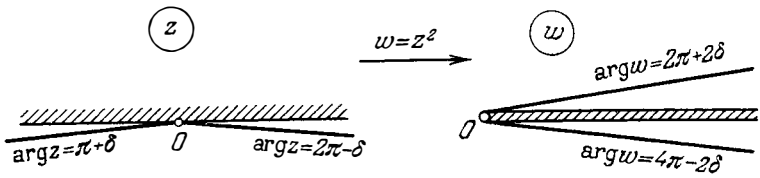


Рис. 36

Отметим еще, что при отображении $w = z^2$ правая полуплоскость ($\operatorname{Re} z > 0$) и левая полуплоскость ($\operatorname{Re} z < 0$) переходят в плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси (рис. 37). □

Пример 4. Рассмотрим отображение

$$w = e^z. \tag{8}$$

Найдем условие, которому должна удовлетворять область D, чтобы отображение (8) было однолистным в этой области. Если $e^{z_1} = e^{z_2}$, т. е. $e^{z_1 - z_2} = 1$, то (п. 6, § 4)

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9}$$

Следовательно, для однолистности отображения (8) необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала никакой пары различных точек, удовлетворяющих условию (9). В частности, отображение $w = e^z$ является однолистным в горизонтальной полосе $a < \operatorname{Im} z < b$, $0 < b - a \leqslant 2\pi$.

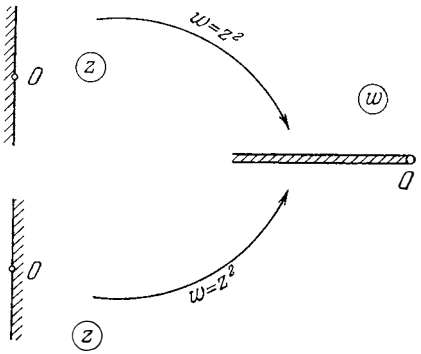


Рис. 37

Рассмотрим полосу D_1: $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ (рис. 38). При отображении (8) прямая $z = x + iC$ (C — фиксировано, $0 < C < 2\pi$; $-\infty < x < +\infty$), параллельная действительной оси и лежащая в полосе D_1, переходит в линию $w = e^{x+iC} = e^x \cdot e^{iC}$, т. е. в луч $\arg w = C$. Будем двигать прямую $z = x + iC$ параллельно действительной оси, непрерывно увеличивая C от 0 до 2π. Тогда луч $\arg w = C$, являющийся образом прямой $z = x + iC$, поворачиваясь против часовой стрелки, опишет всю плоскость w. При этом прямые $z = x (-\infty < x < \infty)$ и $z = x + i \cdot 2\pi$, образующие границу

полосы D_1, отобразятся соответственно на лучи $\arg w = 0$ и $\arg w = 2\pi$.

Таким образом, функция $w = e^z$, однолистная в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$, отображает эту полосу на плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ так, что нижний край полосы переходит в верхний берег разреза, а верхний край полосы — в нижний берег разреза.

Заметим, что при отображении (8) отрезок $z = C_1 + iy$ (C_1 — фиксировано, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$), лежащий в полосе D_1 и параллельный

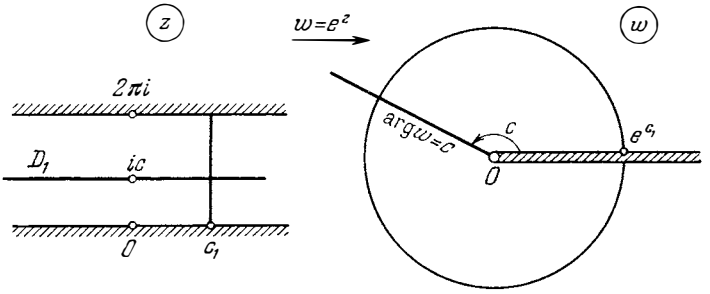


Рис. 38

мнимой оси, переходит в «незамкнутую» окружность $w = e^{C_1} e^{iy}$ ($0 \leqslant y \leqslant 2\pi$) радиуса e^{C_1} (точке $z_1 = C_1$ соответствует точка $w_1 = e^{C_1}$ верхнего берега разреза, а точке $z_2 = C_1 + 2\pi i$ — точка $w_2 = e^{C_1} e^{2\pi i}$, лежащая на нижнем берегу разреза и совпадающая геометрически с точкой w_1).

Аналогично можно показать, что полоса D_2: $2\pi < \operatorname{Im} z < 4\pi$ отобразится функцией $w = e^z$ на плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ так, что нижний край полосы D_2 перейдет в верхний берег разреза, а верхний край полосы — в нижний берег разреза. Точно так же можно установить, что функция $w = e^z$ однолистна в полосе D_k: $2(k-1)\pi < \operatorname{Im} z < 2k\pi$ (k — целое) и отображает эту полосу на плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. □

3. Понятие конформного отображения.

1. Сохранение угла между кривыми. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим гладкую кривую γ: $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (рис. 39), проходящую через точку $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Обозначим θ угол, образуемый касательной к кривой γ в точке z_0 и положительным направлением действительной оси (касательная считается направленной в ту же сторону, что и кривая). Тогда $\theta = \arg \sigma'(t_0)$.

Пусть γ' — образ кривой γ при отображении $w = f(z)$, т. е. γ': $w = w(t) = f[\sigma(t)]$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а точка w_0 — образ точки

$z_0 (w_0 = f(\sigma(t_0)) = f(z_0))$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$w'(t_0) = f'(z_0)\sigma'(t_0). \tag{10}$$

Так как по условию $f'(z_0) \neq 0$ и $\sigma'(t_0) \neq 0$ (см. § 3), то $w'(t_0) \neq \neq 0$, т. е. кривая γ' имеет касательную в точке w_0. Пусть $\arg w'(t_0) = \theta'$. Тогда из (10) находим

$$\theta' = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \sigma'(t_0),$$

т. е.

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0). \tag{11}$$

Величина $\alpha = \theta' - \theta$ называется *углом поворота кривой* γ *в точке* z_0 при отображении $w = f(z)$. Из формулы (11) следует,

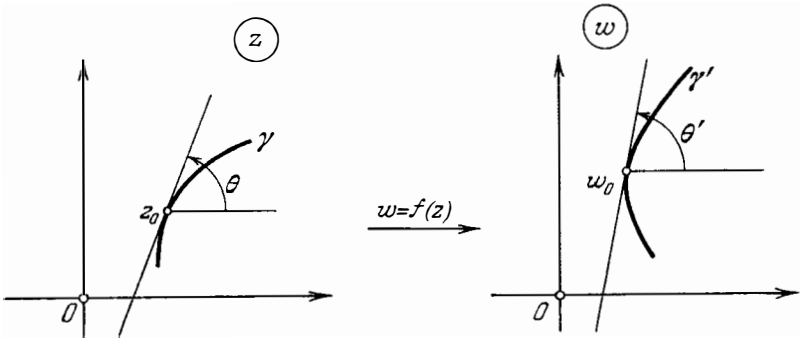


Рис. 39

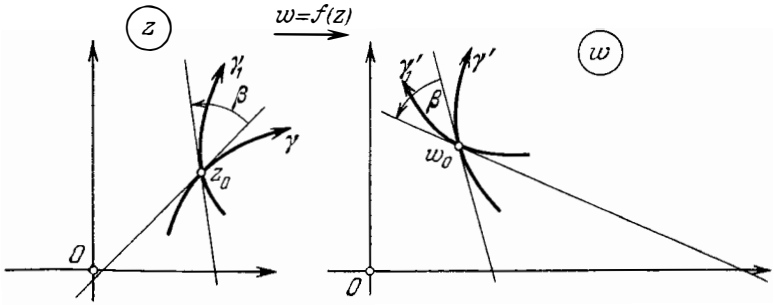


Рис. 40

что если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 *не зависит от кривой* и равен $\alpha = \arg f'(z_0)$, т. е. все кривые, проходящие через точку z_0, поворачиваются при отображении $w = f(z)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ *на один и тот же угол, равный аргументу производной* в точке z_0.

Таким образом, отображение $w = f(z)$, где $f(z)$ — дифференцируемая в окрестности точки z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$, *сохраняет*

углы между кривыми, проходящими через точку z_0, не только по величине, но и по направлению отсчета (рис. 40).

Пример 5. Найдем угол поворота α при отображении $w = f(z)$ в точке z_0.

а) Пусть $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, где $\operatorname{Im} z_0 = y_0 > 0$. Тогда

$$f'(z) = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{1}{2i \operatorname{Im} z_0} = -\frac{i}{2y_0},$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

б) Пусть $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$, где $|z_0| < 1$. Тогда

$$f'(z) = \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 - z\bar{z}_0)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} > 0,$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = 0. \qquad \square$$

2. Постоянство растяжений. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку z кривой γ, расположенную достаточно близко к точке z_0 (рис. 41). Обозначим $\Delta z = z - z_0$,

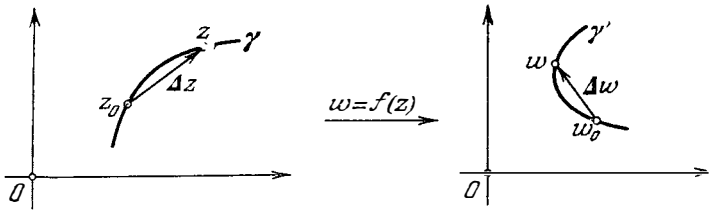


Рис. 41

$\Delta w = f(z) - f(z_0) = w - w_0$. Из определения производной $f'(z_0)$ следует, что

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(\Delta z), \quad \text{где } \varepsilon(\Delta z) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0,$$

откуда получаем

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|,$$

или

$$|\Delta w| = |f'(z_0)|\,|\Delta z| + o(|\Delta z|). \tag{12}$$

Пусть $|z - z_0| = |\Delta z| = \rho$, где ρ достаточно мало, тогда из формулы (12) находим, что окружность $|z - z_0| = \rho$ переходит

при отображении $w=f(z)$ в кривую, которая мало отличается от окружности

$$|w-w_0|=\rho|f'(z_0)|.$$

Иначе говоря, отображение $w=f(z)$ с точностью до малых более высокого порядка, чем Δz, растягивает круг $|\Delta z|<\rho$ в $|f'(z_0)|$ раз.

Величина $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=k$ называется *линейным растяжением* кривой γ в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Следовательно, линейное растяжение в точке z_0 *не зависит от вида и направления кривой* и равно $k=|f'(z_0)|$.

3. Определение конформного отображения. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0.

Определение 2. Отображение $w=f(z)$ называется *конформным в точке* z_0, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0.

Из полученных результатов вытекает, что если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 (регулярна в точке z_0) и $f'(z_0)\neq 0$, то отображение $w=f(z)$ является конформным в точке z_0.

Замечание 1. Условие $f'(z_0)\neq 0$ означает, что якобиан отображения $w=f(z)$ в точке z_0 отличен от нуля. В самом деле, отображение $w=f(z)=u+iv$ эквивалентно отображению

$$u=u(x,\ y),\quad v=v(x,\ y). \tag{13}$$

Якобиан J отображения (13) равен

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Используя условия Коши — Римана (§ 7, формулы (8)), получаем

$$J=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Так как $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, то

$$J=|f'(z)|^2. \tag{14}$$

Таким образом, если $f'(z_0)\neq 0$, то якобиан $J(z_0)\neq 0$.

Определение 3. Пусть функция $f(z)$ однолистна в области D и пусть отображение $w=f(z)$ является конформным в каждой точке области D. Тогда это отображение называется *конформным*.

Из определений 1—2 и свойств производной вытекает, что если функция $f(z)$

1) дифференцируема в области D,

2) однолистна в области D,

3) ее производная отлична от нуля в этой области,

то отображение $w=f(z)$ является конформным.

Заметим, что условие 3) вытекает из условий 1) и 2) (см. § 31).

Примеры конформных отображений приведены в п. 2. Линейное отображение $w=az+b$ $(a\neq 0)$ является конформным во всей комплексной плоскости. Далее, функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на плоскость с разрезом $[0, +\infty)$. Наконец, отображение $w=e^z$ является конформным в полосе $0<\operatorname{Im} z<2\pi$.

Более подробно конформные отображения будут изучены в главе VI.

Замечание 2. Если функция регулярна в точке z_0 и $f'(z_0)=0$, то отображение $w=f(z)$ не является конформным в точке z_0. Поясним это утверждение на примере функции $f(z)=z^2$. В точке $z_0=0$ производная функции z^2 обращается в нуль $(f'(z)=2z)$. Рассмотрим два луча $\arg z=\alpha$ и $\arg z=\beta$, выходящие из точки $z=0$. Их образами при отображении $w=z^2$ являются лучи $\arg w=2\alpha$ и $\arg w=2\beta$. Исходные лучи образуют между собой угол $\beta-\alpha$, а их образы — угол $2(\beta-\alpha)$. Следовательно, углы в точке $z=0$ удваиваются, т. е. отображение $w=z^2$ не является конформным в точке $z=0$.

4. Площадь образа области и длина образа кривой. Пусть функция $w=f(z)$ конформно отображает область D на область D'. Тогда якобиан отображения равен $J=|f'(z)|^2$, и площадь области D' равна

$$S(D')=\iint\limits_{D'} du\,dv=\iint\limits_{D}|J|\,dx\,dy=\iint\limits_{D}|f'(z)|^2\,dx\,dy.$$

Пусть γ — кривая, лежащая в области D, а γ' — ее образ при отображении $w=f(z)$. Тогда длина кривой γ' равна

$$l(\gamma')=\int\limits_{\gamma'}|dw|=\int\limits_{\gamma}|f'(z)||dz|.$$

Замечание 3. Приведем геометрическую интерпретацию формулы (14). Как известно из курса математического анализа, величина $|J|$, где J — якобиан отображения (13), равняется *коэффициенту растяжения площадей* при отображении (13), т. е. при отображении $w=f(z)=u+iv$. Выше было показано, что линейное растяжение при отображении $w=f(z)$ не зависит от направления и равно $|f'(z_0)|$. Следовательно, коэффициент растяжения площадей равен $|f'(z_0)|^2$.

§ 9. Интегральная теорема Коши

В этом параграфе будет доказана интегральная теорема Коши — один из наиболее важных результатов теории функций комплексного переменного.

1. Теорема Коши для случая непрерывной производной.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и ее производная непрерывна в D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю*:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, то по формуле (3) § 5 имеем

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = J_1 + iJ_2,$$

где

$$J_1 = \int_{\gamma} u\,dx - v\,dy, \quad J_2 = \int_{\gamma} v\,dx + u\,dy.$$

Так как функция $f(z)$ имеет непрерывную производную в области D, то частные производные первого порядка функций u, v непрерывны в области D и выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

В силу сформулированной в § 6 (п. 2) теоремы из (2) следует, что $J_1 = J_2 = 0$. Таким образом, $\int_{\gamma} f(z)\,dz = J_1 + iJ_2 = 0$.

2. Теорема Коши (общий случай).

Теорема 2 (интегральная теорема Коши). *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю*:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Приведем доказательство интегральной теоремы Коши, принадлежащее Гурса.

1. Докажем сначала теорему для случая, когда кривая γ является контуром треугольника, лежащего в области D. Проведем доказательство от противного. Пусть теорема неверна. Тогда найдется треугольник (контур этого треугольника и сам тре-

угольник обозначим символом Δ) такой, что

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| = \alpha > 0. \tag{4}$$

Соединив середины сторон треугольника Δ (рис. 42) отрезками прямых, разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{4} \int_{\Delta^{(k)}} f(z)\,dz = \int_{\Delta} f(z)\,dz. \tag{5}$$

В самом деле, левая часть (5) равна сумме, состоящей из интеграла по контуру треугольника Δ и интегралов, взятых два раза (в противоположных направлениях) по каждой стороне треугольника $\Delta^{(4)}$ (эти интегралы взаимно уничтожаются).

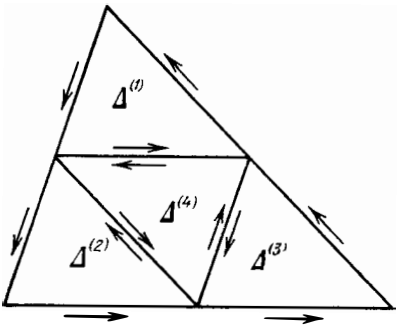


Рис. 42

Из равенств (4) и (5) следует, что по крайней мере для одного из интегралов в левой части (5) (обозначим соответствующий треугольник Δ_1) справедлива оценка

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4}, \tag{6}$$

так как в противном случае

$$\alpha = \left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\Delta^{(k)}} f(z)\,dz\right| < 4\,\frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

т. е. $\alpha < \alpha$, что невозможно.

Далее, разбивая треугольник Δ_1 указанным выше способом на четыре треугольника и повторяя предыдущие рассуждения, найдем такой треугольник Δ_2, что

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ такую, что каждый треугольник Δ_n содержит треугольник Δ_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$) и имеет место неравенство

$$J_n = \left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4^n}. \tag{7}$$

Формула (7) дает оценку снизу для J_n. Найдем для J_n оценку сверху. Пусть P — периметр исходного треугольника; тогда периметр P_n треугольника Δ_n равен $P/2^n$ и, следовательно, $P_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ является стягивающейся: каждый треугольник Δ_n содержит все последующие треугольники Δ_{n+1}, Δ_{n+2}, ..., и периметр треугольника Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существует единственная точка z_0, лежащая внутри или на границе треугольника Δ и принадлежащая всем треугольникам Δ_1, Δ_2, ... По условию, точка z_0 принадлежит области D. Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

откуда

$$\int_{\Delta_n} f(z)\,dz = f(z_0)\int_{\Delta_n} dz + f'(z_0)\int_{\Delta_n} z\,dz - z_0 f'(z_0)\int_{\Delta_n} dz + \int_{\Delta_n} o(z - z_0)\,dz. \quad (8)$$

Так как $\int_{\Delta_n} dz = 0$, $\int_{\Delta_n} z\,dz = 0$ (§ 5, примеры 1, 2), то из равенства (8) имеем

$$\int_{\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\Delta_n} o(z - z_0)\,dz. \quad (9)$$

Из определения величины $o(z - z_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех z: $|z - z_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|o(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|. \quad (10)$$

Выберем n столь большим, чтобы треугольник Δ_n лежал в круге $|z - z_0| < \delta$. Тогда из (9) и (10) имеем

$$J_n = \left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon \int_{\Delta_n} |z - z_0|\,|dz| < \varepsilon P_n \int_{\Delta_n} |dz| = \varepsilon P_n^2 = \varepsilon \frac{P^2}{4^n},$$

т. е.

$$J_n < \varepsilon \frac{P^2}{4^n}. \quad (11)$$

Сравнивая (7) и (11), получаем $\alpha/4^n < \varepsilon P^2/4^n$, т. е. $\alpha < \varepsilon P^2$, что при $\alpha > 0$ невозможно, так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. равенство (3) справедливо для любого треугольника, лежащего в области D.

2. Пусть теперь в качестве γ взят контур произвольного замкнутого многоугольника, лежащего в области D.

Если многоугольник является выпуклым, то его можно разбить на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. Представляя $J=\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ в виде суммы интегралов, взятых по границам треугольников, на которые разбивается данный многоугольник, получаем $J=0$.

Далее, любой многоугольник можно разбить на конечное число выпуклых многоугольников. Следовательно, и в этом случае $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=0$.

3. Пусть, наконец, γ — произвольная замкнутая кривая, лежащая в области D. По лемме 2, § 5 $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутая ломаная L такая, что

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz-\int\limits_{L} f(z)\,dz\right|<\varepsilon.$$

По доказанному выше $\int\limits_{L} f(z)\,dz=0$ и поэтому последнее неравенство принимает вид $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right|<\varepsilon$, откуда в силу произвольности числа $\varepsilon>0$ заключаем, что $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=0$.

3. Следствия, дополнения и замечания к теореме Коши.

Замечание 1. Функция $f(z)=\frac{1}{z}$ дифференцируема в кольце $0<|z|<2$, но $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z}\neq 0$ (§ 5, пример 3). Этот пример показывает, что требование односвязности области в теореме Коши существенно.

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования. Именно, если кривые γ, γ_1 лежат в области D и имеют общие начало и конец, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Таким образом, кривую γ можно деформировать в области D (оставляя концы неподвижными), не меняя значения интеграла.

Используя следствие, приведенное в § 6. п. 2, получаем теорему 3, которая также называется интегральной теоремой Коши.

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D, а кривые γ_1 и γ_2 гомотопны в области D, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Область D может быть и неодносвязной.

Теорема Коши остается в силе и для случая, когда кривая γ является границей области D. Приведем формулировку теоремы Коши для этого случая.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 2 и леммы 3, § 5.

Утверждение теоремы 4 остается в силе и для многосвязных областей.

Следствие 2. *Пусть граница Γ многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно гладкой кривой Γ_0 и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, расположенных внутри Γ_0, и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0. \tag{12}$$

Кривые $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ ориентированы так, что при обходе каждой из этих кривых область D остается слева.

Доказательство. Соединим кривую Γ_0 с кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ разрезами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (рис. 43) так, чтобы получившаяся область $\widetilde{D}$ была односвязной. Граница $\widetilde{\Gamma}$ области $\widetilde{D}$ состоит из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ и разрезов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. По теореме 4 $\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = 0$. Учитывая, что интегрирование по каждому разрезу γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ совершается два раза (в противоположных направлениях) и, следовательно, $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0$, получаем формулу (12).

Отметим частный случай следствия 2. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D (не обязательно односвязной) и пусть γ и γ_1 — простые замкнутые кривые (одна из них лежит внутри другой), образующие границу области $D_1 \subset D$ (рис. 44).

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{13}$$

В формуле (13) обход кривых γ и γ_1 совершается в одном и том же направлении. Из равенства (13) следует, что если замкнутый контур γ произвольно деформируется в области, где функция

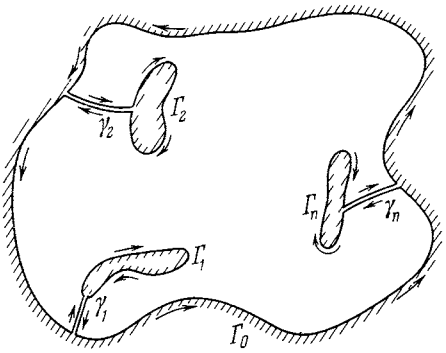


Рис. 43

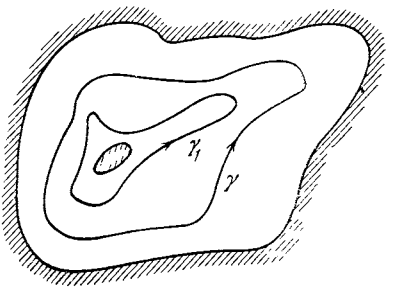


Рис. 44

$f(z)$ дифференцируема, то величина интеграла $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ при этом не меняется.

4. Интеграл и первообразная. Пусть функция $f(z)$ определена в области D, а функция $F(z)$ дифференцируема в этой области. Если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$, то функция $F(z)$ называется *первообразной функции $f(z)$ в области D.*

Теорема 5. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{14}$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в области D. Так как интеграл (14) не зависит от пути интегрирования (следствие 1), то функция $F(z)$ однозначна в области D. Покажем, что $F(z)$ есть первообразная функции $f(z)$, т. е.

$$F'(z) = \left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right)' = f(z).$$

Пусть $z+\Delta z$ — точка области D, лежащая в достаточно малой окрестности точки $z \in D$. Рассмотрим отношение

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right\}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{15}$$

Покажем, что разность $\sigma=\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)$ стремится к нулю при $\Delta z \to 0$.

Так как $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta=\Delta z$ (§ 5, пример 1), то

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta=f(z). \tag{16}$$

Используя независимость интегралов (15) и (16) от пути интегрирования, возьмем в качестве пути интегрирования отрезок, соединяющий точки z и $z+\Delta z$. Тогда

$$\sigma=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta,$$

откуда

$$|\sigma| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta|. \tag{17}$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $|z-\zeta|<\delta$ имеет место неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon. \tag{18}$$

Так как в (17) ζ принадлежит отрезку $[z,\ z+\Delta z]$, то $|z-\zeta| \leqslant |\Delta z|$ и, следовательно, неравенство (18) справедливо, если $|\Delta z|<\delta$. Из (17) и (18) получаем $|\sigma|<\dfrac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|$, т. е. $|\sigma|<\varepsilon$, если $|\Delta z|<\delta$. Следовательно, существует

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z),$$

т. е. $F'(z)=f(z)$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 5 вытекает

Следствие 3. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D, и интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой, ле-*

жащей в области D, равен нулю. Тогда функция $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ *есть первообразная функции* $f(z)$.

Заметим, что если $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$ в области D, то функция $F(z)+C$, где C — произвольная комплексная постоянная, также является первообразной функции $f(z)$ в области D. Справедливо и обратное утверждение, а именно, имеет место следующая

Теорема 6. *Совокупность всех первообразных функции* $f(z)$ *в области* D *определяется формулой* $F_1(z)+C$, *где* $F_1(z)$ — *какая-нибудь первообразная функции* $f(z)$, *а* C — *произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две первообразные функции $f(z)$ в области D. Тогда функция $F(z)=F_2(z)-F_1(z)=u+iv$ есть постоянная в области D. Действительно, по условию $F'(z)=F_2'(z)-F_1'(z)=f(z)-f(z)=0$ для всех $z\in D$. Отсюда следует (§ 7, формулы (8), (9)), что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$ в области D, и по известной теореме из курса математического анализа получаем $F(z)\equiv\text{const}$, т. е. $F_2(z)=F_1(z)+C$, где C — комплексная постоянная.

Следствие 4. *При условиях теоремы* 5 *любая первообразная* $F(z)$ *функции* $f(z)$ *выражается формулой*

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta+C, \tag{19}$$

где C — *комплексная постоянная.*

Следствие 5. *При условиях теоремы* 5 *имеет место формула Ньютона — Лейбница*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta=F(z_1)-F(z_0). \tag{20}$$

Доказательство. Полагая в формуле (19) $z=z_0$, получаем $C=F(z_0)$. Взяв, далее, в (19) $z=z_1$, находим

$$F(z_1)=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta+C=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta+F(z_0),$$

откуда и вытекает равенство (20).

Следствие 6. *Если функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 5, *то справедлива формула интегрирования*

по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\, g'(\zeta)\, d\zeta = [f(\zeta) g(\zeta)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta. \tag{21}$$

Доказательство. Интегрируя тождество $fg' = (fg)' - gf'$ и пользуясь формулой

$$\int_{z_0}^{z_1} (fg)'\, d\zeta = f(z_1)\, g(z_1) - f(z_0)\, g(z_0) = [f(\zeta)\, g(\zeta)]\Big|_{z_0}^{z_1},$$

получаем равенство (21).

Отметим, что интегралы от дифференцируемых элементарных функций комплексного переменного в односвязной области вычисляются с помощью тех же методов и формул, что и в случае действительных функций. Так, например,

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{\zeta} d\zeta = e^{z_2} - e^{z_1}; \quad \int_{z_1}^{z_2} \zeta^n d\zeta = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1} \quad (n \geqslant 0 \text{ — целое}).$$

Пример 1. Функция $f(z) = 1/z$ дифференцируема в неодносвязной области D: $0 < |z| < \infty$. Пусть $\widetilde{D}$ — односвязная область и пусть $\widetilde{D} \subset D$. Тогда функция

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \widetilde{D},$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в области $\widetilde{D}$, является в силу теоремы 6 первообразной для функции $f(z)$ и $F'(z) = 1/z$. Однако, функция

$$\Phi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D,$$

неоднозначна в области D, так как $\int_{|z|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \neq 0$. □

§ 10. Интегральная формула Коши

Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексного переменного — интегральная формула Коши.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и пусть простая замкнутая кривая γ лежит в D и ориентирована положительно. Тогда для любой точки z,*

лежащей внутри γ, *справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{1}$$

Формула (1) называется *интегральной формулой Коши.*

Доказательство. Функция $f(\zeta)/(\zeta - z)$ дифференцируема по ζ в области D с выколотой точкой z. Выберем ρ так, чтобы круг $|\zeta - z| < \rho$ вместе с его границей C_ρ: $|\zeta - z| = \rho$ лежал внутри γ. Тогда, используя следствие 2 из интегральной теоремы Коши (§ 9, формула (13)), получаем (рис. 45)

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = J_1 + f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где $J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$. Так как $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$ (§ 5, пример 3), то

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = J_1 + f(z), \tag{2}$$

и поэтому для доказательства формулы (1) достаточно установить, что $J_1 = 0$.

В силу непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|f(\zeta) - f(z_1)| < \varepsilon$ выполняется при $|\zeta - z| < \delta$. Следовательно,

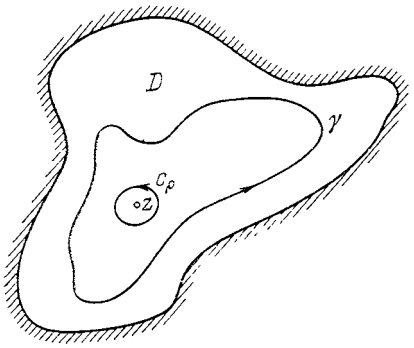


Рис. 45

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{C_\rho}|d\zeta| = \varepsilon,$$

если $\rho \leqslant \delta$. Учитывая, что J_1 не зависит от ρ, получаем $J_1 = 0$, т. е. $J = f(z)$. Формула (1) доказана.

Замечание 1. Пусть D — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда для любой точки z, лежащей внутри D, имеет место

формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{3}$$

Формула (3) доказывается так же, как и формула (1); при этом используется теорема 4 § 9. Эта формула остается в силе и в том случае, когда D — многосвязная область. Доказательство формулы (3) для случая многосвязной области аналогично доказательству формулы (12) § 9.

С помощью формулы (3) значение функции $f(z)$ внутри области выражается через ее значения на границе этой области.

Отметим частный случай формулы (3). Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и пусть γ и γ_1 — простые замкнутые кривые (γ_1 лежит внутри γ), образующие границу области $D_1 \subset D$ (см. рис. 44). Тогда для любой точки $z \in D_1$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{4}$$

В формуле (4) кривые γ и γ_1 ориентированы положительно.

Замечание 2. Если в правой части формулы (3) z принадлежит внешности кривой Г, т. е. z лежит вне $\overline{D}$, то подынтегральная функция дифференцируема по ζ всюду в D и по теореме Коши интеграл равен нулю. Таким образом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \text{ вне } \overline{D}. \end{cases}$$

Теорема о среднем. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в круге K: $|z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$. Тогда значение этой функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности, т. е.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть в формуле (3) Г есть окружность радиуса R с центром в точке z_0. Тогда

$$\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad d\zeta = iRe^{i\varphi}d\varphi,$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Формула (5) доказана.

Теорема о среднем для гармонических функций. *Пусть функция*

$$u(z)=u(x, y), \quad z=x+iy,$$

гармоническая в круге K: $|z-z_0|<R$, *непрерывна в замкнутом круге* $\overline{K}$. *Тогда*

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ — регулярная в круге K функция такая, что $\operatorname{Re} f(z)=u(z)$.

По теореме о среднем

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi, \quad 0<\rho<R. \tag{7}$$

Отделяя в формуле (7) действительные части, имеем

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi,$$

откуда, переходя к пределу при $\rho\to R$, получаем формулу (6).

§ 11. Степенные ряды

1. Область сходимости степенного ряда. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

где a, c_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — заданные комплексные числа, z — комплексное переменное. При $a=0$ ряд (1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{2}$$

Очевидно, все свойства степенных рядов вида (2) справедливы и для рядов вида (1).

Областью сходимости степенного ряда (2) называется множество всех точек z, в которых ряд (2) сходится. Точка $z=0$ всегда принадлежит области сходимости степенного ряда (2). Существуют степенные ряды, которые сходятся только при $z=0$ (пример 3).

Пример 1. Ряд $\sum_{n=0}(-1)^n z^n$ сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. □

Пример 2. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ сходится во всей комплексной плоскости, так как для любого z можно указать такое n_0, что при $n > n_0$ имеет место неравенство $|z/n| < 1/2$, т. е. $|z^n/n^n| < 1/2^n$, откуда вытекает сходимость ряда в точке z. □

Пример 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ сходится лишь при $z = 0$, так как если $z \neq 0$, то при $n > 1/|z|$ имеем $|nz| > 1$ и $|nz|^n > 1$ (не выполняется необходимое условие сходимости ряда). □

Теорема 1 (теорема Абеля). *Если степенной ряд* (2) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится в круге* K_0: $|z| < |z_0|$, *а в любом меньшем круге* K_1: $|z| \leqslant R_1 < |z_0|$ *этот ряд сходится равномерно.*

Доказательство. В силу сходимости ряда (2) в точке z_0 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$ и, следовательно, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех n имеет место неравенство $|c_n z_0^n| < M$. Пусть z — произвольная точка круга K_0. Тогда

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n, \tag{3}$$

где $q = |z/z_0| < 1$, и из (3) вытекает абсолютная сходимость ряда (2) в круге K_0.

Если $z \in K_1$, то $|c_n z^n| \leqslant M |z/z_0|^n \leqslant Mq_1^n$, где $q_1 = R_1/|z_0| < 1$ не зависит от z, и по признаку Вейерштрасса ряд (2) сходится равномерно в круге K_1.

Пусть R — точная верхняя грань расстояний от точки $z = 0$ до точек z, в которых ряд (2) сходится. Тогда при $|z| > R$ этот ряд расходится. Из теоремы Абеля вытекает

Следствие 1. *Ряд* (2) *сходится в круге* K: $|z| < R$, *а в любом меньшем круге* $|z| \leqslant R_1 < R$ *этот ряд сходится равномерно.*

Круг K называется *кругом сходимости*, а его радиус R — *радиусом сходимости* ряда (2). В точках окружности $|z| = R$ ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. Если ряд (2) сходится только при $z = 0$, то его радиус сходимости $R = 0$, а если он сходится во всей комплексной плоскости, то $R = \infty$.

Радиус сходимости ряда (2) определяется формулой Коши — Адамара

$$R = 1/l, \quad l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{4}$$

Доказательство формулы (4) см. в [1].

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{5}$$

составленный из производных членов ряда (2). Так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то из (4) вытекает

Следствие 2. *Радиус сходимости ряда* (5) *равен радиусу сходимости ряда* (2).

2. Почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 2. *Пусть радиус сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{6}$$

равен R ($R \neq 0$). *Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге* $|z| < R$ *любое число раз. Получаемые при дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* (6).

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{7}$$

составленный из производных членов ряда (6). В силу следствия 2 ряд (7) сходится равномерно в круге K_1: $|z| \leqslant R_1 < R$ и его сумма $S(z)$ непрерывна в K_1. Покажем, что функция $f(z)$ дифференцируема в круге K_1 и

$$S(z) = f'(z). \tag{8}$$

Пусть γ — произвольная кривая, лежащая в круге K_1 и соединяющая точки 0 и z. Тогда (§ 9)

$$\int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

Следовательно,

$$\int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta = c_n z^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Интегрируя почленно по кривой γ (п. 2 § 5) равномерно сходящийся ряд (7) и учитывая, что интеграл $\int_0^z S(\zeta)\, d\zeta$ не зависит от пути интегрирования, получаем

$$\int_0^z S(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \tag{10}$$

Из (10) и (6) находим

$$\int_0^z S(\zeta)\,d\zeta = f(z) - c_0. \tag{11}$$

В силу следствия 3 § 9 функция $\int_0^z S(\zeta)\,d\zeta$ является первообразной для функции $S(z)$ и, следовательно, $S(z) = f'(z)$. Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в круге K_1 и имеет место равенство (8), т. е. ряд (6) можно почленно дифференцировать в круге K_1. Но радиус R_1 круга K_1 можно взять сколь угодно близким к R, и поэтому ряд (6) можно почленно дифференцировать в круге K.

Операцию почленного дифференцирования, очевидно, можно применить к ряду (6) любое число раз. Теорема доказана.

Следствие 3. *Коэффициенты c_n степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{12}$$

сходящегося в круге K: $|z-a| < R$ $(R \neq 0)$, определяются формулами

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Доказательство. Применяя теорему 2 к степенному ряду (12), получаем

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z-a) + \ldots \tag{14}$$

для всех $z \in K$. Полагая в (14) и (12) $z = a$, приходим к формулам (13).

Из формул (13) вытекает единственность разложения функции в степенной ряд.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$. Таким образом, всякий степенной ряд (12) в его круге сходимости есть ряд Тейлора суммы этого ряда.

§ 12. Свойства регулярных функций

Определение регулярной функции было дано в § 7 (п. 4). В этом параграфе будет доказана эквивалентность понятий дифференцируемости и регулярности в области и рассмотрены свойства регулярных функций.

1. Регулярность дифференцируемой в области функции.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D, то она регулярна в этой области.*

Доказательство. Пусть $z = a$ — произвольная точка области D. Рассмотрим круг K: $|z - a| < \rho$, $\rho > 0$, лежащий в области D вместе со своей границей γ_ρ: $|\zeta - a| = \rho$. Пусть z — произвольная точка круга K. В силу интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{1}$$

Разложим функцию $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд (геометрическую прогрессию) по степеням $z - a$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \tag{2}$$

Если $\zeta \in \gamma_\rho$, то

$$|\zeta - a| = \rho, \quad \left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| = \frac{|z - a|}{\rho} < 1,$$

и, следовательно, ряд (2) сходится равномерно по ζ на окружности γ_ρ (признак Вейерштрасса). Ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n, \tag{3}$$

полученный из ряда (2) умножением на $f(\zeta)$, также сходится равномерно на γ_ρ, так как функция $f(\zeta)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на γ_ρ. Интегрируя почленно по γ_ρ ряд (3), в силу равенства (1) получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \tag{4}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \tag{5}$$

Ряд (4) сходится в круге K: $|z - a| < \rho$, а это означает, что функция $f(z)$ регулярна в точке a. Так как a — произвольная точка области D, то функция $f(z)$ регулярна в области D. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и теоремы 4 § 7 вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была регулярна в области D, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой области.*

Таким образом, в области D понятия дифференцируемости и регулярности эквивалентны. Отсюда и из свойств дифференци-

руемых функций (§ 7), в частности, вытекает, что если функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области D, то их сумма, произведение и частное (при условии $g(z) \neq 0$) также регулярны в области D.

Аналогично, если функция $f(z)$ регулярна в области D, а функция $F(w)$ регулярна в области G и если множество значений функции $w = f(z)$ $(z \in D)$ принадлежит области G, то функция $\Phi(z) = F[f(z)]$ регулярна в D.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Ряд (4) заведомо сходится в круге* $|z-a| < R_1$, *где* R_1 — *расстояние от точки* $z=a$ *до границы области* D, *в которой функция* $f(z)$ *дифференцируема.*

Поэтому радиус сходимости степенного ряда (4) не меньше, чем R_1.

Следствие 3. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в круге* K: $|z-a| < R$, *то она представляется рядом Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

сходящимся во всем круге K.

Следствие 4. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в точке* $z=a$, *то она регулярна в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Регулярная функция $f(z)$ представляется в некотором круге K: $|z-a| < \rho$ сходящимся рядом (4) и, следовательно, дифференцируема в этом круге (§ 11, теорема 2). Но по теореме 1 функция $f(z)$ регулярна в круге K. Это означает, что если $z_0 \in K$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Полученный ряд сходится в некотором круге $|z-z_0| < \rho_1$, $\rho_1 \geqslant d$, где d — расстояние от точки z_0 до границы круга K.

Замечание 1. Функция, дифференцируемая в точке $z=a$, не обязана быть регулярной в этой точке, так как регулярная в точке $z=a$ функция дифференцируема не только в самой точке $z=a$, но и в некоторой ее окрестности. Так, функция $f(z) = \bar{z}^2$ дифференцируема только при $z=0$ (§ 7, пример 3, в) и поэтому не является регулярной в точке $z=0$.

2. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции.

Теорема 2. *Если функция* $f(z)$ *дифференцируема в области* D, *то она бесконечно дифференцируема в этой области. Имеет место формула*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D, \tag{6}$$

где γ_ρ — *граница круга* $|\zeta - z| \leqslant \rho$, *лежащего в области* D.

Доказательство. По теореме 1 функция $f(z)$ регулярна в области D. Пусть $z = a \in D$. Так как функция $f(z)$ регулярна в точке $z = a$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7}$$

где ряд (7) сходится в некотором круге $|z-a| < \rho$ $(\rho > 0)$. Согласно теореме 2 § 11 ряд (7) можно почленно дифференцировать в круге $|z-a| < \rho$ любое число раз и, в частности (см. формулы (13) § 11),

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

откуда, заменив a на z, получаем формулу (6).

Из этой теоремы, в частности, следует, что производная регулярной функции есть регулярная функция.

Замечание 2. Равенство (6) формально получается из интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

если продифференцировать ее левую и правую части n раз.

Замечание 3. Если функция $f(z)$ дифференцируема в окрестности точки a, то она регулярна в точке a (теорема 1) и представляется степенным рядом, который является рядом Тейлора для $f(z)$ (§ 11, следствие 3). Таким образом, формальный ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

для функции $f(z)$, дифференцируемой в окрестности точки a, сходится к этой функции в некоторой окрестности точки a. Аналогичное утверждение для функций действительного переменного не имеет места. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

всюду дифференцируема и имеет все производные в точке $x = 0$, равные нулю, и, следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора для $f(x)$ в точке $x = 0$ равны нулю, однако $f(x) \not\equiv 0$.

Из теоремы 2 и п. 3 § 7 вытекает

Следствие 5. *Гармоническая в области функция бесконечно дифференцируема.*

3. Достаточные условия регулярности. Теорема 1 утверждает, что достаточным условием регулярности функции $f(z)$ в области D является дифференцируемость этой функции. Рассмотрим другие достаточные условия.

Теорема 3 (теорема Морера). *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и пусть интеграл от функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен нулю. Тогда функция $f(z)$ регулярна в области D.*

Доказательство. В силу следствия 3 § 9 функция $f(z)$ имеет первообразную, т. е. существует дифференцируемая функция $F(z)$ такая, что $F'(z)=f(z)$ для всех $z\in D$. Согласно теореме 1 функция $F(z)$ регулярна в области D, и, следовательно, ее производная — регулярная в D функция, т. е. функция $f(z)=F'(z)$ регулярна в области D.

Теорема 4 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть функции $f_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в области D, и пусть ряд*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{9}$$

равномерно сходится в каждой замкнутой области, лежащей в D. Тогда функция $f(z)$ регулярна в D.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка области D. Рассмотрим круг K: $|z-z_0|<\delta$, лежащий вместе со своей границей в области D. По условию, ряд (9) равномерно сходится в $\overline{K}$, а значит, и в K. Кроме того, функции $f_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны и, следовательно, непрерывны в K. Поэтому функция $f(z)$ непрерывна в K как сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций.

Пусть γ — любой замкнутый контур, лежащий в круге K. Интегрируя почленно равномерно сходящийся на γ ряд (9), получаем

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma} f_n(z)\,dz.$$

По интегральной теореме Коши $\int_{\gamma} f_n(z)\,dz=0$ $(n=1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $\int_{\gamma} f(z)\,dz=0$. В силу теоремы Морера, функция $f(z)$ регулярна в круге K и, в частности, в точке z_0. Так как z_0 — произвольная точка области D, то функция $f(z)$ регулярна в области D. Теорема доказана.

Теорема 5 (вторая теорема Вейерштрасса). *В условиях предыдущей теоремы ряд* (9) *можно дифференцировать почленно любое число раз. Получаемые при этом ряды равномерно сходятся в каждой замкнутой области* $\overline{D}_1$, *лежащей в области* D.

Мы ограничимся формулировкой второй теоремы Вейерштрасса (доказательство ее содержится, например, в [11]).

Другие достаточные условия регулярности, относящиеся к интегралам, зависящим от параметра, будут даны в § 15.

В заключение п. 3 приведем краткую сводку основных свойств регулярных функций. Заметим, что наряду с термином «регулярная функция» в литературе используются другие эквивалентные термины:

$$\{\textit{регулярная функция}\}\equiv\{\textit{голоморфная функция}\}\equiv$$
$$\equiv\{\textit{однозначная аналитическая функция}\}.$$

Критерии (*необходимые и достаточные условия*) *регулярности функции* $f(z)$ *в области* D:

1) дифференцируемость функции $f(z)$ в области D;

2) условия Коши — Римана.

Достаточные условия регулярности функции $f(z)$ *в области* D дают теорема Морера и первая теорема Вейерштрасса.

Свойства регулярных функций:

1) сумма, разность, произведение регулярных функций $f(z)$ и $g(z)$, а также их частное (при $g(z)\neq 0$) и суперпозиция являются регулярными функциями;

2) регулярная функция бесконечно дифференцируема;

3) для регулярной функции справедливы интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши;

4) первообразная регулярной в односвязной области функции регулярна.

4. Некоторые приемы разложения в степенной ряд. Всякая функция $f(z)$, регулярная в круге $|z-a|<\rho$, разлагается в сходящийся в этом круге (см. следствие 3 из теоремы 1) степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{10}$$

где коэффициенты c_n определяются формулами

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \tag{11}$$

или

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta,\quad \rho_1<\rho. \tag{12}$$

Этот степенной ряд является рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$.

Непосредственным вычислением производных от элементарных функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в точке $z = 0$ (§ 7, формулы (14), (15), (16)) получаются следующие сходящиеся во всей комплексной плоскости разложения:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{13}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{14}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{15}$$

Напомним также ряд

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{16}$$

сходящийся в круге $|z| < 1$.

Заметим, далее, что для нахождения коэффициентов ряда (10) формулы (12) обычно не используются. Часто коэффициенты ряда Тейлора находят, используя известные разложения (в частности, формулы (13)—(16)) и применяя различные искусственные приемы.

Пример 1. Ряд

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (|z| < 1)$$

получается дифференцированием ряда (16). □

Пример 2. Для нахождения ряда Тейлора в окрестности точки $z = 0$ рациональной функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$$

представим ее в виде

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}\right],$$

откуда в силу формулы (16) получим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right] z^{2n},$$

сходящийся в круге $|z| < 1$. □

Приведем некоторые приемы разложения в степенной ряд.

1. Арифметические операции над степенными рядами. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$, регулярные в окрестности точки $z = a$, представляются рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{17}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n, \tag{18}$$

где ряды (17) и (18) сходятся в круге $|z-a| < R$. Тогда имеют место разложения

$$Af(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Ac_n (z-a)^n, \quad A = \text{const}, \tag{19}$$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n)(z-a)^n, \tag{20}$$

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) (z-a)^n. \tag{21}$$

Ряды (19)—(21) сходятся в круге $|z-a| < R$.

Пример 3. Чтобы разложить в ряд в окрестности точки $z = 0$ функцию $e^z \cos z$, можно перемножить ряды (13), (14). Однако для эффективного вычисления коэффициентов разложения удобнее использовать тождество

$$e^z \cos z = e^z \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)} \right).$$

Так как $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$, то в силу (13) получаем разложение

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} e^{i\pi n/4} + 2^{n/2} e^{-i\pi n/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos \frac{\pi n}{4}\, z^n,$$

сходящееся во всей комплексной плоскости. □

2. Метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим задачу об отыскании коэффициентов ряда Тейлора в окрестности точки $z = a$ функции $f(z)$, равной отношению двух регулярных функций $\left(f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \right)$, ряды Тейлора которых известны $(h(a) \neq 0)$. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n,$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $z-a$ в равенстве $f(z)h(z)=g(z)$, получаем уравнения вида $c_0b_n+c_1b_{n-1}+\ldots+c_nb_0=a_n$, из которых можно последовательно найти коэффициенты c_0, c_1, c_2 и т. д. Нетрудно получить выражение для c_n через коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n и b_0, b_1, ..., b_n в виде определителя (см. [11]).

Пример 4. Применив метод неопределенных коэффициентов к функции $\frac{z}{e^z-1}$, получим

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n. \tag{22}$$

Здесь B_n — числа Бернулли, определяемые из соотношений $B_0=1$, $C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+\ldots+C_{n+1}^nB_n=0$ $(n\geqslant 1)$, где C_{n+1}^k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ — биномиальные коэффициенты. Ряд (22) сходится в круге $|z|<2\pi$.

Используя тождество

$$\operatorname{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=i+\frac{2i}{e^{2iz}-1}$$

и формулу (22), получаем разложение

$$z\operatorname{ctg}z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\quad(|z|<\pi). \tag{23}$$

□

3. Ряд степенных рядов. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z), \tag{24}$$

где все ряды

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a)^k\quad(n=1,2,\ldots) \tag{25}$$

сходятся в одном и том же круге K: $|z-a|<\rho$ и, кроме того, ряд (24) равномерно сходится в каждом круге $|z-a|\leqslant\rho_1$, где $\rho_1<\rho$. В силу теорем Вейерштрасса имеем

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^{(k)}(a)}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(k)},$$

откуда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(k)}\right)(z-a)^k. \tag{26}$$

4. Подстановка ряда в ряд. Рассмотрим функцию $f(z)=g[h(z)]$, где функция $w=h(z)$ регулярна в круге K_1:

$|z-a|<R_1$, а функция $g(w)$ регулярна в круге K: $|w-b|<R$, причем $h(a)=b$. Пусть

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(w-b)^n, \quad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

— степенные ряды для функций $g(w)$ и $h(z)$.

Так как функция $h(z)$ регулярна в круге K_1, то существует круг K_2: $|z-a|<R_2\leqslant R_1$ такой, что $|h(z)-h(a)|<R$, т. е. $|w-b|<R$. Функция $f(z)$ регулярна в круге K_2 как суперпозиция регулярных функций. Коэффициенты разложения $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ определяются формулами (25)—(26), где $f_n(z)=b_n[h(z)-b]^n$, так как

$$f(z)\equiv g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(w-b)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n[h(z)-b]^n. \tag{27}$$

Полученный ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n[h(z)-b]^n=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{28}$$

заведомо сходится в круге $|z-a|<R_2$, где R_2 выбирается так, чтобы при $|z-a|<R_2$ выполнялось условие $|w-b|=|h(z)-b|<R$.

5. Переразложение степенного ряда. Отметим следующий частный случай подстановки ряда в ряд. Пусть ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{29}$$

сходится в круге K: $|z-a|<R$ и пусть b — некоторая точка, лежащая в круге K. Представим $z-a$ в виде

$$z-a=(b-a)+(z-b). \tag{30}$$

Из (29) и (30) имеем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n[(z-b)+(b-a)]^n. \tag{31}$$

Если $|z-b|<\rho$, где $\rho=R-|b-a|$, то $|z-a|<R$ и, применяя метод подстановки ряда в ряд, из (31) получаем разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-b)^n, \tag{32}$$

сходящееся в круге $|z-b|<\rho$.

5. Нули регулярной функции. Точка $z=a$ называется *нулем* регулярной функции $f(z)$, если $f(a)=0$.

1. Пусть $a \neq \infty$ — нуль функции $f(z)$. Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в степенной ряд в окрестности точки $z = a$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{33}$$

Так как точка $z = a$ — нуль функции $f(z)$, то $c_0 = f(a) = 0$. Пусть в формуле (33) c_m — первый отличный от нуля коэффициент разложения ($c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$), т. е.

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \; c_m \neq 0. \tag{34}$$

Тогда число m называется *порядком* (или *кратностью*) нуля $z = a$ функции $f(z)$. Так как $c_k = f^{(k)}(a)/(k!)$ ($k = 1, 2, \ldots$), то порядок нуля $z = a$ функции $f(z)$ равен наименьшему порядку производной этой функции, отличной от нуля в точке $z = a$.

Равенство (34) можно записать в виде

$$f(z) = (z-a)^m [c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots], \tag{35}$$

где ряд $h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots$ сходится в том же круге, что и ряд (34). Следовательно, функция $h(z)$ регулярна в точке $z = a$, причем $h(a) = c_m \neq 0$. Итак, если $z = a$ — нуль порядка m функции $f(z)$, то справедлива формула

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \quad h(a) \neq 0, \tag{36}$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке $z = a$.

Обратно, если функция $f(z)$ представляется в виде (36), где функция $h(z)$ регулярна в точке $z = a$, то имеют место формулы (35) и (34), т. е. точка $z = a$ является нулем порядка m функции $f(z)$.

2. Пусть $z = \infty$ — нуль функции $f(z)$. Так как функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$ (п. 4 § 7), то

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \tag{37}$$

По условию, $c_0 = f(\infty) = 0$. Пусть c_m — первый отличный от нуля коэффициент ряда (37), т. е. $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, но $c_m \neq 0$ (число m называется *порядком нуля* $z = \infty$ функции $f(z)$). Тогда

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \frac{1}{z^m}\left(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \ldots\right), \tag{38}$$

откуда

$$f(z) = z^{-m}\psi(z), \quad \psi(\infty) = c_m \neq 0, \tag{39}$$

где функция $\psi(z)$ регулярна в точке $z = \infty$.

Обратно, если функция $f(z)$ представляется в виде (39), где $m \geqslant 1$ — целое, а $\psi(z)$ — регулярная в точке $z=\infty$ функция, то имеет место формула (38), т. е. точка $z=\infty$ является нулем порядка m функции $f(z)$. Таким образом, доказана

Теорема 6. *Точка $a \neq \infty$ тогда и только тогда является нулем порядка m функции $f(z)$, когда эта функция представляется в виде $f(z)=(z-a)^m h(z)$, где функция $h(z)$ регулярна в точке a и $h(a) \neq 0$.*

Аналогично, представление функции $f(z)$ в виде $f(z)=z^{-m}\psi(z)$, где $\psi(z)$ — регулярная в точке $z=\infty$ функция, $\psi(\infty) \neq 0$, $m \geqslant 1$ — целое, является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $z=\infty$ была нулем порядка m функции $f(z)$.

Следствие 6. *Если точка a является нулем порядка m для функции $f(z)$, то для функции $g(z)=[f(z)]^p$ ($p \geqslant 1$ — целое) эта точка является нулем порядка pm.*

Замечание 4. Вытекающая из равенства (36) асимптотическая формула

$$f(z) \sim c_m (z-a)^m, \quad c_m \neq 0 \quad (z \to a) \tag{40}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы регулярная в точке $a \neq \infty$ функция $f(z)$ имела в этой точке нуль порядка m.

Аналогично, функция $f(z)$, регулярная в точке $z=\infty$, имеет в этой точке нуль порядка m в том и только в том случае, когда

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}, \quad A \neq 0 \quad (z \to \infty). \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) можно принять в качестве определения порядка нуля соответственно в точке $z=a$ ($a \neq \infty$) и в точке $z=\infty$.

Пример 5. Функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ имеет нули первого порядка в точках $z_k=\frac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) и в точке $z=\infty$. □

Пример 6. Функция $f(z)=(e^z+1)^3$ имеет нули третьего порядка в точках $z_k=(2k+1)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ □

Пример 7. Функция $f(z)=\frac{(z^3+1)^6}{(z^2+4)^{11}}e^{1/z}$ имеет нули шестого порядка в точках $z_k=e^{(2k+1)\pi i/3}$, $k=0, 1, 2$; точка $z=\infty$ является для этой функции нулем четвертого порядка:

$$f(z) \sim \frac{z^{18}}{z^{22}} e^{1/z} \sim \frac{1}{z^4} \quad (z \to \infty). \quad \square$$

Докажем следующую теорему о нулях регулярной функции:

Теорема 7. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке a и $f(a)=0$. Тогда либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a,*

либо существует такая окрестность точки a, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от a.

Доказательство. Возможны два случая: 1) все коэффициенты ряда (33) равны нулю, тогда $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a; 2) существует такое число $m \geqslant 1$, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, но $c_m \neq 0$.

Во втором случае точка a является нулем порядка m функции $f(z)$ и, следовательно, по теореме 6, $f(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(z)$ — регулярная в точке a функция, $h(a) \neq 0$. В силу непрерывности функции $h(z)$ из условия $h(a) \neq 0$ следует, что $h(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Итак, существует окрестность точки a, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от a. Следовательно, нули регулярной функции изолированы.

§ 13. Обратная функция

1. Теорема об обратной функции. Термин «обратная функция» был введен в п. 1 § 8. Дадим более подробное определение обратной функции.

Пусть функция $w = f(z)$ определена на множестве E и пусть E' — множество значений этой функции (рис. 46). Тогда для каждого значения $w \in E'$ имеется одно или несколько значений $z \in E$ таких, что $f(z) = w$, т. е. для каждого $w \in E'$ уравнение

$$f(z) = w \qquad (1)$$

имеет одно или несколько решений $z \in E$. Эти решения определяют на множестве E' функцию $z = h(w)$, которая называется *обратной к функции* $w = f(z)$.

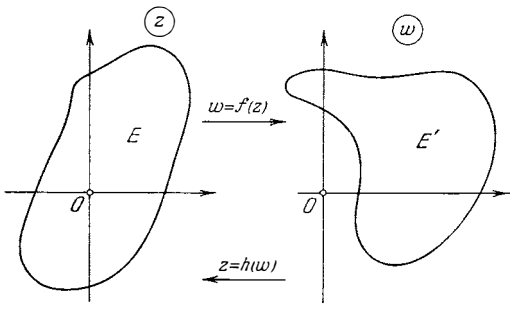


Рис. 46

Таким образом, для нахождения функции, обратной к функции $w = f(z)$, нужно для каждого $w \in E'$ найти все решения уравнения (1). Из определения обратной функции следует, что на множестве E' имеет место тождество

$$f[h(w)] \equiv w.$$

Приведем достаточные условия, при которых обратная функция регулярна.

Теорема об обратной функции. *Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в точке z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Тогда*

1) *существуют круг* K: $|z-z_0|<\rho$ *и круг* K': $|w-w_0|<\rho'$, $w_0=f(z_0)$, *такие, что для каждого* $w\in K'$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $z=h(w)$, *где* $z\in K$;

2) *функция* $z=h(w)$, *обратная к функции* $w=f(z)$, *регулярна в точке* w_0;

3) *в некоторой окрестности точки* w_0 *имеет место формула*

$$h'(w)=\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'[h(w)]}. \tag{2}$$

Доказательство. Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$, заменим уравнение (1) эквивалентной системой уравнений

$$u(x,\ y)=u,\quad v(x,\ y)=v. \tag{3}$$

Якобиан $J(x,\ y)=J(z)$ отображения (3), равный $|f'(z)|^2$ в силу формулы (14) § 8, по условию отличен от нуля в точке $z_0=x_0+iy_0$ и, следовательно, отличен от нуля в некоторой окрестности этой точки.

В силу известной теоремы из курса математического анализа (см. [9]) в некоторой окрестности точки $w_0=u_0+iv_0$ существует однозначное непрерывное отображение $x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$, обратное к отображению (3). Это означает, что существует круг K': $|w-w_0|<\rho'$ такой, что для каждого $w\in K'$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$z=x(u,\ v)+iy(u,\ v)=h(w),$$

такое, что $z\in K$ и $z=h(w)$ — непрерывная функция.

Остается доказать, что функция $h(w)$ регулярна в точке w_0. Пусть $w\in K'$ и $w+\Delta w\in K'$. Рассмотрим отношение $\Delta z/\Delta w$, где $\Delta w\neq 0$, а $\Delta z=h(w+\Delta w)-h(w)$. Заметим, что если $\Delta w\neq 0$, то $\Delta z\neq 0$, так как функция $w=f(z)$ взаимно однозначно отображает достаточно малую окрестность точки z_0 на окрестность точки w_0.

Рассмотрим тождество

$$\frac{\Delta z}{\Delta w}=1\Big/\frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{4}$$

Пусть $\Delta w\to 0$; тогда в силу непрерывности функции $h(w)$ имеем $\Delta z\to 0$. Перейдем к пределу при $\Delta z\to 0$ в правой части равенства (4). Этот предел существует при любом способе стремления к нулю величины Δz, так как функция $w=f(z)$ дифференцируема в окрестности точки z_0, и равен $\frac{1}{f'(z)}$. Следовательно, существует предел левой части равенства (4) при $\Delta w\to 0$ и имеет место формула (2). Теорема доказана.

2. Функция $\sqrt{z}$. Рассмотрим функцию $w=z^2$. Для нахождения обратной функции нужно решить уравнение

$$z^2=w \tag{5}$$

относительно z. Уравнение (5), как известно (п. 5 § 1), при $w \neq 0$ имеет два решения. Если одно из решений уравнения (5) обозначить через $\sqrt{w}$, то другое решение есть $-\sqrt{w}$.

Таким образом, функция $z = h(w)$, обратная к функции $w = z^2$, является двузначной. Заметим, что функция $w = z^2$ определена во всей комплексной плоскости z и множество ее значений совпадает со всей комплексной плоскостью w.

Естественно поставить вопрос о существовании и способе построения однозначной непрерывной функции такой, чтобы ее значение в каждой точке области D совпадало с одним из значений двузначной функции, обратной к функции $w = z^2$.

Будем, как обычно, обозначать независимое переменное z, а функцию w. Пусть D_0 — плоскость z с разрезом вдоль действительной положительной полуоси. Запишем z в показательной форме и рассмотрим в области D_0 функцию

$$w = f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \tag{6}$$

Функция $f_1(z)$ является однозначной и непрерывной в области D_0 и удовлетворяет условию $f_1^2(z) = z$, т. е. функция $f_1(z)$ является решением уравнения

$$w^2 = z. \tag{7}$$

Множество значений функции $w = f_1(z)$ — верхняя полуплоскость (рис. 47). Это вытекает из определения функции (6), а также

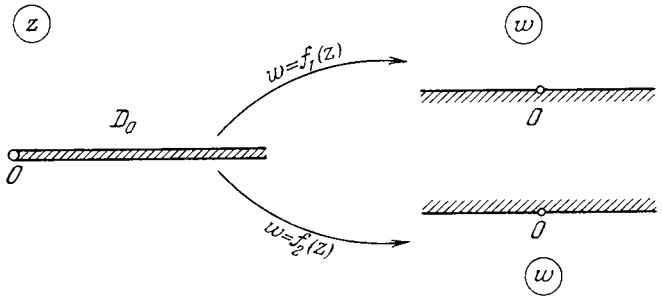


Рис. 47

из того факта, что при отображении (7), обратном к отображению (6), верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ переходит в плоскость z с разрезом по положительной действительной полуоси (пример 3 § 8).

Таким образом, функция $w = f_1(z)$ однозначна и непрерывна в области D_0, т. е. в плоскости с разрезом $[0, +\infty)$, и отображает эту область на верхнюю полуплоскость.

Аналогично, функция

$$w = f_2(z) = -\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

однозначна, непрерывна в области D_0, удовлетворяет условию $f_2^2(z) = z$ и отображает область D_0 на нижнюю полуплоскость (рис. 47).

Будем говорить, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — непрерывные в области D_0 ветви двузначной функции $\sqrt{z}$. Эти функции дифференцируемы, а следовательно, и регулярны в области D_0 в силу теоремы об обратной функции. По формуле (2) находим

$$f_k'(z) = \frac{1}{2f_k(z)}, \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Впрочем, дифференцируемость функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и формулы (8) можно установить, используя условия Коши — Римана в полярных координатах (пример 4 § 7). Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ называются *регулярными ветвями* двузначной функции $\sqrt{z}$ в области D_0. Нередко обе эти ветви обозначают одним и тем же символом $\sqrt{z}$. Для того чтобы определить, какая из двух возможных ветвей двузначной функции $w = \sqrt{z}$ рассматривается, достаточно указать а) либо значение функции в какой-нибудь внутренней точке области D_0; б) либо значение функции в граничной точке (на разрезе), но при этом должно быть указано, на каком берегу разреза берется точка — верхнем или нижнем.

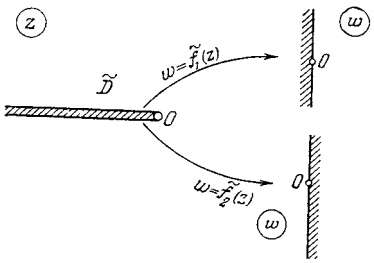


Рис. 48

Например, если рассматривается регулярная ветвь функции $\sqrt{z}$, которая в точке $z_0 = -1$ принимает значение $w_0 = i$, то речь идет о функции $w = f_1(z)$, отображающей область D_0 на верхнюю полуплоскость; если же известно, что $-1 \to -i$, то имеется в виду функция $w = f_2(z)$, отображающая область D_0 на нижнюю полуплоскость.

Аналогично, регулярная ветвь функции $\sqrt{z}$, принимающая в точке $z_0 = 1 + 0 \cdot i$, лежащей на верхнем берегу разреза $[0, +\infty)$, значение 1, есть функция $w = f_1(z)$; если же $z_0 = 1 + 0 \cdot i \to -1$, то речь идет о функции $w = f_2(z)$.

Рассмотрим теперь область $\tilde{D}$ — плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси (рис. 48). Очевидно, в этой области можно выделить две регулярные ветви функции $\sqrt{z}$:

$$w = \tilde{f}_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2},$$

$$w = \tilde{f}_2(z) = -\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \quad (z = re^{i\varphi},\ -\pi < \varphi < \pi).$$

Функция $w = \tilde{f}_1(z)$ отображает область D на правую полупло-

скость ($\operatorname{Re} w > 0$), а функция $w = f_2(z)$ отображает область D на левую полуплоскость (ср. п. 2 § 8; рис. 37).

Итак, если в качестве области взята плоскость z с разрезом вдоль положительной или отрицательной части действительной оси, то в такой области двузначная функция $\sqrt{z}$ *распадается на две регулярные ветви.* Легко убедиться в том, что регулярные ветви функции $\sqrt{z}$ можно выделять и в плоскости с разрезом по лучу $\arg z = \alpha$. Обозначим эту область D_α, так что $D_\pi = D$. Проведенное исследование позволяет утверждать, что

1) двузначная функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви в области D_α, т. е. в плоскости с разрезом по лучу $\arg z = \alpha$, соединяющему точки $z = 0$ и $z = \infty$;

2) в точке z_0 области D_α эти ветви принимают значения соответственно w_0 и $-w_0$;

3) множество значений регулярных ветвей существенно зависит от области D_α, в которой эти ветви выделяются;

4) регулярная ветвь функции $\sqrt{z}$ в области D_α однозначно определяется, если указан либо образ внутренней точки этой области, либо образ граничной точки (в последнем случае должно быть сказано, о точке какого из двух берегов разреза идет речь).

3. Функция $\ln z$. Понятие логарифма комплексного числа было введено в п. 6 § 4. Логарифмическую функцию в комплексной плоскости естественно ввести как функцию, обратную к показательной. Рассмотрим уравнение относительно w:

$$e^w = z. \tag{9}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тогда из уравнения (9) имеем $u = \ln r$, $v = \varphi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следовательно,

$$w = \ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \tag{10}$$

где $\arg z$ — фиксированное значение аргумента числа z, k — целое. Таким образом, уравнение (9) при $z \neq 0$ имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой (10), т. е. логарифмическая функция в каждой точке z $(z \neq 0)$ принимает бесчисленное множество значений. Действительная часть этой функции $(\ln |z|)$ определяется однозначно.

Рассмотрим вопрос о возможности выделения в области D однозначной непрерывной ветви логарифма, т. е. непрерывной функции, значение которой в каждой точке области D совпадает с одним из значений многозначной функции $\ln z$. Очевидно, что однозначную непрерывную ветвь логарифма можно выделить в области D, если в этой области функция $\arg z$ допускает выделение однозначной непрерывной ветви.

Как и в случае функции $\sqrt{z}$, возьмем в качестве области D область D_0, т. е. плоскость с разрезом $[0, +\infty)$. В этой области

функция $\varphi = \arg z$ допускает выделение однозначных непрерывных ветвей. Пусть $\varphi = \arg z$ (обозначение то же, что и для многозначной функции) — непрерывная ветвь аргумента в области D_0, такая, что

$$0 < \varphi < 2\pi. \tag{11}$$

Сохраняя прежнее обозначение для логарифмической функции, положим

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg z, \tag{12}$$

где $\varphi = \arg z$ удовлетворяет условию (11).

Функция $w = \ln z$ удовлетворяет уравнению (9). Из (11)—(12) следует, что эта функция однозначна и непрерывна в области D_0. Функция $w = \ln z$ взаимно однозначно отображает область D_0 на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$ (рис. 49).

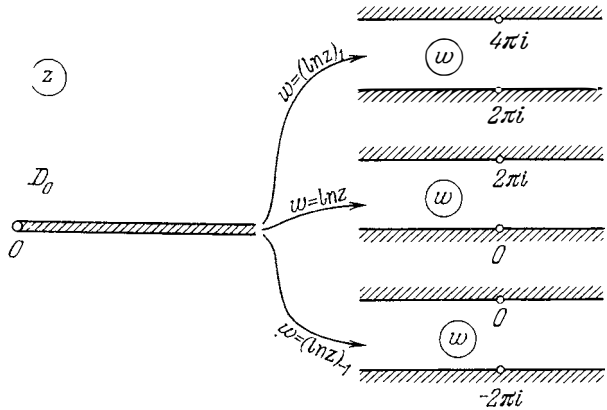


Рис. 49

Используя теорему об обратной функции или пример 4 § 7, получаем следующий результат: функция $\ln z$, определяемая условиями (11)—(12), регулярна в области D_0. Она называется *регулярной ветвью в области D_0 многозначной логарифмической функции*, а ее производная вычисляется по формуле

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Заметим, что в области D_0 существует бесконечно много однозначных непрерывных ветвей аргумента, и все они имеют вид

$$(\arg z)_k = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ — целое}), \tag{13}$$

где $\varphi = \arg z$ — рассмотренная выше ветвь аргумента, удовлетворяющая условию (11). Взяв в формуле (13) $k = 1$, получим ветвь аргумента $(\arg z)_1$ и соответствующую регулярную ветвь

логарифма

$$w = (\ln z)_1 = \ln |z| + i \arg z + 2\pi i = \ln z + 2\pi i. \qquad (14)$$

Функция $(\ln z)_1$ отображает область D_0 на полосу $2\pi < \operatorname{Im} w < 4\pi$ (рис. 49).

Аналогично, взяв в (13) $k = -1$, получим функцию

$$w = (\ln z)_{-1} = \ln z - 2\pi i, \qquad (15)$$

осуществляющую взаимно однозначное отображение области D_0 на полосу $-2\pi < \operatorname{Im} z < 0$ (рис. 49).

Функции $(\ln z)_1$ и $(\ln z)_{-1}$ являются регулярными ветвями логарифма в области D_0.

Для выделения в области D_0 регулярной ветви логарифма достаточно указать соответствующую непрерывную ветвь аргумента (формула (13)); последняя однозначно определяется значением аргумента, заданного в какой-либо внутренней точке области D_0 или на ее границе, т. е. на верхнем или нижнем берегу разреза $(0, +\infty)$. В частности, регулярная ветвь логарифма, принимающая действительные значения на верхнем берегу разреза, определяется формулами (11)—(12).

В заключение отметим, что регулярные ветви логарифмической функции можно выделять и в других областях. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в главе IV.

§ 14. Теорема единственности

1. Теорема единственности.

Теорема 1 (единственности). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D. Пусть $f(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{z_n\}$ — последовательность различных точек, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.*

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - a$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \qquad (1)$$

и покажем, что все коэффициенты этого ряда равны нулю. Допустим противное; тогда, по теореме 7 § 12, существует окрестность U точки a такая, что $f(z) \neq 0$ при $z \in U$, $z \neq a$. Это противоречит условию теоремы; следовательно, все коэффициенты c_n равны нулю. Ряд (1) сходится в круге K: $|z - a| < \rho_0$, где ρ_0 — расстояние от точки a до границы области D. Таким образом, $f(z) \equiv 0$ в круге K.

Пусть b — произвольная точка области D; покажем, что $f(b) = 0$. Соединим точки a и b ломаной γ, лежащей в области D.

Пусть ρ — расстояние между ломаной γ и границей Γ области D; так как γ — конечная ломаная, лежащая в D, то $\rho > 0$. Построим круги $K_0, K_1, \ldots, K_n$ с центрами в последовательных точках $z_0 = a, z_1, \ldots, z_n = b$ ломаной γ и радиусами, равными ρ; точки z_j выберем так, чтобы $|z_j - z_{j-1}| < \rho/2$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда все круги K_j лежат в области D, а центр круга K_{j+1} лежит внутри круга K_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ (рис. 50).

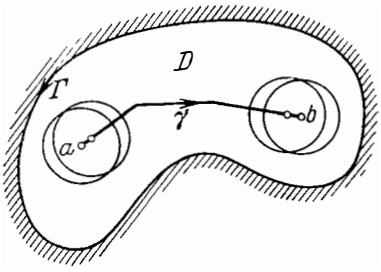


Рис. 50

Так как $\rho_0 \geqslant \rho$, то круг K содержит круг K_0; следовательно, $f(z) \equiv 0$ в круге K_0. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_1$. Круг K_1 лежит в области D, поэтому этот ряд сходится в круге K_1. Поскольку центр z_1 круга K_1 лежит в круге K_0, то $f(z) \equiv 0$ в окрестности точки z_1 и тем же способом, что и выше, можно показать, что $f(z) \equiv 0$ в круге K_1. Продолжая эти рассуждения, получаем, что функция $f(z)$ тождественно равна нулю во всех кругах K_j, так что $f(b) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \equiv 0$ на множестве E, которое содержится в D и имеет предельную точку $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.*

Доказательство. По определению предельной точки существует последовательность различных точек $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $z_n \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Так как $f(z_n) = 0$ при всех n и точки z_n лежат в D, то $f(z) \equiv 0$ в D по теореме единственности.

Следствие 2. *Пусть функции $f(z)$, $g(z)$ регулярны в области D и совпадают на множестве E, которое содержится в D и имеет предельную точку $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в области D.*

Доказательство. Функция $h(z) = f(z) - g(z)$ регулярна в области D и $h(z) \equiv 0$ при $z \in E$, так что $h(z) \equiv 0$ в D в силу следствия 1. Поэтому $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

2. Замечания и дополнения.

Замечание 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin(1/z)$. Тогда $f(z_n) = 0$, где $z_n = 1/(\pi n)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, но тем не менее $f(z) \not\equiv 0$. Этот пример не противоречит теореме единственности, так как предельная точка $a = 0$ последовательности $\{z_n\}$ не является точкой регулярности функции $\sin\dfrac{1}{z}$.

Замечание 2. Теорема единственности и следствия 1, 2 справедливы и в том случае, если D — область расширенной комплексной плоскости.

Чаще всего будет использоваться следующий, ослабленный вариант теоремы единственности:

Следствие 3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z)\equiv 0$ на некоторой кривой γ, лежащей в D, или в некотором круге $K\subset D$. Тогда $f(z)\equiv 0$ в области D.*

Теорема единственности является одним из важнейших свойств регулярных функций и лишний раз показывает, сколь сильно отличаются свойства дифференцируемых функций комплексного переменного от свойств дифференцируемых функций действительного переменного. Пусть, например, функция $f(x)$ на некотором отрезке I действительной оси непрерывно дифференцируема, или дважды непрерывно дифференцируема, или n раз непрерывно дифференцируема, или бесконечно дифференцируема. Пусть $I_1\subset I$ — меньший отрезок, и на нем задана функция $g(x)$, обладающая теми же дифференциальными свойствами, что и $f(x)$. Тогда существует бесконечно много функций $f(x)$, имеющих указанные дифференциальные свойства при $x\in I$ и совпадающих с $g(x)$ при $x\in I_1$.

§ 15. Аналитическое продолжение

1. Определение и основные свойства.

Определение 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(z)$ определена на множестве E;

2) функция $F(z)$ регулярна в области D, содержащей множество E;

3) $F(z)\equiv f(z)$ при $z\in E$.

Тогда функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением функции $f(z)$ (с множества E в область D)*.

Важнейшим свойством аналитического продолжения является его единственность.

Теорема 1 (принцип аналитического продолжения). *Пусть множество E имеет предельную точку a, принадлежащую области D. Тогда аналитическое продолжение с множества E в область D единственно.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(z)$, определенная на E, имеет два аналитических продолжения $F_1(z)$, $F_2(z)$ в область D. Так как $F_1(z)\equiv F_2(z)$ при $z\in E$, то, по теореме единственности, $F_1(z)\equiv F_2(z)$ в области D.

В частности, если E — кривая, лежащая в области D, или E — подобласть области D, то существует не более одного аналитического продолжения функции $f(z)$ в область D.

Пример 1. Найдем аналитическое продолжение функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Этот ряд сходится и является регулярной функцией в круге K: $|z|<1$. Имеем $f(z)=1/(1-z)$, $|z|<1$.

Функция $F(z)=1/(1-z)$ регулярна в области D (это расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой $z=1$) и $F(z)\equiv f(z)$ при $|z|<1$. Следовательно, функция $F(z)$ является (единственным) аналитическим продолжением функции $f(z)$ с множества K в область D. □

2. Аналитическое продолжение экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ были введены в § 4. Покажем, что эти функции можно определить как аналитическое продолжение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Положим, по определению,

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Ряд в правой части сходится при всех z, поэтому сумма ряда регулярна при всех z (§ 12). Функция e^z при действительных $z=x$ совпадает с известной из анализа функцией e^x. Следовательно, функция e^z является аналитическим продолжением функции e^x с действительной оси на всю комплексную плоскость.

Введем следующее

Определение 2. Функция, регулярная во всей комплексной плоскости, называется *целой функцией*.

В частности, полиномы и e^z — целые функции.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$, $g(z)$ — *целые функции. Тогда* $f(z)\pm g(z)$, $f(z)g(z)$, $f(g(z))$ — *целые функции.*

Доказательство следует из определения 2 и свойств регулярных функций (§ 12).

Введем функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, определив их как суммы степенных рядов:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как все эти ряды сходятся при любых z, то функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ — целые. Кроме того, эти функции являются аналитическим продолжением функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ с действительной оси в комплексную плоскость.

Введем функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, полагая по определению

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функция $\operatorname{tg} z$ регулярна при всех $z \neq \infty$, при которых $\cos z \neq 0$, т. е. при $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Функция $\operatorname{ctg} z$ регулярна при $z \neq k\pi$, функция $\operatorname{th} z$ — при $z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, функция $\operatorname{cth} z$ — при $z \neq ik\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Из курса математического анализа и из элементарной тригонометрии известны теоремы сложения и ряд тождеств для тригонометрических и гиперболических функций при действительных значениях аргумента. Можно показать, что эти формулы остаются справедливыми и для комплексных значений аргумента.

Пример 2. Покажем, что

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

при всех z.

По теореме 2 функция $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ — целая, так как $\sin z$, $\cos z$ — целые функции. Пользуясь тем, что $f(x) \equiv 0$ при действительных x, по теореме единственности получаем, что $f(z) \equiv 0$ при всех z. □

Пример 3. Покажем, что

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{1}$$

при любых комплексных z_1, z_2.

При действительных z_1, z_2 формула (1) справедлива. Пусть z_2 действительно и фиксировано, тогда левая и правая части равенства (1) — целые функции от переменного z_1. При действительных z_1 эти целые функции совпадают, следовательно, по теореме единственности, эти функции совпадают при всех комплексных z_1. Итак, формула (1) верна при любых комплексных z_1 и при любых действительных z_2.

Пусть теперь z_1 комплексно и фиксировано. Тогда левая и правая части равенства (1) — целые функции от z_2. Так как они совпадают при любых действительных z_2, то они совпадают при любых комплексных z_2. Тем самым формула (1) доказана при любых комплексных z_1 и z_2. □

§ 16. Интегралы, зависящие от параметра

1. Регулярность интегралов, зависящих от параметра. Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta, z)\, d\zeta. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) γ — *конечная кусочно гладкая кривая;*

2) *функция* $f(\zeta, z)$ *непрерывна по* (ζ, z) *при* $\zeta \in \gamma$, $z \in D$, *где* D — *область в комплексной плоскости;*

3) *при каждом фиксированном* $\zeta \in \gamma$ *функция* $f(\zeta, z)$ *регулярна по* z *в области* D.

Тогда интеграл (1) *есть регулярная в области* D *функция.*

Доказательство. В силу условий 1, 2 функция $F(z)$ непрерывна в области D. Возьмем произвольную точку $a \in D$ и построим круг K, который содержит точку a и лежит внутри D. Применим теорему Морера. Пусть γ' — замкнутая кривая, лежащая в круге K. Тогда

$$\int_{\gamma'} F(z)\,dz = \int_{\gamma'} \left(\int_{\gamma} f(\zeta, z)\,d\zeta \right) dz = \int_{\gamma} \left(\int_{\gamma'} f(\zeta, z)\,dz \right) d\zeta = 0, \qquad (2)$$

так как порядок интегрирования можно переставить, а интеграл по γ' равен нулю (интегральная теорема Коши). По теореме Морера функция $F(z)$ регулярна в круге K; следовательно, $F(z)$ регулярна в области D.

Следствие 1. *Пусть* γ — *неограниченная кусочно гладкая кривая, пусть выполнены условия* 2, 3 *и следующее условие:*

4) *интеграл* (1) *сходится равномерно по* $z \in D'$, *где* D' — *любая замкнутая подобласть области* D.

Тогда функция $F(z)$ *регулярна в области* D.

Следствие 2. *Пусть условия* 1, 3 *выполнены, но функция* $f(\zeta, z)$ *может иметь особенности в концах кривой* γ. *Если функция* $f(\zeta, z)$ *непрерывна по* (ζ, z) *при* $z \in D$, $\zeta \in \gamma$, ζ *не принадлежит концам* γ *и выполнено условие* 4, *то функция* $F(z)$ *регулярна в области* D.

Доказательство следствий 1 и 2 проводится точно так же, как и в теореме 1; интегралы в (2) можно переставлять в силу равномерной сходимости интеграла (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z}\,d\zeta, \quad z \in D. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть K — круг $|z-a| \leqslant r$, лежащий в области D и γ' — его граница. Тогда при $|z-a| < r$ имеем

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{F(t)}{(t-z)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{1}{(t-z)^2} \left(\int_{\gamma} t(\zeta, t)\,d\zeta \right) dt =$$

$$= \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta, t)}{(t-z)^2}\,dt \right) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z}\,d\zeta.$$

Перестановка порядка интегрирования возможна в силу непрерывности подынтегральной функции и конечности кривых γ, γ'.

Замечание. Теорема 2 остается в силе, если выполнены условия следствия 1 или 2, и интеграл (3) сходится равномерно по $z \in D'$, где D' — любая замкнутая подобласть области D.

2. Аналитические свойства интегральных преобразований. Наиболее употребительными в математической физике интегральными преобразованиями являются преобразования Лапласа, Фурье и Меллина.

Пусть функция $f(t)$ определена на полуоси $t \geqslant 0$. Ее *преобразованием Лапласа* называется функция

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и удовлетворяет оценке*

$$|f(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Тогда ее преобразование Лапласа $F(z)$ есть функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 1 из теоремы 1. Условия 2, 3 теоремы 1 выполнены. Пусть $\delta > 0$, $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha + \delta$, $t \geqslant 0$. Тогда

$$|f(t) e^{-zt}| \leqslant Ce^{(\alpha - \operatorname{Re} z)t} \leqslant Ce^{-\delta t}.$$

Так как $\int_0^\infty Ce^{-\delta t}\, dt$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, интеграл (4) сходится равномерно по z при $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha + \delta$ и функция $F(z)$ регулярна в этой полуплоскости. В силу произвольности $\delta > 0$ функция $F(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z > \alpha$.

Преобразованием Фурье функции $f(t)$, определенной на действительной оси, называется функция

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{izt} f(t)\, dt. \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяет оценкам*

$$|f(t)| \leqslant C_1 e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0; \qquad |f(t)| \leqslant C_2 e^{\beta t}, \quad t \leqslant 0, \tag{7}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда ее преобразование Фурье $F(z)$ есть функция, регулярная в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$.

Доказательство. Разобьем интеграл (6) на два интеграла:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{izt} f(t)\, dt + \int_{-\infty}^0 e^{izt} f(t)\, dt \equiv F_1(z) + F_2(z).$$

В силу условия (7) и теоремы 3 функция $F_1(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(-iz) > -\alpha$, а функция $F_2(z)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re}(iz) > -\beta$, что и доказывает теорему.

В частности, если функция $f(t)$ финитна, т. е. $f(t)\equiv 0$ при $|t|>T$, и непрерывна при $|t|\leqslant T$, то ее преобразование Фурье является целой функцией. Это следует из теоремы 1, поскольку в этом случае

$$F(z)=\int_{-T}^{T} e^{izt}f(t)\,dt.$$

Преобразованием Меллина функции $f(t)$, определенной на полуоси $t\geqslant 0$, называется функция

$$F(z)=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)\,dt. \tag{8}$$

Здесь $t^z=e^{z\ln t}$, $t>0$.

Теорема 5. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t>0$ и удовлетворяет оценкам:*

$$|f(t)|\leqslant C_1t^{\alpha},\quad 0<t\leqslant 1,\qquad |f(t)|\leqslant C_2t^{\beta},\quad 1\leqslant t<\infty, \tag{9}$$

где $\alpha>\beta$. Тогда ее преобразование Меллина является функцией, регулярной в полосе $-\alpha<\operatorname{Re} z<-\beta$.

Доказательство. Разобьем интеграл (8) на два интеграла

$$F(z)=\int_0^1 t^{z-1}f(t)\,dt+\int_1^\infty t^{z-1}f(t)\,dt\equiv F_1(z)+F_2(z).$$

Пусть $0<t\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z\geqslant -\alpha+\delta$ и $\delta>0$; тогда

$$|t^{z-1}f(t)|\leqslant C_1t^{\delta-1}.$$

Так как $\int_0^1 t^{\delta-1}\,dt$ сходится при $\delta>0$, то, по признаку Вейерштрасса, интеграл $F_1(z)$ сходится равномерно по z при $\operatorname{Re} z\geqslant -\alpha+\delta$. В силу следствия 2 функция $F_1(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>-\alpha$.

Далее, при $t\geqslant 1$, $\operatorname{Re} z\leqslant -\beta-\delta$ и $\delta>0$ имеем

$$|t^{z-1}f(t)|\leqslant C_2t^{-\delta-1}.$$

Из сходимости интеграла $\int_1^\infty t^{-\delta-1}dt$ и следствия 1 вытекает, что функция $F_2(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z<-\beta$.

Преобразования Фурье и Меллина связаны следующим соотношением:

$$[M(f(t))](z)=[F(f(e^t))](-iz), \tag{10}$$

где $[M(\varphi(t))](z)$ — преобразование Меллина, а $[F(\varphi(t))](z)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(t)$. Действительно, делая

замену переменной $t = e^{\tau}$, получаем

$$[M(f(t))](z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\tau} f(e^{\tau})\, d\tau$$

(мы предполагаем, что все интегралы сходятся). Последний интеграл совпадает с правой частью формулы (10).

В частности, с помощью соотношения (10) можно вывести теорему 5 из теоремы 4.

3. Аналитическое продолжение гамма-функции. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(x)$ при действительных $x > 0$ определяется формулой

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{11}$$

и является преобразованием Меллина функции e^{-t}. Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{12}$$

Имеем $e^{-t} \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $e^{-t} \leqslant c_\beta t^{-\beta}$, $t \geqslant 1$, где $\beta > 0$ — любое. В силу теоремы 5 функция $\Gamma(z)$ регулярна в полосе $0 < \operatorname{Re} z < \beta$ при любом $\beta > 0$, так что $\Gamma(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Итак, мы аналитически продолжили функцию $\Gamma(x)$ с полуоси $(0, +\infty)$ в правую полуплоскость.

При действительных $x > 0$ для гамма-функции справедливо функциональное соотношение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. В силу теоремы единственности

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

при $\operatorname{Re} z > 0$, так что

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1), \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{13}$$

Функция $\Gamma(z+1)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1$. Следовательно, функция, стоящая в правой части формулы (13), регулярна в области $D_1 = \{\operatorname{Re} z > -1,\ z \neq 0\}$ и тем самым функция $\Gamma(z)$ аналитически продолжена в область D_1. Но теперь правая часть формулы (13) регулярна в области $D_2 = \{\operatorname{Re} z > -2,\ z \neq 0,\ z \neq -1\}$, и мы продолжили аналитически гамма-функцию в область D_2. Продолжая эти рассуждения, получаем следующий результат:

Гамма-функция допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$

Этот метод аналитического продолжения основан на функциональном соотношении (13) и потому имеет весьма ограниченную область применимости. Рассмотрим другой, более общий

метод. Разобьем интеграл (12) на два:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \equiv F_1(z) + F_2(z). \qquad (14)$$

Из доказательства теоремы 5 следует, что $F_2(z)$ — целая функция, а $F_1(z)$ — регулярная при $\operatorname{Re} z > 0$ функция. Следовательно, нам остается аналитически продолжить функцию $F_1(z)$.

С этой целью разложим функцию e^{-t} в ряд Тейлора:

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n.$$

Этот ряд сходится равномерно при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и если умножить его на функцию t^{z-1}, где $\operatorname{Re} z \geqslant 1$, то полученный ряд также будет сходиться равномерно при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеем

$$F_1(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} \frac{1}{n!} \quad (\operatorname{Re} z \geqslant 1). \qquad (15)$$

Члены $\frac{(-1)^n}{z+n}\frac{1}{n!}$ последнего ряда регулярны во всей плоскости, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ Пусть D_ρ — комплексная плоскость z, из которой удалены ρ-окрестности точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ Тогда $|1/(z+n)| \leqslant 1/\rho$ при $z \in D_\rho$, и ряд в правой части (15) сходится равномерно при $z \in D_\rho$, так что сумма ряда регулярна в комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0, -1, -2, \ldots$ Итак формула

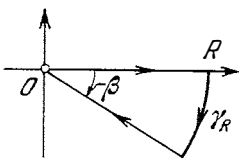


Рис. 51

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} \frac{1}{n!} + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \qquad (16)$$

дает аналитическое продолжение гамма-функции на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$.

4. Аналитическое продолжение преобразования Лапласа. Рассмотрим еще один важный прием аналитического продолжения функций, заданных интегралами — поворот контура интегрирования.

Теорема 6. *Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна и ограничена в угле $|\arg\zeta| \leqslant \alpha < \pi/2$. Тогда ее преобразование Лапласа $F(z)$ можно аналитически продолжить в угол $|\arg z| < \frac{\pi}{2} + \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$F_\beta(z) = \int_{l_\beta} e^{-z\zeta} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad (17)$$

где l_β — луч $0 \leqslant |\zeta| < \infty$, $\arg \zeta = -\beta$, и $0 \leqslant \beta < \alpha$. Покажем, что

$$F_\beta(x) = F_0(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \tag{18}$$

при $x > 0$. Рассмотрим замкнутый контур C_R, состоящий из отрезков $[0, R]$, $[Re^{-i\beta}, 0]$ и дуги окружности γ_R: $|\zeta| = R$, $-\beta \leqslant \arg \zeta \leqslant 0$ (рис. 51).

В силу интегральной теоремы Коши $\int_{C_R} e^{-x\zeta} f(\zeta)\, d\zeta = 0$. Покажем, что интеграл по γ_R стремится к нулю при $R \to \infty$. По условию, $|f(\zeta)| \leqslant M$ при $0 \leqslant |\zeta| < \infty$, $|\arg \zeta| \leqslant \alpha$. Далее, $\zeta = Re^{i\varphi}$, $-\beta \leqslant \varphi \leqslant 0$ при $\zeta \in \gamma_R$. Следовательно,

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{-x\zeta} f(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant M \int_{\gamma_R} |e^{-x\zeta}|\, |d\zeta| = MR \int_{-\beta}^{0} e^{-xR\cos\varphi}\, d\varphi <$$

$$< MR\beta e^{-xR\cos\beta} \to 0$$

($R \to \infty$, $x > 0$). Переходя к пределу при $R \to \infty$ в тождестве

$$\left\{ \int_0^R + \int_{\gamma_R} + \int_{Re^{-i\beta}}^0 \right\} e^{-x\zeta} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

получаем (18). Далее, $\zeta = \rho e^{-i\beta}$, $0 \leqslant \rho < \infty$ на луче l_β, так что

$$F_\beta(z) = \int_0^\infty e^{-\rho(ze^{-i\beta})} f(\rho e^{-i\beta})\, e^{-i\beta}\, d\rho.$$

Используя неравенство $|f(\rho e^{-i\beta})| \leqslant M$ при $0 \leqslant \rho < \infty$, получаем по теореме 3, что функция $F_\beta(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > 0$, а функция $F_0(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Положим

$$\Phi(z) = \begin{cases} F_0(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ F_\beta(z), & \operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Так как $F_0(x) \equiv F_\beta(x)$ при $x > 0$, то функция $\Phi(z)$ регулярна в объединении полуплоскостей $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > 0$, т. е. в угле $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} + \beta$. Но β — любое такое число, что $0 \leqslant \beta < \alpha$. Следовательно, мы продолжили аналитически функцию $F(z)$ в угол $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha$. Аналогично, выбирая $-\alpha \leqslant \beta < 0$, получаем, что функцию $F(z)$ можно аналитически продолжить в угол $-\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \quad (x>0).$$

Функция $f(\zeta)=\frac{1}{1+\zeta}$ регулярна и ограничена в любом угле $|\arg\zeta|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $F(x)$ допускает аналитическое продолжение в угол $|\arg\zeta|<\frac{\pi}{2}+\alpha$, т. е. в плоскость с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$. □

5. **Интеграл типа Коши.** Интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{20}$$

называется *интегралом типа Коши*. Исследуем его аналитические свойства в предположении, что функция $f(\zeta)$ непрерывна на кривой γ.

1. Пусть γ — конечная кривая. Тогда дополнение к γ состоит из конечного или бесконечного числа областей. В каждой из этих областей интеграл типа Коши является регулярной функцией в силу теоремы 1. Однако эти регулярные функции, вообще говоря, различны, т. е. не являются аналитическими продолжениями друг друга. Например,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}1, & |z|<1,\\ 0, & |z|>1.\end{cases}$$

Покажем, что функция, представленная интегралом (20), регулярна в бесконечно удаленной точке. Делая замену $z=w^{-1}$ и полагая $F(z)=G(w)$, получаем

$$G(w)=\frac{w}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta w-1}\,d\zeta.$$

Так как γ — конечная кривая, то знаменатель $\zeta w-1\neq 0$ при достаточно малых w и функция $G(w)$ регулярна в точке $w=0$ в силу теоремы 1.

2. Пусть γ — бесконечная кривая. Ограничимся, для простоты, случаем, когда γ — вещественная ось; тогда

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{21}$$

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет оценке

$$|f(t)|\leqslant C(1+|t|)^{-\alpha},\quad -\infty<t<\infty,\ \alpha>0. \tag{22}$$

Покажем, что тогда формула (21) определяет две функции $F_+(z)$, $F_-(z)$, которые регулярны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно. Воспользуемся следствием 1. Рассмотрим случай $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $z = x + iy$ лежит в полуполосе Π: $|x| \leqslant a$, $y \geqslant b$, где $a > 0$, $b > 0$. При вещественных t и при $z \in \Pi$ имеем $|t - z|^2 = (t - x)^2 + y^2 \geqslant t^2 - 2|t|a \geqslant t^2/2$, если $|t| \geqslant 4a$. Следовательно,

$$\left|\frac{f(t)}{t - z}\right| \leqslant \frac{C\sqrt{2}(1 + |t|)^{-\alpha}}{|t|} \equiv g(t)$$
$$(z \in \Pi,\ |t| \geqslant 4a).$$

Поскольку интеграл $\int\limits_{|t| \geqslant 4a} g(t)\,dt$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $F(z)$ сходится равномерно по $z \in \Pi$. В силу следствия 1 функция $F(z)$ регулярна при $z \in \Pi$; так как $a > 0$ можно выбрать сколько угодно большим, а $b > 0$ — сколь угодно малым, то интеграл (21) представляет функцию $F_+(z)$, регулярную в верхней полуплоскости. Аналогично доказывается, что интеграл (21) представляет функцию $F_-(z)$, регулярную в нижней полуплоскости.

Пример 2. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на полуоси $t \geqslant 0$ и удовлетворяет оценке (22). Тогда интеграл типа Коши

$$F(z) = \int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t - z}\,dt$$

представляет функцию, регулярную в плоскости с разрезом по полуоси $[0, +\infty)$. □

3. Если функция $f(\zeta)$ регулярна на контуре интегрирования γ, то интеграл типа Коши допускает аналитическое продолжение через точки контура. Прием, который при этом используется, заключается в том, что мы сдвигаем контур интегрирования.

Пример 3. Пусть

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = 2} \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + 1)(\zeta - z)}, \quad |z| < 2.$$

Функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 2$. Покажем, что функцию $F(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость z. Положим при $R > 2$

$$F_R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + 1)(\zeta - z)}, \quad |z| < R.$$

Функция $F_R(z)$ регулярна в круге $|z| < R$. Покажем, что

$$F_R(z) \equiv F(z) \quad (|z| < 2). \tag{23}$$

Тем самым наше утверждение будет доказано. Подынтегральная

функция $f(\zeta)=(\zeta^2+1)^{-1}(\zeta-z)^{-1}$ регулярна в кольце $|z|<|\zeta|<\infty$, если $|z|>1$, так как функция $1/(\zeta^2+1)$ регулярна при всех $\zeta\neq\pm i$.

Следовательно, в силу интегральной теоремы Коши интегралы по окружностям $|\zeta|=2$ и $|\zeta|=R$ от функции $f(\zeta)$ равны при $|z|<2$, что и доказывает (23). □

Этот пример допускает следующее обобщение. Рассмотрим интеграл $F(z)$ типа Коши (20), где γ — простая замкнутая кривая. Тогда этот интеграл определяет функцию, регулярную в области D_0, лежащей внутри γ.

Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в замкнутой области D, ограниченной кривыми γ' и γ, где γ' — простая замкнутая кривая, и γ лежит внутри γ'. Тогда формула

$$F_{\gamma'}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

дает аналитическое продолжение функции $F(z)$ в область D', лежащую внутри γ'. Действительно, функция $f(\zeta)/(\zeta-z)$ регулярна в области D, если $z\in D_0$, так что в силу интегральной теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad(z\in D_0).$$

Интеграл в левой части этой формулы задает функцию, регулярную в D', а интеграл в правой части равен $F(z)$. Следовательно, $F_{\gamma'}(z)=F(z)$ $(z\in D_0)$, и наше утверждение доказано.

Аналогичный метод применим к интегралам вида (21).

Теорема 7. *Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в полосе $-a\leqslant\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0$ и удовлетворяет условию*

$$|f(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^{-\alpha},\ \alpha>0,\quad -a\leqslant\operatorname{Im}\zeta\leqslant 0.$$

Тогда интеграл (21) *допускает аналитическое продолжение в полуплоскость* $\operatorname{Im}z>-a$ *и это продолжение* $F_a(z)$ *дается формулой*

$$F_a(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-ia-\infty}^{-ia+\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad \operatorname{Im}z>-a. \tag{24}$$

Итак мы рассмотрели здесь следующие приемы аналитического продолжения функций, заданных интегралами:

1) интегрирование по частям;

2) поворот контура интегрирования;

3) перенос контура интегрирования.

Ряд других примеров аналитического продолжения будет рассмотрен в §§ 21, 23.

Глава III

РЯД ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА

§ 17. Ряд Лорана

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана*. Этот ряд называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{3}$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3).

Ряд (2) является степенным рядом, и, следовательно, его область сходимости есть круг $|z-a|<R$ (при $R=0$ ряд (2) сходится только в точке a, а при $R=\infty$ — во всей комплексной плоскости). Полагая в (3) $1/(z-a)=t$, получаем степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, область сходимости которого есть круг $|t|<\alpha$. Следовательно, ряд (3) сходится в области $|z-a|>\rho$, где $\rho=1/\alpha$. Если выполняется условие

$$\rho < R, \tag{4}$$

то ряд (1) сходится в области

$$\rho < |z-a| < R, \tag{5}$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a.

В каждой точке, лежащей вне замкнутого кольца (5), ряд Лорана (1) расходится в силу расходимости одного из рядов (2)—(3). Таким образом, область сходимости ряда (1) есть круговое кольцо (5), если выполнено условие (4). В точках, лежащих на границе кольца (5), ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. Если $\rho > R$, то ряды (2) и (3) не имеют общей области сходимости и, следовательно, ряд (1) нигде не сходится.

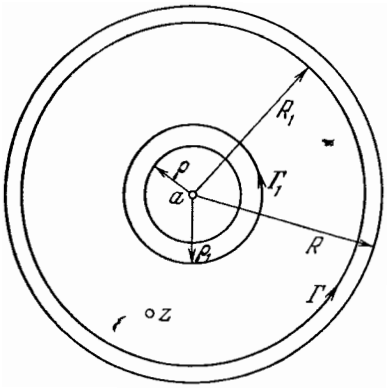


Рис. 52

Замечание 1. Из теоремы Абеля (§ 11) вытекает, что во всяком замкнутом кольце $\rho < \rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1 < R$, лежащем в кольце (5), ряд (1) сходится равномерно и согласно теореме Вейерштрасса (§ 12, теорема 4) его сумма $f(z)$ регулярна в кольце (5). Справедливо и обратное утверждение — теорема 1.

2. Разложение регулярной функции в ряд Лорана.

Теорема 1. *Функция $f(z)$, регулярная в кольце D: $\rho < |z-a| < R$, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{6}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

$$\rho < R_0 < R, \tag{7}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо D_1: $\rho_1 < |z-a| < R_1$ (рис. 52). Обозначим Γ и Γ_1 соответственно внешнюю и внутреннюю границы кольца D_1. Пусть z — любая точка кольца D_1. В силу формулы (4) § 10 имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{8}$$

Заметим сначала (см. доказательство теоремы 1 § 12), что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{9}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \tag{10}$$

Преобразуем, далее, второе слагаемое формулы (8). Имеем

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a-(\zeta-a)}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right]}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}. \quad (11)$$

Если $\zeta\in\Gamma_1$, то $\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|=\dfrac{\rho_1}{|z-a|}=q<1$ и, следовательно, в силу признака Вейерштрасса, ряд (11) равномерно сходится по $\zeta(\zeta\in\Gamma_1)$ для каждого $z\in D_1$. Так как функция $f(\zeta)$ непрерывна на Γ_1, то она ограничена на Γ_1. Отсюда следует, что ряд

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}} \quad (12)$$

равномерно сходится по ζ на окружности Γ_1. Интегрируя ряд (12) почленно и полагая $k+1=-n$, получаем

$$-\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n, \quad (13)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (9) в (8), получаем сходящееся в каждой точке кольца D_1 разложение (6), коэффициенты которого определяются по формулам (10) и (14).

В силу следствия 2 из интегральной теоремы Коши (§ 9, формула (13)), в формулах (14) и (10) в качестве контура интегрирования можно взять окружность $|\zeta-a|=R_0$, $\rho_1<R_0<R_1$, т. е. справедлива формула (7). Поскольку ρ_1 можно взять сколь угодно близким к ρ, а R_1 к R, то ряд (6) сходится во всем кольце D. Теорема доказана.

3. Единственность разложения функции в ряд Лорана.

Теорема 2. *Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в кольце D: $\rho<|z-a|<R$, единственно.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$, регулярная в кольце D, имеет в этом кольце два разложения:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^n. \quad (15)$$

Умножая ряды (15) на $(z-a)^{-m-1}$, где m — фиксированное целое число, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^{n-m-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^{n-m-1}. \quad (16)$$

Так как ряды (16) равномерно сходятся на окружности $|z-$

$-a| = R_0$, $\rho < R_0 < R$, то, интегрируя их почленно по этой окружности и учитывая, что при целом k

$$\int\limits_{|z-a|=R_0} (z-a)^k\,dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1, \end{cases}$$

получаем $c_m = \tilde{c}_m$ для каждого целого m.

Из теоремы 2 следует, что коэффициенты разложения данной функции в ряд Лорана не зависят от того, каким способом получено это разложение.

Пример 1. Функция

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

регулярна в областях D_1: $|z| < 1$, D_2: $1 < |z| < 2$, D_3: $|z| > 2$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в этих областях. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right). \tag{17}$$

Если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{18}$$

а если $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \tag{19}$$

Аналогично, в круге $|z| < 2$ имеем разложение

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \tag{20}$$

а если $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{z^n}. \tag{21}$$

а) В области D_1: $|z| < 1$ в силу формул (17), (18), (20) функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора.

б) В области D_2: $1<|z|<2$ разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (формулы (17), (19), (20)) имеет следующий вид:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3\cdot 2^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z.

в) В области D_3: $|z|>2$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана (см. формулы (17), (19), (21)), содержащим только отрицательные степени z

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}-1}{3z^n}. \quad \square$$

Замечание 2. Укажем на связь между рядом Лорана и рядом Фурье. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$\delta_1<|z|<1+\delta_2, \quad 0\leqslant\delta_1<1, \quad \delta_2>0, \tag{22}$$

содержащем единичную окружность $|z|=1$. Тогда она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n,$$

откуда, полагая $z=e^{i\varphi}$, получаем разложение в ряд Фурье функции

$$F(\varphi)=f(e^{i\varphi})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\varphi}. \tag{23}$$

Обратно, если функция $F(\varphi)$ представляется в виде

$$F(\varphi)\equiv f(e^{i\varphi}),$$

где функция $f(z)$ регулярна в кольце (22), то ряд (23) является рядом Фурье для $F(\varphi)$.

4. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце D: $\rho_0<|z-a|<R_0$. Тогда коэффициенты ряда Лорана*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

для функции $f(z)$ в кольце D удовлетворяют неравенствам

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{R^n}, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{24}$$

где $M=\max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$, γ_R: $|z-a|=R$, $\rho_0<R<R_0$.

Неравенства (24) называются *неравенствами Коши для коэффициентов ряда Лорана.*

Доказательство. Пользуясь формулой (7), получаем

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta-a|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} |d\zeta| \leqslant \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int\limits_{|\zeta-a|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

§ 18. Изолированные особые точки однозначного характера

1. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не регулярна в точке a $(a \neq \infty)$. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$.

Кольцо $0 < |z-a| < \rho$, т. е. круг $|z-a| < \rho$ с выброшенным центром, будем иногда называть так: *проколотая окрестность точки a.*

Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ регулярна в области $\rho < |z| < \infty$.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи точки a различают следующие три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

а) *устранимой особой точкой,* если

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

существует и конечен;

б) *полюсом,* если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;

в) *существенно особой точкой,* если $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не существует.

Пример 1. Для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, так как функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 0$ и

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z} = 1. \quad \square$$

Пример 2. Для функции

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

точка -1 является полюсом, так как эта функция регулярна при $z \neq -1$ и $\lim\limits_{z \to -1} f(z) = \infty$. □

Пример 3. Точка $z = \infty$ является существенно особой для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, так как эти функции регулярны во всей комплексной плоскости и не имеют предела при $z \to \infty$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, а пределы $\sin x$ и $\cos x$ при $x \to \infty$ не существуют. □

Пример 4. Для функции $f(z) = e^{1/z^2}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, так как функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 0$ и не имеет предела при $z \to 0$. В самом деле, если $z = x$, то

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{x \to 0} e^{1/x^2} = \infty,$$

а если $z = iy$, то

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{y \to 0} e^{-1/y^2} = 0. \quad \square$$

2. Ряд Лорана в окрестности особой точки. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце K: $0 < |z - a| < \rho$. Тогда эту функцию можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \tag{1}$$

сходящийся в кольце K.

Определение 3. Ряд (1) называется *рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}, \tag{2}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \tag{3}$$

называются соответственно *главной частью* и *правильной частью* ряда (1).

Пусть функция $f(z)$ представляется в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. в области $R < |z| < \infty$, сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{4}$$

Определение 4. Ряд (4) называется *рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \tag{6}$$

называются соответственно *главной частью* и *правильной частью* ряда (4).

Замечание 1. Главная часть ряда Лорана в окрестности особой точки a (конечной или бесконечно удаленной), как видно из определения — это сумма всех тех и только тех членов ряда Лорана, которые стремятся к бесконечности при $z \to a$.

Главная часть — функция, регулярная во всей комплексной плоскости, кроме точки a, а правильная часть, т. е. разность между $f(z)$ и главной частью $f_1(z)$, есть функция, регулярная в точке a.

Пример 5. Ряд Лорана для функции $f(z)=z^2e^{1/z}$ в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots\right) = \\ = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!\, z^n}, \quad (7)$$

и, следовательно, главная часть ряда (7) в окрестности точки $z=0$ равна $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!\, z^n}$, а правильная часть равна $f_2(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}$.

Ряд (7), сходящийся в окрестности бесконечно удаленной точки (он сходится во всей конечной плоскости с выколотой точкой $z=0$), есть ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$. Главная часть ряда (7) в окрестности точки $z=\infty$ равна z^2+z, а правильная часть равна

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!\, z^n}. \quad \square$$

Пример 6. Найдем ряд Лорана функции

$$f(z) = \cos\frac{z}{z+1}$$

в окрестности точки $z=-1$. Имеем

$$f(z) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \cos 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} + \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1}.$$

Используя известные разложения для $\cos z$ и $\sin z$, получаем ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки $z=-1$:

$$f(z) = \cos\frac{z}{z+1} = \cos 1 + \frac{\sin 1}{z+1} - \frac{\cos 1}{2!\,(z+1)^2} - \\ - \frac{\sin 1}{3!\,(z+1)^3} + \ldots + (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!\,(z+1)^{2n}} + \\ + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n+1)!\,(z+1)^{2n+1}} + \ldots \quad \square \quad (8)$$

Пример 7. Чтобы найти правильную часть $g_2(z)$ ряда Лорана для функции $g(z) = z^2 \cos\frac{z}{z+1}$ в окрестности точки $z=-1$, разложим функцию z^2 в ряд Тейлора по степеням $z+1$. Имеем

$$z^2 = [(z+1)-1]^2 = (z+1)^2 - 2(z+1) + 1. \tag{9}$$

Перемножая разложения (8) и (9), находим

$$g_2(z) = \frac{\cos 1}{2} - 2\sin 1 + (\sin 1 - 2\cos 1)\cdot(z+1) + \cos 1\cdot(z+1)^2. \square$$

Пример 8. Для нахождения главной части $f_1(z)$ ряда Лорана функции $f(z) = 1/(z^2+1)$ в окрестности точки i представим эту функцию в виде $f(z) = \frac{1}{z-i}\, g(z)$, где

$$g(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} + a(z-i) + \ldots$$

Следовательно,

$$f_1(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{z-i}. \square$$

Пример 9. Главная часть ряда Лорана функции

$$f(z) = \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

в окрестности точки $z=\infty$ равна z^2, так как $f(z) = z^2 + 3 + g(z)$, где $g(z)$ — правильная рациональная дробь (функция, регулярная в бесконечно удаленной точке). $\square$

3. Устранимая особая точка.

Теорема 1. *Для того чтобы изолированная особая точка a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки a была тождественным нулем.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a — устранимая особая точка для функции $f(z)$. По определению устранимой особой точки существует

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \neq \infty \tag{10}$$

и, следовательно, функция $f(z)$ регулярна и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M, \quad 0 < |z-a| < \rho. \tag{11}$$

Если $0 < \rho_1 < \rho$, то из (11) в силу неравенств Коши (§ 17, формула (24)) имеем

$$|c_n| \leqslant M/\rho_1^n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

Так как в неравенствах (12) ρ_1 можно взять сколь угодно малым, а коэффициенты c_n не зависят от ρ_1, то $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$, т. е. главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a тождественно равна нулю.

Достаточность. Если главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a тождественно равна нулю, то

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots, \qquad (13)$$

где ряд (13) сходится в некотором кольце $0 < |z-a| < \rho$. Но степенной ряд (13) сходится во всем круге $|z-a| < \rho$ и, следовательно, существует $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$, т. е. a — устранимая особая точка.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что условие (10) можно заменить условием (11), т. е. справедлива следующая

Теорема 2. *Для того чтобы изолированная особая точка a была устранимой особой точкой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была регулярна и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.*

Замечание 2. Продолжив по непрерывности функцию $f(z)$ в точку a $\left(f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0\right)$, получим регулярную в точке a функцию:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < \rho.$$

Этим оправдан термин «устранимая особая точка». В дальнейшем поэтому нередко устранимые особые точки будем рассматривать как точки регулярности.

Пример 10. Функция $f(z) = \dfrac{(e^z-1)^2}{1-\cos z}$ регулярна в точке $z = 0$, так как эта функция регулярна в проколотой окрестности точки $z = 0$ и при $z \to 0$ имеем

$$e^z - 1 \sim z, \quad (e^z-1)^2 \sim z^2, \quad 1 - \cos z \sim z^2/2,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 2$ $(f(0) = 2)$. □

Пример 11. Функция $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$ регулярна в точке $z = 0$, так как

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \dfrac{z^2}{2!} + \ldots}{z - \dfrac{z^3}{3!} + \ldots} = \frac{1}{z} + g(z),$$

где $g(z)$ — регулярная в точке $z = 0$ функция. □

4. Полюс.

Теорема 3. *Для того чтобы точка $a \neq \infty$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде*

$$f(z) = (z-a)^{-m}\psi(z), \quad \psi(a) \neq 0, \tag{14}$$

где $\psi(z)$ — функция, регулярная в точке a, $m \geqslant 1$ — целое. Это число m называется порядком полюса a функции $f(z)$.

Аналогично, точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = z^m h(z), \quad h(\infty) \neq 0, \tag{15}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = \infty$, $m \geqslant 1$ — целое (m — порядок полюса $z = \infty$ функции $f(z)$).

Доказательство. Пусть $a \neq \infty$ — полюс для $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности точки a и $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, откуда следует, что

$$|f(z)| > 1 \tag{16}$$

в некотором кольце K: $0 < |z-a| < \rho$ (ρ выберем так, чтобы функция $f(z)$ была регулярна в K).

Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$. Эта функция регулярна в K, так как $f(z)$ регулярна в K и не обращается в нуль в этом кольце в силу неравенства (16). Следовательно, a — изолированная особая точка для $g(z)$. Из (16) следует, что $|g(z)| < 1$ в K, и по теореме 2 получаем, что a — устранимая особая точка для $g(z)$. Полагая

$$g(a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

получаем, что $g(z)$ регулярна в круге $|z-a| < \rho$ и точка a является ее нулем.

Пусть m — порядок нуля функции $g(z)$. По теореме 6 § 12 (формула (36)) имеем $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где функция $h(z)$ регулярна в точке a, $h(a) \neq 0$. Отсюда получаем

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m}\psi(z),$$

где $\psi(z) = 1/h(z)$ — регулярная в точке a функция, $\psi(a) = 1/h(a) \neq 0$.

Обратно, из равенства (14) следует, что функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a и что $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, т. е. $z = a$ — полюс для $f(z)$.

Пусть $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$. Как и в случае конечной точки, точка $z = \infty$ является нулем для функции $g(z) = 1/f(z)$. Для завершения доказательства достаточно применить теорему 6 § 12 (формула (39)).

Следствие 1. *Изолированная особая точка $a \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда имеет место асимптотическая формула*

$$f(z) \sim A(z-a)^{-m}, \quad A \neq 0, \quad z \to a. \tag{17}$$

Аналогичная формула справедлива и в случае, когда полюсом порядка m для функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка:

$$f(z) \sim Bz^m, \quad B \neq 0, \quad z \to \infty. \tag{18}$$

Из определений порядка нуля и порядка полюса (или из формул (17), (18) и формул (40), (41) § 12) вытекает, что полюс порядка m можно рассматривать как нуль отрицательного порядка $-m$.

Теорема 4. *Для того чтобы изолированная особая точка a была полюсом для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала лишь конечное число членов.*

Доказательство. Пусть точка $a \neq \infty$ — полюс порядка m для функции $f(z)$. Тогда имеет место формула (14). Разлагая функцию $\psi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a, получаем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots \tag{19}$$

Его главная часть $f_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ содержит лишь конечное число (не более m) членов, причем $c_{-m} \neq 0$, где m — порядок полюса a.

Обратно, из равенства (19) вытекает формула (14) и, следовательно, a — полюс для $f(z)$ порядка m. Теорема доказана для случая конечного полюса. Если полюсом функции $f(z)$ является точка $z = \infty$, для доказательства теоремы следует использовать формулу (15).

Пример 12. Для функции $f(z) = 1/\sin(1/z)$ точки $z_k = 1/(k\pi)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются полюсами первого порядка, так как функция $g(z) = 1/f(z) = \sin(1/z)$ регулярна при $z \neq 0$, а точки z_k являются ее нулями первого порядка $(g'(z_k) \neq 0)$. Следовательно, точка $z = 0$ является неизолированной особой точкой (предельной точкой или точкой накопления полюсов). Точка $z = \infty$ — полюс первого порядка для $f(z)$, так как $f(z) \sim z$ $(z \to \infty)$. □

Пример 13. Для функции $f(z) = (1 - \cos z)/(e^z - 1)^3$ точка $z = 0$ — полюс первого порядка, так как функции $\varphi(z) = 1 - \cos z$ и $\psi(z) = (e^z - 1)^3$ регулярны в окрестности точки $z = 0$ и при $z \to 0$ имеем $1 - \cos z \sim z^2/2$, $(e^z - 1)^3 \sim z^3$, т. е. $f(z) \sim 1/(2z)$. Точки $z_k = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — полюсы третьего порядка

для $f(z)$, так как эти точки являются нулями третьего порядка для функции $\psi(z)$, а $\varphi(z_k) \neq 0$. Точка $z=\infty$ является неизолированной особой точкой (предельной точкой полюсов) для функции $f(z)$. □

5. Существенно особая точка.

Теорема 5. *Для того чтобы изолированная особая точка a была существенно особой точкой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки a содержала бесконечное число членов.*

Доказательство следует из теорем 1 и 4.

Пример 14. Точка $z=0$ является существенно особой для функции

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n},$$

так как главная часть ряда Лорана для $e^{1/z}$ содержит бесконечное число членов. □

Пример 15. Точка $z=\infty$ является существенно особой для функции

$$f(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

так как главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ содержит бесконечное число членов. □

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует

Теорема 6 (Сохоцкого). *Пусть a — существенно особая точка для функции $f(z)$. Тогда для любого комплексного числа A найдется последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a и такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Доказательство.

1. $A=\infty$. Заметим, что функция $f(z)$ не ограничена ни в какой окрестности точки a, так как в противном случае по теореме 2 точка a была бы устранимой особой точкой.

Отсюда следует, что для каждого натурального n в кольце K_n: $0<|z-a|<1/n$ найдется точка z_n такая, что $|f(z_n)|>n$, т. е. $z_n \to a$ и $f(z_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$.

2. $A\neq\infty$. Заметим, что если для любого $\varepsilon>0$ и для любого $\delta>0$ существует точка z_δ $(0<|z_\delta-a|<\delta)$ такая, что $|f(z_\delta)-A|<\varepsilon$, то теорема доказана (достаточно взять $\varepsilon=1/n$, $\delta=1/n$, $n=1, 2, \ldots$).

Пусть указанное утверждение не выполняется. Тогда существуют числа $\varepsilon_0>0$ и $\delta_0>0$ такие, что для всех

z: $0<|z-a|<\delta_0$ имеет место неравенство

$$|f(z)-A|\geqslant\varepsilon_0. \tag{20}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-A}. \tag{21}$$

Из (21) в силу (20) имеем

$$|g(z)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0},\quad 0<|z-a|<\delta_0. \tag{22}$$

Так как a — изолированная особая точка для $f(z)$, то a является изолированной особой точкой и для $g(z)$ ($g(z)\neq 0$ в кольце $0<|z-a|<\delta_0$ в силу неравенства (20)).

По теореме 2 точка a является устранимой особой точкой для функции $g(z)$ и, следовательно, существует

$$\lim_{z\to a} g(z)=B. \tag{23}$$

Из (21) имеем

$$f(z)=A+\frac{1}{g(z)},\quad 0<|z-a|<\delta_0, \tag{24}$$

а из (23) и (24) получаем, что существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ (конечный при $B\neq 0$ и бесконечный, если $B=0$), т. е. либо a — устранимая особая точка для $f(z)$, либо a — полюс, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Приведем формулировку более глубокой теоремы, характеризующей поведение функции в окрестности существенно особой точки.

Теорема 7 (Пикара). *В любой окрестности существенно особой точки функция принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение, кроме, быть может, одного.*

Проиллюстрируем теорему Пикара на двух примерах.

Пример 16. Точка $z=\infty$ является существенно особой для функции $f(z)=e^z$ (пример 3). Рассмотрим уравнение

$$e^z=A,\quad A\neq 0. \tag{25}$$

Это уравнение имеет следующие решения:

$$z_k=\ln|A|+i(\arg A+2k\pi), \tag{26}$$

где $\arg A$ — фиксированное значение аргумента числа A, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Из (25) и (26) следует, что в любой окрестности точки $z=\infty$ имеется бесчисленное множество точек z_k, в которых функция e^z принимает значение, равное A ($A\neq 0$). Значение $A=0$ функция e^z не принимает (такое значение называется *исключительным* для e^z). □

Пример 17. Для функции $f(z)=\sin z$ точка $z=\infty$ является существенно особой, и для каждого A уравнение $\sin z=A$ имеет бесчисленное множество решений:

$$z_k=\frac{1}{i}\ln\left(iA+\sqrt{1-A^2}\right)+2k\pi \quad (k\text{ — любое целое}).$$

Следовательно, функция $\sin z$ не имеет исключительных значений. □

В заключение рассмотрим еще ряд примеров, связанных с определением типа изолированных особых точек.

Пример 18. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в точке a, $g(z)\not\equiv 0$. Тогда для функции $F(z)=f(z)/g(z)$ точка $z=a$ является либо полюсом, либо точкой регулярности. В самом деле, если $g(a)\neq 0$, то функция $F(z)$ регулярна в точке a. Если точка a — нуль функции $g(z)$ порядка m и $f(a)\neq 0$, то эта точка является полюсом порядка m для функции $F(z)$. Наконец, если точка a является нулем порядка n для $f(z)$ и нулем порядка m для $g(z)$, то при $n\geqslant m$ функция $F(z)$ регулярна в точке a, а при $n<m$ точка a является полюсом порядка $m-n$.

В частности, функция $\operatorname{tg} z$ регулярна во всей комплексной плоскости, кроме точек $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — целое), которые являются полюсами первого порядка. Аналогично, функция $\operatorname{ctg} z$ имеет полюсы первого порядка в точках $\tilde{z}_k=k\pi$ (k — целое) и не имеет других конечных особых точек. □

Пример 19. Для рациональной функции $R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены степени n и m соответственно, не имеющие общих нулей, нули знаменателя $Q_m(z)$ и только эти точки являются полюсами. Других особых точек в конечной плоскости у функции $R(z)$ нет. Точка $z=\infty$ является особой, а именно полюсом порядка $n-m$, если $n>m$, и точкой регулярности, если $n\leqslant m$. □

Пример 20. Пусть $z=a$ — существенно особая точка для функции $f(z)$. Тогда для функции $g(z)=1/f(z)$ точка a является либо существенно особой, либо неизолированной особой (предельной точкой полюсов). Действительно, если существует кольцо $0<|z-a|<\delta$, в котором $f(z)\neq 0$, то точка a является изолированной особой точкой, а именно существенно особой для $g(z)$ (пример: $f(z)=e^{1/z}$, $g(z)=e^{-1/z}$, $z=0$). Если же в любой окрестности точки a имеются нули функции $f(z)$, то для функции $g(z)$ эти точки являются полюсами и, следовательно, $z=a$ — предельная точка полюсов для функции $g(z)\left(f(z)=\sin\frac{1}{z},\ g(z)=\right.$ $\left.=\frac{1}{\sin(1/z)},\ z=0\right)$. □

Пример 21. Для функции $f(z)=e^{1/\sin z}$ точки $z_k=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) являются существенно особыми. В самом деле, $\sin z \sim (-1)^k(z-k\pi)$, $z \to k\pi$. Пусть k — четное. Тогда если $z=x \to k\pi+0$, то $\sin z \to +0$ и $f(z) \to +\infty$, а если $z=x \to k\pi-0$, то $\sin z \to -0$ и $f(z) \to 0$, т. е. функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_k. Аналогично рассматривается случай нечетного k. Других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Точка $z=\infty$ является для функции $f(z)$ предельной точкой существенно особых точек. □

Обобщим результат примера 21.

Пример 22. Покажем, что если точка a является полюсом функции $f(z)$, то для функции $g(z)=e^{f(z)}$ эта точка является существенно особой.

Пусть m — порядок полюса. Тогда по формуле (17) имеем $f(z) \sim A(z-a)^{-m}$, $A \neq 0$ $(z \to a)$. Полагая $A=|A|e^{i\alpha}$, $z-a=re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z) \sim |A| r^{-m} e^{i(\alpha - m\varphi)}. \tag{27}$$

Рассмотрим луч l_1: $z-a=re^{i\varphi_1}$, где $\varphi_1=\alpha/m$. Тогда из (27) следует, что $f(z) \sim |A| r^{-m}$ $(r \to 0,\ z \in l_1)$, откуда $\lim\limits_{z \to a, z \in l_1} g(z)=\infty$. Аналогично, на луче $z-a=re^{i\varphi_2}$, где $\varphi_2=(\alpha+\pi)/m$, имеем $f(z) \sim -|A| r^{-m}$ и, следовательно, $\lim\limits_{z \to a, z \in l_2} g(z)=0$. Отсюда следует, что функция $g(z)$ не имеет предела при $z \to a$, т. е. a — существенно особая точка для $g(z)$. □

Пример 23. Для функции $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^2 \dfrac{1}{z+1}}$ точки $z_k=-1+\dfrac{1}{k\pi}$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются полюсами второго порядка, $z=-1$ есть предельная точка полюсов, а точка $z=\infty$ — полюс пятого порядка: $\sin \dfrac{1}{z+1} \sim \dfrac{1}{z}$, $f(z) \sim z^5$ $(z \to \infty)$. Других особых точек у функции $f(z)$ нет. □

§ 19. Теорема Лиувилля

Напомним, что функция $f(z)$, регулярная во всей комплексной плоскости, называется целой.

Разложим целую функцию $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

Этот ряд сходится при всех z и, следовательно, является рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Единственной особой точкой целой функции $f(z)$ в расширенной комплексной плоскости может быть точка $z=\infty$. Если $z=\infty$ — полюс порядка n для целой функции $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен степени n. Целая функция, для которой точка $z=\infty$ является существенно особой, называется *целой трансцендентной* (примеры: e^z, $\sin z$, $\cos z$).

Если целая функция $f(z)$ регулярна в точке $z=\infty$, то $f(z)=c_0=\text{const}$. Таким образом, единственный класс аналитических функций, которые не имеют особых точек в расширенной комплексной плоскости — это константы.

Теорема 1 (Лиувилля). *Пусть целая функция*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

удовлетворяет в области $|z|>R_1$ *неравенству*

$$|f(z)|\leqslant M|z|^n, \quad n\geqslant 0 \text{ — целое.} \tag{2}$$

Тогда $f(z)$ *— многочлен степени не выше* n.

Доказательство. Используя неравенства Коши (п. 4, § 17), в силу (2) получаем при $R>R_1$ следующую оценку для коэффициентов ряда (1):

$$|c_k|\leqslant \frac{MR^n}{R^k}=MR^{n-k}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3}$$

Если $k>n$, то из (3) следует, что $c_k=0$, так как R можно взять сколь угодно большим, а коэффициенты c_k не зависят от R. Итак, $c_{n+1}=c_{n+2}=\ldots=0$, т. е. $f(z)$ — многочлен степени не выше n. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если целая функция* $f(z)$ *ограничена во всей комплексной плоскости, то она есть постоянная:* $f(z)\equiv\text{const}$.

Докажем с помощью теоремы Лиувилля, что справедлива

Основная теорема алгебры. *Всякий многочлен* $P_n(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$ $(c_n\neq 0,\ n\geqslant 1)$ *имеет по крайней мере один нуль.*

Доказательство. Пусть многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей. Тогда функция $g(z)=1/P_n(z)$ является целой. Так как функция $g(z)\to 0$ при $z\to\infty$ $(P_n(z)\sim c_nz^n,\ z\to\infty)$, то эта функция ограничена во всей комплексной плоскости, и в силу следствия из теоремы Лиувилля получаем $g(z)\equiv\text{const}$, что противоречит определению функции $g(z)$. Итак, многочлен $P_n(z)$ имеет по крайней мере один нуль.

Более общим, чем класс целых функций, является класс мероморфных функций.

Определение. Функция $f(z)$ называется *мероморфной*, если в каждой ограниченной части плоскости она регулярна, за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Во всей комплексной плоскости число полюсов мероморфной функции может быть и бесконечным (примеры: $\operatorname{ctg} z$, $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{e^z-1}$). Рациональная функция является мероморфной и имеет во всей расширенной комплексной плоскости лишь конечное число полюсов. Справедливо и обратное утверждение, т. е. имеет место

Теорема 2. *Мероморфная функция $f(z)$, имеющая во всей расширенной комплексной плоскости лишь конечное число полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (точка $z=\infty$ также может быть полюсом), является рациональной и представляется в виде*

$$f(z) = A + f_0(z) + \sum_{k=1}^{s} f_k(z), \tag{4}$$

где $f_0(z)$ и $f_k(z)$ — главные части ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестностях точки $z=\infty$ и a_k соответственно,

$$A = \lim_{z\to\infty}[f(z) - f_0(z)].$$

Доказательство. Пусть

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{j,k}}{(z-a_k)^j} \text{ и } f_0(z) = A_1 z + \ldots + A_m z^m$$

— главные части ряда Лорана для функции $f(z)$ в точках a_k и $z=\infty$ соответственно. Тогда функция

$$g(z) = f(z) - f_0(z) - \sum_{k=1}^{s} f_k(z)$$

регулярна во всей расширенной комплексной плоскости и, следовательно, $g(z) \equiv A = \text{const}$. Так как $f_k(z) \to 0$ при $z\to\infty$ $(k=1, 2, \ldots, s)$, то $A = \lim\limits_{z\to\infty}[f(z) - f_0(z)]$.

Замечание 1. Формула (4) представляет собой известное из курса математического анализа разложение рациональной функции на сумму простейших дробей ($A + f_0(z)$ — целая часть). Теорема 2 дает простой вывод этой формулы.

Замечание 2. Можно показать (см. [1]), что всякая мероморфная функция представима в виде отношения двух целых функций.

Для мероморфных функций справедлива

Теорема Пикара. *Мероморфная функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, двух.*

Те значения, которые мероморфная функция не принимает, называются *пикаровскими исключительными значениями.* Так, функция $\operatorname{tg} z$ имеет два исключительных значения i и $-i$, т. е. $\operatorname{tg} z \neq \pm i$ ни при каких z.

Глава IV

МНОГОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 20. Понятие аналитической функции

1. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей. Понятие аналитического продолжения играет исключительно важную роль в теории функций комплексного переменного. Обобщение этого понятия приводит к обобщению понятия регулярной функции — а именно, к понятию многозначной аналитической функции.

Пусть даны две области D_0, D_1, и пусть их пересечение D_{01} непусто и является областью (рис. 53). Пусть функции $f_0(z)$, $f_1(z)$ регулярны в областях D_0, D_1 соответственно, и пусть эти функции совпадают в области D_{01}, т. е.

$$f_1(z) \equiv f_0(z), \quad z \in D_{01}.$$

Тогда функция $f_1(z)$ называется *непосредственным аналитическим продолжением* функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1. Это продолжение единственно по теореме единственности.

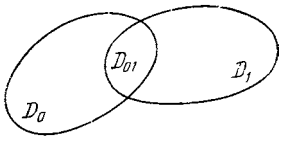


Рис. 53

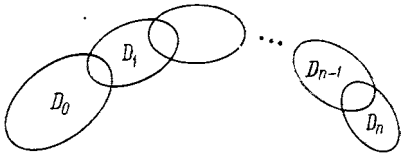


Рис. 54

Пусть дана цепочка областей D_0, D_1, ..., D_n таких, что все пересечения $D_j \cap D_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ непусты и являются областями (рис. 54). Пусть существуют функции $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., ..., $f_n(z)$ такие, что каждая последующая функция $f_{j+1}(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением предыдущей функции $f_j(z)$ из области D_j в область D_{j+1}. Это означает, что функции $f_j(z)$ регулярны в областях D_j и что $f_j(z) \equiv f_{j+1}(z)$, $z \in D_j \cap D_{j+1}$.

Тогда функция $f_n(z)$ называется *аналитическим продолжением функции* $f_0(z)$ *вдоль цепочки областей* $D_0, D_1, \ldots, D_n$. Это продолжение единственно.

Полученный набор регулярных функций $\{f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)\}$ определяет некоторую функцию $F(z)$. Ее значения даются формулой

$$F(z)=f_j(z), \quad z\in D_j.$$

Заметим, что «функция» $F(z)$ может оказаться неоднозначной! Действительно, цепочка областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$ может замкнуться, т. е. область D_0 может пересечься с областью D_n. Значения же функций $f_0(z)$ и $f_n(z)$ в пересечении $D_0 \cap D_n$ не обязаны совпадать. Неоднозначность функции $F(z)$ может возникнуть уже на первом шаге, если $D_0 \cap D_1$ состоит более чем из одной области. На рис. 55 изображен случай, когда $D_0 \cap D_1$ состоит из области D_{01} и заштрихованной области $\tilde{D}_{01}$. Если при $z\in D_{01}$ функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ совпадают, то при $z\in \tilde{D}_{01}$ эти функции не обязаны совпадать, так что при $z\in \tilde{D}_{01}$ либо $F(z)=f_0(z)$, либо $F(z)=f_1(z)$, и функция $F(z)$, вообще говоря, двузначна.

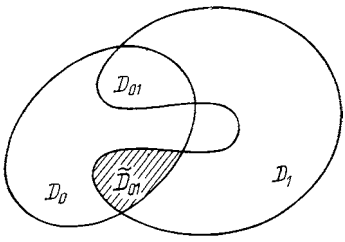


Рис. 55

Многозначная (вообще говоря) функция $F(z)$ по построению «составлена» или «склеена» из однозначных элементов — регулярных функций $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$. *Аналитической функцией* $F(z)$ называется набор таких элементов, полученных из исходного элемента $f_0(z)$ аналитическим продолжением по всем цепочкам областей, по которым продолжение *возможно*. Таким образом, аналитическая функция склеена из регулярных элементов (или, как их еще называют, регулярных ветвей). Существенно, что по исходному элементу однозначно строится аналитическая функция.

Более удобным понятием, чем понятие аналитического продолжения вдоль цепочки областей, является понятие аналитического продолжения вдоль кривой.

2. Аналитическое продолжение вдоль кривой. *Элементом* в точке z_0 будем называть функцию $f(z)$, регулярную в некоторой окрестности этой точки. Два элемента называются *эквивалентными*, если они заданы в одной и той же точке и совпадают в некоторой окрестности этой точки. Отношение эквивалентности элементов транзитивно. В дальнейшем всякий элемент рассматривается с точностью до эквивалентности. Введем понятие аналитического продолжения элемента вдоль кривой.

Определение 1. Пусть на кривой γ задана непрерывная функция $\varphi(z)$, в каждой точке ζ кривой γ задан элемент $f_\zeta(z)$ и этот элемент совпадает с $\varphi(z)$ на некоторой дуге (открытой, если ζ — внутренняя точка γ) кривой γ, содержащей точку ζ.

Тогда элемент $f_{z_1}(z)$ в конечной точке z_1 кривой γ называется *аналитическим продолжением вдоль кривой* γ элемента $f_{z_0}(z)$, заданного в начальной точке z_0 кривой γ.

В этом случае говорят также, что элемент $f_{z_0}(z)$ *аналитически продолжен вдоль кривой* γ, или что этот элемент *допускает аналитическое продолжение* вдоль кривой γ.

Замечание 1. Функция, заданная на кривой γ, является однозначной функцией от точек кривой γ (§ 4). Именно, если кривая γ задана уравнением $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, то каждой точке $z_t=\sigma(t)$ кривой γ отвечает одно число $\varphi(z_t)$ — значение функции φ в точке z_t кривой γ. Однако функция $\varphi(z)$ как функция от точек плоскости z может не быть однозначной, если кривая γ имеет самопересечения.

Замечание 2. Если элемент $f_{z_0}(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ, то его можно аналитически продолжить вдоль некоторой цепочки областей, покрывающей кривую γ. Далее, элемент $f_{z_0}(z)$ можно аналитически продолжить вдоль любой кривой γ', достаточно близкой к кривой γ и имеющей те же концы. Эти факты будут доказаны в п. 5 (леммы 2, 3). Наоборот, если данный элемент можно аналитически продолжить вдоль цепочки областей, то нетрудно показать, что его можно аналитически продолжить вдоль любой кривой, содержащейся в этой цепочке.

Важнейшим свойством аналитического продолжения вдоль кривой является его единственность.

Теорема. *Аналитическое продолжение данного элемента вдоль данной кривой единственно.*

Доказательство. Пусть дана кривая γ: $z=\sigma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, и пусть элемент $f_0(z)$, заданный в начальной точке $z_0=\sigma(0)$ этой кривой, можно аналитически продолжить вдоль кривой γ. Тогда в каждой точке $z_t=\sigma(t)$ задан элемент $f_t(z)$, и функция $\varphi(t)=f_t(z_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, непрерывна. Допустим, что это продолжение не единственно; тогда существует другое множество элементов $\tilde{f}_t(z)$ в точках z_t кривой γ, функция $\tilde{\varphi}(t)=\tilde{f}_t(z_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, также непрерывна, но элементы $f_1(z)$, $\tilde{f}_1(z)$ в конечной точке кривой не эквивалентны. Докажем, что $\varphi(t)\equiv\tilde{\varphi}(t)$ при $0\leqslant t\leqslant 1$; тем самым теорема будет доказана. Действительно, элементы $f_1(z)$, $\tilde{f}_1(z)$ совпадают на некоторой дуге кривой γ, содержащей точку z_1, так как по определению эти элементы совпадают с функциями φ и $\tilde{\varphi}$ соответственно на некоторой дуге; по теореме единственности эти элементы тождественно равны в некоторой окрестности точки z_1.

Пусть M — множество всех таких t, что $\varphi(t)=\tilde{\varphi}(t)$. Это множество содержит отрезок $[0, \delta]$, если $\delta>0$ достаточно мало́. Действительно, элементы $f_0(z)$, $\tilde{f}_0(z)$ в точке z_0 эквивалентны и потому совпадают в некоторой окрестности этой точки, а стало быть, и на некоторой дуге $\tilde{\gamma}$: $z=\sigma(t)$, $0\leqslant t\leqslant\delta$, кривой γ. Допустим, что $M\neq[0, 1]$. Тогда существует $t^*>0$ такое, что $\varphi(t)\equiv\tilde{\varphi}(t)$, $0\leqslant t<t^*$, но в любой окрестности точки t^* имеются точки, не принадлежащие множеству M. Из непрерывности функций φ, $\tilde{\varphi}$ следует, что $\varphi(t^*)=\tilde{\varphi}(t^*)$, так что $t^*\in M$, и если $t^*=1$, то теорема доказана. Пусть $t^*<1$. Функции $\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$ совпадают при $t\leqslant t^*$ по условию; элементы $f_{t^*}(z)$, $\tilde{f}_{t^*}(z)$ совпадают с функциями φ и $\tilde{\varphi}$ соответственно на некоторой дуге кривой γ, содержащей точку z_{t^*} по определению аналитического продолжения. Следовательно, $f_{t^*}(z)\equiv\tilde{f}_{t^*}(z)$ на некоторой дуге вида $z=\sigma(t)$, $t^*-\alpha\leqslant t\leqslant t^*$, и по теореме единственности эти элементы тождественно равны в некоторой окрестности точки z_{t^*}. Поэтому множество M содержит некоторый отрезок вида $[t^*, t^*+\alpha]$, что противоречит определению числа t^*.

3. Определение аналитической функции. Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$. Продолжим его аналитически по всем кривым с началом в точке z_0, по которым такое продолжение возможно; полученное множество элементов называется *аналитической функцией, порожденной элементом* $f(z)$. Множество всех таких кривых назовем *множеством допустимых кривых.*

Это определение аналитической функции принадлежит К. Вейерштрассу. Две аналитические функции по определению равны тогда и только тогда, когда их исходные элементы эквивалентны. В силу теоремы из п. 2 существует только одна аналитическая функция, порожденная данным элементом. Этот элемент называется также *ростком* аналитической функции. Эквивалентные элементы порождают одну и ту же аналитическую функцию. Множество значений, которые принимает аналитическая функция $F(z)$ в точке z, совпадает с множеством тех значений, которые принимают все ее элементы в этой точке.

Дальнейшие свойства аналитических функций будут установлены в § 24; к тому времени уже будет рассмотрено достаточно много примеров аналитических функций.

4. Аналитическое продолжение степенны́х рядов. До сих пор ничего не говорилось о том, как именно осуществлять аналитическое продолжение элемента вдоль кривой. Приведем алгоритм аналитического продолжения, основанный на переразложении степенных рядов. Рассмотрим ряд

$$f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

имеющий конечный радиус сходимости $R_0 > 0$. Функция $f_0(z)$ регулярна в круге K_0: $|z-a| < R_0$, так что $f_0(z)$ — элемент в точке a. Возьмем точку $b \in K_0$ и разложим $f_0(z)$ в ряд по степеням $z-b$. Имеем

$$(z-a)^n = [(z-b)+(b-a)]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-a)^{n-k}(z-b)^k.$$

Подставляя это выражение в ряд (1) и собирая вместе слагаемые, содержащие одинаковые степени $z-b$, получаем ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n. \tag{2}$$

Пусть R_1 — радиус сходимости ряда (2), K_1 — круг $|z-b| < R_1$; тогда $R_1 \geqslant R_0 - |b-a|$, так как R_1 не меньше, чем расстояние от точки b до границы круга K_0 (§ 12). Если $R_1 = R_0 - |b-a|$, то круг K_1 содержится в круге K_0, и аналитического продолжения не получается. Пусть $R_1 > R_0 - |b-a|$; тогда круг K_1 не содержится в круге K_0 (рис. 56). В силу теоремы единственности

$$f_1(z) \equiv f_0(z), \quad z \in K_0 \cap K_1. \tag{3}$$

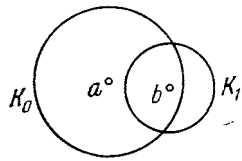


Рис. 56

Следовательно, ряд $f_1(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением ряда $f_0(z)$ (из круга K_0 в круг K_1).

Допустим, что существует последовательность элементов (степенны́х рядов) $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ таких, что элемент $f_j(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением элемента $f_{j-1}(z)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть K_0, K_1, ..., K_n — круги сходимости рядов $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ с центрами в точках z_0, z_1, ..., z_n. Тогда элемент $f_n(z)$ является аналитическим продолжением элемента $f_0(z)$ вдоль цепочки кругов K_0, K_1, ..., K_n.

Аналитическое продолжение с помощью переразложения степенно́го ряда малоэффективно. При продолжении конкретных функций удобнее использовать другие приемы. Главным из них является использование интегрального представления функции.

5. Некоторые свойства аналитического продолжения вдоль кривой. Результаты этого раздела будут использованы в § 24.

Пусть элемент $f_0(z)$ аналитически продолжен вдоль кривой γ: $z = \sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и пусть $f_t(z)$ — соответствующий элемент в точке $z_t = \sigma(t)$ кривой γ. В качестве элемента $f_t(z)$ возьмем степенной ряд

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(z-z_t)^n.$$

Лемма 1. *Радиус сходимости $r(t)$ ряда $f_t(z)$ либо при всех t равен бесконечности, либо является непрерывной функцией t.*

Доказательство. Пусть $r(t_0) < \infty$ для некоторого t_0. Возьмем t_1 такое, что точка z_{t_1} лежит в круге сходимости элемента $f_{t_0}(z)$ и $|z_{t_0} - z_{t_1}| < \frac{1}{2} r(t_0)$. Тогда радиус сходимости ряда $f_{t_1}(z)$ не меньше, чем расстояние от точки z_{t_1} до границы круга сходимости ряда $f_{t_0}(z)$ (§ 12), так что $r(t_1) \geqslant r(t_0) - |z_{t_0} - z_{t_1}|$. Точка z_{t_0} лежит в круге сходимости ряда $f_{t_1}(z)$; следовательно, $r(t_0) \geqslant r(t_1) - |z_{t_0} - z_{t_1}|$. Таким образом,

$$|r(t_0) - r(t_1)| \leqslant |z_{t_0} - z_{t_1}| = |\sigma(t_0) - \sigma(t_1)|,$$

и $r(t)$ является непрерывной функцией t.

Лемма 2. *Аналитическое продолжение элемента вдоль кривой можно заменить аналитическим продолжением вдоль конечной цепочки кругов.*

Доказательство. Так как радиус сходимости $r(t)$ является непрерывной положительной функцией t при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $r(t) \geqslant \delta > 0$ при $t \in [0, 1]$. Выберем последовательность значений $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ так, чтобы $|\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)| < \delta$ при $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда круги K_j: $|z - z_{t_j}| < r(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, образуют конечную цепочку, а элементы $f_{t_0}(z)$, $f_{t_1}(z)$, ..., $f_{t_n}(z)$ образуют аналитическое продолжение вдоль этой цепочки.

Лемма 3. *Если элемент можно аналитически продолжить вдоль некоторой кривой, то его можно аналитически продолжить вдоль любой достаточно близкой кривой, имеющей те же концы. При этом в конечной точке получатся одинаковые элементы.*

Близость кривых понимается в следующем смысле. Рассмотрим кривые γ_j: $z = \sigma_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $j = 1, 2$. *Расстоянием между* этими *кривыми* называется величина $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|$. Кривые называются близкими, если расстояние между ними мало.

Доказательство. Пусть элемент $f_0(z)$ в начальной точке $z_0 = \sigma(0)$, кривой γ: $z = \sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, аналитически продолжен вдоль этой кривой. Возьмем последовательность $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ такую, что $|\sigma(t) - \sigma(t_{j-1})| < \delta/4$ при $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\delta > 0$ — то же, что и в доказательстве леммы 2. Тогда по доказанному в лемме 2 элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль цепочки кругов K_0, K_1, ..., K_n; центр круга K_j расположен в точке z_{t_j}, а радиус равен δ. Рассмотрим кривую $\tilde{\gamma}$: $z = \tilde{\sigma}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, для которой $\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0)$, $\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1)$, и такую, что расстояние между кривыми γ, $\tilde{\gamma}$ меньше, чем $\delta/4$.

Покажем, что элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой $\tilde{\gamma}$. По построению дуги γ_j, $\tilde{\gamma}_j$ кривых γ, $\tilde{\gamma}$, соединяющих точки $\sigma(t_j)$, $\sigma(t_{j+1})$ и $\tilde{\sigma}(t_j)$, $\tilde{\sigma}(t_{j+1})$, лежат вдоль круга K_j. Пусть точка $\tilde{z}(t)$ кривой $\tilde{\gamma}$ лежит на дуге $\tilde{\gamma}_j$; положим $\tilde{f}_t(z) = f_{t_j}(z)$. Точка $\tilde{z}_t$ лежит внутри круга сходимости K_j ряда $f_{t_j}(z)$, так что $\tilde{f}_t(z)$ — элемент в точке $\tilde{z}(t)$. Отметим, что

$$\tilde{f}_1(z) = f_1(z).$$

Таким образом, в каждой точке $\tilde{z}_t$ кривой $\tilde{\gamma}$ задан элемент $\tilde{f}_t(z)$, и тем самым на кривой $\tilde{\gamma}$ задана функция $\varphi(z)$ формулой $\varphi(\tilde{z}_t) = \tilde{f}_t(\tilde{z}_t)$.

Покажем, что функция φ непрерывна на кривой $\tilde{\gamma}$; этим будет доказано, что элемент $f_0(z)$ аналитически продолжен вдоль кривой γ. По построению функция φ непрерывна на дугах $\tilde{\gamma}_i$, за исключением их концов, так что остается проверить непрерывность функции φ в точках $\tilde{z}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Точка $\tilde{z}_{t_j} \in K_j \cap K_{j+1}$, и в этой области $f_{t_j}(z) \equiv f_{t_{j+1}}(z)$, так как элемент $f_0(z)$ аналитически продолжен вдоль цепочки кругов $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Следовательно, $\tilde{f}_{t_j}(\tilde{z}_{t_j}) = \tilde{f}_{t_{j+1}}(\tilde{z}_{t_j})$, что и доказывает непрерывность функции φ в точке $\tilde{z}_{t_j}$. Лемма доказана.

§ 21. Функция $\ln z$

1. Аналитическое продолжение функции $\ln x$. В курсе математического анализа рассматривается функция $\ln x$ при действительных положительных значениях x. Естественно определить функцию $\ln z$ для комплексных значений z как аналитическое продолжение функции $\ln x$. Функция $\ln x$ разлагается в ряд Тейлора

$$\ln x = \ln [1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n,$$

который сходится на интервале $0 < x < 2$. Рассмотрим этот ряд при комплексных z, т. е. рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n. \tag{1}$$

Ряд (1) сходится в круге K_0: $|z-1| < 1$, так что функция $f_0(z)$ регулярна в этом круге, и $f_0(x) = \ln x$ при $0 < x < 2$. Следовательно, функция $f_0(z)$ является аналитическим продолжением (и притом единственным!) функции $\ln x$ с интервала $0 < x < 2$ в круг K_0.

Обозначим символом $\ln z$ аналитическую функцию, порожденную элементом $f_0(z)$, заданным в точке $z = 1$.

Наша задача — выяснить, по каким кривым элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить, и получить эффективные формулы для функции $\ln z$. Аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ можно было бы осуществить с помощью переразложения степенных рядов (§ 20), однако этот путь является весьма громоздким. Удобнее воспользоваться интегральным представлением логарифма:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad 0 < x < \infty.$$

Покажем, что аналогичное интегральное представление имеет место для исходного элемента $f_0(z)$.

Лемма 1. *В круге* K_0: $|z-1|<1$ *справедлива формула*

$$f_0(z)=\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1'}$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в круге K_0.

Доказательство. Функция $f_0(z)$, заданная формулой (1), регулярна в круге K_0. Интеграл, стоящий в правой части равенства (1'), также является регулярной в круге K_0 функцией по теореме 5 из § 9, так как подынтегральная функция регулярна в круге K_0. При $0<x<2$ этот интеграл равен $\ln x$, т. е. совпадает с рядом (1). По теореме единственности этот интеграл совпадает с рядом (1) при $z\in K_0$, т. е. справедлива формула (1').

Лемма 2. *Элемент* $f_0(z)$ *можно аналитически продолжить по любой кривой* γ, *которая выходит из точки* $z=1$ *и не проходит через точку* $z=0$.

Доказательство. Полагая

$$w(z)=\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где интеграл берется по дуге кривой γ, получаем функцию $w(z)$ на кривой γ. Возьмем круг K с центром в точке $z_0\in\gamma$, не содержащий точки $z=0$, и положим при $z\in K$

$$f(z)=\int_1^{z_0}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}=w(z_0)+\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{2}$$

где последний интеграл берется по любой кривой, лежащей в круге K (рис. 57). Этот интеграл является регулярной в круге K функцией по теореме 5 из § 9, так как подынтегральная функция регулярна в круге K. Следовательно, функция $f(z)$ является элементом в точке z_0 кривой γ. Элемент в начальной точке $z=1$ по построению совпадает с исходным элементом $f_0(z)$. Чтобы завершить доказательство леммы, остается проверить, в соответствии с определением 1 из § 20, что значения $w(z)$ и $f(z)$ совпадают на некоторой дуге γ_0 кривой γ, содержащей точку z_0. Можно считать, что эта дуга лежит в круге K. Тогда при $z\in\gamma_0$ имеем

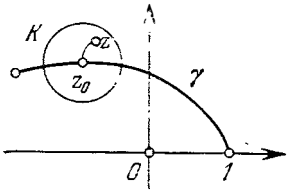


Рис. 57

$$w(z)=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}=w(z_0)+\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{3}$$

где путь интегрирования является частью дуги γ_0. Так как пути интегрирования в формулах (2) и (3) можно взять одинаковыми, то $f(z) \equiv w(z)$, $z \in \gamma_0$, что и требовалось доказать.

Пусть D — область расширенной комплексной плоскости, $f(z)$ — элемент в точке $z_0 \in D$. Пусть элемент $f(z)$ допускает аналитическое продолжение по всем кривым, лежащим в области D. В результате такого продолжения получается множество элементов, которое называется *аналитической в области D функцией.*

Из этого определения и леммы 2 следует

Теорема 1. *Функция* $\ln z$ *аналитична в области* $0 < |z| < \infty$.

2. Основные свойства функции $\ln z$. Из доказательства леммы 2 следует, что значение функции $\ln z$ в точке $z \neq 0, \infty$ дается формулой

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{4}$$

где интеграл берется по некоторой кривой γ, которая не проходит через точки 0, ∞. Вычислим этот интеграл. Имеем $\zeta = re^{i\varphi}$, где $r = |\zeta|$, так что $d\zeta = e^{i\varphi}\,dr + ire^{i\varphi}\,d\varphi$, $\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi$, и интеграл (4) равен

$$\int_\gamma \frac{dr}{r} + i\int_\gamma d\varphi = \ln|z| + i\Delta_\gamma \arg z,$$

где $\Delta_\gamma \arg z$ — приращение аргумента вдоль кривой γ (§ 6). Следовательно,

$$\ln z = \ln|z| + i\Delta_\gamma \arg z. \tag{5}$$

Эта формула является основной формулой для функции $\ln z$.

Замечание 1. Значение логарифма $\ln z$ зависит не только от точки z, но и от кривой γ, по которой берется интеграл (4). Строго говоря, это значение следовало бы записывать в виде $(\ln z)_\gamma$ или $(\gamma)\ln z$. Однако такого рода обозначения не являются общепринятыми, и мы не будем их систематически употреблять. Вместо этого каждый раз будем указывать, по какому пути исходный элемент аналитически продолжен.

Из (4) вытекает формула

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}. \tag{6}$$

Пример 1. Вычислим значение функции $\ln z$ в точке z_1, полученное в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_0(z)$ вдоль кривой γ:

а) γ — отрезок $[1, i]$, $z_1 = i$;

б) γ — полуокружность γ_+: $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $z_1 = -1$;

в) γ — полуокружность γ_-: $z = e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $z_1 = -1$.

В случае а) имеем $\Delta_\gamma \arg z = \pi/2$, так что $\ln i = i\pi/2$. В случае б) имеем $\Delta_\gamma \arg z = +\pi$, так что $\ln(-1) = i\pi$, а в случае в) $\Delta_\gamma \arg z = -\pi$, так что $\ln(-1) = -i\pi$. □

Из основной формулы (5) вытекает следующее свойство логарифма:

1. Все значения функции $\ln z$ в точке z даются формулой

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{7}$$

Здесь $\arg z$ — неоднозначная функция: $\arg z = (\arg z)_0 + 2k\pi i$, где $(\arg z)_0$ — некоторое фиксированное значение аргумента, k — произвольное целое число. Эту формулу можно также записать в виде

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{8}$$

где $\ln r$ — действительное число.

Следовательно, $\ln z$ — бесконечнозначная функция, т. е. в каждой точке $z \neq 0, \infty$ эта функция имеет бесконечно много значений. Действительная часть этой функции однозначна:

$$\operatorname{Re} \ln z = \ln|z|$$

для любых $z \neq 0, \infty$ и для любого значения $\ln z$.

Из формулы (7) следует, что

$$e^{\ln z} = z, \tag{9}$$

так что функция $\ln z$ является обратной к функции e^z.

В силу формулы (7) любые два значения логарифма в точке z_0 отличаются на $2k\pi i$, где k — целое число. Отсюда вытекает следующее важное свойство логарифма:

2. Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ — элементы логарифма в некоторой точке z_0, то $f_1(z) - f_2(z) \equiv 2k\pi i$ в некоторой окрестности этой точки, где k — целое число.

Отсюда следует, что *любой элемент логарифма в любой точке* $z_0 \neq 0, \infty$ *полностью определяется заданием своего значения в этой точке.* Произвольные аналитические функции не обладают этим свойством.

3. Пусть $f(z)$ — элемент функции $\ln z$ такой, что $f(z_0) = \ln z_0$. Тогда

$$f(z) = \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n. \tag{10}$$

Этот ряд сходится в круге $|z - z_0| < |z_0|$.

Заметим, что коэффициенты Тейлора в формуле (10) имеют тот же вид, что и в случае действительных z, z_0.

Докажем (10). По формуле Тейлора имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Из (6) следует, что $f'(z) = 1/z$ в окрестности точки z_0, так что $f^{(n)}(z_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!/z_0^n$ при $n \geqslant 1$, и формула (10) доказана.

Распространим формулу (5) на случай, когда исходное значение логарифма задано в точке, отличной от точки $z = 1$.

4. Пусть в точке z_0 задано значение логарифма $\ln z_0$ и кривая γ соединяет точки z_0 и z. Пусть $\ln z$ — значение логарифма в точке z, полученное в результате аналитического продолжения вдоль кривой γ. Тогда справедлива формула

$$\ln z = \ln z_0 + \ln \left| \frac{z}{z_0} \right| + i \Delta_\gamma \arg z. \tag{11}$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$\ln z = \ln |z| + i [\operatorname{Im} (\ln z_0) + \Delta_\gamma \arg z]. \tag{12}$$

Доказательство следует из соотношения

$$\ln z = \ln z_0 + \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Пример 2. Пусть $\ln i = i5\pi/2$, и γ — отрезок $[i, 2]$. Продолжим аналитически элемент логарифма, равный $i5\pi/2$ в точке $z = i$, вдоль кривой γ. Тогда по формуле (12) имеем

$$\ln z|_{z=2} = \ln 2 + i \left[\frac{5\pi}{2} + \Delta_\gamma \arg z \right] = \ln 2 + \frac{i5\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} = \ln 2 + 2\pi i. \quad \square$$

3. Характер неоднозначности функции $\ln z$. Многозначные аналитические функции могут иметь особые точки нового типа по сравнению с рассмотренными в главе III — точки ветвления.

Определение 1. Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки a и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка a называется *изолированной точкой ветвления функции* $F(z)$.

Пример 3. Точки $0, \infty$ являются изолированными точками ветвления функции $\ln z$. $\square$

Приведем другое определение точки ветвления. Пусть функция $F(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - a| < r$. Возьмем точку z_0 из этого кольца и элемент $f_0(z)$ в точке z_0 и аналитически продолжим этот элемент вдоль окружности $|z - a| = |z_0 - a|$ с началом и концом в точке z_0. (Коротко эту процедуру будем записывать так: «Совершим обход вокруг точки a» в положительном или в отрицательном направлении в зависимости от ориентации окружности.) Если элемент $f_1(z)$, полученный в ре-

зультате аналитического продолжения, не совпадает с исходным элементом $f_0(z)$, то точка a является изолированной точкой ветвления функции $F(z)$.

Возьмем точку $z_0 \neq 0, \infty$, элемент $f_0(z)$ логарифма в этой точке и совершим обход вокруг точки $z=0$ в положительном направлении. Если $f_1(z)$ — полученный в результате аналитического продолжения элемент, то по формуле (11)

$$f_1(z) = f_0(z) + 2\pi i.$$

Следовательно, логарифм обладает следующим свойством.

5. При обходе вокруг точки $z=0$ в положительном направлении

$$\ln z \to \ln z + 2\pi i, \tag{13}$$

т. е. элемент логарифма получает приращение $+2\pi i$. При обходе вокруг точки $z=0$ в отрицательном направлении

$$\ln z \to \ln z - 2\pi i. \tag{13'}$$

Замечание 2. Свойство 5 является характеристическим свойством логарифмической функции. Именно, пусть функция $F(z)$ аналитична в кольце K: $0<|z|<r$ и обладает следующим свойством: при обходе вокруг точки $z=0$ в положительном направлении

$$F(z) \to F(z) + c, \quad c \neq 0$$

(т. е. любой ее элемент получает приращение $c = \text{const}$). Тогда

$$F(z) = \frac{c}{2\pi i} \ln z + G(z),$$

где функция $G(z)$ регулярна в кольце K.

Для доказательства рассмотрим функцию $G(z) = F(z) - \frac{c}{2\pi i} \ln z$. Она аналитична и однозначна в кольце K, ибо $G(z) \to G(z)$ при обходе вокруг точки $z=0$.

Функция $\ln z$, как и всякая многозначная аналитическая функция, «составлена» (или «склеена») из однозначных аналитических функций, а именно, из своих элементов. Всякий элемент логарифма называется однозначной (или регулярной) ветвью логарифма. Аналогично, *однозначной ветвью многозначной аналитической функции называется любой ее элемент*. Можно по-разному выбирать элементы, из которых «склеена» аналитическая функция.

Из формулы (11) и свойств аргумента (§ 6) вытекает следующее свойство логарифма:

6. Пусть кривые γ_1, γ_2 лежат в области $0<|z|<\infty$, соединяют точки a, b и гомотопны в этой области. Пусть $f(z)$ — произвольный элемент логарифма в точке a. Тогда при аналитическом

продолжении этого элемента вдоль кривых γ_1, γ_2 получим один и тот же элемент в точке b.

Действительно, приращения аргумента вдоль кривых γ_1 и γ_2 равны: $\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Delta_{\gamma_2} \arg z$, так что аналитическое продолжение вдоль кривых γ_1 и γ_2 приводит в силу (11) к одному и тому же значению логарифма в точке b.

Пусть D — произвольная односвязная область, не содержащая точек 0, ∞. Фиксируем точку $z_0 \in D$ и значение $\ln z_0$ в этой точке. Аналитически продолжив элемент $f(z)$ логарифма ($f(z_0) = \ln z_0$) по всем путям, которые выходят из точки z_0 и лежат в области D, получим однозначную в области D функцию $f(z)$. Это следует из свойства 6 и из того, что в односвязной области любые две кривые, имеющие общее начало и общий конец, гомотопны. Полученная однозначная аналитическая функция называется *регулярной ветвью логарифма в области D*. Выбрав в точке z_0 другое значение логарифма, получим другую регулярную ветвь логарифма в этой области.

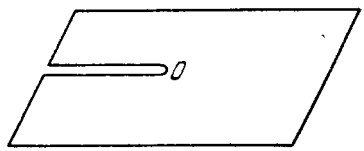


Рис. 58

Выберем в качестве D плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (рис. 58). Функция $\ln z$ в этой области распадается на бесконечное число однозначных ветвей. Эти ветви имеют вид

$$f_k(z) = \ln|z| + i(\arg z)_0 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (14)$$

Здесь $(\arg z)_0$ — однозначная ветвь аргумента такая, что

$$-\pi < (\arg z)_0 < \pi.$$

Вместо того чтобы рассматривать бесконечно много регулярных функций в одной области D, возьмем бесконечно много идентичных экземпляров этой области. Обозначим эти области D_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, и будем считать, что в области D_k задана регулярная функция $f_k(z)$.

Теперь склеим области D_k («листы») в одну поверхность. Пусть l_k — разрез $(-\infty, 0]$ на листе D_k и пусть l_k^+, l_k^- — верхний и нижний берега разреза соответственно. Если $z = x < 0$, то

$$f_k(x) = \ln|x| + (2k+1)\pi i, \quad x \in l_k^+,$$

$$f_k(x) = \ln|x| + (2k-1)\pi i, \quad x \in l_k^-,$$

так как $(\arg x)_0 = \pm\pi$, $x \in l_k^{\pm}$. Следовательно,

$$f_k(x)|_{l_k^+} = f_{k+1}(x)|_{l_{k+1}^-}.$$

Поэтому будем склеивать нижний берег разреза l_{k+1}^- с верхним берегом разреза l_k^+, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тогда функция $\ln z$ будет однозначна на полученной бесконечнолистной поверхности.

Построенная поверхность изображена на рис. 59. Она называется *римановой поверхностью логарифма*. Эта поверхность напоминает по форме бесконечную в обе стороны винтовую лестницу.

Заметим, что риманова поверхность логарифма односвязна.

Замечание 3. Можно по-другому «разрезать» логарифм на регулярные ветви. Именно, в качестве D можно взять плоскость с разрезом по любой простой кривой γ, соединяющей точки 0 и ∞. Выбор разреза диктуется конкретной задачей. Например, при вычислении интегралов вида $\int_0^\infty R(x) \ln x \, dx$, где $R(x)$ — рациональная функция, оказывается удобным провести разрез $[0, +\infty)$ (§ 29).

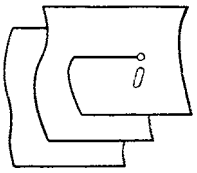


Рис. 59

Поскольку уже известны конформные отображения некоторых областей функцией e^z, то отсюда можно сразу же получить ряд отображений функцией $\ln z$. Функция e^z взаимно однозначно и конформно отображает полосу Π: $0 < \operatorname{Im} z < a$ ширины $a \leqslant 2\pi$ на сектор S: $0 < \arg w < a$. Следовательно, обратная функция

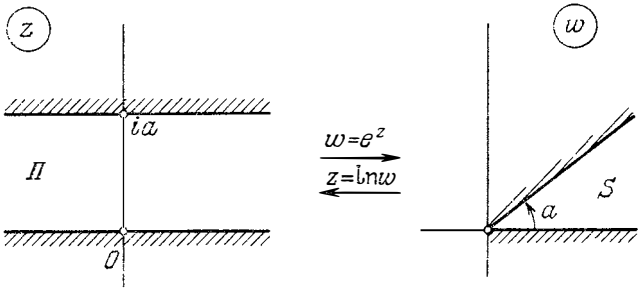


Рис. 60

$z = \ln w$ взаимно однозначно и конформно отображает сектор S: $0 < \arg w < a$ на полосу Π: $0 < \operatorname{Im} z < a$ (рис. 60). Однако здесь следует выражаться поточнее, так как обратная функция неоднозначна. Сектор S — односвязная область, не содержащая точек 0, ∞. Следовательно, в этой области функция $z = \ln w$ распадается на однозначные ветви. Отображение $S \to \Pi$ осуществляется одной из этих ветвей $z_0(w)$; ее можно задать одним из способов:

1) $0 < \operatorname{Im} z_0(w) < 2\pi$ в секторе S;
2) $z_0(1) = 0$ (т. е. задается значение ветви на границе).

Функция $w = \ln z$ (точнее, ее ветвь $f_0(z)$, заданная формулой (14)), взаимно однозначно и конформно отображает плоскость z с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$ на полосу $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$.

Другие ветви логарифма отображают сектор S на другие полосы. Именно, если $f_k(z)$ — ветвь логарифма в секторе S, заданная формулой (14), то функция $w = f_k(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает сектор S на полосу Π_k (рис. 49):

$$2k\pi < \operatorname{Im} w < 2k\pi + a.$$

В курсе математического анализа для функции $\ln x$ выводится функциональное соотношение $\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$. Так как $\ln z$ — неоднозначная функция, то аналогичное соотношение

$$\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad (z_1,\ z_2 \neq 0) \tag{15}$$

приходится трактовать иначе. Именно, если $w_1 = \ln z_1$ — любое значение функции $\ln z$ в точке z_1 и $w_2 = \ln z_2$ — любое значение функции $\ln z$ в точке z_2, то их сумма $w_1 + w_2$ есть одно из значений $\ln(z_1z_2)$. Это утверждение следует из тождества

$$e^{w_1+w_2} = e^{\ln z_1} e^{\ln z_2} = z_1z_2.$$

Далее, если $w_0 = \ln(z_1z_2)$ есть одно из значений функции $\ln z$ в точке z_1z_2, то существуют такие значения $w_j = \ln z_j$, $j = 1, 2$, что $w_0 = w_1 + w_2$, т. е. выполняется (15). Для доказательства фиксируем значения $w_0 = \ln(z_1z_2)$, $w_1 = \ln z_1$. Тогда

$$e^{w_0-w_1} = e^{w_0}e^{-w_1} = z_1z_2z_1^{-1} = z_2,$$

т. е. $w_0 - w_1$ совпадает с одним из значений $\ln z$.

Равенство (15), очевидно, неверно, если в него подставить произвольные значения $\ln z$ в точках z_1, z_2, z_1z_2. Например,

$$z_1 = z_2 = 1, \quad \ln(z_1z_2) = 0, \quad \ln z_1 = 0, \quad \ln z_2 = 2\pi i.$$

§ 22. Степенна́я функция. Точки ветвления аналитических функций

1. Операции над аналитическими функциями. В предыдущем параграфе была введена элементарная многозначная аналитическая функция $\ln z$. Все остальные элементарные аналитические функции можно выразить через логарифм с помощью арифметических операций, суперпозиции, операции обращения функции. Определим эти операции для аналитических функций.

Операции над аналитическими функциями вводятся с помощью операций над их исходными элементами. Пусть даны два элемента $f(z)$, $g(z)$, заданные в одной и той же точке z_0, и пусть $F(z)$, $G(z)$ — аналитические функции, порожденные этими элементами. Тогда функции

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)g(z), \quad f(z)/g(z)$$

также являются элементами в точке z_0 (для частного требуется, чтобы $g(z_0) \neq 0$). Эти элементы порождают аналитические

функции, которые обозначим символами

$$F(z)\pm G(z),\quad F(z)G(z),\quad F(z)/G(z)$$

соответственно. Если же элементы $f(z)$, $g(z)$ заданы в разных точках, то их сумма, разность, произведение, частное не определены, так что эти операции над аналитическими функциями $F(z)$, $G(z)$ также не определены.

Символом $F'(z)$ обозначим аналитическую функцию, порожденную элементом $f'(z)$ в точке z_0.

По определению, эти операции над аналитическими функциями снова приводят к аналитическим функциям. Рассмотрим важный частный случай, когда функции $F(z)$, $G(z)$ аналитичны в одной и той же области.

Теорема 1. *Пусть функции $F(z)$, $G(z)$ аналитичны в области D. Тогда функции*

$$F'(z),\ G'(z),\ F(z)\pm G(z),\ F(z)G(z),\ F(z)/G(z)$$

(в последнем случае требуется, чтобы $G(z)\neq 0$ при $z\in D$) аналитичны в области D.

Доказательство. Докажем аналитичность функции $F(z)+G(z)$; точно так же доказывается аналитичность остальных функций. Пусть $f(z)$, $g(z)$ — исходные элементы этих функций, заданные в точке z_0, кривая γ лежит в области D и имеет своим началом точку z_0. Продолжив аналитически элементы $f(z)$, $g(z)$ вдоль кривой γ, получим в каждой точке $\zeta\in\gamma$ элементы $f_\zeta(z)$, $g_\zeta(z)$. Их сумма $h_\zeta(z)=f_\zeta(z)+g_\zeta(z)$ регулярна в точке ζ; тем самым элемент $h(z)=f(z)+g(z)$ в точке z_0 аналитически продолжен вдоль кривой γ.

Эта теорема позволяет несколько расширить запас элементарных аналитических функций. Например, следующие функции являются аналитическими (область аналитичности указана в скобках):

$$\ln^2 z\ (0<|z|<\infty),\quad z\ln z\ (0<|z|<\infty),$$

$$z+\ln z\,(0<|z|<\infty),\quad \frac{\ln z+1}{\ln z-1}\ (z\neq 0,\ e,\ \infty).$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $F(z)=z\ln z$ (исходный элемент логарифма задан в точке $z=1$, $\ln 1=0$). Исследуем характер неоднозначности этой функции. Покажем, что точка $z=0$ является точкой ветвления функции $F(z)$. Пусть γ — окружность $|z|=1$ с началом в точке $z=1$, ориентированная положительно. При обходе вокруг точки $z=0$ (т. е. при аналитическом продолжении исходного элемента $f(z)$ вдоль кривой γ) имеем $\ln z\to\ln z+2\pi i$, так что $f(z)\to f(z)+2\pi iz$. Следовательно, точка $z=0$ является точкой ветвления. После n обходов получаем $f(z)\to f(z)+2n\pi iz$. Точка $z=\infty$ также является точкой ветвления функции $F(z)$, так как обход вокруг точки $z=0$ в

положительном направлении — это обход вокруг точки $z=\infty$ в отрицательном направлении. □

Определим суперпозицию аналитических функций. Пусть аналитические функции $F(z)$, $G(z)$ порождены элементами $f(z)$, $g(z)$, заданными в точках z_0, $w_0=f(z_0)$ соответственно. Суперпозицией $G(F(z))$ называется аналитическая функция, порожденная элементом $g(f(z))$.

Теорема 2. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в области D, ее значения лежат в области $\tilde{D}$ и функция $G(z)$ аналитична в области $\tilde{D}$. Тогда суперпозиция $G(F(z))$ аналитична в области D.*

Доказательство. Пусть кривая γ с начальной точкой z_0 лежит в области D. Продолжив аналитически элемент $f(z)$ вдоль кривой γ, получим в каждой точке $\zeta\in\gamma$ элемент $f_\zeta(z)$ и функцию $w(z)$ на кривой γ: $w(z)=f_z(z)$. Эта функция отображает кривую γ на кривую $\tilde{\gamma}$, лежащую в области $\tilde{D}$, с началом в точке $w_0=f(z_0)$. По условию, исходный элемент $g(w)$ функции $G(w)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой $\tilde{\gamma}$; это продолжение дает элемент $g_w(w)$ в каждой точке $w\in\tilde{\gamma}$. Если $w\in\tilde{\gamma}$, $w=f_\zeta(\zeta)$, то функция $g_w(f_\zeta(z))=h_\zeta(z)$ регулярна в точке $\zeta\in\gamma$, и потому является элементом в этой точке. Тем самым исходный элемент $g(f(z))$ аналитически продолжен вдоль кривой γ, так что $G(F(z))$ — аналитическая в области D функция.

Пример 2. Функция $\ln(z-a)$ аналитична в области $0<|z-a|<\infty$. □

Пример 3. Функция $\ln\dfrac{z-1}{z+1}$ аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками ±1.

Действительно, функция $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ в указанной области D регулярна и не принимает значений 0, ∞. Функция $\ln w$ аналитична в области $\tilde{D}$: $0<|w|<\infty$. □

Отметим еще тождества: $e^{\ln(z-a)}=z-a$, $\operatorname{Re}\ln(z-a)=\ln|z-a|$, справедливые при $z\neq a$, ∞.

Замечание 1. Строго говоря, формула $F(z)=\ln(z-a)$ еще не определяет аналитическую функцию: необходимо, по определению аналитической функции, указать ее исходный элемент. Это замечание связано с тем, что формула может определять не одну, а несколько аналитических функций, если не указан исходный элемент.

Пример 4. Выражение $F(z)=\ln e^z$ определяет бесконечно много аналитических функций

$$F_k(z)=z+2k\pi i,\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$ □

Другие примеры такого рода будут приведены в п. 5.

2. **Степенная функция.** При действительных $x>0$ и при действительном фиксированном α справедлива формула $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Распространим эту формулу на комплексные значения z и на комплексные значения α (α фиксировано), положив, по определению,

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \tag{1}$$

В качестве исходного элемента функции z^α возьмем элемент $g_0(z) = e^{\alpha f_0(z)}$ в точке $z=1$, где $f_0(z)$ — исходный элемент функции $\ln z$ в точке $z=1$ (§ 21, (1)). Тогда

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k (z-1)^k, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

Действительно, $\frac{d^k}{dz^k} g_0(z)\Big|_{z=1} = k!\, C_\alpha^k$. Из этого соотношения и формулы Тейлора

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_0^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

следует формула (2).

Из свойств логарифма вытекают следующие свойства степенно́й функции.

Теорема 3. *Функция z^α аналитична в области $0<|z|<\infty$.*

Доказательство. Функция $\ln z$ аналитична в области D: $0<|z|<\infty$; тем же свойством обладает функция $\alpha \ln z$. Так как e^z — целая функция, то по теореме 2 функция $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ аналитична в области D как суперпозиция аналитических функций.

Производная степенно́й функции вычисляется по той же формуле, что и в действительном случае:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{3}$$

Замечание 2. Эту формулу следует понимать так:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \frac{\alpha z^\alpha}{z}, \tag{3'}$$

где значения z^α в обеих частях равенства — одни и те же.

Из формул для логарифма и из соотношения (1) вытекают все формулы для функции z^α. Основная формула для степенно́й функции вытекает из (1) и из формулы (12) § 21.

1. Пусть кривая γ соединяет точки z_0, z_1 и не проходит через точки 0, ∞. Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$ функции z^α такой, что $f(z_0) = z_0^\alpha$. Продолжив аналитически этот элемент

вдоль кривой γ, получим в точке z_1 значение

$$z_1^\alpha = z_0^\alpha \exp\left[\alpha \ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\alpha\Delta_\gamma \arg z\right]. \tag{4}$$

Эта формула довольно сложна, и в таком виде почти не будет использоваться в дальнейшем. Более простые формулы для функции z^α получаются при действительных α; этот случай является к тому же наиболее важным для приложений.

2. Любой элемент функции z^α в каждой точке $z_0 \neq 0, \infty$ полностью определяется заданием своего значения в этой точке. Любые два элемента $f_1(z)$, $f_2(z)$ в каждой точке $z_0 \neq 0, \infty$ отличаются числовым множителем:

$$f_2(z) \equiv e^{i2\pi k\alpha} f_1(z), \tag{5}$$

где k — некоторое целое число.

Это свойство вытекает из формулы (1) и из свойства 2 логарифма (§ 21).

3. Все значения функции z^α при действительном α в точке $z = re^{i\varphi}$ даются формулой

$$z^\alpha = (re^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i(\varphi+2k\pi)\alpha}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

В частности, при действительном α функция $|z^\alpha|$ однозначна:

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha. \tag{7}$$

Из формулы (4) и из формулы (11) § 21 вытекает следующая основная формула (8) для функции z^α при действительных α.

4. Пусть в точке $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ задано значение $z_0^\alpha = r_0^\alpha e^{i\alpha\varphi_0}$ функции z^α. Пусть z_1^α — значение в точке z_1, полученное в результате аналитического продолжения вдоль кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_1. Тогда

$$z_1^\alpha = |z_1|^\alpha e^{i\alpha(\varphi_0 + \Delta_\gamma \arg z)}. \tag{8}$$

В частности, при таком продолжении

$$\Delta_\gamma \arg z^\alpha = \alpha \Delta_\gamma \arg z. \tag{9}$$

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 5. Все значения функции $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, где $n \geqslant 2$ — целое число, в точке $z = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$ даются формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i}{n}(\varphi+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Действительно, значения $\sqrt[n]{z}$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ различны, так как числа $e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = (\varphi + 2k\pi)/n$ при этих значениях k различны. Далее, любое целое число k можно представить в виде

$k = nm + r$, где m, r — целые числа, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Так как $e^{i\varphi_k} = e^{i2\pi m} e^{i\varphi_r} = e^{i\varphi_r}$, то формула (10) содержит все значения $\sqrt[n]{z}$.

Таким образом, функция $\sqrt[n]{z}$ в области $0 < |z| < \infty$ является n-значной, т. е. в каждой точке этой области имеет ровно n различных значений.

Из формулы (10) вытекает тождество

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n \equiv z. \tag{11}$$

Следовательно, функция $\sqrt[n]{z}$ является (правой) обратной к функции z^n. □

Пример 6. Все значения функции $\sqrt{z}$ в точке $z = re^{i\varphi}$ даются формулой $\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \pm\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$. Следовательно, функция $\sqrt{z}$ является двузначной в области $0 < |z| < \infty$. □

Пример 7. Если α — действительное иррациональное число, то функция z^α является бесконечнозначной в области $0 < |z| < \infty$.

Действительно, все значения функции z^α в точке $z = re^{i\varphi}$ даются формулой (6). Покажем, что различным k отвечают различные значения z^α. Допустим противное; тогда существуют целые числа k_1, k_2, различные и такие, что $e^{ik_2 2\pi\alpha} = e^{ik_1 2\pi\alpha}$. Отсюда находим, что $(k_1 - k_2)\alpha = m$, $m \neq 0$ — целое число, т. е. α — рациональное число, что противоречит условию. □

Замечание 3. Если число α не является действительным, то функция z^α бесконечнозначна в области $0 < |z| < \infty$.

Пример 8. Пусть в точке $z = 1$ задан элемент $f(z)$ функции $\sqrt{z}$ такой, что $f(1) = 1$, и γ — отрезок $[1, i]$. Вычислим значение $\sqrt{i}$, полученное в результате аналитического продолжения вдоль γ.

Имеем $|\sqrt{i}| = 1$, $\Delta_\gamma \arg z = \pi/2$, и по формуле (8) находим $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$.

Пусть теперь γ — кривая $z = e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$. Тогда $\Delta_\gamma \arg z = -3\pi/2$, так что $\sqrt{i} = e^{-i3\pi/4} = -e^{i\pi/4}$. □

Приведем еще одну формулу для функции z^α:

5. Пусть $f(z)$ — элемент функции z^α в точке $z_0 \neq 0$, такой, что $f(z_0) = z_0^\alpha$. Этот элемент разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = z_0^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k \frac{(z - z_0)^k}{z_0^k}, \tag{12}$$

который сходится в круге $|z - z_0| < |z_0|$ (т. е. центр круга расположен в точке z_0, радиус круга равен расстоянию от точки z_0 до точки $z = 0$).

Действительно, по формуле Тейлора имеем

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Далее, из формулы (3′) следует, что $f'(z)=\alpha z^{\alpha}/z$, так что $f^{(k)}(z)=k!\,C_{\alpha}^{k}z^{\alpha}z^{-k}$, и подставляя выражения для производных в формулу Тейлора, получаем соотношение (12).

Заметим, что формула (12) имеет тот же вид, что и известная из курса математического анализа формула Тейлора для степенно́й функции (при действительных z_0, z, α).

При действительном α и при положительных x_1, x_2 справедливо тождество

$$(x_1x_2)^{\alpha}=x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}.$$

Аналогичное соотношение

$$(z_1z_2)^{\alpha}=z_1^{\alpha}z_2^{\alpha} \tag{13}$$

при комплексных z_1, $z_2\neq 0$ приходится трактовать иначе ввиду многозначности функции z^{α}. Соотношение (13) понимается в том же смысле, что и аналогичное соотношение (15) § 21 для логарифма. Именно, если **w_1, w_2 — какие-либо значения функций z^{α} в точках z_1, z_2, то w_1w_2 — одно из значений функции z^{α} в точке z_1z_2. Далее, если w_0 — некоторое значение** функции z^{α} в точке z_1z_2, то существуют значения $w_1=z_1^{\alpha}$, $w_2=z_2^{\alpha}$ **такие, что $w_0=w_1w_2$. Доказательство следует непосредственно из** (6).

3. Характер неоднозначности степенной функции. Из определения степенно́й функции и из свойства 5 логарифма (§ 21) вытекает следующее свойство степенно́й функции:

6. Пусть $f(z)$ — элемент функции z^{α} в некоторой точке $z_0\neq 0$, ∞. Тогда при обходе вокруг точки $z=0$ в положительном направлении этот элемент умножается на $e^{i2\pi\alpha}$, т. е.

$$f(z)\to e^{i2\pi\alpha}f(z), \tag{14}$$

а при обходе в отрицательном направлении умножается **на** $e^{-i2\pi\alpha}$, т. е.

$$f(z)\to e^{-i2\pi\alpha}f(z). \tag{14′}$$

В предыдущем параграфе было введено понятие точки ветвления. Из свойства 6 вытекает, что точки $z=0$, ∞ являются точками ветвления функции z^{α}, если α не является целым числом. Введем следующую классификацию изолированных точек ветвления.

Определение 1. Пусть функция $F(z)$ аналитична в кольце K: $0<|z-a|<\rho$, и пусть в каждой точке этого кольца имеется ровно $n\geqslant 2$ различных элементов функции $F(z)$. Тогда точка a называется *изолированной точкой ветвления порядка* n функции $F(z)$.

Аналогично вводится порядок изолированной точки ветвления $z=\infty$.

Если n конечно, то точка a называется алгебраической точкой ветвления. Если $n=\infty$, то точка a называется точкой ветвления бесконечного порядка или логарифмической точкой ветвления.

Замечание 4. Можно доказать (§ 26), что если в некоторой точке кольца K аналитическая в этом кольце функция $F(z)$ имеет ровно n различных элементов, то в любой точке этого кольца функция $F(z)$ также имеет ровно n различных элементов (случай $n=\infty$ также допускается).

Пример 9. Точки 0, ∞ являются точками ветвления порядка n функции $\sqrt[n]{z}$. В частности, точки 0, ∞ являются точками ветвления второго порядка функции $\sqrt{z}$.

Действительно, пусть $f_0(z)$ — какой-либо элемент функции $\sqrt[n]{z}$ в точке $z_0\neq 0, \infty$. Тогда все элементы в этой точке имеют вид

$$f_k(z)=e^{i2k\pi/n}f_0(z), \quad k=0, 1, \ldots, n-1,$$

т. е. их ровно n. □

Пример 10. Функция $F(z)=1/\sqrt{z}$ аналитична в кольце $0<|z|<\infty$; точки 0, ∞ являются точками ветвления второго порядка этой функции. □

Замечание 5. Типичная ошибка при исследовании особых точек функции $F(z)=1/\sqrt{z}$ такова: «Точка $z=0$ является полюсом, так как $\lim\limits_{z\to 0}(1/\sqrt{z})=\infty$.» Это утверждение неверно, так как полюс — особая точка однозначного характера.

Пример 11. Функция $F(z)=\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ имеет две точки ветвления второго порядка: $z=\pm 1$. Точка $z=\infty$ не является особой точкой. Действительно,

$$F(z)=\sqrt{G(z)}, \quad G(z)=\frac{1-(1/z)}{1+(1/z)}.$$

Функция $G(z)$ регулярна в точке $z=\infty$ и $G(\infty)=1\neq 0$; по теореме 2 функция $F(z)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками ± 1. □

В предыдущем параграфе было доказано, что в каждой односвязной области, не содержащей точек 0, ∞, функция $\ln z$ распадается на регулярные ветви. Так как $z^\alpha=e^{\alpha \ln z}$, то в каждой такой области функция z^α также распадается на регулярные ветви. Любые две ветви отличаются множителем $e^{i2k\pi\alpha}$, где k — целое число (см. (6)).

Пример 12. Пусть S — сектор $0<\arg z<\beta\leqslant 2\pi$. В этом секторе функция z^α распадается на регулярные ветви. Одна из

этих ветвей определяется (при действительном α) формулой

$$f_0(z) = |z|^{\alpha} e^{i\alpha \arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi. \tag{15}$$

Остальные ветви имеют вид

$$f_k(z) = e^{i2\pi\alpha k} f_0(z), \tag{16}$$

где k — любое целое число.

В частности, функция $\sqrt{z}$ распадается на две ветви: $f_0(z) = \sqrt{|z|}\, e^{(i/2)\arg z}$, $f_1(z) \equiv -f_0(z)$, где $0 < \arg z < 2\pi$ (ср. с § 13).

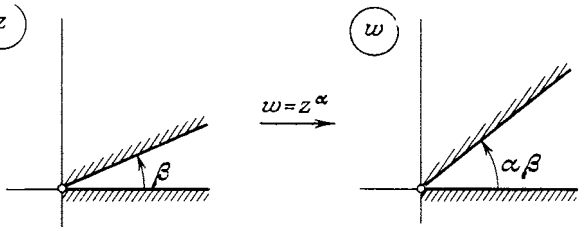


Рис. 61

Пусть $\alpha > 0$, $0 < \alpha\beta \leqslant 2\pi$. Тогда ветвь $w = f_0(z)$ функции z^{α} взаимно однозначно отображает сектор S: $0 < \arg z < \beta$ на сектор $\tilde{S}$: $0 < \arg w < \alpha\beta$ в плоскости w (рис. 61), т. е. разворачивает сектор S в α раз. Действительно, из (6) следует, что если $w = \rho e^{i\psi}$, $z = re^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \beta)$, то $\rho = r^{\alpha}$, $\psi = \alpha\varphi$, так что точки w заполняют сектор $\tilde{S}$ (рис. 61). □

Пример 13. Пусть D — плоскость с разрезом по полуоси $[0, +\infty)$ (рис. 47). Функция $F(z) = \sqrt{z}$ распадается в области D на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$:

$$f_1(re^{i\varphi}) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}, \quad f_2(z) \equiv -f_1(z).$$

Здесь $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Функция $w = f_1(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, функция $w = f_2(z)$ — на нижнюю полуплоскость (см. рис. 47).

Пусть $z = x + i0$, $x > 0$ (т. е. точка z лежит на верхнем берегу разреза). Тогда $f_1(x + i0) = \sqrt{x} > 0$. Если же $z = x - i0$ (т. е. точка z лежит на нижнем берегу разреза), то $f_1(x - i0) = -\sqrt{x}$. □

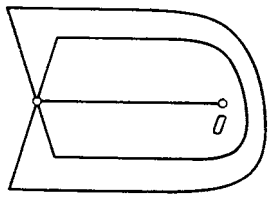


Рис. 62

4. Риманова поверхность функции z^{α}. Если α таково, что z^{α} — бесконечнозначная функция, то ее риманова поверхность будет точно такой же, как и риманова поверхность логарифма. Новый тип римановой поверхности возникает в случае, когда функция z^{α} является конечнозначной.

Построим риманову поверхность функции $\sqrt{z}$. Пусть D — плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$. Тогда функция $\sqrt{z}$ распадается в D на две однозначные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, такие, что $f_1(1)=1$, $f_2(z)\equiv -f_1(z)$. Возьмем два экземпляра D_1, D_2 области D и будем считать, что функция $f_k(z)$ определена в области D_k. Тогда при $z\in D_k$

$$f_{1,2}(re^{i\varphi})=\pm\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2},\quad -\pi<\varphi<\pi.$$

Пусть l_k — разрез на листе D_k, а l_k^+ и l_k^- — соответственно верхний и нижний берега разреза. Так как $\varphi=\pm\pi$ на $l_k^{\pm}$, то

$$f_1(z)\big|_{z\in l_1^+}=f_2(z)\big|_{z\in l_2^-},\quad f_1(z)\big|_{z\in l_1^-}=f_2(z)\big|_{z\in l_2^+}.$$

Поэтому для того, чтобы получить поверхность, на которой функция $\sqrt{z}$ однозначна, необходимо склеить верхний берег разреза l_1^+ с нижним берегом разреза l_2^- и, аналогично, склеить l_1^- с l_2^+ (крест-накрест). Получится риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ (рис. 62), имеющая самопересечение.

Аналогично строится риманова поверхность функции $\sqrt[n]{z}$. Возьмем n экземпляров $D_0, \ldots, D_{n-1}$ области D (плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$). В области D_k рассмотрим регулярную функцию

$$f_k(z)=\sqrt[n]{r}\,e^{(i/n)(\varphi+2k\pi)},\quad z=re^{i\varphi},\quad -\pi<\varphi<\pi.$$

Тогда $f_k(z)\big|_{z\in l_k^+}=f_{k+1}(z)\big|_{z\in l_k^-}$. Склеим берег l_0^+ с берегом l_1^-, затем l_1^+ с l_2^- и т. д., и, наконец, l_{n-1}^- с l_0^+. Тогда мы получим риманову поверхность функции $\sqrt[n]{z}$, которая имеет самопересечения.

Заметим, что риманова поверхность функции $\sqrt[n]{z}$ при любом целом n односвязна.

5. Примеры. В определении точки ветвления порядка n требуется, чтобы в каждой точке кольца $0<|z-a|<r$ имелось ровно n различных элементов (а не значений!) аналитической функции $F(z)$. Приведем примеры, которые показывают, что это требование нельзя заменить условием «в каждой точке имеется ровно n различных значений».

Пример 14. Функция $F(z)=\sqrt{z}\sin z$ имеет ровно две особые точки: 0, ∞, которые являются точками ветвления второго порядка. Однако в точках $z_k=k\pi$, $k=\pm1, \pm2, \ldots$ эта функция принимает только одно значение: $F(z_k)=0$. □

Пример 15. Рассмотрим функцию $F(z)=z^z=e^{z\ln z}$. Все значения этой функции в точке $z=1/n$ ($n>0$ — целое) даются формулой

$$F\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}e^{i2k\pi/n},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Следовательно, в точке $z=1/n$ функция z^z имеет ровно n различных значений. Пусть α — иррациональное действительное число; тогда $F(\alpha)$ имеет бесконечно много значений:

$$F(\alpha)=\alpha^\alpha e^{i\alpha 2k\pi},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{17}$$

Таким образом, в различных точках области $0<|z|<\infty$ эта функция имеет различное число значений.

Покажем, что точка $z=0$ (и соответственно точка $z=\infty$) является логарифмической точкой ветвления функции $F(z)$. Возьмем элемент $f_0(z)$ этой функции в точке $z_0\neq 0,\ \infty$ и совершим обход вокруг точки $z=0$ в положительном направлении. Так как элемент функции $\ln z$ получает приращение $+2\pi i$, то после обхода $f_0(z)\to e^{2\pi iz}f_0(z)$. Следовательно, все элементы функции z^z в точке $z_0\neq 0,\ \infty$ даются формулой

$$f_k(z)=f_0(z)e^{i2k\pi z},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\ \square$$

Пример 16. Вычислим i^i, т. е. найдем все значения функции z^z в точке i. Из формулы (17) следует, что

$$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Заметим, что все значения i^i — действительные. $\square$

Приведем еще примеры типа примера 4.

Пример 17. Выражение $F(z)=\sqrt{z^2}$ определяет две аналитические функции: $F_1(z)=z$, $F_2(z)=-z$. $\square$

Примеры 4, 17 показывают, что нужно с осторожностью относиться к формально написанным многозначным функциям. Операции над аналитическими функциями были корректно определены в начале этого параграфа. С другой стороны, как показывают приведенные ниже примеры, не всякое выражение, содержащее знак корня или логарифма, является многозначной функцией.

Пример 18. Функция $F(z)=\cos\sqrt{z}$ аналитична в области $0<|z|<\infty$, по теореме 2. Покажем, что эта функция однозначна. Фиксируем точку z_0 и любой элемент $f(z)$ функции $\sqrt{z}$ в этой точке, и совершим обход вокруг точки $z=0$. Тогда $f(z)\to -f(z)$, а в силу четности косинуса $\cos f(z)\to\cos f(z)$, так что функция $\cos\sqrt{z}$ однозначна. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой; следовательно, $\cos\sqrt{z}$ — целая функция.

Единственной ее особой точкой является существенно особая точка $z=\infty$. □

Пример 19. Функция $F(z)=(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}$ также является целой функцией. (Здесь символом $\sqrt{z}$ в числителе и знаменателе обозначена одна и та же аналитическая функция.)

Функция z^α является уже достаточно сложной функцией.

Пример 20. Рассмотрим уравнение $z^\alpha=1$, $\alpha\neq 0$. Решая его, получаем $\alpha\ln z=2k\pi i$, откуда

$$z_k=e^{(i/\alpha)2k\pi},\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Пусть α — действительное число; тогда все корни z_k лежат на единичной окружности. Если α — иррациональное число, то эти корни всюду плотно заполняют единичную окружность $|z|=1$.

Для регулярной функции такая ситуация невозможна: если бы некоторая функция $f(z)$ была регулярна в окрестности окружности $|z|=1$, то на самой этой окружности имелось бы не более конечного числа решений уравнения $f(z)=1$. Данный пример можно интерпретировать так: сделаем разрез, например, по полуоси $(-\infty, 0]$; тогда функция z^α распадется в плоскости с этим разрезом на бесконечно много регулярных ветвей. На окружности $|z|=1$ для каждой ветви имеется только конечное число точек, в которых она принимает значение 1; иными словами, корни уравнения $z^\alpha=1$ лежат на разных листах римановой поверхности. □

§ 23. Первообразная аналитической функции. Обратные тригонометрические функции

1. Первообразная аналитической функции. Пусть аналитическая функция $F(z)$ порождена элементом $f_0(z)$ в точке $z_0\neq\infty$. Возьмем достаточно малый круг K с центром в точке z_0 и рассмотрим функцию

$$g_0(z)=\int_{z_0}^{z} f_0(\zeta)\,d\zeta,\qquad z\in K, \tag{1}$$

где интеграл берется по пути, лежащему в круге K. Тогда функция $g_0(z)$ регулярна в круге K.

Аналитическая функция $G(z)$, порожденная элементом $g_0(z)$ (см. (1)) в точке z_0, называется *первообразной* функции $F(z)$.

Будем употреблять запись

$$G(z)=\int_{z_0}^{z} F(\zeta)\,d\zeta. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если функция $F(z)$ аналитична в области D, то ее первообразная $G(z)$ также аналитична в области D.*

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству леммы 2 § 21. Пусть кривая γ лежит в области D и выходит из точки z_0. Возьмем точку $\zeta \in \gamma$ и пусть γ_ζ — дуга кривой γ, соединяющая точки z_0 и ζ, $f(z)$ — элемент в точке ζ функции $F(z)$, полученный из исходного элемента $f_0(z)$ аналитическим продолжением вдоль кривой γ_ζ. Рассмотрим малый круг K с центром в точке ζ и положим при $z \in K$

$$g(z) = \int\limits_{\gamma_\zeta} F(\zeta')\,d\zeta' + \int\limits_{\zeta}^{z} f(\zeta')\,d\zeta',$$

где последний интеграл берется по кривой, лежащей в круге K. По теореме 5 § 9 функция $g(z)$ регулярна в круге K, т. е. является элементом в точке ζ, и если $\zeta = z_0$, то $g(z) = g_0(z)$. Таким образом, в каждой точке ζ кривой γ построен элемент; их согласованность проверяется так же, как в лемме 2 § 21. Тем самым элемент $g_0(z)$ продолжен аналитически вдоль кривой γ, так что порожденная этим элементом аналитическая функция $G(z)$ аналитична в области D.

Очевидно, что

$$G'(z) = F(z).$$

Далее, если $G_1(z)$, $G_2(z)$ — первообразные от одной и той же аналитической функции $F(z)$, то $G_1(z) - G_2(z) \equiv \text{const}$.

2. Функции $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$, $\operatorname{arth} z$, $\operatorname{arcth} z$. При действительных x функция $\operatorname{arctg} x$ допускает интегральное представление

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Функция $(1+z^2)^{-1}$ регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением полюсов $z = \pm i$. Положим

$$\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}. \tag{3}$$

По теореме 1 функция $\operatorname{arctg} z$ аналитична в комплексной плоскости с выколотыми точками $z = \pm i$.

Выразим арктангенс через логарифм. Имеем

$$\int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^z \left(\frac{1}{1-i\zeta} + \frac{1}{1+i\zeta}\right) d\zeta = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, \quad (4)$$

так что функция $\operatorname{arctg} z$ аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $\pm i$. Аналитичность арктангенса в точке $z=\infty$ следует из представления

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i+z^{-1}}{z^{-1}-i}.$$

Точки $z=\pm i$ являются логарифмическими точками ветвления.

Функция $\operatorname{arctg} z$ является обратной к функции $\operatorname{tg} z$, т. е.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) = z$$

при всех $z \neq \pm i, \infty$.

Замечание 1. Точнее было бы сказать, что $\operatorname{arctg} z$ — правая обратная к функции $\operatorname{tg} z$. Действительно, многозначное выражение $F(z) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} z)$ определяет не одну, а бесконечно много аналитических функций $F_k(z) = z + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пусть $f_0(z)$ — элемент арктангенса в точке $z=0$ такой, что $f_0(0)=0$. Тогда

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}. \quad (5)$$

Этот ряд сходится в круге $|z|<1$.

Формула для производной от арктангенса, известная из курса математического анализа, остается неизменной:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{1+z^2}.$$

Аналогично вводятся аналитические функции $\operatorname{arcctg} z$, $\operatorname{arth} z$, $\operatorname{arcth} z$. Поскольку все эти функции выражаются через логарифмическую функцию, то вычисление их значений сводится к вычислению значений логарифма. По этой причине самостоятельное значение этих функций в теории функций комплексного переменного невелико.

3. Функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$. При действительных $x \in [-1, 1]$ функция $\arcsin x$ допускает интегральное представление

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Аналитически продолжим эту функцию на комплексные значения аргумента. Для этого воспользуемся теоремой 1. Функция $F(z) = 1/\sqrt{1-z^2}$ аналитична в комплексной плоскости с выколотыми точками $z=\pm 1$ (это точки ветвления функции $F(z)$).

По теореме 1 функция

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{6}$$

также аналитична в комплексной плоскости с выколотыми точками ± 1. Здесь интеграл берется по любому пути, не проходящему через точки ± 1.

Исходный элемент $f_0(z)$ функции $\arcsin z$ зададим в точке $z = 0$. Его можно задать либо с помощью ряда

$$f_0(z) = \arcsin z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1},$$

либо с помощью интегрального представления

$$f_0(z) = \arcsin z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad z \in D.$$

Здесь D — плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, интеграл берется по пути, лежащему в D, и выбрана такая ветвь корня, что

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,|_{\zeta=0} = 1.$$

Функция $\arcsin z$ также выражается через логарифм. Имеем при всех $z \neq \pm 1, \infty$

$$\sin w = z, \quad w = \arcsin z.$$

Решая уравнение

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$

относительно w, получаем

$$\arcsin z = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2}). \tag{7}$$

Исследуем характер многозначности арксинуса. Пусть γ_+, γ_- — простые замкнутые кривые с началом в точке $z = 0$, точки $z = 1$ и $z = -1$ лежат соответственно внутри γ_+ и γ_- (рис. 63). Кривые γ_- и γ_+ ориентированы соответственно положительно и отрицательно. В качестве $\gamma_\pm$ можно взять, например, окружности $|z \mp 1| = 1$ (рис. 63). Пусть $f_0(z)$ — исходный элемент арксинуса в точке $z = 0$.

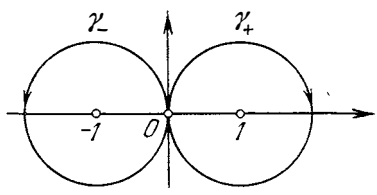


Рис. 63

1. Аналитически продолжим $f_0(z)$ вдоль кривой γ_+. Пусть z лежит в малой окрестности точки $z = 0$. Тогда полученный в результате аналитического продолжения элемент $f(z)$ равен интегралу по пути γ, который соединяет точки 0 и z, и состоит из

кривой γ_+ и отрезка $\gamma_z=[0, z]$: $\gamma=\gamma_+\gamma_z$. При обходе вокруг точки ветвления $z=1$ получаем, что $\sqrt{1-z^2}\to-\sqrt{1-z^2}$. Следовательно,

$$f(z)=-f_0(z)+\int\limits_{\gamma_+}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Ветвь корня выбрана так, что $\sqrt{1-\zeta^2}|_{\zeta=0}=1$ (в начальной точке кривой γ_+). По теореме Коши интеграл по контуру γ равен интегралу по разрезу [0, 1]. На верхнем берегу разреза $\sqrt{1-x^2}>0$; на нижнем берегу разреза $\sqrt{1-x^2}<0$. Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma_+}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=2\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi.$$

Окончательно получаем, что при обходе вдоль кривой γ_+

$$f_0(z)\to[-f_0(z)+\pi]. \tag{8}$$

Аналогично доказывается, что при обходе вдоль кривой γ_-

$$f_0(z)\to[-f_0(z)-\pi]. \tag{9}$$

В частности, после двух обходов вдоль кривой γ_+ получаем $f_0(z)\to f_0(z)$.

2. Аналитически продолжим элемент $f_0(z)$ вдоль кривой $\gamma_+\gamma_-$. Тогда

$$f_0(z)\to[f_0(z)+2\pi]. \tag{10}$$

Если же продолжить аналитически элемент $f_0(z)$ вдоль кривой $\gamma_-\gamma_+$, то

$$f_0(z)\to[f_0(z)-2\pi].$$

Отсюда следует, в частности, что кривые $\gamma_-\gamma_+$ и $\gamma_+\gamma_-$ негомотопны в плоскости с выколотыми точками $z=\pm1$ (в противном случае аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль этих кривых привело бы к одному и тому же элементу; см. § 24, теорема о монодромии). Кроме того, точка $z=\infty$ является точкой ветвления, так как при аналитическом продолжении по пути $\gamma_+\gamma_-^{-1}$ мы обходим вокруг этой точки. Эта точка ветвления — бесконечного порядка, так как при аналитическом продолжении вдоль кривой $(\gamma_+\gamma_-^{-1})^k$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$

$$f_0(z)\to f_0(z)+2k\pi.$$

Аналогично вводятся аналитические функции $\arccos z$, $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$. Все они выражаются через логарифмическую функцию.

§ 24. Регулярные ветви аналитических функций

1. Теорема о монодромии. Покажем, что понятия «аналитическая однозначная функция» и «регулярная функция» тождественны. Пусть функция $F(z)$ регулярна в области D. В каждой точке $z_0 \in D$ естественным образом задан элемент $f_{z_0}(z)$, а именно, сама функция $F(z)$. Фиксируем точку $z_0 \in D$ и элемент $f_{z_0}(z)$ в этой точке. Если кривая γ соединяет точки z_0, z и лежит в области D, то элемент $f_{z_0}(z)$ очевидным образом допускает аналитическое продолжение вдоль кривой γ: в качестве элемента в точке $z^* \in \gamma$ можно взять просто саму функцию $F(z)$.

Если функция $F(z)$ аналитична в области D и однозначна в этой области, то функция $F(z)$ регулярна в D. Действительно, в окрестности любой точки области значения функции $F(z)$ совпадают со значениями некоторого (и притом единственного) элемента, так что функция $F(z)$ регулярна в каждой точке области D.

Исключительно важное значение в теории многозначных аналитических функций имеет следующая теорема.

Теорема о монодромии. *Пусть D — односвязная область расширенной комплексной плоскости и пусть элемент $f(z)$, заданный в точке z_0, допускает аналитическое продолжение по всем кривым, выходящим из точки z_0 и лежащим в области D. Тогда аналитическая функция $F(z)$, полученная в результате аналитического продолжения элемента $f(z)$ по всем таким кривым, регулярна в области D.*

В условиях этой теоремы элемент $f(z)$ порождает аналитическую в области D функцию. Поэтому теорему о монодромии можно сформулировать так:

Функция, аналитическая в односвязной области, регулярна в этой области.

Доказательство. Пусть γ_0, γ_1 — кривые, заданные уравнениями $z = \sigma_0(t)$, $z = \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в области D и соединяют точки z_0, z_1. Покажем, что аналитическое продолжение элемента $f(z)$ вдоль кривых γ_0, γ_1 приводит к одному и тому же элементу в точке z_1. Тем самым будет доказано, что аналитическая функция $F(z)$, порожденная элементом $f(z)$, однозначна в области D; в силу сделанного выше замечания функция $F(z)$ регулярна в области D.

Ограничимся, для простоты, случаем, когда D — ограниченная область. Так как область D односвязна, то кривые γ_0, γ_1 гомотопны в этой области, т. е. существует функция $\Phi(s, t)$, обладающая следующими свойствами (§ 3):

1. Функция $\Phi(s, t)$ определена и непрерывна в квадрате K: $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, и ее значения лежат в области D.

2. $\Phi(s, 0)=z_0$, $\Phi(s, 1)=z_1$ при всех s; $\Phi(0, t)=\sigma_0(t)$, $\Phi(1, t)=\sigma_1(t)$.

При каждом фиксированном $s\in[0, 1]$ уравнение $z=\Phi(s, t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, определяет кривую γ_s, которая лежит в области D и соединяет точки z_0 и z_1. Если числа s, $s'\in[0, 1]$ достаточно близки, то расстояние между кривыми γ_s, $\gamma_{s'}$ мало, что следует из определения расстояния: $\rho(\gamma_s, \gamma_{s'})=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\Phi(s, t)-\Phi(s', t)|$ и равномерной непрерывности функции Φ в квадрате K. Следовательно, по лемме 3 § 20 для любого $s\in I=[0, 1]$ существует $\delta(s)>0$ такое, что если s' лежит на интервале $I_s=(s-\delta(s), s+\delta(s))$, то аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль всех таких кривых $\gamma_{s'}$ приводит к одному и тому же элементу в точке z_1. По лемме Гейне — Бореля можно выбрать конечное число интервалов I_{s_j}, $0=s_0<s_1<\ldots<s_n=1$, покрывающих отрезок I, так, чтобы интервалы I_{s_j}, $I_{s_{j+1}}$, $0\leqslant j\leqslant n-1$, имели непустое пересечение. Если $s\in I_{s_0}\cup I_{s_1}$, то аналитическое продолжение элемента $f(z)$ приводит к одному и тому же элементу в точке z_1; то же самое верно при $s\in I_{s_1}\cup I_{s_2}$ и т. д. Продолжая эти рассуждения, получаем, что аналитическое продолжение элемента $f(z)$ вдоль любой кривой γ_s, $0\leqslant s\leqslant 1$, приводит к одному и тому же элементу в точке z_1.

Из доказательства этой теоремы вытекает следствие, которое также называется теоремой о монодромии.

Теорема о монодромии (вторая формулировка). *Пусть элемент $f(z)$, заданный в точке z_0, допускает аналитическое продолжение по любым кривым, выходящим из точки z_0 и лежащим в области D. Если кривые γ_0, γ_1 выходят из точки z_0 и гомотопны в области D, то аналитическое продолжение элемента $f(z)$ вдоль кривых γ_0, γ_1 приводит к одному и тому же элементу.*

Область D может быть неодносвязной.

2. Выделение регулярных ветвей. *Регулярной ветвью* аналитической функции называется любой ее *элемент*. Теорема о монодромии позволяет построить простой и удобный алгоритм, с помощью которого многозначную аналитическую функцию можно «разрезать» на регулярные ветви. Именно, пусть функция $F(z)$ аналитична в конечносвязной области D. Проведем разрезы, превращающие эту область в односвязную область $\tilde{D}$; это делается так же, как и в § 9 (рис. 43). Фиксируем элемент $f_0(z)$ в точке $z_0\in\tilde{D}$. По теореме о монодромии этот элемент порождает регулярную в области $\tilde{D}$ функцию $F_0(z)$, которая является регулярной ветвью функции $F(z)$. Различные элементы в точке z_0 порождают различные регулярные ветви функции $F(z)$; таким образом, в области $\tilde{D}$ функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви. Заметим, что разрезы, превращающие область D

в односвязную, можно проводить по-разному; так что можно по-разному «разрезать» многозначную аналитическую функцию на регулярные ветви.

Приведем примеры на выделение регулярных ветвей аналитических функций.

Пример 1. Проведем в комплексной плоскости разрез вдоль простой кривой γ, соединяющей точки 0 и ∞. Полученная область D односвязна. Покажем, что функция $\ln z$ распадается в области D на регулярные ветви. Фиксируем точку $z_0 \in D$ и элемент логарифма $f(z)$ в этой точке. Так как этот элемент допускает аналитическое продолжение по любой кривой, не проходящей через точки 0, ∞, то, по теореме о моподромии, этот элемент порождает регулярную в области D ветвь логарифма. В область D функция $\ln z$ распадается на бесконечное число регулярных ветвей. Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ — две регулярные ветви логарифма, то $f_1(z) - f_2(z) \equiv 2k\pi i$ при $z \in D$, где k — целое число (п. 2 § 21).

Аналогично, функция z^α распадается в области D на регулярные ветви. Если α — действительное иррациональное число или если $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, то регулярных ветвей бесконечно много; если $\alpha = p/q$, где p, q — взаимно простые целые числа, $q \geqslant 1$, то имеется ровно q различных регулярных ветвей (§ 22). В частности, функция $\sqrt[n]{z}$ распадается в области D на n регулярных ветвей.

Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ — две различные регулярные ветви функции z^α в области D, то $f_2(z) \equiv e^{2k\pi i\alpha} f_1(z)$, где $k \neq 0$ — целое число (§ 22, свойство 2). □

Пример 2. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\ln z$ в области D (рис. 31), такая, что $f(1) = 0$. Вычислим значения $f(-2)$, $f(3)$, $f(-4)$. По формуле (5) § 21 имеем при $z \in D$

$$f(z) = \ln|z| + i\Delta_\gamma \arg z,$$

где кривая γ соединяет точки 1, z и лежит в области D. Следовательно,

$$f(-2) = \ln 2 + \pi i,\quad f(3) = \ln 3 + 2\pi i,\quad f(-4) = \ln 4 + 3\pi i.$$ □

Пример 3. Разложим регулярную функцию $f(z)$ из примера 2 в ряд Тейлора по степеням $z - 3$. По формуле (10) § 21 имеем

$$f(z) = \ln 3 + 2\pi i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-3)^k}{k3^k}.$$ □

Пример 4. В области D: $0 < |z| < \infty$ нельзя выделить регулярные ветви функции $\ln z, \sqrt[n]{z}$ $(n > 1)$. Это следует из свойств 5 § 21 и 6 § 22. □

Пример 5. Пусть D_α — плоскость с разрезом по лучу $z = re^{i\alpha}$, $0 \leqslant r < \infty$; $0 < \alpha < 2\pi$. Тогда, по теореме о монодромии, в области D_α функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви. Нормируем ветвь $f_\alpha(z)$ условием $f_\alpha(1) = 1$ и вычислим $f_\alpha(i)$ $(\alpha \neq \pi/2)$. Имеем

$$f_\alpha(i) = e^{i\varphi/2}, \quad \varphi = \Delta_\gamma \arg z,$$

где кривая γ лежит в области D_α и соединяет точки 1, i.

1. $\pi/2 < \alpha < 2\pi$. В этом случае в качестве γ можно взять отрезок $[1, i]$, так что $\varphi = \pi/2$, $f_\alpha(i) = e^{i\pi/4}$.

2. $0 < \alpha < \pi/2$. В этом случае в качестве γ можно взять дугу окружности $z = e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$, так что

$$\varphi = -3\pi/2, \quad f_\alpha(i) = -e^{i\pi/4}. \quad \square$$

Прежде чем перейти к следующим примерам, приведем некоторые пояснения по поводу выражений типа $\ln f(z)$, $\sqrt{f(z)}$, $(f(z))^\alpha$, где $f(z)$ — регулярная функция. Формула $F(z) = \ln f(z)$ сама по себе еще не определяет аналитической функции; необходимо указать исходный элемент, или, в силу свойств логарифма, значение функции в некоторой точке (см. также пример 4 § 22). Формула

$$F(z) = \ln f(z), \quad F(z_0) = w_0,$$

где w_0 — одно из значений $\ln f(z_0)$, полностью определяет аналитическую функцию $F(z)$.

Пример 6. Пусть функция $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в односвязной области D. Тогда функция

$$F(z) = \ln f(z), \quad F(z_0) = w_0$$

регулярна в области D. Здесь $e^{w_0} = f(z_0)$.

Действительно, функция $F(z)$ аналитична в области D (теорема 2 § 22), и по теореме о монодромии эта функция регулярна в области D. Функция $F(z)$ однозначно определяется соотношениями

$$e^{F(z)} = f(z); \quad F(z_0) = w_0$$

и требованием регулярности в области D. Значения функции $F(z)$ вычисляются по формуле

$$F(z) = \ln |f(z)| + i[\operatorname{Im} w_0 + \Delta_\gamma \arg f(z)]. \tag{1}$$

Кривая γ лежит в области D и соединяет точки z_0, z. $\square$

Пример 7. Пусть функция $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в односвязной области D. Тогда функция

$$F(z) = \sqrt{f(z)}, \quad F(z_0) = w_0,$$

где $w_0^2 = f(z_0)$, регулярна в области D. $\square$

Рассмотрим функциональные соотношения для логарифмической и степенной функций. Пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярны и отличны от нуля в односвязной области D. Тогда функции

$$F_1(z)=\ln f_1(z), \quad F_1(z_0)=w_1;$$
$$F_2(z)=\ln f_2(z), \quad F_2(z_0)=w_2;$$
$$F_0(z)=\ln(f_1(z)f_2(z)), \quad F_0(z_0)=w_0,$$

регулярны в области D (пример 6).

Лемма 1. *Если* $w_0=w_1+w_2$, *то в области* D

$$F_0(z)\equiv F_1(z)+F_2(z). \tag{2}$$

Доказательство. Функция $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$ регулярна в области D и $e^{F(z)}=f_1(z)f_2(z)$, $F(z_0)=w_0$. Эти условия определяют единственную регулярную в области D функцию (пример 6). Так как функция $F_0(z)$ также удовлетворяет этим условиям, т. е.

$$e^{F_0(z)}=f_1(z)f_2(z); \quad F_0(z_0)=w_0,$$

то $F(z)\equiv F_0(z)$ в области D.

Формально равенство (2) можно записать в виде

$$\ln(f_1(z)f_2(z))=\ln f_1(z)+\ln f_2(z), \quad z\in D. \tag{3}$$

Точный смысл равенства (3) указан в лемме 1.

Апалогично соотношению (3) доказываются равенства

$$\ln\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\ln f_1(z)-\ln f_2(z),$$
$$\sqrt{f_1(z)f_2(z)}=\sqrt{f_1(z)}\,\sqrt{f_2(z)}, \tag{4}$$
$$\sqrt{\frac{f_1(z)}{f_2(z)}}=\frac{\sqrt{f_1(z)}}{\sqrt{f_2(z)}},$$
$$(f_1(z)f_2(z))^{\alpha}=(f_1(z))^{\alpha}(f_2(z))^{\alpha}.$$

Здесь $f_1(z)$, $f_2(z)$ — регулярные и отличные от нуля в односвязной области D функции, равенства (4) справедливы при $z\in D$.

Точный смысл равенств (4) следующий: в левой и правой частях равенства стоят регулярные в области D функции, и значения левой и правой частей совпадают в некоторой точке $z_0\in D$. Рассмотрим, например, второе из равенств (4). Это равенство понимается в следующем смысле:

$$F_0(z)=F_1(z)F_2(z),$$

где

$$F_0(z)=\sqrt{f_1(z)f_2(z)}, \quad F_0(z_0)=w_0;$$
$$F_j(z)=\sqrt{f_j(z)}, \qquad F_j(z_0)=w_j, \qquad j=1,\ 2,$$

и выполнено условие $w_0=w_1w_2$.

Из формул (3), (4) вытекают важные формулы для аргумента произведения и частного функций.

Следствие. *Пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярны и отличны от нуля в области D, кривая γ лежит в области D. Тогда*

$$\Delta_\gamma \arg (f_1(z) f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z), \tag{5}$$

$$\Delta_\gamma \arg \left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) - \Delta_\gamma \arg f_2(z). \tag{6}$$

Доказательство. Докажем формулу (5). Пусть область D односвязна, кривая γ соединяет точки z_0, z и пусть $F_j(z)$, $j = 0, 1, 2$ — те же функции, что и в лемме 1. Тогда при $z \in D$ имеем

$$F_j(z) = \ln |f_j(z)| + i[\operatorname{Im} w_j + \Delta_\gamma \arg f_j(z)], \qquad j = 1, 2,$$
$$F_0(z) = \ln |f_1(z) f_2(z)| + i[\operatorname{Im} w_0 + \Delta_\gamma \arg (f_1(z) f_2(z))].$$

Подставляя эти выражения в (2) и учитывая, что $w_0 = w_1 + w_2$, получаем формулу (5).

Пусть D — неодносвязная область. Покроем кривую γ конечным числом лежащих в области D кругов K_0, K_1, ..., K_n, центры которых z_0, z_1, ..., z_n расположены в последовательных точках кривой γ. Здесь z_0 — начальная, $z_n = z$ — конечная точка кривой γ. Разобьем кривую γ на дуги γ_0, γ_1, ..., γ_n, где дуга γ_j лежит внутри круга K_j, так что $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}\gamma_n$. Тогда равенство (5) справедливо для каждой из дуг γ_j по доказанному выше. Так как приращение аргумента вдоль кривой γ равно сумме приращений аргумента по дугам γ_0, γ_1, ..., γ_n, то равенство (5) доказано.

Равенство (6) доказывается аналогично, с помощью первой из формул (4).

Так как равенство двух аналитических функций — это равенство их исходных элементов, то формулы типа (2), (3) остаются в силе и для аналитических функций. Пусть, для простоты, функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярны и отличны от пуля в области D. Фиксируем точку $z_0 \in D$; тогда (пример 7) в некоторой ее окрестности U регулярны функции

$$g_j(z) = \sqrt{f_j(z)}, \qquad g_j(z_0) = w_j, \qquad j = 1, 2,$$
$$g_0(z) = \sqrt{f_1(z) f_2(z)}, \qquad g_0(z_0) = w_0.$$

Пусть w_j таковы, что $w_0 = w_1 w_2$; тогда по доказанному выше

$$g_0(z) \equiv g_1(z) g_2(z), \quad z \in U. \tag{7}$$

Если $F_j(z)$ — аналитическая функция, порожденная элементом $g_j(z)$, заданным в точке z_0, $j = 0, 1, 2$, то в силу (7)

$$F_0(z) = F_1(z) F_2(z), \tag{8}$$

где равенство понимается в смысле равенства аналитических

функций. Коротко равенство (8) принято записывать так:

$$\sqrt{f_1(z)f_2(z)} = \sqrt{f_1(z)}\,\sqrt{f_2(z)};$$

точный смысл этого равенства указан выше. Аналогично интерпретируются остальные равенства (3), (4).

3. Регулярные ветви аналитических функций в неодносвязных областях. Теорема о монодромии не позволяет решить вопрос о выделении регулярной ветви функции $F(z)$, аналитической в неодносвязной области D. Эта задача исследуется так. Пусть $f(z)$ — какой-либо элемент функции $F(z)$ в точке $z_0 \in D$ и γ — замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в области D. Аналитически продолжив элемент $f(z)$ по кривой γ, получим элемент $g(z)$ в точке z_0. Условимся коротко записывать эту процедуру так:

при обходе по кривой γ

$$f(z) \to g(z).$$

Лемма 2. *Если при обходе по любой такой кривой* γ

$$f(z) \to f(z),$$

то элемент $f(z)$ *порождает регулярную в области* D *ветвь функции* $F(z)$. *Иными словами, существует регулярная в области* D *функция* $F_0(z)$ *такая, что*

$$F_0(z) \equiv f(z)$$

в окрестности точки z_0.

С интуитивной точки зрения эта лемма вполне очевидна. Строгое доказательство см. [24].

Если же при обходе по некоторой замкнутой кривой γ

$$f(z) \to g(z),$$

где элемент $g(z) \neq f(z)$, то функция $F(z)$ не допускает выделения регулярной в D ветви.

Такова процедура выделения регулярных ветвей в общем случае. Применительно к таким аналитическим функциям, как $\sqrt{f(z)}$, $\ln f(z)$, $(f(z))^\alpha$, где $f(z)$ — регулярная в некоторой области D функция, эту процедуру можно значительно упростить. Дело в том, что перечисленные функции обладают тем же свойством, что и функции $\ln z$, z^α (§§ 21, 22): любой элемент функции $\ln f(z)$ (и аналогично для функции $(f(z))^\alpha$) в любой точке полностью определяется заданием своего значения в этой точке. Поэтому справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна и отлична от нуля в области* D, *аналитическая функция* $F(z) = \ln f(z)$ *порождена элементом* $F_0(z)$ *в точке* $z_0 \in D$. *Если все значения* $F(z_0)$, *полученные в результате обходов по всем замкнутым кривым* γ

(с начальной точкой z_0), лежащим в D, совпадают с $F_0(z_0)$, то аналитическая функция $F(z)$ регулярна в области D.

Такое же утверждение справедливо для функции $(f(z))^\alpha$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть γ — замкнутая кривая с начальной точкой z_0, лежащая в D. Тогда $F_0(z) \to F_1(z)$ при обходе вдоль γ, где $F_1(z)$ — элемент в точке z_0. По условию леммы, $F_1(z_0) = F_0(z_0)$. Так как любой элемент функции $F(z) = \ln f(z)$ в точке z_0 однозначно определяется заданием своего значения в этой точке, то $F_1(z) \equiv F_0(z)$. В силу леммы 2 элемент $F_0(z)$ порождает регулярную в области D функцию. Аналогично доказывается второе утверждение.

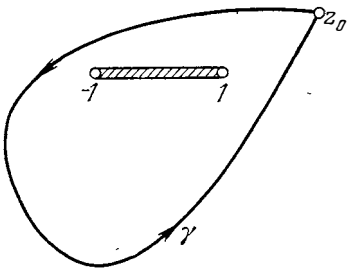


Рис. 64

Пример 8. Покажем, что аналитическая функция $F(z) = \sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви в области D_0, где D_0 — комплексная плоскость с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

Так как $z^2 - 1 \neq 0$ в D_0, то по теореме 2 § 22 функция $F(z)$ аналитична в области D_0. Поскольку область D_0 односвязна, то по теореме о монодромии функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви в области D_0. Регулярная ветвь полностью определяется заданием ее значения в некоторой точке $z_0 \in D_0$:

$$F_0(z) = \sqrt{z^2-1}, \quad F_0(z_0) = w_0,$$

где $w_0^2 = z_0^2 - 1$ (т. е. w_0 — одно из значений $\sqrt{z_0^2-1}$). Регулярных в области D_0 ветвей ровно две, и они связаны соотношением $F_1(z) \equiv -F_0(z)$, $z \in D_0$.

Аналогично, функция $G(z) = \ln \dfrac{z-1}{z+1}$ распадается на регулярные ветви в области D_0; этих ветвей бесконечно много, каждая ветвь однозначно определяется заданием своего значения в некоторой точке $z_0 \in D$. Например, можно описать все ветви $G_k(z)$ следующими формулами:

$$G_0(z) = \ln \frac{z-1}{z+1}, \quad G_0(0) = \pi i,$$

$$G_k(z) \equiv G_0(z) + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad \square$$

Пример 9. Пусть D — плоскость (не расширенная) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 64). Покажем, что аналитическая функция $F(z) = \sqrt{z^2-1}$ распадается в области D на две регулярные ветви. Заметим, что область D неодносвязна.

Доказательство 1. Пусть исходный элемент $F_0(z)$ функции $F(z)$ задан в точке $z_0 \in D$ и пусть γ — простая замкну-

тая кривая с началом в точке z_0, лежащая в D. Значение $F(z_0)$, полученное при обходе вдоль γ, равно

$$F(z_0) = F_0(z_0)\, e^{i\varphi/2},$$

где $\varphi = \Delta_\gamma \arg(z^2 - 1)$. Так как $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$, то

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,\ \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-1),\ \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z+1).$$

1) Если отрезок $[-1, 1]$ не лежит внутри кривой γ, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, так что $F(z_0) = F_0(z_0)$.

2) Если отрезок $[-1, 1]$ лежит внутри кривой γ (рис. 64) и эта кривая ориентирована положительно, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$, так что $\varphi = 4\pi$ и снова $F(z_0) = F_0(z_0)$. Если γ ориентирована отрицательно, то $\varphi = -4\pi$.

Тем самым доказано, что функция

$$f_0(z) = \sqrt{z^2 - 1},\quad z \in D;\qquad f_0(z_0) = w_0$$

регулярна в области D (w_0 — одно из значений корня $\sqrt{z_0^2 - 1}$). Аналогично, функция

$$f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1},\quad z \in D;\qquad f_1(z_0) = -w_0$$

регулярна в области D, и

$$f_1(z) \equiv -f_0(z),\quad z \in D,$$

так что функция $\sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви в области D.

Доказательство 2. Представим функцию $F(z)$ в виде

$$F(z) = zG(z),\quad G(z) = \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}.$$

Функция $G(z)$ задана условием

$$G_0(z_0) = \frac{F_0(z_0)}{z_0},$$

где $F_0(z)$, $G_0(z)$ — исходные элементы функций $F(z)$, $G(z)$ в точке z_0. Функция z регулярна в области D. Функция $G(z)$ аналитична в односвязной области $\widetilde{D} = D \cup \{z = \infty\}$ на римановой сфере. По теореме о монодромии функция $G(z)$ регулярна в области $\widetilde{D}$, а значит, и в D. Следовательно, функция

$$F(z) = zG(z),\quad z \in D;\qquad F(z_0) = F_0(z_0)$$

регулярна в области D. □

Пример 10. Пусть D — комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и $f(z)$ — регулярная в D ветвь функции $\sqrt{z^2 - 1}$, такая, что $f(2) = \sqrt{3}$. Вычислим значения этой

функции при вещественных $z = x$. Если $z \in D$, то

$$f(z) = |\sqrt{z^2-1}|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)/2},$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-1), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z+1),$$

где кривая γ соединяет точки 2, z и лежит в D.

1. Пусть $x > 1$. Тогда в качестве γ можно взять отрезок $[2, x]$, так что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $f(x) = \sqrt{x^2-1}$. (Здесь и ниже все корни — арифметические.)

2. Пусть $x \in (-1, 1)$ и лежит на верхнем берегу разреза. В качестве γ можно взять кривую, лежащую в верхней полуплоскости (рис. 65). Тогда $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 0$, так что $f(x+i0) = i\sqrt{1-x^2}$.

3. Пусть $x < -1$. В качестве γ можно взять кривую, лежащую в верхней полуплоскости. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2 = +\pi$, так что $f(x) = -\sqrt{x^2-1}$.

4. Если x лежит на нижнем берегу разреза, то в качестве γ можно взять кривую, лежащую в нижней полуплоскости (рис. 65). Тогда $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$, так что $f(x-i0) = -i\sqrt{1-x^2}$.

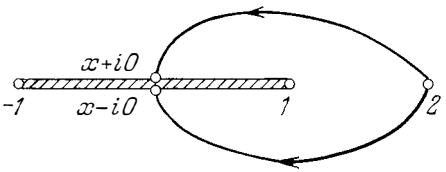


Рис. 65

Пусть $z = iy$, $y > 0$. В качестве γ возьмем отрезок $[2, iy]$. Тогда $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, так что $f(iy) = i\sqrt{y^2+1}$ $(y > 0)$. Аналогично, $f(-iy) = -i\sqrt{y^2+1}$ $(y > 0)$.

Вычислим $f'(z)$. По формуле (3) § 22 имеем

$$f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{z}{f(z)}. \quad \square$$

Пример 11. Пусть D, $f(z)$ — те же, что и в примере 10. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Из тождества $\sqrt{z^2-1} = z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$ следует, что $f(z) = zg(z)$, где $g(z)$ — регулярная в области D ветвь функции $\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$. Так как $f(x) > 0$ при $x > 1$ (пример 10), то $g(x) > 0$ при $x > 1$, так что $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Следовательно, $g(\infty) = 1$, и искомое разложение имеет вид

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^n (-1)^n z^{-2n}. \quad \square$$

Пример 12. Покажем, что аналитическая функция

$$F(z) = \ln\frac{1-z}{1+z}$$

распадается на регулярные ветви в области D (рис. 64), где D — плоскость с разрезом $[-1, 1]$.

Доказательство 1. Пусть $F_0(z)$ — исходный элемент функции $F(z)$ в точке z_0 и γ — простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в области D. Значение $F(z_0)$, полученное при обходе вдоль γ, равно

$$F(z_0) = F_0(z_0) + i\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z}.$$

Далее,

$$\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z),$$

$$\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z).$$

Если отрезок $[-1, 1]$ не лежит внутри кривой γ, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Если отрезок $[-1, 1]$ лежит внутри кривой γ и эта кривая ориентирована положительно, то $\varphi_1 = 2\pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, так что снова $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Следовательно, $F(z_0) = F_0(z_0)$, и функция

$$f(z) = \ln\frac{1-z}{1+z}, \quad z \in D; \quad f(z_0) = F_0(z_0)$$

регулярна в области D.

Функция $F(z)$ распадается в области D на счетное множество регулярных ветвей. Эти ветви описываются формулами

$$f_k(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i\Delta_\gamma \arg\frac{1-z}{1+z} + i\operatorname{Im} w_0 + 2k\pi i,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь $w_0 = \ln\dfrac{z_0-1}{z_0+1}$ — фиксированное значение логарифма, кривая γ соединяет точки z_0, z и лежит в области D.

Доказательство 2. Функция

$$F(z) = \ln\frac{-1+\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}, \quad F(z_0) = F_0(z_0)$$

аналитична в области $\tilde{D} = D \cup \{z = \infty\}$. Область $\tilde{D}$ односвязна; по теореме о монодромии функция $F(z)$ регулярна в области $\tilde{D}$, а стало быть, и в области D. □

Пример 13. Пусть D — плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и $f(z)$ — регулярная в области D ветвь функции $\ln\dfrac{1-z}{1+z}$ такая, что $f(0+i0) = 0$ (т. е. значение $f(z)$ в точке $z = 0$,

лежащей на верхнем берегу разреза, равно нулю). Вычислим значения $f(z)$ на действительной и мнимой осях.

В области D имеем

$$f(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z),$$

кривая γ лежит в области D и соединяет точку 0, лежащую на верхнем берегу разреза, с точкой z.

1. Пусть $z = x \in (-1, 1)$ и лежит на верхнем берегу разреза. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, так что

$$f(x + i0) = \ln\frac{1-x}{1+x}$$

(это действительное число).

2. Пусть $z = x > 1$; тогда $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$, так что

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

Если $z = x < -1$, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, так что

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

3. Пусть $z = x \in (-1, 1)$ и лежит на нижнем берегу разреза. Тогда $\varphi_1 = -2\pi$, $\varphi_2 = 0$, так что

$$f(x - i0) = \ln\frac{1-x}{1+x} - 2\pi i.$$

4. Пусть $z = iy$, $y > 0$. Тогда $\varphi_1 = -\varphi_2$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y$, так что при $y > 0$

$$f(iy) = -2i \operatorname{arctg} y,$$

поскольку $|1 - iy| = |1 + iy|$. Аналогично, $f(iy) = -2i(\pi + \operatorname{arctg} y)$ при $y < 0$. □

Пример 14. Пусть D, $f(z)$ — те же, что и в примере 13. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

При $y > 0$ имеем (пример 13, 4) $f(iy) = -2i \operatorname{arctg} y$, так что

$$f(\infty) = \lim_{y \to +\infty} f(iy) = -\pi i.$$

Следовательно, в окрестности точки $z = \infty$ имеем

$$f(z) = \ln\frac{-1 + (1/z)}{1 + (1/z)} = -\pi i + \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right),$$

где стоящие в правой части равенства логарифмы — регулярные в точке $z = \infty$ функции, равные нулю при $z = \infty$. Разлагая

эти функции в ряды Лорана, получаем

$$f(z) = -\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n} = -\pi i - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\, z^{2n+1}}.$$

Этот ряд сходится в кольце $1 < |z| < \infty$. □

Пусть a, b — комплексные числа, $a \neq b$ и D — плоскость с разрезом по отрезку $[a, b]$. Точно так же, как и в примерах 9 и 12, можно доказать, что аналитические функции

$$F(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}, \quad G(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$$

распадаются в области D на регулярные ветви.

4. Регулярные ветви аналитических функций в неодносвязных областях (продолжение).

Пример 15. Пусть D — плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 64). Покажем, что при действительных α функция

$$F(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$$

распадается в области D на регулярные ветви.

Пусть исходный элемент $F_0(z)$ функции $F(z)$ задан в точке z_0 и γ — простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в области D. Значение $F(z_0)$, полученное в результате обхода по кривой γ, равно

$$F(z_0) = F_0(z_0)\, e^{i\alpha\varphi}, \quad \varphi = \Delta_{\gamma} \arg \frac{1-z}{1+z}.$$

Как и в примере 12, $\varphi = 0$, так что $F(z_0) = F_0(z_0)$ и по лемме 3 функция

$$f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}, \quad z \in D, \quad f_0(z_0) = F_0(z_0)$$

регулярна в области D. Две различные регулярные ветви функции $F(z)$ в области D отличаются множителем $e^{i2\pi\alpha k}$, где k — целое число. □

Пример 16. Пусть D — плоскость с разрезом $[-1, 1]$, $f(z)$ — регулярная в D ветвь функции $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$, α — действительное число, $f(0+i0) = 1$ (т. е. $f(z_0) = 1$ в точке $z_0 = 0$, лежащей на верхнем берегу разреза). Вычислим значения $f(z)$ на действительной оси. Имеем при $z \in D$

$$f(z) = \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^{\alpha} e^{i\alpha\varphi}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = \Delta_{\gamma} \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \Delta_{\gamma} \arg(1+z)$ и γ — кривая, которая соединяет точки $0+i0$, z и лежит в D. Числа φ_1, φ_2 вычисляются так же, как и в примере 13.

1. Если $z = x \in (-1, 1)$ и лежит на верхнем берегу разреза, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, так что

$$f(x + i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} > 0.$$

2. Если $z = x > 1$, то $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$ и

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}.$$

Если $z = x < -1$, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, так что

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}.$$

В этих формулах $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} > 0$.

3. Если $z = x \in (-1, 1)$ и лежит на нижнем берегу разреза, то $\varphi_1 = -2\pi$, $\varphi_2 = 0$, так что

$$f(x - i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} e^{-i2\alpha\pi}. \quad \square$$

Пример 17. Пусть $f(z)$, D — те же, что и в примере 16. Вычислим первые два члена разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Имеем

$$f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-i\alpha\pi}$$

(пример 16, 2). Далее,

$$f(z) = \left(\frac{-1+\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}\right)^{\alpha} = e^{-i\alpha\pi} g(z), \quad g(z) = \left(\frac{1-\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}\right)^{\alpha},$$

где функция $g(z)$ регулярна в точке $z = \infty$ и $g(\infty) = 1$. Разлагая функцию $g(z)$ в ряд Лорана по степеням $1/z$, получаем

$$f(z) = e^{-i\alpha\pi}\left(1 - \frac{2\alpha}{z} + \ldots\right). \quad \square$$

Пример 18. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, 1]$. Аналитическая функция

$$F(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$$

распадается в области D на три регулярные ветви. Доказывается этот факт точно так же, как и в примере 15.

Пусть $f(z)$ — регулярная в D ветвь функции $F(z)$; положительная на верхнем берегу разреза. Разложим $f(z)$ в ряд Лора-

на в окрестности точки $z=\infty$. Имеем при $z\in D$

$$f(z)=\left|\sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}\right|e^{i\varphi/3},\quad \varphi=\varphi_1-\varphi_2,$$

где $\varphi_1=\Delta_\gamma \arg z$, $\varphi_2=\Delta_\gamma \arg(1-z)$, кривая γ лежит в области D и соединяет точку $z_0=\frac{1}{2}+i0$ (лежащую на верхнем берегу разреза) с точкой z. Пусть $z=x>1$; тогда $\varphi_1=0$, $\varphi_2=-\pi$, так что $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\,e^{i\pi/3}$. Следовательно,

$$f(\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{i\pi/3}.$$

Имеем в окрестности точки $z=\infty$

$$f(z)=e^{i\pi/3}\sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}=e^{i\pi/3}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/3},$$

где значение корня в точке $z=\infty$ равно 1. Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$f(z)=e^{i\pi/3}\sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/3}^n(-1)^n z^{-n}. \quad \square$$

Пример 19. Пусть $P_n(z)$ — полином степени n:

$$P_n(z)=a(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),\quad a\neq 0,$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — различные комплексные числа, и $R>\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|$, т. е. все нули полинома $P_n(z)$ лежат в круге $|z|<R$. Покажем, что аналитическая функция $F(z)=\sqrt[n]{P_n(z)}$ распадается на n регулярных ветвей в кольце D: $R<|z|<\infty$.

Пусть исходный элемент $F_0(z)$ функции $F(z)$ задан в точке z_0 и γ — простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в области D. Полученное в результате обхода по кривой γ значение $F(z_0)$ равно $F(z_0)=F_0(z_0)e^{i\varphi/n}$, $\varphi=\Delta_\gamma \arg P_n(z)$.

Далее, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n$, $\varphi_j=\Delta_\gamma \arg(z-z_j)$.

Если внутренность кривой γ лежит в области D, то все $\varphi_j=0$, так что $\varphi=0$ и $F(z_0)=F_0(z_0)$. Пусть круг $|z|<R$ лежит внутри γ, и эта кривая ориентирована против часовой стрелки. Тогда все $\varphi_j=2\pi$, так что $\varphi/n=2\pi$ и снова $F(z_0)=F_0(z_0)$. По лемме 3 функция $F(z)$ распадается в области D на регулярные ветви. Если $f_0(z)$ — одна из этих ветвей, то все остальные регулярные ветви имеют вид

$$f_k(z)=e^{i2\pi k/n}f_0(z),\quad k=1, 2, \ldots, n-1.$$

Отметим, что $f(z)=\sqrt{P_n(z)}\sim\sqrt[n]{a}\,z$ $(z\to\infty)$, где $\sqrt[n]{a}$ — некоторое значение корня (свое для каждой ветви).

Приведем другое доказательство. Имеем

$$F(z)=zG(z),\quad G(z)=\sqrt[n]{a\left(1-\frac{z_1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{z_n}{z}\right)},$$

где $z_0G(z_0)=F_0(z_0)$. Функция $G(z)$ аналитична в односвязной области $\widetilde{D}=D\cup\{z=\infty\}$ и, по теореме о монодромии, регулярна в этой области. Так как $\widetilde{D}\supset D$, то функция $G(z)$ регулярна в D. □

Пример 20. Пусть $F(z)$ — функция из примера 19. Фиксируем точку z_0, соединим ее отрезками со всеми точками z_j, $1\leqslant j\leqslant n$, и пусть D — внешность полученной «звезды» (рис. 66). Точно так же, как и в примере 19, можно показать, что функция $F(z)$ распадается в области D на n регулярных ветвей. □

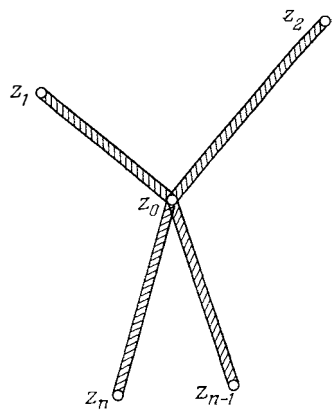


Рис. 66

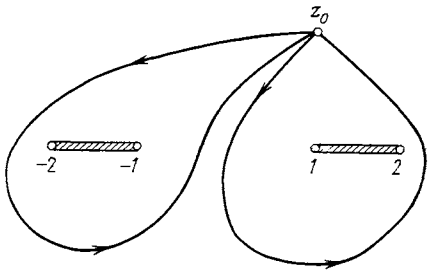


Рис. 67

Пример 21. Функция $F(z)=\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$ распадается на две регулярные ветви в области D, где D — плоскость с разрезами по отрезкам $[-2,-1]$ и $[1,2]$ (рис. 67).

Пусть исходный элемент $F_0(z)$ функции $F(z)$ задан в точке $z_0\in D$, и γ — простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в D. После обхода по γ получаем значение

$$F(z_0)=F_0(z_0)e^{i\varphi/2},\quad \varphi=\Delta_\gamma\arg[(z^2-1)(z^2-4)].$$

Далее,

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4,\quad \varphi_j=\Delta_\gamma\arg(z-z_j),$$

где $z_1=-2$, $z_2=-1$, $z_3=1$, $z_4=2$. Если разрезы не лежат внутри γ, то все $\varphi_j=0$, так что $F(z_0)=F_0(z_0)$. Если внутри кривой γ лежит только отрезок $[-2,-1]$, то $\varphi_3=\varphi_4=0$, $\varphi_1=\varphi_2=2\pi$ (если γ ориентирована положительно), так что $\varphi=4\pi$ и снова $F(z_0)=F_0(z_0)$. Аналогично, $F(z_0)=F_0(z_0)$, если γ содер-

жит внутри себя отрезок $[1, 2]$. По лемме 3 функция

$$f(z)=\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)},\quad z\in D;\quad f(z_0)=F_0(z_0)$$

регулярна в области D. □

Пример 22. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ — различные комплексные числа, $F(z)=\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{2n})}$. Сделаем разрезы вдоль простых непересекающихся кривых l_j, соединяющих точки z_{2j-1}, z_{2j}, $1\leqslant j\leqslant n$. Тогда в полученной области функция $F(z)$ распадается на две регулярные ветви; доказательство точно такое же, как и в примере 21. □

Пример 23. Пусть $P_n(z)$ — полином степени n,

$$P_n(z)=a(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),\quad a\neq 0,$$

все нули которого лежат в круге $|z|<R$. Выясним, при каких целых значениях m в области D: $R<|z|<\infty$ можно выделить регулярную ветвь функции $F(z)=\sqrt[m]{P_n(z)}$.

Пусть исходный элемент $F_0(z)$ функции $F(z)$ задан в точке z_0 и γ — простая замкнутая кривая с началом в точке z_0, лежащая в D. После обхода вдоль γ получаем значение

$$F(z_0)=F_0(z_0)e^{i\varphi/m},\quad \varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n,$$
$$\varphi_j=\Delta_\gamma \arg(z-z_j).$$

Если внутренность кривой γ лежит в области D, то все $\varphi_j=0$. Пусть γ ориентирована положительно и содержит внутри себя круг $|z|<R$. Тогда все $\varphi_j=2\pi$, так что $\varphi=2n\pi$.

Следовательно, функция $F(z)$ допускает выделение регулярной ветви в области D тогда и только тогда, когда $e^{i2n\pi/m}=1$, т. е. когда n делится на m. □

Пример 24. Функция $F(z)=\ln\frac{(z-1)(z+4)}{(z-3)(z+2)}$, $F(0)=w_0$, где w_0 — одно из значений $\ln z|_{z=2/3}$ аналитична в области D_0 — расширенной комплексной плоскости с проколами в точках -4, -2, 1, 3. Действительно, функция $f(z)=\frac{(z-1)(z+4)}{(z-3)(z+2)}$ регулярна и отлична от нуля в области D_0, так что функция

$$F(z)=\ln f(z),\quad F(0)=w_0$$

аналитична в D_0 по теореме 2 § 22. Приведем примеры областей, в которых можно выделить регулярную ветвь функции $F(z)$.

1. Проведем разрезы вдоль непересекающихся лучей, выходящих из точек -4, -2, 1, 3. Полученная область D_1 односвязна, и по теореме о монодромии (см. также пример 6) функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви в области D_1.

2. Проведем разрезы $(-\infty, -4]$, $[-2, 1]$, $[3, \infty)$ и покажем, что в этой области D_2 функция $F(z)$ также распадается на регулярные ветви. Действительно, если γ — простая замкнутая кривая, которая лежит в области D_2 и содержит внутри себя отрезок $[-2, 1]$, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg \frac{z+4}{z-3}, \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg \frac{z-1}{z+2}.$$

Очевидно, что $\varphi_1 = 0$, так как $z + 4 \neq 0$, $z - 3 \neq 0$ внутри кривой γ. Далее, $\varphi_2 = 0$, что доказывается так же, как и в примере 12, и потому $\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$. Из этого соотношения, точно так же, как и в примере 12, вытекает, что функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви в области D_2. В частности, это утверждение верно и для кольца D_3: $\frac{3}{2} < \left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{7}{2}$.

3. Пусть D_4 — плоскость с разрезами $[-4, -2]$, $[1, 3]$; в этой области функция $F(z)$ также распадается на регулярные ветви. Действительно, если γ — простая замкнутая кривая, которая лежит в D, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg \frac{z+4}{z+2} + \Delta_\gamma \arg \frac{z-1}{z-3} \equiv \varphi_1 + \varphi_2.$$

Если разрез $[-4, -2]$ лежит внутри γ, а разрез $[1, 3]$ — вне γ, то очевидно, что $\varphi_2 = 0$, а $\varphi_1 = 0$ в силу примера 12. Аналогично рассматривается случай, когда разрез $[1, 3]$ лежит внутри γ.

В частности, функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви в круге $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$ и в области $\left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{7}{2}$. □

Пример 25. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, 1]$,

$$f(z) = \sqrt[4]{z(1-z)^3}, \quad f(x + i0) > 0, \quad x \in (0, 1).$$

Функция $f(z)$ регулярна в D (пример 19). Вычислим $f(-1)$, $f'(-1)$, $f''(-1)$. Имеем $f(z) = \sqrt[4]{g(z)}$, $g(z) = z(1-z)^3$.

Напомним, что $\frac{d}{dw}(w^\alpha) = \frac{\alpha w^\alpha}{w}$ ((3′) § 22), где значения w^α в обеих частях равенства одинаковы. Следовательно,

$$f'(z) = \frac{1}{4} \frac{g'(z) f(z)}{g(z)},$$

$$f''(z) = \frac{1}{4} \frac{g''(z) f(z)}{g(z)} - \frac{3}{16} \frac{(g'(z))^2 f(z)}{g^2(z)}.$$

Пусть кривая γ соединяет точку $x \in (0, 1)$, лежащую на верхнем берегу разреза, и точку -1. Тогда

$$\Delta_\gamma \arg g(z) = \Delta_\gamma \arg z + 3\Delta_\gamma \arg (1 - z) = \pi.$$

Следовательно, $f(-1) = e^{i\pi/4}\left|\sqrt[4]{g(-1)}\right| = e^{i\pi/4}\sqrt[4]{8}$. Далее, $g(-1) = -8$, $g'(-1) = 20$, $g''(-1) = -36$, так что

$$f'(-1) = -\frac{5}{8}f(-1) = -\frac{5}{8^{3/4}}e^{i\pi/4},$$

$$f''(-1) = -\frac{3}{64}f(-1) = -\frac{3}{8^{7/4}}e^{i\pi/4}. \quad \square$$

Пример 26. Покажем, что в области D: $1 < |z| < \infty$ нельзя выделить регулярную ветвь функции

$$F(z) = \ln(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Функция $G(z) = \sqrt{z^2-1}$ в области D распадается на две регулярные ветви $g_0(z)$, $g_1(z)$ (пример 9); пусть $g_0(2) > 0$, $g_1(2) < 0$, для определенности. Таким образом, функция $F(z)$ распадается в области D на две аналитические функции:

$$F_j(z) = \ln h_j(z), \qquad j = 0,\ 1, \quad h_j(z) = z + g_j(z).$$

Заметим, что $g_1(z) \equiv -g_0(z)$. В силу примера 11

$$g_0(z) = z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty,$$

так что при $z \to \infty$

$$h_0(z) = z\left(2 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad h_1(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Пусть γ — окружность $|z| = \rho > 1$, ориентированная положительно, с началом в точке $z = \rho$. Если w_j — исходное значение функции $F_j(z)$ в точке ρ, то после обхода по γ получим значение

$$w_j + i\varphi_j, \quad \varphi_j = \Delta_\gamma \arg h_j(z).$$

Имеем $\varphi_0 = 2\pi + \psi_0$, $\psi_0 = \Delta_\gamma \arg\left(2 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$. Если ρ достаточно велико, то $\psi_0 = 0$, так что $F_0(z)$ — неоднозначная функция.

Аналогично, $\varphi_1 = -2\pi + \psi_1$, $\psi_1 = \Delta_\gamma \arg\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$, так что $\psi_1 = 0$, если ρ достаточно велико. $\square$

§ 25. Граничные особые точки

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, границей которой является простая кусочно гладкая кривая Γ, и пусть $\zeta \in \Gamma$. Точка ζ называется *особой точкой* функции $f(z)$, если эту функцию нельзя аналитически продолжить по кривой γ, которая лежит в области D и имеет своим концом точку ζ.

Из этого определения и свойств аналитического продолжения (§ 20) следует, что возможность аналитического продолжения

функции $f(z)$ в граничную точку ζ области D не зависит от выбора кривой γ, лежащей в боласти D.

Докажем, что если выполнено условие

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\gamma}} f^{(k)}(z)=\infty \tag{1}$$

при некотором $k\geqslant 0$, то точка $\zeta\in\Gamma$ является особой для функции $f(z)$ (при $k=0$ полагаем $f^{(0)}(z)\equiv f(z)$). Действительно, если функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в граничную точку ζ области D по кривой γ, то в силу определения аналитического продолжения (§ 20) существует функция $f_\zeta(z)$, регулярная в некотором круге K: $|z-\zeta|<\rho$ и такая, что $f_\zeta(z)\equiv f(z)$, если $z\in K\cap\gamma$. Отсюда следует, что при любом $k\geqslant 0$

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\gamma}} f^{(k)}(z)=f_\zeta^{(k)}(\zeta)\neq\infty,$$

что противоречит условию (1).

Рассмотрим вопрос о граничных особых точках в случае, когда D есть круг. Имеет место следующая

Теорема. *На границе круга сходимости степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{2}$$

лежит хотя бы одна особая точка его суммы.

Доказательство. Пусть K: $|z-a|<R$ — круг сходимости ряда (2), $0<R<\infty$, и на окружности γ_R: $|z-a|=R$ нет особых точек функции $f(z)$. Тогда эту функцию можно аналитически продолжить в каждую точку, лежащую на γ_R. Результат аналитического продолжения обозначим $F(z)$, так что $F(z)\equiv f(z)$, если $z\in K$. По определению аналитического продолжения для каждой точки $\zeta\in\gamma_R$ существует круг K_ζ с центром в точке ζ, в котором функция $F(z)$ регулярна. Таким образом, окружность γ_R покрыта бесконечным числом кругов, центры которых лежат на γ_R.

В силу леммы Гейне — Бореля [9] из этого бесконечного покрытия можно выделить конечное покрытие, т. е. существует система кругов K_{ζ_j} $(j=1, 2, \ldots, n)$, $\zeta_j\in\gamma_R$ такая, что каждая точка $\zeta\in\gamma_R$ принадлежит хотя бы одному из этих кругов. Пусть z_j — точка пересечения двух соседних кругов K_{ζ_j} и $K_{\zeta_{j+1}}$ $(j=1, 2, \ldots, n;\ K_{\zeta_{n+1}}\equiv K_{\zeta_1})$, лежащая вне круга K и пусть $R_0=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j-a|$. Тогда функция $F(z)$, совпадающая с $f(z)$ в круге K, регулярна в большем круге K_0: $|z-a|<R_0$, $R_0>R$. Отсюда вытекает (§ 12, следствие 3), что функция $F(z)$ представляется в круге K_0 сходящимся рядом (2), т. е. радиус сходимости ряда (2) больше R, что противоречит условию.

Пример 1. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ равен 1. На границе круга сходимости этого ряда лежат две особые точки его суммы $1/(1+z^2)$, а именно, точки i и $-i$. □

Следствие. *Радиус сходимости ряда* (2) *равен расстоянию от точки a до ближайшей особой точки функции* $f(z)$.

Это утверждение позволяет во многих случаях эффективно находить радиус сходимости степенно́го ряда без использования формулы Коши — Адамара (§ 11).

Пример 2. Радиус сходимости ряда

$$\frac{1}{(z+2)(z-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

равен 2, так как ближайшей к точке $z=0$ особой точкой его суммы является точка -2. □

Пример 3. Радиус сходимости ряда

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

равен $\pi/2$, так как ближайшими для точки $z=0$ особыми точками функции $\operatorname{tg} z$ являются полюсы $z_1=\pi/2$ и $z_2=-\pi/2$. □

Замечание 1. Функция действительного переменного e^x бесконечно дифференцируема на всей оси, и ряд

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

сходится для всех x. Функция $1/(1+x^2)$ также является бесконечно дифференцируемой на всей оси, однако радиус сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \tag{4}$$

равен 1. Причина этого явления становится понятной лишь с выходом в комплексную плоскость. Действительно, функция e^z является целой и радиус сходимости ряда (3) $R=\infty$. Функция $1/(1+z^2)$ имеет две особые точки $z_1=i$, $z_2=-i$, и поэтому радиус сходимости ряда (4) равен 1.

Замечание 2. Сходимость степенно́го ряда (2) в точках границы круга сходимости не связана с регулярностью суммы ряда в этих точках (см. примеры 4—6).

Пример 4. Ряд $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится во всех точках единичной окружности; для суммы этого ряда точка 1 — особая, а остальные — точки регулярности. □

Пример 5. Ряд $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ сходится в точке 1, и его сумма регулярна в этой точке, так как $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\ln(1+z)$. □

Пример 6. Ряд $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ сходится во всех точках единичной окружности, включая точку 1, но эта точка является особой для $f(z)$. Действительно, $f(z)$ — регулярная ветвь функции $1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z)=F(z)$, а точка $z=1$ является для $F(z)$ особой (логарифмической точкой ветвления). □

Приведем пример функции, для которой каждая точка границы круга сходимости является особой.

Пример 7. Рассмотрим ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1. Покажем сначала, что точка $z=1$ является особой для $f(z)$. Возьмем в качестве γ отрезок $[0, 1]$. Если $z\in\gamma$, то $z^{2^k}=x^{2^k}\to 1$ при $z=x\to 1-0$ ($k=0$, 1, 2, ...) и, следовательно, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x^{2^k}\to\infty$ при $x\to 1-0$. Таким образом, условие (1) выполнено и точка $z=1$ является особой точкой для $f(z)$.

Далее, из равенства

$$f(z)=z^2+z^4+\ldots+z^{2^n}+\left[\left(z^{2^n}\right)^2+\left(z^{2^n}\right)^4+\ldots\right]$$

получаем следующее функциональное соотношение для $f(z)$:

$$f(z)=z^2+z^4+\ldots+z^{2^n}+f\left(z^{2^n}\right), \qquad n=1, 2, \ldots \tag{5}$$

Так как точка $z=1$ является особой для $f(z)$, то из равенства (5) следует, что при любом натуральном n все точки, удовлетворяющие условию

$$z^{2^n}=1, \tag{6}$$

также являются особыми для $f(z)$. Корни уравнения (6) образуют всюду плотное множество точек на единичной окружности.

Отсюда следует, что все точки единичной окружности являются особыми для $f(z)$. Действительно, если бы некоторая точка ζ единичной окружности была не особой, то существовала бы содержащая эту точку дуга единичной окружности, состоящая из неособых точек, что не имеет места. □

Пример 8. Пусть на границе круга сходимости степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ лежит лишь одна особая точка z_0, а именно полюс первого порядка. Найдем асимптотическую оценку коэффициентов c_n.

Из условий задачи следует, что

$$f(z)=g(z)+\frac{A}{z-z_0}, \quad A\neq 0, \tag{7}$$

где функция $g(z)$ регулярна в круге $|z|<R$, $R>|z_0|$, и в силу сходимости ряда

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{8}$$

в точке z_0 имеем

$$b_n z_0^n \to 0, \quad n\to\infty. \tag{9}$$

Так как

$$\frac{1}{z-z_0}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_0^{n+1}}, \tag{10}$$

то из (7), (8) и (10) следует, что

$$c_n=-\frac{A}{z_0^{n+1}}+b_n=-\frac{A}{z_0^{n+1}}\left(1-\frac{z_0}{A}\,b_n z_0^n\right),$$

откуда в силу (9) получаем следующую асимптотическую оценку:

$$c_n\sim-\frac{A}{z_0^{n+1}}, \quad n\to\infty. \tag{11}$$

Из формулы (11), в частности, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=z_0. \quad \square$$

Приведем формулировку одного результата, который носит название

Теорема Прингсхейма. *Если радиус сходимости ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *равен* 1 *и если* $\operatorname{Re} c_n\geqslant 0$ *для всех* n, *то точка* $z=1$ *является особой для суммы этого ряда.*

§ 26. Особые точки аналитических функций. Понятие о римановой поверхности

1. Ветви аналитических функций. Особые точки. Аналитическая функция, по определению,— это множество всех элементов, полученных из некоторого элемента аналитическим продолжением. Это множество элементов связно в том смысле, что любые два элемента аналитической функции могут быть получены один из другого аналитическим продолжением вдоль некоторой кривой.

Понятие особой точки аналитической функции можно ввести следующим образом. В § 25 было введено понятие граничной особой точки регулярной функции. Так как аналитическая функция составлена из элементов (регулярных функций), то назовем точку z_0 *особой точкой аналитической функции,* если она является граничной особой точкой некоторого элемента функции.

Это понятие является довольно сложным, и в столь общей форме фактически не будет использоваться в дальнейшем. Наиболее важным типом особой точки является изолированная особая точка аналитической функции.

Предварительно введем понятие *ветви аналитической функции.* Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$. Если аналитически продолжить $f(z)$ по всем кривым (с начальной точкой z_0), по которым такое продолжение возможно, то полученное множество элементов образует аналитическую функцию $F(z)$. Если же аналитически продолжить элемент $f(z)$ только по части кривых, по которым такое продолжение возможно, то мы получим ветвь $F_0(z)$ аналитической функции $F(z)$.

Иначе говоря, *ветвью аналитической функции называется связное подмножество элементов этой функции.*

Ветвь $F_0(z)$ аналитической функции может быть неоднозначной функцией z. Однозначная ветвь аналитической функции является регулярной функцией. Такие ветви рассматривались в § 24; в настоящем параграфе рассматриваются многозначные ветви аналитических функций.

Примером ветви аналитической функции служит аналитическая в некоторой области D функция. Напомним это понятие (§ 20). Пусть D — область расширенной комплексной плоскости, $f(z)$ — элемент в точке $z_0 \in D$, и пусть этот элемент можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в D. Полученное в результате всех таких продолжений множество элементов называется аналитической в области D функцией $F(z)$.

Определение 1. Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки a, но не является регулярной в точке a. Тогда точка a называется изолированной особой точкой функции $F(z)$.

Эта функция $F(z)$, вообще говоря, является ветвью некоторой аналитической функции $G(z)$. Если точка a является особой для некоторой ветви аналитической функции, то она является особой точкой этой функции.

Если a — изолированная особая точка ветви $F(z)$, то она либо является особой точкой однозначного характера (полюс, существенная особая точка), либо является точкой ветвления.

Пример 1. Пусть K — кольцо $0 < |z| < r$, точка $z_0 \in K$. Зададим в точке z_0 элемент $f(z)$ функции $\ln z$ и аналитически продолжим его по всем кривым, лежащим в кольце K. Тогда мы получим аналитическую в K функцию $F_0(z)$, которая является ветвью аналитической функции $\ln z$.

Аналогично, по элементу $g(z)$ функции $\sqrt{z}$, заданному в точке $z_0 \in K$, строится аналитическая в K ветвь $G_0(z)$ этой функции. □

Две аналитические функции, по определению § 20, равны тогда и только тогда, когда их исходные элементы эквивалентны. Для ветвей удобнее ввести понятие равенства иначе. Именно, две ветви некоторой аналитической функции, по определению, равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

С этой точки зрения в примере 1 существует ровно одна ветвь функции $\ln z$, аналитическая в кольце K (аналогично для функций $\sqrt[n]{z}$, z^α).

Пример 2. Точка $z = 0$ является логарифмической точкой ветвления для ветви $F_0(z)$ логарифма, указанной в примере 1. Точка $z = 0$ является точкой ветвления порядка n для ветви $G_0(z)$ функции $\sqrt[n]{z}$, указанной в примере 1. □

Одна и та же точка комплексной плоскости может быть особой точкой для одних ветвей аналитической функции и не быть особой точкой для других.

Пример 3. Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{1+\sqrt{z}}{z-1}$. В окрестности точки $z = 1$ функция $\sqrt{z}$ распадается, по теореме о монодромии, на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$. Пусть $f_1(1) = +1$, $f_2(1) = -1$. В той же окрестности функция $F(z)$ распадается на две однозначные ветви

$$F_j(z) = \frac{1+f_j(z)}{z-1}, \qquad j = 1, 2.$$

Ветвь $F_1(z)$ имеет в точке $z = 1$ простой полюс, а ветвь $F_2(z)$ регулярна в точке $z = 1$, так как $1 + f_2(1) = 0$. □

Пример 4. Аналитическая функция $F(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви $f_0(z)$, $f_1(z)$ в плоскости с разрезом $[-1, 1]$ (§ 24, пример 9). Пусть $f_0(2) = 2 + \sqrt{3}$,

$f_1(2) = 2 - \sqrt{3}$; тогда

$$f_0(z) \sim 2z, \quad f_1(z) \sim \frac{1}{2z} \qquad (z \to \infty)$$

(§ 24, пример 26). Следовательно, точка $z = \infty$ является полюсом первого порядка для ветви $f_0(z)$ и нулем первого порядка для ветви $f_1(z)$. □

Ниже будет показано (пример 12), что точки $z = \pm 1$ являются точками ветвления второго порядка функции $F(z)$.

Во многих случаях характер точек ветвления можно установить с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности U точки a, функция $f(z) \not\equiv 0$ регулярна в этой окрестности и точка a является точкой ветвления порядка n функции $F(z)$ (здесь $n \leqslant \infty$). Тогда точка a является точкой ветвления порядка n аналитических в области U функций*

$$f(z) + F(z), \quad f(z)\,F(z), \quad \frac{f(z)}{F(z)}$$

(*в последнем случае требуется, чтобы $F(z) \not\equiv 0$ при $z \in U$*).

Доказательство. Рассмотрим аналитическую в области U функцию $G(z) = f(z) + F(z)$. Пусть $z_0 \in U$, тогда, по условию, в этой точке имеется ровно n различных элементов $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... функции $F(z)$. Следовательно, в этой точке имеется ровно n различных элементов $f(z) + f_1(z)$, $f(z) + f_2(z)$, ... функции $G(z)$, так что точка a является точкой ветвления порядка n. Аналогично этот факт доказывается для функций $f(z)F(z)$, $f(z)/F(z)$.

Пример 5. Точка $z = 0$ является точкой ветвления второго порядка функций $\frac{1}{\sqrt{z}}$, $z\sqrt{z}$, $z + \sqrt{z}$, $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $\sqrt{z}\sin z$ (эти функции аналитичны в проколотой окрестности точки $z = 0$). Функции $\sqrt{z} + \sin z$, $e^z\sqrt{z}$, $\frac{1}{\sqrt{z}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ аналитичны в проколотой окрестности точки $z = \infty$, которая является точкой ветвления второго порядка для этих функций. □

Пример 6. Точки 0, ∞ являются точками ветвления порядка n аналитических функций

$$\frac{1}{\sqrt[n]{z}}, \quad \sqrt[n]{z} + e^z, \quad \frac{1}{1+\sqrt[n]{z}}, \quad \sqrt[n]{z}\sin z. \quad \square$$

Пример 7. Точки 0, ∞ являются логарифмическими точками ветвления аналитических функций

$$z + \ln z, \quad \frac{\ln z}{z-1}, \quad \frac{1}{\ln z}, \quad \frac{1}{\ln z + 1}, \quad e^z \ln z. \quad \square$$

Пример 8. Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ и регулярна в проколотой окрестности точки a. Тогда точка a является точкой ветвления порядка n для функций

$$\sqrt[n]{z-a} + f(z), \quad \sqrt[n]{z-a}\, f(z), \quad \frac{f(z)}{\sqrt[n]{z-a}},$$

и точкой ветвления бесконечного порядка для функций

$$\ln(z-a) + f(z), \quad f(z)\ln(z-a), \quad \frac{f(z)}{\ln(z-a)},$$

аналитических в некоторой проколотой окрестности точки a. □

Пример 9. Исследуем особые точки функции $F(z) = \dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$. Эта функция аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками 0, 1, ∞.

Точки 0, ∞ являются точками ветвления второго порядка (пример 5). В малой окрестности U точки $z = 1$ функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$ по теореме о монодромии; пусть $f_1(1) = 1$, тогда $f_2(1) = -1$. Соответственно функция $F(z)$ распадается на две ветви $F_j(z) = \dfrac{1}{1+f_j(z)}$, $j = 1, 2$, при $z \in U$. Ветвь $F_1(z)$ регулярна в точке $z = 1$, ветвь $F_2(z)$ имеет простой полюс в этой точке, так как (§ 22, (12))

$$1 + f_2(z) = 1 + \sqrt{1+(z-1)} = \\ = 1 + (-1)\left(1 + \frac{z-1}{2} + \ldots\right) = -\frac{z-1}{2} + \ldots$$

в окрестности точки $z = 1$. □

Пример 10. Исследуем особые точки функции $F(z) = \dfrac{\ln z}{z-1}$, которая аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками 0, 1, ∞. Точки 0, ∞ являются логарифмическими точками ветвления (пример 7). В малой окрестности точки $z = 1$ функция $\ln z$ по теореме о монодромии распадается на регулярные ветви $f_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; пусть $f_k(1) = 2\pi i k$. Точка $z = 1$ является простым полюсом для ветвей $F_k(z) = \dfrac{f_k(z)}{z-1}$, $k \neq 0$, и точкой регулярности ветви $F_0(z)$. □

2. Суперпозиции корня, логарифма и регулярных функций (особые точки). Пусть функция $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в области D. Рассмотрим аналитическую в области D функцию (§ 24)

$$F(z) = \ln f(z), \quad F(z_0) = w_0, \tag{1}$$

где $z_0 \in D$, $e^{w_0} = f(z_0)$ (т. е. w_0 — одно из значений логарифма). Значения функции $F(z)$ при $z \in D$ вычисляются по формуле (1) § 24:

$$F(z) = \ln |f(z)| + i[\operatorname{Im} w_0 + \Delta_\gamma \arg f(z)]. \tag{2}$$

Здесь кривая γ лежит в D и соединяет точки z_0, z; значение $F(z)$ зависит не только от точки z, но и от кривой γ.

Аналогично, рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$G(z) = \sqrt[n]{f(z)}, \quad G(z_0) = \zeta_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}, \tag{3}$$

где $z_0 \in D$, $\zeta_0^n = f(z_0)$. Значения этой функции при $z \in D$ вычисляются по формуле

$$G(z) = \left|\sqrt[n]{f(z)}\right| e^{i\left(\varphi_0 + \frac{1}{n}\varphi\right)}, \quad \varphi = \Delta_\gamma \arg f(z). \tag{4}$$

В частности, если функция $f(z) \not\equiv 0$ регулярна в точке a или имеет полюс в этой точке, то функции $\ln f(z)$, $\sqrt[n]{f(z)}$ аналитичны в некоторой проколотой окрестности точки a.

Напомним важное свойство функций $\ln f(z)$, $\sqrt[n]{f(z)}$: для того чтобы задать элемент такой функции в точке z_0, достаточно задать его значение в этой точке.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ либо регулярна в точке a и $f(a) = 0$, либо имеет полюс в точке a. Тогда*

1) *точка a является логарифмической точкой ветвления функции $\ln f(z)$;*

2) *если a — простой нуль или простой полюс функции $f(z)$, то точка a является точкой ветвления порядка n функции $\sqrt[n]{f(z)}$.*

Доказательство. Если D — достаточно малая проколотая окрестность точки a, то

$$f(z) = (z - a)^m h(z), \quad z \in D,$$

где $m \neq 0$ — целое число, функция $h(z)$ регулярна и отлична от нуля в области $D_1 = D \cup \{a\}$ (§ 12, § 18). Пусть γ — простая замкнутая кривая с начальной точкой z_0, которая лежит в D, содержит точку a внутри себя и ориентирована положительно. Тогда

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = m\Delta_\gamma \arg (z - a) + \Delta_\gamma \arg h(z) = 2\pi m,$$

так как $\Delta_\gamma \arg h(z) = 0$. Действительно,

$$\Delta_\gamma \arg h(z) = \int_\gamma d \arg h(z) = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 0,$$

так как функция $h'(z)/h(z)$ регулярна в односвязной области

D_1. Следовательно,

$$\Delta_{\gamma^k} \arg f(z) = 2\pi k m,$$

где $\gamma^k = \gamma\gamma \ldots \gamma$ (k раз). Так как любая замкнутая кривая с начальной точкой z_0, которая лежит в D, гомотопна кривой γ^k (k — целое число), то все значения функций $F(z) = \ln f(z)$, $G(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ в точке z_0 даются формулами:

$$\begin{aligned} F_k(z_0) &= \ln|f(z_0)| + i\,[\operatorname{Im} w_0 + 2k\pi m], \\ G_k(z_0) &= \left|\sqrt[n]{f(z_0)}\right| e^{i\left(\varphi_0 + \frac{1}{n}\cdot 2\pi k m\right)}, \end{aligned} \tag{5}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, $F(z)$ — бесконечнозначная в D функция, так что a — логарифмическая точка ветвления функции $F(z)$.

Пусть $m = \pm 1$; тогда в точке z_0 имеется ровно n различных значений $G_k(z_0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ функции $G(z)$, а стало быть, ровно n различных элементов в этой точке.

Можно доказать эту теорему иначе: при $z \in D$ справедливы формулы (п. 2 § 24):

$$\ln f(z) = m \ln(z-a) + \ln h(z), \quad \sqrt[n]{f(z)} = \sqrt[n]{(z-a)^m}\,\sqrt[n]{h(z)},$$

где $\ln h(z)$, $\sqrt[n]{h(z)}$ — некоторые регулярные в $D \cup \{a\}$ ветви. После этого остается воспользоваться теоремой 1.

Пример 11. Пусть $R(z)$ — рациональная функция. Тогда ее нули и полюсы (и только они) являются особыми точками функции $F(z) = \ln R(z)$, $F(z_0) = w_0$ ($e^{w_0} = R(z_0)$ и z_0 не является ни нулем, ни полюсом функции $R(z)$), которая аналитична в расширенной комплексной плоскости с проколами в указанных точках. Все эти точки — логарифмические точки ветвления. □

Пример 12. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, имеющая только простые нули и полюсы. Все эти точки — точки ветвления порядка n функции $\sqrt[n]{R(z)}$. □

Пример 13. Пусть $f(z) = z^m h(z)$, где функция $h(z)$ регулярна и отлична от нуля в круге D: $|z| < r$, $m \neq 0$ — целое число. Тогда функция

$$F(z) = \sqrt[n]{f(z)}, \quad F(z_0) = w_0, \quad z_0 \neq 0,$$

аналитична в кольце K: $0 < |z| < r$. Исследуем характер особой точки $z = 0$.

Пусть γ — положительно ориентированная окружность $|z| = |z_0|$ с начальной точкой z_0. После k обходов вдоль γ в силу (4)

$$F(z_0) \to F_k(z_0), \quad F_k(z_0) = w_0 e^{i2\pi k m/n}, \tag{6}$$

так как $\Delta_\gamma \arg f(z) = m\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg h(z) = 2\pi m$.

а) Пусть числа m, n взаимно просты. Тогда функция $F(z)$ имеет в точке z_0 ровно n различных значений, и точка 0 является точкой ветвления порядка n функции $F(z)$.

б) Пусть d — наибольший общий делитель чисел m, n, т. е. $m = pd$, $n = qd$, где p, q — взаимно простые целые числа, $q \geqslant 1$. Тогда среди чисел $F_k(z_0)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ имеется ровно q различных. Точка $z = 0$ является точкой ветвления порядка q, если $q \geqslant 2$. Если же $q = 1$, т. е. если m делится на n, то точка $z = 0$ не является точкой ветвления.

Например, точки 0 и 1 являются точками ветвления функции $\sqrt[3]{z^2/(z-1)}$ порядка 3. □

Рассмотрим более сложный пример. Предварительно заметим следующее. Пусть U — проколотая окрестность точки a, и пусть все элементы аналитической функции $F(z)$, заданные в точках области U, допускают аналитическое продолжение по всем кривым, лежащим в U. Тогда в области U функция распадается на аналитические ветви, т. е. на функции, аналитические в области U. Действительно, возьмем точку $z_0 \in U$, элемент $f_0(z)$ в этой точке и аналитически продолжим его по всем кривым, лежащим в U; мы получим аналитическую в U функцию $F_0(z)$ — ветвь функции $F(z)$. Если существует элемент $f_1(z)$ функции $F(z)$ в точке z_0, который не является элементом ветви $F_0(z)$, то он порождает аналитическую в U ветвь $F_1(z)$ и т. д.

В рассмотренных выше примерах аналитическая функция $F(z)$ либо распадалась в U на регулярные ветви, либо состояла из одной аналитической ветви. Приведем пример иного рода.

Пример 14. Исследуем особые точки функции

$$F(z) = \ln \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}.$$

Эта функция является суперпозицией $F(z) = H(G(z))$ следующих функций:

$$G(z) = \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}, \quad H(w) = \ln w.$$

Исходный элемент $g(z)$ функции $G(z)$ зададим, например, в точке $z = 4$, $g(4) = -\frac{1}{3}$ (т. е. $\sqrt{z}\,|_{z=4} = 2$). Пусть D — расширенная комплексная плоскость с проколами в точках 0, 1, ∞; тогда функция $G(z)$ аналитична в области D и не принимает значений 0, ∞. В точке $w = -1/3$ зададим элемент $h(w)$ функции $H(w) = \ln w$; пусть $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 + \pi i$. Тогда по теореме 2 § 22 функция $F(z) = H(G(z))$, порожденная элементом $h(g(z))$, аналитична в области D.

а) $z = 1$. Покажем, что в малой проколотой окрестности K: $0 < |z-1| < r$ точки $z = 1$ функция $F(z)$ распадается на две

аналитические ветви $F_{1,2}(z)$, $F_2(z) \equiv -F_1(z)$, и для каждой из этих ветвей $z = 1$ — логарифмическая точка ветвления. Действительно, функция $\varphi(z) = \sqrt{z}$ в круге $\widetilde{K}$: $|z-1| < r$, по теореме о монодромии, распадается на две регулярные ветви $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2$, причем $\varphi_1(1) = 1$, $\varphi_2(z) \equiv -\varphi_1(z)$. Соответственно функция $G(z)$ распадается в K на две регулярные ветви

$$G_j(z) = \frac{1-\varphi_j(z)}{1+\varphi_j(z)}, \quad j = 1, 2; \quad G_2(z) = \frac{1}{G_1(z)}.$$

По формуле Тейлора $\varphi_1(z) = 1 + \frac{z-1}{2} + \ldots$, так что

$$G_1(z) \sim -\frac{1}{4}(z-1), \quad G_2(z) \sim \frac{-4}{z-1} \; (z \to 1).$$

Следовательно, ветвь $G_1(z)$ имеет простой нуль, а ветвь $G_2(z)$ — простой полюс в точке $z = 1$. Функция $F(z)$ распадается в K на две аналитические ветви $F_j(z) = \ln G_j(z)$, $j = 1, 2$, причем $F_2(z) \equiv -F_1(z)$, и точка $z = 1$ является логарифмической точкой ветвления функций $F_{1,2}(z)$ (теорема 2).

б) $z = 0$. Покажем, что в малом кольце K: $0 < |z| < r$ функция $F(z)$ распадается на счетное множество ветвей, для каждой из которых $z = 0$ — точка ветвления второго порядка.

Функция $\widetilde{G}(\zeta) = \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ в малой окрестности U точки $\zeta = 0$ распадается на регулярные ветви $\widetilde{G}_k(\zeta)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, где $\widetilde{G}_k(0) = 2k\pi i$. Следовательно, функция $F_k(z) = \widetilde{G}_k(\sqrt{z})$ аналитична в проколотой окрестности точки $z = 0$. При малых $|\zeta|$ имеем

$$\widetilde{G}_k(\zeta) = 2k\pi i - 2\zeta + O(\zeta^2),$$

так что при малых $|z|$

$$F_k(z) = 2k\pi i - 2\sqrt{z} + O(z).$$

Следовательно, $F_k(z)$ — двузначная функция, и $z = 0$ является точкой ветвления второго порядка этой функции.

в) $z = \infty$. Структура функции $F(z)$ в окрестности этой точки такая же, как и в окрестности точки $z = 0$. Действительно, замена $z = 1/\zeta$ приводит функцию $F(z)$ к виду

$$\widetilde{F}(\zeta) \equiv F(z) = \ln \frac{\sqrt{\zeta}-1}{\sqrt{\zeta}+1},$$

где ζ лежит в окрестности точки $\zeta = 0$. □

Пример 15. Исследуем особые точки функции

$$F(z) = \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1}.$$

Эта функция — сумма аналитических функций $G(z)=\sqrt[3]{z}$, $H(z)=\sqrt{z+1}$; их исходные элементы $g(z)$, $h(z)$ зададим в точке $z=1$: $\sqrt[3]{z}\big|_{z=1}=1$, $\sqrt{z+1}\,|_{z=1}=\sqrt{2}>0$. Функция $F(z)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости с проколами в точках -1, 0, ∞.

а) $z=0$. Покажем, что в малой проколотой окрестности K_1: $0<|z|<r$ точки $z=0$ функция $F(z)$ распадается на две аналитические ветви $F_1(z)$, $F_2(z)$, для каждой из которых $z=0$ — точка ветвления третьего порядка. Действительно, функция $H(z)=\sqrt{z+1}$ распадается на две регулярные ветви $H_1(z)$, $H_2(z)\equiv -H_1(z)$ по теореме о монодромии. Поэтому функция $F(z)$ распадается в K_1 на две аналитические ветви

$$F_1(z)=G(z)+H_1(z),\quad F_2(z)=G(z)+H_2(z),$$

для каждой из которых $z=0$ — точка ветвления третьего порядка (пример 8).

б) $z=-1$. В малой проколотой окрестности K_2: $0<|z+1|<r$ функция $F(z)$ распадается на три аналитические ветви, для каждой из которых $z=-1$ — точка ветвления второго порядка. Действительно, по теореме о монодромии функция $G(z)$ распадается в K_2 на три регулярные ветви $G_1(z)$, $G_2(z)\equiv e^{\frac{2\pi i}{3}}G_1(z)$, $G_3(z)\equiv e^{\frac{4\pi i}{3}}G_1(z)$, так что $F(z)$ распадается на три аналитические ветви $G_j(z)+H(z)$, $j=1, 2, 3$.

в) $z=\infty$. Покажем, что $z=\infty$ — точка ветвления шестого порядка для функции $F(z)$. Пусть γ — простая замкнутая кривая с началом и концом в точке $z=1$, внутри которой лежат точки $z=0$, $z=-1$. При обходе вдоль γ в положительном направлении

$$\Delta_\gamma \arg z=\Delta_\gamma \arg(z+1)=2\pi.$$

Исходное значение функции $F(z)$ в точке $z=1$ равно $F(1)=1+\sqrt{2}$. После N обходов вдоль γ получим следующие значения $F(1)$:

$$N=1:\quad F(1)=e^{2\pi i/3}-\sqrt{2};$$
$$N=2:\quad F(1)=e^{4\pi i/3}+\sqrt{2};$$
$$N=3:\quad F(1)=1-\sqrt{2};$$
$$N=4:\quad F(1)=e^{2\pi i/3}+\sqrt{2};$$
$$N=5:\quad F(1)=e^{4\pi i/3}-\sqrt{2}.$$

При $N=6$ снова получим $F(1)=1+\sqrt{2}$.

Следовательно, функция $F(z)$ — шестизначная. Этот факт можно установить иначе: покажем, что функция $w=F(z)$ удо-

влетворяет алгебраическому уравнению шестой степени. Возведя в куб обе части тождества $w - \sqrt{z+1} = \sqrt{z}$, получаем

$$w^3 + 3w(z+1) - z = \sqrt{z+1}\,(3w^2 + z + 1)$$

и после возведения в квадрат обеих частей этого тождества получаем

$$P(w, z) \equiv w^6 - 3(z+1)w^4 - 2zw^3 + 3(z+1)^2w^2 - \\ - 6z(z+1)w - z^3 - 2z^2 - 3z - 1 = 0.$$

При каждом фиксированном z это уравнение имеет шесть корней; в данном случае можно показать, что эти корни различны, если $z \neq 0$, $z \neq -1$. □

3. Структура аналитической функции в окрестности алгебраической точки ветвления. В окрестности алгебраической точки ветвления $a \neq \infty$ аналитическую функцию можно разложить в ряд по дробным степеням $z - a$.

Теорема 3. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в кольце K: $0 < |z - a| < r$, и пусть точка a является точкой ветвления порядка $n < \infty$. Тогда справедливо разложение*

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}, \tag{7}$$

где ряд сходится в кольце K.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(\zeta) = F(a + \zeta^n)$; эта функция аналитична в кольце $\tilde{K}$: $0 < |\zeta| < \sqrt[n]{r}$. Покажем, что функция $\Phi(\zeta)$ однозначна в $\tilde{K}$; тем самым будет доказано, что $\Phi(\zeta)$ регулярна в $\tilde{K}$ и, по теореме 1 § 17, разлагается в ряд Лорана:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k, \tag{8}$$

сходящийся в кольце $\tilde{K}$.

Возьмем окружность γ: $|\zeta| = \rho$, где $0 < \rho < \sqrt[n]{r}$, с начальной точкой ρ. Когда точка ζ пробегает окружность γ один раз в положительном направлении, точка $z = a + \zeta^n$ пробегает n раз окружность $\tilde{\gamma}$: $|z - a| = \rho^n$ в положительном направлении. Пусть $f_0(z)$ — элемент в точке $z_0 = a + \rho^n$ функции $F(z)$. Так как a — точка ветвления порядка n функции $F(z)$, то $f_0(z) \to f_0(z)$ после n обходов вдоль $\tilde{\gamma}$. Следовательно, $\varphi_0(\zeta) \to \varphi_0(\zeta)$ после обхода по γ, где $\varphi_0(\zeta) = f_0(a + \zeta^n)$ — элемент в точке $\zeta_0 = \rho$ функции $\Phi(\zeta)$, и функция $\Phi(\zeta)$ регулярна в кольце $\tilde{K}$. Так как $\zeta^n = z - a$, то из (8) следует (7).

Следствие. *Пусть точка $z = \infty$ является точкой ветвления порядка $n < \infty$ аналитической функции $F(z)$. Тогда спра-*

ведливо разложение

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{k/n}, \tag{9}$$

где ряд сходится в кольце вида $R < |z| < \infty$.

Для доказательства достаточно заметить, что точка $\zeta = 0$ является точкой ветвления порядка n функции $F(1/\zeta)$ и воспользоваться теоремой 3.

Ряды вида (7), (9) называются *рядами Пюизо*.

4. Понятие о римановой поверхности. Аналитическая функция не является функцией в обычном смысле слова, так как одному и тому же значению z может отвечать не одно, а несколько (или даже счетное множество) значений. Чтобы иметь возможность рассматривать $F(z)$ как функцию в обычном смысле слова, свяжем с $F(z)$ некоторую поверхность R, на которой $F(z)$ будет однозначной функцией. Полученная поверхность называется *римановой поверхностью* аналитической функции $F(z)$. Сформулируем определение римановой поверхности.

Рассмотрим аналитическую функцию $F(z)$. *Точкой римановой поверхности* R (функции $F(z)$) называется пара $P_0 = (z_0, f_0(z))$, где $f_0(z)$ — некоторый элемент в точке z_0 функции $F(z)$. Будем считать, что две пары $(z_0, f_0(z))$ и $(z_0, f_1(z))$ определяют одну и ту же точку римановой поверхности, если элементы $f_0(z)$ и $f_1(z)$ эквивалентны. Проекцией точки $P_0 = (z_0, f_0(z))$ римановой поверхности на комплексную плоскость z называется точка z_0:

$$(z_0, f_0(z)) \to z_0.$$

Окрестностью U_ε точки $P_0 = (z_0, f_0(z))$ называется множество точек $P = (\zeta, f_0(z))$, где $|\zeta - z_0| < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ таково, что функция $f_0(z)$ регулярна в круге $|z - z_0| < \varepsilon$. Проекцией окрестности U_ε на комплексную плоскость является круг $|z - z_0| < \varepsilon$.

Замечание 1. С теорией римановых поверхностей и с более глубоким понятием римановой поверхности читатель может познакомиться по книгам [6], [19], [24]. Риманова поверхность связна, так как любые два элемента аналитической функции могут быть получены друг из друга аналитическим продолжением.

Риманову поверхность можно наглядно представить как поверхность в трехмерном пространстве. В §§ 21, 22 были построены римановы поверхности функций $\ln z$, $\sqrt[n]{z}$.

Замечание 2. С помощью римановой поверхности можно наглядно представить, что такое ветвь аналитической функции. Именно, ветви отвечает связный «кусок» римановой поверхности (и обратно). Утверждение «функция $F(z)$ распадается в области D на m аналитических ветвей» в терминах римановой поверхности R означает, что часть R, которая проектируется на D, состоит из m связных кусков.

С аналитической функцией $F(z)$ можно связать еще один объект — «график» этой функции. Так как функция $w=F(z)$ принимает комплексные значения, то ее график лежит в пространстве (z, w), где z, w — комплексные числа, т. е. в четырехмерном пространстве. Графиком аналитической функции $F(z)$ называется множество всех пар $(z, F(z))$, где $F(z)$ — все значения функции $F(z)$ в точке z. Этот график является, вообще говоря, двумерной поверхностью в четырехмерном пространстве (z, w). Эта поверхность не может иметь самопересечений по «кривым», по теореме единственности; однако в изолированных точках различные «куски» этой поверхности могут склеиваться. Например, если $F(z)=(z-1)\ln z$, то в точке с координатами $z=1$, $w=0$ склеивается бесконечно много «кусков» графика этой функции.

§ 27. Аналитическая теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

1. Уравнения с регулярными коэффициентами. Многие задачи математической физики приводятся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0.$$

При этом коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ являются аналитическими функциями, а в большинстве случаев даже рациональными функциями. Поэтому естественно исследовать решения уравнения вида

$$w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0 \qquad (1)$$

с точки зрения аналитических функций. Такой подход, или, как еще говорят, «выход в комплексную плоскость», позволяет использовать мощные средства теории аналитических функций и получить важные результаты о структуре решений уравнения (1). Именно, оказывается, что если $p(z)$, $q(z)$ — рациональные функции, то любое решение уравнения (1) является аналитической во всей комплексной плоскости функцией, за исключением, быть может, полюсов коэффициентов $p(z)$, $q(z)$. Полюсы функций $p(z)$, $q(z)$ являются, как правило, особыми точками для всех решений уравнения (1) — а именно, точками ветвления. Более того, удается исследовать структуру решений в окрестности этих особых точек.

В этом разделе мы рассмотрим уравнение (1), коэффициенты $p(z)$, $q(z)$ которого регулярны в некоторой области D комплексной плоскости z. Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$w(z_0)=w_0, \quad w'(z_0)=w_1, \qquad (2)$$

где $z_0\in D$, а w_0, w_1 — заданные числа.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $p(z)$, $q(z)$ *уравнения* (1) *регулярны в круге* K: $|z - z_0| < R$. *Тогда существует решение* $w(z)$ *задачи Коши* (1)—(2), *регулярное в круге* K.

Доказательство см. [21], [18].

Покажем, как найти решение $w(z)$ задачи Коши (1)—(2), используя теорему 1. Решение $w(z)$ разлагается в степенной ряд, сходящийся в круге K:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (z - z_0)^n. \tag{3}$$

Первые два коэффициента разложения известны из данных Коши:

$$w_0 = w(z_0), \quad w_1 = w'(z_0).$$

Далее, функции $p(z)$, $q(z)$ по условию также разлагаются в ряды Тейлора:

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n, \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n, \tag{4}$$

сходящиеся в круге K.

Подставим ряды (3), (4) и ряды для w', w'' в уравнение (1); тогда получим ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, тождественно равный нулю в круге K. Поэтому $c_n = 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов w_2, w_3, ...

Проделаем соответствующие выкладки, предполагая для простоты, что $z_0 = 0$. Имеем

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, w_n z^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m + \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} q_n z^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0.$$

Уравнение $c_n = 0$ имеет вид

$$(n+2)(n+1)\, w_{n+2} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n+1} k p_{n-k+1} w_k - \sum_{k=0}^{n} q_{n-k} w_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Коэффициент w_{n+2} выражается через коэффициенты w_0, w_1, ..., w_{n+1}. Так как w_0, w_1 известны, то из уравнений (5) последовательно определяются коэффициенты w_2, w_3, ...

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$w'' - zw = 0. \tag{6}$$

Это уравнение называется *уравнением Эйри*. В данном случае $p(z) \equiv 0$, $q(z) = -z$, так что коэффициенты уравнения регулярны во всей комплексной плоскости. В силу теоремы 1 всякое решение уравнения Эйри является целой функцией.

Решим уравнение Эйри. Система (5) в данном случае имеет вид

$$(n+2)(n+1)w_{n+2} = w_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

В частности, $w_2 = 0$, откуда следует, что $w_5 = w_8 = \ldots = w_{2+3k} = \ldots = 0$. Далее из этой системы находим

$$w_{3n} = \frac{w_0}{(2\cdot3)\cdot(5\cdot6)\ldots[(3n-1)\cdot3n]}, \quad w_{3n+1} = \frac{w_1}{(3\cdot4)\cdot(6\cdot7)\ldots[3n(3n+1)]}.$$

Пусть $w_1(z)$ — решение с данными Коши $w_1(0) = 1$, $w_1'(0) = 0$ и $w_2(z)$ — решение с данными Коши $w_2(0) = 0$, $w_2'(0) = 1$. Тогда

$$w_1(z) = 1 + \frac{z^3}{2\cdot3} + \frac{z^6}{(2\cdot3)(5\cdot6)} + \ldots + \frac{z^{3n}}{(2\cdot3)(5\cdot6)\ldots[(3n-1)\cdot3n]} + \ldots,$$

$$w_2(z) = z + \frac{z^4}{3\cdot4} + \frac{z^7}{(3\cdot4)(6\cdot7)} + \ldots + \frac{z^{3n+1}}{(3\cdot4)(6\cdot7)\ldots[3n(3n+1)]} + \ldots$$

Всякое решение уравнения Эйри является линейной комбинацией решений $w_1(z)$, $w_2(z)$. В частности, решение

$$Ai(z) = \frac{w_1(z)}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{w_2(z)}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

называется *функцией Эйри*. □

Пример 2. Уравнение

$$w'' + (a + b\cos z)w = 0,$$

где a, b — постоянные, называется *уравнением Матье*. В силу теоремы 1 всякое решение уравнения Матье является целой функцией z. □

Пример 3. Всякое решение *уравнения Вебера*

$$w''(z) - (z^2 - a^2)w(z) = 0$$

(a — постоянная) является целой функцией z. □

В теореме 1 предполагалось, что коэффициенты уравнения регулярны в круге K. С помощью аналитического продолжения можно доказать аналог теоремы 1 в случае, когда коэффициенты уравнения (1) регулярны в односвязной области.

Основной теоремой для уравнений вида (1) с регулярными коэффициентами является следующая

Теорема 2 (теорема существования и единственности). *Пусть коэффициенты $p(z)$, $q(z)$ регулярны в односвязной области D, точка $z_0 \in D$. Тогда*

1) *существует регулярное в области D решение $w(z)$ задачи Коши* (1)—(2),

2) *это решение единственно, т. е. если $w_1(z)$, $w_2(z)$ — регулярные в области D решения задачи Коши* (1)—(2), *то $w_1(z) \equiv w_2(z)$ в области D.*

Доказательство. Докажем сначала единственность регулярного в области D решения $w(z)$ задачи Коши (1)—(2). По условию

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = w_1.$$

Из уравнения (1) находим значение $w''(z_0) = -p(z_0)w_1 - q(z_0)w_0$. Дифференцируя уравнение (1), получаем

$$w''' = -(p(z)w')' - (q(z)w)',$$

откуда находим $w'''(z_0)$. Дифференцируя полученное уравнение далее, находим $w^{(4)}(z_0)$, $w^{(5)}(z_0)$ и т. д. Следовательно, по данным Коши однозначно определяются все производные $w^{(n)}(z_0)$, **что и доказывает единственность.**

Докажем первое утверждение теоремы. В силу теоремы 1 существует решение $w_0(z)$ задачи Коши (1)—(2), регулярное в круге K: $|z - z_0| < R$, где R — расстояние от точки z_0 до границы области D. Тем самым в точке z_0 задан элемент $w_0(z)$. Покажем, что этот элемент допускает аналитическое продолжение по любой кривой γ, лежащей в D, с начальной точкой z_0. Пусть ρ — расстояние между кривой γ и границей области D, тогда $\rho > 0$. Покроем кривую γ конечной цепочкой кругов K_0, K_1, ..., K_n радиуса ρ. Центры кругов K_j лежат в последовательных точках z_0, ..., z_n кривой γ (z_n — конец кривой γ), и центр z_j круга K_j лежит внутри круга K_{j-1} при $j = 1, 2, \ldots, n$.

В точке z_1 зададим такие данные Коши, которые совпадают со значениями решения $w_0(z)$ и его производной, т. е.

$$w(z_1) = \widetilde{w}_0, \quad w'(z_1) = \widetilde{w}_1,$$

где $\widetilde{w}_0 = w_0(z_1)$, $\widetilde{w}_1 = w_0'(z_1)$. По теореме 1 существует регулярное в круге K_1 решение этой задачи $w_1(z)$; по доказанному выше

$$w_1(z) \equiv w_0(z), \quad z \in K_0 \cap K_1.$$

Аналогично, существует регулярное в круге K_2 решение $w_2(z)$ задачи Коши

$$w(z_2) = w_1(z_2), \quad w'(z_2) = w_1'(z_2),$$

и это решение совпадает с $w_1(z)$ при $z \in K_1 \cap K_2$. Продолжая этот процесс, получаем, что элемент $w_0(z)$ аналитически продолжен

вдоль цепочки кругов $K_0, \ldots, K_n$; при этом все элементы $w_0(z), \ldots$ $\ldots w_n(z)$ являются решениями уравнения (1).

Таким образом, элемент $w_0(z)$ порождает аналитическую в области D функцию $w(z)$, все элементы которой удовлетворяют уравнению (1). Так как D — односвязная область, то по теореме о монодромии функция $w(z)$ регулярна в области D. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть коэффициенты $p(z)$, $q(z)$ уравнения* (1) *регулярны в области D. Тогда всякое решение уравнения* (1) *является аналитической в D функцией.*

Если D — неодносвязная область, то решение уравнения (1) может быть многозначной аналитической функцией.

Пример 4. Рассмотрим уравнение Эйлера:

$$w'' + \frac{a}{z} w' + \frac{b}{z^2} w = 0, \tag{7}$$

где a, b — постоянные. Коэффициенты уравнения Эйлера регулярны в комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$.

Будем искать частное решение уравнения (7) в виде $w = z^\lambda$. Подставляя в уравнение и деля его на $z^{\lambda-2}$, получаем уравнение, из которого определяется λ:

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0. \tag{8}$$

Если корни λ_1, λ_2 этого уравнения различны, то функции $w_1(z) = z^{\lambda_1}$, $w_2(z) = z^{\lambda_2}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Эйлера. Если же корни совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (т. е. если $(a-1)^2 - 4b = 0$), то уравнение (7) имеет решение $w_1(z) = z^\lambda$ и, кроме того, решение $w_2(z) = z^\lambda \ln z$; эта пара решений образует фундаментальную систему решений (ф. с. р.). □

Рассмотрим уравнение (1) в окрестности бесконечно удаленной точки. Делая замену переменной $z = 1/\zeta$ и полагая $\varphi(\zeta) = w(1/\zeta)$, получаем уравнение

$$\varphi''_{\zeta\zeta} + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) \varphi'_\zeta + \frac{1}{\zeta^4} q\left(\frac{1}{\zeta}\right) \varphi = 0. \tag{9}$$

Всякое решение уравнения (9) регулярно в точке $\zeta = 0$, если функции $2\zeta^{-1} - \zeta^{-2} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta^{-4} q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ регулярны в точке $\zeta = 0$. Следовательно, всякое решение уравнения (1) регулярно в точке $z = \infty$, если функции $2z - z^2 p(z)$, $z^4 q(z)$ регулярны в точке $z = \infty$.

2. Особые точки уравнения. Особые точки коэффициентов уравнения (1) называются *особыми точками* этого уравнения. Особые точки уравнения являются, как правило, особыми точками для всех решений этого уравнения. Например, точка $z = 0$

является особой точкой уравнения Эйлера (7). Если корни λ_1, λ_2 уравнения (8) различны, то всякое решение уравнения Эйлера имеет вид $w(z) = C_1 z^{\lambda_1} + C_2 z^{\lambda_2}$, где C_1, C_2 — постоянные. Если числа λ_1, λ_2 действительные и нецелые, или если $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_2 \neq 0$, то точка $z = 0$ является особой точкой для любого решения уравнения Эйлера (исключение составляет только тривиальное решение $w(z) \equiv 0$).

Исследуем поведение решений уравнения (1) в окрестности точки z_0, которая является полюсом хотя бы для одного из коэффициентов уравнения. Возьмем кольцо K: $0 < |z - z_0| < r$, в котором функции $p(z)$, $q(z)$ регулярны, и точку $\tilde{z} \in K$. Рассмотрим решения $w_1(z)$, $w_2(z)$ с данными Коши

$$w_1(\tilde{z}) = a_0, \quad w_1'(\tilde{z}) = a_1; \quad w_2(\tilde{z}) = b_0, \quad w_2'(\tilde{z}) = b_1, \tag{10}$$

и выберем числа a_j, b_j так, чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть U — круг с центром в точке $\tilde{z}$, лежащий в кольце K. По теореме 1 в этом круге существуют решения $w_1^0(z)$, $w_2^0(z)$ задач Коши (10), регулярные в круге U, и эти решения линейно независимы, так как $\Delta \neq 0$. Пусть $w_1(z)$, $w_2(z)$ — аналитические функции, которые порождены элементами $w_1^0(z)$, $w_2^0(z)$, заданными в точке $\tilde{z}$. По теореме 3 функции $w_1(z)$, $w_2(z)$ аналитичны в кольце K и являются решениями уравнения (1), т. е. любой их элемент удовлетворяет уравнению (1).

Возьмем замкнутую кривую γ с начальной точкой $\tilde{z}$, лежащую в кольце K, и продолжим аналитически элементы $w_1^0(z)$, $w_2^0(z)$ вдоль γ. Тогда

$$w_1^0(z) \to w_1^1(z), \quad w_2^0(z) \to w_2^1(z),$$

где $w_1^1(z)$, $w_2^1(z)$ — регулярные в круге U функции. Кроме того, эти функции являются решениями уравнения (1) при $z \in U$. Так как решения $w_1^0(z)$, $w_2^0(z)$ по построению линейно независимы при $z \in U$, то существуют постоянные c_{jk} такие, что

$$w_1^1(z) = c_{11} w_1^0(z) + c_{12} w_2^0(z), \quad w_2^1(z) = c_{21} w_1^0(z) + c_{22} w_2^0(z). \tag{11}$$

Рассмотрим матрицу C:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

и пусть λ_1, λ_2 — ее собственные значения, т. е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Теорема 4.

1. *Если корни* λ_1, λ_2 *уравнения* (12) *различны, то уравнение* (1) *имеет два решения вида*

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1}\varphi_1(z), \quad w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2}\varphi_2(z), \tag{13}$$

где $\lambda_j = e^{2\pi i\rho_j}$ $(j = 1, 2)$ *и функции* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ *регулярны в кольце* K.

2. *Если корни уравнения* (12) *совпадают,* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *то уравнение* (1) *имеет два решения вида*

$$\begin{aligned} w_1(z) &= (z - z_0)^{\rho}\varphi_1(z), \\ w_2(z) &= (z - z_0)^{\rho}\varphi_2(z) + a(z - z_0)^{\rho}\varphi_1(z)\ln(z - z_0). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\lambda = e^{2\pi i\rho}$, a *— постоянная и функции* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ *регулярны в кольце* K.

Напомним, что K — кольцо вида $0 < |z - z_0| < r$ и что коэффициенты уравнения (1) регулярны в K.

Доказательство. Введя вектор-функции

$$w^j(z) = \begin{pmatrix} w_1^j(z) \\ w_2^j(z) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1,$$

запишем соотношение (11) в виде

$$w^1(z) = Cw^0(z). \tag{15}$$

Пусть T — невырожденная квадратная матрица второго порядка. Положим

$$\widetilde{w}^0(z) = Tw^0(z). \tag{16}$$

Тогда после обхода вдоль γ

$$\widetilde{w}^0(z) \to \widetilde{w}^1(z) = Tw^1(z),$$

и соотношение (15) примет вид

$$\widetilde{w}^1(z) = TCT^{-1}\widetilde{w}^0(z). \tag{17}$$

1. Пусть собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C различны. Тогда существует матрица T, приводящая матрицу C к диагональному виду:

$$TCT^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе матрицы T соотношение (17) принимает вид

$$\widetilde{w}_1^1(z) = \lambda_1\widetilde{w}_1^0(z), \quad \widetilde{w}_2^1(z) = \lambda_2\widetilde{w}_2^0(z). \tag{18}$$

Выберем ρ_1 так, чтобы $e^{2\pi i\rho_1} = \lambda_1$, и рассмотрим функцию

$$\varphi_1(z) = (z - z_0)^{-\rho_1}\widetilde{w}_1^0(z).$$

При обходе вдоль γ имеем

$$(z - z_0)^{-\rho_1} \to e^{-2\pi i\rho_1}(z - z_0)^{-\rho_1},$$

так что

$$\varphi_1(z) \to e^{-2\pi i\rho_1}(z - z_0)^{-\rho_1}\lambda_1\tilde{w}_1^0(z) =$$

$$= \lambda_1^{-1}(z - z_0)^{-\rho_1}\lambda_1(z - z_0)^{\rho_1}\varphi_1(z) = \varphi_1(z).$$

Следовательно, аналитическая функция $\varphi_1(z)$ однозначна, а стало быть, и регулярна в кольце K. Таким образом, уравнение (1) имеет решение

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1}\varphi_1(z)$$

и, аналогично, решение

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2}\varphi_2(z).$$

Тем самым утверждение 1 теоремы доказано.

2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда существует матрица T, приводящая матрицу C

а) либо к жордановой нормальной форме;

б) либо к диагональному виду.

В случае а) имеем

$$TCT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

так что вместо (18) получаем соотношение

$$\tilde{w}_1^1(z) = \lambda\tilde{w}_1^0(z), \quad \tilde{w}_2^1(z) = \lambda\tilde{w}_2^0(z) + \tilde{w}_1^0(z). \tag{19}$$

Для решения $w_1(z)$, порожденного элементом $w_1^0(z)$, снова получаем представление вида (13). Поделив второе из равенств (19) на первое, получаем

$$\frac{\tilde{w}_2^1(z)}{\tilde{w}_1^1(z)} = \frac{\tilde{w}_2^0(z)}{\tilde{w}_1^0(z)} + \frac{1}{\lambda},$$

так что функция $\psi(z) = \dfrac{\tilde{w}_2^0(z)}{\tilde{w}_1^0(z)}$ обладает следующим свойством:

$$\psi(z) \to \psi(z) + \frac{1}{\lambda}$$

при обходе вдоль γ. Следовательно (§ 21, замечание 2), функция

$$\psi(z) - \frac{1}{2\pi i\lambda}\ln(z - z_0) = \varphi_2(z)$$

регулярна в кольце K, и для решения $w_2(z)$, порожденного элементом $\tilde{w}_2^0(z)$, получаем представление (14).

В случае б) имеем $TCT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, так что соотношение (18) имеет вид

$$\widetilde{w}_1^1(z) = \lambda \widetilde{w}_1^0(z), \quad \widetilde{w}_2^1(z) = \lambda \widetilde{w}_2^0(z),$$

а решения $w_j(z)$ имеют вид $w_j(z) = (z - z_0)^{\rho} \varphi_j(z)$, $j = 1, 2$, где $\varphi_j(z)$ — регулярные в кольце K функции. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *регулярны или имеют полюс в точке* $z = \infty$. *Тогда уравнение* (1) *либо имеет два решения вида*

$$w_1(z) = z^{\rho_1} \varphi_1(z), \quad w_2(z) = z^{\rho_2} \varphi_2(z), \tag{20}$$

либо два решения вида

$$w_1(z) = z^{\rho} \varphi_1(z), \quad w_2(z) = z^{\rho} \varphi_2(z) + a z^{\rho} \varphi_1(z) \ln z, \tag{21}$$

где функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ *регулярны в проколотой окрестности точки* $z = \infty$.

Действительно, замена переменной $z = 1/\zeta$ приводит уравнение (1) к виду (9); коэффициенты последнего уравнения либо регулярны, либо имеют полюс в точке $\zeta = 0$.

3. Регулярные особые точки. Пусть z_0 — полюс или точка регулярности коэффициентов уравнения (1). Тогда имеются две возможности:

а) точка z_0 является полюсом или точкой регулярности для обеих функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, входящих в формулы (13), (14);

б) точка z_0 является существенно особой точкой хотя бы для одной из функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$.

В случае а) точка z_0 называется *регулярной особой точкой уравнения* (1), в случае б) — *иррегулярной особой точкой уравнения* (1). Эти определения распространяются и на точку $z = \infty$.

Регулярные особые точки являются наиболее простыми особыми точками и хорошо исследованы. Структура решений в окрестности иррегулярной особой точки весьма сложна, и мы не будем их рассматривать; по этому поводу см. [18].

Замечание 1. Пусть z_0 — регулярная особая точка, $w_1(z)$ — решение вида (13). Тогда $\varphi_1(z) = (z - z_0)^m \widetilde{\varphi}_1(z)$, где m — целое число, функция $\widetilde{\varphi}_1(z)$ регулярна и отлична от нуля в точке z_0. Заменяя ρ_1 на $\widetilde{\rho}_1 = \rho_1 + m$, получаем

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\widetilde{\rho}_1} \widetilde{\varphi}_1(z).$$

Отметим, что $\lambda_1 = e^{2\pi i \widetilde{\rho}_1}$.

Поэтому в случае регулярной особой точки можно считать, что функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ регулярны в точке z_0 и что $\varphi_1(z_0) \neq 0$, $\varphi_2(z_0) \neq 0$.

Приведенное выше определение регулярной особой точки носит косвенный характер, так как оно сформулировано в терминах свойств решений, а не свойств коэффициентов. Покажем, как по свойствам коэффициентов можно установить, является ли особая точка уравнения регулярной или иррегулярной. Будем для простоты, считать, что особой точкой является точка $z = 0$.

Лемма. *Для того чтобы точка $z = 0$ была регулярной особой точкой или точкой регулярности уравнения* (1), *необходимо, чтобы в точке $z = 0$:*

1) *функция $p(z)$ имела полюс первого порядка или была регулярна,*

2) *функция $q(z)$ имела полюс не выше второго порядка или была регулярна.*

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда корни уравнения (12) различны. Имеем

$$\frac{w''}{w} + p(z)\frac{w'}{w} + q(z) = 0. \tag{22}$$

Далее, $w_1(z) = z^{\rho_1}\varphi_1(z)$, $\lambda_1 = e^{2\pi i\rho_1}$, $\varphi_1(0) \neq 0$ (см. замечание 1). Подставляя $w_1(z)$ в соотношение (22), получаем

$$\frac{\rho_1(\rho_1 - 1)}{z^2} + \frac{2\rho_1}{z}\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} + \frac{\varphi_1''(z)}{\varphi_1(z)} + \\ + \frac{\rho_1}{z}p(z) + \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)}p(z) + q(z) = 0. \tag{23}$$

Аналогично, решение $w_2(z)$ можно представить в виде (13), где функция $\varphi_2(z)$ регулярна и отлична от нуля в точке $z = 0$, так что

$$\frac{\rho_2(\rho_2 - 1)}{z^2} + \frac{2\rho_2}{z}\frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2(z)} + \frac{\varphi_2''(z)}{\varphi_2(z)} + \\ + \frac{\rho_2}{z}p(z) + \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2(z)}p(z) + q(z) = 0. \tag{24}$$

Функции $\frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)}$, $\frac{\varphi_j''(z)}{\varphi_j(z)}$, $j = 1, 2$, регулярны в точке $z = 0$, так как $\varphi_{1,2}(0) \neq 0$. Вычитая равенство (24) из равенства (23), получаем

$$[\rho_1 - \rho_2 + za(z)]\,p(z) = z^{-1}b(z), \tag{25}$$

где функции $a(z)$, $b(z)$ регулярны в точке $z = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\rho_1 \neq \rho_2$ и из (25) следует, что функция $p(z)$ либо регулярна в точке $z = 0$, либо имеет полюс первого порядка в этой точке. Но тогда из соотношения (23) следует, что в точке $z = 0$ функ-

ция $q(z)$ либо регулярна, либо имеет полюс не выше второго порядка.

Таким образом, если $z=0$ является регулярной особой точкой уравнения (1), то это уравнение имеет вид

$$w''+\frac{a(z)}{z}w'+\frac{b(z)}{z^2}w=0, \tag{26}$$

где функции $a(z)$, $b(z)$ регулярны в точке $z=0$.

Л. Фукс доказал [18], что условие (26) является достаточным, т. е. справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы особая точка $z=0$ была регулярной особой точкой уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело вид* (26), *где функции $a(z)$, $b(z)$ регулярны в точке $z=0$.*

Следствие 2. *Для того чтобы особая точка $z=\infty$ была регулярной особой точкой уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело вид* (26), *где функции $a(z)$, $b(z)$ регулярны в точке $z=\infty$.*

Пример 5. Уравнение Эйлера (7) имеет две особые точки 0 и ∞. Обе они являются регулярными особыми точками. □

Пример 6. Уравнение Бесселя

$$z^2w''+zw'+(z^2-\nu^2)w=0 \tag{27}$$

(ν — постоянная) имеет две особые точки: 0 и ∞. Точка $z=0$ — регулярная, точка $z=\infty$ — иррегулярная. □

Пример 7. Гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0 \tag{28}$$

(α, β, γ — постоянные) имеет три особые точки: 0, 1, ∞. Все они являются регулярными особыми точками. □

4. Построение решений в окрестности регулярной особой точки. Рассмотрим уравнение (26), для которого $z=0$ является регулярной особой точкой. В этом случае можно построить решения в явном виде. Будем искать решение в виде ряда

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n, \tag{29}$$

где $w_0\neq 0$, ρ, w_n — неизвестные числа.

В силу теоремы 5 такое решение существует, и ряд (29) сходится в проколотой окрестности точки $z=0$. Имеем

$$w'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)w_nz^{n+\rho-1},$$

$$w''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)w_nz^{n+\rho-2}.$$

Разложим коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ в ряды Тейлора:

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n.$$

Подставляя в уравнение (29), получаем

$$z^\rho w_0[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]+z^{\rho+1}\{w_1[\rho(\rho+1)+a_0(\rho+1)+b_0]+$$
$$+w_0(\rho a_1+b_1)\}+\ldots+z^{\rho+n}\{w_n[(\rho+n)(\rho+n-1)+$$
$$+a_0(\rho+n)+b_0]+\ldots+w_0(\rho a_n+b_n)\}+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях $z^{\rho+n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, получаем рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
w_0f_0(\rho)&=0,\\
w_1f_0(\rho+1)+w_0f_1(\rho)&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_nf_0(\rho+n)+w_{n-1}f_1(\rho+n-1)+&\\
+w_{n-2}f_2(\rho+n-2)+\ldots+w_0f_n(\rho)&=0,
\end{aligned}\tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
f_0(\rho)&=\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0,\\
f_k(\rho)&=\rho a_k+b_k,\quad k\geqslant 1.
\end{aligned}\tag{31}$$

Так как $w_0\neq 0$, то $f_0(\rho)=0$, т. е.

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0.\tag{32}$$

Это уравнение называется определяющим уравнением. Пусть ρ_1, ρ_2 — корни определяющего уравнения. Имеются две возможности.

1. Разность $\rho_1-\rho_2$ не является целым числом. Тогда $f_0(\rho_1+n)\neq 0$, $f_0(\rho_2+n)\neq 0$ ни при каком целом $n\geqslant 1$. Полагая $\rho=\rho_1$ в уравнениях (30), можно последовательно найти w_1, w_2, ... (аналогично при $\rho=\rho_2$). В этом случае уравнение (26) имеет два линейно независимых решения $w_1(z)$, $w_2(z)$ вида (13).

2. Разность $\rho_1-\rho_2$ есть целое число. Пусть $\rho_1-\rho_2=m\geqslant 0$. Тогда $f_0(\rho_1)=f_0(\rho_2+m)=0$, но $f_0(\rho_1+n)\neq 0$ ни при каком целом $n\geqslant 1$. В этом случае существует одно решение $w_1(z)$ вида (13). Второе линейно независимое решение найдем с помощью формулы Лиувилля [22]:

$$\begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z)\\ w_1'(z) & w_2'(z)\end{vmatrix}=Ce^{-\int_{z_0}^{z}p(z)dz},\quad C=\text{const}.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\left(\frac{w_2(z)}{w_1(z)}\right)' = \frac{C}{w_1^2(z)} e^{-\int_{z_0}^{z} p(z)dz},$$

откуда находим

$$w_2(z) = w_1(z) \int_{z_1}^{z} \frac{Ce^{-\int_{z_0}^{z} p(\zeta)d\zeta}}{w_1^2(z)} dz. \tag{33}$$

Так как $p(z) = \frac{a(z)}{z} = \frac{a_0}{z} + a_1 + \ldots$, то

$$\int_{z_0}^{z} p(\zeta)\, d\zeta = a_0 \ln z + \psi(z),$$

где функция $\psi(z)$ регулярна в точке $z = 0$. Следовательно, подынтегральное выражение в (33) имеет вид $z^{-a_0-2\rho_1}\chi(z)$, где функция $\chi(z)$ регулярна и отлична от нуля в точке $z = 0$. Из определяющего уравнения (32) следует, что $\rho_1 + \rho_2 = -a_0 + 1$, и так как $\rho_1 = \rho_2 + m$, то $-a_0 - 2\rho_1 = -(m+1)$. Имеем $\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n z^n$, откуда

$$z^{-a-2\rho_1}\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n z^{-m+n-1}.$$

Интегрируя (33), получаем

$$w_2(z) = w_1(z)\,(\chi_m \ln z + z^{-m}h(z)),$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке $z = 0$. Окончательно находим, что второе линейно независимое решение уравнения (26) имеет вид

$$w_2(z) = z^{\rho_1 - m}\varphi_2(z) + w_1(z)\,\chi_m \ln z, \tag{34}$$

где функция $\varphi_2(z)$ регулярна в точке $z = 0$.

Выясним структуру решений некоторых дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки.

Пример 8. Точка $z = 0$ — регулярная особая точка уравнения Бесселя (27). Определяющее уравнение (32) имеет вид

$$\rho(\rho - 1) + \rho - \nu^2 = 0,$$

и его корни равны $\rho_{1,2} = \pm\nu$.

1. ν не является целым числом. Тогда уравнение Бесселя имеет два линейно независимых решения вида

$$w_1(z) = z^{\nu}\varphi_1(z), \quad w_2(z) = z^{-\nu}\varphi_2(z),$$

где функции $\varphi_{1,2}(z)$ регулярны и отличны от нуля в точке $z = 0$.

2. ν — целое число; пусть $\nu \geqslant 0$ для определенности. Тогда уравнение Бесселя имеет решение вида $w_1(z) = z^{\nu}\varphi_1(z)$, где функция $\varphi_1(z)$ регулярна и отлична от нуля в точке $z = 0$. Второе линейно независимое решение находим по формуле (33)

$$w_2(z) = w_1(z)\int_{z_1}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta w_1^2(\zeta)}.$$

Пусть $\nu \geqslant 0$ или же ν не является действительным числом. Найдем решение уравнения Бесселя. Уравнения (30) принимают вид (при $\rho = \nu$)

$$w_1 f_0(\nu+1) = 0, \quad w_2 f_0(\nu+2) - w_0 = 0, \ldots$$
$$w_n f_0(\nu+n) - w_{n-2} = 0,$$

где $f_0(\rho) = \rho^2 - \nu^2$. Отсюда находим, что $w_1 = w_3 = \ldots = w_{2n+1} = \ldots = \ldots = 0$ и что $w_{2n} = \dfrac{w_0(-1)^n}{4^n n!(\nu+1)\ldots(\nu+n)}$. Следовательно, функция

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+\nu}}{4^n n!(\nu+1)\ldots(\nu+n)}$$

является решением уравнения Бесселя. Заметим, что

$$(\nu+1)\ldots(\nu+n) = \Gamma(\nu+n+1)/\Gamma(\nu).$$

Решение

$$J_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)},$$

которое отличается от решения $w_1(z)$ только числовым множителем, называется *функцией Бесселя*. Если ν не является целым числом, то решения $J_{\nu}(z)$, $J_{-\nu}(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. □

Пример 9. Для уравнения Лежандра

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$$

(λ — постоянная) точки $z = \pm 1$ являются регулярными особыми точками. Исследуем структуру решений в окрестности точки $z = 1$. Определяющее уравнение имеет вид $\rho(\rho-1)+\rho = 0$, откуда $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Следовательно, уравнение Лежандра имеет решение $w_1(z)$, регулярное и отличное от нуля точке $z = 1$.

Второе линейно независимое решение найдем по формуле (33). В данном случае $p(z) = -\dfrac{2z}{1-z^2} = \dfrac{d}{dz}\ln(z^2-1)$, так что

$$w_2(z) = w_1(z)\int_{z_1}^{z}\frac{d\zeta}{(\zeta^2-1)\,w_1^2(\zeta)}.$$

Подынтегральное выражение в окрестности точки $\zeta = 1$ разлагается в ряд

$$\frac{1}{w_0(\zeta-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-1)^n.$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$w_2(z) = w_1(z)\left(\frac{1}{w_0}\ln(z-1) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-1)^n\right),$$

откуда $w_2(z) = w_1(z)\ln(z-1) + \varphi(z)$, функция $\varphi(z)$ регулярна в точке $z = 1$, $\varphi(1) = 0$. Таким образом, решение $w_2(z)$ имеет логарифмическую особенность в точке $z = 1$. □

Глава V

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 28. Теоремы о вычетах

1. Вычет в конечной точке. Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a $(a \neq \infty)$, т. е. в кольце K: $0 < |z-a| < \rho_0$. Тогда точка a является для функции либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности, а функция $f(z)$ представляется в кольце K сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Определение 1. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\operatorname{res}\limits_{z=a} f(z)$) называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a, т. е.

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{1}$$

По формуле (7) § 17

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где окружность γ_ρ: $|z-a| = \rho$ $(0 < \rho < \rho_0)$ ориентирована положительно. Отсюда получаем

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z). \tag{2}$$

Таким образом, если $z = a$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе достаточно малой окрестности точки a равен вычету в этой точке, умноженному на $2\pi i$. Очевидно, $\operatorname{res}\limits_{z=a} f(z) = 0$, если a — точка регулярности функции $f(z)$.

Во всех примерах этой главы контур интегрирования ориентирован положительно (если не оговорено противное).

Пример 1. Найдем вычет функции $e^{1/z}$ в точке $z=0$. Так как $e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots$, то $c_{-1}=1$ и $\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z}=1$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{|z|=1} e^{1/z}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z} = 2\pi i. \quad \square$$

Пример 2. Пусть $f(z)=\frac{\sin z}{z^6}$. Тогда $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{5!}$, так как $f(z)=\frac{1}{z^6}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)$ и $c_{-1}=\frac{1}{5!}$. Отсюда находим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^6}\,dz = \frac{2\pi i}{5!}. \quad \square$$

Пример 3. Если $f(z)=z\cos\frac{1}{z+1}$, то $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=-\frac{1}{2}$, так как $f(z)=[(z+1)-1]\left[1-\frac{1}{2(z+1)^2}+\ldots\right]$ и $c_{-1}=-\frac{1}{2}$. $\square$

2. Вычисление вычета в полюсе $z=a$ ($a\neq\infty$).

1. Случай простого полюса. Если точка a — простой полюс функции $f(z)$, то ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=c_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

откуда находим $c_{-1}=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$, и поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{3}$$

В частности, если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — регулярные в точке a функции, причем $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, то точка a является простым полюсом функции $f(z)$, и по формуле (3) находим $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim\limits_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim\limits_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=$ $=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{4}$$

2. Случай кратного полюса. Если точка a — полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots \tag{5}$$

Умножая обе части (5) на $(z-a)^m$, получаем

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \ldots \quad (6)$$

Дифференцируя равенство (6) $m-1$ раз и переходя к пределу при $z \to a$, находим $(m-1)!\, c_{-1} = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$, откуда получаем формулу для вычисления вычета в полюсе m-го порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]. \quad (7)$$

В частности, если $f(z) = h(z)/(z-a)^m$, где функция $h(z)$ регулярна в точке a, $h(a) \neq 0$, то из (7) вытекает следующая формула:

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a). \quad (8)$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, имеющую полюс первого порядка в точке $z=1$ и полюс второго порядка в точке $z=2$. По формуле (3) имеем

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]_{z=1} = 1,$$

по формуле (8) получаем $\operatorname*{res}\limits_{z=2} f(z) = \left(\dfrac{z}{z-1}\right)'_{z=2} = -1$. □

Пример 5. Для функции $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ точки $z = k\pi$ (k — целое) являются простыми полюсами, и по формуле (4) находим

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=k\pi} = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что главная часть ряда Лорана для функции $\operatorname{ctg} z$ в окрестности точки $k\pi$ равна $1/(z-k\pi)$. □

3. Вычет в бесконечно удаленной точке. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $\rho_0 < |z| < \infty$, т. е. в проколотой окрестности точки $z=\infty$. Тогда точка $z=\infty$ является для функции $f(z)$ либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности, а функция $f(z)$ представляется в области $\rho_0 < |z| < \infty$ сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \quad (9)$$

Определение 2. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ (обозначается $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$) называется число $-c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $1/z$ ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности

бесконечно удаленной точки, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{10}$$

По формуле (7) § 17 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho} f(z)\,dz$, где окружность $|z| = \rho$ $(\rho > \rho_0)$ ориентирована против часовой стрелки. Отсюда в силу (10) находим

$$\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z), \tag{11}$$

где γ_ρ — окружность $|z| = \rho$, ориентированная по часовой стрелке.

Замечание 1. Формулы (2) и (11) можно объединить в одну. В самом деле, если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности U конечной или бесконечно удаленной точки a, то интеграл от $f(z)$ по границе γ_ρ этой окрестности равен вычету в точке a, умноженному на $2\pi i$ (при обходе γ_ρ окрестность U в формулах (2) и (11) остается слева).

Пусть точка $z = \infty$ является нулем порядка k функции $f(z)$. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки функция $f(z)$ представляется рядом Лорана $f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-(k+1)}}{z^{k+1}} + \ldots$, где $c_{-k} \neq 0$, и при $z \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \qquad (A = c_{-k} \neq 0).$$

Если $k=1$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1 = -A$, а если $k \geqslant 2$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Таким образом,

$$f(z) \sim \frac{A}{z}\ (z \to \infty) \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A, \tag{12}$$

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k}\ (z \to \infty,\ k \geqslant 2) \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{13}$$

Пример 6. Для функции $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots$ коэффициент $c_{-1} = 1$ и, следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -1$. Заметим, что эта функция регулярна в точке $z = \infty$, тем не менее вычет в этой точке не равен нулю. □

Пример 7. Для функции $f(z) = \frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$ точка $z = \infty$ является нулем первого порядка: $f(z) \sim 1/z$ $(z \to \infty)$. По формуле (12) находим, что $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$. □

Пример 8. Для функции $f(z)=\frac{z}{z^3+1}\sin\frac{1}{z}$ точка $z=\infty$ является нулем третьего порядка: $f(z)\sim 1/z^3$ $(z\to\infty)$. По формуле (13) получаем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$. □

Пример 9. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь аналитической функции $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$ в плоскости с разрезом $[-1, 1]$, принимающая значение 1 в точке $z=0$ верхнего берега разреза (пример 17 § 24). Тогда ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид $f(z)=e^{-i\alpha\pi}\left(1-\frac{2\alpha}{z}+\ldots\right)$, откуда получаем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=2\alpha e^{-i\alpha\pi}$. □

4. Основная теорема теории вычетов.

Теорема 1 (основная теорема теории вычетов). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{14}$$

где кривая γ ориентирована положительно.

Доказательство. Пусть γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_k, ориентированная против часовой стрелки. В силу следствия 2 § 9 имеем

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz,$$

откуда, используя (2), получаем формулу (14).

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{15}$$

Здесь z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ является либо особой точкой, либо точкой регулярности функции $f(z)$.

Доказательство. Пусть γ — ориентированная в положительном направлении окружность $|z|=R$, где R выбрано так,

что все точки z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ лежат внутри γ. По теореме 1

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{16}$$

С другой стороны, из формулы (11) следует, что

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) вытекает формула (15).

Обобщением теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы Γ этой области. Пусть Γ состоит из конечного числа ограниченных кусочно гладких кривых. Тогда*

а) *если область D не содержит точку $z=\infty$, то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z); \tag{18}$$

б) *если точка $z=\infty$ принадлежит области D, то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right). \tag{19}$$

Здесь $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все конечные особые точки функции $f(z)$, лежащие в области D.

Доказательство. а) Пусть D — ограниченная область. Рассмотрим многосвязную область $\widetilde{D}$, полученную из области D выбрасыванием кругов K_j достаточно малого радиуса с центрами в точках z_j $(j=1, 2, \ldots, n)$. В силу теоремы 4 § 9 интеграл от $f(z)$ по границе $\widetilde{\Gamma}$ области $\widetilde{D}$ равен нулю, т. е.

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0, \tag{20}$$

где граница γ_j круга K_j ориентирована по часовой стрелке. Так как

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$$

(формула (2)), то из (20) вытекает формула (18).

б) Пусть K — круг $|z|<R$, содержащий внутри себя границу области D и все конечные особые точки функции $f(z)$ (рис. 68). Рассмотрим область $\widetilde{G}$, полученную из области $G = D \cap K$ выбрасыванием кругов K_j, указанных выше. Граница $\widetilde{\Gamma}$

области $\widetilde{G}$ состоит из границы Γ области D, окружностей γ_j и окружности γ_R: $|z| = R$. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0, \qquad (21)$$

где кривая γ_R ориентирована положительно. Так как

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

то из равенства (21) следует формула (19). Теорема доказана.

Теорема о вычетах является одной из самых важных теорем теории функций комплексного переменного. С помощью этой теоремы можно эффективно вычислять многие определенные интегралы.

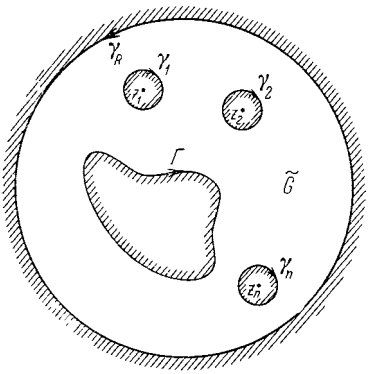


Рис. 68

5. Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Рассмотрим несколько примеров на вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов. Во всех этих примерах обход контура интегрирования γ совершается в положительном направлении (при обходе кривой γ ее внутренность остается слева).

Пример 10. Пусть $f(z) = (\cos z)/z^3$. Тогда по формуле (14)

$$\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Так как в круге $|z| < 2$ функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z = 0$ (полюс) и $f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!}z + \ldots$, то $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -1/2$. Следовательно, $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz = -\pi i$. □

Пример 11. Пусть $f(z) = 1/(e^z + 1)$. Тогда $I = \int\limits_{|z-2i|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z)$, так как функция $f(z)$ имеет внутри круга $|z - 2i| < 2$ одну особую точку, а именно, полюс первого порядка $z = \pi i$. По формуле (4) находим

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{1}{(e^z + 1)'_{z=\pi i}} = -1$$

и, следовательно, $I = -2\pi i$. □

Пример 12. Если $f(z)=(2z-1)\cos\frac{z}{z-1}$, то $I=\int\limits_{|z|=2} f(z)dz=$ $=2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} f(z)$, так как функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<2$, кроме точки $z=1$, которая является существенно особой. Имеем

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}=$$

$$=\cos 1\left(1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\ldots\right)-\sin 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!\,(z-1)^3}+\ldots\right),$$

$$2z-1=2(z-1)+1,$$

откуда находим коэффициент c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ ряда Лорана для функции $f(z)$:

$$c_{-1}=-(\cos 1+\sin 1).$$

Следовательно, $I=-2\pi i(\cos 1+\sin 1)$. □

Пример 13. Вычислим интеграл $I=\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz$.

Способ 1. Функция $f(z)=\frac{1}{z-2}e^{1/(z-1)}$ имеет в круге $|z|<4$ две особые точки: $z=1$ и $z=2$. Следовательно,

$$I=2\pi i\,(\operatorname*{res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=2} f(z)).$$

Так как

$$e^{1/(z-1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(z-1)^n},\quad \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,$$

то $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1-e$. Далее,

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z)=\left(e^{1/(z-1)}\right)_{z=2}=e.$$

Таким образом, $I=2\pi i$. □

Способ 2. $I=-2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Точка $z=\infty$ является для $f(z)$ нулем первого порядка:

$$\frac{1}{z-2}\sim\frac{1}{z},\quad e^{1/(z-1)}\sim 1,\quad f(z)\sim\frac{1}{z}\qquad (z\to\infty).$$

По формуле (12) получаем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-1$ и, следовательно, $I=$ $=2\pi i$. □

Пример 14. Пусть $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$ — многочлен степени $n\geqslant 2$ и пусть γ — окружность, внутри кото-

рой лежат все нули этого многочлена. Покажем, что функция

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{z\zeta}}{P(\zeta)}\,d\zeta \tag{22}$$

удовлетворяет уравнению

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)w(z)\equiv w^{(n)}(z)+a_1w^{(n-1)}(z)+\ldots+a_{n-1}w'(z)+a_nw(z)=0 \tag{23}$$

и следующим начальным условиям:

$$w(0)=0,\ w'(0)=0,\ \ldots,\ w^{(n-2)}(0)=0,\quad w^{(n-1)}(0)=1. \tag{24}$$

Из (22) находим $w^{(k)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta^k e^{z\zeta}}{P(\zeta)}\,d\zeta$ и, следовательно,

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}e^{z\zeta}d\zeta=0.$$

Формула (23) доказана.

Проверим выполнение условий (24). Имеем

$$w^{(k)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta^k}{P(\zeta)}\,d\zeta=-\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\frac{\zeta^k}{P(\zeta)}. \tag{25}$$

Если $k<n$, то функция $\zeta^k/P(\zeta)$ имеет в точке $\zeta=\infty$ нуль порядка $n-k$ и, следовательно, при $k\leqslant n-2$ получаем $\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\zeta^k/P(\zeta)=0$. Таким образом, $w^{(k)}(0)=0$ при $k=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ n-2$. Пусть $k=n-1$; тогда $\zeta^{n-1}/P(\zeta)\sim 1/\zeta$ $(\zeta\to\infty)$, так что $\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}(\zeta^{n-1}/P(\zeta))=-1$ и из (25) следует, что $w^{(n-1)}(0)=1$. □

6. Интегралы от многозначных функций. Рассмотрим несколько примеров на вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных аналитических функций. В примерах 15—18 нужно вычислить интегралы от всех ветвей многозначных аналитических функций, стоящих под знаком интеграла.

Пример 15. Вычислим интеграл $\int\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz$. Функция $\sqrt{z}$ распадается в круге K: $|z-1|<1/2$ на две регулярные ветви $g_1(z)$ и $g_2(z)\equiv -g_1(z)$ и, следовательно, подынтегральная функция распадается на две регулярные ветви $f_1(z)=g_1(z)/(z-1)$ и $f_2(z)=g_2(z)/(z-1)$. Пусть $g_1(z)$ — та ветвь корня, для которой $g_1(1)=1$; тогда $g_2(1)=-1$. Каждая из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярна в круге K, кроме точки $z=1$, которая является их

простым полюсом. По теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z-1|=1/2} f_1(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} f_1(z) = 2\pi i g_1(1) = 2\pi i.$$

Аналогично, $\int\limits_{|z-1|=1/2} f_2(z)\,dz = -2\pi i$. □

Пример 16. Вычислим интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$. Подынтегральная функция распадается в области $|z|>2$ на две регулярные ветви: $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Пусть $f_1(z)$ — та ветвь, которая удовлетворяет условию $z^2 f_1(z) \to 1$ $(z \to \infty)$. Тогда для другой ветви $f_2(z)$ выполняется условие $z^2 f_2(z) \to -1$ $(z \to \infty)$. Так как для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ точка $z=\infty$ является нулем второго порядка, то

$$\int\limits_{|z|=2} f_1(z)\,dz = \int\limits_{|z|=2} f_2(z)\,dz = 0.$$ □

Пример 17. Вычислим интеграл $\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{z^2+1}{\ln z - \pi i}\,dz$. Функция $\ln z$ распадается в круге K_0: $|z+1|<1/2$ на бесконечное число регулярных ветвей $g_k(z)$, определяемых условием $g_k(-1) = (2k+1)\pi i$. Обозначим $f_k(z) = \frac{z^2+1}{g_k(z)-\pi i}$. Так как $g_k(z) \neq \pi i$ в круге K_0, если $k \neq 0$, то при $k \neq 0$ каждая из функций $f_k(z)$ регулярна и, следовательно,

$$\int\limits_{|z+1|=1/2} f_k(z)\,dz = 0, \quad k \neq 0.$$

Для ветви $f_0(z)$ точка $z=-1$ является полюсом первого порядка. Поэтому $\operatorname*{res}_{z=-1} f_0(z) = \left[\frac{z^2+1}{(\ln z - \pi i)'}\right]_{z=-1} = \frac{2}{(1/z)_{z=-1}} = -2$ и

$$\int\limits_{|z+1|=1/2} f_0(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f_0(z) = -4\pi i.$$ □

Пример 18. Пусть $f(z)$ — та ветвь аналитической функции $\sqrt[3]{z/(1-z)}$ в плоскости с разрезом $[0, 1]$, которая принимает положительные значения на верхнем берегу этого разреза. Вычислим интеграл $\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz$. Так как функция $f(z)$ регулярна в области $|z|>2$, то $\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Воспользуемся полученным в § 24 (пример 18) разложением $f(z)$ в ряд Лорана

в окрестности точки $z=\infty$:

$$f(z)=e^{i\pi/3}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-1/3}^{n}(-1)^{n}z^{-n}=e^{i\pi/3}\left(1+\frac{1}{3z}+\ldots\right).$$

Отсюда находим $\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=-\frac{1}{3}e^{i\pi/3}$. Следовательно,

$$\int_{|z|=2}f(z)\,dz=-2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=\frac{2\pi i}{3}e^{i\pi/3}. \quad \square$$

§ 29. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Теоремы о вычетах позволяют сводить вычисление интегралов от комплексных функций по замкнутому контуру к нахождению вычетов подынтегральной функции внутри контура. Тем же способом могут быть вычислены и многие определенные интегралы от функций действительного переменного. Во многих случаях удается достаточно просто находить с помощью вычетов определенные интегралы в случаях, когда применение методов математического анализа оказывается не эффективным. В частности, если все особые точки подынтегральной функции, лежащие внутри контура интегрирования, являются полюсами, то вычисление вычетов в этих точках сводится к вычислению производных. Следовательно, в этом случае вычисление интеграла сводится к нахождению производных.

1. Интегралы вида $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi$. К интегралам по замкнутому контуру сводятся интегралы вида

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi, \tag{1}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция от u, v. Пусть $z=e^{i\varphi}$. Тогда

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad d\varphi=-i\frac{dz}{z}.$$

При изменении φ от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Интеграл (1) сводится к интегралу по замкнутому контуру $I=\int_{|z|=1}R_1(z)\,dz$, где $R_1(z)=-\frac{i}{z}R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$ — рациональная функ-

ция от z. По теореме о вычетах

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример 1. Делая в интеграле

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \qquad |a| < 1,$$

замену переменной $z = e^{i\varphi}$, получаем

$$I = \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Уравнение $az^2 - (a^2+1)z + a = 0$ имеет корни $z_1 = a$, $z_2 = 1/a$. Так как $|a| < 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит лишь точка $z_1 = a$ — полюс первого порядка подынтегральной функции $f(z)$. По формуле (4) § 27 находим

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{i}{[2az - (a^2+1)]_{z=a}} = \frac{i}{a^2 - 1},$$

и следовательно, $I = 2\pi/(1-a^2)$. □

2. Интегралы от рациональных функций. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx, \qquad (2)$$

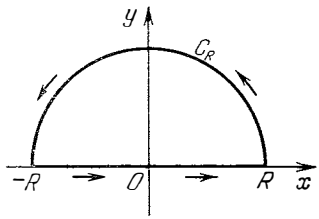


Рис. 69

где $R(x)$ — рациональная функция. Предполагается, что интеграл (2) сходится.

К интегралу (2) нельзя непосредственно применить теорему о вычетах, так как контур интегрирования — бесконечная незамкнутая кривая. Чтобы воспользоваться теоремой о вычетах, введем вспомогательный замкнутый контур Γ_R (рис. 69), состоящий из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности C_R ($|z| = R$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$), и рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz.$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа особых точек, и непре-*

рывна вплоть до границы этой области. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

сходится и

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0, \tag{4}$$

где C_R *— полуокружность* $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{5}$$

В формуле (5) вычеты берутся по всем особым точкам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим контур Γ_R (рис. 69) и выберем R столь большим, чтобы все особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри Γ_R. По теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$. В силу сходимости интеграла (3) существует

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Кроме того, $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$ в силу условия (4). Формула (5) доказана.

Обратимся теперь к интегралу (2). Пусть $R(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены степени n и m соответственно. Из сходимости интеграла (2) вытекает, что $k = m - n \geqslant 2$ и функция $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси. Следовательно,

$$R(z) \sim A/z^k, \quad z \to \infty, \quad k \geqslant 2 \text{ — целое},$$

так что $|R(z)| \leqslant c|z|^{-2}$ при достаточно больших $|z|$. Тогда на полуокружности C_R выполняется неравенство $|R(z)| \leqslant cR^{-2}$ и, следовательно,

$$\left|\int_{C_R} R(z)\,dz\right| \leqslant cR^{-2}\pi R \to 0, \quad R \to \infty.$$

Тем самым доказано, что условие (4) выполнено и в силу леммы 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{6}$$

Здесь вычеты берутся по всем полюсам функции $R(z)$, лежащим в верхней полуплоскости.

Аналогично доказывается формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k<0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z).$$

Пример 2. Вычислим интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$. Так как функция $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}$ имеет в верхней полуплоскости единственный полюс четвертого порядка в точке $z = i$, то по формуле (8) § 28 находим

$$\operatorname*{res}_{z=i} R(z) = \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]^{(3)}_{z=i} = -\frac{5i}{32},$$

и в силу (6) $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} R(z) = 5\pi/16$. □

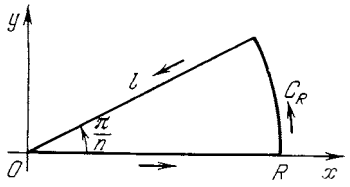


Рис. 70

Пример 3. Вычислим интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, где $n \geqslant 1$ — натуральное число.

Уравнение $z^{2n}+1=0$ имеет следующие корни: $z_k = e^{i(2k+1)\pi/2n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Воспользуемся следующим свойством подынтегральной функции: $R(e^{i\pi/n}z) \equiv R(z)$. Возьмем в качестве контура интегрирования кривую Γ_R (рис. 70), состоящую из отрезка $[0, R]$, дуги окружности C_R: $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/n$ и отрезка l: $z = re^{i\pi/n}$, $0 \leqslant r \leqslant R$. По теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz = \int_0^R R(x)\,dx + \int_{C_R} R(z)\,dz + \int_l R(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} R(z), \tag{7}$$

так как внутри Γ_R функция $R(z)$ имеет только один полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} R(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

Далее, интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $[0, R]$;

$$\int_l R(z)\,dz = -\int_0^R R\left(re^{i\pi/n}\right) e^{i\pi/n} dr = -e^{i\pi/n}\int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Оценим интеграл по C_R. Так как $|R(z)| \sim 1/|z|^{2n}$ $(z \to \infty)$, то

$$\int_{C_R} R(z)\,dz \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

Переходя в равенстве (7) к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$\left(1 - e^{i\pi/n}\right) I = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)}; \quad I = \frac{\pi}{2n \sin\frac{\pi}{2n}}. \quad \square$$

3. Интегралы вида $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx$. Здесь $R(x)$ — рациональная функция. Интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx \tag{8}$$

есть преобразование Фурье функции $R(x)$. При вычислении интегралов (8) используется

Лемма 2 (Жордана). *Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия*:

1) *функция $g(z)$ непрерывна в области* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $|z| \geqslant R_0 > 0$;

2) $$M(R) = \max_{z \in C_R} |g(z)| \to 0 \quad \textit{при} \quad R \to \infty, \tag{9}$$

где C_R — полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\, e^{i\alpha z} dz = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, $R > R_0$. Тогда $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R \sin\varphi}. \tag{11}$$

Так как $\alpha > 0$, то $|e^{i\alpha z}| \leqslant 1$ $(z \in C_R)$. Однако этой оценки недостаточно для доказательства соотношения (10). Чтобы получить более точную оценку для $|e^{i\alpha z}|$ на C_R, воспользуемся неравенством

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

справедливым в силу выпуклости функции $\sin\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

Оценим интеграл $I_1 = \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z} g(z)\, dz$. Используя (11), получаем

$$|I_1| \leqslant \max_{z\in C_R} |g(z)| \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi} R\, d\varphi = 2RM(R) \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi} d\varphi,$$

откуда в силу (12) находим

$$|I_1| \leqslant 2RM(R) \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi} d\varphi = M(R)\left(-\frac{\pi}{\alpha}\right) e^{-R\frac{\alpha}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= M(R)\frac{\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \leqslant \frac{\pi}{\alpha} M(R).$$

Из этой оценки и (9) вытекает (10). Лемма Жордана доказана.

Обратимся теперь к интегралу (8). Этот интеграл сходится в том и только в том случае, когда на действительной оси нет полюсов функции $R(z)$ и, кроме того, $R(x) \sim \frac{c}{x^k} (x \to \infty)$, $k \geqslant 1$.

Следовательно, условие (9) выполняется, и в силу леммы Жордана

$$\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz \to 0 \qquad (R \to \infty,\ \alpha > 0).$$

По формуле (5) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right). \tag{13}$$

Замечание 1. Если $\alpha < 0$, то, заменив контур Γ_R (рис. 69) на контур, симметричный с Γ_R относительно действительной оси, получаем формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[R(z)\, e^{i\alpha z}\right].$$

Замечание 2. Если функция $R(x)$ действительна при действительных x и $\alpha > 0$, то, отделяя в формуле (13) действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\alpha x\, dx &= -2\pi \operatorname{Im}\left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right)\right], \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\, dx &= 2\pi \operatorname{Re}\left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Нет необходимости запоминать формулы (14). Гораздо важнее усвоить те приемы, с помощью которых получаются эти формулы.

Пример 4. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5}\, dx.$$

По формуле (14) имеем

$$I = -2\pi \operatorname{Im}\left[\operatorname*{res}_{z=1+2i}\left(e^{i5z}\,\frac{z-1}{z^2-2z+5}\right)\right],$$

так как подынтегральная функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственный полюс (первого порядка). По формуле (4) § 28 находим

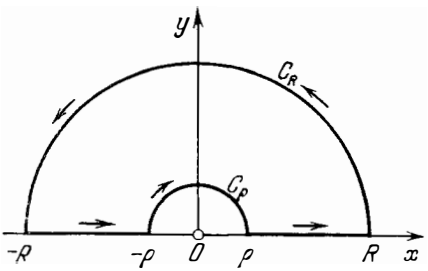


Рис. 71

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \left[\frac{e^{i5z}(z-1)}{(z^2-2z+5)'}\right]_{z=1+2i} = \frac{e^{-10}}{2}(\cos 5 + i \sin 5).$$

Отсюда $I = -\pi e^{-10} \sin 5$. □

Пример 5. Вычислим интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Пусть $\Gamma_{\rho, R}$ — контур, изображенный на рис. 71. Рассмотрим интеграл $I_{\rho, R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$. Этот интеграл равен нулю, так как функция e^{iz}/z регулярна внутри контура $\Gamma_{\rho, R}$. С другой стороны, он равен сумме интегралов, взятых по C_ρ, C_R и отрезкам $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$. Имеем

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = 0$. Если $z \in C_\rho$, то $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ и

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z}\, dz = i \int_{\pi}^{0} d\varphi = -i\pi.$$

Функция $h(z)$ ограничена в окрестности точки $z=0$ и, следовательно, $\int\limits_{C_\rho} h(z)\,dz \to 0$ при $\rho \to 0$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to -i\pi \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to \infty$ (лемма Жордана). Далее, сумма интегралов по отрезкам $[-R, -\rho]$ и $[\rho, R]$ равна

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Следовательно,

$$0 = I_{\rho,R} = 2i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R), \tag{15}$$

где $\varepsilon_1(\rho) \to 0$ $(\rho \to 0)$, $\varepsilon_2(R) \to 0$ $(R \to \infty)$. Так как интеграл I сходится, то существует

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty \\ R\to\infty}} \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = I.$$

Переходя в (15) к пределу при $\rho \to 0$, $R \to \infty$, получаем $2iI - i\pi = 0$, откуда $I = \pi/2$. □

Пример 6. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx \qquad (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0).$$

Рассмотрим интеграл $I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2}\,dz$, где $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, указанный на рис. 71. Этот интеграл равен нулю в силу теоремы Коши. С другой стороны, он равен сумме интегралов, взятых по C_ρ, C_R, $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$. Для подынтегральной функции $f(z) = (e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})/z^2$ точка $z=0$ является простым полюсом и $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = i(\alpha - \beta)$. Как и в примере 5, можно показать, что интеграл по C_ρ стремится к $\pi(\alpha-\beta)$ при $\rho \to 0$, а интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to \infty$. Далее, сумма интегралов по отрезкам равна

$$\int\limits_{\rho}^{R} \left(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} - \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{x^2} \right) dx = 2\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx.$$

Переходя в равенстве

$$2\int_{\rho}^{R}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}\,dx+\pi(\alpha-\beta)+\varepsilon_1(\rho)+\varepsilon_2(R)=0$$

$$(\varepsilon_1\to 0 \text{ при } \rho\to 0;\ \varepsilon_2\to 0 \text{ при } R\to\infty)$$

к пределу при $\rho\to 0$, $R\to\infty$, получаем $2I+\pi(\alpha-\beta)=0$, откуда

$$I=\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha). \quad \square$$

Пример 7. Вычислим интегралы Френеля

$$I_1=\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx, \qquad I_2=\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx.$$

Рассмотрим контур Γ_R, указанный на рис. 70 ($n=4$). Так как функция e^{iz^2} регулярна внутри Γ_R, то

$$\int_{\Gamma_R}e^{iz^2}dz=\int_0^{R}e^{ix^2}dx+\int_{C_R}e^{iz^2}dz+\int_{l}e^{iz^2}dz=0. \tag{16}$$

Оценим интеграл $\int_{C_R}e^{iz^2}dz$. При $z\in C_R$ имеем $z=Re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$, так что $\left|e^{iz^2}\right|=e^{-R^2\sin 2\varphi}\leqslant e^{-(4R^2/\pi)\varphi}$ в силу неравенства $\sin 2\varphi\geqslant 4\varphi/\pi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4)$. Следовательно,

$$\left|\int_{C_R}e^{iz^2}dz\right|\leqslant R\int_0^{\pi/4}e^{-(4R^2/\pi)\varphi}d\varphi=\frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right)\to 0 \qquad (R\to\infty).$$

Далее, если $z\in l$, то $z=re^{i\pi/4}$, так что $e^{iz^2}=e^{-r^2}$. Поэтому

$$\int_l e^{iz^2}dz=-e^{i\pi/4}\int_0^{R}e^{-r^2}dr.$$

Из курса математического анализа [9] известно, что

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Переходя в равенстве (16) к пределу при $R\to\infty$, получаем

$$\int_0^{\infty}e^{ix^2}dx=e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{17}$$

Отделяя в равенстве (17) действительные и мнимые части, находим искомые интегралы:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \quad \square$$

4. Интегралы вида $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx$. Рассмотрим интегралы вида

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)dx. \tag{18}$$

Здесь α — нецелое *) действительное число, $R(x)$ — рациональная функция. Интеграл (18) есть преобразование Меллина функции $R(x)$. Это преобразование применяется в математической физике и в аналитической теории чисел.

Интеграл (18) сходится в том и только в том случае, когда функция $R(z)$ не имеет полюсов на **полуоси $(0, +\infty)$** и

$$\lim_{z\to 0} |z|^\alpha R(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} |z|^\alpha R(z) = 0. \tag{19}$$

Можно считать, что точка $z = 0$ не является ни нулем, ни полюсом функции $R(z)$.

При таком предположении относительно поведения $R(z)$ в нуле первое из условий (19) имеет место в том и только в том случае, когда $\alpha > 0$. Обратимся ко второму из условий (19). Заметим, что для функции $R(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$R(z) \sim A/z^k \qquad (z \to \infty,\ A \neq 0,\ k \text{ — целое}), \tag{20}$$

и, следовательно, второе условие (19) выполняется тогда и только тогда, когда $k - \alpha > 0$. Таким образом, интеграл (18), где $R(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на действительной полуоси $[0, +\infty)$ и такая, что $R(0) \neq 0$, сходится тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < k$, где k определяется из асимптотической формулы (20). Из этих условий следует, что $R(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Чтобы воспользоваться теорией вычетов при вычислении интеграла (18), продолжим аналитически подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty)$. Выделим в области D регулярную ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, положительную на верхнем берегу разреза; обозначим эту ветвь символом $z^{\alpha-1}$, так что $h(z) = z^{\alpha-1}$.

---

*) Метод вычисления интеграла (27) при целом α изложен в п. 6.

В области D имеем $z=re^{i\varphi}$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $0<\varphi<2\pi$ и, следовательно,

$$h(z)=z^{\alpha-1}=(re^{i\varphi})^{\alpha-1}=r^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\varphi}, \quad 0<\varphi<2\pi.$$

На верхнем берегу разреза $\varphi=0$, так что

$$h(x+i0)=h(x)=x^{\alpha-1}>0 \quad (x>0).$$

Если же точка z лежит на нижнем берегу разреза, т. е. $z=\tilde{x}=x-i0$ $(x>0)$, то $\varphi=2\pi$ и $h(x-i0)=h(\tilde{x})=x^{\alpha-1}e^{i2\pi(\alpha-1)}$ или

$$h(\tilde{x})=h(x)e^{i2\pi\alpha}, \quad h(x)>0 \quad (x>0).$$

Обозначим $f(z)=h(z)R(z)=z^{\alpha-1}R(z)$. Тогда $f(\tilde{x})=h(\tilde{x})R(x)$ и

$$f(\tilde{x})=e^{i2\pi\alpha}f(x). \tag{21}$$

Покажем, что для интеграла (18) имеет место формула

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\sum_{z=z_k}\operatorname{res}\left(z^{\alpha-1}R(z)\right), \tag{22}$$

где сумма берется по всем полюсам функции $R(z)$.

Рассмотрим контур $\Gamma_{\rho,R}$ (рис. 72), состоящий из окружностей C_ρ: $|z|=\rho$, C_R: $|z|=R$ и отрезков $[\rho, R]$, $[R, \rho]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. Пусть $R>0$ настолько велико, а $\rho>0$ настолько мало́, что внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$ лежат все полюсы функции $R(z)$. По теореме о вычетах

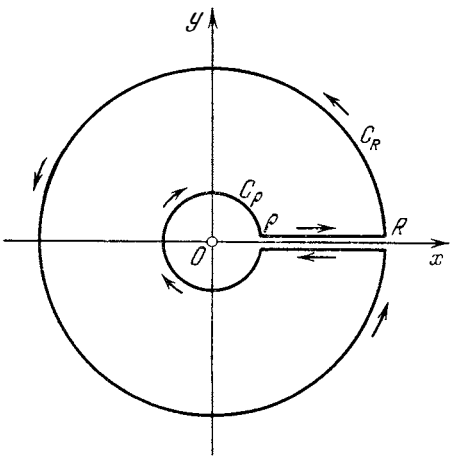


Рис. 72

$$I_{\rho,R}=\int_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\,dz=$$

$$=2\pi i\sum_{z=z_k}\operatorname{res}\left(z^{\alpha-1}R(z)\right), \tag{23}$$

где сумма берется по всем полюсам функции $R(z)$.

С другой стороны, интеграл $I_{\rho,R}$ представляется в виде суммы четырех интегралов

$$I_{\rho,R}=\int_{\rho}^{R} f(x)\,dx+\int_{R}^{\rho} f(\tilde{x})\,dx+\int_{C_\rho} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz. \tag{24}$$

Покажем, что интегралы по C_ρ и C_R стремятся к нулю при $\rho\to 0$ и $R\to\infty$. Это утверждение вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть* $M(\rho)=\max\limits_{z\in C_\rho}|f(z)|$, *где* C_ρ — *окружность* $|z|=\rho$. *Если* $\rho M(\rho)\to 0$ *при* $\rho\to 0$ *и* $RM(R)\to 0$ *при* $R\to\infty$, *то*

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz\to 0 \quad (\rho\to 0),$$

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\to 0 \quad (R\to\infty).$$

Доказательство. Эти соотношения вытекают из следующей оценки интеграла:

$$\left|\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz\right|\leqslant M(\rho)\cdot 2\pi\rho.$$

Для интегралов по C_ρ и C_R в (24) условия леммы 3 выполнены. Действительно,

$$M(\rho)=\max_{z\in C_\rho}\left|z^{\alpha-1}R(z)\right|=\rho^{\alpha-1}\max_{z\in C_\rho}|R(z)|,$$

и из (19) следует, что $\rho^\alpha\max\limits_{z\in C_\rho}|R(z)|\to 0$ при $\rho\to 0$ и поэтому $\rho M(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$. Аналогично доказывается, что $RM(R)\to 0$ при $R\to\infty$.

Переходя в равенстве (23) к пределу при $\rho\to 0$, $R\to\infty$ и используя соотношение (21), получаем

$$I-e^{i2\pi\alpha}I=2\pi i\sum_{z=z_k}\operatorname{res}\left(z^{\alpha-1}R(z)\right),$$

откуда вытекает формула (22).

Пример 8. Вычислим интеграл

$$I=\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx,\quad 0<\alpha<1. \tag{25}$$

Здесь $R(z)=1/(z+1)$, $|z|^\alpha|R(z)|\sim 1/|z|^{1-\alpha}\to 0$ при $z\to\infty$, так как $\alpha<1$. Далее, $|z|^\alpha|R(z)|\sim|z|^\alpha\to 0$ при $z\to 0$, так как $\alpha>0$. Таким образом, условия (19) выполнены, и по формуле (22) получаем

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\operatorname*{res}_{z=-1}f(z),$$

где $f(z)=z^{\alpha-1}/(z+1)$. Далее, $\operatorname*{res}\limits_{z=-1}f(z)=z^{\alpha-1}|_{z=-1}=e^{i(\alpha-1)\pi}$, так как $\varphi=(\arg z)_{z=-1}=\pi$. Итак, $\operatorname*{res}\limits_{z=-1}f(z)=-e^{i\alpha\pi}$, откуда находим $I=\dfrac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}(-e^{i\alpha\pi})=\pi\left(\dfrac{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}}{2i}\right)^{-1}$, т. е.

$$I=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}. \quad \square \tag{26}$$

Замечание 3. Рассмотрим интеграл (25) как функцию от параметра α: $I = I(\alpha)$. Этот интеграл сходится равномерно при $\varepsilon < \alpha < 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, так что функция $I(\alpha)$ непрерывна при $0 < \alpha < 1$ и имеет место формула (26). Правая часть формулы (26) регулярна во всей комплексной плоскости α с выколотыми точками $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, формула (26) дает аналитическое продолжение интеграла (25) с интервала $(0, 1)$ в комплексную плоскость α с выколотыми точками $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 9. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx, \qquad 0 < \alpha < 4.$$

Здесь $R(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$, $|z|^\alpha |R(z)| \sim 1/|z|^{4-\alpha} \to 0$ при $z \to \infty$, так как $\alpha < 4$; $|z|^\alpha |R(z)| \sim |z|^\alpha \to 0$ при $z \to 0$, так как $\alpha > 0$. Условия (19) выполнены, и по формуле (22) получаем

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left[\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) \right],$$

где $f(z) = z^{\alpha-1} R(z)$. Функция $R(z)$ имеет полюсы второго порядка в точках i и $-i$. По формуле (8) § 28 находим

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2} \right]'_{z=i}.$$

Напомним формулу для производной степенно́й функции (§ 22): $(z^\beta)' = \beta z^\beta / z$. Используя эту формулу, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left\{ z^{\alpha-1} (z+i)^{-2} \left[\frac{\alpha - 1}{z} - 2(z+i)^{-1} \right] \right\}_{z=i},$$

где $(z^{\alpha-1})_{z=i} = e^{i(\alpha-1)\pi/2}$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{i(\alpha-2)}{4} e^{i(\alpha-1)\pi/2} = \frac{\alpha-2}{4} e^{i\alpha\pi/2}.$$

Аналогично находим

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{\alpha-2}{4} e^{i(3/2)\alpha\pi}.$$

Окончательно получаем

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \frac{\alpha-2}{4} \left(e^{i(\pi/2)\alpha} + e^{i(3/2)\pi\alpha} \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{2i} \right)^{-1} \frac{2-\alpha}{2} \frac{e^{i(\pi/2)\alpha} + e^{-i(\pi/2)\alpha}}{2} = \frac{\pi(2-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}{2\sin\alpha\pi},$$

или $I = \dfrac{\pi(2-\alpha)}{4\sin(\alpha\pi/2)}$. □

5. Интегралы типа бета-функции $I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} R(x)\,dx$.

Рассмотрим интегралы типа бета-функции

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} R(x)\,dx. \tag{27}$$

Здесь α — действительное нецелое *) число, $R(x)$ — рациональная функция. Будем предполагать, что функция $R(z)$ не имеет полюсов на отрезке $[0, 1]$ и выполняется условие $-1 < \alpha < 1$. Тогда интеграл (27) сходится.

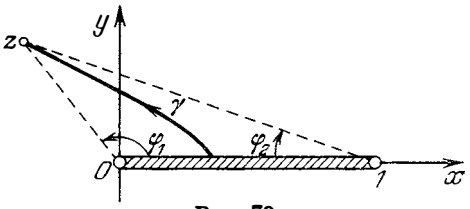


Рис. 73

Заметим, что интеграл (27) заменой $x/(1-x) = y$ сводится к интегралу вида (18). Однако во многих случаях более удобно непосредственно применить теорию вычетов для вычисления интеграла (27). Для применения теории вычетов продолжим аналитически подынтегральную функцию в комплексную плоскость.

Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[0, 1]$ (рис. 73). Выделим в этой области регулярную ветвь $h(z)$ функции $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$, положительную на верхнем берегу разреза. Если $z = x + i0$ $(0 < x < 1)$ — точка верхнего берега разреза, то

$$h(x + i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} > 0 \qquad (0 < x < 1).$$

Найдем $h(\tilde{x}) = h(x - i0)$, $0 < x < 1$, где $\tilde{x} = x - i0$ — точка нижнего берега разреза. Имеем (ср. пример 16 § 24)

$$h(z) = \left|\frac{z}{1-z}\right|^{\alpha} e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$, $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-1)$; γ — кривая, соединяющая точку верхнего берега разреза с точкой $z \in D$ (рис. 73). Если $z = \tilde{x} = x - i0$ $(0 < x < 1)$, то $\varphi_1 = 2\pi$, $\varphi_2 = 0$ и

$$h(\tilde{x}) = e^{i2\pi\alpha}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} = e^{i2\pi\alpha} h(x).$$

Обозначим $f(z) = h(z)R(z)$. Тогда $f(x - i0) = e^{i2\pi\alpha} f(x + i0)$, или

$$f(\tilde{x}) = e^{i2\pi\alpha} f(x),$$

где $f(x)$ совпадает с подынтегральной функцией в (27).

*) Метод вычисления интеграла (18) при целом α изложен в п. 6.

Докажем, что для интеграла (27) имеет место формула

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right), \tag{28}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все конечные полюсы функции $R(z)$.

Для доказательства формулы (28) рассмотрим контур Γ_ρ (рис. 74), имеющий вид «гантели». Этот контур состоит из окружностей C_ρ: $|z| = \rho$, C'_ρ: $|z-1| = \rho$ и отрезков l_1: $\rho \leqslant x \leqslant 1-\rho$, l_2: $\rho \leqslant x \leqslant 1-\rho$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. По теореме о вычетах (теорема 2 § 28) имеем

$$I_\rho = \int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right), \tag{29}$$

где ρ выбрано столь малым, что все полюсы функции $R(z)$ лежат вне «гантели».

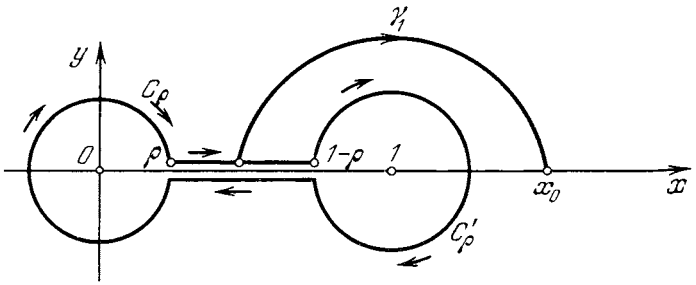


Рис. 74

С другой стороны, интеграл I_ρ равен сумме интегралов

$$I_\rho = \int_{C_\rho} f(z)\,dz + \int_{\rho}^{1-\rho} f(x)\,dx + \int_{C'_\rho} f(z)\,dz + \int_{1-\rho}^{\rho} f(x)\,dx. \tag{30}$$

Оценим интегралы по окружностям C_ρ и C'_ρ. По условию, функция $R(z)$ регулярна в точке $z=0$ и поэтому $|R(z)| \leqslant M$ при малых $|z|$. Далее, $|h(z)| = |z|^\alpha / |1-z|^\alpha \leqslant M_1 |z|^\alpha$ при малых $|z|$. Поэтому если $z \in C_\rho$, то $|f(z)| = |h(z)|\,|R(z)| \leqslant MM_1\rho^\alpha$, так что $M(\rho) = \max\limits_{z \in C_\rho} |f(z)| \leqslant M_2\rho^\alpha$. Следовательно, $\rho M(\rho) \leqslant M_2\rho^{1+\alpha} \to 0$ при $\rho \to 0$, так как $1+\alpha > 0$. По лемме 3 имеем $\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz \to 0$ $(\rho \to 0)$. Аналогично доказывается, что интеграл по окружности C'_ρ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Переходя в равенстве (29) к

пределу при $\rho \to 0$, получаем

$$(1 - e^{i2\pi\alpha}) I = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right),$$

откуда вытекает формула (28).

Найдем вычет в точке $z = \infty$, предполагая, что функция $R(z)$ регулярна в этой точке, т. е.

$$R(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z| > R.$$

Разложим функцию $h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Имеем (ср. пример 17 из § 24) $h(z) = h(\infty) g(z)$, где

$$g(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{z} + \ldots$$

— функция, регулярная в точке $z = \infty$, $g(\infty) = 1$. Здесь $h(\infty) = e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $\varphi_1 = \Delta_{\gamma_1} \arg z$, $\varphi_2 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1)$, γ_1 — кривая (рис. 74), соединяющая точку верхнего берега разреза с точкой $x_0 > 1$ действительной оси. Так как $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi$, то $h(\infty) = e^{i\alpha\pi}$. Следовательно,

$$f(z) = h(z) R(z) = h(\infty) g(z) R(z) =$$

$$= e^{i\alpha\pi} \left(c_0 + \frac{\alpha c_0 + c_{-1}}{z} + \ldots \right), \quad |z| > R,$$

откуда $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi}(\alpha c_0 + c_{-1})$. В частности, если точка $z = \infty$ является нулем первого порядка для $R(z)$, т. е. $c_0 = 0$, $c_{-1} \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi} c_{-1}. \tag{31}$$

Замечание 4. Изложенный выше метод вычисления интегралов вида (27) без изменений переносится на интегралы вида

$$I = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha} R(x)\, dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция, $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. В этом случае имеем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi}[\alpha c_0 (b-a) + c_{-1}]$, так как

$$\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha} = e^{i\alpha\pi} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\alpha} \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{-\alpha} = e^{i\alpha\pi} \left(1 + \frac{\alpha(b-a)}{z} + \ldots\right).$$

Пример 10. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{dx}{x+1}, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Здесь функция $R(z) = 1/(z+1)$ имеет единственный простой полюс $z = -1$. По формуле (28) находим

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right),$$

где $f(z) = h(z)\,R(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \frac{1}{z+1}$. Имеем

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = h(-1) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}_{z=-1},$$

где $h(-1) = 2^{-\alpha} e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 0$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2^{-\alpha} e^{i\alpha\pi}.$$

Так как $R(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots$, то по формуле (31) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -e^{i\alpha\pi}.$$

Отсюда находим $I = \frac{2\pi i e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{i2\alpha\pi}} (2^{-\alpha} - 1) = \frac{\pi(1 - 2^{-\alpha})}{\sin \alpha\pi}$. □

Пример 11. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, \frac{dx}{(x+2)^2}.$$

Для функции $R(z) = 1/(z+2)^2$ точка $z = \infty$ является нулем второго порядка, а функция $h(z) = (z/(1-z))^{-1/2}$ регулярна в точке $z = \infty$. Следовательно, точка $z = \infty$ является нулем второго порядка для функции $f(z) = h(z)R(z)$ и поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ (п. 3 § 28).

По формуле (28) находим $I = \pi i \operatorname*{res}_{z=-2} f(z)$, так как $\alpha = -1/2$. Имеем $\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = h'(-2)$, где $h(z) = \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{1/2}$. Далее (пример 25 § 24)

$$h'(-2) = \left[\frac{1}{2h(z)} \left(\frac{1}{z} - 1\right)'\right]_{z=-2} = -\frac{1}{8h(-2)},$$

где $h(-2)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{i(-1/2)\varphi}$, $\varphi=\pi$. Следовательно, $h(-2)=-i\sqrt{3/2}$ и $\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=-i/(4\sqrt{6})$. Отсюда находим, что $I=\pi/(4\sqrt{6})$. □

Пример 12. Вычислим интеграл

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}{1+x^2}\,dx.$$

Выделим в плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ регулярную ветвь функции $[(1-z)(1+z)^3]^{1/4}$, положительную на верхнем берегу разреза; обозначим эту ветвь $h(z)$, так что $h(x+i0)=h(x)=\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}>0$, $-1<x<1$. Тогда $h(\widetilde{x})=h(x-i0)=e^{\frac{3}{2}\pi i}\times h(x)=-ih(x)$ — значение функции $h(z)$ на нижнем берегу разреза (§ 24, пример 16).

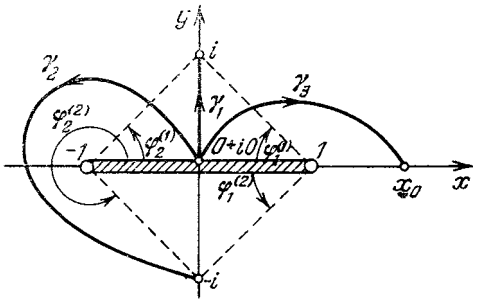


Рис. 75

Обозначим $R(z)=\frac{1}{1+z^2}$, $f(z)=h(z)R(z)$ и рассмотрим контур Γ (рис. 75), состоящий из отрезков $[-1, 1]$ и $[1, -1]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. По теореме о вычетах (теорема 2 § 28)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{-1} f(\widetilde{x})\,dx=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right),$$

где $f(\widetilde{x})=-if(x)$. Найдем вычеты. Здесь $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z)=\left(\frac{h(z)}{2z}\right)_{z=\pm i}$. Для нахождения значений степенно́й функции $h(z)$ в точках i и $-i$ нужно вычислить $\varphi_1^{(k)}=\Delta_{\gamma_k}\arg(z-1)$ и $\varphi_2^{(k)}=\Delta_{\gamma_k}\arg(z+1)$, где γ_k $(k=1, 2)$ — кривые, соединяющие точку $0+i0$ с точками i и $-i$ соответственно (рис. 75). Имеем

$$h(i)=|h(i)|\,e^{(i/4)\left(\varphi_1^{(1)}+3\varphi_2^{(1)}\right)},$$

где $|h(i)|=\sqrt{2}$, $\varphi_1^{(1)}=-\pi/4$, $\varphi_2^{(1)}=\pi/4$ (рис. 75), $h(i)=\sqrt{2}\,e^{i\pi/8}$ и

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=-\frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{i\pi/8}.$$

Аналогично, $h(-i)=\sqrt{2}\,e^{(i/4)\left(\varphi_1^{(2)}+3\varphi_2^{(2)}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i(11/8)\pi}$ (рис. 75) и

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z)=-\frac{i}{\sqrt{2}}\,e^{i(3/8)\pi}.$$

Найдем вычет в точке $z=\infty$. Имеем

$$h_1(z)=\frac{h(z)}{z}=h_1(\infty)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/4}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{3/4}=$$

$$=h_1(\infty)\left(1+\frac{1}{2z}+\ldots\right),$$

где $h_1(\infty)=e^{i(1/4)\left(\varphi_1^{(3)}+3\varphi_2^{(3)}\right)}$, $\varphi_1^{(3)}=\Delta_{\gamma_3}\arg(z-1)$, $\varphi_2^{(3)}=\Delta_{\gamma_3}\arg(z+1)$, γ_3 — кривая соединяющая точку $0+i0$ с точкой $x_0>1$ (рис. 75). Здесь $\varphi_1^{(3)}=-\pi$, $\varphi_2^{(3)}=0$. Следовательно, $h_1(\infty)=e^{-i(\pi/4)}$ и

$$h(z)=e^{-i(\pi/4)}\left(z+\frac{1}{2}+\ldots\right).$$

Далее,

$$R(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\ldots,\quad f(z)=h(z)\,R(z)=e^{-i\pi/4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots\right),$$

откуда $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-e^{-i\pi/4}$. Окончательно получаем

$$(1+i)I=\sqrt{2}\pi\left(e^{i\pi/8}+e^{i3\pi/8}-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right),$$

откуда $I=\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}-1\right)$. □

Пример 13. Вычислим интеграл $I=\int\limits_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx$. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $[z(1-z)^3]^{1/4}$ в плоскости с разрезом $[0,\ 1]$, принимающая положительные значения на верхнем берегу разреза, т. е. $h(x+i0)=h(x)=[x(1-x)^3]^{1/4}>0$, $0<x<1$. Тогда $h(x-i0)=h(\widetilde{x})=ih(x)$. Обозначим $f(z)=h(z)R(z)$, где $R(z)=1/(1+z)^3$. Имеем

$$f(\widetilde{x})=f(x-i0)=if(x).$$

По теореме о вычетах

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\int\limits_1^0 f(\widetilde{x})\,dx=(1-i)\,I=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

Найдем вычеты. Так как точка $z=\infty$ является нулем второго порядка для функции $f(z)$ $(R(z)\sim 1/z^3,\ h(z)\sim Az,\ z\to\infty)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0.$$

Точка $z=-1$ является полюсом третьего порядка для $f(z)$ и в силу формулы (8) § 28 имеем $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2}h''(-1)$, где $h''(-1)=-3\cdot 8^{-7/4}e^{i\pi/4}$ (§ 24, пример 25), т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=-\frac{3}{2}8^{-7/4}e^{i\pi/4}.$$

Окончательно получаем $e^{-i\pi/4}I=-3\pi 8^{-7/4}ie^{i\pi/4}$, откуда

$$I=3\pi\sqrt[4]{2}/64. \quad \square$$

6. Интегралы вида $I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)dx$. Рассмотрим интегралы вида

$$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx. \tag{32}$$

Здесь α — действительное число, $m\geqslant 1$ — целое, $R(z)$ — рациональная функция. Будем предполагать, что функция $R(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в п. 4. Тогда интеграл (32) сходится в том и только в том случае, когда выполняется условие (19), так как множитель $\ln^m x$ не влияет на сходимость.

Заметим, что интеграл (32) можно получить из интеграла (18) дифференцированием по параметру α.

Действительно,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ln x\,R(x)\,dx.$$

Дифференцируя (18) m раз по α, получаем (32).

Однако интеграл (32) можно вычислить непосредственно с помощью вычетов. Пусть D — плоскость с разрезом $[0,+\infty)$, $h(z)=z^{\alpha-1}$ — регулярная ветвь функции $z^{\alpha-1}$ в области D (п. 4), положительная на верхнем берегу разреза. Фиксируем регулярную ветвь логарифма, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза; обозначим ее $\ln z$. Тогда в области D

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z, \qquad 0<\arg z<2\pi.$$

На верхнем берегу разреза $z=x+i0$ $(x>0)$, $\arg z=0$ и

$$\ln(x+i0)=\ln x.$$

На нижнем берегу разреза $z=x-i0=\tilde{x}$ $(x>0)$, $\arg z=2\pi$ и

$$\ln(x-i0)=\ln\tilde{x}=\ln x+i2\pi.$$

Обозначим $f(z)=h(z)(\ln z)^m R(z)=z^{\alpha-1}(\ln z)^m R(z)$; тогда $f(x+i0)=f(x)=x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)$ — подынтегральная функция в

(32), а

$$f(x-i0)=f(\tilde{x})=e^{i2\pi\alpha}x^{\alpha-1}(\ln x+2\pi i)^m R(x)$$

— значение функции $f(z)$ на нижнем берегу разреза.

Рассмотрим интеграл

$$I_{\rho,R}=\int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\,dz, \tag{33}$$

где $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, указанный на рис. 72. Пусть выполнено условие (19). Тогда в силу леммы 3 интегралы по C_R и C_ρ стремятся к нулю при $R\to\infty$, $\rho\to 0$.

Как и в п. 4, имеем

$$\int\limits_0^\infty [f(x)-f(\tilde{x})]\,dx=2\pi i\sum_{z=z_k}\operatorname{res} f(z), \tag{34}$$

где вычеты берутся по всем полюсам рациональной функции $R(z)$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Число α — нецелое. Тогда левая часть (34) содержит $I(1-e^{i2\pi\alpha})$, а также (при $m>1$) интегралы вида $\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^s\times$ $\times R(x)dx$, где $0\leqslant s\leqslant m-1$. В частности, при $m=1$ из (34) имеем

$$(1-e^{i2\pi\alpha})I-2\pi i e^{i2\pi\alpha}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left(z^{\alpha-1}R(z)\ln z\right), \tag{35}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все полюсы функции $R(z)$. Из равенства (35) можно найти интеграл I, а также интеграл $\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx$.

2. Число α — целое. Тогда интеграл (32) имеет вид

$$I=\int\limits_0^\infty (\ln x)^m\,R(x)\,dx, \tag{36}$$

где $R(x)$ — рациональная функция. В этом случае в качестве подынтегральной функции в (33) нужно взять $(\ln z)^{m+1}R(z)$, а не $(\ln z)^m R(z)$. Действительно, если $f(z)=(\ln z)^m R(z)$, то $f(x)=(\ln x)^m R(x)$, $f(\tilde{x})=(\ln x+2\pi i)^m R(x)$ и формула (34) не позволяет найти искомый интеграл.

Однако, если функция $R(z)$ является четной, то при вычислении интеграла (36) с помощью вычетов в качестве подынтегральной функции можно взять $f(z)=(\ln z)^m R(z)$; контур интегрирования в этом случае есть контур $\Gamma_{\rho,R}$, указанный на рис. 71 (см. ниже пример 15).

Пример 14. Вычислим интеграл $I = \int\limits_0^\infty x^{-1/2} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2}$. Условия (19) выполнены ($\alpha = 1/2$, $k = 2$) и по формуле (35) получаем

$$2I + 2\pi i \int\limits_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(x+1)^2}\, dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z). \tag{37}$$

Так как точка $z = -1$ является полюсом второго порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \left(z^{-1/2} \ln z\right)'_{z=-1} = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{z^{-1/2}}{z} \ln z + \frac{1}{z} z^{-1/2}\right]_{z=-1},$$

где $\left(z^{-1/2}\right)_{z=-1} = e^{-i\pi/2} = -i$, $(\ln z)_{z=-1} = i\pi$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\pi}{2} + i.$$

Приравнивая в (37) действительные и мнимые части, находим

$$I = -\pi, \quad \int\limits_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(x+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Пример 15. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\, dx, \quad a > 0.$$

Пусть $\Gamma_{\rho, R}$ — контур, указанный на рис. 71. Рассмотрим интеграл

$$I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} f(z),$$

где $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$ — регулярная ветвь логарифма, принимающая действительные значения при $z = x > 0$. Интегралы по полуокружностям C_ρ и C_R стремятся к нулю при $\rho \to 0$, $R \to \infty$, так как $|f(z)| < M_1 |\ln \rho|$ $(z \in C_\rho)$, $|f(z)| < M_2 \frac{\ln R}{R^2}$ $(z \in C_R)$. Здесь $\operatorname*{res}_{z=ia} f(z) = \left(\frac{\ln z}{2z}\right)_{z=ia} = \frac{\ln a + i\pi/2}{2ai}$. Переходя к пределу при $\rho \to 0$, $R \to \infty$, и учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^0 f(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + a^2}\, dx = I + i\pi \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2},$$

получаем $2I + i\pi \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)$, откуда

$$I = \frac{\pi}{2a}\ln a. \quad \square$$

Метод, изложенный в п. 6, позволяет вычислять интегралы вида

$$I = \int\limits_a^b \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^m R(x)\,dx, \tag{38}$$

где a, b — действительные числа $(a < b)$, $m \geqslant 0$ — целое.

Пусть в (38) $m = 0$, $a = 0$, $b = \infty$. Тогда интеграл (38) примет вид $I = \int\limits_0^\infty R(x)\,dx$, где $R(x)$ — рациональная функция, удовлетворяющая условиям п. 4. Если $R(x)$ — четная функция, то $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, и для вычисления интеграла применим метод, указанный в п. 2.

Пусть функция $R(x)$ не является четной. Тогда нужно рассмотреть интеграл $I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} \ln z R(z)\,dz$, где $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, указанный на рис. 72, а $\ln z$ — регулярная ветвь логарифма.

Пример 16. Вычислим интеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2}$. Здесь $R(z) = 1/(z^3+1)^2$, $f(z) = \ln z \cdot R(z)$, $f(x) = (\ln x)/(x^3+1)^2$, $f(\tilde{x}) = f(x) + 2\pi i/(x^3+1)^2$ и в силу формулы (34) имеем

$$I = -\sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

где $z_k = e^{(2k+1)\pi i/3}$, $k = 1, 2, 3$. Так как точка z_1 — полюс второго порядка для функции $f(z) = \frac{\ln z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{\ln z}{(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right]'_{z=z_1} =$$

$$= \frac{1}{z_1(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2} - \frac{2[2z_1-(z_2+z_3)]\ln z_1}{(z_1-z_2)^3(z_1-z_3)^3}.$$

Используя формулы $\ln z_1 = \pi i$, $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = (z^3 + 1)'_{z=z_1} = 3z_1^2$, $z_1^3 = -1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{z_1}{9}(1 - 2\pi i).$$

Аналогично учитывая, что $\ln z_2 = \frac{5}{3}\pi i$, $\ln z_3 = \frac{\pi i}{3}$, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{z_2}{9}\left(1 - \frac{10}{3}\pi i\right), \quad \operatorname*{res}_{z=z_3} f(z) = \frac{z_3}{9}\left(1 - \frac{2}{3}\pi i\right).$$

Окончательно находим

$$I = \frac{\pi i}{9}\left(2z_1 + \frac{10}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}. \quad \square$$

Обратимся к интегралу (38). Этот интеграл заменой переменной $(x-a)/(b-x) = y$ преобразуется к виду

$$I = \int_0^\infty R(x) \ln^m x \, dx.$$

В заключение отметим, что другие типы интегралов, которые вычисляются с помощью вычетов, можно найти в [10], [16].

Приведем пример такого интеграла.

Пример 17. Вычислим интеграл $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$, $a > 0$.

Пусть Γ_R — граница прямоугольника с вершинами в точках

$$z_1 = -R, \quad z_2 = -R + \frac{b}{2a}i, \quad z_3 = R + \frac{b}{2a}i, \quad z_4 = R,$$

где $R > 0$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = e^{-az^2}, \quad z = x + iy.$$

По интегральной теореме Коши

$$\int_{\Gamma_R} e^{-az^2} dz = 0. \tag{39}$$

На отрезках $[z_1, z_2]$ и $[z_4, z_3]$ имеем

$$|f(z)| = e^{-a(R^2 - y^2)} \leqslant e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

Следовательно, интегралы от $f(z)$ по этим отрезкам стремятся к нулю при $R \to \infty$. Если $z \in [z_2, z_3]$, то

$$f(z) = e^{-a\left(x + i\frac{b}{2a}\right)^2} = f(x)\, e^{\frac{b^2}{4a} - ibx},$$

и равенство (39) можно записать в виде

$$\int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^{R} e^{-ax^2 - ibx}\, dx + \alpha(R) = 0, \tag{40}$$

где $\alpha(R) \to 0$ при $R \to \infty$.

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

то, переходя к пределу в равенстве (40) и выделяя действительные части, получаем

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}. \quad \square$$

§ 30. Принцип аргумента и теорема Руше

1. Принцип аргумента.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G, за исключением, быть может, полюсов, и пусть D — ограниченная односвязная область, лежащая в области G вместе со своей границей* Γ.

Если функция $f(z)$ не имеет на Γ *ни нулей, ни полюсов, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P, \tag{1}$$

где N — число нулей, P — число полюсов функции $f(z)$ в области D. При этом каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, а каждый полюс — столько раз, каков его порядок.

Доказательство. Заметим, что функция $f(z)$ может иметь в области D лишь конечное число полюсов, так как в противном случае существовала бы в области G предельная точка полюсов (неизолированная особая точка). Число нулей функции $f(z)$ в области D также конечно. Действительно, если число нулей бесконечно, то существует предельная точка нулей функции $f(z)$, лежащая в области G и, следовательно, $f(z) \equiv 0$ в D по теореме единственности.

Особыми точками подынтегральной функции $F(z) = f'(z)/f(z)$ являются лишь нули и полюсы $f(z)$, и по теореме о вычетах (§ 28) левая часть (1) равна сумме вычетов, взятых по всем нулям и полюсам функции $f(z)$, лежащим в области D.

Пусть $z = a$ — нуль функции $f(z)$ кратности n. Тогда

$$f(z) = (z-a)^n g(z),$$

где $g(z)$ — функция, регулярная в точке a, $g(a) \neq 0$. Следовательно, $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, откуда находим $\operatorname{res}_{z=a} F(z) = n$, т. е. вычет функции $F(z)$ в точке $z = a$, являющейся нулем $f(z)$, равен кратности этого нуля.

Аналогично, если $z = b$ — полюс функции $f(z)$ порядка p, то

$$f(z) = (z-b)^{-p} h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = b$, $h(b) \neq 0$. Отсюда получаем

$$F(z) = \frac{-p}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

и, следовательно, $\operatorname{res}_{z=b} F(z) = -p$, т. е. вычет функции $F(z)$ в точке $z = b$, являющейся полюсом $f(z)$, равен порядку этого полюса, взятому с обратным знаком.

Таким образом, левая часть (1) равна разности между суммой кратностей нулей и суммой порядков полюсов функции $f(z)$, и формула (1) доказана.

Замечание 1. Формула (1) остается в силе и для неодносвязной области.

Следствие. *При условиях теоремы* 1 *формулу* (1) *можно записать так*:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z) = N - P. \tag{2}$$

Здесь $\Delta_\Gamma \arg f(z)$ — *приращение аргумента функции* $f(z)$ *при обходе кривой* Γ *в положительном направлении.*

Доказательство. По условию функция $f(z)$ регулярна в окрестности кривой Γ и $f(z) \neq 0$ на Γ. Следовательно, $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности кривой Γ, и в этой окрестности можно выделить аналитическую ветвь функции $\ln f(z)$. Так как $[\ln f(z)]' = f'(z)/f(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \ln f(z), \tag{3}$$

где $\Delta_\Gamma \ln f(z)$ — приращение (изменение) функции $\ln f(z)$ при обходе точкой z замкнутого контура Γ в положительном направлении. Но $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$, где $\ln |f(z)|$ — однозначная функция, и поэтому $\Delta_\Gamma \ln |f(z)| = 0$. Следовательно,

$$\Delta_\Gamma \ln f(z) = i \Delta_\Gamma \arg f(z),$$

и из формулы (3) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z),$$

откуда в силу (1) вытекает формула (2).

Равенство (2) известно под названием *принципа аргумента.* Согласно формуле (2) разность между числом нулей и числом полюсов функции $f(z)$ внутри контура Γ равняется изменению аргумента этой функции при обходе контура Γ, деленному на 2π (при условии, что функция $f(z)$ регулярна внутри контура Γ и на Γ, за исключением конечного числа полюсов, и не обращается в нуль на Γ).

Замечание 2. Формула (2) остается в силе и для случая, когда функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением конечного числа полюсов, и непрерывна вплоть до границы Γ этой области.

В частности, если функция $f(z)$ не имеет полюсов в области D ($P=0$), то формула (2) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z) = N. \tag{4}$$

Выясним геометрический смысл $\Delta_\Gamma \arg f(z)$. Пусть Γ' — образ кривой Γ (рис. 76) при отображении $w=f(z)$. При полном обходе замкнутого контура Γ точкой z соответствующая точка описывает на плоскости w замкнутый контур Γ'. Изменение аргумента функции $f(z)$ на контуре Γ определяется числом полных оборотов, которые совершает вектор w при движении точки w по замкнутому контуру Γ'. Если вектор w не делает ни одного полного оборота вокруг точки $w=0$, то $\Delta_\Gamma \arg f(z)=0$.

2. **Теорема Руше.** При подсчете числа нулей регулярной функции в заданной области часто применяется следующая

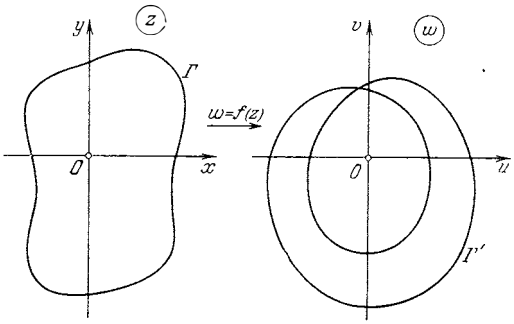


Рис. 76

Теорема 2 (теорема Руше). *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в ограниченной односвязной области D и на ее границе Γ и пусть для всех $z\in\Gamma$ имеет место неравенство*

$$|f(z)|>|g(z)|. \tag{5}$$

Тогда функции $f(z)$ и $F(z)=f(z)+g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей.

Доказательство. В силу условия (5) $f(z)\neq 0$ для всех $z\in\Gamma$. Кроме того, $F(z)\neq 0$ на Γ, так как $|F(z)|\geqslant |f(z)|-|g(z)|>0$. Пусть N_F и N_f — число нулей в области D функций $F(z)$ и $f(z)$ соответственно. По формуле (4) имеем

$$N_F=\frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg F(z). \tag{6}$$

Поскольку $f(z)\neq 0$ на Γ, то при $z\in\Gamma$ из равенства

$$F(z)=f(z)+g(z)=f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$$

следует, что

$$\Delta_\Gamma \arg F(z)=\Delta_\Gamma \arg f(z)+\Delta_\Gamma \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right). \tag{7}$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части (7) равно нулю. Действительно, при обходе точкой z замкнутого контура Γ точка $w=1+g(z)/f(z)$ описывает замкнутую кривую Γ' (рис. 77), лежащую внутри круга $|w-1|<1$, так как при $z\in\Gamma$ в силу (5) имеем $|w-1|=|g(z)/f(z)|<1$. Следовательно, вектор w, конец которого движется по кривой Γ', не совершает ни одного полного оборота вокруг точки $w=0$ и поэтому $\Delta_\Gamma \arg(1+g(z)/f(z))=0$. Таким образом, из (6) и (7) следует, что $N_F=N_f$.

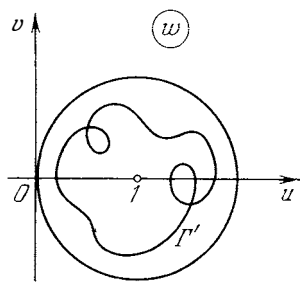


Рис. 77

Пример 1. Найдем число корней уравнения

$$z^9-6z^4+3z-1=0$$

внутри круга $|z|<1$. Обозначим $f(z)=-6z^4$, $g(z)=z^9+3z-1$. Если $z\in\Gamma$, где Γ: $|z|=1$, то

$$|f(z)|=6,\quad |g(z)|\leqslant |z|^9+3|z|+1=5,$$

откуда $|f(z)|>|g(z)|$ при $z\in\Gamma$. По теореме Руше число корней исходного уравнения в круге $|z|<1$ совпадает с числом корней уравнения $f(z)=-6z^4=0$ в этом круге, т. е. равно 4. □

Пример 2. Докажем, что уравнение

$$z+\lambda-e^z=0,\quad \lambda>1 \tag{8}$$

имеет в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z<0$) единственный (и притом действительный) корень.

Рассмотрим замкнутый контур, составленный из дуги полуокружности C_R: $|z|=R$, $\operatorname{Re} z\leqslant 0$ и отрезка l: $[-iR, iR]$. Положим $f(z)=z+\lambda$, $g(z)=-e^z$. На отрезке l имеем $|f(z)|=|\lambda+iy|\geqslant \lambda>1$, $|g(z)|=|e^{iy}|=1$. На полуокружности C_R при $R>\lambda+1$

имеем

$$|f(z)| \geqslant |z| - \lambda = R - \lambda > 1, \quad |g(z)| = |e^{x+iy}| = e^x \leqslant 1,$$

так как $x \leqslant 0$. В силу теоремы Руше число корней уравнения (8) в области $|z| < R$, $\operatorname{Re} z < 0$ при любом $R > \lambda + 1$ равно числу корней уравнения $z + \lambda = 0$, т. е. равно 1. Отсюда следует, что и во всей левой полуплоскости уравнение (8) имеет ровно один корень. Этот корень является действительным, так как левая часть уравнения (8) положительна (равна $\lambda - 1$) при $z = x = 0$ и стремится к $-\infty$ при $x \to -\infty$. □

Замечание 3. Теорема Руше остается в силе, если при сохранении остальных условий теоремы 2 заменить условие регулярности функций $f(z)$ и $g(z)$ на границе Γ области D условием непрерывности этих функций вплоть до границы этой области.

Теорема Руше позволяет получить простое доказательство основной теоремы высшей алгебры (ср. § 19).

Теорема 3 (основная теорема высшей алгебры). *Многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами имеет ровно n нулей.*

Доказательство. Пусть

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

— произвольный многочлен n-й степени ($a_0 \neq 0$). Обозначим $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$. Тогда

$$P_n(z) = F(z) = f(z) + g(z).$$

Так как $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{g(z)}{f(z)} = 0$, то найдется $R > 0$ такое, что для всех z: $|z| \geqslant R$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1. \tag{9}$$

Пусть Γ — окружность $|z| = R$. Так как на Γ имеет место неравенство (9), то по теореме Руше $N_F = N_f$. Но $N_f = n$, поскольку функция $f(z) = a_0 z^n$ имеет n нулей в круге $|z| < R$ (точка $z = 0$ является нулем кратности n функции $f(z)$). Таким образом, в круге $|z| < R$ число нулей функции $F(z) = P_n(z)$ равно n, т. е. многочлен $P_n(z)$ имеет в этом круге n нулей. Так как в силу неравенства (9) функция $F(z)$ не имеет нулей при $|z| \geqslant R$, то теорема доказана.

§ 31. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби

В качестве приложения теории вычетов рассмотрим вопрос о разложении мероморфной функции на элементарные дроби. Напомним определение мероморфной функции (§ 19). Функция $f(z)$ называется мероморфной, если она регулярна в каждой

ограниченной части плоскости, за исключением конечного числа полюсов.

В § 19 было показано, что мероморфная функция $f(z)$, имеющая во всей расширенной комплексной плоскости лишь конечное число полюсов (рациональная функция), представляется в виде суммы многочлена (главной части ряда Лорана для $f(z)$ в точке $z=\infty$) и элементарных дробей (главных частей ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности ее полюсов).

Это утверждение можно обобщить на случай мероморфной функции $f(z)$, имеющей бесконечное (счетное) число полюсов.

1. Теорема о разложении мероморфной функции. Введем следующее

Определение 1. Пусть имеется последовательность $\{\Gamma_n\}$ вложенных друг в друга (Γ_n лежит внутри Γ_{n+1}, $n=1, 2, \ldots$) замкнутых контуров Γ_n, содержащих точку $z=0$ и таких, что

$$\frac{S_n}{d_n} \leqslant C \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где S_n — длина контура Γ_n, d_n — расстояние от начала координат до кривой $\Gamma_n \left(d_n = \inf\limits_{z\in\Gamma_n} |z|\right)$, причем

$$d_n \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Такую систему контуров назовем *правильной*.

Теорема 1. *Пусть все полюсы z_k ($k=1, 2, \ldots$) мероморфной функции $f(z)$, регулярной в точке $z=0$, являются простыми и занумерованы в порядке неубывания их модулей: $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ Если функция $f(z)$ ограничена на некоторой правильной системе контуров $\{\Gamma_n\}$, т. е.*

$$|f(z)| \leqslant M, \quad z \in \Gamma_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{3}$$

то

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k}\right), \tag{4}$$

где $A_k = \operatorname{res\,}\limits_{z=z_k} f(z)$. Ряд (4) сходится равномерно в каждой ограниченной области с выколотыми в ней полюсами функции $f(z)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta, \tag{5}$$

где $z \in G_n$ (G_n — внутренность кривой Γ_n) и $z \neq z_k$ ($k=1, 2, \ldots$). Пусть $F(\zeta) = \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}$. В области G_n функция $F(\zeta)$ имеет простые полюсы $\zeta = z$, $\zeta = z_k \in G_n$; точка $\zeta = 0$ является либо простым полюсом, либо точкой регулярности (если $f(0)=0$) для функции

$F(\zeta)$. По теореме о вычетах

$$I_n(z) = \operatorname*{res}_{\zeta=0} F(\zeta) + \operatorname*{res}_{\zeta=z} F(\zeta) + \sum_{z_k \in G_n} \operatorname*{res}_{\zeta=z_k} F(\zeta). \tag{6}$$

В силу формулы (3) § 28 имеем

$$\operatorname*{res}_{\zeta=0} F(\zeta) = \left[\frac{zf(\zeta)}{\zeta - z}\right]_{\zeta=0} = -f(0), \tag{7}$$

$$\operatorname*{res}_{\zeta=z} F(\zeta) = \left[\frac{zf(\zeta)}{\zeta}\right]_{\zeta=z} = f(z), \tag{8}$$

$$\operatorname*{res}_{\zeta=z_k} F(\zeta) = \left[\frac{z}{\zeta(\zeta - z)}\right]_{\zeta=z_k} \operatorname*{res}_{\zeta=z_k} f(\zeta) = \frac{A_k z}{z_k(z_k - z)}, \tag{9}$$

Подставляя (7)—(9) в (6), получаем

$$I_n(z) = -f(0) + f(z) + \sum_{z_k \in G_n} \frac{A_k z}{z_k(z_k - z)},$$

откуда в силу равенства $\dfrac{z}{z_k(z_k - z)} = -\left(\dfrac{1}{z - z_k} + \dfrac{1}{z_k}\right)$ находим

$$f(z) = f(0) + \sum_{z_k \in G_n} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta. \tag{10}$$

Оценим $I_n(z)$. Пусть D — ограниченная область. Тогда существует круг K: $|z| < R$ такой, что $D \subset K$. Имеем

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{|z|}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta||\zeta - z|}\, |d\zeta|.$$

Здесь $|z| < R$ $(z \in D \subset K)$, $|\zeta| \geqslant d_n$ (d_n — расстояние от начала координат до контура Γ_n), $|\zeta - z| \geqslant |\zeta| - |z| > d_n - R$, $|f(\zeta)| \leqslant M$. Следовательно,

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{MR}{2\pi} \frac{1}{d_n(d_n - R)} S_n \leqslant \frac{CMR}{2\pi(d_n - R)},$$

так как $S_n \leqslant Cd_n$ в силу (1). Из этой оценки и условия (2) вытекает, что $I_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $z \in D$ $(z \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots)$.

Переходя в равенстве (10) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$f(z) = f(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{z_k \in G_n} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right). \tag{11}$$

Коротко формулу (11) будем записывать в виде (4), считая, что суммирование в (4) производится в следующем порядке: сначала берутся слагаемые, которые относятся к полюсам, лежащим внутри Γ_1, затем к этим слагаемым последовательно добав-

ляются группы слагаемых, относящихся к полюсам, лежащим между Γ_1 и Γ_2, между Γ_2 и Γ_3 и т. д. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 1 можно обобщить, заменив неравенство (3) неравенством

$$|f(z)| \leqslant M|z|^p \quad z \in \Gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $p \geqslant 0$ — целое (при сохранении остальных условий теоремы 1). В этом случае имеет место следующая формула:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \ldots + \frac{z}{z_k^{p+1}} \right). \tag{13}$$

Для доказательства формулы (13) достаточно применить теорему о вычетах к интегралу $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{z^p f(\zeta)}{\zeta^p (\zeta - z)} d\zeta$.

2. Разложение функции ctg z на элементарные дроби. Рассмотрим функцию $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$. Эта функция является мероморфной, имеет простые полюсы в точках $z_k = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, не имеет других конечных особых точек и $\operatorname{res}_{z=k\pi} f(z) = 1$ (пример 5 § 28). Покажем, что функция $f(z)$ ограничена на правильной системе контуров $\{\Gamma_n\}$, где Γ_n — квадрат $A_nB_nC_nD_n$ (рис. 78) с центром в точке $z = 0$, стороны которого параллельны координатным осям, а их длины равны $2\alpha_n$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

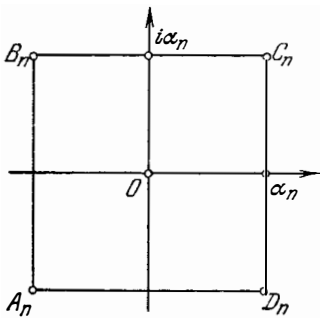


Рис. 78

Пусть $z \in C_nD_n$; тогда $z = \alpha_n + iy$, где $-\alpha_n \leqslant y \leqslant \alpha_n$, и, следовательно,

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n + iy \right) \right| = |\operatorname{tg} iy| = \left| \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right|,$$

откуда получаем

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant 1, \quad z \in C_nD_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Пусть $z \in B_nC_n$, тогда $z = x + i\alpha_n$, где $-\alpha_n \leqslant x \leqslant \alpha_n$,

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \left| \frac{1 + e^{-2\alpha_n} e^{2ix}}{1 - e^{-2\alpha_n} e^{2ix}} \right| \leqslant \frac{1 + e^{-2\alpha_n}}{1 - e^{-2\alpha_n}},$$

откуда находим

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}, \quad z \in B_nC_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Так как $|\operatorname{ctg}(-z)| = |\operatorname{ctg} z|$, то неравенства (14) и (15) имеют место соответственно на сторонах A_nB_n и D_nA_n квадрата $A_nB_nC_nD_n$, т. е. на контуре Γ_n. Итак,

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant M, \quad z \in \Gamma_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Отсюда следует, что функция $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ также ограничена на системе контуров Γ_n. Далее, $f(0) = 0$, так как функция $f(z)$, регулярная в точке $z = 0$, нечетна. Итак, в формуле (4) $f(0) = 0$, $A_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right), \tag{16}$$

где штрих означает, что $k \neq 0$.

Заметим, что между контурами Γ_{k-1} и Γ_k лежат ровно два полюса функции $f(z)$, а именно $z_k = k\pi$ и $\tilde{z}_k = -k\pi$. Объединяя в сумме (16) слагаемые, соответствующие этим полюсам, получаем $\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$. Таким образом, справедлива формула

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \tag{17}$$

Пример 1. Разложим на элементарные дроби следующие мероморфные функции: а) $\operatorname{tg} z$, б) $\frac{1}{\sin^2 z}$, в) $\frac{1}{e^z - 1}$.

а) Так как $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, то из формулы (16) получаем

$$\operatorname{tg} z = -\frac{1}{z - (\pi/2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - (\pi/2) - k\pi} + \frac{1}{z - (\pi/2) + k\pi}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{2k-1}{2}\pi} + \frac{1}{z + \frac{2k-1}{2}\pi}\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg} z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (2k-1)^2\pi^2/4}. \tag{18}$$

б) Так как $1/\sin^2 z = -(\operatorname{ctg} z)'$, то, дифференцируя равномерно сходящийся ряд (16), получаем

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(z-k\pi)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k\pi)^2}. \tag{19}$$

в) Так как

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-z/2}-e^{z/2}+e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = -\frac{1}{2} + \operatorname{cth}\frac{z}{2},$$

то, используя тождество $\operatorname{cth}\zeta = i\operatorname{ctg}(i\zeta)$ и формулу (17), получаем $\dfrac{1}{e^z-1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}$. □

Пример 2. Покажем, что

$$\text{а)}\quad s_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi}\right), \tag{20}$$

$$\text{б)}\quad s_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{1}{4a^4}\left(\frac{\pi^2a^2}{\operatorname{sh}^2 a\pi} + \pi a \operatorname{cth} a\pi - 2\right), \tag{21}$$

предполагая, что ни один из знаменателей в s_1 и s_2 не обращается в нуль.

а) Полагая в формуле (17) $z = ia\pi$, получаем

$$\operatorname{ctg} ia\pi = -i\operatorname{cth} a\pi = -\frac{i}{a\pi} - \frac{2ai}{\pi}\,s_1,$$

откуда вытекает формула (20).

в) Формула (21) получается из (20) дифференцированием по a. □

3. **Разложение целой функции в бесконечное произведение.** Известно, что всякий многочлен n-й степени $P_n(z)$ можно представить в виде произведения

$$P_n(z) = A(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) = A\prod_{k=1}^{n}(z-z_k), \tag{22}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — корни этого многочлена (среди них могут быть и кратные).

Формулу (22) можно обобщить (при некоторых условиях) на целые функции. Интерес представляет лишь случай, когда целая функция $f(z)$ имеет счетное число нулей. Действительно, если целая функция $f(z)$ отлична от нуля во всей комплексной плоскости, то функция $F(z) = \ln f(z)$, где взята одна из регулярных ветвей логарифма (пример 6 § 24), является целой, причем $F'(z) = f'(z)/f(z)$, откуда

$$f(z) = e^{F(z)}. \tag{23}$$

Далее, если целая функция $f(z)$ имеет лишь конечное число нулей a_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) и p_k — кратность нуля a_k, то функция $\Phi(z) = f(z)/\varphi(z)$, где $\varphi(z) = (z - a_1)^{p_1} \ldots (z - a_s)^{p_s}$, нигде не обращается в нуль и, следовательно, представляется в виде (23), откуда получаем формулу $f(z) = (z - a_1)^{p_1} \ldots (z - a_s)^{p_s} e^{F(z)}$, т. е.

$$f(z) = e^{F(z)} \prod_{k=1}^{s} (z - a_k)^{p_k}, \tag{24}$$

где $F(z)$ — некоторая целая функция.

Пусть целая функция $f(z)$ имеет бесконечное число нулей; попытаемся обобщить формулу (24) на этот случай. Вместо конечных произведений в этом случае возникают бесконечные произведения. Поэтому нам потребуются некоторые сведения о бесконечных произведениях (см. [1], [11]).

Определение 2. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \tag{25}$$

называется *сходящимся*, если все его множители отличны от нуля и существует конечный и отличный от нуля предел A последовательности $A_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$.

Отметим, что необходимым и достаточным условием сходимости бесконечного произведения (25) является сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k), \tag{26}$$

где $-\pi < \arg(1 + a_k) \leqslant \pi$, $k = 1, 2, \ldots$

Определение 3. Бесконечное произведение (25) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (26) сходится абсолютно.

Можно показать, что абсолютная сходимость бесконечного произведения (25) равносильна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Понятие сходимости бесконечного произведения естественным образом обобщается на случай, когда его множители — функции комплексного переменного. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_k(z)], \tag{27}$$

где $f_k(z)$ — функции, регулярные в области D.

Определение 4. Бесконечное произведение (27) называется *сходящимся в области* D, если его множители (за исключением, быть может, конечного числа их) не обращаются в нуль в этой области и если произведение отличных от нуля множителей сходится в каждой точке области D.

Определение 5. Бесконечное произведение (27), множители которого отличны от нуля в области D, называется *равномерно сходящимся в этой области*, если последовательность функций $F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} [1 + f_k(z)]$ равномерно сходится в области D.

Если бесконечное произведение (27) равномерно сходится в области D, то функция $F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + f_k(z)]$ регулярна в области D в силу теоремы Вейерштрасса (§ 12).

Из теоремы 1 о разложении мероморфной функции на элементарные дроби можно получить следующую теорему о представлении целой функции в виде бесконечного произведения:

Теорема 2. *Если целая функция* $f(z)$ *такова, что мероморфная функция* $F(z) = f'(z)/f(z)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то*

$$f(z) = f(0)\, e^{Bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}, \quad B = \frac{f'(0)}{f(0)}. \tag{28}$$

Бесконечное произведение (28) *равномерно сходится в каждой ограниченной части плоскости.*

В этой формуле каждый сомножитель $\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$ повторяется столько раз, какова кратность нуля z_k.

Доказательство. Функция $F(z)$ имеет простые полюсы в точках z_k, где z_k — нули функции $f(z)$, и не имеет других полюсов. Тогда $A_k = \operatorname{res}_{z=z_k} F(z) = n_k$, где n_k — кратность нуля z_k функции $f(z)$ (§ 30). По теореме 1 имеем

$$F(z) = F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right). \tag{29}$$

Так как $F(z) = \frac{d}{dz} [\ln f(z)]$, где для логарифма выбрана аналитическая ветвь, то интегрируя ряд (29) по некоторой кривой, соединяющей точки 0, z и не проходящей через нули функции $f(z)$, получаем

$$\ln f(z) - \ln f(0) = F(0)\, z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + \frac{z}{z_k}\right]. \tag{30}$$

Потенцируя (30), находим $f(z) = f(0)\, e^{F(0)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$, где $F(0) = f'(0)/f(0)$, и формула (28) доказана.

Замечание 2. В условиях, указанных в замечании 1, формула (28) заменяется следующей формулой:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{h_k(z)},$$

где $h_k(z) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_k}\right)^p$, $g(z)$ — многочлен степени не выше p.

4. Разложение синуса в бесконечное произведение. Рассмотрим целую функцию $f(z) = (\sin z)/z$. Эта функция имеет простые нули в точках $z_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Далее, функция $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, можно применить формулу (28). Так как $f(z) = (\sin z)/z = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots$, то $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, и по формуле (28) находим

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}}\right]. \tag{31}$$

В формуле (31) сгруппированы множители, относящиеся к нулям $k\pi$ и $-k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$) синуса. Преобразуя выражение в квадратных скобках, окончательно получаем

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{32}$$

Пример 3. Разложим в бесконечное произведение целую функцию $e^z - 1$. Имеем

$$e^z - 1 = e^{z/2}\left(\frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{2}\right) = e^{z/2} \operatorname{sh} \frac{z}{2}.$$

Используя равенство $\operatorname{sh} \zeta = -i \sin i\zeta$ и формулу (32), получаем

$$e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right). \quad \square$$

5. Обращение степенно́го ряда. В заключение главы V в качестве примера на применение теории вычетов рассмотрим задачу об обращении степенно́го ряда, т. е. задачу о нахождении коэффициентов ряда

$$z = h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n, \tag{33}$$

где $z=h(w)$ — функция, обратная к регулярной в точке z_0 функции $w=f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $f'(z_0)\neq 0$, $w_0=f(z_0)$.

Так как $f'(z_0)\neq 0$, то по теореме об обратной функции (§ 13) существуют круг K: $|z-z_0|<\rho$ и круг K_1: $|w-w_0|<\rho_1$ такие, что для каждого $w\in K_1$ уравнение $f(z)=w$ имеет единственное решение $z\in K$. Тем самым определена однозначная функция $z=h(w)$, регулярная в круге K_1. Найдем коэффициенты ряда (33) для этой функции.

Рассмотрим интеграл

$$I(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta; \tag{34}$$

здесь γ — граница круга K, $w\in K_1$. Подынтегральная функция $F(\zeta)=\zeta f'(\zeta)/(f(\zeta)-w)$ регулярна внутри γ, за исключением точки $z=h(w)$, которая является простым полюсом для $F(\zeta)$, и по теореме о вычетах получаем

$$I(w)=\operatorname*{res}_{\zeta=h(w)}F(\zeta)=\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)'}\right]_{\zeta=h(w)}=h(w)=z,$$

т. е.

$$z=h(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta. \tag{35}$$

Имеем

$$\frac{1}{f(\zeta)-w}=\frac{1}{f(\zeta)-w_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w_0)^n}{(f(\zeta)-w_0)^{n+1}}. \tag{36}$$

Ряд (36) сходится равномерно по ζ ($\zeta\in\gamma$), так как $|w-w_0|<\rho_1$ ($w\in K_1$), а $|f(\zeta)-w_0|\geqslant\rho_1$ ($\zeta\in\gamma$). Умножая (36) на $\frac{1}{2\pi i}\zeta f'(\zeta)$ и интегрируя почленно вдоль γ, получаем

$$z=h(w)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(w-w_0)^n,$$

где

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\,d\zeta,\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{37}$$

В формуле (37) $b_0=z_0$. При $n\geqslant 1$ из (37) интегрированием по частям находим

$$b_n=\frac{1}{2\pi i n}\int_{\gamma}\frac{1}{[f(\zeta)-w_0]^n}\,d\zeta. \tag{38}$$

Подынтегральная функция в (38) имеет внутри γ единственную особую точку, а именно полюс n-го порядка $\zeta = z_0$. Находя вычет этой функции по формуле (7) § 28, получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right]^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

Ряд (33), коэффициенты которого вычисляются по формулам (39) ($b_0 = z_0$), называется *рядом Бурмана — Лагранжа.*

Приведем формулы для вычисления коэффициентов b_1, b_2, b_3 ряда (33) через коэффициенты a_n ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Имеем

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad b_3 = \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1 a_3).$$

Пример 4. Пусть $f(z) = ze^{-az}$ ($z_0 = 0$, $w_0 = 0$). Тогда, вычисляя коэффициенты b_n по формулам (39), получаем

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{anz}) = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

и, следовательно, $z = h(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n$. □

Глава VI

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие конформного отображения было введено в § 8. В этой главе рассматриваются общие свойства конформных отображений и детально изучаются отображения элементарными функциями.

§ 32. Локальные свойства отображений регулярными функциями

1. Теоремы об обратной функции. В § 13 доказана теорема об обратной функции к функции $f(z)$, регулярной в точке z_0, в случае, когда $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим случай, когда $f'(z_0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$ и*

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

где $n \geqslant 2$. Тогда существуют окрестности U, V точек z_0, $w_0 = f(z_0)$ соответственно и функция $z = \psi(w)$ такие, что

а) *уравнение*

$$f(z) = w$$

(относительно z) при каждом $w \in V$, $w \neq w_0$, имеет ровно n различных решений $z = \psi(w)$, принадлежащих U;

б) *функция $z = \psi(w)$ аналитична в области V, $w \neq w_0$ и*

$$f(\psi(w)) \equiv w, \quad w \in V. \tag{1}$$

Из (1) следует, что функция $z = \psi(w)$ является обратной к функции $w = f(z)$, $z \in U$. Эта обратная функция в силу а) является n-значной в области V, $w \neq w_0$.

Доказательство. По условию теоремы точка z_0 является нулем функции $f(z) - f(z_0)$ порядка n, т. е.

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n h(z),$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке z_0 и $h(z_0) \neq 0$ (п. 5 § 12). Обозначая $w - w_0 = \zeta^n$, получаем $\zeta^n = (z - z_0)^n h(z)$, откуда

$\zeta = (z - z_0)\sqrt[n]{h(z)}$. Функция $\sqrt[n]{h(z)}$ распадается в окрестности точки z_0 на регулярные ветви, так как $h(z_0) \neq 0$ (п. 2 § 24). Пусть $h_1(z)$ — одна из этих ветвей и $\zeta = (z - z_0) h_1(z)$. Тогда функцию $w = f(z)$ можно представить в виде суперпозиции двух регулярных функций

$$w = w_0 + \zeta^n, \tag{2}$$

$$\zeta = \zeta(z) = (z - z_0) h_1(z), \tag{3}$$

где функция $h_1(z)$ регулярна в точке z_0 и $h_1(z_0) \neq 0$.

Функция (3) удовлетворяет условиям теоремы § 13, так как $\zeta'(z_0) = h_1(z_0) \neq 0$. По этой теореме существует окрестность U точки z_0, которую функция $\zeta = \zeta(z)$ взаимно однозначно отображает на некоторый круг K: $|\zeta| < \rho$, $\rho > 0$ ($\zeta_0 = \zeta(z_0) = 0$). При этом обратной к функции $\zeta = \zeta(z)$, $z \in U$, является функция $z = g(\zeta)$, регулярная в круге K.

Функция $\zeta = \sqrt[n]{w - w_0}$, обратная к функции (2), n-значна и аналитична в кольце V: $0 < |w - w_0| < \rho^n$ (§ 22). Следовательно, функция $z = \psi(w) = g(\sqrt[n]{w - w_0})$, обратная к функции $w = f(z)$, $z \in U$, n-значна и аналитична в кольце V как суперпозиция регулярной и аналитической функций (§ 22).

Следствие 1. *При условиях теоремы* 1 *точка* w_0 *является алгебраической точкой ветвления порядка* n *для функции* $z = \psi(w)$, *обратной к функции* $w = f(z)$, *и в окрестности точки* w_0 *имеет место разложение в ряд*

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\sqrt[n]{w - w_0})^k,$$

где $c_0 = z_0$, $c_1 \neq 0$.

Действительно, $\psi(w) = g(\sqrt[n]{w - w_0})$, а $g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$, где $c_0 = g(0) = z_0$ и $c_1 \neq 0$, так как из (3) по формуле для производной обратной функции (§ 13, формула (2)) имеем

$$c_1 = g'(0) = \frac{1}{\zeta'(z_0)} = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0.$$

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *При условиях теоремы* 1 *существует функция* $z = g(\zeta)$, $z_0 = g(0)$, *регулярная в точке* $\zeta = 0$ *и такая, что*

$$f(g(\zeta)) = f(z_0) + \zeta^n$$

в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$. *При этом*

$$g'(0) = \sqrt[n]{\frac{n!}{f^{(n)}(z_0)}}.$$

Пример 1. Пусть точка z_0 — полюс функции $f(z)$. Рассмотрим уравнение

$$f(z)=A. \tag{4}$$

Пусть U — малая окрестность точки z_0. Покажем, что существует такое α, что для каждого A, удовлетворяющего неравенству $|A|>\alpha$, уравнение (4) имеет ровно n различных решений, принадлежащих U, где n — порядок полюса z_0 функции $f(z)$.

а) Если $z_0\neq\infty$, то функция $g(z)=1/f(z)$ регулярна в точке z_0 и $g(z_0)=g'(z_0)=\ldots=g^{(n-1)}(z_0)=0$, $g^{(n)}(z_0)\neq 0$ (§ 18). Из § 13 и теоремы 1 вытекает, что уравнение $g(z)=1/A$, равносильное уравнению (4), имеет ровно n различных решений $z\in U$, если $1/|A|<\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$.

б) В случае $z_0=\infty$ рассмотрим взаимно однозначное отображение $\zeta=1/z$ окрестности точки $z=\infty$ на окрестность точки $\zeta=0$ (§ 8). Тогда число решений уравнения (4) в окрестности точки $z=\infty$ совпадает с числом решений уравнения $f(1/\zeta)=A$ в окрестности точки $\zeta=0$. Функция $h(\zeta)=f(1/\zeta)$ имеет полюс порядка n в точке $\zeta=0$ (§ 18). Следовательно, как и в случае а), уравнение $h(\zeta)=A$ имеет ровно n решений. □

2. Однолистные функции. Определение однолистности функции в области было дано в § 8. Введем понятие однолистности функции в точке.

Определение. Функция $f(z)$ называется *однолистной в точке* z_0, если эта функция однолистна в некоторой окрестности точки z_0.

Очевидно, что *однолистная в области функция является однолистной в каждой точке этой области.* Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: однолистная в каждой точке области D функция может не быть однолистной в области D (см. ниже пример 5).

Рассмотрим критерии однолистности функции в точке.

Теорема 2. *Функция* $f(z)$, *регулярная в точке* $z_0\neq\infty$, *является однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда* $f'(z_0)\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Если $f'(z_0)=0$ и $f(z)\not\equiv\text{const}$, то по теореме 1 в любой окрестности точки z_0 найдутся по крайней мере две различные точки z_1 и z_2 такие, что $f(z_1)=f(z_2)$, т. е. функция $f(z)$ не является однолистной в точке z_0. Очевидно, функция $f(z)\equiv\text{const}$ также неоднолистна в точке z_0.

Достаточность. Если $f'(z_0)\neq 0$, то по теореме § 13 функция $f(z)$ однолистна в точке z_0.

Следствие 3. *Функция*

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots,\quad |z|>R,$$

регулярная в точке $z=\infty$, *является однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда* $c_{-1}=-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=f(1/\zeta)=c_0+c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\ldots,\ |\zeta|<1/R,$$

регулярную в точке $\zeta=0$. Функция $\zeta=1/z$ взаимно однозначно отображает окрестность $|z|>R$ точки $z=\infty$ на окрестность $|\zeta|<1/R$ точки $\zeta=0$ (§ 8). Следовательно, для однолистности функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ необходимо и достаточно, чтобы функция $g(\zeta)$ была однолистна в точке $\zeta=0$, т. е. по теореме 2 должно выполняться условие $g'(0)=c_{-1}\neq 0$.

Следствие 4. *Функция* $f(z)$, *имеющая полюс в точке* z_0 (*конечной или бесконечной*), *является однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда этот полюс простой* (*первого порядка*).

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему 2 (следствие 3, если $z_0=\infty$) к функции $1/f(z)$. Впрочем, следствие 4 вытекает также из примера 1.

Пример 2. а) Функция $f(z)=z^2$ однолистна в каждой точке $z\neq 0,\ \infty$ и неоднолистна в точках $z=0$ и $z=\infty$.

б) Функция $f(z)=1/z^2$ однолистна в каждой точке $z\neq 0,\ \infty$ и неоднолистна в точках $z=0$ и $z=\infty$. □

Пример 3. Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то эта функция не является однолистной в точке z_0. Действительно, в любой окрестности точки z_0 уравнение $f(z)=A$ по теореме Пикара (§ 19) имеет бесконечное число решений для каждого значения A, кроме, быть может, одного, т. е. функция $f(z)$ неоднолистна в точке z_0. □

Пример 4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением двух точек z_1, z_2, которые являются полюсами функции $f(z)$. Покажем, что эта функция не является однолистной в области D. В самом деле, если $|A|$ — достаточно большое число, то уравнение $f(z)=A$ имеет по крайней мере два решения $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, где точка $\tilde{z}_j$ близка к точке z_j $(j=1, 2)$ (пример 1), т. е. функция $f(z)$ неоднолистна в области D. □

Пример 5. а) Функция $f(z)=e^z$ однолистна в каждой точке $z\neq\infty$, но не является однолистной во всей комплексной плоскости. Действительно, эта функция во всех точках $z_k=a+2k\pi i$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ принимает одно и то же значение e^a.

б) Функция $f(z)=z^2$ однолистна в каждой точке кольца $1<|z|<3$, но не является однолистной в этом кольце, так как $f(z)$ — четная функция: $f(z)=f(-z)$. □

Подведем некоторые итоги. Пусть функция $f(z)$ регулярна и однолистна в области D с выколотыми точками $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Среди этих точек z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ не может быть существенно особой точки функции $f(z)$ (пример 3) и не может быть двух полюсов (пример 4). Следовательно, функция $f(z)$ может иметь только один полюс, причем первого порядка (следствие 4).

Таким образом, необходимыми условиями однолистности функции $f(z)$ в области D являются следующие условия:

1) функция $f(z)$ должна быть регулярна в области D, за исключением, быть может, одной точки — простого полюса;

2) в каждой конечной точке $z \in D$, в которой функция $f(z)$ регулярна, должно выполняться условие $f'(z) \neq 0$;

3) если точка $z=\infty$ принадлежит области D и в этой точке функция $f(z)$ регулярна, то должно выполняться условие $c_{-1} = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$.

Условия 1)—3), вообще говоря, не являются достаточными для однолистности функции в области (пример 5). Достаточные условия будут рассмотрены в § 33.

3. Принцип сохранения области.

Теорема 3 (принцип сохранения области). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \not\equiv \text{const}$. Тогда при отображении $w=f(z)$ образом области является область.*

Доказательство. Пусть G — образ области D при отображении $w=f(z)$. Покажем, что G — открытое множество. Пусть точка w_0 принадлежит множеству G, т. е. $w_0=f(z_0)$, где $z_0 \in D$. По теореме 1 и теореме § 13 для любой точки w из достаточно малой окрестности точки w_0 существует по крайней мере одна точка z из окрестности точки z_0 такая, что $w=f(z)$, т. е. $w \in G$. Таким образом, существует окрестность точки w_0, целиком принадлежащая G.

Связность множества G вытекает из непрерывности отображения $w=f(z)$, так как при этом отображении образом любой непрерывной кривой, лежащей в области D, является непрерывная кривая, которая состоит из точек множества G. Следовательно, G — открытое связное множество, т. е. область.

Следствие 5. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением, быть может, полюсов, и $f(z) \not\equiv \text{const}$. Тогда образом области D при отображении $w=f(z)$ является область расширенной комплексной плоскости w.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ имеет один полюс в конечной точке $z_0 \in D$. В остальных случаях доказательство аналогично.

Пусть D_0 — область D с выколотой точкой z_0. По теореме 3 образом области D_0 при отображении $w=f(z)$ является область G_0. Из примера 1 вытекает, что существует кольцо $R<|w|<\infty$, принадлежащее G_0. Следовательно, множество $G=G_0 \cup \{w=\infty\}$ является областью.

4. Принцип максимума модуля.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D, непрерывна вплоть до границы этой области и $f(z) \not\equiv \text{const}$. Тогда максимум модуля этой функции*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$$

достигается только на границе области D.

Доказательство. Рассмотрим точку $z_0 \in D$ и докажем, что существует точка $z_1 \in D$ такая, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. По теореме 3 образом области D при отображении $w = f(z)$ является область G, для которой точка $w_0 = f(z_0)$ является внутренней. Значит, можно выбрать точку $w_1 \in G$ на прямой, проходящей через точки 0, w_0, такую, что $|w_1| > |w_0|$ (рис. 79). Эта точка w_1

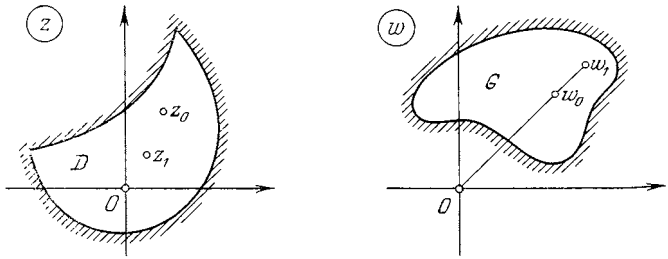


Рис. 79

является образом некоторой точки $z_1 \in D$, т. е. $w_1 = f(z_1)$. Следовательно, $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Следствие 6. *Если функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ регулярна в области D, то $|f(z)|$ не может иметь локального максимума во внутренней точке области D.*

В самом деле, из доказательства теоремы 4 вытекает, что в любой окрестности точки $z_0 \in D$ существует точка z_1 такая, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Следствие 7. *Если регулярная в области D функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ не имеет нулей в области D, то $|f(z)|$ не может иметь минимума во внутренней точке области D.*

Действительно, в этом случае функция $1/f(z)$ регулярна в области D и по теореме 4 в любой окрестности точки $z_0 \in D$ существует точка $z_1 \in D$ такая, что $|1/f(z_1)| > |1/f(z_0)|$, т. е. $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.

Пример 6. Пусть функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ регулярна в ограниченной области D, непрерывна вплоть до границы Γ этой области и $|f(z)|_{z \in \Gamma} \equiv c = \text{const}$. Покажем, что функция $f(z)$ имеет хотя бы один нуль в области D.

В самом деле, если $f(z) \not\equiv 0$ для всех $z \in D$, то в силу следствия 7 имеем $|f(z)| > c$ при $z \in D$, что противоречит утверждению теоремы 4: $|f(z)| < c$ при $z \in D$. □

Лемма Шварца. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и $|f(z)|<1$ при $|z|<1$. Тогда во всем круге $|z|<1$ имеет место неравенство*

$$|f(z)|\leqslant|z|.$$

Если хотя бы в одной точке $z\neq 0$ круга $|z|<1$ выполняется равенство $|f(z)|=|z|$, то

$$f(z)=e^{i\alpha}z,$$

где α — действительное число.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(z)=f(z)/z$. Эта функция регулярна в круге $|z|<1$, так как $f(0)=0$ (§ 18). На окружности $|z|=\rho$, $0<\rho<1$ имеем $|g(z)|=|f(z)|/|z|<1/\rho$. Следовательно, по теореме 4 во всем круге $|z|\leqslant\rho$ имеет место неравенство $|g(z)|<1/\rho$. Так как ρ можно взять как угодно близким к единице, то $|g(z)|\leqslant 1$, т. е. $|f(z)|\leqslant|z|$ при $|z|<1$.

Далее, если в некоторой точке z_0 ($|z_0|<1$) функция $|g(z)|$ достигает своего максимума, т. е. $|g(z_0)|=1$, то $g(z)\equiv\text{const}$ (следствие 6), т. е. $g(z)=e^{i\alpha}$ и $f(z)=e^{i\alpha}z$.

Имеет место следующий принцип максимума и минимума для гармонических функций.

Теорема 5. *Пусть функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной области D, непрерывна вплоть до границы этой области и $u(x, y)\not\equiv\text{const}$. Тогда максимум и минимум этой функции достигаются только на границе области D.*

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать теорему для случая максимума, так как точка минимума гармонической функции $u(x, y)$ является точкой максимума функции $-u(x, y)$, которая также гармоническая.

Предположим противное: пусть максимум гармонической функции $u(x, y)$ достигается во внутренней точке $z_0=x_0+iy_0$ области D. Рассмотрим любую односвязную область D_1, лежащую в D и содержащую внутри себя точку z_0. В области D_1 существует регулярная функция $f(z)$ такая, что $\operatorname{Re}f(z)=u(x, y)$ (§ 7). Тогда функция $g(z)=e^{f(z)}$ регулярна в области D_1 и модуль этой функции $|g(z)|=e^{u(x, y)}$ достигает своего максимума в точке z_0. Следовательно, $g(z)\equiv\text{const}$ (теорема 4), откуда $f(z)\equiv\equiv\text{const}$ и $u(x, y)\equiv\text{const}$ при $z\in D_1$. В силу произвольности области D_1 имеем $u(x, z)\equiv\text{const}$ при $z\in D$, что противоречит условию теоремы.

§ 33. Общие свойства конформных отображений

1. Определение конформного отображения. В § 8 дано определение конформного отображения областей, не содержащих бесконечно удаленную точку. Было отмечено, что такие отображения осуществляются однолистными регулярными функциями. Для областей расширенной комплексной плоскости введем следующее

Определение 1. Отображение $w=f(z)$ области D расширенной комплексной плоскости z на область G расширенной комплексной плоскости w называется *конформным*, если

1) это отображение взаимно однозначно, т. е. функция $f(z)$ однолистна в области D;

2) функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением, быть может, одной точки, в которой эта функция имеет полюс первого порядка.

Рассмотрим локальные свойства конформного отображения $w=f(z)$ в окрестности конечной точки z_0, в которой функция $f(z)$ регулярна. Так как критерием однолистности функции $f(z)$ в точке z_0 является условие $f'(z_0)\neq 0$ (§ 32), то из геометрического смысла производной (§ 8) вытекают следующие два свойства конформного отображения:

1. *Постоянство растяжений.* Линейное растяжение в точке z_0 одинаково для всех кривых, проходящих через эту точку, и равно $|f'(z_0)|$.

2. *Сохранение углов.* Все кривые в точке z_0 поворачиваются на одинаковый угол, равный $\arg f'(z_0)$.

Отметим следующие свойства конформных отображений:

3. *Отображение, обратное к конформному отображению, также является конформным.*

4. *Суперпозиция двух конформных отображений также является конформным отображением.*

Эти свойства вытекают из определения 1 и свойств однолистных и обратных функций (§§ 8, 13, 32).

2. Конформность в бесконечности. Введем понятие угла между кривыми в бесконечно удаленной точке.

Определение 2. *Углом между кривыми* γ_1, γ_2, *проходящими через точку* $z=\infty$, называется угол между образами этих кривых при отображении $\zeta=1/z$ в точке $\zeta=0$.

Из этого определения и свойства 2 вытекает, что отображение $\zeta=1/z$ сохраняет углы между кривыми в каждой точке расширенной комплексной плоскости.

Пример 1. Пусть два луча γ_1, γ_2 выходят из одной и той же конечной точки z_0. Тогда угол между лучами γ_1, γ_2 в точке $z=\infty$ равен углу между этими лучами в точке z_0, взятому с противоположным знаком.

Доказательство. Ограничимся, для простоты, случаем, когда $z_0=0$. Пусть γ_j — луч: $\arg z=\varphi_j$ $(j=1, 2)$. Тогда угол между γ_1, γ_2 (в направлении от γ_1 к γ_2) в точке $z=0$ равен $\alpha=\varphi_2-\varphi_1$ (рис. 80). Образом луча γ_j при отображении $\zeta=1/z$ является луч $\tilde{\gamma}_j$: $\arg\zeta=-\varphi_j$ $(j=1, 2)$ (§ 8) и поэтому угол между $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ в точке $\zeta=0$ равен $(-\varphi_2)-(-\varphi_1)=-\alpha$ (рис. 80). Следовательно, по определению 2 угол между лучами γ_1, γ_2 в точке $z=\infty$ равен $-\alpha$. □

Из определения 2 и свойства 2 вытекает следующее свойство конформного отображения:

5. *При конформном отображении области D расширенной комплексной плоскости сохраняются углы между кривыми в каждой точке этой области.*

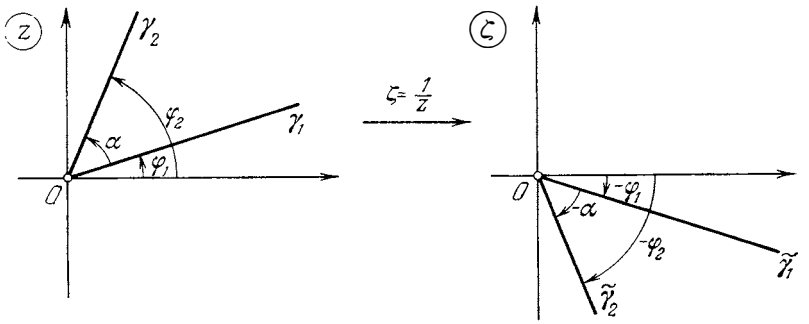


Рис. 80

Доказательство. В силу определения 1 и свойства 2 нужно доказать справедливость следующих утверждений:

1. Если функция

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z| > R,$$

регулярна в точке $z = \infty$ и $c_{-1} \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между кривыми в точке $z = \infty$.

2. Если функция $f(z)$ имеет полюс первого порядка в точке z_0 (конечной или бесконечной), то отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между кривыми в точке z_0.

Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично.

Представим функцию $w = f(z)$ в виде суперпозиции двух функций: $\zeta = 1/z$ и $w = g(\zeta) = f(1/\zeta) = c_0 + c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \ldots$ По определению 2 отображение $\zeta = 1/z$ сохраняет углы между кривыми в точке $z = \infty$. Отображение $w = g(\zeta)$ сохраняет углы между кривыми в точке $\zeta = 0$, так как $g'(0) = c_{-1} \neq 0$ (свойство 2). Следовательно, отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между кривыми в точке $z = \infty$.

Замечание 1. Можно показать, что отображение $\zeta = 1/z$ является поворотом сферы Римана на 180° вокруг диаметра с концами в точках $z = \pm 1$ (их образами при стереографической проекции). Следовательно, это отображение сохраняет углы между кривыми в каждой точке сферы Римана. Поэтому определение 2 является естественным. Можно показать, что любое конформное отображение сохраняет углы между кривыми на сфере Римана.

3. Соответствие границ при конформном отображении. Пусть D и G — ограниченные односвязные области, границами которых являются простые замкнутые кусочно гладкие кривые Γ и $\widetilde{\Gamma}$ соответственно. Тогда имеет место

Теорема 1 (принцип соответствия границ). *Если функция $w=f(z)$ конформно отображает область D на область G, то*

1) *функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание области D, т. е. можно доопределить $f(z)$ на Γ так, что получится непрерывная в $\overline{D}$ функция;*

2) *эта функция $w=f(z)$ отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\widetilde{\Gamma}$ с сохранением ориентации.*

Доказательство этой теоремы содержится в [5].

Докажем теорему, обратную к теореме 1. Пусть D и G — ограниченные односвязные области с простыми кусочно гладкими граничными кривыми Γ и $\widetilde{\Gamma}$ соответственно. Тогда имеет место

Теорема 2 (критерий однолистности функции в области). *Пусть функция $w=f(z)$, регулярная в области D и непрерывная вплоть до ее границы Γ, отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\widetilde{\Gamma}$ с сохранением ориентации. Тогда эта функция однолистна в области D и отображает конформно область D на область G.*

Доказательство. Нужно доказать, что

1) для каждой точки $w_0 \in G$ существует только одна точка $z_0 \in D$ такая, что $f(z_0)=w_0$, т. е. функция $f(z)-w_0$ имеет ровно один нуль в области D;

2) для каждой точки w_1, не принадлежащей области G, функция $f(z)$ не принимает значение w_1 при $z \in D$.

Докажем первое утверждение. По условию теоремы функция $f(z)-w_0$ не обращается в нуль на Γ, так как при $z \in \Gamma$ точка $w=f(z)$ принадлежит $\widetilde{\Gamma}$, а $w_0 \in G$. Значит, по принципу аргумента (§ 30) число нулей функции $f(z)-w_0$ в области D равно $N=(1/2\pi)\,\Delta_{\Gamma}\arg[f(z)-w_0]=(1/2\pi)\,\Delta_{\widetilde{\Gamma}}\arg(w-w_0)$. Так как точка w_0 лежит во внутренности замкнутой кривой $\widetilde{\Gamma}$ (рис. 81), то $\Delta_{\widetilde{\Gamma}}\arg(w-w_0)=2\pi$ и $N=1$.

Аналогично, если точка w_1 лежит во внешности кривой Γ, то $\Delta_{\widetilde{\Gamma}}\arg(w-w_1)=0$ (рис. 81) и уравнение $f(z)=w_1$ не имеет решений в области D.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 справедливы и для областей расширенной комплексной плоскости с кусочно гладкими границами: при конформном отображении граница области переходит в границу образа области взаимно однозначно с сохранением ориентации (см. [5]).

4. Теорема Римана. Фундаментальной теоремой теории конформных отображений является

Теорема 3 (теорема Римана). *Пусть D — односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда*

1) *существует функция $w=f(z)$, которая конформно отображает область D на круг $|w|<1$;*

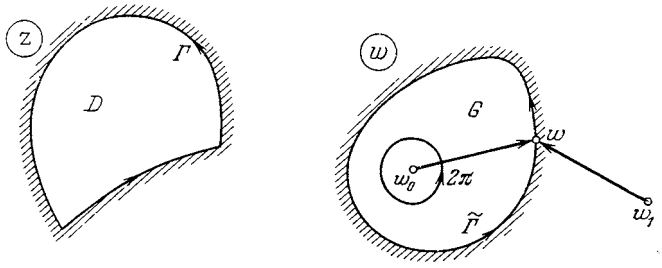


Рис. 81

2) *эта функция единственна, если выполняются условия*

$$f(z_0)=w_0, \quad \arg f'(z_0)=\alpha. \tag{1}$$

Здесь z_0, w_0 — заданные точки ($z_0\in D$, $|w_0|<1$), α — заданное действительное число.

Исключительными являются следующие области:

а) вся расширенная комплексная плоскость,

б) вся расширенная комплексная плоскость с одной выколотой точкой.

Эти области нельзя конформно отобразить на круг $|w|<1$. В самом деле, пусть функция $w=f(z)$ конформно отображает всю расширенную комплексную плоскость на круг $|w|<1$. Тогда эта функция регулярна и ограничена во всей расширенной комплексной плоскости и, следовательно, $f(z)\equiv\text{const}$ по теореме Лиувилля (§ 19). Аналогично, если функция $w=f(z)$ конформно отображает всю расширенную комплексную плоскость с выколотой точкой z_0 на круг $|w|<1$, то эта функция регулярна и ограничена при $z\neq z_0$. Тогда точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ (§ 18), т. е. функция $f(z)$ регулярна и ограничена во всей расширенной комплексной плоскости, и $f(z)\equiv$ $\equiv\text{const}$ по теореме Лиувилля.

Отметим, что если граница односвязной области D содержит две точки, то границей области D является некоторая кривая, проходящая через эти точки. Такую область по теореме 3 можно конформно отобразить на единичный круг. Доказательство теоремы 3 содержится в [5].

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. *Пусть границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки. Тогда существует одна и толь-*

ко одна функция $w=f(z)$, которая конформно отображает область D на область G так, что

$$f(z_0)=w_0, \quad \arg f'(z_0)=\alpha, \tag{2}$$

где $z_0\in D$, $w_0\in G$, α — действительное число.

Доказательство. Существование. По теореме 3 существует конформное отображение $\zeta=g(z)$ области D на круг $|\zeta|<1$ такое, что $g(z_0)=0$, $\arg g'(z_0)=0$ (рис. 82). Аналогично, существует конформное отображение $\zeta=h(w)$ области G на круг $|\zeta|<1$ такое, что $h(w_0)=0$, $\arg h'(w_0)=-\alpha$. Тогда

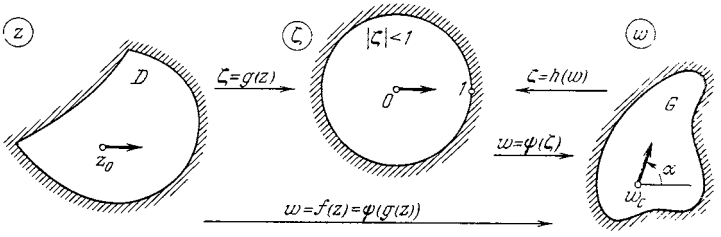


Рис. 82

функция $w=\psi(\zeta)$, обратная к функции $\zeta=h(w)$, конформно отображает круг $|\zeta|<1$ на область G так, что $\psi(0)=w_0$, $\arg\psi'(0)=\alpha$ (рис. 82). Следовательно, функция $w=f(z)=\psi(g(z))$ конформно отображает область D на область G и удовлетворяет условиям (2).

Единственность. Пусть две функции $w=f_j(z)$ $(j=1,2)$ конформно отображают область D на область G так, что

$$f_j(z_0)=w_0, \quad \arg f_j'(z_0)=\alpha, \quad j=1,\ 2.$$

Докажем, что $f_1(z)\equiv f_2(z)$ при $z\in D$.

По теореме 3 существует единственное конформное отображение $\zeta=h(w)$ области G на круг $|\zeta|<1$ такое, что $h(w_0)=0$, $\arg h'(w_0)=0$. Функции $\zeta=g_j(z)=h(f_j(z))$ $(j=1,\ 2)$ конформно отображают область D на круг $|\zeta|<1$ и удовлетворяют условиям

$$g_j(z_0)=0, \quad \arg g_j'(z_0)=\alpha, \quad j=1,\ 2.$$

Следовательно, по теореме 3 $g_1(z)\equiv g_2(z)$, т. е. $h(f_1(z))\equiv h(f_2(z))$, откуда $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

Замечание 3. Вместо единичного круга можно было взять какую-нибудь другую «каноническую» область, например, верхнюю полуплоскость. В дальнейшем, как правило, рассматриваются отображения на единичный круг или на верхнюю полуплоскость.

Итак, если границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки, то существует конформное отображение области D на область G, причем это отображение не единственно. Для единственности достаточно задать условия (2), которые называются *нормировкой конформного отображения.* Эта нормировка содержит три произвольных действительных параметра: u_0, v_0 ($w_0 = u_0 + iv_0$) и α. Вместо (2) можно задать другие условия, содержащие три независимых действительных параметра. Например:

1. Существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G, удовлетворяющее условиям

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1,$$

где z_0, w_0 — внутренние, а z_1, w_1 — граничные точки областей D и G соответственно.

2. Существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G, удовлетворяющее условиям

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где z_1, z_2, z_3 — различные граничные точки области D, а w_1, w_2, w_3 — различные граничные точки области G, занумерованные в порядке положительной ориентации граничных кривых областей D и G соответственно.

В случае неодносвязных областей вопрос о существовании конформного отображения является гораздо более сложным. Даже для простейших двусвязных областей D: $\rho < |z| < R$, G: $\rho_1 < |w| < R_1$ не всегда существует конформное отображение D на G (см. § 36). Теория конформных отображений многосвязных областей изложена в [5].

§ 34. Дробно-линейная функция

Функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — комплексные числа, называется *дробно-линейной.* Отображение, осуществляемое функцией (1), называется *дробно-линейным.* Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $w \not\equiv \text{const}$. В формуле (1) предполагается, что если $c \neq 0$, то $w(\infty) = a/c$, $w(-d/c) = \infty$, а если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Таким образом, дробно-линейная функция определена во всей расширенной комплексной плоскости. В частности, при $c = 0$ функция (1) является линейной, а отображение, осуществляемое линейной функцией, называется *линейным.*

Рассмотрим основные свойства дробно-линейных отображений.

1. Конформность.

Теорема 1. *Дробно-линейная функция конформно отображает расширенную комплексную плоскость на расширенную комплексную плоскость.*

Доказательство. Очевидно, функция (1) регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением точки $z=-d/c$ — полюса первого порядка.

Решая уравнение (1) относительно z, находим функцию

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}, \quad ad-bc\neq 0, \tag{2}$$

обратную к функции (1). Функция (2) однозначна на всей расширенной комплексной плоскости и также является дробно-линейной. Следовательно, дробно-линейная функция однолистна в расширенной комплексной плоскости.

Замечание 1. Имеет место обратное утверждение: если функция $w=f(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость на расширенную комплексную плоскость, то эта функция является дробно-линейной.

В самом деле, по определению 1 § 33 функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости, кроме одной точки — простого полюса. Если эта точка z_0 — конечная и $\operatorname{res}\limits_{z=z_0} f(z)=A$, то функция $g(z)=f(z)-A/(z-z_0)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости. Следовательно, по теореме Лиувилля (§ 19) $g(z)\equiv \text{const}$, т. е. $f(z)$ — дробно-линейная функция. Если $z_0=\infty$, то $f(z)$ — целая функция и $f(z)=0(z)$ $(z\to\infty)$ (§ 19). Тогда по теореме Лиувилля $f(z)=az+b$.

2. Групповое свойство.

Теорема 2. *Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т. е.*

1) *суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением;*

2) *отображение, обратное к дробно-линейному, также является дробно-линейным.*

Доказательство. Свойство 2 доказано в п. 1. Докажем свойство 1. Пусть

$$\zeta=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, \quad a_1d_1-b_1c_1\neq 0, \tag{3}$$

$$w=\frac{a_2\zeta+b_2}{c_2\zeta+d_2}, \quad a_2d_2-b_2c_2\neq 0. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получаем

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

где $ad-bc=(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)\neq 0$, т. е. отображение (5) является дробно-линейным.

Замечание 2. Группа дробно-линейных отображений некоммутативна. Например, если $w(z)=1/z$, $\zeta(z)=z+1$, то

$$w(\zeta(z))=\frac{1}{z+1},\quad \zeta(w(z))=\frac{1}{z}+1,\quad w(\zeta(z))\neq\zeta(w(z)).$$

3. Круговое свойство.

Теорема 3. *При дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.*

Доказательство. Сначала рассмотрим линейное отображение $w=az+b$ $(a\neq 0)$. Это отображение сводится к подобию, повороту и переносу (§ 8). Следовательно, линейное отображение переводит окружности в окружности, а прямые — в прямые.

В случае, когда дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ не является линейной $(c\neq 0)$, представим ее в виде

$$w=A+\frac{B}{z+z_0}, \tag{6}$$

где $A=a/c$, $B=(bc-ad)/c^2$, $z_0=d/c$. Тогда отображение (6) сводится к последовательному выполнению следующих отображений:

$$\zeta=z+z_0,\quad \eta=\frac{1}{\zeta},\quad w=A+B\eta. \tag{7}$$

Первое и третье отображения (7) обладают круговым свойством, так как они линейные. Остается доказать, что второе отображение (7), т. е. отображение

$$w=\frac{1}{z}, \tag{8}$$

также обладает круговым свойством.

Уравнение любой окружности или прямой на плоскости $z=x+iy$ имеет вид

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0 \tag{9}$$

(если $\alpha=0$, то (9) — уравнение прямой). Так как

$$x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z},\quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),$$

то уравнение (9) записывается в виде

$$\alpha z\bar{z}+Dz+\bar{D}\bar{z}+\delta=0, \tag{10}$$

где $D=\frac{1}{2}(\beta-i\gamma)$. Подставляя в (10) $z=1/w$, получаем

$$\delta w\bar{w}+\bar{D}w+D\bar{w}+\alpha=0. \tag{11}$$

Следовательно, образом окружности (10) (прямой, если $\alpha = 0$) при отображении (8) является окружность (11) (прямая, если $\delta = 0$).

Отметим, что дробно-линейное отображение $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводит окружности и прямые, проходящие через точку $z = -d/c$, в прямые, а остальные окружности и прямые — в окружности.

В дальнейшем будем считать, что прямая — окружность бесконечного радиуса. Поэтому круговое свойство можно коротко сформулировать так: при дробно-линейном отображении окружности переходят в окружности.

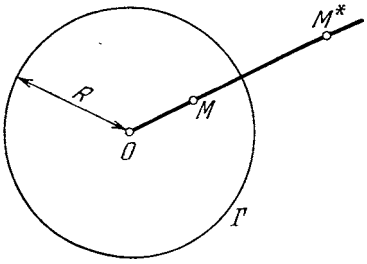


Рис. 83

4. Свойство сохранения симметрии. Понятие симметрии (инверсии) относительно окружности определяется в элементарной геометрии следующим образом. Пусть Γ — окружность радиуса R с центром в точке O.

Определение. Точки M и M^* называются *симметричными относительно окружности* Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O, и $OM \cdot OM^* = R^2$ (рис. 83).

В частности, каждая точка окружности Γ является симметричной сама себе относительно этой окружности.

Таким образом, на комплексной плоскости точки z и z^* являются симметричными относительно окружности Γ: $|z-a| = R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки a и $|z-a||z^*-a| = R^2$. Точка $z = \infty$ считается симметричной относительно окружности Γ с точкой a — центром этой окружности.

Из этого определения вытекает, что симметричные относительно окружности $|z| = R$ точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = R^2/\bar{z}. \tag{12}$$

В частности, симметричные относительно единичной окружности $|z| = 1$ (рис. 84) точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = 1/\bar{z}. \tag{13}$$

Так как точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси, то из (13) следует, что точка $1/z$ получается из точки z двойной симметрией: относительно действительной оси и относительно единичной окружности (в любом порядке) (рис. 84).

Из (12) вытекает, что симметричные относительно окружности $|z-a| = R$ точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}. \tag{14}$$

Дробно-линейное отображение обладает следующим свойством *сохранения симметрии.*

Теорема 4. *При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.*

Здесь «окружность», в частности, может быть прямой.

Предварительно докажем следующую лемму.

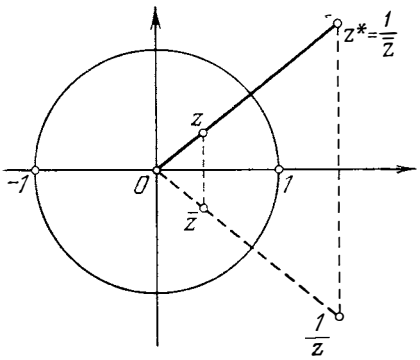


Рис. 84

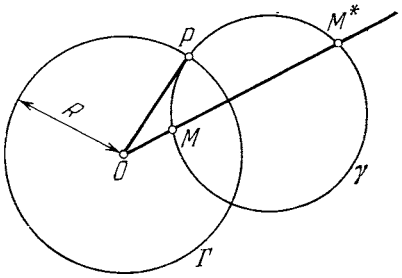


Рис. 85

Лемма. *Точки M и M^* являются симметричными относительно окружности* Γ *тогда и только тогда, когда любая окружность* γ, *проходящая через эти точки, пересекается с окружностью* Γ *под прямым углом.*

Доказательство. Необходимость. Пусть точки M, M^* симметричны относительно окружности Γ радиуса R с центром в точке O (рис. 85). Рассмотрим окружность γ, проходящую через точки M, M^*. Проведем из точки O прямую, касающуюся окружности γ в точке P. По теореме элементарной геометрии (квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть) имеем $OP^2 = OM \cdot OM^*$. Это произведение равно R^2, так как точки M, M^* симметричны относительно окружности Γ. Значит, $OP = R$, т. е. точка P лежит на окружности Γ. Таким образом, касательная к окружности γ является радиусом окружности Γ и, следовательно, окружности γ, Γ пересекаются в точке P под прямым углом.

Достаточность. Пусть любая окружность γ, проходящая через точки M, M^*, пересекается с окружностью Γ под прямым углом (рис. 85). Тогда прямая (частный случай окружности), проходящая через точки M, M^*, также пересекается с окружностью Γ под прямым углом, т. е. эта прямая проходит центр O окружности Γ. Более того, точки M, M^* лежат на одном луче, выходящем из точки O, так как в противном случае окружность

радиуса $\frac{1}{2}MM^*$, проходящая через точки M, M^*, не пересекается с Γ под прямым углом.

Остается доказать, что $OM \cdot OM^* = R^2$. Пусть окружность γ, проходящая через точки M, M^*, пересекается с Γ в точке P (рис. 85). Тогда OP — касательная к γ и, следовательно, $OP^2 = OM \cdot OM^*$ по теореме о квадрате касательной (см. необходимость).

Доказательство теоремы 4. Пусть точки z и z^* симметричны относительно окружности Γ и пусть дробно-линейное отображение $w = f(z)$ переводит окружность Γ в $\widetilde{\Gamma}$, а точки z, z^* — в точки w, w^* соответственно. В силу кругового свойства $\widetilde{\Gamma}$ — окружность. Нужно доказать, что точки w, w^* симметричны относительно $\widetilde{\Gamma}$. Для этого в силу леммы достаточно доказать, что любая окружность $\widetilde{\gamma}$, проходящая через точки w, w^*, пересекается с $\widetilde{\Gamma}$ под прямым углом.

Прообразом окружности $\widetilde{\gamma}$ при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ является окружность γ, проходящая через точки z, z^*. Эта окружность γ пересекается с Γ под прямым углом. Следовательно, $\widetilde{\gamma}$ пересекается с $\widetilde{\Gamma}$ также под прямым углом, так как дробно-линейное отображение является конформным во всей расширенной комплексной плоскости и поэтому сохраняет углы между кривыми в каждой точке.

5. Дробно-линейное отображение, переводящее три точки в три точки.

Теорема 5. *Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки z_1, z_2, z_3 переходят соответственно в три различные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение определяется формулой*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{15}$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что функция $w = f(z)$, определяемая соотношением (15), является дробно-линейной. Ясно также, что $w_k = f(z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$.

Докажем, что если дробно-линейная функция $w = f_1(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $w = f(z)$, а именно $w_k = f_1(z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$, то $f_1(z) \equiv f(z)$. Пусть $z = \psi(w)$ — функция, обратная к функции $w = f(z)$. Тогда $\psi(f_1(z))$ — дробно-линейная функция:

$$\psi(f_1(z)) = \frac{az + b}{cz + d}$$

и $\psi(f_1(z_k)) = z_k$, т. е.

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем

$$cz_k^2 + (d - a)\, z_k - b = 0,$$

т. е. квадратное уравнение $cz^2 + (d-a)\,z - b = 0$ имеет три различных корня. Следовательно, $c = 0$, $d = a$, $b = 0$ и $\psi(f_1(z)) \equiv z$, откуда $f_1(z) \equiv f(z)$.

Следствие 1. *Функция $w = f(z)$, определяемая формулой* (15), *конформно отображает круг, граница которого проходит через точки z_k $(k = 1, 2, 3)$, на круг, граница которого проходит через точки w_k $(k = 1, 2, 3)$.*

Здесь и далее «круг» — внутренность окружности, или внешность окружности, или полуплоскость.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 5 следует, что дробно-линейное отображение $w = w(z)$ может иметь не более двух неподвижных точек z_1, z_2, т. е. таких, что $w(z_k) = z_k$ $(k = 1, 2)$, если $w(z) \not\equiv z$. Дробно-линейное отображение, имеющее две неподвижные точки z_1, z_2, определяется формулой

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

где A — комплексное число.

Пример 1. Всякое дробно-линейное отображение, переводящее точку z_1 в точку $w = 0$, а точку z_2 — в точку $w = \infty$, имеет вид

$$w = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{16}$$

где A — некоторое комплексное число. □

6. Примеры дробно-линейных отображений.

Пример 2. Дробно-линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}, \tag{17}$$

где $\operatorname{Im} z_0 > 0$, α — действительное число.

Доказательство. Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$. Тогда в силу свойства сохранения симметрии $w(\bar{z}_0) = \infty$ и по формуле (16)

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \tag{18}$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки действительной оси переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при дей-

ствительных $z = x$, то из (18)

$$1 = \left| A \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |A| \frac{|x - z_0|}{|x - \bar{z}_0|} = |A|$$

($|x - z_0| = |x - \bar{z}_0|$). Следовательно, $A = e^{i\alpha}$ и из (18) получаем формулу (17).

Замечание 4. При отображении (17) угол поворота кривых в точке z_0 равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (рис. 86), так как из (17) имеем $\arg w'(z_0) = \alpha - \frac{\pi}{2}$ (§ 8, пример 5).

Замечание 5. Всякое конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид (17).

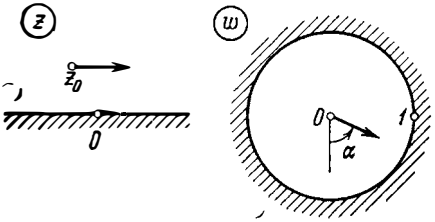


Рис. 86

В самом деле, по теореме Римана (§ 33), существует единственное конформное отображение $w = w(z)$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Следовательно, это отображение совпадает с отображением (17).

Это замечание относится и к формулам (19), (21).

Пример 3. Дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} e^{i\alpha}, \tag{19}$$

где $|z_0| < 1$, α — действительное число.

Доказательство. Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$ ($|z_0| < 1$). Тогда в силу свойства сохранения симметрии (п. 4) $w(1/\bar{z}_0) = \infty$ и по формуле (16) имеем

$$w = A \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}. \tag{20}$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки единичной окружности переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при $z = e^{i\varphi}$, то из (20)

$$1 = \left| A \frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - e^{i\varphi}\bar{z}_0} \right| = |A| \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}|\,|e^{-i\varphi} - \bar{z}_0|} = |A|,$$

$$(|e^{i\varphi} - z_0| = \overline{|e^{i\varphi} - z_0|} = |e^{-i\varphi} - \bar{z}_0|).$$

Следовательно, $A = e^{i\alpha}$ и из (20) получаем формулу (19). □

Замечание 6. При отображении (19) угол поворота кривых в точке z_0 равен α (рис. 87), так как из (19) имеем $\arg w'(z_0)=\alpha$ (§ 8, пример 5).

Пример 4. Дробно-линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ имеет вид

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{21}$$

где a, b, c, d — действительные числа и $ad-bc>0$.

Доказательство. Пусть дробно-линейная функция $w=w(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость

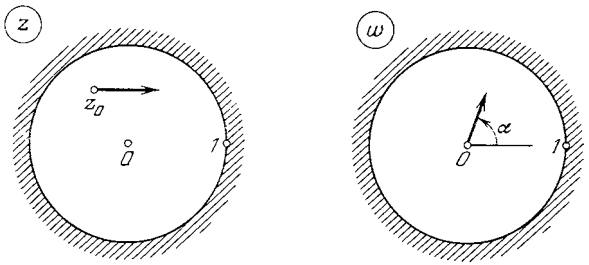


Рис. 87

$\operatorname{Im} w>0$. Рассмотрим три различные точки z_1, z_2, z_3 границы области $\operatorname{Im} z>0$, т. е. z_k — различные действительные числа. Образы этих точек являются граничными точками области $\operatorname{Im} w>0$, т. е. $w_k=w(z_k)$ — действительные числа. Тогда функция $w=w(z)$ определяется формулой (15), откуда получаем формулу (21), где a, b, c, d — действительные числа.

Покажем, что $ad-bc>0$. В силу принципа соответствия границ (§ 33) конформное отображение $w=w(z)$ переводит действительную ось $\operatorname{Im} z=0$ в действительную ось $\operatorname{Im} w=0$ с сохранением ориентации. Следовательно, при действительных $z=x$ имеем $\arg w'(x)>0$, т. е.

$$w'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}>0,$$

откуда $ad-bc>0$. □

Пример 5. Конформное отображение $w=w(z)$ круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$, определяется формулой

$$\frac{w-w_0}{1-w\bar{w}_0}=\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}e^{i\alpha}. \tag{22}$$

Доказательство. Функция

$$\zeta=g(z)=\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}e^{i\alpha}$$

отображает круг $|z|<1$ на круг $|\zeta|<1$ так, что $g(z_0)=0$ и $\arg g'(z_0)=\alpha$ (пример 3). Функция

$$\zeta = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - w\overline{w}_0}$$

отображает круг $|w|<1$ на тот же круг $|\zeta|<1$ так, что $h(w_0)=0$ и $\arg h'(w_0)=0$ (пример 3). Следовательно, функция $w=w(z)$, определяемая формулой (22), отображает круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$ так, что $w(z_0)=w_0$ и $\arg w'(z_0)=\alpha$. □

Пример 6. Конформное отображение $w=w(z)$ полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, удовлетворяющее условиям $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{w - \overline{w}_0} = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} e^{i\alpha}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству формулы (22). □

§ 35. Конформные отображения элементарными функциями

1. Функция $w=z^2$. Рассмотрим свойства функции $w=z^2$, некоторые сведения о которой были приведены в § 8.

1. Однолистность. Напомним, что функция $w=z^2$ однолистна в области D тогда и только тогда, когда в этой области нет различных точек z_1 и z_2, связанных равенством

$$z_1 = -z_2. \tag{1}$$

Равенство (1) означает, что точки z_1 и z_2 симметричны относительно точки $z=0$. Таким образом, функция $w=z^2$ однолистна в области D в том и только в том случае, когда эта область не содержит ни одной пары точек, симметричных относительно точки $z=0$.

В частности, функция $w=z^2$ однолистна в полуплоскости, граница которой проходит через точку $z=0$.

Пример 1. а) Функция $w=z^2$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на область G — плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (§ 8, рис. 35).

б) Функция $w=z^2$ конформно отображает нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z<0$ на ту же область G (§ 8, рис. 36). □

Рассмотрим отображение координатной сетки функцией $w=z^2$ для случаев полярной и декартовой систем координат.

2. Образы лучей $\arg z=\alpha$ и дуг окружностей $|z|=\rho$. Линии $\arg z=\text{const}$ и $|z|=\text{const}$ образуют координатную сетку на плоскости z (полярные координаты). В § 8 было показано, что функция $w=z^2$ взаимно однозначно переводит:

а) луч $\arg z = \alpha$ в луч $\arg w = 2\alpha$;

б) дугу окружности $|z| = \rho$, $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, где $\beta - \alpha < \pi$, в дугу окружности $|w| = \rho^2$, $2\alpha \leqslant \arg w \leqslant 2\beta$.

Пример 2. Из свойств 1, 2 вытекает, что функция $w = z^2$ конформно отображает кольцевой сектор S: $\rho_1 < |z| < \rho_2$, $0 < \arg z < \alpha \leqslant \pi$, где $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 \leqslant +\infty$, на кольцевой сектор $\tilde{S}$: $\rho_1^2 < |w| < \rho_2^2$, $0 < \arg w < 2\alpha$ (рис. 88). □

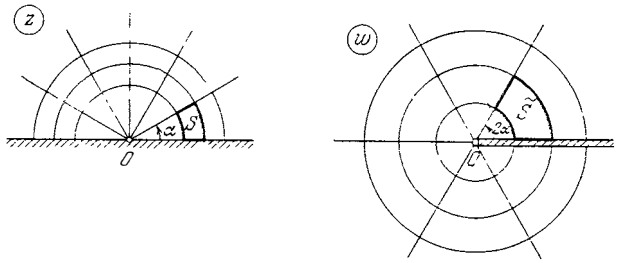


Рис. 88

3. Образы прямых $\operatorname{Re} z = c$, $\operatorname{Im} z = c$. Покажем, что функция $w = z^2$ взаимно однозначно переводит:

а) прямую $\operatorname{Re} z = c$ в параболу

$$v^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - u\right); \tag{2}$$

б) прямую $\operatorname{Im} z = c$ в параболу

$$v^2 = 2p\left(u + \frac{p}{2}\right). \tag{3}$$

Здесь $p = 2c^2$, $w = u + iv$.

Действительно,

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

т. е. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Если $\operatorname{Re} z = x = c$, $-\infty < y < +\infty$, то

$$u = c^2 - y^2, \; v = 2cy,$$

откуда вытекает формула (2). Аналогично, при $\operatorname{Im} z = y = c$ получается формула (3).

Если $c = 0$, то $p = 0$, и парабола 2 вырождается в луч $(-\infty, 0]$, проходимый дважды, т. е. прямая $\operatorname{Re} z = 0$ переходит в луч $(-\infty, 0]$, проходимый дважды (§ 8, рис. 37). Аналогично получаем, что прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в луч $[0, +\infty)$, проходимый дважды (рис. 88).

Отметим, что любая парабола вида (2) пересекается с любой параболой вида (3) под прямым углом в силу свойства сохра-

нения углов при конформном отображении. Фокусы всех парабол (2) и (3) расположены в одной и той же точке $w=0$.

Пример 3. Из свойств 1, 3 вытекает, что функция $w=z^2$ конформно отображает прямоугольник (рис. 89) на криволинейный четырехугольник, ограниченный дугами парабол вида (2), (3). □

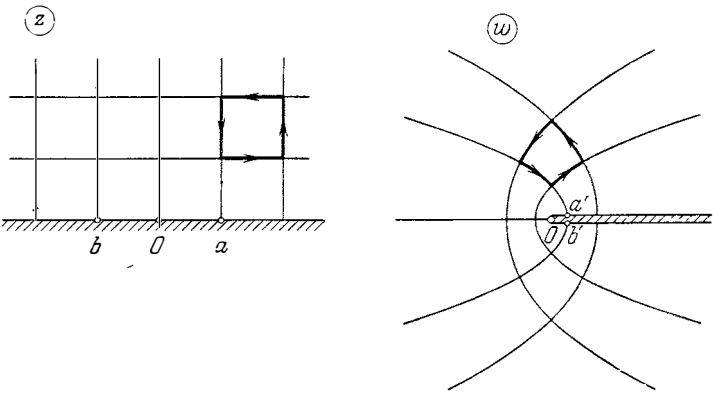


Рис. 89

2. Функция $w=\sqrt{z}$. Свойства функции $w=\sqrt{z}$, обратной к функции $w=z^2$, рассматривались в §§ 13 и 22. Напомним, что функция $\sqrt{z}$ является аналитической в плоскости z с выколотыми точками $z=0$, ∞, а в плоскости с разрезом, соединяющим точки $z=0$ и $z=\infty$, распадается на две регулярные ветви.

Пример 4. Пусть D — плоскость z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (§ 13, рис. 47). В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)=-f_1(z)$, где $f_1(x+0i)=\sqrt{x}>0$ при $x>0$, т. е. функция $f_1(z)$ принимает положительные значения на верхнем берегу разреза. Функция $w=f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, а функция $w=f_2(z)$ — на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$ (§ 13, рис. 47). □

Пример 5. Пусть D — плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (§ 13, рис. 48). В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)=-f_1(z)$, где $f_1(1)=1$. Функция $w=f_1(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$, а функция $w=f_2(z)$ — на полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$ (§ 13, рис. 48). □

Пример 6. Пусть D — внешность параболы $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$, где $p>0$, $z=x+iy$, т. е. область $y^2>2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ (рис. 90).

В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z) = -f_1(z)$, где $f_1\left(-\frac{p}{2}\right) = i\sqrt{p/2}$. Из примера 3 (рис. 89) следует, что функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > \sqrt{p/2}$, а функция $w = f_2(z)$ — на полуплоскость $\operatorname{Im} w < -\sqrt{p/2}$ (рис. 90). □

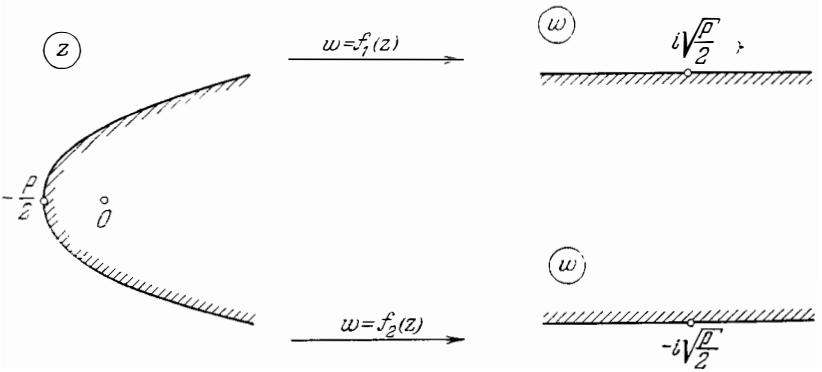


Рис. 90

Пример 7. Пусть D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$ $(h > 0)$ (рис. 91). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

а) Функция $\zeta = z^2$ конформно отображает область D на область D_1 — плоскость ζ с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ (рис. 91);

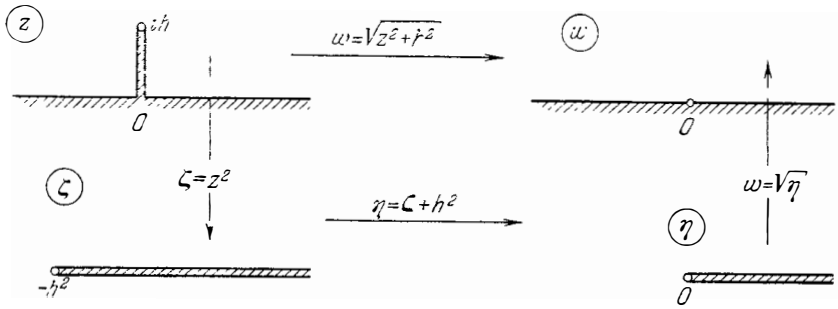


Рис. 91

б) функция $\eta = \zeta + h^2$ (сдвиг) конформно отображает область D_1 на область D_2 — плоскость η с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 91);

в) функция $w = \sqrt{\eta}$ (точнее, ее регулярная ветвь в D_2, принимающая положительные значения на верхнем берегу разреза)

конформно отображает область D_2 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (пример 4).

Следовательно, суперпозиция отображений а)—в), т. е. функция $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 91). □

3. Функция $w = z^\alpha$. Свойства степенной функции z^α изучались в § 22. В частности, был рассмотрен

Пример 8. Функция $w = z^\alpha$, $\alpha > 0$, конформно отображает сектор $0 < \arg z < \beta \leqslant 2\pi$, где $\beta \leqslant 2\pi/\alpha$, на сектор $0 < \arg w < \alpha\beta$ (рис. 61). □

Замечание 1. В примере 8 и всюду в дальнейшем символом z^α обозначается следующая функция:

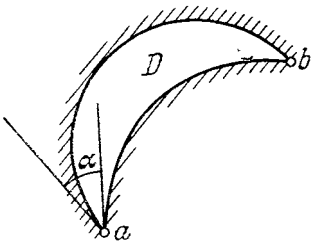


Рис. 92

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \qquad (4)$$

определенная в секторе $0 < \arg z < 2\pi$.

Отметим следующий частный случай примера 8.

Пример 9. Пусть S — угол $0 < \arg z < \beta \leqslant 2\pi$. Тогда функция $w = z^{\pi/\beta}$ конформно отображает угол S на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. □

Рассмотрим область D, ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающихся в точках a и b под углом α (рис. 92). Эта область называется *луночкой*. Покажем, что луночку D можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость с помощью дробно-линейной и степенной функций.

Применим дробно-линейное отображение $\zeta = \dfrac{z-a}{z-b}$, при котором $\zeta(a) = 0$, $\zeta(b) = \infty$. Это отображение переводит дуги, ограничивающие D, в лучи, пересекающиеся в точке $\zeta = 0$ под углом α (§ 34). Следовательно, образом луночки D является угол $\beta < \arg \zeta < \beta + \alpha$, где β — некоторое число.

Этот угол поворотом $\eta = \zeta e^{-i\beta}$ отображается на угол $0 < \arg \eta < \alpha$, который функция $w = \eta^{\pi/\alpha}$ отображает на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (пример 9). Таким образом, функция

$$w = \left(\frac{z-a}{z-b} e^{-i\beta}\right)^{\pi/\alpha}$$

конформно отображает луночку D на верхнюю полуплоскость.

Пример 10. Конформные отображения областей, указанных на рис. 93, на верхнюю полуплоскость осуществляются следующими функциями:

а) $w = \left(\dfrac{z}{1-z}\right)^{4/3}$; б) $w = \left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^{2/3}$;

в) $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{2/3}$; г) $w=\sqrt{\dfrac{z}{1-z}}$;

д) $w=\sqrt{i\dfrac{z+1}{z-1}}$; е) $w=\sqrt{\dfrac{z-2}{z-1}}$. □

4. Функция $w=e^z$. Некоторые свойства функции $w=e^z$ были рассмотрены в § 8. Напомним эти свойства.

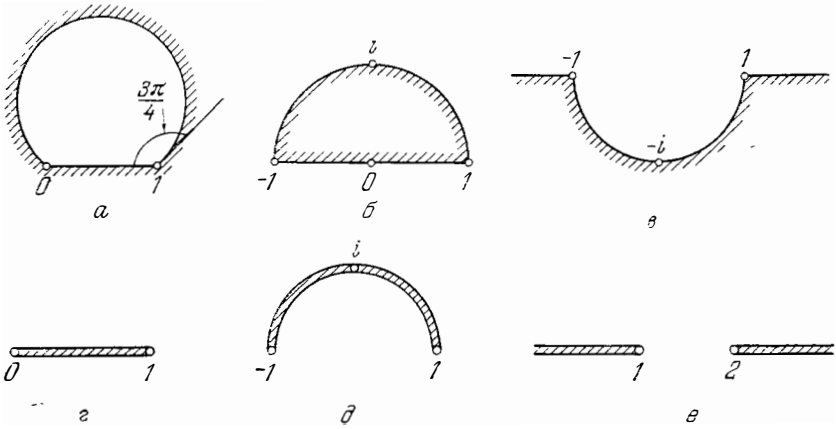


Рис. 93

1. Однолистность. Функция $w=e^z$ однолистна в области D тогда и только тогда, когда эта область не содержит никакой пары различных точек z_1, z_2, связанных равенством

$$z_1-z_2=2k\pi i, \qquad k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{5}$$

В частности, функция $w=e^z$ однолистна в полосе $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ и конформно отображает эту полосу на плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (§ 8, рис. 38).

Рассмотрим отображение координатной сетки $\operatorname{Re} z=\text{const}$, $\operatorname{Im} z=\text{const}$ функцией $w=e^z$.

2. Образы прямых $\operatorname{Re} z=c$, $\operatorname{Im} z=c$. В § 8 было показано, что функция $w=e^z$ взаимно однозначно переводит

а) отрезок $\operatorname{Re} z=c$, $a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b$, где $b-a<2\pi$, в дугу окружности $|w|=e^c$, $a\leqslant \arg w\leqslant b$;

б) прямую $\operatorname{Im} z=c$ в луч $\arg w=c$.

Пример 11. Из приведенных свойств 1, 2 вытекает, что функция $w=e^z$ конформно отображает прямоугольник $c_1<\operatorname{Re} z<c_2$, $a<\operatorname{Im} z<b$, где $-\infty\leqslant c_1<c_2\leqslant+\infty$, $b-a\leqslant 2\pi$, на кольцевой сектор $e^{c_1}<|w|<e^{c_2}$, $a<\arg w<b$. Частные случаи таких отображений показаны на рис. 94. □

5. Функция $w = \ln z$. Свойства функции $w = \ln z$, обратной к функции $w = e^z$, рассматривались в §§ 13 и 21. Напомним, что функция $w = \ln z$ является аналитической в плоскости z с выколотыми точками $z = 0, \infty$, а в плоскости с разрезом, соединяющим точки $z = 0$ и $z = \infty$, распадается на бесконечное число регулярных ветвей.

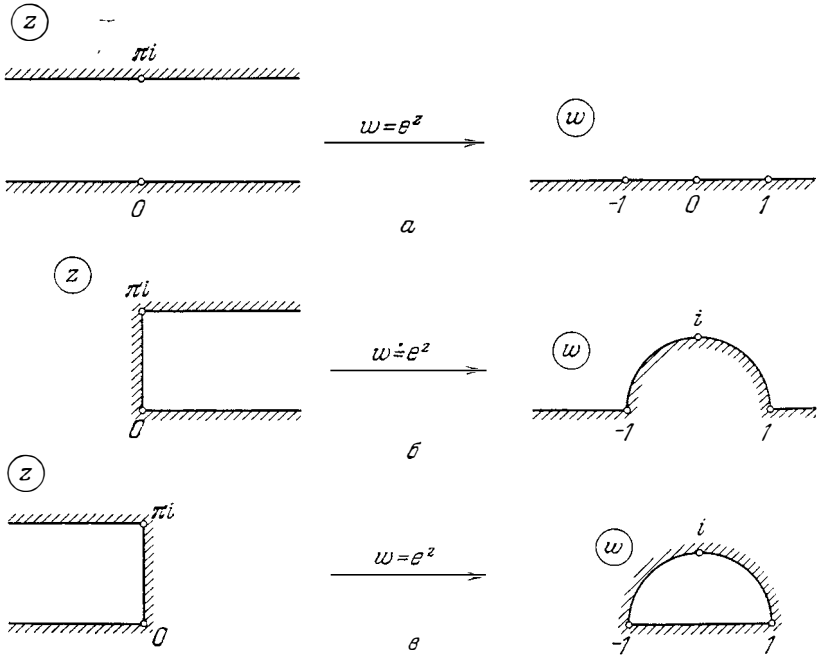


Рис. 94

Приведем примеры конформных отображений функцией $w = \ln z$, рассмотренные в § 13 и 21.

Пример 12. Пусть D — плоскость z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 49). В этой области функция $\ln z$ распадается на регулярные ветви:

$$(\ln z)_k = \ln |z| + i(\arg z)_0 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $0 < (\arg z)_0 < 2\pi$. Функция $w = (\ln z)_k$ конформно отображает область D на полосу $2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi$ (рис. 49). □

Пример 13. Функция $w = \ln z$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \alpha \leqslant 2\pi$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \alpha$ (рис. 60). Здесь $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $0 < \arg z < \alpha$. □

6. Функция Жуковского. Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{6}$$

называется *функцией Жуковского.* Эта функция регулярна в точках $z \neq 0, \infty$, причем $w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, а в точках $z = 0$ и $z = \infty$ имеет полюсы первого порядка. Следовательно, функция Жуковского (6) однолистна в каждой точке $z \neq \pm 1$, так как $w'(z) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$, и неоднолистна в точках $z = \pm 1$, так как $w'(\pm 1) = 0$ (п. 2 § 32). Докажем следующее свойство.

1. Однолистность. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ однолистна в области D тогда и только тогда, когда в этой области нет различных точек z_1 и z_2, связанных равенством

$$z_1 z_2 = 1. \tag{7}$$

В самом деле, пусть $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$. Тогда $(z_1 - z_2) \times$ $\times \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$, откуда либо $z_1 = z_2$, либо $z_1 z_2 = 1$.

Равенство (7) геометрически означает, что точка $z_2 = 1/z_1$ получается из точки z_1 двойной симметрией: относительно окружности $|z| = 1$ и относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ (§ 34, рис. 84). Таким образом, функция Жуковского однолистна в области в том и только в том случае, когда эта область не содержит ни одной пары различных точек, которые получаются одна из другой двойной симметрией: относительно единичной окружности и относительно действительной оси.

Пример 14. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ однолистна в следующих областях:

а) $|z| > 1$ — внешность единичного круга,

б) $|z| < 1$ — единичный круг,

в) $\operatorname{Im} z > 0$ — верхняя полуплоскость,

г) $\operatorname{Im} z < 0$ — нижняя полуплоскость. □

Замечание 2. Пусть $\tilde{D}$ — область, состоящая из точек $1/z$, где $z \in D$. Тогда функция Жуковского однолистна в области D в том и только в том случае, когда области D и $\tilde{D}$ не имеют общих точек. При отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ образами областей D и $\tilde{D}$ является одна и та же область, так как $w(z) = w(1/z)$.

2. Образы окружностей и лучей. Найдем образы окружностей $|z| = \rho$ и лучей $\arg z = \alpha$ (полярная координатная сетка) при отображении функцией Жуковского. Полагая в (6) $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получаем $u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$, откуда

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{8}$$

Рассмотрим окружность

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \tag{9}$$

($\rho > 0$ — фиксировано). Из (8) следует, что при отображении функцией Жуковского образом окружности (9) является эллипс

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{10}$$

с полуосями $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$ (так как $a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1$). Исключая из уравнений (10) параметр φ, при $\rho \neq 1$ уравнение этого эллипса можно записать в каноническом виде

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1. \tag{11}$$

Отметим, что при замене ρ на $1/\rho$ ($\rho \neq 1$) эллипс (10) остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную. На рис. 95 показаны окружности $|z| = \rho$, $\rho > 1$, ориентированные по часовой стрелке, и их образы — эллипсы (11); из (10) видно, что эти эллипсы ориентированы также по часовой стрелке. На рис. 96 показаны окружности $|z| = \rho$ при $0 < \rho < 1$ и их образы — эллипсы (11); при этом ориентация меняется на противоположную: окружность $|z| = \rho$, ориентированная против часовой стрелки, переходит в эллипс (11), ориентированный по часовой стрелке.

При $\rho = 1$ эллипс (10) вырождается в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды, т. е. окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды (рис. 95, 96).

Рассмотрим луч

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < +\infty \tag{12}$$

(α — фиксировано). При отображении функцией Жуковского образом этого луча (см. (8)) является кривая

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha, \quad 0 < r < +\infty. \tag{13}$$

Исключая из уравнений (13) параметр r, при $\alpha \neq k\pi/2$ (k — целое), получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1. \tag{14}$$

Кривая (14) — гипербола с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg}\alpha$.

Если $0 < \alpha < \pi/2$, то кривая (13) является правой ветвью гиперболы (14), т. е. луч (12) при $0 < \alpha < \pi/2$ переходит в пра-

вую ветвь гиперболы (14) (ориентация показана на рис. 97). При замене в 13 α на $\pi-\alpha$ получается левая ветвь той же гиперболы (14), поэтому луч (12) при $\pi/2<\alpha<\pi$ переходит в левую ветвь гиперболы (14) (рис. 97). Отметим также, что

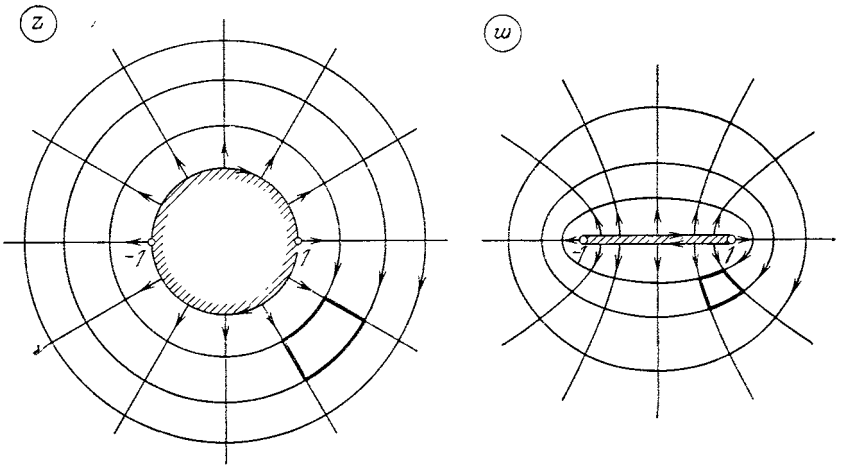


Рис. 95

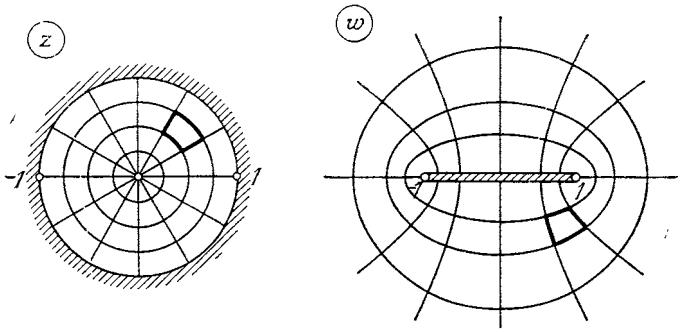


Рис. 96

при замене в (13) α на $-\alpha$ получается та же ветвь гиперболы (14), но ее ориентация меняется на противоположную.

Рассмотрим лучи (12) при $\alpha=k\pi/2$ (k — целое). Из (13) следует, что луч $\arg z=\pi/2$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w=0$ (рис. 97). Луч $\arg z=3\pi/2$ также переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w=0$. При $\alpha=0$ кривая (13) вырождается в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды (сложенный вдвое) (рис. 97), т. е. луч $\arg z=0$ переходит в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды: луч $[1, +\infty)$ переходит в луч $[1, +\infty)$ и полуинтервал $(0, 1]$ —

в луч $[1, +\infty)$ (рис. 97). Аналогично, луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $(-\infty, -1]$, проходимый дважды (рис. 97).

Таким образом, функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводит окружности $|z| = \rho$ в эллипсы (11), а лучи $\arg z = \alpha$ — в ветви гипербол (14); фокусы всех эллипсов (11) и гипербол (14) расположены в точках $w = \pm 1$; любой эллипс (11) пересекается с любой гиперболой (14) под прямым углом.

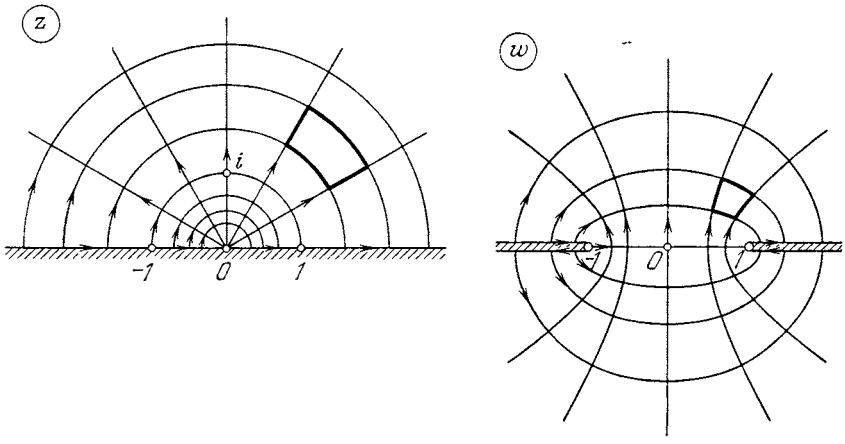


Рис. 97

Пример 15. Пусть D — внешность единичного круга (рис. 95). Найдем образ области D при отображении функцией Жуковского, однолистной в этой области (пример 14а). □

Способ 1. Образами окружностей $|z| = \rho$, $\rho > 1$ являются эллипсы (11), которые заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 95).

Способ 2. Луч

$$z = re^{i\alpha}, \quad 1 < r < +\infty \tag{15}$$

переходит в кривую

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha, \quad 1 < r < +\infty, \tag{16}$$

которая является частью (половиной) ветви гиперболы (13). При изменении α от 0 до 2π кривые (16) заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 95). Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 95).

Отметим, что при этом отображении окружность $|z| = 1$, ориентированная по часовой стрелке (граница области D), переходит в разрез по отрезку $[-1, 1]$; подробнее: полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ переходит в верхний берег разреза, а полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ в нижний берег разреза (рис. 98).

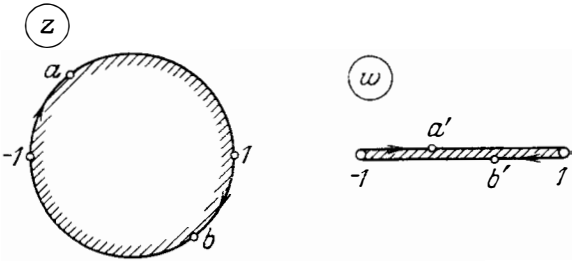


Рис. 98

Образно говоря, окружность $|z| = 1$ «сжимается» в разрез по отрезку $[-1, 1]$ с сохранением ориентации. □

Пример 16. Как и в примере 15, получаем, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 96). Это утверждение вытекает также из примера 15 и замечания 2.

Отметим, что при этом отображении окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки (граница круга $|z| < 1$),

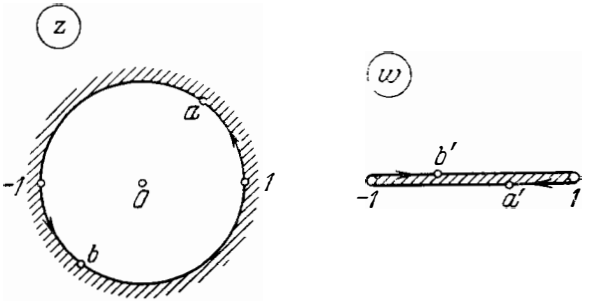


Рис. 99

переходит в разрез по отрезку $[-1, 1]$, ориентированный по часовой стрелке. Подробнее: полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ переходит в нижний берег разреза, а полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ — в верхний берег разреза (рис. 99). □

Пример 17. Как и в примере 15, получаем, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает верхнюю

полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, 1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 97). При этом отображении

а) луч $(-\infty, -1]$ переходит в верхний берег разреза по лучу $(-\infty, -1]$,

б) полуинтервал $[-1, 0)$ — в нижний берег разреза $(-\infty, -1]$,

в) полуинтервал $(0, 1]$ — в нижний берег разреза $[1, +\infty)$,

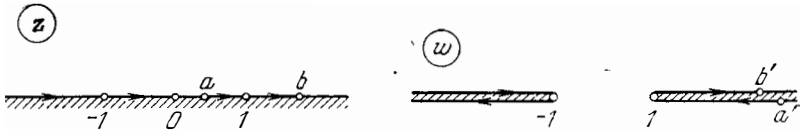


Рис. 100

г) луч $[1, +\infty)$ — в верхний берег разреза $[1, +\infty)$ (рис. 100). □

Пример 18. Из примера 17 и замечания 2 вытекает, что функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. □

На рис. 95—97 жирными линиями отмечены кольцевые секторы на плоскости z и их образы на плоскости w при отображении функцией Жуковского. Следующие частные случаи таких отображений часто используются в практике конформных отображений.

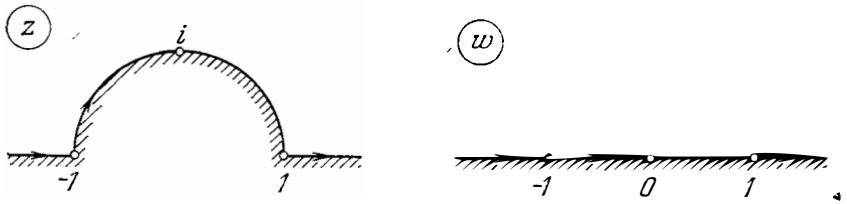


Рис. 101

Пример 19. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает

а) область $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$ (рис. 101) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (из рис. 95);

б) полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 102) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$; полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 102) на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ (из рис. 96);

в) область $|z| > \rho > 1$ (рис. 103) на внешность эллипса (11) (из рис. 95); круг $|z| < \rho < 1$ (рис. 103) на внешность эллипса (11) (из рис. 96);

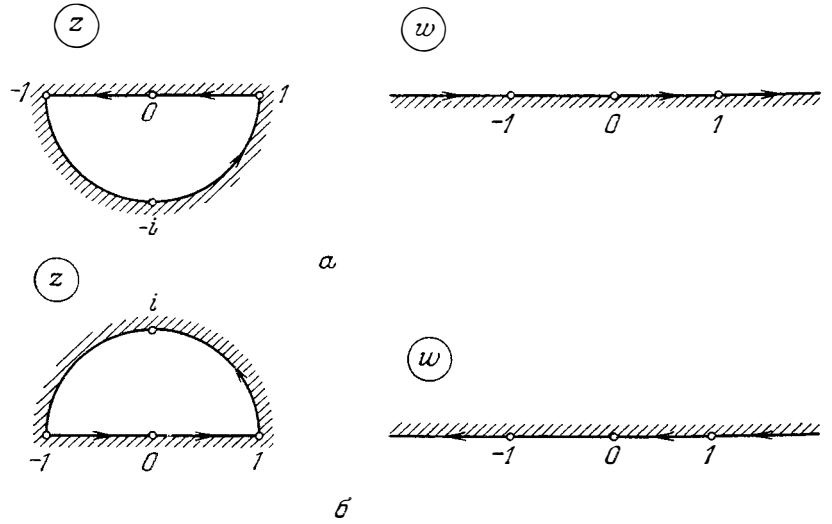


Рис. 102

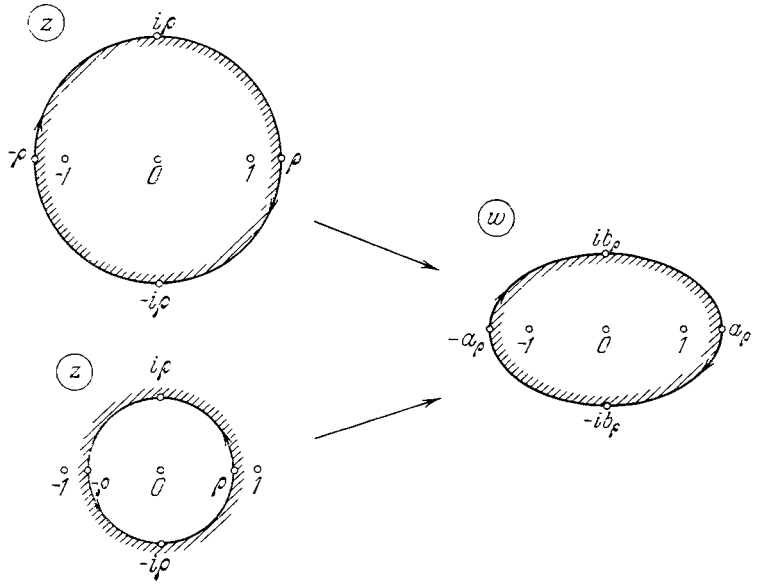


Рис. 103

г) сектор $\alpha < \arg z < \pi - \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 104) на внешность гиперболы (14) (из рис. 97);

д) сектор $0 < \arg z < \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$, (рис. 105) на внутренность правой ветви гиперболы (14) с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ (из рис. 97);

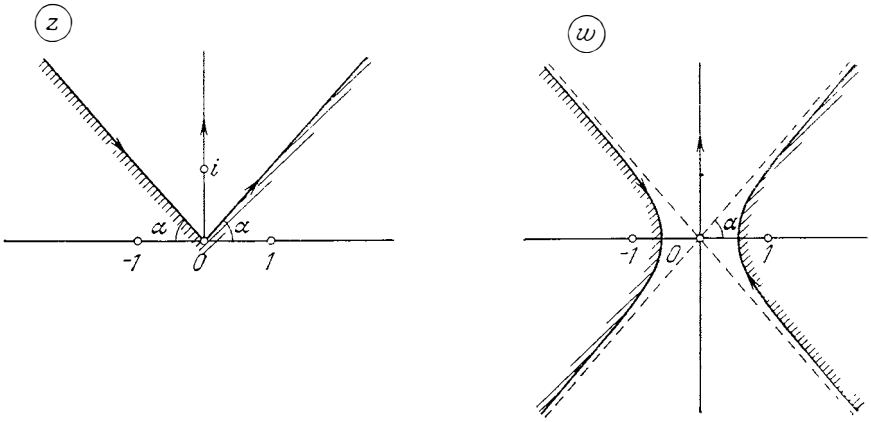


Рис. 104

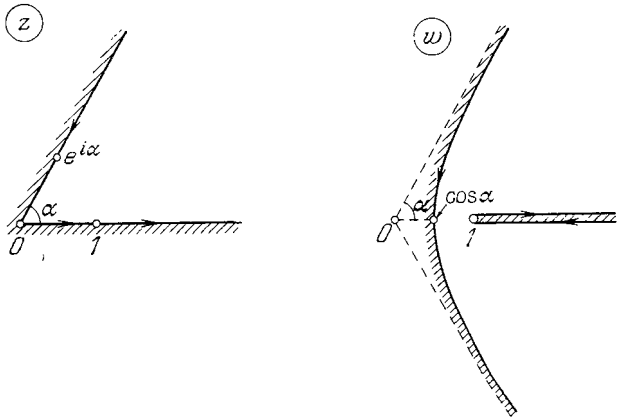


Рис. 105

е) сектор $0 < \arg z < \alpha$, $|z| > 1$, где $0 < \alpha < \pi/2$, (рис. 106) на область $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $u > 0$, $v > 0$ $(w = u + iv)$ (из рис. 97). □

7. Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратная к функции Жуковского. Решая уравнение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z, находим $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, т. е. функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{17}$$

является обратной к функции Жуковского. Следовательно, отображения функцией (17) являются обратными к отображениям функцией Жуковского.

Некоторые свойства функции (17) рассматривались в § 24. Напомним, что функция (17) является аналитической в плоскости z с выколотыми точками $z=\pm 1$, а в плоскости z с разрезом, соединяющим точки $z=\pm 1$, распадается на две регулярные ветви.

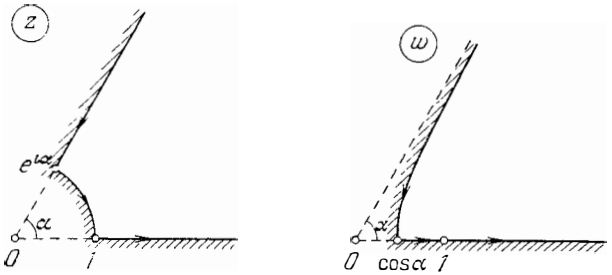


Рис. 106

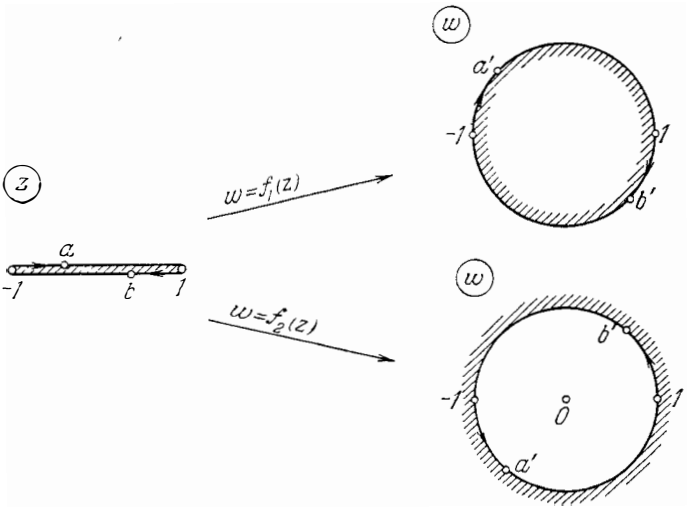


Рис. 107

Пример 20. Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 107). В этой области функция $z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви, $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(\infty)=\infty$, $f_2(\infty)=0$ (§ 24). Из примеров 15, 16 (рис. 98, 99) вытекает, что функция $w=f_1(z)$ конформно отображает область D на внешность единичного круга, а функция $w=f_2(z)$ — на круг $|w|<1$ (рис. 107). □

Пример 21. Пусть D — плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 108). В этой области функция $z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, где $f_1(0)=i$, $f_2(0)=-i$ (§ 24). Из примеров 17, 18 вытекает, что

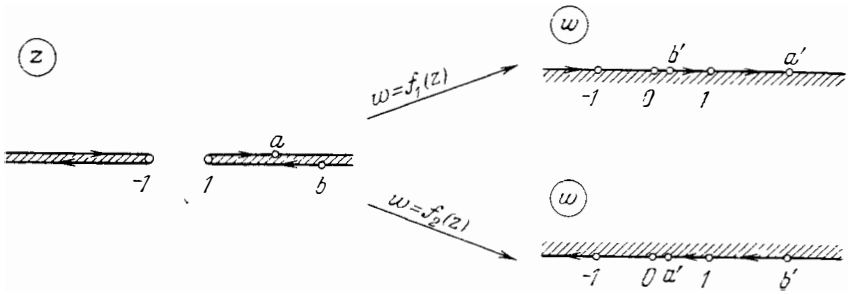


Рис. 108

функция $w=f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, а функция $w=f_2(z)$ — на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$ (рис. 108). □

Пример 22. В полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ функция $z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, где $f_1(0)=i$, $f_2(0)=-i$. Отображения этими функциями показаны на рис. 109 (ср. рис. 101, 102а). □

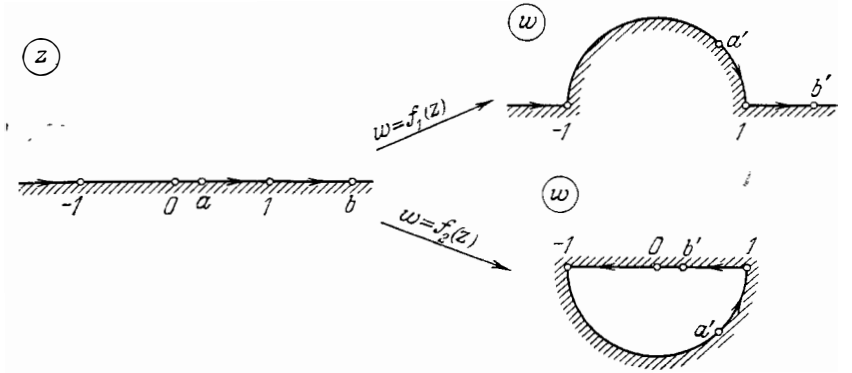


Рис. 109

8. **Тригонометрические и гиперболические функции.** Рассмотрим примеры конформных отображений тригонометрическими и гиперболическими функциями.

Пример 23. Покажем, что функция $w=\operatorname{ch} z$ конформно отображает полуполосу $0<\operatorname{Im} z<\pi$, $\operatorname{Re} z>0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ (рис. 110).

В самом деле, функция $w = \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ является суперпозицией двух функций:

$$\zeta = e^z, \quad w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

В результате последовательного выполнения отображения $\zeta = e^z$ (рис. 94б) и затем отображения $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ (рис. 101) получаем отображение рис. 110. □

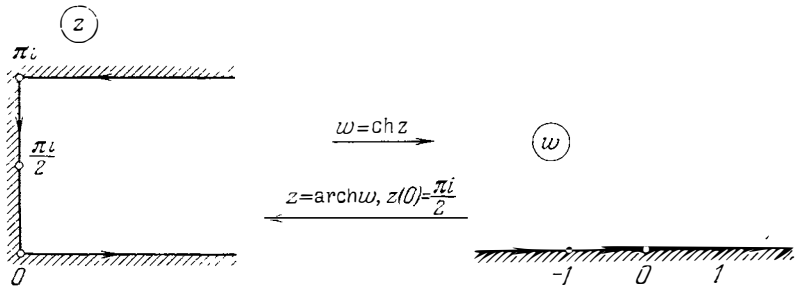


Рис. 110

Пример 24. Покажем, что функция $w = \cos z$ конформно отображает полуполосу $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 111).

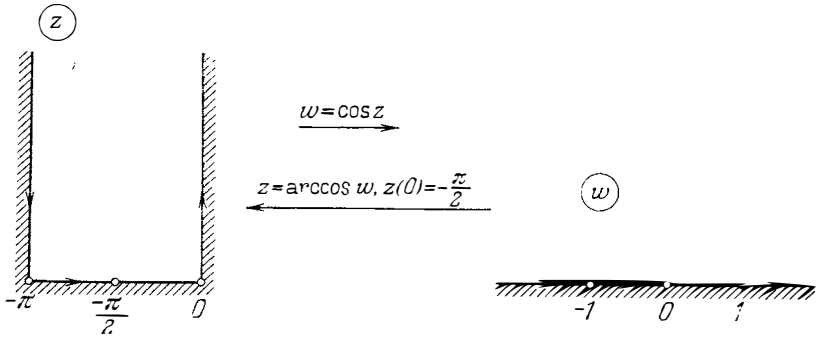


Рис. 111

Действительно, так как $\cos z = \operatorname{ch}(-iz)$, то, выполняя сначала отображение $\zeta = -iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $-\pi/2$), а затем отображение $w = \operatorname{ch} \zeta$ (рис. 110), получаем отображение рис. 111. □

Пример 25. Покажем, что функция $w = \sin z$ конформно отображает полуполосу $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 112).

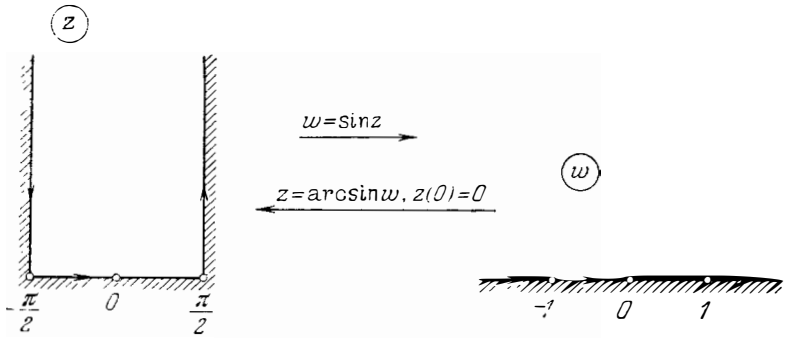


Рис. 112

В самом деле, так как $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, то выполняя сначала отображение $\zeta = z - \frac{\pi}{2}$ (сдвиг), а затем отображение $w = \cos\zeta$ (рис. 111) получаем отображение рис. 112. □

Пример 26. Покажем, что функция $w = \operatorname{tg} z$ конформно отображает полосу $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ на единичный круг $|w| < 1$

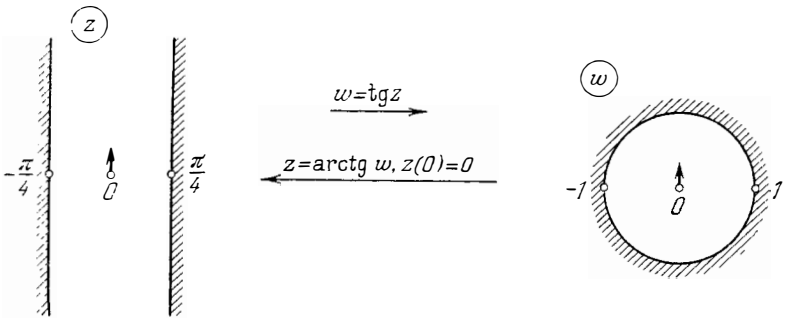


Рис. 113

(рис. 113). Отметим, что это отображение удовлетворяет условиям $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = 0$.

Действительно, так как

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i)\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

то отображение $w = \operatorname{tg} z$ можно рассматривать как суперпозицию

трех отображений:

$$\zeta = 2iz, \quad \eta = e^{\zeta}, \quad w = (-i)\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Выполняя последовательно эти отображения, получаем отображение рис. 113. □

Рассмотренные примеры (23—26) показывают, что отображения тригонометрическими и гиперболическими функциями сводятся к последовательному выполнению отображений, изученных ранее в § 34 и 35, пп. 1—7.

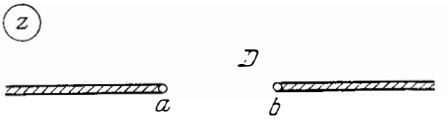


Рис. 114

9. Разные примеры. Конформные отображения, рассмотренные выше в § 34 и 35, пп. 1—8, являются «табличными». С их помощью находятся конформные отображения других простейших областей.

Приведем примеры (27—33) конформных отображений $w = w(z)$ заданной области D плоскости z на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Пример 27. D — плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, где $-\infty < a < b < +\infty$ (рис. 114).

Способ 1. Как и в примере 10 (рис. 93е), находим

$$w = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}, \quad \text{где } w\left(\frac{a+b}{2}\right) = i.$$

Способ 2. Линейная функция $\zeta = \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{b-a}$ (сдвиг и растяжение) отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Затем, как и в примере 21 (рис. 108), $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, где $w|_{\zeta=0} = i$. □

Пример 28. D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 115).

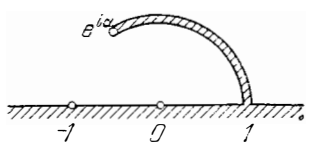


Рис. 115

Способ 1. Функция $\zeta = (z-1)/(z+1)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ (§ 33) и разрез по данной дуге переводит в разрез по отрезку $[0, ih]$, так как $1 \to 0$, $-1 \to \infty$, где $h = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Далее, как и в примере 7 (рис. 91), $w = \sqrt{\zeta^2 + h^2}$, где $w(x + 0i) > 0$ при $x > 1$.

Способ 2. Функция Жуковского $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[\cos\alpha, +\infty)$ (из рис. 97). Далее см. пример 27. □

Пример 29. D — полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по отрезку $[0, id]$, где $0 < d < \pi$ (рис. 116). Функция $\zeta = e^z$ отображает область D на область рис. 115. Далее см. пример 28. □

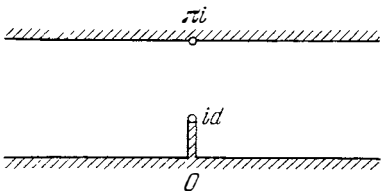


Рис. 116

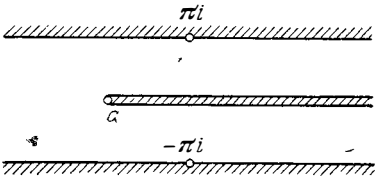


Рис. 117

Пример 30. D — полоса $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по лучу $[a, +\infty)$, где a — действительное число (рис. 117). Функция $\zeta = e^z$ отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, 0]$ и $[e^a, +\infty)$. Далее см. пример 27. □

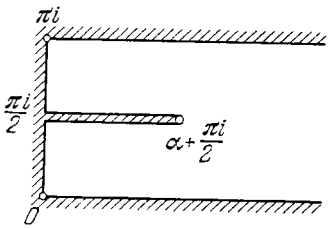


Рис. 118

Пример 31. D — полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{\pi i}{2}, \alpha + \frac{\pi i}{2}\right]$, где $\alpha > 0$ (рис. 118). Функция $\zeta = \operatorname{ch} z$ отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ с разрезом по отрезку $[0, i \operatorname{sh} \alpha]$ (из примера 23). Далее см. пример 7. □

Пример 32. D — область $\operatorname{Re} z > 0$, $|z - 1| > 1$ с разрезом по отрезку $[2, 3]$ (рис. 119). Функция $\zeta = 1/z$ отображает область D на область D_1 — полоса $0 < \operatorname{Re} \zeta < 1/2$ с разрезом по отрезку

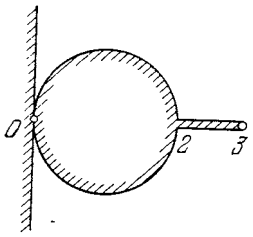


Рис. 119

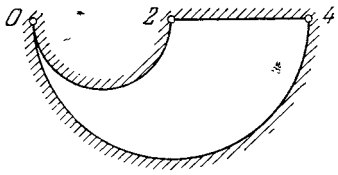


Рис. 120

$[1/3, 1/2]$. Область D_1 линейной функцией можно отобразить на область рис. 116. Далее см. пример 29. □

Пример 33. D — область $|z - 1| > 1$, $|z - 2| < 2$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 120). Функция $\zeta = 1/z$ отображает область D на полуполосу D_1: $1/4 < \operatorname{Re} \zeta < 1/2$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Область D_1 линейной функцией можно отобразить на область рис. 111. Далее см. пример 24. □

Приведем примеры (34—37) конформных отображений $w = w(z)$ заданной области D плоскости z на единичный круг $|w| < 1$.

Пример 34. D — плоскость z с разрезом по отрезку $[a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$ (рис. 121). Линейная функция $\zeta = \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{b-a}$ (сдвиг и растяжение) отображает область D на внешность отрезка $[-1, 1]$. Затем, как и в примере 20 (рис. 107), $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, где $w(\infty) = 0$. □

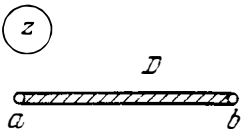


Рис. 121

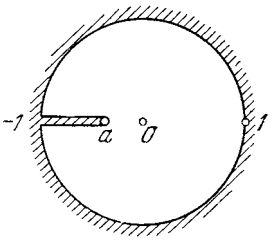


Рис. 122

Пример 35. D — круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1, a]$, где $-1 < a < 0$ (рис. 122). Функция Жуковского $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ζ с разрезом по отрезку $\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), 1\right]$ (из рис. 96). Далее см. пример 34. □

Пример 36. D — область $|z| > 1$ с разрезами по отрезкам $[a, -1]$ и $[1, b]$, где $-\infty < a < -1$, $1 < b < +\infty$ (рис. 123). Функция Жуковского $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на внешность отрезка $[a', b']$, где $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $b' = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$ (из рис. 95). Далее см. пример 34. □

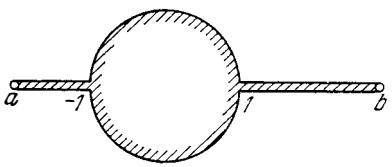


Рис. 123

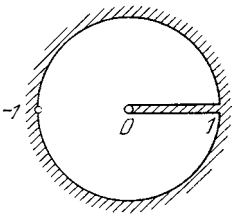


Рис. 124

Пример 37. D — круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$ (рис. 124). Функция Жуковского $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на область D_1: плоскость ζ с разрезом по лучу $[-1, +\infty)$ (из рис. 96). Функция $\eta = \sqrt{\zeta + 1}$, где $\eta|_{\zeta=-5} = 2i$, отображает

область D_1 на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. Наконец, функция $w = (\eta - i)/(\eta + i)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$ на круг $|w| < 1$ (§ 34). □

Разнообразные примеры конформных отображений элементарными функциями содержатся в [8].

Пример 38. Пусть D — область $\operatorname{Im} z < 0$, $|z + il| > R$, где $l > R > 0$ (рис. 125). Эту область можно назвать неконцентрическим кольцом (прямая — окружность бесконечного радиуса). Найдем конформное отображение области D на концентрическое кольцо. Для этого найдем две точки, симметричные одновременно относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ и относительно окружности $|z + il| = R$. Эти точки должны лежать на общем перпендикуляре к прямой и к окружности (§ 34), т. е. на мнимой оси. Из симметрии относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ следует, что это точки $\pm ia$, где $a > 0$. Из симметрии относительно окружности $|z + il| = R$ получаем $(l + a)(l - a) = R^2$, откуда $a = \sqrt{l^2 - R^2}$. Покажем, что искомое отображение есть

$$w = \frac{z + ia}{z - ia}. \tag{18}$$

В самом деле, при этом отображении прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в окружность γ. По свойству сохранения симметрии (§ 34) точки $z = \pm ia$ переходят в точки $w = 0$, $w = \infty$, симметричные относительно окружности γ. Следовательно, $w = 0$ — центр окружности γ. Так как точка $w(0) = -1$ принадлежит γ, то γ — окружность

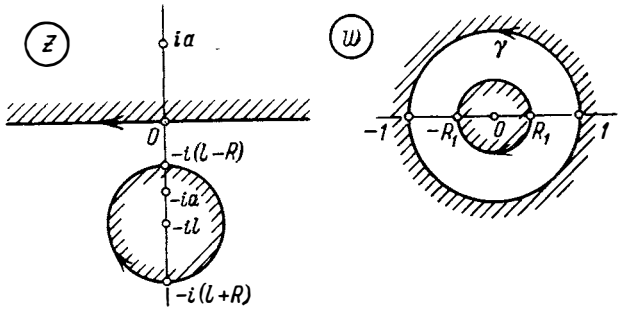


Рис. 125

$|w| = 1$ (рис. 125). Аналогично доказывается, что окружность $|z + il| = R$ при отображении (18) переходит в окружность $|w| = R_1$, где $R_1 = \dfrac{R - l - a}{R + l + a}$. В силу соответствия границ (§ 33) функция (18) конформно отображает область D на концентрическое кольцо $R_1 < |w| < 1$ (рис. 125). □

Пример 39. Пусть D — неконцентрическое кольцо $|z + 1| > 9$, $|z + 6| < 16$ (рис. 126). Найдем конформное отображение

области D на концентрическое кольцо. Для этого найдем две точки a и b, симметричные одновременно относительно окружности $|z+1|=9$ и относительно окружности $|z+6|=16$. Эти точки лежат на общем перпендикуляре к окружностям, т. е. на действительной оси (рис. 126), и поэтому a, b — действительные числа. Из симметрии относительно данных окружностей получаем (§ 34)

$$(a+1)(b+1)=81,$$

$$(a+6)(b+6)=256.$$

Решая эту систему, находим $a=2$, $b=26$. Как и в примере 38, доказывается, что функция $w=\frac{z-2}{z-26}$ конформно отображает область D на концентрическое кольцо $1/3<|w|<1/2$. □

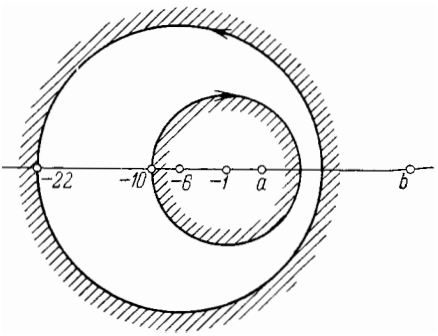


Рис. 126

Пример 40. Пусть D — область $|z-ih|>\sqrt{1+h^2}$, где h — действительное число. Граница этой области — окружность γ с центром в точке ih, проходящая через точки $z=\pm 1$, $z=ia$, $z=-\frac{i}{a}$, $a=h+\sqrt{1+h^2}$ (рис. 127). Покажем, что функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ однолистна в области D.

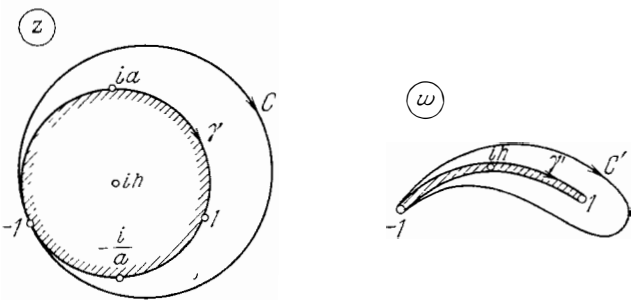


Рис. 127

Рассмотрим отображение $\zeta=1/z$, причем точки ζ будем изображать на той же плоскости z. При этом отображении точки $z=\pm 1$ остаются на месте, а точка $z=ia$ переходит в точку $\zeta=-i/a$, поэтому окружность γ переходит сама в себя (§ 34). Кроме того, точка $z=\infty$ переходит в точку $\zeta=0$, лежащую внутри γ. Следовательно, внешность D окружности γ переходит во внутренность $\tilde{D}$ этой окружности. Так как области D и $\tilde{D}$ не

имеют общих точек, то в силу замечания 2 функция Жуковского однолистна в области D (и в области $\bar{D}$).

Найдем образ области D при отображении функцией Жуковского. Заметим, что соотношение $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ можно записать в виде $\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Поэтому функцию Жуковского можно рассматривать как суперпозицию двух функций:

$$w=\frac{1+\zeta}{1-\zeta},\quad \zeta=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

При отображении $\zeta=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ окружность γ переходит в разрез по некоторому лучу $\tilde{\gamma}$, соединяющему точки $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$. При отображении $w=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ луч $\tilde{\gamma}$ переходит в дугу окружности γ' с концами в точках $w=\pm 1$. Так как точка $z=ia$ при отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ переходит в точку $w=\frac{1}{2}\left(ia-\frac{i}{a}\right)=ih$, то дуга γ' проходит через точку $w=ih$. Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность окружности γ на внешность дуги окружности γ' с концами в точках $w=\pm 1$, проходящей через точку $w=ih$ (рис. 127).

Отметим, что при отображении функцией Жуковского окружность C, близкая к γ и касающаяся γ в точке $z=-1$, переходит в кривую C' (рис. 127), напоминающую профиль крыла самолета. Кривые вида C' (профили Жуковского) были использованы Н. Е. Жуковским для расчета подъемной силы крыла самолета [10]. □

§ 36. Принцип симметрии

В этом параграфе рассматривается способ аналитического продолжения с помощью симметрии. Этот способ называется *принципом симметрии* Римана — Шварца. Принцип симметрии существенно упрощает решение задач о нахождении конформных отображений областей, симметричных относительно прямой.

1. Симметрия относительно действительной оси. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть кривая γ делит ограниченную область D на две области D_1, D_2* (рис. 128), *и пусть функция $f(z)$ регулярна в областях D_1, D_2 и непрерывна в области D. Тогда эта функция регулярна во всей области D.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до ее

границы Г. Рассмотрим функцию

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1}$$

Эта функция регулярна в области D (§ 16). Докажем, что $F(z)\equiv f(z)$ при $z\in D$, тем самым лемма будет доказана.

Добавляя и вычитая интеграл по γ, запишем функцию (1) для $z\in D_1$ в виде

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{2}$$

где Γ_j — граница области D_j $(j=1, 2)$. В формуле (2) интеграл по Γ_1 равен $f(z)$, а интеграл по Γ_2 равен нулю (§ 10), т. е. $F(z)=f(z)$ при $z\in D_1$. Аналогично получаем, что $F(z)=f(z)$

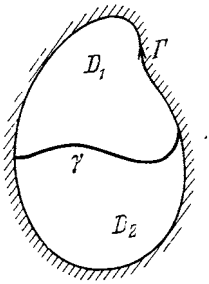


Рис. 128

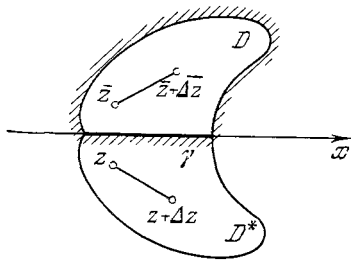


Рис. 129

при $z\in D_2$. Следовательно, $F(z)\equiv f(z)$ при $z\in D$, так как по условию леммы функция $f(z)$ непрерывна в области D.

Следствие 1. *Пусть области D_1, D_2 не имеют общих точек и граничат друг с другом по кривой γ* (рис. 128) *и пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярны в областях D_1, D_2 соответственно и непрерывны вплоть до γ. Если значения этих функций на кривой γ совпадают, то функция*

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1\cup\gamma,\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases} \tag{3}$$

является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области D_1 в область $D_1\cup\gamma\cup D_2$.

В этом случае будем говорить, что функция $f_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через кривую γ.

В следующей теореме D — область, граница которой содержит интервал γ действительной оси, D^* — область, симметричная с областью D относительно действительной оси (рис. 129).

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, граница которой содержит интервал γ действительной оси, и области D, D^* не имеют общих точек. Если функция $f(z)$ непрерывна вплоть до γ и принимает действительные значения на интервале γ, то ее можно аналитически продолжить в область $D \cup \gamma \cup D^*$. Это продолжение дается формулой*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Докажем, что функция

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in D^* \tag{5}$$

имеет производную $f_1'(z)$ в каждой точке $z \in D^*$. Рассмотрим отношение

$$\frac{f_1(z+\Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z}+\Delta z)} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z} = \overline{\left[\frac{f(\bar{z}+\overline{\Delta z}) - f(\bar{z})}{\overline{\Delta z}}\right]}. \tag{6}$$

Так как $z \in D^*$, то $\bar{z} \in D$ и при достаточно малом Δz точка $\bar{z} + \overline{\Delta z}$ также принадлежит D (рис. 129). Следовательно, при $\Delta z \to 0$ предел отношения (6) существует и равен $\overline{f'(\bar{z})}$, т. е. $f_1'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$. Таким образом, функция $f_1(z)$ дифференцируема и, следовательно, регулярна в области D^*.

Покажем теперь, что функция $F(z)$, определенная формулой (4), непрерывна в области $D \cup \gamma \cup D^*$. В самом деле, из непрерывности функции $f(z)$ вплоть до γ следует, что $\lim\limits_{z \to x} f(z) = f(x)$, $x \in \gamma$, откуда находим $\lim\limits_{z \to x} f_1(z) = \lim\limits_{\bar{z} \to x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)}$, т. е. функция $f_1(z)$ непрерывна вплоть до γ. Так как $f(x) = \overline{f(x)}$ по условию теоремы, то $f_1(z)|_{z \in \gamma} = f(z)|_{z \in \gamma}$. Следовательно, функция $F(z)$ регулярна в области $D \cup \gamma \cup D^*$ в силу леммы 1 и является аналитическим продолжением функции $f(z)$.

Отметим, что при условиях теоремы 1 функция $f_1(z)$, определенная формулой (5), является аналитическим продолжением функции $f(z)$ (из D в D^* через γ).

Пример 1. Если целая функция $f(z)$ принимает действительные значения на действительной оси, то для любого z имеет место равенство $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Например, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$, $\operatorname{sh} \bar{z} = \overline{\operatorname{sh} z}$, $\operatorname{ch} \bar{z} = \overline{\operatorname{ch} z}$. □

Пример 2. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением простого полюса в точке z_0 ($\operatorname{Im} z_0 > 0$), непрерывна вплоть до действительной оси и принимает действительные значения на действительной оси. Покажем, что если эта

функция ограничена при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, то

$$f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \frac{\overline{A}}{z - \bar{z}_0} + C, \tag{7}$$

где $A = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$, C — действительное число.

В самом деле, в этом случае функция (4) регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов в точках z_0 и $\bar{z}_0$, причем $\operatorname*{res}_{z=\bar{z}_0} F(z) = \overline{A}$ (в силу (4)). Поэтому функция $g(z) = F(z) - \dfrac{A}{z - z_0} - \dfrac{\overline{A}}{z - \bar{z}_0}$ — целая и ограниченная. Следовательно, $g(z) \equiv \text{const}$ по теореме Лиувилля (§ 19), откуда вытекает формула (7). □

Пример 3. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна вплоть до интервалов γ_1: $(-\infty, a)$, γ_2: $(b, +\infty)$, где $-\infty < a \leqslant b < +\infty$ и на этих интервалах принимает действительные значения. Тогда функция (4) регулярна во всей плоскости z с разрезом по отрезку $[a, b]$. □

Пример 4. Пусть D_0 — плоскость z с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ и с выколотой точкой $z = \infty$. Докажем, что в области D_0 можно выделить регулярную ветвь функции $\sqrt{z^2 - 1}$.

В самом деле, по теореме о монодромии (§ 24) можно выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $\sqrt{z^2 - 1}$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $f(x) > 0$ при $x > 1$, для определенности. Тогда $f(x) < 0$ при $x < -1$ (§ 24) и из примера 3 вытекает, что функция (4) является регулярной ветвью функции $\sqrt{z^2 - 1}$ в области D_0. □

2. Применения принципа симметрии. Пусть выполнены условия теоремы 1, а также следующие условия (рис. 130):

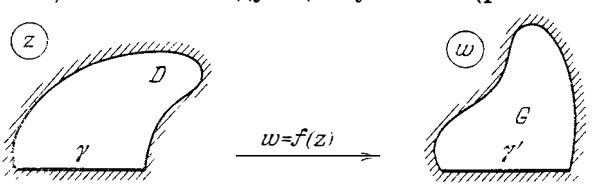


Рис. 130

а) функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G, лежащую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$;

б) образом интервала γ является интервал γ' действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$ (γ' — часть границы области G).

Тогда из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Функция $w = F(z)$, определенная формулой* (4), *конформно отображает область $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ на область*

$G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$, *где* G^* *— область, симметричная с областью* G *относительно действительной оси* $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 131).

Пример 5. Отображение внешности креста на полуплоскость. Пусть D_0 — плоскость z с разрезами по лучу

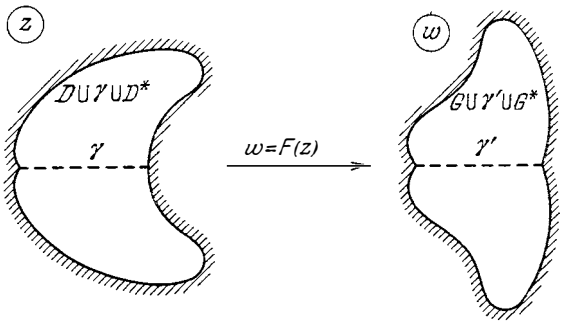


Рис. 131

$[-4, +\infty)$ и отрезку $[-3i, 3i]$ (рис. 132). Найдем конформное отображение области D_0 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

На первый взгляд кажется, что естественно воспользоваться отображением $\eta = z^2$ (ср. пример 7 § 35). Но это отображение не является конформным, так как функция z^2 неоднолистна в области D_0 (например, $(4i)^2 = (-4i)^2 = -16$). Поэтому рассмотрим

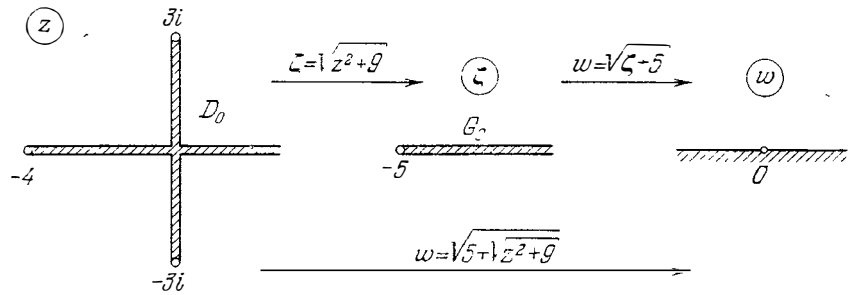


Рис. 132

сначала «половину» области D_0. Пусть D — верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, 3i]$ (рис. 133). В этой области функция $\eta = z^2$ однолистна.

Из примера 7 § 35 следует, что функция $\zeta = f(z) = \sqrt{z^2+9}$ конформно отображает область D на область G: $\operatorname{Im} \zeta > 0$ (рис. 133). Здесь $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{z^2+9}$ такая, что $f(x+0i) > 0$ при $x > 0$. При этом отображении интервал γ: $(-\infty, -4)$ переходит в интервал γ': $(-\infty, -5)$ (рис. 133). В силу следствия 2 функция $\zeta = F(z) = \sqrt{z^2+9}$ конформно отображает

область $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ на область $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$, G_0 — плоскость ζ с разрезом по лучу $[-5, +\infty)$ (рис. 132). Здесь $F(z)$ — аналитическое продолжение функции $f(z)$ в область D_0, т. е. $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{z^2+9}$ в области D_0 такая, что $F(x+0i) > 0$ при $x > 0$.

Отображая область G_0 функцией $w = \sqrt{\zeta+5}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, окончательно находим конформное отображение

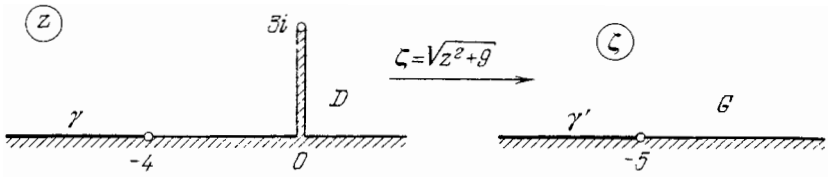


Рис. 133

$w = \sqrt{5 + \sqrt{z^2+9}}$ области D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 132). □

Пример 6. Отображение внутренности параболы на полуплоскость. Пусть D_0 — область $y^2 < 2p(x + p/2)$,

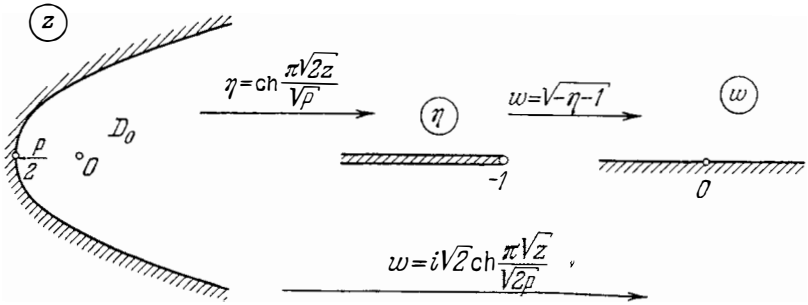


Рис. 134

где $z = x + iy$, $p > 0$ (рис. 134). Найдем конформное отображение области D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Парабола $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ переходит в прямую при отображении $\zeta = \sqrt{z}$ (пример 6 § 35). Но область D_0 содержит точку ветвления $z = 0$ функции $\sqrt{z}$. Поэтому рассмотрим половину области D_0; пусть D — область $y^2 < 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$, $y > 0$ (рис. 135). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.

1) Функция $\zeta = \sqrt{z}$ конформно отображает область D (рис. 135) на полуполосу П: $0 < \operatorname{Im} \zeta < \sqrt{p/2}$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$ (пример 3 § 35).

2) Функция $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2}\,\zeta}{\sqrt{p}}$ конформно отображает полуполосу П (рис. 135) на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$ (пример 23 § 35). Таким образом, функция $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2z}}{\sqrt{p}}$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$ так, что интервал γ:

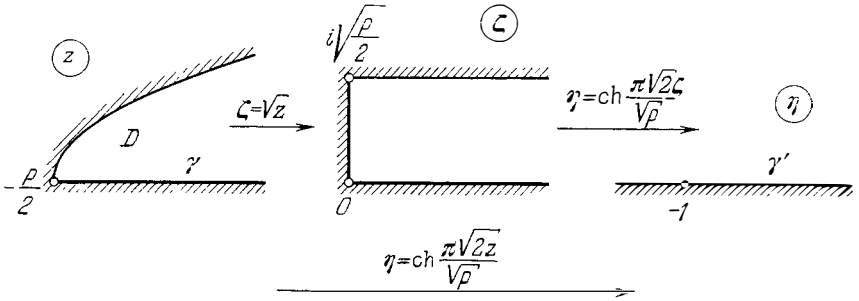


Рис. 135

$(-p/2, +\infty)$ переходит в интервал γ': $(-1, +\infty)$ (рис. 135). В силу следствия 2 функция $\eta = \operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{2z}}{\sqrt{p}}$ конформно отображает область D_0 на плоскость η с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ (рис. 134).

3) Функция $w = \sqrt{-\eta - 1}$ отображает плоскость η с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 134).

Окончательно имеем: функция $w = i\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{z}}{\sqrt{2p}}$ конформно отображает область D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 134). □

Пример 7. Отображение внутренности правой ветви гиперболы на полуплоскость. Найдем конформное отображение области $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $x > 0$ (область D_0 рис. 136), где $z = x + iy$, $0 < \alpha < \pi/2$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Гипербола «распрямляется» при отображении функцией $\tau = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратной к функции Жуковского (§ 35). Но область D_0 содержит точку ветвления $z = 1$ этой функции. Поэтому рассмотрим половину области D_0; пусть D — область $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $x > 0$, $y > 0$ (рис. 137). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.

Выполняя последовательно отображения

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{\operatorname{arch} z}, \quad \eta = \tau^{\pi/\alpha}, \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)$$

(примеры 19е, 9, 19а, § 35), получаем, что функция $\zeta = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{arch} z\right)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$, причем интервал γ: $(\cos\alpha, +\infty)$ переходит в интервал γ': $(-1, +\infty)$ (рис. 137). В силу следствия 2 функция

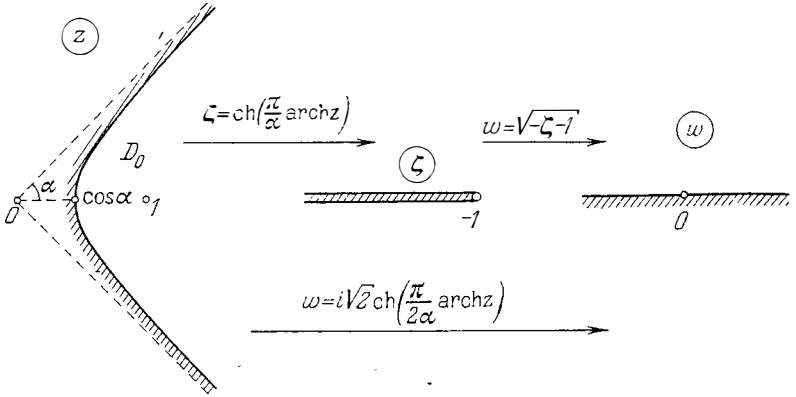


Рис. 136

$\zeta = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{arch} z\right)$ конформно отображает область D_0 на область G_0 — плоскость ζ с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ (рис. 136).

Функция $w = \sqrt{-\zeta - 1}$ отображает область G_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 136). Таким образом, функция $w = i\sqrt{2} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{arch} z\right)$ конформно отображает область D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 136). □

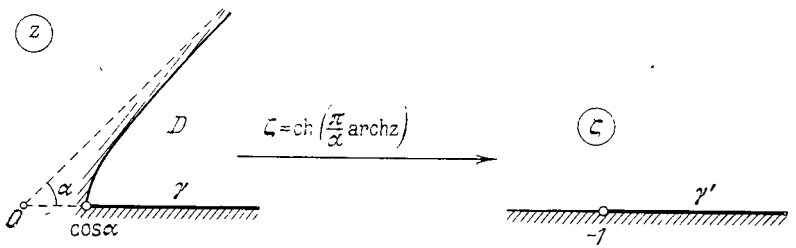


Рис. 137

Замечание. Теорема 1 и следствие 2 легко переносятся на случай, когда γ и γ' — дуги окружностей (в частности, интервалы прямых). Для этого нужно дробно-линейным отображением перевести γ и γ' в интервалы действительной оси и затем воспользоваться свойством сохранения симметрии при дробно-линейном отображении. Подробнее см. [10].

Пример 8. Пусть D — плоскость z с разрезами по отрезкам $[0, e^{2k\pi i/n}]$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ (рис. 138). Найдем конформное отображение области D на внешность единичного круга.

Рассмотрим угол D_0: $0<\arg z<2\pi/n$ (рис. 139). Найдем конформное отображение $w=f_0(z)$ угла D_0 на сектор G_0: $0<\arg w<2\pi/n$, $|w|>1$ (рис. 139), удовлетворяющее условиям

$$f_0(1)=1, \quad f_0(\infty)=\infty, \quad f_0(e^{2\pi i/n})=e^{2\pi i/n}. \tag{8}$$

Выполняя последовательно отображения

$$\zeta=z^{n/2}, \quad \eta=\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}, \quad w=\eta^{2/n}$$

(примеры 9, 19а § 35), получаем, что отображение $w=f_0(z)=(z^{n/2}+\sqrt{z^n-1})^{2/n}$ является искомым (рис. 139). Здесь $f_0(z)$ — регулярная ветвь функции $(z^{n/2}+\sqrt{z^n-1})^{2/n}$ в области D_0, удовлетворяющая условиям (8). При этом отображении луч γ_0: $(1, +\infty)$ переходит в луч γ_0': $(1, +\infty)$, а луч γ_1: $(e^{2\pi i/n}, +\infty e^{2\pi i/n})$ — в луч γ_1': $(e^{2\pi i/n}, +\infty e^{2\pi i/n})$.

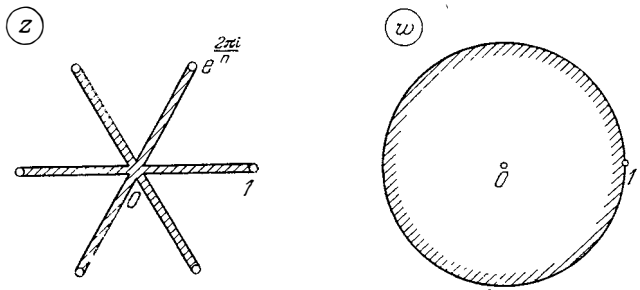


Рис. 138

Покажем, что существует аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f_0(z)$ в область D и функция $w=F(z)$ конформно отображает область D на область $|w|>1$ (рис. 138).

Рассмотрим соседний с D_0 угол D_1: $2\pi/n<\arg z<4\pi/n$ и сектор G_1: $2\pi/n<\arg w<4\pi/n$, $|w|>1$. Точки угла D_1 получаются из точек угла D_0 умножением на $e^{2\pi i/n}$; аналогично связаны точки секторов G_1, G_0. Следовательно, функция

$$w=f_1(z)=e^{2\pi i/n}f_0(e^{-2\pi i/n}z), \quad z\in D_1$$

конформно отображает D_1 на G_1. При этом $f_1(z)\equiv f_0(z)$, $z\in\gamma_1$, т. е. функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1 через γ_1.

Аналогично, если D_k — угол $2k\pi/n<\arg z<2(k+1)\pi/n$, G_k — сектор $2k\pi/n<\arg w<2(k+1)\pi/n$, $|w|>1$, то функция $w=f_k(z)=e^{2k\pi i/n}f_0(e^{-2k\pi i/n}z)$, $z\in D_k$ конформно отображает D_k на

G_k $(k=2, 3, \ldots, n)$. При этом $f_k(z) \equiv f_{k-1}(z)$, $z \in \gamma_k$, где γ_k — луч $(e^{2k\pi i/n}, +\infty\, e^{2k\pi i/n})$.

Очевидно, угол D_n совпадает с углом D_0 и

$$f_n(z) = e^{2n\pi i/n} f_0(e^{-2n\pi i/n} z) = f_0(z), \quad z \in D_0.$$

Следовательно, функция $w = F(z) = f_k(z)$, $z \in D_k \cup \gamma_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, регулярна в области D и конформно отображает

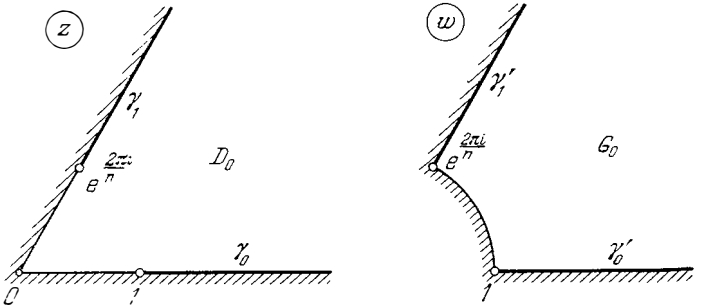


Рис. 139

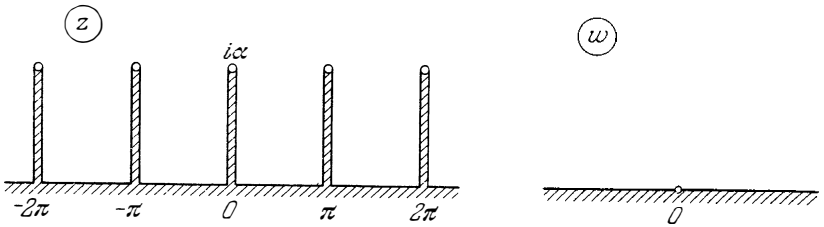


Рис. 140

область D на область $|w| > 1$. Таким образом, функция $w = (z^{n/2} + \sqrt{z^n - 1})^{2/n}$ конформно отображает область D на область $|w| > 1$. □

Пример 9. Пусть D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезами по отрезкам $[k\pi, k\pi + i\alpha]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $0 < \alpha < +\infty$ (рис. 140). Найдем конформное отображение области D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Рассмотрим полуполосу D_0: $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 141). Найдем конформное отображение $w = f_0(z)$ области D_0 на полуполосу G_0: $-\pi < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 141), удовлетворяющее условиям

$$f_0(i\alpha) = 0, \quad f_0(-\pi + i\alpha) = -\pi, \quad f_0(\infty) = \infty. \tag{9}$$

Выполняя последовательно отображения

$$\zeta = \cos z, \quad \eta = \zeta / \operatorname{ch} \alpha, \quad w = \arccos \eta$$

(пример 25, § 35), получаем искомое отображение

$$w = f_0(z) = \arccos \frac{\cos z}{\operatorname{ch} \alpha}.$$

Здесь $f_0(z)$ — регулярная ветвь функции $\arccos \frac{\cos z}{\operatorname{ch} \alpha}$ в области D_0, удовлетворяющая условиям (9). При этом отображении луч

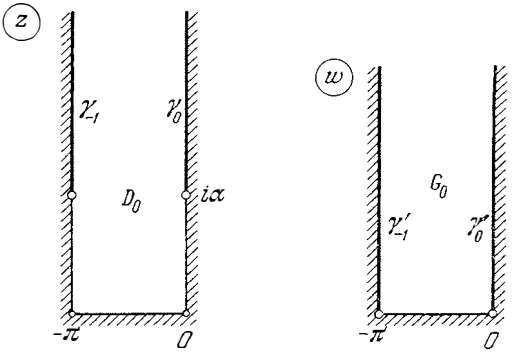


Рис. 141

γ_0: $(i\alpha,\ i\alpha + i\infty)$ переходит в луч γ_0': $(0, 0 + i\infty)$, а луч γ_{-1}: $(-\pi + i\alpha, -\pi + i\infty)$ — в луч γ_{-1}': $(-\pi, -\pi + i\infty)$.

Покажем, что существует аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f_0(z)$ в область D и функция $w = F(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Рассмотрим соседнюю с D_0 полуполосу D_1: $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$. Точки области D_1 получаются из точек области D_0 прибавлением π; аналогично связаны точки областей G_1, G_0. Следовательно, функция

$$w = f_1(z) = f_0(z - \pi) + \pi, \quad z \in D_1$$

конформно отображает D_1 на G_1. При этом $f_1(z) \equiv f_0(z)$ на луче γ_0, т. е. функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1 через γ_0.

Аналогично, если D_k — полуполоса $(k-1)\pi < \operatorname{Re} z < k\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$, G_k — полуполоса $(k-1)\pi < \operatorname{Re} w < k\pi$, $\operatorname{Im} w > 0$, то функция

$$w = f_k(z) = f_0(z - k\pi) + k\pi, \quad z \in D_k$$

конформно отображает D_k на G_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ При этом $f_k(z) \equiv f_{k-1}(z)$ на луче γ_{k-1}: $((k-1)\pi + i\alpha,\ (k-1)\pi + i\infty)$. Следовательно, функция

$$w = F(z) = f_k(z), \quad z \in D_k \cup \gamma_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

регулярна в области D и конформно отображает область D на область $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 140). Таким образом, функция

$w = \arccos \frac{\cos z}{\operatorname{ch} \alpha}$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. □

Пример 10. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает кольцо K: $\rho < |z| < R$ на кольцо K': $\rho' < |w| < R'$. Докажем, что эти кольца подобны, т. е. $\rho/\rho' = R/R'$.

Доказательство. Возможны два случая:

1) окружность $|z| = \rho$ переходит в окружность $|w| = \rho'$;
2) окружность $|z| = \rho$ переходит в окружность $|w| = R'$.

Рассмотрим первый случай. По принципу симметрии существует аналитическое продолжение $F_1(z)$ функции $f(z)$ в кольцо K_1: $\rho_1 < |z| < R$, где $\rho_1 = \rho^2/R$. Функция $w = F_1(z)$ конформно отображает кольцо K_1 на кольцо K_1': $\rho_1' < |w| < R'$, где $\rho_1' = (\rho')^2/R$, так, что окружность $|z| = \rho_1$ переходит в окружность $|w| = \rho_1'$. Аналогично, существует аналитическое продолжение $F_2(z)$ функции $F_1(z)$ (и $f(z)$) в кольцо K_2: $r_2 < |z| < R$, где $r_2 = \rho^4/R^3$ и т. д. Таким образом, получаем аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f(z)$ в кольцо $0 < |z| < R$, причем $\lim\limits_{z \to 0} F(z) = 0$. Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции $F(z)$ (§ 18), т. е. функция $w = F(z)$ конформно отображает круг $|z| < R$ на круг $|w| < R'$, причем $F(0) = 0$. Следовательно, $F(z)$ — дробно-линейная функция и $F(\infty) = \infty$ (§ 34), т. е. $f(z) = Az$, откуда $\rho/\rho' = R/R'$. □

§ 37. Интеграл Кристоффеля — Шварца

В этом параграфе рассматривается конформное отображение $w = f(z)$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на многоугольник Π, заданный в плоскости w. При этом используются следующие

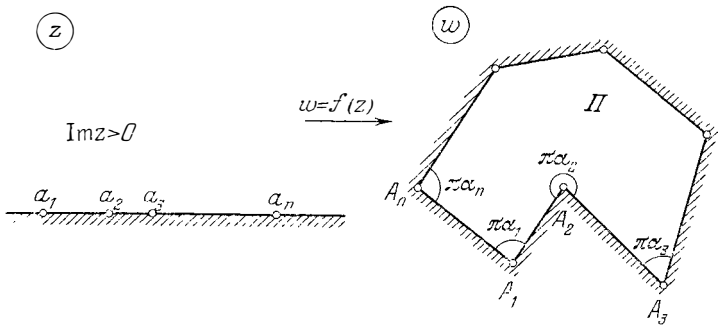


Рис. 142

обозначения (рис. 142): A_k — последовательные вершины многоугольника Π, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\pi\alpha_k$ — угол многоугольника Π в

вершине A_k, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$; a_k — прообраз вершины A_k при отображении $w = f(z)$, т. е. $f(a_k) = A_k$.

1. Теорема Кристоффеля — Шварца.

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный многоугольник* П, $0 < \alpha_k \leqslant 2$, $a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда имеет место формула Кристоффеля — Шварца*

$$f(z) = c \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + c_1, \quad (1)$$

где c, c_1 — постоянные и интеграл берется по кривой, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. По теореме Римана (§ 33) существует функция $w = f(z)$, которая конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный многоугольник П так, что $a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Изучим свойства этой функции.

1. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция с исходным элементом $f(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$. Покажем, что функция $F(z)$ является аналитической во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Воспользуемся принципом симметрии (§ 36). Функция $w = f(z)$ переводит интервал γ_k: (a_k, a_{k+1}) в интервал Γ_k: (A_k, A_{k+1}) $(a_{n+1} = a_1$, $A_{n+1} = A_1$; один из интервалов γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, содержит внутри себя точку $z = \infty)$. В силу принципа симметрии существует аналитическое продолжение $f_k^*(z)$ функции $f(z)$ через интервал γ_k в полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$. Функция $w = f_k^*(z)$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на многоугольник Π_k^*, симметричный с многоугольником П относительно прямой l_k, проходящей через интервал Γ_k (рис. 143). При этом отображении образом интервала γ_j является интервал Γ_j^*, симметричный с интервалом Γ_j относительно прямой l_k (рис. 143).

Далее, в силу принципа симметрии существует аналитическое продолжение $f_{kj}(z)$ функции $f_k^*(z)$ через интервал γ_j в полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Функция $w = f_{kj}(z)$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на многоугольник Π_{kj}, симметричный с многоугольником Π^* относительно l_j^* (рис. 143). Повторяя аналогичные рассуждения, найдем аналитическое продолжение функции $f_{kj}(z)$ через интервал γ_s в полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ и т. д. Все эти продолжения определяют функцию $F(z)$, аналитическую во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Докажем, что функция $F''(z)/F'(z)$ однозначна и регулярна во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Воспользуемся теми же обозначениями, что и выше. Покажем, что

$$f_k^*(z) = e^{i\beta_k} \overline{f(\bar{z})} + B_k, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad (2)$$

где β_k — действительное число. В самом деле, в силу принципа симметрии точки $w = f(\bar{z})$ и $w^* = f_k^*(z)$ $(\operatorname{Im} z < 0)$ симметричны относительно

прямой l_k. Линейное отображение $\zeta = (w - A_k)\, e^{-i\varphi_k}$, где $\varphi_k = \arg(A_{k+1} - A_k)$, переводит прямую l_k в действительную ось $\operatorname{Im}\zeta = 0$ и точки, симметричные относительно прямой l_k,— в точки, симметричные относительно прямой $\operatorname{Im}\zeta = 0$ (§ 36). Следовательно, $(w^* - A_k)\, e^{-i\varphi_k} = \overline{[(w - A_k)\, e^{-i\varphi_k}]}$, откуда вытекает соотношение (2).

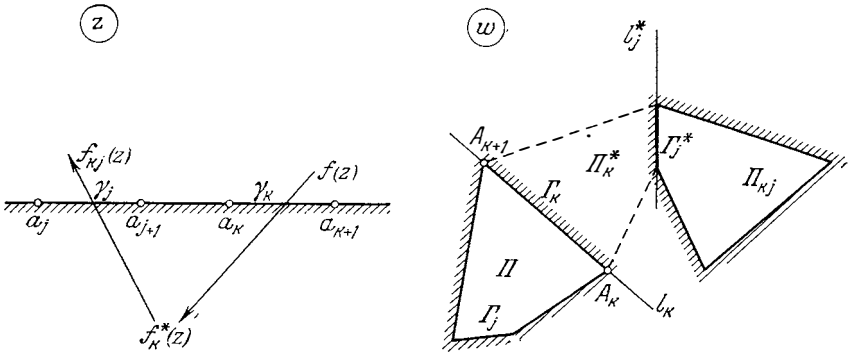


Рис. 143

Аналогично доказывается формула

$$f_{kj}(z) = e^{i\beta_j}\overline{f_k^*(\bar{z})} + B_j, \qquad \operatorname{Im} z > 0. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) получаем $f_{kj}(z) = e^{i\beta_{kj}} f(z) + B_{kj}$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Точно так же для любого элемента $\tilde{f}(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, функции $F(z)$ находим

$$\tilde{f}(z) = e^{i\beta} f(z) + B, \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

откуда $\tilde{f}''(z)/\tilde{f}'(z) = f''(z)/f'(z)$. Аналогично, для любого элемента $\tilde{f}^*(z)$, $\operatorname{Im} z < 0$, функции $F(z)$ получаем $(\tilde{f}^*)''/(\tilde{f}^*)' = (f_k^*)''/(f_k^*)'$. Таким образом, функция $g(z) = F''(z)/F'(z)$ однозначна.

Докажем, что функция $g(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Действительно, в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функция $f(z)$ регулярна и $f'(z) \neq 0$, так как отображение $w = f(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, конформно. Поэтому функция $g(z) = f''(z)/f'(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Аналогично доказывается, что функция $g(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$.

Далее, в силу принципа симметрии функция $f(z)$ регулярна и однолистна в каждой точке действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$, за исключением точек a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому $f'(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$, $z \neq \infty$, $z \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и в окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \qquad |z| > R,$$

где $c_{-1} \neq 0$. Следовательно, функция $f''(z)/f'(z)$, а потому и функция $g(z) = F''(z)/F'(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и в окрестности

точки $z = \infty$ разлагается в ряд

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{2}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z| > R.$$

3. Докажем, что в окрестности точки a_k функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} h_k(z), \tag{4}$$

где функция $h_k(z)$ регулярна в точке a_k и $h_k(a_k) \neq 0$.

Рассмотрим полукруг K: $|z - a_k| < \varepsilon$, $\operatorname{Im} z > 0$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало́ (рис. 144). Функция $w = f(z)$ конформно отображает полукруг

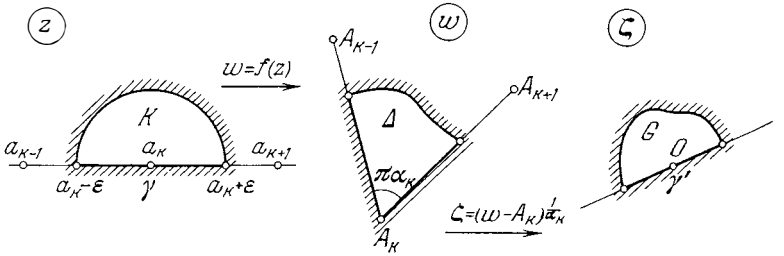


Рис. 144

K на область Δ, где Δ — часть многоугольника Π, лежащая в окрестности точки A_k.

Функция $\zeta = (w - A_k)^{1/\alpha_k}$ конформно отображает область Δ на область G, где G — часть полуплоскости, лежащая в окрестности точки $\zeta = 0$. Следовательно, функция $\zeta = g_k(z) = [f(z) - A_k]^{1/\alpha_k}$ конформно отображает полукруг K на область G так, что $g_k(a_k) = 0$, и образом интервала γ: $(a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$ является интервал γ', содержащий точку $\zeta = 0$ (рис. 144). В силу принципа симметрии функция $g_k(z)$ регулярна в точке $z = a_k$ и $g_k'(a_k) \neq 0$, т. е. $g_k(z) = (z - a_k)\,\tilde{g}_k(z)$, где функция $\tilde{g}_k(z)$ регулярна в точке $z = a_k$ и $\tilde{g}_k(a_k) \neq 0$. Из равенства $[f(z) - A_k]^{1/\alpha_k} = (z - a_k)\,\tilde{g}_k(z)$ вытекает формула (4).

4. Докажем, что функция $f''(z)/f'(z)$ имеет вид

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}. \tag{5}$$

Из формулы (4) получаем $\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + \dfrac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)}$, где функция $\psi_k(z) = \alpha_k h_k(z) + (z - a_k) h_k'(z)$ регулярна в точке $z = a_k$ и $\psi_k(a_k) = \alpha_k h_k(a_k) = 0$. Следовательно, функция $g(z) = F''(z)/F'(z)$, равная $f''(z)/f'(z)$ в окрестности точки a_k (свойство 2), имеет полюс первого порядка в точке a_k и $\operatorname{res}_{z=a_k} g(z) = \alpha_k - 1$. Отсюда и из свойства 2 вытекает, что функция

$$H(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$$

регулярна во всей расширенной комплексной плоскости и стремится к нулю при $z \to \infty$. Следовательно, по теореме Лиувилля (§ 19) $H(z) \equiv 0$, откуда при $\operatorname{Im} z > 0$ вытекает формула (5).

5. Докажем формулу Кристоффеля — Шварца (1). Интегрируя равенство (5) по кривой, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, с началом в фиксированной точке z_0 и концом в точке z, получаем

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) \ln (z - a_k) + \tilde{c},$$

откуда

$$f'(z) = c (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}.$$

Из последнего равенства интегрированием получаем формулу Кристоффеля — Шварца (1). Теорема 1 доказана.

2. Вычисление параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца. Формула Кристоффеля — Шварца (1) позволяет находить вид функции $w = f(z)$, которая конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный многоугольник Π. Таким образом, если многоугольник задан, т. е. заданы его вершины A_k и углы $\pi\alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, то задача о нахождении функции $f(z)$ сводится к отысканию точек a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ и констант c, c_1. Любые три из точек a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ можно задать произвольно (§ 33); тогда остальные точки a_k и константы c, c_1 должны определяться однозначно. Рассмотрим один из способов нахождения этих точек и констант.

Формулу (1) запишем в виде

$$f(z) = c \int_{z_0}^{z} h(\zeta)\, d\zeta + c_1, \tag{6}$$

где $h(z)$ — регулярная ветвь функции $(z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Так как различные ветви этой функции отличаются друг от друга постоянным множителем (§ 24), то в формуле (6) в зависимости от выбора ветви $h(z)$ будет изменяться только константа c (точнее, $\arg c$).

Для определенности будем считать, что заданы точки a_1, a_2, a_3, где $a_1 < a_2$, и $z_0 = a_1$ (от выбора точки z_0 зависит константа c_1). Полагая в формуле (6) $z = a_1$, получаем $c_1 = f(a_1) = A_1$. Найдем $\arg c$. Заметим, что $\arg h(x) = \theta = \text{const}$ при $a_1 < x < a_2$. Из (6) имеем

$$A_2 - A_1 = f(a_2) - f(a_1) = ce^{i\theta} \int_{a_1}^{a_2} |h(t)|\, dt,$$

откуда $\arg c = \arg (A_2 - A_1) - \theta$. Таким образом, формулу (6)

можно записать в виде

$$f(z) = Ae^{i\alpha} \int_{a_1}^{z} h(\zeta)\, d\zeta + A_1, \tag{7}$$

где $A > 0$, $\alpha = \arg(A_2 - A_1) - \theta$.

В формуле (7) осталось $n - 2$ неизвестных параметра: положительное число A и действительные числа a_4, a_5, ..., a_n. Из (7) имеем

$$A_{k+1} - A_k = Ae^{i\alpha} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h(t)\, dt.$$

Отсюда, учитывая, что $\arg h(x) \equiv \text{const}$ на интервале (a_k, a_{k+1}), получаем

$$|A_{k+1} - A_k| = A \int_{a_k}^{a_{k+1}} |h(t)|\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Здесь $a_{n+1} = a_1$, $A_{n+1} = A_1$ и один из интервалов (a_k, a_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, n$, содержит внутри себя точку $z = \infty$.

Параметры A, a_4, a_5, ..., a_n можно находить из системы (8). Из теоремы 1 следует, что эта система имеет единственное решение. Однако в конкретных задачах редко удается найти решение системы (8). Для простейших многоугольников можно указать другие способы отыскания параметров в формуле Кристоффеля — Шварца (см. ниже примеры 2, 4).

3. Отображение полуплоскости на треугольник и прямоугольник. В теореме 1 рассмотрен случай, когда все точки a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — конечные. Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный многоугольник* П *так, что $a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $a_n = \infty$. Тогда имеет место формула*

$$(z) = c \int_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1}\, d\zeta + c_1. \tag{9}$$

Формулу (9) можно получить из (1) с помощью дробно-линейного отображения полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$, переводящего точку $z = a_n$ в точку $\zeta = \infty$ [10]. Отметим, что в интеграле (9) на один множитель меньше, чем в интеграле (1). Поэтому, как правило, удобнее пользоваться формулой (9). При этом будем считать, что $z_0 = a_1$, тогда $c_1 = A_1$.

Пример 1. Отображение полуплоскости на треугольник. Найдем конформное отображение $w = f(z)$

полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный треугольник Π с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, где $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $\operatorname{Im} A_3 > 0$ (рис. 145). Здесь $0 < \alpha_k < 1$ $(k = 1, 2, 3)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

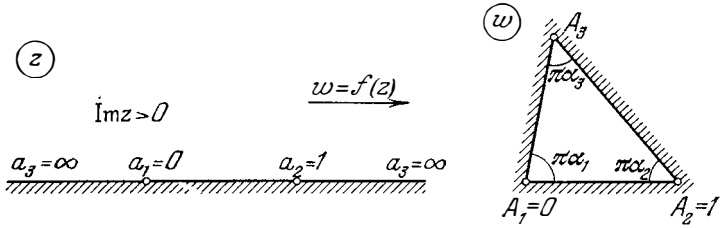


Рис. 145

Положим $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ (рис. 145). По формуле (9) имеем

$$f(z) = c \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} \, d\zeta = A \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} \, d\zeta,$$

где $A = ce^{\pi(\alpha_2 - 1)i}$, а подынтегральная функция принимает положительные значения на интервале $(0, 1)$. Из равенства

$$A_2 - A_1 = 1 = A \int_0^1 t^{\alpha_1 - 1} (1 - t)^{\alpha_2 - 1} \, dt = A \cdot B(\alpha_1, \alpha_2)$$

находим $A = 1/B(\alpha_1, \alpha_2)$, где $B(\alpha_1, \alpha_2)$ — бета-функция [9]. Таким образом, функция

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} \, d\zeta \tag{10}$$

конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на треугольник Π. □

Пример 2. Отображение полуплоскости на прямоугольник. Найдем конформное отображение $w = f(z)$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный прямоугольник Π с вершинами в точках A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, где $A_1 = 1$, $A_2 = 1 + iH$, $A_3 = -1 + iH$, $A_4 = -1$, $H > 0$, $\alpha_k = \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ (рис. 146).

Рассмотрим правую половину прямоугольника Π: прямоугольник Π_+ с вершинами в точках 0, 1, $1 + iH$, iH (рис. 147). Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает первый квадрант $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ на прямоугольник Π_+ так, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = iH$. При этом отображении интервал γ: $(0, +i\infty)$ переходит в интервал γ': $(0, iH)$, прообразом точки $w = 1 + iH$ является точка $z = a$, где $1 < a < +\infty$ (рис. 147).

По принципу симметрии (§ 36) продолжим аналитически функцию $f(z)$ в полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ и обозначим это аналитическое продолжение тем же символом $f(z)$. Функция $w = f(z)$

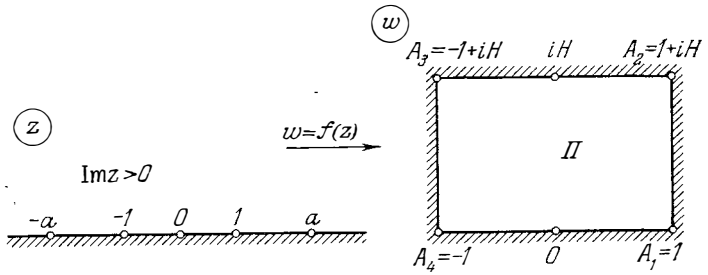


Рис. 146

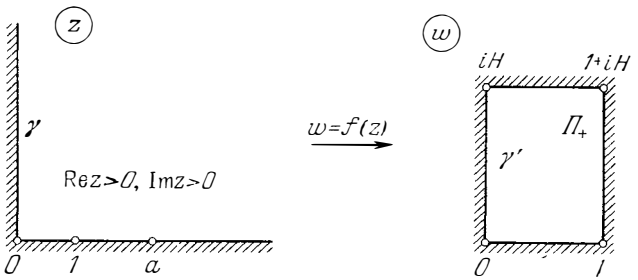


Рис. 147

конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на прямоугольник П (рис. 146) так, что $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \pm 1$, $f(\pm a) = \pm 1 + iH$, $f(\infty) = iH$.

По формуле (1) имеем

$$w = f(z) = A \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \tag{11}$$

где $k = 1/a$, $0 < k < 1$ $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)} > 0$ при $0 < t < 1$. Здесь параметры k, A, H связаны в силу (8) уравнениями

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{A}, \quad \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \frac{H}{A}. \qquad \square$$

Интеграл (11) при $A = 1$ называется *эллиптическим интегралом* Лежандра *первого рода*. Функция $z = \psi(w)$, обратная к функции (11), называется *эллиптической функцией* Якоби. Эта функция конформно отображает четырехугольник П на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Отметим основные свойства функции $\psi(z)$:

1. Функция $\psi(z)$ регулярна в комплексной плоскости z, за исключением точек

$$z = 2n + iH(2k + 1)$$

(k, n — целые числа), которые являются простыми полюсами этой функции.

2. Функция $\psi(z)$ имеет два периода, $T_1 = 4$ и $T_2 = 2Hi$, т. е.

$$\psi(z + 4n + 2Hki) \equiv \psi(z)$$

(k, n — целые числа).

Доказательство этих свойств аналогично доказательству теоремы 1. Отметим, что с помощью эллиптических функций можно найти конформное отображение внутренности эллипса на полуплоскость [10]. Подробнее эллиптические функции рассматриваются в [5], [15].

4. Отображение полуплоскости на неограниченный многоугольник. Рассмотрим неограниченный многоугольник П, не содержащий внутри себя точку $w = \infty$. Пусть одна или несколько вершин этого многоугольника расположены в точке $w = \infty$. Если $\pi\alpha_j$ — угол многоугольника П в его вершине $A_j = \infty$, то $-2 \leqslant \alpha_j \leqslant 0$ (§ 33). При этом сохраняется равенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$.

Можно доказать, что в этом случае остаются справедливыми теорема 1 и следствие 1, т. е. имеет место общая

Теорема 2. *Конформное отображение* $w = f(z)$ *полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *на многоугольник* П *осуществляется*

а) *функцией* (1), *если* $a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

б) *функцией* (9), *если* $a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $a_n = \infty$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 (подробнее см. [10]).

Пример 3. Пусть П — треугольник с вершинами в точках $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = \infty$ и $0 < \alpha_1 \leqslant 2$, $0 < \alpha_2 \leqslant 2$, $-2 \leqslant \alpha_3 \leqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Из теоремы 2 и примера 1 следует, что функция (10) конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на треугольник П.

На рис. 148 показаны примеры таких треугольников:

а) $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{4}$;

б) $\alpha_1 = \frac{5}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3 = -1$;

в) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{3}{2}$;

г) $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = -2$.

В этих случаях по формуле (10) находим:

а) $w = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin \sqrt[4]{z} - \sqrt[4]{z}\sqrt{1-\sqrt{z}}\right]$;

б) $w = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\zeta\sqrt{2}}{1-\zeta^2} + \operatorname{arth}\frac{\zeta\sqrt{2}}{1+\zeta^2} - \frac{\zeta 2\sqrt{2}}{1+\zeta^4}\right]$, $\zeta = \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}}$;

в) $w = 1 - \left(1 + \frac{z}{2}\right)\sqrt{1-z}$;

г) $w = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\sqrt{z} + (2z-1)\sqrt{z(1-z)}\right]$.

Здесь рассматриваются ветви многозначных функций, положительные при $z = x$, $0 < x < 1$. □

Пример 4. Пусть четырехугольник П — полоса $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ с разрезом по лучу $(-\infty + \pi hi,\ \pi hi]$, $0 < h < 1$

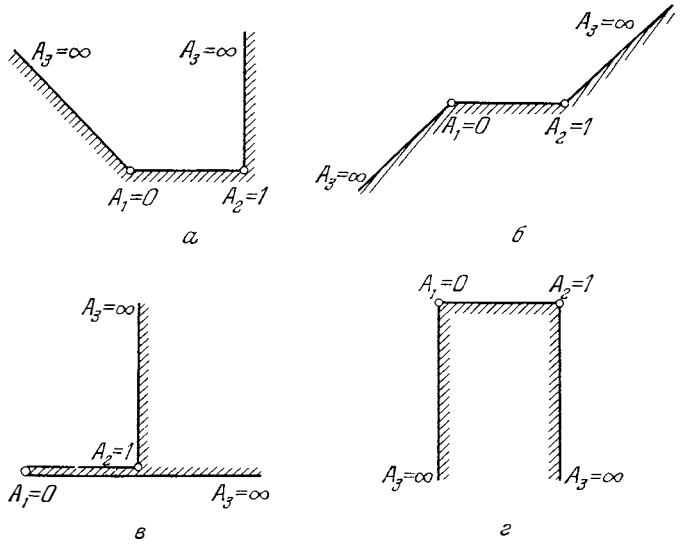


Рис. 148

(рис. 149). Здесь $A_1 = \pi hi$, $A_2 = \infty$, $A_3 = \infty$, $A_4 = \infty$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Положим $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Тогда $a_4 = -b$, где $0 < b < +\infty$. В силу теоремы 2 и формулы (9) конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на четырехугольник П осуществляется функцией

$$w = f(z) = c\int_0^z \frac{\zeta\, d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} + \pi hi. \qquad (12)$$

Найдем $\arg c$ (ср. п. 2). Рассмотрим точку z_1 на интервале $(0, 1)$: $z_1 = x_1$, $0 < x_1 < 1$. Ее образ — точка $w_1 = f(z_1)$ — лежит

на стороне (A_1, A_2) четырехугольника П (рис. 149), т. е. $\operatorname{Re} w_1 < 0$, $\operatorname{Im} w_1 = \pi h$. Из (12) имеем

$$w_1 - A_1 = c \int_0^{x_1} \frac{t\,dt}{(t-1)(t+b)}.$$

Здесь $w_1 - A_1 = \operatorname{Re} w_1 < 0$, и подынтегральная функция отрицательна $(0 \leqslant t \leqslant x_1 < 1)$. Следовательно, $c > 0$.

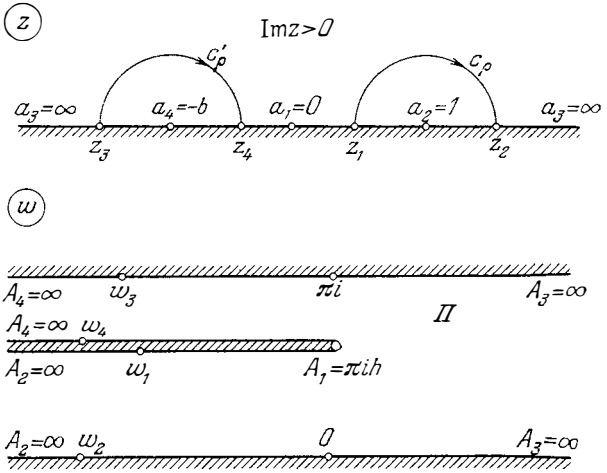


Рис. 149

Таким образом, в формуле (12) осталось два неизвестных параметра: $c > 0$, $b > 0$. Найдем эти параметры.

Пусть $z_1 = 1 - \rho$, $z_2 = 1 + \rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало́. Тогда точка $w_1 = f(z_1)$ лежит на стороне (A_1, A_2), а точка $w_2 = f(z_2)$ — на стороне (A_2, A_3) (рис. 149), откуда $\operatorname{Im}(w_2 - w_1) = -\pi h$. Из (12) имеем

$$w_2 - w_1 = f(z_2) - f(z_1) = c \int_{C_\rho} \frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)}, \tag{13}$$

где C_ρ — полуокружность $|\zeta| = \rho$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, ориентированная по часовой стрелке (рис. 149).

Рассмотрим интеграл (13). Точка $\zeta = 1$ является полюсом первого порядка подынтегральной функции и

$$\operatorname*{res}_{\zeta=1} \frac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} = \frac{1}{1+b}.$$

Следовательно, $\dfrac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)} = \dfrac{1}{1+b}\dfrac{1}{\zeta-1} + g(\zeta)$, где функция $g(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta = 1$ и, значит, ограничена в некото-

рой окрестности этой точки: $|g(\zeta)| \leqslant M$. В соответствии с этим интеграл (13) запишем в виде суммы двух интегралов. Первый из них равен

$$\frac{c}{1+b}\int\limits_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-1}=-\frac{c\pi i}{1+b}. \tag{14}$$

Для второго интеграла имеем оценку

$$\int\limits_{C_\rho} g(\zeta)\,d\zeta = O(\rho) \quad (\rho\to 0) \tag{15}$$

так как $\left|\int\limits_{C_\rho} g(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant M\pi\rho$.

Из (13)—(15) получаем

$$\operatorname{Im}(w_2-w_1) = -\pi h = -\frac{\pi c}{1+b}+O(\rho) \quad (\rho\to 0)$$

откуда при $\rho\to 0$ находим

$$\frac{c}{1+b}=h. \tag{16}$$

Отметим, что изложенный выше способ получения соотношения (16) из формулы (12) можно применять для любого многоугольника, рассматривая w в окрестности вершины A_k, если $\alpha_k = 0$. Применим этот способ для четырехугольника Π в окрестности точки A_4. Имеем

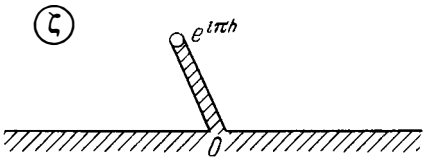


Рис. 150

$$w_4-w_3 = f(z_4)-f(z_3) = c\int\limits_{C'_\rho}\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+b)},$$

где $z_3=-b-\rho$, $z_4=-b+\rho$, $\operatorname{Im}(w_4-w_3)=\pi(h-1)$, C'_ρ— полуокружность $|\zeta+b|=\rho$, $\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0$ (рис. 149). Отсюда находим

$$\operatorname{Im}(w_4-w_3)=\pi(h-1)=-\frac{\pi bc}{1+b}+O(\rho) \quad (\rho\to 0),$$

и при $\rho\to 0$ получаем

$$\frac{bc}{1+b}=1-h. \tag{17}$$

Решая систему уравнений (16)—(17), находим $c=1$, $b=\dfrac{1-h}{h}$.

Подставляя эти значения в формулу (12) и вычисляя интеграл, окончательно получаем

$$w=f(z)=\ln\left[(z-1)^h\left(1+\frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}\right]. \quad \square$$

Заметим, что функция $\zeta = e^w$ (п. 4, § 35) конформно отображает четырехугольник Π па область G — полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ с разрезом по отрезку $[0, e^{i\pi h}]$ (рис. 150). Следовательно, функция

$$\zeta = (z-1)^h \left(1 + \frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}$$

конформпо отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область G.

§ 38. Задача Дирихле

Широкий класс стационарных физических задач сводится к отысканию гармонических функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям [2], [10]. В этом параграфе рассматривается метод решения таких задач с помощью конформных отображений.

1. Постановка задачи Дирихле. Существование и единственность решения. Пусть на границе Γ ограниченной области D задана непрерывная функция $u_0(z)$. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в следующем: найти функцию $u(z)$, гармоническую в области D, непрерывную вплоть до границы Γ и принимающую на Γ значения $u_0(z)$:

$$\Delta u = 0, \quad z \in D; \quad u|_{z\in\Gamma} = u_0(z). \tag{1}$$

Здесь и далее $u(z) = u(x, y)$, $u_0(z) = u_0(x, y)$ — действительные функции, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Решение классической задачи Дирихле (1) существует и единственно. Доказательство существования решения содержится в [2]. Единственность решения вытекает из принципа максимума и минимума для гармонических функций (теорема 5, § 32).

В самом деле, пусть $u_1(z)$, $u_2(z)$ — гармонические в области D функции, непрерывные вплоть до границы Γ и $u_1|_{z\in\Gamma} = u_2|_{z\in\Gamma}$. Тогда разность $u_1(z) - u_2(z)$ — гармоническая в области D функция, непрерывная вплоть до Γ и равпая нулю при $z \in \Gamma$. По теореме 5 § 32 $u_1(z) - u_2(z) \equiv 0$ при $z \in D$, т. е. $u_1(z) \equiv u_2(z)$, $z \in D$.

Наряду с классической задачей (1) будем рассматривать также более общую задачу Дирихле, когда функция $u_0(z)$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Требуется найти гармоническую в области D функцию $u(z)$, ограниченную в D, непрерывную вплоть до границы во всех точках непрерывности функции $u_0(z)$ и в этих точках удовлетворяющую граничному условию $u(z) = u_0(z)$. При этом область D может быть неограниченной.

Решение этой задачи Дирихле существует и единственно [2].

Следующий пример показывает, что если в постановке задачи Дирихле отказаться от требования ограниченности искомой функции $u(z)$, то теорема единственности будет неверна.

Пример 1. а) Функция $u(x, y)=y$, гармоническая в полуплоскости $y>0$, непрерывна вплоть до границы и равна нулю при $y=0$ $(x \neq \infty)$. Функция, тождественно равная нулю, очевидно, также удовлетворяет всем этим условиям.

б) Функция $u(x, y)=\dfrac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}=\operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$, гармоническая в круге $x^2+y^2<1$, непрерывна вплоть до границы этого круга, за исключением точки (1, 0), и равна нулю во всех точках окружности $x^2+y^2=1$, кроме точки (1, 0). Функция, тождественно равная нулю, также удовлетворяет всем этим условиям. □

2. Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформных отображений.

Теорема 1. *Пусть регулярная функция $z=g(\zeta)$ конформно отображает область G на область D и $u(z)$ — гармоническая в области D функция. Тогда функция $\tilde{u}(\zeta)=u(g(\zeta))$ — гармоническая в области G.*

Доказательство. Рассмотрим односвязную область $G_1 \subset G$. Образом области G_1 при конформном отображении $z=g(\zeta)$ является односвязная область $D_1 \subset D$. Пусть $f(z)$ — регулярная в области D_1 функция такая, что $\operatorname{Re} f(z)=u(z)$ (существование такой функции $f(z)$ доказано в § 7). Тогда функция $\tilde{f}(\zeta)=f(g(\zeta))$ регулярна в области G_1, и поэтому $\tilde{u}(\zeta)=\operatorname{Re}\tilde{f}(\zeta)$ — гармоническая в G_1 функция (§ 7). Так как G_1 — произвольная односвязная подобласть области G, то $\tilde{u}(\zeta)$ — гармоническая в области G функция.

Теорему 1 можно также доказать следующим образом. Обозначим $x(\xi, \eta)=\operatorname{Re} g(\zeta)$, $y(\xi, \eta)=\operatorname{Im} g(\zeta)$, где $\zeta=\xi+i\eta$. Тогда отображение $z=g(\zeta)$ $(z=x+iy)$ можно записать в виде

$$x=x(\xi, \eta), \quad y=y(\xi, \eta). \tag{2}$$

Так как $g(\zeta)$ — регулярная функция, то функции $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям Коши — Римана. Поэтому при замене переменных (2) непосредственно получается формула

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)|g'(\zeta)|^2. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что если $u(z)$ — гармоническая функция по переменным x, y, то $\tilde{u}(\zeta)=u(g(\zeta))$ — гармоническая функция по переменным ξ, η, т. е. уравнение Лапласа инвариантно относительно конформных отображений. Этот факт лежит в основе метода решения задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

Пример 2. Пусть D — область $\operatorname{Im} z < 0$, $|z + il| > R$, где $l > R > 0$ (рис. 125). Решим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z \in D; \tag{4}$$

$$u|_{\operatorname{Im} z = 0} = 0, \quad u|_{|z+il|=R} = T \equiv \text{const}. \tag{5}$$

Рассмотрим конформное отображение $\zeta = h(z) = \dfrac{z + ia}{z - ia}$ области D на концентрическое кольцо K: $R_1 < |\zeta| < 1$, где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$, $R_1 = (R + l - a)/(R + l + a)$ (пример 38, § 35). При этом отображении прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в окружность $|\zeta| = 1$, а окружность $|z + il| = R$ — в окружность $|\zeta| = R_1$. Пусть $z = g(\zeta)$ — функция, обратная к функции $\zeta = h(z)$. По теореме 1 $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в кольце K функция:

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad \zeta \in K. \tag{6}$$

Из условий (5) получаем

$$\tilde{u}|_{|\zeta|=1} = 0, \quad \tilde{u}|_{|\zeta|=R_1} = T. \tag{7}$$

Таким образом, задача (4)—(5) свелась к задаче Дирихле (6)—(7). Решим эту задачу.

Пусть $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$. После замены $\xi = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \sin\theta$ уравнение Лапласа (6) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0.$$

Так как граничные функции в условиях (7) не зависят от θ, то естественно предположить, что и решение задачи (6)—(7) не зависит от θ, т. е. функция $\tilde{u}(\zeta)$ является функцией только от одной переменной ρ. Найдем такое решение — тем самым, в силу единственности решения задачи Дирихле будет доказано, что решение задачи (6)—(7) не зависит от θ. В случае, когда функция $\tilde{u}(\zeta)$ не зависит от θ, уравнение Лапласа (6) является обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\tilde{u}(\zeta) = c_1 + c_2 \ln \rho = c_1 + c_2 \ln |\zeta|$. Из условий (7) находим $c_1 = 0$, $c_2 = T/\ln R_1$, т. е. функция

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{T}{\ln R_1} \ln |\zeta|$$

является решением задачи (6)—(7). Для нахождения решения задачи (4)—(5) остается перейти к координатам $z = x + iy$.

Так как $u(z)=\tilde{u}(h(z))$ и

$$|\zeta|=|h(z)|=\left|\frac{z+ia}{z-ia}\right|=\frac{|x^2+y^2-a^2+i2ax|}{x^2+(y-a)^2},$$

то решением задачи (4)—(5) является функция

$$u(x,y)=\frac{T}{\ln R_1}\ln\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2x^2}}{x^2+(y-a)^2},$$

где $a=\sqrt{l^2-R^2}$, $R_1=(R+l-a)/(R+l+a)$. □

3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Теорема 2. *Пусть функция $u(z)$, гармоническая в круге $|z|<1$, непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Тогда имеет место формула Пуассона*

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}u(e^{i\theta})\,d\theta, \tag{8}$$

где $z=re^{i\varphi}$, $0\leqslant r<1$.

Доказательство. Заметим, что при $z=0$ формула (8) совпадает с (6) § 10 (теорема о среднем для гармонических функций). Покажем, что при $z\neq 0$ значение $u(z)$ также можно найти по теореме о среднем с помощью конформного отображения. Зафиксируем точку $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$, $0\leqslant r_0<1$ и рассмотрим конформное отображение

$$\zeta=h(z)=\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0} \tag{9}$$

круга $|z|<1$ на круг $|\zeta|<1$, $h(z_0)=0$ (§ 34). Из (9) находим

$$z=g(\zeta)=\frac{\zeta+z_0}{1+\zeta\bar{z}_0}. \tag{10}$$

Функция $z=g(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta|<1$ на круг $|z|<1$ так, что $g(0)=z_0$.

Функция $u(z)$, гармоническая в круге $|z|<1$, непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Следовательно, функция $\tilde{u}(\zeta)=u(g(\zeta))$ является гармонической в круге $|\zeta|<1$ (теорема 1) и непрерывной в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$. По теореме о среднем для гармонических функций (§ 10) находим

$$u(z_0)=\tilde{u}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(e^{i\psi})\,d\psi. \tag{11}$$

Вернемся к прежним переменным. В интеграле (11) сделаем

замену

$$e^{i\psi} = h(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - z_0}{1 - e^{i\theta}\bar{z}_0}. \tag{12}$$

Тогда $\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(h(e^{i\theta})) = u(e^{i\theta})$. Из (12) находим

$$d\psi = \frac{1 - |z_0|^2}{(e^{i\theta} - z_0)(e^{-i\theta} - \bar{z}_0)}\, d\theta = \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + r_0^2}\, d\theta. \tag{13}$$

Заменяя $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ на $z = re^{i\varphi}$ из (11)—(13), получаем формулу (8). Теорема доказана.

Преобразуем формулу Пуассона к другому виду. Заметим, что

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \operatorname{Re}\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}.$$

Поэтому формулу (8) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\theta, \tag{14}$$

так как $u(e^{i\theta})$ — действительная функция. Полагая в интеграле (14) $e^{i\theta} = \zeta$, откуда $d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$, получаем

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad |z| < 1. \tag{15}$$

Таким образом, формулу Пуассона (8) можно записать в виде (15).

Замечание 1. Теорема о среднем справедлива для гармонических и ограниченных функций в круге, непрерывных вплоть до границы круга, за исключением конечного числа точек. Поэтому для таких функций справедлива и формула Пуассона.

Следствие 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и ее действительная часть $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Тогда имеет место формула Шварца*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} + i\operatorname{Im} f(0), \quad |z| < 1. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $F(z)$ — интеграл, стоящий в правой части формулы (16). Функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ (теорема 1 § 16) и в силу (15) $\operatorname{Re} F(z) = u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Следовательно, $F(z) = f(z) + iC$ (п. 3 § 7), где C — действитель-

ная константа. Так как

$$F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} u(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\,d\theta=u(0),$$

то $\operatorname{Im}F(0)=0$. Из равенства $\operatorname{Im}F(0)=\operatorname{Im}f(0)+C$ находим $C=-\operatorname{Im}f(0)$, т. е. $F(z)=f(z)-i\operatorname{Im}f(0)$, и формула (16) доказана.

С помощью формулы Пуассона можно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z|<1$. В частности, если граничная функция является рациональной функцией от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то интеграл в формуле (15) вычисляется с помощью вычетов.

Пример 3. Найдем решение задачи

$$\Delta u=0,\quad |z|<1;\quad u|_{|z|=1}=\frac{\sin\varphi}{5+4\cos\varphi},\tag{17}$$

где $z=re^{i\varphi}$. Воспользуемся формулой (15). Пусть $\zeta=e^{i\theta}$, тогда $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ и

$$u(\zeta)=\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{\zeta^2-1}{2i\,(2\zeta^2+5\zeta+2)}.$$

Вычислим интеграл $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(\zeta^2-1)\,(\zeta+z)}{2i\,(2\zeta^2+5\zeta+2)\,(\zeta-z)\,\zeta}\,d\zeta$, где окружность $|\zeta|=1$ ориентирована против часовой стрелки. Подынтегральная функция $F(\zeta)$ в области $|\zeta|>1$ имеет одну конечную особую точку $\zeta=-2$ — полюс первого порядка и устранимую особую точку $\zeta=\infty$. Следовательно, по формуле (19) § 28

$$I=-\operatorname*{res}_{\zeta=-2}F(\zeta)-\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}F(\zeta).$$

По формулам (3), (12) § 28 находим

$$\operatorname*{res}_{\zeta=-2}F(\zeta)=\frac{2-z}{4i\,(z+2)},\quad \operatorname*{res}_{\zeta=\infty}F(\zeta)=-\frac{1}{4i},\quad I=\frac{z}{2i\,(z+2)}.$$

По формуле (15) получаем решение задачи (17)

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{z}{2i\,(z+2)}=\frac{y}{(x+2)^2+y^2}=\frac{r\sin\varphi}{r^2+4r\cos\varphi+4}.\quad\square$$

Задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $\rho<|z|<R$ (в частности, в круге или во внешности круга) можно также решать методом разделения переменных [2]. При этом используются гармонические функции

$$\ln r,\ r^n\cos n\varphi,\ r^n\sin n\varphi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\tag{18}$$

4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости. Теорема 3. *Пусть функция $u(z)$, гармоническая и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$, непрерывна вплоть до прямой*

$\operatorname{Im} z = 0$, *за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда имеет место формула Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y u(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt, \tag{19}$$

где $z = x + iy$, $y > 0$.

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, и рассмотрим конформное отображение

$$\zeta = h(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \tag{20}$$

полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|\zeta| < 1$, $h(z_0) = 0$ (§ 34). Из (20) находим

$$z = g(\zeta) = \frac{\zeta \bar{z}_0 - z_0}{\zeta - 1}. \tag{21}$$

Функция $z = g(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ так, что $g(0) = z_0$. По теореме 1 $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ функция. Из условий теоремы следует, что функция $\tilde{u}(\zeta)$ ограничена в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывна вплоть до окружности $|\zeta| = 1$, за исключением конечного числа точек. По теореме о среднем (замечание 1) имеем

$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi})\, d\psi. \tag{22}$$

Вернемся к прежним переменным. В интеграле (22) сделаем замену

$$e^{i\psi} = h(t) = \frac{t - z_0}{t - \bar{z}_0}. \tag{23}$$

Имеем $\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(h(t)) = u(t)$. Из (23) находим

$$d\psi = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{i\,|t - z_0|^2}\, dt = \frac{2y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2}\, dt. \tag{24}$$

Заменяя $z_0 = x_0 + iy_0$ на $z = x + iy$, из (22)—(24) получаем формулу (19).

Так как $\dfrac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \dfrac{1}{i(t - z)}$, то формулу Пуассона (19) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t - z}\, dt. \tag{25}$$

С помощью формулы (19) или (25) можно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Рассмотрим, например, задачу

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = R(x), \tag{26}$$

где рациональная функция $R(z)$ действительна, не имеет полюсов на действительной оси и $R(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Решением этой задачи в силу (25) является функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t)}{t - z}\, dt,$$

где $\operatorname{Im} z > 0$. Этот интеграл можно вычислить с помощью вычетов (п. 2 § 29)

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} \zeta_k < 0} \operatorname*{res}_{\zeta = \zeta_k} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z}. \tag{27}$$

Здесь вычеты берутся по всем полюсам функции $R(\zeta)$, лежащим в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta < 0$.

Пример 4. Найдем решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u|_{y=0} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

По формуле (27) получаем

$$u(z) =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \operatorname*{res}_{\zeta = -i} \frac{1}{(1 + \zeta^2)(\zeta - z)} = -2 \operatorname{Re} \frac{1}{2i(z + i)} = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}. \quad \square$$

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в произвольной односвязной области

$$\Delta u = 0, \quad z \in D; \quad u|_{\Gamma} = u_0(z), \tag{28}$$

где граница Γ области D состоит более чем из одной точки. Решение этой задачи можно найти с помощью конформного отображения области D на круг или полуплоскость и формулы Пуассона.

Пусть функция $\zeta = h(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$, $z = g(\zeta)$ — обратное отображение. Тогда $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ функция и $\tilde{u}|_{\eta=0} = u_0(g(z))|_{z \in \Gamma} = \tilde{u}_0(\xi)$, где $\zeta = \xi + i\eta$. В силу (25)

$$\tilde{u}(\zeta) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}_0(t)}{t - \zeta}\, dt.$$

В этой формуле сделаем замену $\zeta = h(z)$, $t = h(\tau)$. Получаем решение задачи (28)

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_0(\tau)\, h'(\tau)}{h(\tau) - h(z)}\, d\tau. \tag{29}$$

Аналогично, если функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на круг $|w| < 1$, то с помощью формулы (15) решение задачи (28) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{f(\zeta) + f(z)}{f(\zeta) - f(z)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta. \tag{30}$$

Часто при нахождении решения задачи (28) вместо вычисления интеграла (29) или (30) удобно после найденного конформного отображения $\zeta = h(z)$ области D на круг или полуплоскость вычислить интеграл Пуассона (8) или (19) и в полученном результате сделать замену $\zeta = h(z)$.

Пример 5. Найдем решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < y < \pi; \tag{31}$$

$$u|_{y=0} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad u|_{y=\pi} = 0, \tag{32}$$

где $z = x + iy$. Функция $\zeta = e^z$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ конформно отображает полосу $0 < y < \pi$ на полуплоскость $\eta > 0$ (§ 35). При этом условия (32) переходят в условия

$$\tilde{u}|_{\eta=0} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi > 1, \\ 0 & \text{при} \quad \xi < 1. \end{cases}$$

По формуле (19) находим

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{\eta\, dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 - \xi}{\eta}.$$

Отсюда после замены $\xi = e^x \cos y$, $\eta = e^x \sin y$ получаем решение задачи (31) — (32)

$$u(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}. \qquad \square$$

5. Функция Грина задачи Дирихле. *Функцией Грина* задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D называется функция

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - \zeta| + g(z, \zeta), \quad z \in D, \quad \zeta \in D, \tag{33}$$

где $g(z, \zeta)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. при каждом $\zeta \in D$ функция $g(z, \zeta)$ является гармонической в области D, т. е.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D; \tag{34}$$

2. при каждом $\zeta \in D$ функция $g(\zeta, z)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D и

$$g(z, \zeta)|_{z \in \Gamma} = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - \zeta| \Big|_{z \in \Gamma}. \tag{35}$$

Из (35) следует, что

$$G(z, \zeta)|_{z \in \Gamma} = 0. \tag{36}$$

Таким образом, при каждом $\zeta \in D$ функция $g(z, \zeta)$ является решением задачи Дирихле (34) — (35). Из теоремы существования и единственности решения задачи Дирихле следует, что функция Грина существует и единственна для любой ограниченной области с кусочно гладкой границей. Покажем, что задача о нахождении функции Грина для односвязной области сводится к отысканию конформного отображения этой области на единичный круг.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная односвязная область и пусть функция $w = w(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in D$, при каждом $\zeta \in D$ конформно отображает область D на круг $|w| < 1$ так, что точка $z = \zeta$ переходит в точку $w = 0$: $w(\zeta, \zeta) = 0$. Тогда функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D имеет вид*

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z, \zeta)|. \tag{37}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $\zeta \in D$. Так как отображение $w = w(z, \zeta)$ конформно, т. е. функция $w(z, \zeta)$ регулярна и однолистна в области D, то $\frac{dw(z, \zeta)}{dz} \neq 0$ при $z \in D$. Из условия $w(\zeta, \zeta) = 0$ вытекает, что $w(z, \zeta) \neq 0$ при $z \neq \zeta$. Следовательно, функция $w(z, \zeta)$ имеет вид

$$w(z, \zeta) = (z - \zeta)\psi(z, \zeta), \tag{38}$$

где функция $\psi(z, \zeta)$ регулярна в области D и $\psi(z, \zeta) \neq 0$ при $z \in D$. Из (38) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \ln |w(z, \zeta)| = \frac{1}{2\pi} \ln |z - \zeta| + g(z, \zeta), \tag{39}$$

где $g(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |\psi(z, \zeta)|$ — гармоническая в области D функция как действительная часть регулярной в области D функции $\frac{1}{2\pi} \ln \psi(z, \zeta)$.

Далее, если $z \in \Gamma$, то $|w(z, \zeta)| = 1$ и из (39) вытекает условие (35). Следовательно, функция (39) является функцией Грина.

Замечание 2. Если $w = w(z)$ — какое-нибудь конформное отображение области D на круг $|w| < 1$, то функция $w(z, \zeta)$ находится по формуле (§ 34)

$$w(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\,\overline{w(\zeta)}}. \tag{40}$$

Функция Грина $G(z, \zeta)$ обладает следующими свойствами:

1. Симметрична:

$$G(z, \zeta) = G(\zeta, z). \tag{41}$$

2. При каждом $z \in D$ является гармонической по переменным $\xi, \eta (\zeta = \xi + i\eta)$ в области D с выколотой точкой $\zeta = z$.

3. При каждом $z \in D$ непрерывна вплоть до границы Γ области D и

$$G(z, \zeta)|_{\zeta \in \Gamma} = 0. \tag{42}$$

Свойства 2 и 3 вытекают из свойства 1 и определения функции Грина. Докажем свойство 1 для односвязной области. Из (40) имеем $|w(\zeta, z)| = |w(z, \zeta)|$, и поэтому из (37) следует (41). Доказательство этого свойства для неодносвязных областей см. [2].

С помощью функции Грина можно находить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = F(z), \quad z \in D \tag{43}$$

с граничным условием

$$u|_\Gamma = u_0(z). \tag{44}$$

При достаточно широких предположениях решение задачи (43) — (44) имеет вид

$$u(z) = \iint_D G(z, \zeta) F(\zeta)\, d\xi\, d\eta + \int_\Gamma \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} u_0(\zeta)\, |d\zeta|, \tag{45}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, символ $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к границе Γ области D по переменной ζ. Доказательство формулы (45) см. [2].

6. **Задача Неймана.** Пусть D — ограниченная область с гладкой границей Γ и на Γ задана непрерывная функция $u_1(z)$. Классическая задача Неймана для уравнения Лапласа состоит в следующем: найти функцию $u(z)$, гармоническую в области D

$$\Delta u = 0, \quad z \in D, \tag{46}$$

непрерывно дифференцируемую вплоть до границы Γ и удовлет-

воряющую условию

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{z\in\Gamma} = u_1(z), \tag{47}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к Γ.

Для разрешимости задачи (46)—(47) необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_\Gamma u_1(z)\,ds = 0, \tag{48}$$

где $ds = |dz|$ — элемент длины кривой Γ.

В самом деле, по формуле Грина [9]

$$\iint_D \Delta u\,dx\,dy = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

откуда в силу (46)—(47) вытекает (48).

При выполнении условия (48) решение классической задачи Неймана существует и единственно с точностью до постоянного слагаемого. Доказательство существования решения содержится в [2]. Докажем единственность.

Пусть $\tilde{u}(z)$, $\tilde{\tilde{u}}(z)$ — два решения задачи (46)—(47). Тогда $u(z) = \tilde{u}(z) - \tilde{\tilde{u}}(z)$ — решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad z\in D; \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{z\in\Gamma} = 0. \tag{49}$$

Воспользуемся формулой Грина [9]

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_\Gamma u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \iint_D u\Delta u\,dx\,dy.$$

Правая часть этой формулы равна 0 в силу (49). В левой части подынтегральная функция неотрицательна и непрерывна в области D. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, откуда $u(z) \equiv \text{const}$ при $z\in D$.

Наряду с классической задачей Неймана будем рассматривать также задачу (46)—(47) в случае, когда область D неограничена. Тогда предполагается, что функция $u(z)$ и ее частные производные первого порядка ограничены в области D.

Пример 6. Найдем решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -u_1(x), \tag{50}$$

где $z = x + iy$, $u_1(x)$ — непрерывная функция при $-\infty < x < +\infty$,

$$u_1(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon}) \tag{51}$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$. В этом случае $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$. Предполагается, что условие (48) выполнено, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x)\,dx = 0. \tag{52}$$

Задачу Неймана (50) можно свести к задаче Дирихле для функции $\frac{\partial u}{\partial y}$. В самом деле, так как $u(z)$ — гармоническая функция, то $\frac{\partial u}{\partial y}$ — также гармоническая функция при $y > 0$. Поэтому для $\frac{\partial u}{\partial y}$ получаем задачу Дирихле

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad y > 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -u_1(x).$$

По формуле (19) находим $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y u_1(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt$, откуда

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \ln\left[(t-x)^2 + y^2\right] dt + C(x). \tag{53}$$

В этой формуле интеграл — гармоническая при $y > 0$ функция, так как подынтегральная функция — гармоническая, а условие (51) обеспечивает сходимость этого интеграла и существование его частных производных любого порядка. Поэтому $C(x)$ — также гармоническая функция, т. е. $C''(x) = 0$, откуда $C(x) = C_1 + C_2 x$. Из условия (52) следует, что интеграл в формуле (53) ограничен при $y > 0$, так как его можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \ln\left[(t-x)^2 + y^2\right] dt - \ln(x^2 + y^2) \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \ln \frac{(t-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\,dt,$$

а последний интеграл при больших значениях $x^2 + y^2$ по модулю меньше интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(t)| \ln(|t| + 1)^2\,dt$, который сходится в силу условия (51). Функция $u(z)$ ограничена, следовательно, $C(x)$ также ограничена, т. е. $C_2 = 0$, и из (53) окончательно по-

лучаем решение задачи (50):

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\ln[(t-x)^2+y^2]\,dt + C,$$

где C — постоянная. Эту формулу можно записать в виде

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\ln|t-z|\,dt + C, \tag{54}$$

так как $(t-x)^2+y^2 = |t-z|^2$. □

Решение задачи Неймана (46)—(47) в односвязной области D можно найти с помощью конформного отображения области D на полуплоскость и формулы (54).

Пусть функция $\zeta = h(z)$, $\zeta = \xi + i\eta$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $z = g(\zeta)$ — обратное отображение. Тогда $\tilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая функция в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Найдем $\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{n}}\right|_{\eta=0}$, где $\tilde{n}$ — внешняя нормаль к границе полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. При конформном отображении $z = g(\zeta)$ направление нормали $\tilde{n}$ переходит в направление нормали n, а коэффициент линейного растяжения в точках прямой $\operatorname{Im}\zeta = 0$ равен $|g'(\xi)|$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{n}}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{z=g(\xi)} |g'(\xi)| = u_1(g(\xi))\cdot|g'(\xi)| = \tilde{u}_1(\xi)\,|g'(\xi)|.$$

Учитывая, что $\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{n}}\right|_{\eta=0} = -\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}$, по формуле (54) находим

$$\tilde{u}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}_1(t)\,|g'(t)|\ln|t-\zeta|\,dt + C.$$

Вернемся к прежним переменным, полагая $\zeta = h(z)$, $t = h(\tau)$. Так как $g'(t) = \frac{1}{h'(\tau)}$, то решение задачи (46)—(47) имеет вид

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} u_1(\tau)\ln|h(\tau)-h(z)|\frac{h'(\tau)}{|h'(\tau)|}\,d\tau + C. \tag{55}$$

Пример 7. Найдем решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad r < 1; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = u_1(e^{i\varphi}), \tag{56}$$

где $z = re^{i\varphi}$, $u_1(e^{i\varphi})$ — непрерывная функция и $\int_0^{2\pi} u_1(e^{i\varphi})\,d\varphi = 0$. В этом случае $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}$.

Функция $z = g(\zeta) = \dfrac{\zeta - i}{\zeta + i}$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на круг $|z| < 1$ (§ 34). Обратное отображение имеет вид $\zeta = h(z) = \dfrac{1+z}{1-z} i$. Так как $h'(z) = \dfrac{2i}{(1-z)^2}$, то в силу (55) решение задачи (56) определяется формулой

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\tau|=1} u_1(\tau) \ln \left| \frac{1+\tau}{1-\tau} i - \frac{1+z}{1-z} i \right| \frac{i\,|1-\tau|^2}{(1-\tau)^2} d\tau + C. \quad (57)$$

В интеграле (57) положим $\tau = e^{i\theta}$, тогда

$$\frac{i\,|1-\tau|^2}{(1-\tau)^2} = \frac{i(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})^2} ie^{i\theta} d\theta = d\theta,$$

$$\left| \frac{1+\tau}{1-\tau} i - \frac{1+z}{1-z} i \right| = \frac{2\,|e^{i\theta} - z|}{|1-e^{i\theta}|\,|1-z|}.$$

Из (57) получаем

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta}) \ln |e^{i\theta} - z|\, d\theta + J_1 + J_2 + C,$$

где

$$J_1 = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{2}{|1-z|} \int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta})\, d\theta = 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta}) \ln |1 - e^{i\theta}|\, d\theta \equiv \text{const}$$

(не зависит от z). Окончательно находим решение задачи (56)

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta}) \ln |e^{i\theta} - z|\, d\theta + C, \quad (58)$$

где C — произвольная постоянная. □

Задачу Неймана (46)—(47) в односвязной области D можно решить с помощью конформного отображения области D на круг и формулы (58).

Задачу (46)—(47) в односвязной области D можно свести к задаче Дирихле для сопряженной гармонической функции $v(z)$. В самом деле, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial s}\right|_{z\in\Gamma} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{z\in\Gamma} = u_1(z)$ в силу условий Коши — Римана, откуда

$$v(z)|_{z\in\Gamma} = \int_{z_0}^{z} u_1(\zeta)\, ds, \quad (59)$$

где интеграл берется по дуге кривой Г. Решив задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta v = 0, \quad z \in D,$$

с граничным условием (59), можно простым интегрированием найти функцию $u(z)$ (§ 7).

§ 39. Векторные поля на плоскости

1. Основные понятия. Пусть в каждой точке $z = x + iy$ области D на плоскости задан вектор $A = (A_x, A_y)$, компоненты которого — функции от (x, y): $A_x = A_x(x, y)$, $A_y = A_y(x, y)$. Тогда говорят, что в области D задано *векторное поле* $A(x, y)$. Предполагается, что функции A_x, A_y непрерывно дифференцируемы в области D. Векторное поле на плоскости можно задать с помощью одной комплекснозначной функции, которую также обозначим A:

$$A = A_x + iA_y. \tag{1}$$

Во многих важнейших физических задачах функция $\bar{A}$ есть аналитическая функция z, и это позволяет применять методы теории функций комплексного переменного.

Напомним основные понятия векторного анализа [9].

Линии тока. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = A_y(x, y). \tag{2}$$

Параметр t во многих задачах можно интерпретировать как время. *Линиями тока* векторного поля (1) называются фазовые траектории системы (2), т. е. кривые вида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 < t < t_2$, где $(\varphi(t), \psi(t))$ — решение системы. Точка (x_0, y_0), в которой вектор A равен нулю, т. е.

$$A_x(x_0, y_0) = 0, \quad A_y(x_0, y_0) = 0,$$

называется *точкой покоя* системы (2) или *критической точкой* векторного поля A. Точке покоя (x_0, y_0) отвечает фазовая траектория (линия тока), состоящая из одной этой точки. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что фазовые траектории системы (2) — а стало быть, и линии тока — не пересекаются и что через каждую точку области D проходит линия тока. Как следует из (2), вектор $A(x, y)$ — касательный вектор к линии тока, проходящей через точку (x, y), которая не есть точка покоя. Поэтому линия тока касается вектора поля в каждой точке.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет судить о качественной структуре линий тока. Именно, возможны следующие случаи:

1. Линия тока состоит из одной точки (точка покоя).
2. Линия тока — гладкая замкнутая кривая.
3. Линия тока — гладкая незамкнутая кривая. В этом случае каждый из концов линии тока либо лежит на границе области D, либо совпадает с одной из точек покоя.

Одна из важнейших физических задач, связанных с плоскими векторными полями — это задача об установившемся плоскопараллельном течении жидкости. Пусть течение параллельно плоскости (x, y). Тогда скорость частицы жидкости, проходящей через точку (x, y, z), есть вектор вида $v = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0)$, и соответствующее векторное поле есть *поле скоростей*. Вместо векторного поля в пространстве в данном случае можно ограничиться плоским векторным полем — полем скоростей

$$v = (v_x, v_y). \tag{3}$$

Линия тока — это кривая, по которой движется (течет) частица жидкости.

Поток и дивергенция. *Потоком* векторного поля A через замкнутую кривую γ называется интеграл

$$N = \int_\gamma (A, n)\, ds. \tag{4}$$

Здесь и далее (A, n) — скалярное произведение вектора A на единичный вектор n, нормальный к γ, ds — элемент длины кривой γ. Если γ — простая замкнутая кривая, ориентированная против (по) часовой стрелки, то нормаль к γ направлена во внешность (во внутренность) кривой γ. Формулу для потока можно также записать в виде

$$N = \int_\gamma -A_y dx + A_x dy. \tag{5}$$

Дивергенцией или *расходимостью* векторного поля A называется величина

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \tag{6}$$

Из формулы Грина вытекает связь между дивергенцией и потоком

$$\int_\gamma (A, n)\, ds = \iint_D \operatorname{div} A\, dx\, dy. \tag{7}$$

Здесь γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая область D.

Приведенная выше формула для дивергенции (6) неинвариантна — она зависит от выбора системы координат. Формула (7) позволяет дать инвариантное определение дивергенции. Пусть кривая γ стягивается в точку (x_0, y_0) и S — площадь, ограничен-

ная кривой γ. Тогда дивергенция в этой точке равна пределу

$$\operatorname{div} A = \lim_{S \to 0} \frac{\text{поток через кривую } \gamma}{\text{площадь}}. \tag{8}$$

Следовательно, дивергенция есть плотность потока векторного поля.

Циркуляция и ротор. *Циркуляцией* векторного поля A вдоль замкнутой кривой γ называется интеграл

$$\Gamma = \int_{\gamma} (A, t)\, ds, \tag{9}$$

где t — единичный вектор, касательный к кривой γ. Эту формулу можно записать в виде

$$\Gamma = \int_{\gamma} A_x dx + A_y dy. \tag{10}$$

Ротором или *вихрем* плоского векторного поля A называется величина

$$\operatorname{rot} A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{11}$$

Замечание 1. В векторном анализе ротором пространственного векторного поля (в данной точке) называется трехмерный вектор; выше ротором было названо число. Связь между этими определениями такова: построим по векторному полю (1) пространственное плоскопараллельное векторное поле $\tilde{A} = (A_x, A_y, 0)$. Тогда

$$\operatorname{rot} \tilde{A} = (0, 0, \operatorname{rot} A). \tag{12}$$

Из формулы Грина вытекает связь между циркуляцией и ротором

$$\int_{\gamma} (A, t)\, ds = \iint_{D} \operatorname{rot} A\, dx\, dy. \tag{13}$$

Здесь γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая область D. С помощью этой формулы ротор может быть определен инвариантным образом

$$\operatorname{rot} A = \lim_{S \to 0} \frac{\text{циркуляция вдоль } \gamma}{\text{площадь}}. \tag{14}$$

Здесь, как и в (8), кривая γ стягивается в точку (x_0, y_0) и S — площадь, ограниченная кривой γ. Следовательно, ротор есть плотность циркуляции векторного поля.

Замечание 2. Поставим плоскому векторному полю A в соответствие плоско-параллельное векторное поле $\tilde{A}$ в пространстве (см. замечание 1). Из векторного анализа можно получить

следующую интерпретацию ротора. Пусть U — бесконечно малая окрестность точки (x_0, y_0), тогда мгновенная угловая скорость ω вращения области U равна $\omega = {}^1/_2 \operatorname{rot} \vec{A}$, где $\operatorname{rot} \vec{A}$ дается формулой (12).

2. Соленоидальные и потенциальные векторные поля. Векторное поле A называется *соленоидальным* (в области D), если его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} A = 0. \tag{15}$$

Соленоидальное векторное поле сохраняет площадь. Именно, возьмем на плоскости некоторую область D_0 и сдвинем каждую точку этой области вдоль линий тока за одно и то же время t. Тогда область D_0 сдвинется в область D_t и из условия (15) следует, что площади областей D_0 и D_t равны. Если рассматриваемое векторное поле — это поле скоростей жидкости, то из условия $\operatorname{div} v = 0$ следует, что если плотность жидкости всюду постоянна, то жидкость несжимаема.

Пусть D — односвязная область. Тогда из формул (6), (8), (15) следует, что интеграл

$$v(x, y) = \int_{z_0}^{z} -A_y dx + A_x dy \tag{16}$$

не зависит от пути интегрирования. Следовательно, этот интеграл определяет однозначную в области D функцию, которая называется *функцией тока* векторного поля A. Компоненты векторного поля можно выразить через функцию тока

$$A_x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad A_y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{17}$$

Функция тока определяется по векторному полю однозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

Если векторное поле соленоидально, то *линии тока* являются *линиями уровня функции тока*. Действительно, вдоль линии тока из (2), (17) имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -A_y A_x + A_x A_y = 0,$$

так что $v(x, y) \equiv \text{const}$ вдоль линии тока.

Если область D неодносвязна, то функция тока, определенная формулой (16), будет, вообще говоря, неоднозначной. Тем не менее, формулы (17) остаются в силе (они справедливы для всех «ветвей» функции тока), а локально (точнее, в любой односвязной области, лежащей внутри D) функция тока существует. Если векторное поле обладает функцией тока, т. е. существует функция $v(x, y)$ такая, что соотношение (17) выполняется всюду в области D, то поле соленоидально.

Векторное поле A называется *потенциальным*, или *безвихревым*, в области D, если его ротор равен нулю:

$$\operatorname{rot} A = 0 \tag{18}$$

всюду в области D. Пусть D — односвязная область, тогда интеграл

$$u(x, y) = \int_{z_0}^{z} A_x dx + A_y dy \tag{19}$$

не зависит от пути интегрирования и потому определяет однозначную в области D функцию. Эта функция $u(x, y)$ называется *потенциалом* векторного поля A. Компоненты векторного поля можно выразить через потенциал

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{20}$$

Обратно, если существует потенциал, т. е. функция u такая, что компоненты поля выражаются через эту функцию по формулам (20), то векторное поле потенциально.

Линии уровня потенциала $u(x, y) = \text{const}$ называются *эквипотенциальными линиями*. Эти линии ортогональны к линиям тока. Действительно, вектор-градиент $\operatorname{grad} u = (A_x, A_y)$, ортогонален к эквипотенциальной линии и касается линии тока.

Если же поле — потенциальное, но в неодносвязной области D, то локально (а точнее, в любой односвязной области, содержащейся в D) потенциал существует и определен однозначно, с точностью до постоянного слагаемого. Во всей же области D потенциал может быть многозначной функцией, но соотношения (20) выполняются всюду в D для любой из его «ветвей».

Как известно из векторного анализа, всякое векторное поле может быть (локально) представлено в виде суммы соленоидального и потенциального векторных полей [9], [13].

3. Гармонические векторные поля. Векторное поле называется *гармоническим* в области D, если оно соленоидально и потенциально в этой области, т. е.

$$\operatorname{div} A = 0, \quad \operatorname{rot} A = 0 \tag{21}$$

всюду в D. Гармоническое векторное поле обладает и функцией тока и потенциалом. Из (17), (20) следует, что эти функции связаны соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{22}$$

которые есть не что иное, как условия Коши — Римана для функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{23}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Функция тока и потенциал гармонического векторного поля являются сопряженными гармоническими функциями.*

Функция $f(z)$ называется *комплексным потенциалом* векторного поля A. В области D эта функция аналитична; если область D односвязна, то комплексный потенциал есть регулярная в D функция.

С помощью комплексного потенциала выражаются все характеристики поля. Прежде всего имеем

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \tag{24}$$

В частности, отсюда следует, что производная комплексного потенциала, т. е. функция $f'(z)$ — однозначна, а потому регулярна в области D.

Так как $f'(z)\,dz = (A_x - iA_y)(dx + idy)$, то формулы (5), (10) можно записать в виде

$$N = \operatorname{Im}\int_{\gamma} f'(z)\,dz, \qquad \Gamma = \operatorname{Re}\int_{\gamma} f'(z)\,dz. \tag{25}$$

Объединяя эти формулы, получаем

$$\Gamma + iN = \int_{\gamma} f'(z)\,dz. \tag{26}$$

Приведем простейшие примеры гармонических векторных полей.

Пример 1. Постоянное векторное поле. Такое поле задается одним комплексным числом $A = A_x + iA_y$, где A_x, A_y — действительные постоянные. Комплексный потенциал равен $f(z) = \bar{A}z + c$, где c — постоянная. Линии тока — прямые с направляющим вектором A, эквипотенциальные линии — прямые ортогональные к линиям тока. Поток через любую замкнутую кривую и циркуляция вдоль любой замкнутой кривой равны нулю. □

Пример 2. Пусть комплексный потенциал — квадратичная функция $f(z) = z^2$, тогда $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = xy$. Следовательно, линии тока — гиперболы $xy = \text{const}$, эквипотенциальные кривые — гиперболы $x^2 - y^2 = \text{const}$ (рис. 151). Точка $z = 0$ — критическая точка векторного поля. Действительно, из (24) следует, что критическими точками гармонического векторного поля являются те и только те точки, в которых

$$f'(z) = 0. \tag{27}$$

В данном примере точка $z = 0$ — это линия тока. Среди линий тока имеются четыре луча: $xy = 0$, $z \neq 0$, и два соседних луча образуют прямой угол в точке $z = 0$. Среди эквипотенциальных кривых также имеются четыре луча: $x^2 - y^2 = 0$, $z \neq 0$. □

Замечание 3. Произвольное гладкое векторное поле может быть крайне сложно устроено вблизи критической точки. Если же поле гармоническое, то его локальная структура вблизи критической точки довольно проста. Пусть z_0 — критическая точка векторного поля с потенциалом $f(z)$, тогда

$$f'(z_0)=0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\quad f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

при некотором $n\geqslant 2$. Тогда с помощью замены переменной $z=g(\zeta)$, $z_0=g(0)$, где $g(\zeta)$ — регулярная и однолистная в точке

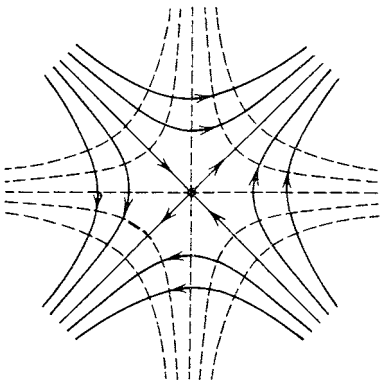


Рис. 151

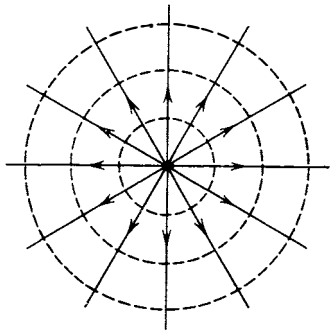


Рис. 152

$\zeta=0$ функция, комплексный потенциал приводится к виду

$$f(g(\zeta))=f(z_0)+\zeta^n \tag{28}$$

вблизи точки $\zeta=0$ (§ 32, следствие 2). Поэтому вблизи критической точки линии тока и эквипотенциальные линии устроены так же, как и у поля с комплексным потенциалом вида (28). Среди линий тока, входящих в точку $\zeta=0$ имеется $2n$ лучей; угол в этой точке между двумя соседними лучами равен π/n.

Пример 3. Источники и стоки. Пусть комплексный потенциал $f(z)=\dfrac{Q}{2\pi}\ln z$, где $Q\neq 0$ — действительная постоянная. Тогда

$$u(x,y)=\frac{Q}{2\pi}\ln|z|,\qquad v(x,y)=\frac{Q}{2\pi}\arg z$$

и линия тока — лучи $\arg z=\text{const}$, эквипотенциальные линии — окружности $|z|=\text{const}$ (рис. 152). Это поле гармонично при $z\neq 0$.

Пусть γ — простая замкнутая кривая, содержащая внутри себя начало координат и ориентированная против часовой стрелки. Так как $f'(z)=Q/(2\pi z)$, то из (26) находим $N=Q$, $\Gamma=0$. Поэтому точка $z=0$ называется *источником* интенсивности Q, если $Q>0$, и *стоком* интенсивности $|Q|$, если $Q<0$. □

Пример 4. Вихрь. Пусть комплексный потенциал $f(z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z$, где $\Gamma_0 \neq 0$ — действительное число. Тогда

$$u(x, y) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arg z, \quad v(x, y) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln |z|$$

и линии тока — окружности $|z| = \text{const}$, эквипотенциальные линии — лучи $\arg z = \text{const}$ (рис. 153). Если γ — замкнутая кривая, обходящая точку $z = 0$ в положительном направлении, то $\int_\gamma f'(z)\, dz = \Gamma_0$, и поэтому $N = 0$, $\Gamma = \Gamma_0$. Точка $z = 0$ называется *вихрем* интенсивности Γ_0. □

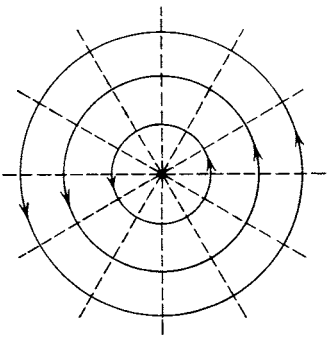


Рис. 153

С помощью суперпозиции гармонических полей, рассмотренных выше, можно получить ряд новых примеров гармонических полей.

Пример 5. Вихреисточник (вихресток). Суперпозиция источника (стока) и вихря имеет комплексный потенциал, равный

$$f(z) = \frac{Q - i\Gamma_0}{2\pi} \ln z,$$

где Q, Γ_0 — действительные постоянные. Если γ — такая же кривая, как и в примере 4, то для потока и циркуляции получаем значения $N = Q$, $\Gamma = \Gamma_0$. Линии тока и эквипотенциальные линии — логарифмические спирали, которые закручиваются в начало координат. □

Пример 6. Диполь. В этом случае комплексный потенциал $f(z) = \frac{m}{2\pi z}$, где $m \neq 0$ — действительная постоянная. Линии тока и эквипотенциальные линии — окружности, проходящие через начало координат (рис. 154). Величина m называется моментом диполя, действительная ось Ox — его осью. □

Диполь может быть получен сложением источника и стока (рис. 155) одинаковой мощности, расположенных в точках $z = \pm h$ при предельном переходе $h \to 0$, $Q \to \infty$, $Q \cdot 2h \to m$. Действительно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{Q \cdot 2h}{2\pi} \frac{\ln(z + h) - \ln(z - h)}{2h} = \frac{m}{2\pi} \frac{d \ln z}{dz} = \frac{m}{2\pi z}.$$

Пример 7. Мультиполь. Пусть комплексный потенциал имеет полюс в точке $z=0$: $f(z)=Cz^{-n}$, $n\geqslant 2$, где $C\neq 0$ — комплексная постоянная. Тогда говорят, что в точке $z=0$ расположен *мультиполь*; он также может быть получен сложением близких к началу координат источников (стоков) и вихрей, при подходящем предельном переходе. □

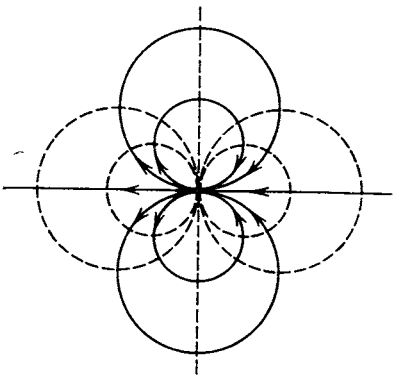


Рис. 154

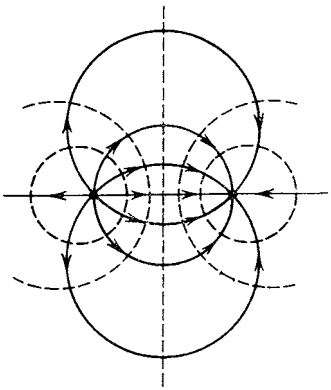


Рис. 155

§ 40. Некоторые физические задачи теории поля

1. Обтекание тел. Рассмотрим установившееся плоское течение идеальной несжимаемой жидкости [10]. Тогда поле скоростей $V=v_x+iv_y$ как известно из гидромеханики, является гармоническим и характеризуется комплексным потенциалом $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, так что

$$V=\overline{f'(z)}. \tag{1}$$

Пусть на плоскости задана односвязная ограниченная область $\bar{D}$ с гладкой границей S и пусть D — внешность S, которая заполнена жидкостью. Пусть тело движется с постоянной скоростью $-V_\infty$ или, что то же, на тело набегает постоянный поток со скоростью V_∞, а само тело покоится. Тогда комплексный потенциал потока — регулярная в D функция, причем $f'(\infty)=\overline{V}_\infty$. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$:

$$f'(z)=\overline{V}_\infty+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots \tag{2}$$

Из (26) § 39 находим $2\pi i c_{-1}=\Gamma+iN$, где Γ и N — циркуляция и поток поля вдоль любой простой замкнутой кривой, охватывающей тело $\bar{D}$. В области D по условию, нет источников, так

что $N = 0$, и из (2) получаем

$$f(z) = \overline{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} + \ldots \qquad (3)$$

в окрестности точки $z = \infty$. Скорость V_∞ и значение циркуляции Γ должны быть заданы — это и есть граничное условие на бесконечности для комплексного потенциала $f(z)$. Граничное условие на поверхности S тела таково: скорость потока должна быть направлена по касательной к S в любой точке контура. Следовательно, граница S — одна из линий тока, так что на S выполняется краевое условие

$$v(x, y)|_S \equiv \text{const}. \qquad (4)$$

Итак, требуется найти функцию $f(z)$, которая регулярна в области D, имеет разложение (3) в окрестности точки $z = \infty$, где V_∞, Γ — заданные комплексная и действительная постоянные, и удовлетворяет краевому условию (4) на контуре S.

Теорема 1. *Решение задачи обтекания единственно.*

Доказательство. Пусть имеются два комплексные потенциала $f_1(z)$, $f_2(z)$ — решения задачи обтекания тела. Тогда их разность $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ регулярна и ограничена в области D. Функция $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ гармонична и ограничена в области D, принимает постоянные значения на S, и по теореме единственности решения задачи Дирихле $v(z) \equiv \text{const}$. Следовательно, $f(z) \equiv \text{const}$, потенциалы $f_1(z)$, $f_2(z)$ отличаются на постоянную, и потому поля скоростей совпадают.

Обтекание тела называется *бесциркуляционным*, если $\Gamma = 0$ и циркуляционным, если $\Gamma \neq 0$.

Теорема 2. *Потенциал $w = f(z)$ бесциркуляционного обтекания тела конформно отображает область D на внешность отрезка, параллельного действительной оси.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $v|_S = 0$. Покажем, что существует функция $w = g(z)$, которая конформно отображает область D на внешность отрезка действительной оси и имеет разложение $g(z) = V_\infty z + g_0 + \ldots$ в окрестности точки $z = \infty$. Тогда $g(z)$ удовлетворяет краевому условию (4) и потому является потенциалом; по теореме 1, $f(z) = g(z) + \text{const}$.

Пусть функция $w = h(z)$ конформно отображает область D на внешность отрезка $[0, 1]$. Тогда она имеет простой полюс в точке $z = \infty$ и в ее окрестности разлагается в ряд

$$h(z) = h_{-1} z + h_0 + \frac{h_1}{z} + \ldots$$

Функция $w = (h(z^{-1}))^{-1}$ конформно отображает область D на некоторую область D_1 как суперпозиция однолистных функций. При малых $|z|$ имеем $w = z/(h_{-1} + h_0 z + \ldots)$, так что $w(0) = 0$,

$w'(0) = h_1^{-1}$. По теореме Римана (§ 33) для любого действительного α существует функция $h_\alpha(z)$, которая конформно отображает D на D_1, такая, что $\arg h_\alpha'(0) = \alpha$. Положим $\alpha = \arg \boldsymbol{V}_\infty$ и затем $g(z) = \frac{|V_\infty|}{|h_\alpha'(0)|} \frac{1}{h_\alpha(z^{-1})}$; это и есть искомая функция.

Очевидно, что функция $w = f(z) = u + iv$, которая конформно отображает область D на внешность отрезка, параллельного оси u, удовлетворяет условиям (3) (при $\Gamma = 0$) и (4), и потому является комплексным потенциалом некоторого потока. Поэтому решение задачи о бесциркуляционном обтекании тела сводится к отысканию функции, конформно отображающей D на внешность отрезка вида $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $v = v_0$.

2. Формулы Чаплыгина и Жуковского. Пусть в воздухе, плотность которого равна ρ, движется крыло самолета с постоянной дозвуковой скоростью $-\boldsymbol{V}_\infty$ или, что то же, на покоящееся крыло набегает поток со скоростью $\boldsymbol{V}_\infty$. Представим крыло в виде бесконечного цилиндра с образующими, ортогональными к вектору скорости, тогда получим плоскую задачу теории поля. Вычислим полную силу, действующую на контур S сечения крыла — подъемную силу. Пусть $p(z)$ — давление воздуха в точке z. На контуре S давление направлено внутрь по нормали, и потому на элемент dz контура S действует сила $ipdz$. Полная сила, действующая на контур S, равна $\boldsymbol{P} = \int_S ip\,dz$. В установившемся безвихревом потоке жидкости справедлива формула Бернулли

$$p = A - \frac{\rho}{2} v^2,$$

где A — постоянная, $v = |\boldsymbol{V}|$, $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости потока. Отсюда находим

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\rho i}{2} \int_S v^2\,dz.$$

В точках S скорость направлена по касательной (см. (4)), так что $\boldsymbol{V} = \overline{f'(z)} = ve^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg dz$. Следовательно,

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\rho i}{2} \int_S \overline{(f'(z))^2} e^{-2i\varphi} dz = -\frac{\rho i}{2} \int_S \overline{(f'(z))^2}\,d\bar{z},$$

так как $e^{-2i\varphi} dz = d\bar{z}$. Для вектора $\overline{\boldsymbol{P}}$, сопряженного вектору подъемной силы, получаем

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\rho i}{2} \int_S (f'(z))^2\,dz. \tag{5}$$

Это и есть классическая формула, полученная С. А. Чаплыгиным.

Из этой формулы и из разложения (2) потенциала в окрестности точки $z = \infty$ находим по теореме о вычетах

$$\overline{P} = 2\pi i \frac{\rho i}{2} \frac{\Gamma V_\infty}{\pi i} = i\rho\Gamma\overline{V}_\infty.$$

Следовательно,

$$P = -i\rho\Gamma V_\infty. \tag{6}$$

Это знаменитая теорема Н. Е. Жуковского: *подъемная сила равна по величине произведению плотности, скорости потока на бесконечности и циркуляции; направление ее повернуто на прямой угол относительно* V_∞ *навстречу циркуляции.*

3. Обтекание кругового цилиндра. Рассмотрим вначале бесциркуляционный поток, обтекающий окружность $|z| = R$. Потенциал такого потока конформно отображает внешность круга на внешность отрезка действительной оси. Ввиду симметрии задачи можно считать, что поток набегает в направлении оси x, т. е. V_∞ — действительное число. Искомое отображение дается функцией Жуковского

$$w = a\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right),$$

где a — действительная постоянная. Из условия $f'(\infty) = \overline{V}_\infty$ находим $w = \overline{V}_\infty z + \dfrac{R^2 V_\infty}{z}$. Для произвольного потока (величина V_∞ комплексна) аналогично получаем $w = \overline{V}_\infty z + \dfrac{V_\infty R^2}{z}$. Заметим, что этот поток — сумма однородного потока $\overline{V}_\infty z$ и потока диполя $V_\infty R^2/z$, расположенного в точке $z = 0$.

Так как $\operatorname{Re} \ln z \equiv \text{const}$ при $|z| = R$, то поток $\dfrac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ также обтекает окружность, и решение задачи имеет вид

$$f(z) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \tag{7}$$

Найдем критические точки потока, в которых $f'(z) = 0$, т. е. скорость потока равна нулю. Из уравнения

$$\overline{V}_\infty z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - V_\infty R^2 = 0 \tag{8}$$

находим

$$z_{1,2} = \frac{1}{2\overline{V}_\infty}\left(\frac{i\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{4|V_\infty|^2 R^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}}\right). \tag{9}$$

При $|\Gamma| \leqslant 4\pi |V_\infty| R$ подкоренное выражение положительно, так что $|z_{1,2}| = R$ и обе критические точки лежат на окружности. В дальнейшем будем для простоты считать, что величина V_∞ действительна. Тогда из (9) имеем

$$z_{1,2} = R(i \sin\alpha \pm \cos\alpha), \qquad \sin\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R},$$

и критические точки таковы: $z_1 = Re^{i\alpha}$, $z_2 = Re^{i(\pi-\alpha)}$.

Если $\Gamma = 0$, то $z_{1,2} = \pm R$, с ростом циркуляции эти точки сближаются и при критическом значении $\Gamma_0 = 4\pi V_\infty R$ совпадают.

Граница круга состоит из линий тока (см. (4)). Поэтому линия тока, приходящая в точку z_2, разветвляется на две — на

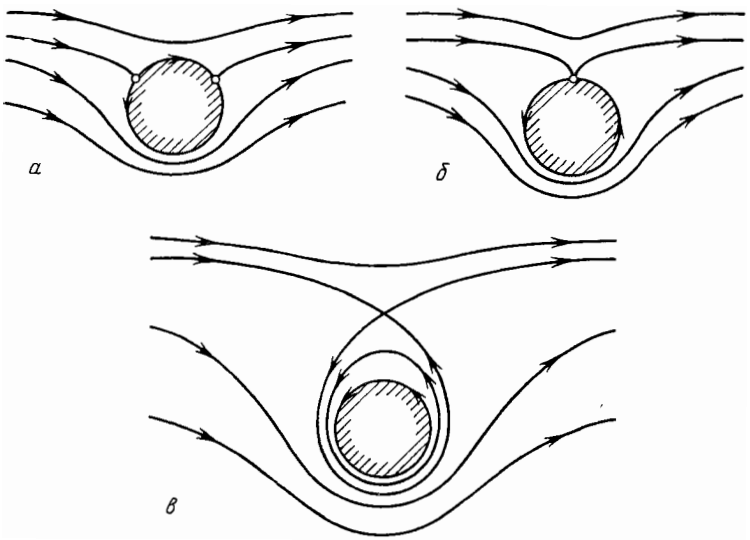


Рис. 156

верхнюю и нижнюю дуги окружности (рис. 156, *а*). Точка z_2 называется точкой разветвления. Во второй критической точке z_1 линии тока (дуги окружности) снова сходятся; эта точка называется точкой схода. Заметим, что линия тока, входящая в точку z_2, и линия тока, выходящая из точки z_1, ортогональны к окружности. Действительно, в точке z_1 имеем

$$f'(z_1) = 0, \quad f''(z_1) = \frac{1}{2\pi z_1^2}\left(\frac{2V_\infty R^2}{z_1} + i\Gamma\right) \neq 0$$

и локальная структура линии тока такая же, как и для потенциала $\frac{1}{2} f''(z_1)(z - z_1)^2$ (§ 39). Ортогональность этих линий следует из примера 2, § 39.

При критическом значении $\Gamma = \pm\Gamma_0$ имеем

$$z_{1,2} = iR, \quad f''(iR) = 0, \quad f'''(iR) \neq 0,$$

и потому угол между двумя соседними линиями тока, входящими в точку $z = iR$, равен $\pi/3$ (§ 39). Линии тока изображены на рис. 156, *б*.

Если $|\Gamma| > \Gamma_0$, то подкоренное выражение в (9) отрицательно и

$$|z_{1,2}| = \frac{1}{4\pi V_\infty}\left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 V_\infty^2 R^2}\right) \neq R.$$

Из (8) следует, что $|z_1 z_2| = R^2$, так что одна критическая точка лежит внутри, а вторая — вне окружности $|z| = R$. В этом случае появляются замкнутые линии тока (рис. 156, *в*).

Циркуляцию Γ можно выразить через координаты точки схода: $\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin\alpha$. Если же $\arg V_\infty = \theta$, то

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\alpha - \theta). \tag{10}$$

4. Обтекание эллипса и пластины. Пусть S — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a).$$

Его фокусы расположены в точках $\pm c$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Решение задачи об обтекании эллипса сводится к задаче об обтекании круга. Функция, обратная к функции Жуковского $w(z) = z + \sqrt{z^2 - c^2}$, конформно отображает внешность эллипса на внешность круга $|z| > R$ (§ 35, п. 7). Регулярная в плоскости с разрезом $[-c, c]$ ветвь корня выбирается так, что $\sqrt{z^2 - c^2} > 0$ при действительных $z \in (c, +\infty)$. Радиус окружности R и полуоси эллипса связаны соотношениями (§ 35, п. 6) $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$, откуда находим $R = a + b$. В силу формулы (7) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\overline{V}_\infty w + \frac{V_\infty (a+b)^2}{w}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln w =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overline{V}_\infty (z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{V_\infty (a+b)^2}{z + \sqrt{z^2 - c^2}}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right).$$

Множитель 1/2 появляется по той причине, что $\sqrt{z^2 - c^2} \sim z$ $(z \to \infty)$ и потому $w'(\infty) = 2$. Избавляясь от иррациональности

в знаменателе, окончательно получаем

$$f(z)=\frac{1}{2}\overline{V}_\infty\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{c^2}V_\infty\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right). \quad (11)$$

При $a=c$, $b=0$ эллипс вырождается в отрезок $I=[-c, c]$ и из (11) находим комплексный потенциал обтекания пластины длины $2c$

$$f(z)=\frac{1}{2}(\overline{V}_\infty+V_\infty)z+\frac{1}{2}(\overline{V}_\infty-V_\infty)\sqrt{z^2-c^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right).$$

Полагая $V_\infty=u_\infty+iv_\infty$, где u_∞, v_∞ действительны, находим

$$f(z)=u_\infty z-iv_\infty\sqrt{z^2-c^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right). \quad (12)$$

Вычислим скорость потока. Имеем из (12)

$$\overline{V}=f'(z)=u_\infty+\frac{2\pi v_\infty z+\Gamma}{2\pi i\sqrt{z^2-c^2}}, \quad (13)$$

и при произвольном значении циркуляции Γ скорость потока обращается в бесконечность на концах пластины, т. е. в угловых точках границы тела.

Здесь мы впервые столкнулись со случаем негладкой границы обтекаемого тела. Для таких тел при постановке задачи об обтекании требуются дополнительные физические предположения. Такое условие было найдено С. А. Чаплыгиным. Пусть обтекаемое тело имеет острие A. Тогда *скорость потока должна быть ограничена у острой кромки профиля.* Другая формулировка условия Чаплыгина такова: *острая точка профиля является точкой схода.* Если профиль имеет только одну острую кромку, то условие Чаплыгина однозначно определяет циркуляцию.

Поскольку пластина имеет два острия $z=\pm c$, то условию Чаплыгина можно удовлетворить только на одном из них; пусть это условие выполняется при $z=c$. Из условия Чаплыгина и из (13) находим единственное возможное значение циркуляции

$$\Gamma_0=-2\pi c v_\infty, \quad (14)$$

а для распределения скоростей получаем из (13)

$$\overline{V}=u_\infty-iv_\infty\sqrt{\frac{z-c}{z+c}}. \quad (15)$$

На острие $z=-c$ скорость потока обращается в бесконечность.

5. Обтекание профилей Жуковского. Пусть γ — дуга окружности, которая проходит через точки $z=\pm a$, а середина дуги

есть точка $z = ih$, и γ' — окружность с центром в точке $w = ih$, проходящая через точки $w = \pm a$ (рис. 127). В § 35 (пример 40) показано, что функция $w = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ конформно отображает внешность дуги γ на внешность окружности γ'. Заметим, что касательная к дуге γ в точке $z = -a$ образует с действительной осью угол $\alpha = 2\operatorname{arctg}(h/a)$, а в точке $z = a$ — угол $\beta = (\pi - \alpha)/2$.

Пусть γ'_d — окружность с центром в точке $w_d = ih - de^{-i\alpha/2}$, которая лежит внутри окружности γ' и касается с ней в точке $w = -a$; ее радиус равен $R_d = \sqrt{a^2 + h^2} + d$. Функция $w(z)$ конформно отображает на внешность γ'_d внешность γ_d (рис. 127), которая по виду напоминает профиль самолета и называется *профилем Жуковского*.

Решим задачу обтекания профиля Жуковского, сведя ее к задаче обтекания круга. Функция

$$w = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - a^2} - w_d) \tag{16}$$

конформно отображает внешность дуги γ_d на внешность круга $|z| > R_\alpha$, и из (7) находим комплексный потенциал

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\overline{V}_\infty w + \frac{V_\infty R_d^2}{w}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln w,$$

где $w = w(z)$ дается формулой (16). Циркуляцию Γ определим из условия Чаплыгина: острая точка профиля должна быть точкой схода. Образ точки $z = -a$ имеет вид $R_0 e^{-i\alpha/2}$, $R_0 > 0$ (рис. 127), и из (10) находим значение циркуляции

$$\Gamma = -2\pi v_\infty(\sqrt{a^2 + h^2} + d)\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right).$$

По теореме Жуковского подъемная сила крыла равна

$$|\boldsymbol{P}| = 2\pi\rho v_\infty^2(\sqrt{a^2 + h^2} + d)\left|\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)\right|.$$

Глава VII

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

§ 41. Простейшие асимптотические оценки

В этом параграфе рассматриваются простейшие методы асимптотических оценок корней трансцендентных уравнений, интегралов и рядов. Асимптотическими оценками называются соотношения вида

$$f(x)=O(g(x)),\quad f(x)=o(g(x)),\quad f(x)\sim g(x)$$

при $x\to a$. Символы O, o, $\sim$ были определены в § 4.

1. Асимптотика корней уравнений. Начнем с простейших примеров.

Пример 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна и имеет простой нуль в точке $z_0\neq\infty$, т. е. $f(z_0)=0$, $f'(z_0)\neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$f(z)=\varepsilon, \tag{1}$$

где ε — малое комплексное число. При малых $|\varepsilon|$ уравнение (1) имеет корень $z(\varepsilon)$, близкий к точке z_0; вычислим асимптотику $z(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$.

Эта задача решается с помощью теоремы об обратной функции (§ 13). В силу этой теоремы в малой окрестности точки $\varepsilon=0$ существует функция $z(\varepsilon)$, обратная к функции $f(z)$ (т. е. $f(z(\varepsilon))\equiv\varepsilon$ при малых $|\varepsilon|$). Функция $z(\varepsilon)$ регулярна в точке $\varepsilon=0$ и разлагается в ряд Тейлора

$$z(\varepsilon)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varepsilon^n, \tag{2}$$

сходящийся в круге $|\varepsilon|<\rho$ при достаточно малом $\rho>0$. Коэффициенты ряда (2) вычисляются по формуле Бурмана — Лагранжа (§ 31). В частности, $c_1=1/f'(z_0)$.

Из разложения (2) вытекают асимптотические формулы

$$z(\varepsilon)=z_0+\sum_{k=1}^{N}c_k\varepsilon^k+O(\varepsilon^{N+1}),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

В частности, при $N=1$ получаем $z(\varepsilon)=z_0+O(\varepsilon)$, при $N=2$ получаем

$$z(\varepsilon)=z_0+\frac{\varepsilon}{f'(z_0)}+O(\varepsilon^2). \quad \square \tag{4}$$

Замечание 1. Если нас интересуют только первые несколько членов разложения (2), то можно вычислять их методом неопределенных коэффициентов. Именно, запишем $z(\varepsilon)$ в виде ряда (2) и подставим в уравнение (1). Функция $f(z)$ разлагается при малых $|z-z_0|$ в ряд Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, и уравнение (1) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varepsilon^k\right)^n-\varepsilon=0.$$

Разлагая левую часть этого равенства по степеням ε и приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, получаем рекуррентную систему уравнений, из которой можно последовательно найти $c_1, c_2, \ldots$

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1), где функция $f(z)$ регулярна и имеет нуль порядка $n\geqslant 2$ в точке z_0, т. е.

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{n-1}(z_0)=0, \quad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Из второй теоремы об обратной функции (§ 32) вытекает, что при малых $\varepsilon\neq 0$ уравнение (1) имеет ровно n различных решений $z_0(\varepsilon)$, $z_1(\varepsilon)$, ..., $z_{n-1}(\varepsilon)$ (которые являются элементами некоторой n-значной аналитической функции). В данном примере удобнее не использовать теорему об обратной функции, а непосредственно преобразовать уравнение (1) к такому, для которого выполнены условия примера 1. Будем считать, что ε изменяется не в полной окрестности точки $\varepsilon=0$, а в некотором секторе S с вершиной в точке $\varepsilon=0$. Пусть, для определенности, S — сектор: $|\varepsilon|>0$, $|\arg\varepsilon|\leqslant\pi-\delta$ $(0<\delta<\pi)$.

По условию в окрестности точки z_0 имеем

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z), \tag{5}$$

где функция $g(z)$ регулярна и отлична от нуля в точке z_0.

Уравнение $w^n=\varepsilon$ $(\varepsilon\neq 0)$ имеет ровно n различных решений

$$w_j=e^{2\pi ij/n}\sqrt[n]{\varepsilon}, \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1, \tag{6}$$

где $\sqrt[n]{\varepsilon}$ — фиксированное значение корня. Пусть $\varepsilon\in S$; символом $\sqrt[n]{\varepsilon}$ обозначим регулярную ветвь корня такую, что $\sqrt[n]{\varepsilon}>0$ при $\varepsilon>0$.

Функция $\sqrt[n]{g(z)}$ в малой окрестности U точки z_0 распадается на n регулярных ветвей. Символом $\sqrt[n]{g(z)}$ обозначим одну из

них; чтобы выделить ветвь, достаточно задать значение корня $\sqrt[n]{g(z_0)}$. Так как $f(z)=\left((z-z_0)\sqrt[n]{g(z)}\right)^n$, то в силу (6) уравнение (1) распадается в U на n независимых уравнений:

$$(z-z_0)\sqrt[n]{g(z)}=e^{2\pi ij/n}\sqrt[n]{\varepsilon}, \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1. \tag{7}$$

Если $\tilde{f}(z)$ — левая часть формулы (7), то $\tilde{f}'(z_0)=\sqrt[n]{g(z_0)}\neq 0$, и для каждого из уравнений (7) условия примера 1 выполнены. Следовательно, при малых $\varepsilon\in S$ уравнение (1) имеет ровно n решений

$$z_j(\varepsilon)=z_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\left(e^{2\pi ij/n}\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^k, \qquad 0\leqslant j\leqslant n-1. \tag{8}$$

Ряды (8) сходятся при малых ε. Напомним, что в правой части символом $\sqrt[n]{\varepsilon}$ обозначена регулярная в секторе S ветвь корня, положительная при $\varepsilon>0$. Коэффициенты c_k можно вычислять по формуле Бурмана — Лагранжа (§ 31). В частности (§ 32),

$$c_1=\sqrt[n]{\frac{n!}{f^{(n)}(z_0)}}. \qquad \square$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$z^3-z^2=\varepsilon \tag{9}$$

и вычислим асимптотику его корней при $\varepsilon\to 0$. При $\varepsilon=0$ уравнение (9) имеет простой корень $z_1=1$ и двукратный корень $z_2=0$. При малых ε уравнение (9) имеет корень $z_1(\varepsilon)\to z_1=1$ $(\varepsilon\to 0)$ и два корня $z_{2,3}(\varepsilon)\to z_2=0$ $(\varepsilon\to 0)$.

Вычислим асимптотику корня $z_1(\varepsilon)$. Положим $z=1+\zeta$, тогда $\zeta+2\zeta^2+\zeta^3=\varepsilon$. Из примера 1 следует, что $\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varepsilon^k$, так что

$$(c_1\varepsilon+c_2\varepsilon^2+\ldots)+2\left(c_1^2\varepsilon^2+\ldots\right)+O(\varepsilon^3)-\varepsilon=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε, ε^2, получаем

$$c_1-1=0, \quad c_2+2c_1^2=0,$$

откуда $z_1(\varepsilon)=1+\varepsilon-2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon\to 0$.

Вычислим асимптотику корней $z_{2,3}(\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon>0$, для простоты, и пусть $\sqrt{\varepsilon}>0$. Уравнение (9) в окрестности точки $z=0$ распадается на два:

$$z\sqrt{1-z}=i\sqrt{\varepsilon}, \quad z\sqrt{1-z}=-i\sqrt{\varepsilon},$$

где $\sqrt{1-z}|_{z=0}=1$. Первое уравнение имеет вид

$$z-\frac{z^2}{2}+O(z^3)=i\sqrt{\varepsilon}.$$

Положим $z=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(\sqrt{\varepsilon})^k$, тогда

$$c_1\sqrt{\varepsilon}+c_2\varepsilon-\frac{c_1^2}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^{3/2})=i\sqrt{\varepsilon},$$

откуда находим $c_1=i$, $c_2=-1/2$. Следовательно,

$$z_2(\varepsilon)=i\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \varepsilon\to+0,$$

$$z_3(\varepsilon)=-i\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+O(\varepsilon^{3/2}), \qquad \varepsilon\to+0.$$

Эти формулы пригодны при $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon\in S$, где S — любой сектор с вершиной в точке $z=0$. □

Пример 4. Рассмотрим уравнение $z-\sin z=\varepsilon$. При $\varepsilon=0$ это уравнение имеет корень $z=0$ кратности 3, так что при малых ε это уравнение имеет три корня, лежащих вблизи точки $z=0$. Вычислим асимптотику этих корней при $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$. Имеем при малых $|z|$

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}+O(z^5)=\varepsilon,$$

откуда в силу (8)

$$z_j(\varepsilon)=e^{2\pi ij/3}\sqrt[3]{6\varepsilon}+O(\varepsilon^{2/3}), \qquad \varepsilon\to 0, \qquad j=0,1,2.$$

Здесь $\sqrt[3]{\varepsilon}>0$ при $\varepsilon>0$. □

Пример 5. Рассмотрим уравнение (1), где функция $f(z)$ регулярна и имеет нуль в точке $z=\infty$. Тогда уравнение (1) при малых ε имеет одно или несколько решений, которые стремятся к бесконечности при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$f(z)=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{-k}, \qquad a_0\neq 0,$$

где ряд сходится в области $|z|>R$ при больших R и $n\geqslant 1$ — целое число. Замена $\zeta=1/z$ приводит уравнение (1) к виду

$$\zeta^n g(\zeta)=\varepsilon, \tag{10}$$

где $g(\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k$, $g(0)\neq 0$. Тем самым мы пришли к уравнениям, рассмотренным в примерах 1, 2. □

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$p(z)=\lambda, \tag{11}$$

где $p(z)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$:

$$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Найдем асимптотику корней этого уравнения при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S$, где S — сектор $|\arg \lambda| \leqslant \pi-\delta$ $(0<\delta<\pi)$. Положим $\varepsilon=1/\lambda$, $\zeta=1/z$; тогда уравнение (11) примет вид

$$\frac{\zeta^n}{a_0+a_1\zeta+\ldots+a_n\zeta_n}=\varepsilon.$$

Из примера 2 следует, что уравнение (11) имеет n корней

$$z_j(\lambda)=e^{i2\pi j/n}\sqrt[n]{\lambda}\left[\frac{1}{\sqrt[n]{a_0}}+O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}\right)\right], \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S.$$

Здесь $0 \leqslant j \leqslant n-1$, значение $\sqrt[n]{a_0}$ фиксировано и $\sqrt[n]{\lambda}$ — регулярная ветвь корня, положительная при $\lambda>0$. □

Если $f(z)$ — рациональная функция, то при $\varepsilon \to 0$ каждый корень уравнения (1) стремится к одному из корней предельного уравнения $f(z)=0$. Значительно сложнее ведут себя при $\varepsilon \to 0$ корни уравнения (1), если функция $f(z)$ не является рациональной.

Пример 7. Уравнение $e^z=\varepsilon$ при $\varepsilon=0$ не имеет решений. Если же $\varepsilon \neq 0$, то все решения этого уравнения даются формулой

$$z_k(\varepsilon)=2k\pi i+\ln \varepsilon$$

($\ln \varepsilon$ — фиксированное значение логарифма), и все корни $z_k(\varepsilon)$ стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$. □

Рассмотрим теперь примеры другого рода. Пусть функция $f(z)$ — целая или мероморфная и пусть уравнение

$$f(z)=0 \tag{12}$$

имеет бесконечно много корней $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ В силу теоремы единственности в каждой ограниченной области комплексной плоскости уравнение (12) может иметь только конечное число корней, следовательно, $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим задачу об исследовании асимптотического поведения корней уравнения (12) для некоторых элементарных функций $f(z)$.

Пример 8. Уравнение

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{z} \tag{13}$$

имеет бесконечно много действительных корней, что видно из графиков функций $\operatorname{tg} x$ и $1/x$. Так как функции $\operatorname{tg} x$, $1/x$ — не-

четные, то действительные корни уравнения (13) симметричны относительно точки $x=0$. Пусть x_n — корень уравнения (13), лежащий в интервале $n\pi-(\pi/2)<x<n\pi+(\pi/2)$. Найдем асимптотику x_n при $n\to+\infty$. Полагая $x=n\pi+y$, $1/n\pi=\varepsilon$, получаем для y уравнение

$$f(y)=\varepsilon, \qquad f(y)=\frac{\sin y}{\cos y - y\sin y}. \tag{14}$$

При $\varepsilon=0$ уравнение (14) имеет простой корень $y=0$; вычислим асимптотику решения $y(\varepsilon)$ уравнения (14) такого, что $y(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Это уравнение имеет вид (1), где функция $f(y)$ регулярна в точке $y=0$ и точка $y=0$ — простой нуль функции $f(y)$. Из примера 1 следует, что $y(\varepsilon)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varepsilon^k$, причем $c_1=1$, так что

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + \sum_{k=2}^{\infty}{}' \frac{c_k}{(n\pi)^k}$$

при больших n. В частности,

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n\to+\infty.$$

Кроме того, уравнение (14) имеет корни $\{-x_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ □

Замечание 2. Можно доказать, что уравнение (13) имеет только действительные корни.

Пример 9. Рассмотрим уравнение

$$z-\ln z=\lambda \tag{15}$$

в области D, где D — плоскость с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$, из которой удален круг $|z|\leqslant\rho$, $\rho>0$. Здесь $\ln z$ — регулярная в области D ветвь логарифма, принимающая действительные значения при действительных $z=x>0$.

Вычислим асимптотику корней уравнения (15) при $\lambda\to+\infty$. Допустим, что уравнение (15) имеет при всех достаточно больших λ корень $z=z(\lambda)$; тогда $z(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to+\infty$. Это вытекает из того, что функция $z-\ln z$ ограничена в любой ограниченной области $\tilde{D}\subset D$.

Далее, $\ln z=\ln|z|+i\varphi$, $|\varphi|<\pi$ при $z\in D$, так что $|\ln z|=o(|z|)$ при $z\to\infty$, $z\in D$. Следовательно, $z(\lambda)\sim\lambda$ при $\lambda\to+\infty$ и $z(\lambda)=\lambda(1+\zeta(\lambda))$, где $\zeta(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to+\infty$.

1. Покажем, что при $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ и при большом λ_0 уравнение (15) имеет в области D единственный корень $z(\lambda)$, причем

$$z(\lambda)=\lambda+O(\ln\lambda), \quad \lambda\to+\infty. \tag{16}$$

Полагая в уравнении (15) $z=\lambda(1+\zeta)$, получаем уравнение

$$\zeta=\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\frac{\ln(1+\zeta)}{\lambda}. \tag{17}$$

Воспользуемся теоремой Руше (§ 30). Запишем уравнение (17) в виде

$$\zeta-(\varepsilon+\delta\ln(1+\zeta))=0, \tag{18}$$

где $\varepsilon=\ln\lambda/\lambda$, $\delta=1/\lambda$ — малые параметры, причем $\delta=o(\varepsilon)$ $(\lambda\to+\infty)$. Рассмотрим круг K_ε: $|\zeta|\leqslant 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon\to 0$ при $\lambda\to+\infty$, то существует $\lambda_0>0$ такое, что круг K_ε содержится в круге K: $|\zeta|<1/2$ при $\lambda\geqslant\lambda_0$. Функция $\ln(1+\zeta)$ регулярна и ограничена в круге K, т. е. $|\ln(1+\zeta)|\leqslant M$, и это же неравенство верно для круга K_ε при $\lambda\geqslant\lambda_0$. На границе $|\zeta|=2\varepsilon$ круга K_ε имеем

$$|-\varepsilon-\delta\ln(1+\zeta)|\leqslant\varepsilon+M\delta,$$

и так как $\delta=o(\varepsilon)$ при $\lambda\to+\infty$, то

$$|-\varepsilon-\delta\ln(1+\zeta)|<2\varepsilon=|\zeta|$$

при $\lambda\geqslant\lambda_1$, если λ_1 велико. По теореме Руше число корней уравнения (18), лежащих в круге K_ε, равно числу корней уравнения $\zeta=0$. Следовательно, при $\lambda\geqslant\lambda_1$ уравнение (18) имеет в круге K_ε единственный корень $\zeta_0(\lambda)$; при этом $|\zeta_0(\lambda)|<2|\varepsilon|$, т. е. $\zeta_0(\lambda)=O((\ln\lambda)/\lambda)$ $(\lambda\to+\infty)$. Тем самым формула (16) доказана.

2. Уточним формулу (16). Для этого применим метод итераций, т. е. подставим полученную оценку $\zeta=O((\ln\lambda)/\lambda)$ в правую часть уравнения (17). Тогда получим, что

$$\zeta=\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)\right)=\frac{\ln\lambda}{\lambda}+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right),$$

так как $\ln(1+\zeta)=O(\zeta)$ $(\zeta\to 0)$. Следовательно,

$$z(\lambda)=\lambda+\ln\lambda+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right),\qquad \lambda\to+\infty,$$

и мы получили более точную асимптотическую формулу для $z(\lambda)$, чем формула (16). Снова подставляя в правую часть уравнения (17) уточненную формулу для ζ, получим еще более точную асимптотическую формулу для $z(\lambda)$, и т. д.

3. Нетрудно проверить, что асимптотические формулы (16) справедливы при $\lambda\in S$, $|\lambda|\to\infty$, где S — сектор вида $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$. В этих формулах $\ln\lambda$ — регулярная в секторе S ветвь логарифма, положительная при действительных $\lambda>1$. □

Пример 10. Рассмотрим уравнение

$$e^z=az,\qquad a\neq 0. \tag{19}$$

Покажем, что это уравнение имеет бесконечно много корней, и вычислим их асимптотику.

Уравнение (19) в любой ограниченной области комплексной плоскости может иметь только конечное число корней, так как $e^z - az$ — целая функция. Далее, функция $|e^z|$ экспоненциально растет вдоль любого луча $\arg z = \alpha$, лежащего в правой полуплоскости, и экспоненциально убывает вдоль любого луча $\arg z = \alpha$, лежащего в левой полуплоскости, а функция $|az|$ растет линейно вдоль любого луча. Отсюда следует, что корни уравнения (19) концентрируются возле мнимой оси, т. е. все корни, за исключением конечного числа, лежат в секторе, содержащем мнимую ось. Приведем строгое доказательство этого утверждения.

1. В области $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $|z| > 1/|a|$ уравнение (19) не имеет корней, так как $|e^z| \leqslant 1$, $|az| > 1$.

2. Пусть S_ε — сектор $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$. Покажем, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ в секторе S_ε уравнение (19) может иметь только конечное число корней. При $z \in S_\varepsilon$ имеем $z = re^{i\varphi}$, где $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, так что $|e^z| = e^{r\cos\varphi} \geqslant e^{r\sin\varepsilon}$. Так как $|az| = |a|r = o(e^{r\sin\varepsilon})$ $(r \to +\infty)$, то $|e^z| > |az|$ $(z \in S_\varepsilon, |z| > R)$, при больших R и уравнение (19) не имеет корней в области $z \in S_\varepsilon$, $|z| > R$. Следовательно, в секторе S_ε уравнение (19) может иметь только конечное число корней.

3. Рассмотрим сектор S_ε: $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если уравнение (19) имеет бесконечно много корней в секторе S_ε, то эти корни стремятся к бесконечности с ростом номера. Пусть $z \in S_\varepsilon$ — корень уравнения (19); тогда существует целое число n такое, что

$$z = 2\pi i n + \ln a + \ln z. \tag{20}$$

Здесь $\ln a$ — фиксированное значение логарифма, а $\ln z$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ ветвь логарифма, принимающая действительные значения на полуоси $(0, \infty)$. Таким образом, мы получили уравнение, исследованное в примере 9; здесь $\lambda = 2\pi i n + \ln a$. При вычислении асимптотики корней можно ограничиться формальными выкладками, поскольку их обоснование содержится в примере 9. Полагая $z = 2\pi i n + \zeta$, получаем

$$\zeta = \ln(2\pi i n a) + \ln\left(1 + \frac{\zeta}{2\pi i n}\right).$$

так что $\zeta \sim \ln(2\pi i n a)$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$\ln\left(1 + \frac{\zeta}{2\pi i n}\right) = O\left(\frac{\zeta}{2\pi i n}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$z_n = 2\pi i n + \ln n + \ln(2\pi i a) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \to +\infty. \tag{21}$$

Подставляя $z = z_n$ из (21) в уравнение (20), можно уточнить эту асимптотическую формулу.

В формуле (21) имеем $\ln n > 0$, $\operatorname{Re} \ln(2\pi i n) > 0$.

Аналогичная серия корней уравнения (19) лежит в секторе $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. □

Пример 11. Вычислим асимптотику корней уравнения

$$\sin z = z. \tag{22}$$

Функция $|\sin z|$ растет экспоненциально вдоль любого луча с началом в точке $z = 0$, за исключением полуосей действительной оси. Поэтому корни уравнения (22) могут концентрироваться только вблизи действительной оси. Докажем это. Пусть $\widetilde{S}_\varepsilon$ — сектор $\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \pi$, ε фиксировано. Положим $z = re^{i\varphi}$; тогда $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varepsilon$ при $z \in \widetilde{S}_\varepsilon$. Имеем

$$|\sin z| = \frac{1}{2}|e^{iz} - e^{-iz}| \geqslant \frac{1}{2}(e^{r\sin\varepsilon} - e^{-r\sin\varepsilon}), \qquad z \in \widetilde{S}_\varepsilon.$$

Если $z \in \widetilde{S}_\varepsilon$, $|z| \geqslant R$ и R велико, то $|\sin z| > |z|$ и в этой области уравнение (22) не имеет корней. Следовательно, в секторе $\widetilde{S}_\varepsilon$ уравнение (22) имеет не более конечного числа корней. То же самое верно для сектора $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant -\varepsilon$, так как функция $f(z) = \sin z - z$ нечетна.

Корни уравнения (22) «ходят» четверками: z_0, $\bar{z}_0$, $-z_0$, $-\bar{z}_0$, так как функция $f(z)$ нечетна и $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ (если x — действительное число, то $f(x)$ также действительное число). Поэтому достаточно исследовать асимптотическое поведение корней в секторе S_ε: $0 \leqslant \arg z \leqslant \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ — фиксированное число, которое можно выбрать сколь угодно малым.

Уравнение (22) запишем в виде

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2iz.$$

Разрешая это уравнение относительно e^{iz}, получаем

$$e^{iz} = i(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{23}$$

Функция $\sqrt{z^2 - 1}$ распадается в секторе S_ε на две регулярные ветви $f_j(z)$, $j = 1, 2$, причем $f_2(z) \equiv -f_1(z)$. Пусть $f_1(z)$ — ветвь, положительная при действительных $z = x > 1$; тогда $f_1(z) \sim z$, $f_2(z) \sim -z$ при $z \in S_\varepsilon$. Следовательно, $z + f_1(z) \sim 2z$, $z + f_2(z) \sim 1/(2z)$ при $z \to \infty$, $z \in S_\varepsilon$ (пример 11 § 24). Так как $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ при $z \in S_\varepsilon$, то $|e^{iz}| \leqslant 1$ в этом секторе. Поэтому уравнение (23) при $z \in S_\varepsilon$, $|z| \geqslant 1/2$ имеет вид $e^{iz} = i(z + f_2(z))$.

Логарифмируя это соотношение, получаем

$$z = 2\pi n + \frac{\pi}{2} - i \ln g(z). \tag{24}$$

Здесь $g(z) = z + f_2(z)$, $n \geqslant 1$ — целое число; символом $\ln g(z)$

обозначена регулярная в секторе S_ε ветвь логарифма, принимающая действительные значения при действительных z. Напомним, что корни уравнения (24) стремятся к бесконечности; следовательно, $z_n \sim 2\pi n$ при $n \to \infty$. Далее, при $z \in S_\varepsilon$, $z \to \infty$

$$g(z) = \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\ln g(z) = -\ln(2z) + \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\ln(2z) + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

и уравнение (24) принимает вид

$$z = 2\pi n + \frac{\pi}{2} + i\ln(2z) + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

(здесь $z = z_n$). Отсюда, как и в примере 9, находим асимптотику корней

$$z_n = 2\pi n + i\ln(4\pi n) + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \qquad n \to +\infty. \tag{25}$$

Остальные три серии корней имеют вид $\{\bar{z}_n\}$, $\{-z_n\}$, $\{-\bar{z}_n\}$. □

2. Простейшие оценки интегралов. Рассмотрим интеграл вида

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{26}$$

Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(x)$ при $x \to +\infty$. Если интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$ сходится, то очевидно, что

$$F(x) = \int_a^\infty f(t)\,dt + o(1), \qquad x \to +\infty.$$

В этом случае естественно исследовать при $x \to +\infty$ поведение интеграла $G(x) = F(+\infty) - F(x)$, т. е. функции

$$G(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt. \tag{27}$$

При довольно широких условиях асимптотические оценки можно интегрировать, т. е. если

$$f(t) \sim g(t), \qquad t \to +\infty, \tag{28}$$

то

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim \int_a^x g(t)\,dt, \qquad x \to +\infty. \tag{29}$$

Приведем соответствующие достаточные условия.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(t)$, $g(t)$ *непрерывны при* $t \geqslant a$, *функция* $g(t)$ *строго положительна при больших* t *и*

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty. \tag{30}$$

Тогда из соотношения (28) *вытекает соотношение* (29).

Доказательство. По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Применимость правила Лопиталя следует из условия (30).

Точно так же доказывается

Следствие 1. *Пусть условия теоремы* 1 *выполнены и*

$$f(t) = o(g(t)), \quad t \to +\infty.$$

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right), \quad x \to +\infty.$$

Следствие 2. *Пусть условия теоремы* 1 *выполнены и*

$$f(t) = O(g(t)), \quad (t \geqslant b \geqslant a).$$

Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right), \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. По условию существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|f(t)| \leqslant Cg(t), \quad t \geqslant b.$$

Следовательно, при $x \geqslant b$

$$\left|\int_b^x f(t)\,dt\right| \leqslant C\int_b^x g(t)\,dt \equiv CH(x).$$

Далее, при $x \geqslant b$ имеем

$$|F(x)| = \left|\left(\int_a^b + \int_b^x\right) f(t)\,dt\right| \leqslant C_1 + CH(x),$$

где $C_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Так как $H(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то

$$C_1 + CH(x) = CH(x)\,(1 + o(1)) \leqslant 2CH(x)$$

при больших x, и следствие 2 доказано.

Пример 12. Из теоремы 1 и следствий 1, 2 вытекает, что если $\alpha > -1$, $C \neq 0$, то при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$f(x) \sim Cx^{\alpha} \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \sim \frac{Cx^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$f(x) = o(x^{\alpha}) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = o(x^{\alpha+1}),$$

$$f(x) = O(x^{\alpha}) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = O(x^{\alpha+1}).$$

Здесь $f(x)$ — непрерывная при $x \geqslant a$ функция. □

Пример 13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и $C \neq 0$. Тогда при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$f(x) \sim \frac{C}{x} \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \sim C \ln x,$$

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = o(\ln x),$$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = O(\ln x).$$

Эти соотношения вытекают из теоремы 1 и следствий 1, 2. □

Пример 14. Рассмотрим интеграл $F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt$.

Так как $\sqrt{t^2+1} \sim t$ при $t \to +\infty$, то $F(x) \sim x^2/2$ $(x \to +\infty)$.

Исследуем асимптотическое поведение функции $F(x)$ при $x \to +\infty$ более подробно. По формуле Тейлора имеем при $t \geqslant 2$

$$\sqrt{t^2+1} = t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = t + \frac{1}{2t} + O(t^{-3}).$$

Следовательно, при $x \geqslant 2$

$$\int_2^x \sqrt{t^2+1}\,dt = \int_2^x \left(t + \frac{1}{2t}\right) dt + \int_2^x O(t^{-3})\,dt.$$

Последний интеграл сходится, так что

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{2} + O(1), \quad x \to +\infty.$$

Более подробно доказательство выглядит так:

$$F(x) = \left(\int_0^2 + \int_2^x\right)\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{2} +$$

$$+ \left[-\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\ln t}{2}\right)\Big|_{t=2} + \int_2^x O(t^{-3})\,dt + \int_0^2 \sqrt{t^2+1}\,dt\right].$$

Стоящая в квадратных скобках функция имеет порядок $O(1)$, при $x \to +\infty$. □

Теорема 1 и следствия 1, 2, очевидно, остаются в силе и в том случае, если полуось $[a, +\infty)$ заменить конечным полуинтервалом $[a, b)$, а условие (30) — условием

$$\int_a^b g(t)\,dt = +\infty.$$

Пример 15. Пусть $f(x) \sim Cx^{-\alpha}$ $(x \to +0)$, где $C \neq 0$, $\alpha > 1$ и функция $f(x)$ непрерывна при $0 < x \leqslant a$. Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt \sim C\,\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \quad (x \to +0).$$

Аналогично, при $x \to +0$

$$f(x) \sim \frac{C}{x} \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \sim C \ln x. \quad \square$$

Рассмотрим интегралы вида (27).

Пример 16. Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны при $t \geqslant a$, $g(t) > 0$ при больших значениях t и интеграл $\int_a^\infty g(t)\,dt$ сходится. Тогда при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические

оценки

$$f(x) \sim g(x) \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt \sim \int_x^\infty g(t)\,dt,$$

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt = o\left(\int_x^\infty g(t)\,dt\right),$$

$$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt = O\left(\int_x^\infty g(t)\,dt\right).$$

Действительно, из сходимости интеграла от функции $g(t)$ по полуоси $t \geqslant a$ в этих случаях вытекает сходимость интеграла от функции $f(t)$ по этой полуоси. После этого, как и в теореме 1, остается воспользоваться правилом Лопиталя. □

Пример 17. Пусть $\alpha > 1$, $C \neq 0$ — постоянные, функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$. Тогда при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$f(x) \sim Cx^{-\alpha} \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt \sim \frac{Cx^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

$$f(x) = o(x^{-\alpha}) \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt = o(x^{1-\alpha}),$$

$$f(x) = O(x^{-\alpha}) \Rightarrow \int_x^\infty f(t)\,dt = O(x^{1-\alpha}). \quad \square$$

Пример 18. Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{k^2 + v(t)}\,dt,$$

где функция $v(x)$ непрерывна и неотрицательна при $x \geqslant 0$, $v(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и $k > 0$ — постоянная. Вычислим асимптотику $F(x)$ при $x \to +\infty$.

а) Так как $\sqrt{k^2 + v(x)} \sim k$ при $x \to +\infty$, то в силу теоремы 1

$$F(x) \sim kx, \quad x \to +\infty.$$

б) Пусть, кроме того, $\int_0^\infty v(t)\,dt < \infty$. Тогда можно получить более точные оценки для $F(x)$. Имеем

$$F(x) = \int_0^x \left(\sqrt{k^2 + v(t)} - k\right) dt + kx =$$

$$= kx + \int_0^\infty \frac{v(t)}{\sqrt{k^2 + v(t)} + k}\,dt - \int_x^\infty \frac{v(t)}{\sqrt{k^2 + v(t)} + k}\,dt. \quad (31)$$

Последнее слагаемое есть $o(1)$ при $x \to +\infty$; следовательно,

$$F(x) = kx + C + o(1), \quad x \to +\infty,$$

$$C = \int_0^\infty \frac{v(t)}{\sqrt{k^2 + v(t)} + k}\, dt.$$

в) Если известна более точная информация о функции $v(x)$, то можно получить еще более точную оценку для $F(x)$. Пусть, например, $v(x) + k^2 > 0$ при $x \geqslant 0$ и

$$v(x) \sim Ax^{-\alpha}, \quad x \to +\infty,$$

где $A \neq 0$, $\alpha > 1$. Тогда

$$\frac{v(x)}{\sqrt{k^2 + v(x)} + k} \sim \frac{A}{2k} x^{-\alpha}, \; x \to +\infty,$$

так что из формулы (31) и примера 17 получаем

$$F(x) = kx + C + \frac{Ax^{-\alpha+1}}{2k(1-\alpha)} + o(x^{-\alpha+1}), \; x \to +\infty. \quad \square$$

Пример 19. Вычислим асимптотику при $\varepsilon \to +0$ интеграла

$$F(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{f(t)\, dt}{t + \varepsilon}.$$

Здесь $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая при $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ интеграл $F(\varepsilon)$ расходится, если $f(0) \neq 0$, и сходится, если $f(0) = 0$. Поэтому представим этот интеграл в виде

$$F(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{f(0)}{t + \varepsilon}\, dt + \int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t + \varepsilon}\, dt \equiv F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon).$$

Имеем $F_1(\varepsilon) = f(0)[\ln(1 + \varepsilon) - \ln \varepsilon] = -f(0) \ln \varepsilon + O(\varepsilon)$.

Покажем, что

$$F_2(\varepsilon) = O(1), \quad \varepsilon \to +0.$$

Функцию $f(t) - f(0)$ можно представить в виде $f(t) - f(0) = t\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывная при $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция. Следовательно,

$$|F_2(\varepsilon)| \leqslant \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|\, t}{t + \varepsilon}\, dt \leqslant M \int_0^1 \frac{t}{t + \varepsilon}\, dt \leqslant M,$$

где $M = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)|$. Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{f(t)\, dt}{t + \varepsilon} = -f(0) \ln \varepsilon + O(1), \quad \varepsilon \to +0. \quad \square$$

3. Асимптотические оценки некоторых сумм. Рассмотрим сумму

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k). \tag{32}$$

Нас интересует асимптотическое поведение $S(n)$ при $n \to +\infty$. Эта задача в общем случае крайне сложна; ограничимся тем, что рассмотрим только знакопостоянные суммы (т. е. все слагаемые $f(k)$ действительны и одного знака).

Один из основных методов получения асимптотических оценок для сумм вида (32) — это приближенная замена суммы интегралом.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ неотрицательна, непрерывна и монотонна при $x \geqslant 0$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)\,dx + O(1) + O(f(n)) \quad (n \to \infty). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает. Тогда

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx.$$

Суммируя эти неравенства при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, получаем

$$\int_{0}^{n-1} f(x)\,dx \leqslant S(n) - f(0) - f(n) \leqslant \int_{1}^{n} f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\left| S(n) - f(0) - f(n) - \int_{0}^{n} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n), \tag{34}$$

что и доказывает (33). Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ не возрастает.

Пример 20. Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1), \qquad n \to +\infty.$$

Из теоремы 2 следует, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} + O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n + O(1). \quad \square$$

Пример 21. Пусть $\alpha > -1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad n \to \infty.$$

В данном случае, по теореме 2, имеем при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \int_{1}^{n} x^{\alpha}\, dx + O(1) + O(n^{\alpha}) =$$

$$= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad \square$$

Приведем еще один результат о приближенной замене суммы (32) интегралом $\int_{0}^{n} f(x)\, dx$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$. Тогда*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)\, dx \right| \leqslant |f(0)| + \int_{0}^{n} |f'(x)|\, dx. \tag{35}$$

Доказательство. Имеем

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\, dx = \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx + g(k),$$

$$g(k) = \int_{k-1}^{k} [f(k) - f(x)]\, dx.$$

Оценим $|g(k)|$. Так как $f(k) - f(x) = \int_{x}^{k} f'(t)\, dt$, то при $k - 1 \leqslant x \leqslant k$

$$|f(k) - f(x)| \leqslant \int_{k-1}^{k} |f'(t)|\, dt,$$

откуда вытекает оценка

$$|g(k)| \leqslant \int_{k-1}^{k} |f(k) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \left(\int_{k-1}^{k} |f'(t)|\, dt \right) dx = \int_{k-1}^{k} |f'(t)|\, dt.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{0}^{n} f(x)\, dx \right| = \left| f(0) + \sum_{k=1}^{n} g(k) \right| \leqslant |f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} |f'(t)|\, dt,$$

откуда вытекает (35).

Следствие 3. *Если условия теоремы* 3 *выполнены, то справедлива оценка*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} f(k) - \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant |f(n)| + \int_{n}^{\infty} |f'(x)|\,dx, \tag{36}$$

в предположении, что все входящие в эту формулу ряды и интегралы сходятся.

Отметим, что примеры 20, 21 можно было бы исследовать с помощью теоремы 3.

Пример 22. Покажем, что при $\alpha > 1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, \qquad n \to \infty.$$

Воспользуемся формулой (36). В данном случае $f(x) = x^{-\alpha}$, $f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$, так что

$$\int_{n}^{\infty} |f'(x)|\,dx = n^{-\alpha}, \quad \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1},$$

и при $n \to +\infty$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} + O(n^{-\alpha}). \quad \square$$

§ 42. Асимптотические разложения

1. Пример асимптотического разложения. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_{x}^{\infty} t^{-1} e^{x-t}\,dt,$$

где $x > 0$, и исследуем поведение этой функции при $x \to +\infty$. Интегрируя по частям, получаем

$$f(x) = -\int_{x}^{\infty} t^{-1}\,d(e^{x-t}) = \frac{1}{x} - \int_{x}^{\infty} t^{-2} e^{x-t}\,dt.$$

Повторяя интегрирование по частям, получаем

$$f(x) = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right] +$$

$$+ (-1)^{n+1}(n+1)! \int_{x}^{\infty} e^{x-t} t^{-n-2}\,dt = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x)$ — выражение, заключенное в квадратные скобки. Оценим $R_n(x)$. Так как $e^{x-t} \leqslant 1$ при $x \leqslant t$, то

$$|R_n(x)| \leqslant (n+1)! \int_0^\infty t^{-n-2}\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad (1)$$

Модуль остаточного члена не превосходит величины $2n!\ x^{-n-1}$.

Мы получили последовательность асимптотических формул, каждая из которых уточняет предыдущую:

$$f(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \ldots,$$

и т. д. Эти формулы позволяют приближенно вычислять функцию $f(x)$ при больших значениях x, так как

$$|f(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{2n!}{x^{n+1}}. \quad (2)$$

Правая часть неравенства (2) мала при больших x. Например, при $x \geqslant 2n$ имеем $|f(x) - S_{n-1}(x)| < 1/(n2^n)$. Поэтому при больших значениях x значение функции $f(x)$ может быть вычислено с большой точностью, если взять достаточно много членов асимптотического разложения (1).

Интересно, что полученная асимптотическая (при $x \to +\infty$) формула (1) годится и для не очень больших значений x. Например, при $x = 10$, $n = 5$ получаем

$$S_5(10) = 0{,}09152, \quad 0 < f(10) - S_5(10) < 0{,}00012,$$

и относительная ошибка приближенной формулы $f(10) \approx S_5(10)$ составляет примерно 0,1 %.

Заметим, что непосредственное вычисление функции $f(x)$ (например, с помощью ЭВМ) тем сложнее, чем больше x. В то же время асимптотическая формула (1) тем точнее, чем больше x. Лаплас писал, что асимптотический метод «тем более точен, чем более он необходим».

Функции $f(x)$ можно сопоставить ряд $f(x) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. Этот ряд расходится при любом x. Действительно, модуль отношения $(n+1)$-го члена ряда к n-му равен $(n+1)x^{-1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Тем не менее этот расходящийся ряд, как было показано выше, может служить для приближенного вычисления функции $f(x)$.

Пример, который мы привели, был исследован еще Эйлером. В настоящее время асимптотические методы широко используются в самых различных областях математики, механики, физики, техники и т. д. Ценность асимптотических методов состоит в том, что они позволяют получить простые приближения для сложных объектов, что, в свою очередь, дает возможность получить хорошее качественное представление о соответствующем явлении. Настоящая глава знакомит читателя с некоторыми наиболее употребительными асимптотическими методами.

Перейдем к строгому изложению понятия асимптотического разложения.

2. **Понятие асимптотического разложения.** Пусть M — некоторое множество точек (на действительной оси или на комплексной плоскости), a — предельная точка этого множества. Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, определенных при $x \in M$ в некоторой окрестности точки a, называется *асимптотической последовательностью* (при $x \to a$, $x \in M$), если для любого n

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a, \quad x \in M.$$

Приведем примеры асимптотических последовательностей.

Пример 1. Последовательность $\varphi_n(x) = x^n$ является асимптотической при $x \to 0$ (в качестве M можно взять окрестность или полуокрестность точки $a=0$). □

Пример 2. Последовательность $\varphi_n(x) = x^{-n}$ является асимптотической при $x \to a$, $x \in M$ в следующих случаях:

1) M — множество $|x| > c$, $a = \infty$;
2) M — полуось $x > c$, $a = +\infty$;
3) M — полуось $x < c$, $a = -\infty$. □

Пример 3. Последовательность $\varphi_n(z) = z^n$ — асимптотическая при $z \to 0$, $z \in M$. В качестве M можно взять проколотую окрестность $0 < |z| < r$ точки $z=0$ или сектор с вершиной в этой точке: $0 < |z| < r$, $\alpha < \arg z < \beta$ $(0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi)$. □

Пример 4. Последовательность $\varphi_n(z) = z^{-n}$ — асимптотическая при $z \to \infty$; в качестве M можно взять окрестность точки $z=\infty$ $(|z| > R)$ или сектор: $|z| > R$, $\alpha < \arg z < \beta$ $(0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi)$ комплексной плоскости. □

Приведенные в этих примерах асимптотические последовательности называются *степенными асимптотическими последовательностями*.

Рассмотрим понятие асимптотического разложения; это понятие принадлежит А. Пуанкаре.

Определение 1. Пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая при $x \to a$, $x \in M$. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$,

где a_n — постоянные, называется *асимптотическим разложением функции* $f(x)$, если для любого $N \geqslant 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)), \qquad x \to a, \quad x \in M. \tag{3}$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ называется *асимптотическим рядом для функции* $f(x)$, и употребляется запись

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad x \to a, \quad x \in M.$$

В п. 1 было получено следующее асимптотическое разложение:

$$\int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t}\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \qquad x \to +\infty. \tag{4}$$

В дальнейшем будем опускать указание на множество M в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Подчеркнем то важное обстоятельство, что асимптотический ряд может быть расходящимся. Например, асимптотический ряд (4) расходится при любом x. Эта возможность заложена в определении 1. Действительно, положим

$$R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x).$$

Тогда, по определению,

$$\frac{R_N(x)}{\varphi_N(x)} \to 0, \qquad x \to a, \quad x \in M,$$

но ничего не говорится о поведении остаточного члена $R_N(x)$ при $N \to \infty$ (ср. с определением сходящегося ряда!).

Разумеется, сходящиеся ряды также являются асимптотическими, например $e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \to 0)$. Однако термин «асимптотический ряд» обычно употребляется по отношению к рядам, которые расходятся или же сходимость которых не удается установить.

Важным свойством асимптотического разложения является его единственность.

Теорема 1. *Асимптотическое разложение данной функции по данной асимптотической последовательности единственно.*

Доказательство. Допустим, что имеются два асимптотических разложения функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$
$$x \to a, \quad x \in M.$$

Покажем, что тогда $a_n = b_n$ при всех n. По определению,

$$f(x) - a_0\varphi_0(x) = o(\varphi_0(x)), \quad f(x) - b_0\varphi_0(x) = o(\varphi_0(x))$$

(всюду предполагается, что $x \to a$, $x \in M$). Вычитая эти равенства, получаем $(a_0 - b_0)\varphi_0(x) = o(\varphi_0(x))$. Поделив обе части последнего равенства на $\varphi_0(x)$, получаем $a_0 - b_0 = o(1)$, и переходя к пределу при $x \to a$, $x \in M$, получаем, что $a_0 = b_0$. Покажем, что $a_1 = b_1$. Имеем

$$f(x) - a_0\varphi_0(x) - a_1\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)),$$
$$f(x) - a_0\varphi_0(x) - b_1\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)),$$

откуда следует, что $(a_1 - b_1)\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x))$, и потому $a_1 = b_1$. Аналогично доказывается, что $a_n = b_n$ при любом n.

Заметим, что разные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение. Например,

$$e^{-x} \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots, \quad x \to +\infty$$

(так как e^{-x} убывает быстрее любой степени x при $x \to +\infty$),

$$0 \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

3. Операции над степенны́ми асимптотическими рядами. Асимптотическое разложение по степенно́й асимптотической последовательности (см. примеры 1—4) называется *степенным асимптотическим рядом*. С этими рядами можно обращаться точно так же, как и со сходящимися степенны́ми рядами, т. е. складывать почленно, перемножать и т. д. Приведем основные правила действий над степенными асимптотическими рядами. Ниже предполагается, что $z \to \infty$, $z \in S$, где S — сектор вида $|z| \geqslant R$, $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi)$; в частности, S может быть лучом или же внешностью круга $|z| \geqslant R$.

1. Теорема 2. *Пусть при* $z \to \infty$, $z \in S$ *справедливы асимптотические разложения*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Тогда при $z \to \infty$, $z \in S$,

а) $$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n};$$

б) $$f(z)\,g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n};$$

в) $$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}, \quad \text{если} \quad b_0 \neq 0.$$

Коэффициенты c_n, d_n вычисляются по тем же формулам, что и для сходящихся степенны́х рядов.

Докажем, например, б). Остальные утверждения доказываются аналогично. Для любого целого $N \geqslant 0$ имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + O(z^{-N-1}), \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n} + O(z^{-N-1}),$$

поэтому

$$f(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^{-n} + O(z^{-N-1}), \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

2. Степенны́е асимптотические ряды можно интегрировать почленно. Именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x > 0$ и*

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{-n}, \qquad x \to +\infty.$$

Тогда

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1}\, x^{-n+1}, \qquad x \to +\infty.$$

Доказательство. Имеем при любом целом $N \geqslant 2$

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt = \int_x^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{N} a_n t^{-n} + R_N(t) \right) dt = \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{n-1}\, x^{-n+1} + \int_x^{\infty} R_N(t)\,dt.$$

Так как $|R_N(t)| \leqslant c_N t^{-N-1}$ при достаточно больших t, где c_N — постоянная, то

$$\left| \int_x^{\infty} R_N(t)\,dt \right| \leqslant c_N \int_x^{\infty} t^{-N-1}\,dt = \frac{c_N}{N}\, x^{-N} = O(x^{-N}).$$

3. Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в секторе S: $|z| \geqslant R$, $\alpha < \arg z < \beta$ $(0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi)$ и разлагается в асимптотический ряд*

$$f(z) \sim \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad z \to \infty, \quad z \in S.$$

Тогда при $z \to \infty$, $z \in \tilde{S}$, *где* $\tilde{S}$ — *любой замкнутый сектор, лежащий строго внутри* S, *справедливо асимптотическое разложение*

$$\int_z^\infty f(\zeta)\, d\zeta \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} z^{-n+1}.$$

Здесь интеграл берется по любому пути, лежащему в секторе S.

4. Дифференцировать почленно асимптотический ряд, вообще говоря, нельзя. Но если $f(z)$ — регулярная функция, то асимптотический степенной ряд можно почленно дифференцировать.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в секторе* S: $|z| \geqslant R$, $\alpha < \arg z < \beta$ $(0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi)$ *и разлагается в асимптотический ряд*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad z \to \infty, \quad z \in S.$$

Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1}, \quad z \to \infty, \quad z \in \tilde{S},$$

где $\tilde{S}$ — *любой замкнутый сектор, лежащий внутри* S.

Доказательство. Пусть $\tilde{S}$ — сектор $\alpha_1 \leqslant \arg z \leqslant \beta_1$, $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. При любом $z \in \tilde{S}$ имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

В качестве γ возьмем окружность $|\zeta - z| = \varepsilon |z|$, лежащую в S, где $0 < \varepsilon < 1$; так как $z \in \tilde{S}$, то ε можно выбрать не зависящим от z. По условию, при любом целом $N \geqslant 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + R_N(z), \quad |R_N(z)| \leqslant c_N |z|^{-N-1}, \quad z \in S,$$

и функция $R_N(z)$ регулярна в секторе S. Имеем

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{N} n a_n z^{-n-1} + \tilde{R}_N(z).$$

Остаточный член оценивается так:

$$|\tilde{R}_N(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{R_N(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leqslant c_N \varepsilon^{-1} |z|^{-1} \max_{\zeta \in \gamma} |\zeta|^{-N-1} \leqslant c'_N |z|^{-N-2},$$

так как $|\zeta| \geqslant (1 - \varepsilon)|z|$ при $\zeta \in \gamma$. Здесь $c'_N > 0$ — постоянная.

§ 43. Метод Лапласа

1. Эвристические соображения. В этом параграфе рассматриваются интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{\lambda S(x)} dx, \tag{1}$$

которые называются *интегралами Лапласа*. Здесь $I = [a, b]$ — конечный отрезок, λ — большой параметр. Тривиальные случаи $f(x) \equiv 0$ или $S(x) \equiv \text{const}$ не рассматриваются.

Всюду в этом параграфе предполагается, что *функция $S(x)$ принимает только действительные значения*. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Пусть функции $f(x)$, $S(x)$ непрерывны при $x \in I$.

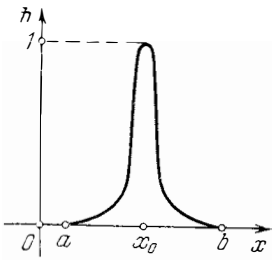


Рис. 157

Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Интегралы Лапласа вычисляются в явном виде в немногих случаях, тем не менее их асимптотику удается вычислить практически всегда. Пусть для простоты наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке I достигается только в одной точке $x_0 \in I$. Рассмотрим два наиболее важных случая.

1. $\max\limits_{x \in I} S(x)$ *достигается только во внутренней точке x_0 отрезка I и $S''(x_0) \neq 0$.*

Ясно, что при больших $\lambda > 0$ величина интеграла определяется в первую очередь экспонентой $e^{\lambda S(x)}$. Рассмотрим функцию

$$h(x, \lambda) = e^{\lambda(S(x) - S(x_0))}.$$

По условию, $h(x_0, \lambda) = 1$ и $h(x, \lambda) < 1$ при $x \neq x_0$, $\lambda > 0$. С ростом λ максимум в точке x_0 становится все более и более «острым» (рис. 157). Поэтому значение интеграла (1) будет приближенно равно интегралу по малой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0. В этой окрестности можно приближенно заменить функцию $f(x)$ линейной, а функцию $S(x)$ — квадратичной:

$$f(x) \approx f(x_0), \quad S(x) - S(x_0) \approx \frac{1}{2} S''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Поэтому (при $f(x_0) \neq 0$) имеем

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{(\lambda/2) S''(x_0)(x - x_0)^2} dx. \tag{2}$$

Строгое обоснование этих приближений будет приведено в п. 4.

Делая замену $x-x_0=t/\sqrt{-\lambda S''(x_0)}$ ($S''(x_0)<0$, так как x_0 — точка максимума), получаем, что последний интеграл в (2) равен

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda S''(x_0)}}\int\limits_{-\delta\sqrt{-\lambda S''(x_0)}}^{\delta\sqrt{-\lambda S''(x_0)}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

При $\lambda\to+\infty$ пределы интегрирования стремятся к $\pm\infty$, и этот интеграл стремится к интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}$. Следовательно, асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ имеет вид

$$F(\lambda)\approx f(x_0)\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,e^{\lambda S(x_0)}. \tag{3}$$

2. $\max\limits_{x\in I} S(x)$ *достигается только на конце* $x=a$ *отрезка* I *и* $S'(a)\neq 0$.

Те же соображения, что и выше, показывают, что при больших λ интеграл $F(\lambda)$ приближенно равен интегралу по малому отрезку $[a,\ a+\delta]$. На этом отрезке можно приближенно заменить функции $f(x)$, $S(x)$ линейными:

$$f(x)\approx f(a),\quad S(x)\approx S(a)+(x-a)S'(a),$$

тогда

$$F(\lambda)\approx e^{\lambda S(a)}f(a)\int\limits_{a}^{a+\delta} e^{\lambda(x-a)S'(a)}\,dx.$$

Последний интеграл равен $-\frac{1}{\lambda S'(a)}+\frac{e^{\lambda\delta S'(a)}}{\lambda S'(a)}\sim-\frac{1}{\lambda S'(a)}$, так как $S'(a)<0$. Следовательно, при $\lambda\to+\infty$

$$F(\lambda)\approx\frac{f(a)}{-\lambda S'(a)}\,e^{\lambda S(a)}. \tag{4}$$

Формулы (3), (4) — основные асимптотические формулы для интегралов Лапласа. Перейдем к строгому выводу этих формул.

2. Максимум $S(x)$ на конце интервала. Получим сначала грубую оценку для интегралов Лапласа.

Лемма 1. *Пусть* $I=(a,\ b)$ — *конечный или бесконечный интервал,*

$$S(x)\leqslant C,\quad x\in I, \tag{5}$$

и интеграл (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0>0$. *Тогда при* $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$

$$|F(\lambda)|\leqslant C_1 e^{C\operatorname{Re}\lambda}, \tag{6}$$

где C_1 — *постоянная.*

Доказательство. При $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$ имеем в силу (5)

$$|e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}| \leqslant C_0 e^{C\operatorname{Re}\lambda}, \quad x \in I,$$

где $C_0 = e^{-\lambda_0 C}$. Следовательно,

$$|F(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)\, e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}\, dx\right| \leqslant C_0 e^{C\operatorname{Re}\lambda} \int_a^b |f(x)|\, e^{\lambda_0 S(x)}\, dx.$$

По условию, последний интеграл сходится, и оценка (6) доказана.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $I = [a, b]$ — конечный отрезок, и что функции $f(x)$, $S(x)$ непрерывны при $x \in I$.

Асимптотические формулы для интегралов Лапласа, как будет показано ниже, пригодны не только при $\lambda \to +\infty$, но и при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, где S_ε — сектор $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ в комплексной плоскости λ. Здесь $0 < \varepsilon < \pi/2$. Отметим, что если $\lambda \in S_\varepsilon$, то

$$|\lambda| \geqslant \operatorname{Re}\lambda \geqslant |\lambda| \sin\varepsilon.$$

Поэтому при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ справедливы оценки:

$$(\operatorname{Re}\lambda)^{-n} = O(|\lambda|^{-n}), \quad n \geqslant 0, \quad |e^{-c\lambda}| = O(|\lambda|^{-N}),$$

где $N > 0$ — любое.

Теорема 1. *Пусть*

$$S(x) < S(a), \quad x \neq a; \quad S'(a) \neq 0, \tag{7}$$

и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности точки $x = a$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1}. \tag{8}$$

Это разложение можно почленно дифференцировать любое число раз. Коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Big|_{x=a}. \tag{9}$$

Главный член асимптотики имеет вид (4) или, более точно,

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(a)}}{-\lambda S'(a)} \left[f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{10}$$

Доказательство. Так как $S'(a) \neq 0$, то можно выбрать $\delta > 0$ такое, что $S'(x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant a + \delta$. Разобьем интеграл (1) на два:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda),$$

где $F_1(\lambda)$ — интеграл по отрезку $[a, a+\delta]$. Оценим $F_2(\lambda)$. Так

как функция $S(x)$ достигает при $x \in I$ наибольшего значения только в точке a, то $S(x) \leqslant S(a) - c$ при $a + \delta \leqslant x \leqslant b$, где $c > 0$ — постоянная. По лемме 1 при $\lambda \in S_\varepsilon$ имеем

$$|F_2(\lambda)| \leqslant c_0 |e^{\lambda(S(a)-c)}|. \tag{11}$$

Поэтому интеграл $F_2(\lambda)$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{\lambda S(a)}$ и, в частности, по сравнению с любым членом $c_n \lambda^{-n-1} e^{\lambda S(a)}$ асимптотического ряда (8).

Интеграл $F_1(\lambda)$, который берется по отрезку $[a, a+\delta]$, проинтегрируем по частям:

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} d\left(e^{\lambda S(x)}\right) = \frac{f(x)\, e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \Big|_a^{a+\delta} + \frac{1}{\lambda} F_{11}(\lambda), \tag{12}$$

$$F_{11}(\lambda) = \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} f_1(x)\, dx, \quad f_1(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right).$$

Внеинтегральная подстановка при $x = a + \delta$ экспоненциально мала по сравнению с $e^{\lambda S(a)}$ (при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$), так как $S(a+\delta) - S(a) < 0$.

Оценим интеграл $F_{11}(\lambda)$. На отрезке $I_1 = [a, a+\delta]$ имеем $S'(x) < 0$, и потому существует постоянная $S_1 > 0$ такая, что $S'(x) \leqslant -S_1$ при $x \in I_1$. По формуле Лагранжа

$$S(x) - S(a) = (x-a) S'(\xi),$$

где $\xi \in (a, a+\delta)$, и

$$S(x) - S(a) \leqslant -S_1 (x-a), \quad S_1 > 0,$$

на отрезке I_1. В силу непрерывности функции $f_1(x)$ имеем: $|f_1(x)| \leqslant M$ при $x \in I_1$. Следовательно,

$$|F_{11}(\lambda) e^{-\lambda S(a)}| \leqslant \int_a^{a+\delta} |f_1(x)|\, |e^{\lambda(S(x)-S(a))}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_a^{a+\delta} e^{-S_1 (x-a) \operatorname{Re} \lambda}\, dx < \frac{M}{S_1 \operatorname{Re} \lambda} \leqslant \frac{c}{|\lambda|}, \quad \lambda \in S_\varepsilon.$$

С учетом этой оценки соотношение (12) можно записать в виде

$$F_1(\lambda) = e^{\lambda S(a)} \left[\frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} + O\left(\lambda^{-2}\right)\right]. \tag{13}$$

Из этого соотношения, оценки (11) и тождества $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ вытекает формула (10) для главного члена асимптотики.

Интеграл $F_{11}(\lambda)$ имеет в точности тот же вид, что и интеграл $F_1(\lambda)$, и

$$F_{11}(\lambda) = \frac{f_1(x)\, e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)}\Bigg|_a^{a+\delta} + \frac{1}{\lambda} F_{12}(\lambda).$$

Интеграл $F_{12}(\lambda)$ имеет тот же вид, что и $F_1(\lambda)$, только

$$f(x) \to f_2(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{S'(x)}\right).$$

Для интеграла $F_{11}(\lambda)$ справедливо соотношение (13), с заменой f на f_1, значит,

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(a)}\left[\frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} + \frac{f_1(a)}{-\lambda^2 S'(a)} + O(\lambda^{-3})\right].$$

Продолжая этот процесс, получаем разложение (8) и формулу (9).

Остается доказать возможность почленного дифференцирования ряда (8). Функция $F(\lambda)$ является целой функцией λ (теорема 1 § 16), и асимптотический ряд (8) можно почленно дифференцировать в силу теоремы 5 § 42.

Пример 1. Рассмотрим преобразование Лапласа функции $f(x)$

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-\lambda x} dx. \tag{14}$$

Будем предполагать, что функция $f(x)$ кусочно непрерывна при $x \geqslant 0$, бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$ и удовлетворяет оценке

$$|f(x)| \leqslant Me^{cx}$$

при $x \geqslant 0$. Покажем, что тогда

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\, \lambda^{-n-1} \tag{15}$$

при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$.

В данном примере $S(x) = -x$, так что $\max\limits_{x \geqslant 0} S(x) = S(0) = 0$, и $S'(0) \neq 0$. Но теорему 1 нельзя непосредственно применить к этому интегралу, так как область интегрирования неограничена.

Разобьем интеграл $F(\lambda)$ на два: $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$, где $F_1(\lambda)$ — интеграл по отрезку [0, 1]. Так как $S(x) = -x \leqslant -1$ при $x \geqslant 1$, то по лемме 1

$$|F_2(\lambda)| \leqslant C|e^{-\lambda}|, \qquad \lambda \in S_\varepsilon,$$

и этот интеграл экспоненциально мал при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$. Применяя к интегралу $F_1(\lambda)$ теорему 1, получаем (15). □

Пример 2. Рассмотрим интеграл вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

и вычислим его асимптотику при $x \to +\infty$. Так как

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

то

$$\Phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(x), \quad F(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

Преобразуем интеграл $F(x)$ к интегралу вида (14).

Делая замену переменной $t = x\tau$ и полагая затем $\tau^2 = 1 + u$, получаем

$$F(x) = \frac{1}{2} xe^{-x^2} \int_0^\infty e^{-x^2 u} (1+u)^{-1/2}\, du.$$

Последний интеграл имеет вид (14), где $\lambda = x^2$, $f = (1+u)^{-1/2}$, так что $f^{(k)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k (2k-1)!!$. Применяя формулу (15), получаем, что при $x \to +\infty$

$$\Phi(x) \sim 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k x^{2k}}. \qquad (16)$$

Эта же формула справедлива при комплексных x, $|x| \to \infty$, $|\arg x| \leqslant \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi/4)$. Действительно, если x лежит в этом секторе, то $\lambda = x^2$ лежит в секторе $S_{2\varepsilon}$: $|\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, в котором справедлива формула (15). □

3. Лемма Ватсона. Асимптотика многих интегралов Лапласа сводится к вычислению асимптотики эталонного интеграла

$$\Phi(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda t^\alpha} t^{\beta-1} f(t)\, dt. \qquad (17)$$

Лемма 2 (лемма Ватсона). *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, функция $f(t)$ непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant a$ и бесконечно дифференци-*

руема в окрестности точки $t=0$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+\beta)/\alpha} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{18}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Прежде чем доказывать эту лемму, докажем формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t^\alpha} t^{\beta-1} dt = \frac{1}{\alpha} \lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{19}$$

при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Здесь $\lambda^{-\beta/\alpha}$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ ветвь, положительная при положительных λ.

Пусть $\lambda > 0$. Делая замену $\lambda t^\alpha = y$, получаем, что стоящий в левой части равенства (19) интеграл равен

$$\lambda^{-\beta/\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{(\beta/\alpha)-1} dy = \frac{1}{\alpha} \lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Этот интеграл — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Правая часть равенства (19) также аналитически продолжается с полуоси $(0, +\infty)$ в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Так как обе функции совпадают на полуоси $(0, +\infty)$, то по принципу аналитического продолжения они совпадают в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство леммы 2. Разобьем интеграл $\Phi(\lambda)$ на два:

$$\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda),$$

где интеграл Φ_1 берется по отрезку $[0, \delta]$, $\delta > 0$ мало́. Так как $-t^\alpha \leqslant -\delta^\alpha < 0$ при $\delta \leqslant t \leqslant a$, то в силу леммы 1 для интеграла $\Phi_2(\lambda)$ справедлива оценка

$$|\Phi_2(\lambda)| \leqslant C \left| e^{-\delta^\alpha \lambda} \right|$$

при $\lambda \in S_\varepsilon$, $|\lambda| \geqslant 1$, и этот интеграл экспоненциально мал. На отрезке $[0, \delta]$ справедливо разложение

$$f(t) = \sum_0 f_n t^n + \psi_N(t),$$

где $f_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, и $|\psi_N(t)| \leqslant C_N t^{N+1}$, $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Поэтому интеграл $\Phi_1(\lambda)$ равен сумме

$$\Phi_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} f_n \Phi_{1n}(\lambda) + R_N(\lambda),$$

где обозначено

$$\Phi_{1n}(\lambda)=\int_0^a t^{n+\beta-1}e^{-\lambda t^\alpha}dt,\quad R_N(\lambda)=\int_0^a \psi_N(t)\,e^{-\lambda t^\alpha}\,dt.$$

Представим $\Phi_{1n}(\lambda)$ в виде разности интегралов по полуосям $(0, +\infty)$ и $(a, +\infty)$. Первый из этих интегралов вычисляется по формуле (19). Второй в силу леммы 1 не превосходит по модулю величины $C\,|e^{-a^\alpha\lambda}|$, так как $-t^\alpha\leqslant -a^\alpha$ при $t\geqslant a$. Окончательно получаем

$$\Phi_{1n}(\lambda)=\frac{1}{\alpha}\lambda^{-(n+\beta)/\alpha}\Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right)+O\left(e^{-a^\alpha\lambda}\right).$$

Наконец, модуль подынтегрального выражения в интеграле $R_N(\lambda)$ не превосходит величины $C_N t^{N+1}\,|e^{-\lambda t^\alpha}|$ и

$$|R_N(\lambda)|\leqslant C_N\int_0^\infty t^{N+\beta}e^{-t^\alpha\operatorname{Re}\lambda}\,dt=C'_N(\operatorname{Re}\lambda)^{-(N+1+\beta)/\alpha}=O\left(|\lambda|^{-(N+\beta+1)/\alpha}\right)$$

при $\lambda\in S_\varepsilon$. Окончательно получаем; что при $\lambda\in S_\varepsilon$

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{N}f_n\Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-(n+\beta)/\alpha}+O\left(|\lambda|^{-\frac{N+\beta+1}{\alpha}}\right)$$

(сумма всех экспоненциально малых величин включена в остаточный член). Тем самым асимптотическое разложение (18) доказано. Возможность почленного дифференцирования разложения (18) доказывается так же, как и в теореме 1.

Пример 3. Вычислим асимптотику при $x\to+\infty$ интеграла

$$K_0(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$$

Интеграл $K_0(x)$ — это одна из функций Бесселя (функция Макдональда).

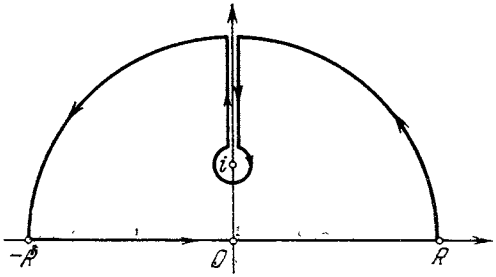


Рис. 158

Непосредственно применить лемму Ватсона к этому интегралу, очевидно, нельзя. Поэтому предварительно продеформируем контур интегрирования. Проведем разрез по лучу $l=[i, +i\infty)$; тогда функция $f(t)=1/\sqrt{1+t^2}$, $f(0)>0$, регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im}t>0$ с разрезом l. При $x>0$ контур интегрирования можно продеформировать в разрез l. Чтобы доказать это, рассмотрим контур $\Gamma_{\rho,R}$ (рис. 158). Этот контур состоит из отрезка $[-R, R]$, дуг $C_R^{\pm}$ окружности $|t|=R$, окружности C_ρ: $|t-i|=\rho$

и интервалов по берегам разреза. Так как $|f(t)| \leqslant c|t|^{-1}$ при $|t| \to \infty$, то интегралы по дугам окружности $|t| = R$ стремятся к нулю при $R \to \infty$ в силу леммы Жордана. Далее, при $t \in C_\rho$ имеем

$$|t^2 + 1| = |(t-i)(t+i)| = \rho|2i + O(\rho)| \geqslant \rho, \quad \rho \to 0;$$

таким образом, подынтегральное выражение имеет порядок $O(1/\sqrt{\rho})$ при $\rho \to 0$, $t \in C_\rho$. Поэтому интеграл по C_ρ стремится к нулю при $\rho \to 0$ и интеграл $K_0(x)$ равен интегралу по разрезу. Покажем, что при $\tau > 1$

$$f(i\tau + 0) = \frac{-i}{\sqrt{\tau^2 - 1}}$$

(это значение функции $f(t)$ на правом берегу разреза). Имеем

$$f(i\tau + 0) = \left|\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\right| e^{-i(1/2)(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(t+i), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(t-i).$$

Здесь кривая γ лежит в верхней полуплоскости и соединяет точки 0, $i\tau + 0$, так что $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = +\pi$. Аналогично,

$$f(i\tau - 0) = i/\sqrt{\tau^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$K_0(x) = -i\int_1^\infty \frac{e^{-x\tau}}{\sqrt{\tau^2-1}}\, d(i\tau) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\tau}}{\sqrt{\tau^2-1}}\, d\tau = e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\, dt}{\sqrt{t(t+2)}}$$

(здесь сделана замена переменной $\tau = t + 1$). К последнему интегралу применима лемма Ватсона (здесь $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$), следовательно,

$$K_0(x) = e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad (x \to +\infty). \quad \square$$

4. Максимум $S(x)$ внутри отрезка.

Теорема 2. *Пусть*

$$S(x) < S(x_0), \quad x \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad S''(x_0) \neq 0 \tag{20}$$

и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности точки x_0. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2}. \tag{21}$$

Это разложение можно дифференцировать почленно любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид (3), *или, точнее,*

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, e^{\lambda S(x_0)} \left[f(x_0) + O(\lambda^{-1}) \right]. \tag{22}$$

Нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть функция $S(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 и*

$$S'(x_0) = 0, \quad S''(x_0) < 0. \tag{23}$$

Тогда существуют окрестности U, V точек $x = x_0$, $y = 0$ соответственно и функция $\varphi(y)$ такие, что

$$S(\varphi(y)) - S(x_0) = -y^2, \quad y \in V, \tag{24}$$

функция $\varphi(y)$ бесконечно дифференцируема при $y \in V$,

$$\varphi'(0) = \sqrt{-\frac{2}{S''(x_0)}}, \tag{25}$$

и функция $x = \varphi(y)$ взаимно однозначно отображает V на U.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$, $S(x_0) = 0$. По формуле Тейлора

$$S(x) = \int_0^x (x - t) S''(t)\, dt = x^2 \int_0^1 (1 - t) S''(xt)\, dt \equiv -x^2 h(x).$$

Если U_0 — малая окрестность точки $x = 0$, то $S''(xt) < 0$ при $x \in U_0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, так как $S''(0) < 0$. Поэтому функция

$$h(x) = \int_0^1 (t - 1) S''(xt)\, dt$$

положительна при $x \in U_0$ и бесконечно дифференцируема. Положим

$$x\sqrt{h(x)} = y, \tag{26}$$

т. е. $x^2 h(x) = y^2$, или, что то же, $S(x) = -y^2$. Здесь $\sqrt{h(x)} > 0$. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{h(x)}\right)\Big|_{x=0} = \sqrt{h(0)} = \sqrt{-\frac{S''(0)}{2}} \neq 0,$$

то по теореме об обратной функции уравнение (26) имеет решение $x = \varphi(y)$, $\varphi(0) = 0$, обладающее указанными в формулировке леммы свойствами.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x_0 = 0$, $S(x_0) = 0$. Выберем малую окрестность $[-\delta_1, \delta_2]$ точки $x = 0$ и разобьем интеграл $F(\lambda)$ на три:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda).$$

Здесь $F_1(\lambda)$ — интеграл по отрезку $[a, -\delta_1]$, $F_2(\lambda)$ — по отрезку $[-\delta_1, \delta_2]$, $F_3(\lambda)$ — по отрезку $[\delta_2, b]$. Так как $S(x) < S(0)$ при $x \in I$, $x \neq 0$, то интегралы $F_1(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ экспоненциально малы при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, т. е.

$$F_j(\lambda) = O(e^{-\lambda c}) \qquad (c > 0), \quad j = 1, 3.$$

Доказывается это так же, как и в теореме 1.

Выберем δ_j так, чтобы $S(-\delta_2) = S(\delta_1)$; имеем $S(\delta_1) = -\varepsilon^2$, где $\varepsilon > 0$, так как $x = 0$ — точка максимума функции $S(x)$, и сделаем в интеграле $F_2(\lambda)$ замену переменной $x = \varphi(y)$:

$$S(\varphi(y)) = -y^2.$$

Это можно сделать в силу леммы 2. Тогда

$$F_2(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2} h(y)\, dy, \quad h(y) = f(\varphi(y))\, \varphi'(y).$$

Далее,

$$F_2(\lambda) = \int_0^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2} g(y)\, dy,$$

где $g(y) = h(y) + h(-y)$.

Остается применить лемму Ватсона к интегралу $F_2(\lambda)$. Здесь $\alpha = 2$, $\beta = 1$, кроме того, функция $g(y)$ — четная, так что $g^{(k)}(0) = 0$ при всех нечетных k. Окончательно получаем для $F_2(\lambda)$ разложение (21), где коэффициенты c_n имеют вид

$$c_n = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h^{(2n)}(0)}{(2n)!}. \tag{27}$$

Здесь мы учли, что $g^{(2n)}(0) = 2h^{(2n)}(0)$. Коэффициент c_0 равен

$$c_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) h(0) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) f(x_0)\, \varphi'(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}\, f(x_0),$$

так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а $\varphi'(0)$ имеет вид (25).

Из доказательства теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\max\limits_{x \in I} S(x)$ *достигается только на конце* $x = a$ *отрезка* I *и* $S'(a) = 0$, $S''(a) \neq 0$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^{-(n+1)/2}. \tag{28}$$

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\, e^{\lambda S(a)} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} \left[f(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]. \tag{29}$$

Пример 4. Рассмотрим гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt.$$

Докажем формулу Стирлинга

$$\Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad x\to+\infty. \tag{30}$$

Этот интеграл не является интегралом вида (1); приведем его к такому виду. Подынтегральная функция $t^x e^{-t}$ достигает наибольшего значения на полуоси $t>0$ в точке $t_0(x)=x$, которая уходит на бесконечность при $x\to+\infty$. Остановим эту точку, сделав замену переменной $t=xt'$. Тогда

$$\Gamma(x)=x^{x+1}\int_0^\infty e^{x(\ln t-t)}\,dt.$$

Последний интеграл имеет вид (1): $\lambda=x$, $S=\ln t-t$, $f(t)\equiv 1$. Точкой максимума является $t_0=1$ и $S(t_0)=-1$, $S''(t_0)=-1$.

Чтобы применить теорему 2, разобьем область интегрирования на три части: (0, 1/2), (1/2, 3/2), (3/2, ∞). Интегралы по первому и третьему интервалам экспоненциально малы по сравнению с $e^{-x}=e^{xS(t_0)}$ в силу леммы 1. Асимптотика интеграла по отрезку [1/2, 3/2] вычисляется по формуле (22), и мы получаем формулу (30).

Из (30) вытекает асимптотическая формула Стирлинга для факториала:

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\quad (n\to+\infty).$$

Асимптотическая формула (30) справедлива также при комплексных z, если $z\to\infty$, $z\in S_\varepsilon$, где S_ε — сектор $|\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon$ [7]. Здесь ε фиксировано, $0<\varepsilon<\pi$. Имеет место более точное асимптотическое разложение для логарифма гамма-функции [22]

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)z^{2n-1}},\qquad z\in S_\varepsilon,\quad z\to\infty,$$

где B_n — числа Бернулли (§ 12, пример 4). Для остаточного члена в формуле (30) доказана следующая оценка:

$$|O(1/x)|\leqslant 1/12x.\quad\square$$

Пример 5. Вычислим асимптотику суммы

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k k!\,n^{-k}$$

при $n \to \infty$. Преобразуем эту сумму в интеграл. Используя тождество $k! n^{-k-1} = \int_0^\infty e^{-nx} x^k \, dx$, получаем

$$F(n) = n \int_0^\infty e^{-nx} (1+x)^n \, dx,$$

откуда $F(n) = n \int_0^\infty e^{nS(x)} \, dx$, где $S(x) = -x + \ln(1+x)$. Функция $S(x)$ на полуоси $x > 0$ достигает максимума только в точке $x = 0$, причем $S(0) = 0$, $S''(0) = -1$. Применяя следствие из теоремы 2, получаем

$$F(n) = \sqrt{\pi n/2}\,(1 + O(1/\sqrt{n})), \quad n \to \infty. \quad \square$$

§ 44. Метод стационарной фазы

1. Постановка задачи. Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} \, dx. \tag{1}$$

Здесь $I = [a, b]$ — конечный отрезок, функция $S(x)$ принимает только действительные значения и λ — большой положительный параметр. Интегралы вида (1) называются интегралами Фурье, а функция $S(x)$ называется *фазой* или *фазовой функцией*. Нас интересует асимптотическое поведение $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Тривиальные варианты $f(x) \equiv 0$ или $S(x) \equiv \text{const}$ не рассматриваются.

Частным случаем интегралов Фурье является преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} \, dx. \tag{2}$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, тогда $F(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Действительно, при больших λ функция $\operatorname{Re}(f(x) e^{i\lambda x})$ сильно осциллирует, и две соседние полуволны имеют примерно одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку площади. Поэтому сумма таких площадей мала, в силу чего мал и весь интеграл

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f(x) e^{i\lambda x}) \, dx.$$

Наиболее общий результат об асимптотическом поведении интегралов вида (2) составляет следующее утверждение:

Лемма Римана — Лебега [13]. *Пусть интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *сходится. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx \to 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

В лемме Римана — Лебега ничего не говорится о скорости стремления интеграла $F(\lambda)$ к нулю. Дело в том, что эта скорость существенно зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$ и может быть сколь угодно медленной. Асимптотические разложения для интегралов Фурье удается получить только для достаточно гладких функций $f(x)$, $S(x)$. Мы ограничимся случаем, когда обе эти функции бесконечно дифференцируемы на отрезке I.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы и* $S'(x) \neq 0$ *при* $x \in I$. *Тогда для интеграла* (1) *при* $\lambda \to +\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{i\lambda}\,e^{i\lambda S(b)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (i\lambda)^{-n} - \frac{1}{i\lambda}\,e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\lambda)^{-n}. \tag{3}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз. Главный член асимптотики имеет вид*

$$F(\lambda) = \frac{f(b)}{i\lambda S'(b)}\,e^{i\lambda S(b)} - \frac{f(a)}{i\lambda S'(a)}\,e^{i\lambda S(a)} + O(\lambda^{-2}). \tag{4}$$

Коэффициенты a_n, b_n *вычисляются по формулам*

$$a_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Big|_{x=a}, \quad b_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Big|_{x=b}, \tag{5}$$

$$M = \frac{1}{S'(x)}\,\frac{d}{dx}.$$

Заметим, что формулы для коэффициентов a_n совпадают с формулами для коэффициентов c_n из (9) § 43.

Доказательство теоремы 1. Проинтегрируем (1) по частям так же, как и в доказательстве теоремы 1 § 43:

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)}\,d\left(e^{i\lambda S(x)}\right) = \frac{1}{i\lambda}\,e^{i\lambda S(x)}\,\frac{f(x)}{S'(x)}\Big|_a^b + \frac{1}{i\lambda}\,F_1(\lambda),$$

$$F_1(\lambda) = -\int_a^b e^{i\lambda S(x)}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)dx.$$

В силу леммы Римана — Лебега имеем $F_1(\lambda) = o(1)$ $(\lambda \to +\infty)$, и формула (4) доказана, но с остаточным членом в виде $o(1/\lambda)$.

Интеграл $F_1(\lambda)$ имеет в точности тот же вид, что и $F(\lambda)$; снова интегрируя по частям, получаем

$$F_1(\lambda) = \frac{f_1(x)}{i\lambda S'(x)} e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b + \frac{1}{i\lambda} F_2(\lambda).$$

Здесь $f_1(x) = -(f(x)/S'(x))'$, а F_2 получается из F_1 заменой f на f_1. Так как $F_2(\lambda) = o(1)$ $(\lambda \to +\infty)$ в силу леммы Римана — Лебега, то $F_1(\lambda) = O(\lambda^{-1})$, и формула (4) доказана полностью. Кроме того, мы доказали, что

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\left[\left(b_0 + \frac{b_1}{i\lambda}\right)e^{i\lambda S(b)} - \left(a_0 + \frac{a_1}{i\lambda}\right)e^{i\lambda S(a)}\right] + \frac{1}{(i\lambda)^2} F_2(\lambda),$$

где коэффициенты a_j, b_j имеют вид (5). Продолжая интегрирование по частям, получаем разложение (3).

Так как интеграл $F(\lambda)$ сходится при любых комплексных λ, то $F(\lambda)$ — целая функция λ (§ 16, теорема 1). Возможность почленного дифференцирования ряда (3) вытекает из теоремы 5 § 42.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть функции $f(x)$ и $S(x)$ непрерывно дифференцируемы k и $k+1$ раз, $k \geqslant 1$, соответственно на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S(b)} \sum_{n=0}^{k-1} b_n (i\lambda)^{-n} - \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{k-1} a_n (i\lambda)^{-n} + o(\lambda^{-k}) \quad (\lambda \to +\infty). \quad (6)$$

Частным случаем этого следствия является асимптотическая оценка для коэффициентов Фурье, известная из курса математического анализа.

Следствие 2. *Пусть функция $f(x)$ k раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и*

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi), \quad 0 \leqslant j \leqslant k. \quad (7)$$

Тогда при $m \to +\infty$

$$c_m = \int_0^{2\pi} e^{imx} f(x)\, dx = o(m^{-k}). \quad (8)$$

Действительно, так как $e^{i2m\pi} = 1$ при m целом, и выполнено условие (7), то в формуле (6) сокращаются все слагаемые, кроме остаточного члена.

С помощью интегрирования по частям можно вычислить асимптотику и некоторых других классов интегралов от быстро осциллирующих функций.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\Phi(x)=\int\limits_x^\infty e^{it^2}\,dt$ и вычислим его асимптотику при $x\to+\infty$. Проинтегрируем по частям:

$$\Phi(x)=\int\limits_x^\infty \frac{1}{2it}\,d\left(e^{it^2}\right)=-\frac{e^{ix^2}}{2xi}+\frac{1}{2i}\int\limits_x^\infty e^{it^2}\frac{dt}{t^2}.$$

Оценим последний интеграл; имеем $\left|\int\limits_x^\infty e^{it^2}\frac{dt}{t^2}\right|\leqslant\int\limits_x^\infty\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x}$.

Итак, мы получили, что при $x\to+\infty$

$$\Phi(x)=-\frac{e^{ix^2}}{2ix}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Оба слагаемые в правой части этого равенства имеют одинаковый порядок, следовательно,

$$\Phi(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty.$$

Чтобы получить более точную оценку, проинтегрируем по частям еще раз:

$$\int\limits_x^\infty t^{-2}e^{it^2}dt=\frac{1}{2i}\int\limits_x^\infty t^{-3}d\left(e^{it^2}\right)=-\frac{1}{2ix^3}e^{ix^2}+\frac{3}{2i}\int\limits_x^\infty t^{-4}e^{it^2}\,dt.$$

Модуль последнего интеграла не превосходит величины

$$\int\limits_x^\infty t^{-4}\,dt=O\left(x^{-3}\right),\quad x\to+\infty.$$

Следовательно,

$$\Phi(x)=\frac{ie^{ix^2}}{2x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),\quad x\to+\infty.$$

Продолжая интегрирование по частям, можно получить асимптотическое разложение (при $x\to+\infty$) для интеграла $\Phi(x)$. Первые два члена разложения имеют вид

$$\Phi(x)=e^{ix^2}\left(\frac{i}{2x}+\frac{1}{4x^3}\right)+O\left(\frac{1}{x^5}\right).\quad\square$$

2. Вклад от невырожденной стационарной точки. В условии теоремы 1 содержится одно важное ограничение: $S'(x)\neq 0$ при $x\in I$, т. е. функция $S(x)$ (фаза) не имеет стационарных точек на отрезке. Если имеются стационарные точки фазы, то асимптотика интеграла $F(\lambda)$ имеет иной характер, чем в теореме 1.

Фаза $S(x)=x^2$ имеет стационарную точку $x=0$. Вблизи этой точки (на интервале порядка $1/\sqrt{\lambda}$) функция $\cos\lambda x^2$ не осциллирует, а сумма площадей остальных волн косинуса имеет порядок $O(\lambda^{-1})$, т. е. существенно меньше. Поэтому интеграл $F(\lambda)$ будет иметь порядок $1/\sqrt{\lambda}$. Облечем эти эвристические соображения в строгую форму.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, a]$ и $\alpha\neq 0$. Тогда при $\lambda\to+\infty$*

$$\Phi(\lambda)=\int_0^a f(x)\,e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|\lambda}}\,e^{i(\pi/4)\delta(\alpha)}f(0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{9}$$

$\delta(\alpha)=\operatorname{sgn}\alpha$.

Доказательство. Пусть $\alpha>0$ и $f(x)\equiv 1$. Делая замену переменной $\sqrt{\alpha\lambda}x=t$, получаем

$$\int_0^a e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}}\int_0^{a\sqrt{\alpha\lambda}} e^{it^2/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}}\left[\int_0^{\infty} e^{it^2/2}\,dt-\int_{a\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{it^2/2}\,dt\right].$$

Первый из интегралов, стоящих в квадратных скобках, есть интеграл Френеля и равен $\frac{1}{2}e^{i\pi/4}\sqrt{2\pi}$ (§ 29). Оставшийся интеграл есть $O(1/\sqrt{\lambda})$ при $\lambda\to+\infty$ в силу примера 1, так что

$$\int_0^a e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}}\,e^{i\pi/4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to+\infty. \tag{10}$$

Пусть $\alpha<0$; тогда

$$\overline{\int_0^a e^{i\alpha x^2}dx}=\int_0^a e^{i\beta x^2}\,dx,$$

где $\beta=-\alpha>0$. Следовательно, формула (10) при $\alpha<0$ остается в силе, если заменить α на $-\alpha=|\alpha|$ и $e^{i\pi/4}$ на $e^{-i\pi/4}$.

Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=f(0)+[f(x)-f(0)]=f(0)+xg(x),$$

где $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ — бесконечно дифференцируемая при $0\leqslant x\leqslant a$ функция. Тогда

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{2}f(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|\lambda}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\delta(a)}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\Phi_1(\lambda), \tag{11}$$

$$\Phi_1(\lambda)=\int_0^a e^{\frac{i}{2}\alpha\lambda x^2}\,xg(x)\,dx.$$

Оценим последний интеграл. Имеем

$$|\Phi_1(\lambda)| = \left|\frac{1}{i\alpha\lambda}\int_0^a g(x)\,d\left(e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|\lambda}\left|g(a)\,e^{(i/2)\alpha\lambda a^2} - g(0) - \int_0^a e^{(i/2)\alpha\lambda x^2} g'(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\alpha|\lambda}\left[|g(a)| + |g(0)| + \int_0^a |g'(x)|\,dx\right] = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to +\infty.$$

Подставляя эту оценку в (11), получаем (9).

Замечание 1. Из доказательства леммы следует, что формула (9) справедлива, если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, a]$.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и функция $S(x)$ имеет единственную стационарную точку $x_0 \in [a, b]$, причем $a < x_0 < b$. Если $S''(x_0) \neq 0$, то для интеграла (1) справедлива формула*

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)} e^{i(\pi/4)\delta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}\, f(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to +\infty. \quad (12)$$

Здесь $\delta_0 = \operatorname{sgn} S''(x_0)$.

Доказательство. Разобьем участок интегрирования на два: $[a, x_0]$, $[x_0, b]$ и соответственно интеграл $F(\lambda)$ на два: $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$. Пусть $S''(x_0) > 0$, для определенности. Тогда $S'(x_0) > 0$ при $x_0 < x \leqslant b$, и функция $S(x)$ монотонно возрастает при $x_0 < x \leqslant b$, т. е. $S(x) > S(x_0)$ на этом интервале. В интеграле $F_2(\lambda)$ (по отрезку $[x_0, b]$) сделаем замену переменной $x = \varphi(t)$ так, чтобы $S(x) - S(x_0) = t^2$ (см. § 43). Тогда

$$F_2(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)} \int_0^{b'} e^{i\lambda t^2} g(t)\,dt.$$

Здесь $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $b' = \sqrt{S(b) - S(x_0)} > 0$. По лемме 1 имеем при $\lambda \to +\infty$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2}\, e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, g(0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

причем $g(0) = f(x_0)\sqrt{\dfrac{2}{S''(x_0)}}$. Точно такая же формула имеет место для интеграла $F_1(\lambda)$, откуда следует (12). Случай

$S''(x_0) < 0$ приводится к случаю $S''(x_0) > 0$:

$$\overline{F(\lambda)} = \int_a^b e^{i\lambda \widetilde{S}(x)} \overline{f(x)}\, dx, \qquad \widetilde{S}(x) = -S(x),$$

и $\widetilde{S}''(x_0) > 0$. Теорема доказана.

Пример 2. Вычислим асимптотику при $x \to +\infty$ функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)}\, d\varphi.$$

Здесь $n \geqslant 0$ — целое число. В данном случае фаза $S(\varphi) = \sin \varphi$, и имеются две стационарные точки фазы $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/2$. При этом

$$S(\varphi_1) = 1,\ S''(\varphi_1) = -1,\ S(\varphi_2) = -1,\ S''(\varphi_2) = 1.$$

Асимптотика интеграла $J_n(x)$ равна сумме вкладов от стационарных точек φ_1, φ_2 (т. е. выражений вида (12)) и слагаемого порядка $O(1/x)$, т. е.

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty. \quad \square$$

3. Формула суммирования Пуассона. Эта формула позволяет заменить ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ другим рядом, а именно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} f(x)\, dx. \tag{13}$$

Формула (13) справедлива, если

а) функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < \infty$;

б) ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ сходится;

в) ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n + x)$ сходится равномерно при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Доказательство формулы (13) при этих и при других условиях см. в [7]. Мы ограничимся формальным выводом формулы (13). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n)$; эта функция периодична с периодом 1. Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{2\pi i k x},$$

откуда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n). \tag{14}$$

Покажем, что из формулы (14) вытекает формула суммирования Пуассона. Имеем

$$\varphi_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx}\varphi(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+x)\,e^{-2\pi ikx}dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,e^{-2\pi ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikx} f(x)\,dx,$$

и подставляя φ_k в (14), получаем (13).

Формулой (13) удобно пользоваться в том случае, когда интегралы

$$\varphi_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx} f(x)\,dx$$

убывают при $n \to \infty$ быстрее, чем $f(n)$ (т. е. если преобразование Фурье функции $f(x)$ убывает при $|x| \to \infty$ быстрее, чем $f(x)$). В частности, этот факт имеет место для быстро осциллирующих функций $f(x)$.

Пример 3. Рассмотрим ряд $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+t^2}}$ и вычислим асимптотику функции $F(t)$ при $t \to \pm\infty$. В данном примере $f(x, t) = e^{i\pi x}/\sqrt{x^2+t^2}$. Применим формулу суммирования Пуассона. Условия а), б) теоремы выполнены, проверим условие в) (при фиксированном $t > 0$). Имеем

$$f'_x(x, t) = \pi i e^{i\pi x}(x^2+t^2)^{-1/2} - xe^{i\pi x}(x^2+t^2)^{-3/2}.$$

Рассмотрим ряд

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k = [(x+k)^2+t^2]^{-1/2}.$$

Так как функции $a_k(x)$ монотонно убывают по k при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$, а частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ограничены, то ряд S_1 сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ по признаку Дирихле [9]. Аналогично доказывается равномерная сходимость при $x \in [0, 1]$ ряда

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x+k)[(x+k)^2+t^2]^{-3/2},$$

а также рядов вида S_1, S_2, где суммирование производится от $-\infty$ до -1. Следовательно, условия а), б), в) выполнены. Применяя формулу (13), получаем

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(t), \quad \varphi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x + \pi i x} (x^2 + t^2)^{-1/2}\, dx.$$

Делая замену $x = ty$, получаем

$$\varphi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\pi(2k-1)y} (y^2 + 1)^{-1/2}\, dy,$$

так что $\varphi_k(t) = 2K_0((2k-1)\pi t)$ (§ 43, пример 3). В примере показано, что $K_0(b)$ — четная функция и что

$$K_0(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, e^{-b}\left[1 + O(b^{-1})\right], \quad b \to +\infty.$$

Следовательно, при $|b| \geqslant 1$

$$|K_0(b)| \leqslant Ce^{-|b|},$$

где C не зависит от b, и

$$|F(t) - \varphi_0(t) - \varphi_1(t)| \leqslant$$

$$\leqslant 4C \sum_{k=2}^{\infty} |K_0((2k-1)\pi t)| \leqslant 4C \sum_{k=2}^{\infty} e^{-(2k-1)\pi t} \leqslant 8Ce^{-3\pi t}.$$

Окончательно получаем, что

$$F(t) = 2\varphi_0(t) + O(e^{-3\pi t}) = 2\sqrt{\frac{1}{2t}}\, e^{-\pi t}\left[1 + O(t^{-1})\right], \quad t \to +\infty. \square$$

§ 45. Метод перевала

1. Предварительные соображения. Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz, \tag{1}$$

где γ — кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости z, функции $f(z)$, $S(z)$ регулярны в некоторой области D, содержащей кривую γ. Нас интересует асимптотика функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Тривиальные случаи $f(z) \equiv 0$ или $S(z) \equiv \text{const}$ не рассматриваются.

В § 43 было показано, что если γ — отрезок, а функция $S(z)$ принимает на γ действительные значения, то асимптотику интеграла (1) можно вычислить с помощью метода Лапласа. Попытаемся преобразовать интеграл (1) так, чтобы к полученному интегралу можно было бы применить метод Лапласа. Так как функции $f(z)$, $S(z)$ регулярны в области D, то можно деформи-

ровать контур γ в области D (оставляя концы контура неподвижными), не меняя значения интеграла $F(\lambda)$. Допустим, что контур γ можно продеформировать в контур $\tilde{\gamma}$ такой, что

1) $\max\limits_{z\in\tilde{\gamma}} |e^{\lambda S(z)}|$ достигается только в одной точке $z_0 \in \tilde{\gamma}$ (z_0 — внутренняя точка контура),

2) $\operatorname{Im} S(z) \equiv \text{const}$ при $z \in \tilde{\gamma}$ в окрестности точки z_0.

Пусть $\tilde{\gamma}_0$ — малая дуга кривой $\tilde{\gamma}$, содержащая точку z_0; тогда $\operatorname{Re} S(z) \leqslant \operatorname{Re} S(z_0) - \delta$, где $\delta > 0$, при $z \in \tilde{\gamma}_0$, $z \in \tilde{\gamma}$. Это следует из того, что $\max\limits_{z\in\tilde{\gamma}} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке z_0 в силу условия 1). Поэтому интеграл по дуге $\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_0$ имеет порядок $O\left(|e^{\lambda(S(z_0)-\delta)}|\right)$ при $\lambda \to +\infty$ (§ 43, лемма 1). Рассмотрим интеграл по дуге $\tilde{\gamma}_0$; пусть $z = \varphi(t)$, $-t_0 \leqslant t \leqslant t_0$, $\varphi(0) = z_0$,— уравнение этой дуги. На $\tilde{\gamma}_0$ в силу условия 2) имеем $\operatorname{Im} S(z) \equiv \operatorname{Im} S(z_0)$, так что интеграл по этой дуге равен

$$F_1(\lambda) = e^{i\lambda \operatorname{Im} S(z_0)} \int\limits_{-t_0}^{t_0} \tilde{f}(t)\, e^{\lambda \tilde{S}(t)}\, dt,$$

где $\tilde{f}(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $\tilde{S}(t) = \operatorname{Re} S(\varphi(t))$. В интеграле $F_1(\lambda)$ функция $\tilde{S}(t)$ принимает только действительные значения, следовательно, интеграл $F_1(\lambda)$ принадлежит к рассмотренному в § 43 классу, и его асимптотику можно вычислить с помощью метода Лапласа.

Заметим еще, что $S'(z_0) = 0$. Действительно, $\dfrac{d}{dt} \operatorname{Im} S(z)\Big|_{t=0} = 0$ в силу условия 2), а так как $\max\limits_{z\in\tilde{\gamma}} \operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке z_0 (условие 1), то $\dfrac{d}{dt} \operatorname{Re} S(z)\Big|_{t=0} = 0$. Следовательно, $\dfrac{d}{dt} S(z)\Big|_{t=0} = 0$, так что $S'(z_0) = 0$.

Точка z_0 такая, что $S'(z_0) = 0$, называется *точкой перевала* функции $S(z)$. Контур, удовлетворяющий условиям 1), 2), обязан проходить через точку перевала функции $S(z)$.

Точно так же вычисляется асимптотика интеграла (1) в случае, когда $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке z_0, которая является концом контура γ. В этом случае z_0 не обязательно является точкой перевала.

Итак, если на контуре γ функция $\operatorname{Re} S(z)$ достигает максимума только в конечном числе точек, которые являются либо точками перевала, либо концами контура (такой контур будем называть перевальным), то асимптотика интеграла (1) вычисляется с помощью метода Лапласа. Наиболее трудной задачей при применении метода перевала является задача об отыскании

перевального контура $\tilde{\gamma}$, эквивалентного исходному контуру γ (эквивалентность контуров γ, $\tilde{\gamma}$ означает, что интегралы вида (1) по этим контурам равны). С помощью метода перевала решено много конкретных задач [7], [10], [12], [21], [22], но сколько-нибудь общие рецепты, позволяющие по данным функциям $f(z)$, $S(z)$ и по данному контуру γ найти эквивалентный перевальный контур $\tilde{\gamma}$, отсутствуют.

Перейдем к строгому выводу асимптотических формул для интеграла (1) по перевальному контуру. Предварительно исследуем локальную структуру линий уровня

$$\operatorname{Re} S(z) = \text{const}, \quad \operatorname{Im} S(z) = \text{const}.$$

2. **Структура линий уровня гармонических функций.** Пусть функция $S(z)$ регулярна в окрестности точки z_0. Исследуем структуру линий уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0) + \varepsilon$, $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0) + \varepsilon$ при малых ε, в окрестности точки z_0.

Лемма 1. *Пусть* $S'(z_0) \neq 0$. *Тогда в малой окрестности точки* z_0 *линии уровня* $\operatorname{Re} S(z) = \text{const}$, $\operatorname{Im} S(z) = \text{const}$ *являются гладкими кривыми.*

Доказательство. Функция $S(z)$ однолистна в точке z_0, так как $S'(z_0) \neq 0$. Поэтому функция $w = S(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает малую окрестность U точки z_0 на малую окрестность V точки $w_0 = S(z_0)$. Выберем U так, чтобы область V была квадратом $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, где $w = u + iv$, $w_0 = u_0 + iv_0$. При этом отображении линии уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$, лежащие в U, переходят в отрезки прямых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, лежащие в V. Эти отрезки, очевидно, являются гладкими кривыми, их прообразы также являются гладкими кривыми, так как функция $z = S^{-1}(w)$, обратная к функции S, регулярна в точке w_0 (теорема 1 § 13). Лемма доказана.

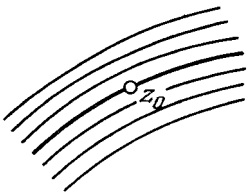


Рис. 159

Таким образом, локальная структура линий уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$ в окрестности точки, которая не является точкой перевала, точно такая же, как и структура этих линий для функции $S(z) = z$ (рис. 159).

Исследуем структуру линий уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$ в окрестности точки перевала. Предварительно рассмотрим простейший случай.

Пример 1. Исследуем линии уровня действительной и мнимой частей функции $S(z) = -z^2$. Точка $z = 0$ является точкой перевала. Полагая $z = x + iy$, $S = u + iv$, получаем $u = y^2 - x^2$,

$v = -2xy$, и семейство линий уровня имеет вид

$$x^2 - y^2 = C_1, \quad 2xy = C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные. Если $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то каждая из кривых $\operatorname{Re} S = C_1$, $\operatorname{Im} S = C_2$ является гиперболой, кривая $u = 0$ состоит из двух прямых $x - y = 0$, $x + y = 0$, кривая $v = 0$ состоит из двух прямых $x = 0$, $y = 0$ (рис. 160). Линии уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(0)$ (т. е. прямые $x \pm y = 0$) делят плоскость на 4 сектора; знаки $\operatorname{Re}(S(z) - S(0))$ в соседних секторах (рис. 160) различны. Пусть D_0 — сектор $|\arg z| < \pi/4$, D_1 — сектор $|\arg(-z)| < \pi/4$; в этих секторах $\operatorname{Re}(-z^2) < 0$. Через точку перевала $z = 0$ проходит линия уровня $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(0)$, а именно, прямая l: $y = 0$. Вдоль этой линии имеем $\operatorname{Re} S(z) = -x^2$, т. е. функция $\operatorname{Re} S(z)$ строго монотонно убывает при удалении точки z вдоль l от точки перевала $z = 0$. Линия l называется *линией наибыстрейшего спуска.* □

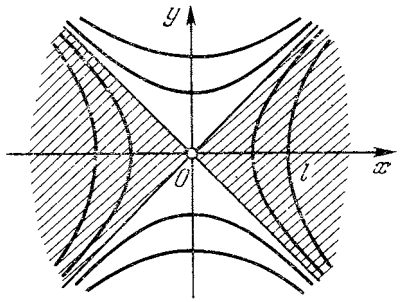


Рис. 160

Рассмотрим трехмерное пространство с координатами $(x, y, \operatorname{Re} S)$ и поверхность $\operatorname{Re} S = \operatorname{Re}(-z^2)$, т. е. $\operatorname{Re} S = y^2 - x^2$. Эта поверхность — гиперболический параболоид (рис. 161), а начало координат — седловая точка. Точно так же устроен перевал в горах, отсюда и происходит название «точка перевала». Линия наиболее крутого спуска с перевала проектируется на плоскость (x, y) в линию наибыстрейшего спуска l.

Покажем теперь, что если z_0 — простая точка перевала функции $S(z)$ (т. е. если $S''(z_0) \neq 0$), то в окрестности этой точки линии уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$ устроены точно так же, как и в случае $S(z) = -z^2$.

Лемма 2. *Пусть z_0 — простая точка перевала функции $S(z)$, т. е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. Тогда в малой окрестности U линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых l_1, l_2, которые ортогональны в точке z_0 и разбивают U на 4 сектора. Знаки функции $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$ в соседних секторах различны.*

Соответствующая картина изображена на рис. 162.

Доказательство. Пусть U — достаточно малая окрестность точки z_0. Тогда существует функция $\varphi(\zeta)$, регулярная в окрестности V точки $\zeta = 0$ и такая, что

$$S(\varphi(\zeta)) = S(z_0) - \zeta^2, \quad \zeta \in V \tag{2}$$

(следствие 2 § 32). Кроме того, $\varphi'(0) \neq 0$, и функция $z = \varphi(\zeta)$

взаимно однозначно отображает V на U. Линии уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$ переходят при отображении $\zeta = \varphi^{-1}(z)$ в линии $\operatorname{Re} \zeta^2 = \text{const}$, $\operatorname{Im} \zeta^2 = \text{const}$, структура которых была исследована выше. Возвращаясь к переменной z, получаем утверждение леммы.

Следствие 1. *Через секторы, в которых* $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, *проходит гладкая кривая* l, *такая, что* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$. *Функция* $\operatorname{Re} S(z)$ *строго монотонно убывает вдоль* l *при удалении* z *от точки* z_0.

Линия l является линией наибыстрейшего спуска (рис. 162 пунктир).

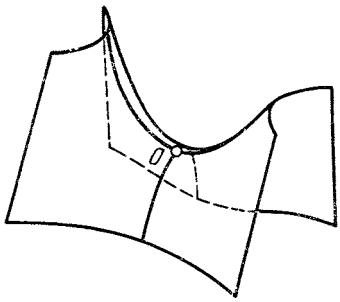


Рис. 161

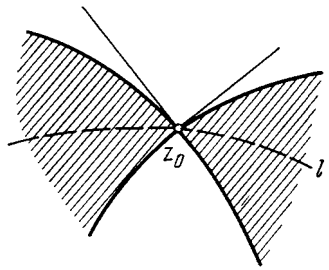


Рис. 162

3. Вклад от конца контура интегрирования. Всюду в дальнейшем предполагается, что γ — конечная кривая и что функции $f(z)$, $S(z)$ регулярны в некоторой области D, содержащей контур γ.

Теорема 1. *Пусть* $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ *достигается только в начальной точке* a *контура* γ, *и* $S'(a) \neq 0$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \equiv \int\limits_{\gamma} f(z)\, e^{\lambda S(z)} dz \sim \lambda^{-1} e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n}. \tag{3}$$

Это разложение можно почленно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{1}{-\lambda S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} \left[f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \tag{4}$$

Коэффициенты c_n *разложения* (3) *вычисляются по формуле*

$$c_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(z)}{S'(z)} \right) \Big|_{z=a}, \qquad M = \frac{1}{S'(z)} \frac{d}{dz}. \tag{5}$$

Заметим, что формулы (3) — (5) полностью совпадают с формулами (8), (9) для интегралов Лапласа (§ 43). Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1 § 43.

4. Вклад от простой точки перевала. Вычислим асимптотику интеграла (1) в случае, когда $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается во внутренней точке контура. Именно, пусть выполнены следующие условия:

а) $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке z_0, которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала (т. е. $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\neq 0$);

б) в окрестности точки z_0 контур γ проходит через оба сектора, в которых $\operatorname{Re} S(z)<\operatorname{Re} S(z_0)$ (рис. 162).

Теорема 2. *Пусть условия а), б) выполнены. Тогда при* $\lambda\to+\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda)\equiv\int\limits_{\gamma} f(z)\,e^{\lambda S(z)}dz\sim e^{\lambda S(z_0)}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^{-n-1/2}. \tag{6}$$

Это разложение можно почленно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\,e^{\lambda S(z_0)}\left[f(z_0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right],\qquad \lambda\to+\infty. \tag{7}$$

Выбор ветви корня в формуле (7), а также формулы для коэффициентов разложения (6) будут указаны ниже.

Доказательство теоремы 2. Пусть U — малая окрестность точки z_0, $\gamma_0=\gamma\cap U$ и γ_1, γ_2 — оставшиеся дуги контура γ. Разобьем интеграл $F(\lambda)$ на три: $F(\lambda)=F_0(\lambda)+F_1(\lambda)+F_2(\lambda)$, где $F_j(\lambda)$ — интеграл вида (1) по дуге γ_j, $j=0,\ 1,\ 2$. Так как $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке $z_0\in\gamma_0$, то точно так же, как и в доказательстве теоремы 2 § 43, можно показать, что для интегралов $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ имеет место оценка

$$|F_j(\lambda)|\leqslant c\left|e^{\lambda(S(z_0)-\delta)}\right|,\qquad \lambda>0,\qquad j=1,\ 2, \tag{8}$$

где c, $\delta>0$ — постоянные.

Получим асимптотическое разложение для интеграла $F_0(\lambda)$. Если область U мала, то существуют окрестность V точки $\zeta=0$ и функция $z=\varphi(\zeta)$ такие, что

а) $S(\varphi(\zeta))=S(z_0)-\zeta^2$, $\zeta\in V$;

б) функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в области V и взаимно однозначно отображает V на U, $\varphi(0)=z_0$.

Это вытекает из следствия 2 § 32. Делая в интеграле $F_0(\lambda)$ замену переменной $z=\varphi(\zeta)$, получаем

$$F_0(\lambda)=e^{\lambda S(z_0)}\int\limits_{\tilde{\gamma}} e^{-\lambda\zeta^2}g(\zeta)\,d\zeta. \tag{9}$$

Здесь $g(\zeta)=f(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta)$, а $\tilde{\gamma}$ — образ контура γ_0. В качестве

V можно взять круг $|\zeta| < \rho$ малого радиуса $\rho > 0$; можно также считать, что функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant \rho$.

Линия уровня $\operatorname{Re}(-\zeta^2) = 0$ состоит из двух прямых: $\xi \pm \eta = 0$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ и разбивает V на 4 сектора. Пусть D_1 — сектор, содержащий интервал l_1: $(0, \rho)$, D_2 — сектор, содержащий интервал l_2: $(-\rho, 0)$. Кривая γ_0, по условию, состоит из двух кривых γ_{01}, γ_{02} (с общей начальной точкой z_0); эти кривые лежат в разных секторах, в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Следовательно, точка $\zeta = 0$ разбивает кривую $\widetilde{\gamma}$ на две кривые $\widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{\gamma}_2$, лежащие в секторах D_1, D_2 соответственно. Пусть C_1 — дуга окружности $|\zeta| = \rho$, которая лежит в секторе D_1, и соединяет концы кривых l_1, $\widetilde{\gamma}_1$. По теореме Коши

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_1} e^{-\lambda\zeta^2} g(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_0^{\rho} e^{-\lambda\zeta^2} g(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{C_1} e^{-\lambda\zeta^2} g(\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{Re}(-\zeta^2) < 0$ на C_1, то существует постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что $\operatorname{Re}(-\zeta^2) \leqslant -\delta_1$ на C_1, и интеграл по кривой $\widetilde{\gamma}_1$ равен сумме интеграла по отрезку $[0, \rho]$ и слагаемого порядка $O(e^{-\lambda\delta_1})$, $\lambda \to +\infty$. Применяя те же рассуждения к интегралу по дуге $\widetilde{\gamma}_2$, получаем, что

$$e^{-\lambda S(z_0)} F_0(\lambda) = \int\limits_{-\rho}^{\rho} e^{-\lambda\zeta^2} g(\zeta)\, d\zeta + O(e^{-\lambda\delta'}), \qquad \lambda \to +\infty, \tag{11}$$

где $\delta' > 0$ — постоянная. В правой части формулы (11) стоит интеграл по отрезку, т. е. интеграл Лапласа (§ 43, (1)), где $S = -\zeta^2$. Далее, $\max\limits_{-\rho \leqslant \zeta \leqslant \rho} S(\zeta)$ достигается только в точке $\zeta = 0$, причем $S''(0) \neq 0$. Применяя теорему 2 § 43, получаем разложение (6). Теорема доказана.

Укажем выбор ветви корня в формуле (7) (который, очевидно, зависит от ориентации контура γ). В доказательстве теоремы 2 было показано, что контур γ можно продеформировать в контур γ', который в окрестности точки перевала z_0 совпадает с линией наибыстрейшего спуска l: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ на l, $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ при $z \in l$, $z \neq z_0$. Покажем, что

$$\arg \sqrt{\frac{1}{-S''(z_0)}} = \varphi_0, \tag{12}$$

где φ_0 — угол между направлением касательной к l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси.

Достаточно ограничиться случаем $f(z) \equiv 1$, $S(z) = \frac{1}{2} az^2$, так как главный член асимптотики выражается только через значения $f(z)$, $S(z)$, $S''(z)$ в точке перевала. Линия наибы-

стрейшего спуска l, проходящая через точку перевала $z=0$ — это прямая (см. п. 2), на которой $\operatorname{Im} S(z)\equiv 0$, а $\operatorname{Re} S(z)<0$ при $z\neq 0$. Запишем ее уравнение в виде $z=e^{i\varphi_0}\rho$, $-\infty<\rho<\infty$; тогда $S(z)=-\frac{1}{2}|a|\rho^2$ при $z\in l$. Интеграл по линии l равен

$$\int_l e^{\lambda a z^2/2}dz = e^{i\varphi_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|a|\rho^2/2}d\rho = e^{i\varphi_0}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|a|}},$$

и формула (12) доказана.

Из доказательства теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $\max\limits_{z\in\gamma}\operatorname{Re} S(z)$ *достигается только в начальной точке* a *контура* γ, *причем* $S'(a)=0$, $S''(a)\neq 0$. *Тогда при* $\lambda\to+\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda)\equiv\int_\gamma f(z)\,e^{\lambda S(z)}dz \sim e^{\lambda S(a)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (13)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,e^{\lambda S(a)}\left[f(a)+O(\lambda^{-1})\right],\quad \lambda\to+\infty. \qquad (14)$$

Выбор ветви корня тот же, что и в (10).

Следствие 2. *Пусть* $\max\limits_{z\in\gamma}\operatorname{Re} S(z)$ *достигается в конечном числе точек* $z_1, z_2, \ldots, z_m$, *которые либо являются концами контура, либо точками перевала и внутренними точками контура, удовлетворяющими условию* б) *теоремы* 2. *Тогда асимптотика интеграла* (1) *при* $\lambda\to+\infty$ *равна сумме вкладов от точек* $z_1, \ldots, z_m$.

Замечание 1. Если все точки z_j, в которых $S'(z_j)=0$, являются простыми точками перевала, то асимптотика интеграла (1) вычисляется с помощью формул (3), (6), (13) (главный член асимптотики — с помощью формул (4), (7), (14)). Можно вычислить асимптотику и в том случае, когда среди точек есть кратные точки перевала (см. [7], [10], [22]).

5. Примеры.

Пример 2. Вычислим асимптотику при $x\to+\infty$ функции Эйри — Фока

$$\operatorname{Ai}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{t^3}{3}+tx\right)dt.$$

Прежде всего преобразуем этот интеграл. Имеем

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{t^3}{3}+tx\right)}\,dt \tag{15}$$

(функция $\sin\left(\frac{t^3}{3}+tx\right)$ нечетна, и потому интеграл от нее по действительной оси равеп нулю). Интеграл (15) является условно сходящимся; преобразуем его в абсолютно сходящийся интеграл.

Рассмотрим прямую l_{η_0}: $-\infty<\xi<\infty$, $\eta=\eta_0$ в комплексной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, параллельную действительной оси. На прямой l_{η_0} имеем

$$\mathrm{Re}\,S\,(\zeta,\,x) = -\,\xi^2\eta_0 + \frac{\eta_0^3}{3} - x\eta_0, \tag{16}$$

где $S\,(\zeta,\,x) = i\left(\frac{\zeta^3}{3}+x\zeta\right)$. Следовательно, $\int\limits_{l_{\eta_0}} e^{S(\zeta,\,x)}d\xi$ сходится абсолютно, если $\eta_0>0$. Можно показать, что интеграл (15) равен интегралу по прямой l_{η_0}, при любом $\eta_0>0$, т. е.

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_{\eta_0}} e^{S(\zeta,x)}d\xi. \tag{17}$$

Функция $S(\zeta,\,x)$ при каждом фиксированном $x>0$ имеет ровно две точки перевала $\zeta_1(x)=i\sqrt{x}$, $\zeta_2(x)=-i\sqrt{x}$. Выберем в качестве l_{η_0} прямую, проходящую через точку перевала $\zeta_1(x)$, т. е. положим $\eta_0=\sqrt{x}$. Сделаем замену переменной $\xi=\sqrt{x}\widetilde{\xi}$ в интеграле (17), чтобы привести его к виду (1). Тогда

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x^{3/2}\widetilde{S}(\widetilde{\xi})}d\widetilde{\xi}, \quad \widetilde{S}\,(\widetilde{\xi}) = i\left[\frac{(\widetilde{\xi}+i)^3}{3}+\widetilde{\xi}+i\right]. \tag{18}$$

На контуре интегрирования лежит точка перевала $\widetilde{\xi}=0$ функции $\widetilde{S}(\widetilde{\xi})$. Далее, при действительных $\widetilde{\xi}$ имеем

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{S}(\widetilde{\xi}) = -\widetilde{\xi}^2 - 2/3, \tag{19}$$

так что $\max \mathrm{Re}\,\widetilde{S}(\widetilde{\xi})$ на коптуре интегрировапия достигается только в точке перевала $\widetilde{\xi}=0$. Эта точка перевала — простая, так как $\widetilde{S}''\,(0)=-2\neq 0$.

Таким образом, для интеграла (18) все условия теоремы 2 выполнены, за исключением одного: контур интегрирования — бесконечная прямая. Разобьем участок интегрирования на три:

лучи $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ и отрезок $[-1, 1]$. В силу (19) имеем

$$\left|\int_1^\infty e^{x(3/2)\widetilde{S}(\widetilde{\xi})}\,d\widetilde{\xi}\right| \leqslant e^{-(2/3)x^{3/2}} \int_1^\infty e^{-x^{3/2}\frac{\xi}{\xi}^2}\,d\widetilde{\xi}.$$

В силу леммы 1 § 43 последний интеграл есть $O\left(e^{-x^{3/2}}\right)$ $(x \to +\infty)$, так как $-\widetilde{\xi}^2 \leqslant -1$ при $\widetilde{\xi} \geqslant 1$, так что интеграл по лучу $1 \leqslant \widetilde{\xi} < \infty$ экспоненциально мал по сравнению с функцией $e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$ при $x \to +\infty$. Точно так же оценивается интеграл по лучу $-\infty \leqslant \widetilde{\xi} \leqslant 1$.

Асимптотика интеграла по отрезку $[-1, 1]$ вычисляется с помощью теоремы 2; главный член асимптотики вычисляется по формуле (7). Имеем $\widetilde{S}(0) = -2/3$, $\widetilde{S}''(0) = -2$, и остается указать выбор ветви корня в формуле (7). Имеем

$$\widetilde{S}(\zeta) - \widetilde{S}(0) \sim -\widetilde{\zeta}^2, \quad \widetilde{\zeta} \to 0,$$

где $\widetilde{\zeta} = \widetilde{\xi} + i\widetilde{\eta}$. Поэтому линия наибыстрейшего спуска l, проходящая через точку перевала $\widetilde{\zeta} = 0$ функции $\widetilde{S}(\widetilde{\zeta})$, имеет в точке $\widetilde{\zeta} = 0$ ту же касательную, что и линия наибыстрейшего спуска l_0, отвечающая функции $-\widetilde{\zeta}^2$. Уравнение l_0 имеет вид $\widetilde{\zeta} = \rho$, $-\infty < \rho < \infty$, т. е. $\varphi_0 = 0$ в формуле (12). Окончательно получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} [1 + O(x^{-3/2})], \quad x \to +\infty. \tag{20}$$

В данном случае можно вычислить все коэффициенты асимптотического ряда (см. [22]). Асимптотика функции Эйри — Фока при $x \to -\infty$ будет вычислена в примере 4. □

Пример 3. Вычислим асимптотику при действительных $x \to \infty$ интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^{2n}}{2n} + ixt}\,dt, \tag{21}$$

где $n \geqslant 1$ — целое число. Так как

$$F(-x) = \overline{F(x)} \tag{22}$$

при действительных x, то достаточно вычислить асимптотику интеграла (21) при $x \to +\infty$. С помощью замены переменной $x^{-1/(2n-1)}t \to t$ приведем интеграл $F(x)$ к виду (1):

$$F(x) = x^{1/(2n-1)}\Phi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda S(t)}\,dt, \tag{23}$$

где

$$\lambda = x^{2n/(2n-1)}, \quad S(t) = -\frac{t^{2n}}{2n} + it. \tag{24}$$

Точки перевала функции $S(t)$ определяются из уравнения $t^{2n-1} = i$ и имеют вид

$$t_k = e^{i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \frac{(\pi/2) + 2k\pi}{2n-1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n-2. \tag{25}$$

Следовательно,

$$S(t_k) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) it_k, \quad \operatorname{Re} S(t^k) = \left(\frac{1}{2n} - 1\right) \sin \varphi_k. \tag{26}$$

Поэтому $\operatorname{Re} S(t_k) < 0$, если точка t_k лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости t, и $\operatorname{Re} S(t_k) > 0$, если точка t_k лежит в нижней полуплоскости.

Интеграл (21) стремится к нулю при $x \to +\infty$ в силу леммы Римана — Лебега (§ 44). Следовательно, точки t_k, лежащие в нижней полуплоскости, не могут давать вклада в асимптотику интеграла $\Phi(\lambda)$, так как значение модуля подынтегральной функции $\left|e^{\lambda S(t_k)}\right| = e^{\lambda \operatorname{Re} S(t_k)}$ в такой точке перевала экспоненциально растет при $x \to +\infty$. Поэтому асимптотика интеграла $\Phi(\lambda)$ должна определяться точками перевала t_k, лежащими в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$.

Так как на контуре интегрирования нет точек перевала функции $S(t)$, то необходимо продеформировать этот контур в перевальный. При $|t| \to \infty$ имеем $S(t) \sim -t^{2n}/(2n)$, т. е. $\operatorname{Re} S(t) \to -\infty$, когда $|t| \to \infty$ в секторах $|\arg t| < \pi/(2n)$, $|\arg t - \pi| < \pi/(2n)$, содержащих действительную ось. Кроме того, на каждой прямой $\operatorname{Im} t = c$ (c — постоянная) имеем $\operatorname{Re} S(t) \sim -\frac{1}{2n} (\operatorname{Re} t)^{2n}$ ($\operatorname{Re} t \to \pm\infty$); следовательно, интеграл вида (23), взятый по прямой $\operatorname{Im} t = c$, сходится абсолютно. Нетрудно показать, что

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_{\operatorname{Im} t = c} e^{\lambda S(t)} dt$$

при любом c. Конечно, кроме прямых $\operatorname{Im} t = c$ существуют и другие контуры γ, эквивалентные действительной оси; например, в качестве γ можно взять любую простую бесконечную кривую, которая имеет своими асимптотами лучи $\arg t = \alpha$, $|\alpha| < \frac{\pi}{2n}$, и $\arg(-t) = \beta$, $|\beta| < \frac{\pi}{2n}$. Однако перевальный контур содержится среди прямых, параллельных действительной оси.

Заменим контур интегрирования в интеграле $\Phi(\lambda)$ прямой $\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0$, проходящей через точку перевала $t_0 = e^{i\pi/(2(2n-1))}$. На этой прямой лежит еще одна точка перевала, а именно, $t =$

$= -\bar{t}_0$. Покажем, что $\max \operatorname{Re} S(t)$ на прямой l: $\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0$ достигается только в точках перевала t_0, $-\bar{t}_0$. Имеем $t = \xi + i\eta_0$, $\eta_0 = \operatorname{Im} t_0$ на прямой l, так что $\operatorname{Re}(it) = -\eta_0 = \text{const}$. Точки экстремума функции $\operatorname{Re}[(\xi + i\eta_0)^{2n}]$ определяются из уравнения

$$0 = \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re}\left[(\xi + i\eta_0)^{2n}\right] = 2n \operatorname{Re}(\xi + i\eta_0)^{2n-1},$$

следовательно,

$$(\xi + i\eta_0)^{2n-1} = iy \tag{27}$$

в точке экстремума, где y — действительное число. Пусть $y > 0$; тогда

$$\xi + i\eta_0 = y^{1/(2n-1)} e^{i\varphi_k}, \quad e^{i\varphi_k} = \sqrt[2n-1]{i}.$$

Отсюда находим, что в точках экстремума

$$\xi = \eta_0 \operatorname{ctg} \varphi_k, \quad \xi + i\eta_0 = \frac{\eta_0}{\sin \varphi_k} e^{i\varphi_k},$$

$$-\operatorname{Re}(\xi + i\eta_0)^{2n} = -\operatorname{Re}\left[\frac{\eta_0^{2n}}{(\sin \varphi_k)^{2n}} e^{i2n\varphi_k}\right] = \frac{\eta_0^{2n}}{(\sin \varphi_k)^{2n-1}},$$

так как $e^{i(2n-1)\varphi_k} = i$. Поскольку $\varphi_k = \dfrac{(\pi/2) + 2k\pi}{2n-1}$, то $\max\limits_k (\sin \varphi_k)^{-2n+1}$ достигается при $k = 0$. Этому значению k отвечает точка экстремума $\xi + i\eta_0 = \dfrac{\eta_0}{\sin \varphi_0} e^{i\varphi_0} = t_0$.

Если $y < 0$, то этот случай сводится к случаю $y > 0$, так как

$$(-\xi + i\eta_0)^{2n-1} = -iy,$$

и точка $-\xi + i\eta_0$ лежит на прямой l. Точно так же как и выше, доказывается, что $\max\limits_{t \in l} \operatorname{Re} S(t)$ достигается также в точке $-\bar{t}_0$.

Итак, мы установили, что $\max\limits_{t \in l} \operatorname{Re} S(t)$ достигается только в точках перевала t_0, $-\bar{t}_0$. Как и в примере 1, нетрудно показать, что асимптотика $\Phi(\lambda)$ равна сумме вкладов от этих точек перевала, несмотря на то, что контур интегрирования бесконечен. Имеем из (25), (26)

$$S(t_0) = i\left(1 - \frac{1}{2n}\right) e^{i\varphi_0},$$

$$S''(t_0) = -i(2n-1) e^{-i\varphi_0}, \qquad S(-\bar{t}_0) = \overline{S(t_0)},$$

$$S''(-\bar{t}_0) = \overline{S''(t_0)}, \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2(2n-1)}. \tag{28}$$

Интеграл $\Phi(\lambda)$ асимптотически равен сумме выражений вида (7); остается найти ветви корня $\sqrt{-1/S''(t)}$ в этих формулах.

При малых $|t-t_0|$ имеем

$$S(t)-S(t_0)\sim\frac{1}{2}S''(t_0)(t-t_0)^2,$$

так что уравнение линии наибыстрейшего спуска l_0, которая проходит через точку t_0, имеет вид

$$t=t_0+\rho e^{i\psi_0}+O(\rho^2)\,(\rho\to 0),\quad \psi_0=-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2},$$

что следует из (28). Следовательно, в формуле (7) должно быть

$$\sqrt{-\frac{1}{S''(t_0)}}=\frac{1}{|\sqrt{S''(t_0)}|}e^{i\psi_0},$$

так что вклад от точки t_0 в интеграл $\Phi(\lambda)$ равен

$$V(t_0)=e^{i\lambda S(t_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda(2n-1)}}e^{i\psi_0}\left[1+O(\lambda^{-1})\right].$$

Аналогичные рассуждения можно провести для точки перевала $-\bar{t}_0$, но проще воспользоваться тем обстоятельством, что функция $F(x)$ принимает действительные значения при действительных x. В самом деле, функция $e^{-t^{2n}/(2n)}\sin tx$ — нечетная, и интеграл от нее, взятый по действительной оси, равен нулю. Следовательно,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2n}/(2n)}\cos tx\,dt$$

при действительных x.

Главный член асимптотики имеет вид $\Phi(\lambda)\approx V(t_0)+V(-\bar{t}_0)$, и так как значения $\Phi(\lambda)$ действительны, то $V(-\bar{t}_0)\sim\overline{V(t_0)}$. Следовательно, вклад от точки перевала $-\bar{t}_0$ в асимптотику интеграла $\Phi(\lambda)$ равен

$$V(-\bar{t}_0)=\overline{V(t_0)}[1+O(\lambda^{-1})].$$

Окончательно получаем, что при $x\to+\infty$

$$F(x)=Ae^{-ax^{2n/(2n-1)}}x^{-(n-1)/(2n-1)}\left[\cos\left(bx^{2n/(2n-1)}-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+O(x^{-2n/(2n-1)})\right].\quad(29)$$

Здесь $A=2\sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}}$, $a=\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sin\varphi_0$, $b=\left(1-\frac{1}{2n}\right)\cos\varphi_0$, $\varphi_0=\frac{\pi}{2(2n-1)}$.

Таким образом, интеграл (21) экспоненциально убывает при $x\to\pm\infty$ и имеет бесконечно много действительных нулей. □

6. Метод перевала и метод стационарной фазы. В § 44 рассматривались интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda S(x)} dx$$

по конечному отрезку $[a, b]$, на котором функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Был вычислен главный член асимптотики в случае, когда фаза $S(x)$ имеет единственную стационарную точку x_0, $a < x_0 < b$ и $S''(x_0) \neq 0$.

Пусть, кроме того, функции $f(x)$, $S(x)$ являются значениями функций $f(z)$, $S(z)$, которые регулярны в окрестности отрезка $[a, b]$. Тогда можно показать, что справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim e^{i\lambda S(b)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (i\lambda)^{-n-1} - e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\lambda)^{-n-1} + \\ + e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-\frac{1}{2}}, \quad \lambda \to +\infty. \qquad (30)$$

Здесь коэффициенты a_n, b_n определяются по формуле (5) § 44. Иными словами, асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ равна сумме вкладов от точки перевала и от концов a, b контура интегрирования.

Чтобы доказать это, достаточно продеформировать контур интегрирования — отрезок $[a, b]$ — в контур γ такой, что $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} iS(z)$ достигается только в точках $z = a$, $z = b$ и $z = x_0$. Асимптотика интеграла по контуру γ имеет вид (30) в силу следствия 2 и теорем 1, 2.

Ограничимся случаем квадратичной фазы: $S(x) = x^2$; общий случай исследуется аналогично. Имеем $\operatorname{Re}(iz^2) < 0$ в первом и третьем квадрантах. Заменим контур интегрирования контуром γ, изображенным на рис. 163. Тогда $\operatorname{Re}(iz^2) < 0$ всюду на γ, кроме концов контура a, b и точки перевала $z = 0$; этот контур удовлетворяет условиям следствия 2.

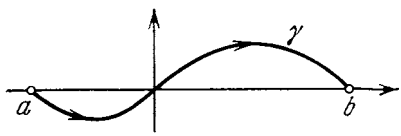


Рис. 163

Таким образом, метод стационарной фазы является частным случаем метода перевала, если подынтегральная функция регулярна.

Замечание 2. Формула (30) справедлива и в том случае, когда функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ (см. [22]).

Пример 4. Вычислим асимптотику при $x \to -\infty$ функции Эйри — Фока (15). Делая замену $\sqrt{|x|}\, t \to t$, получаем

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} F(\lambda), \qquad F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda S(t)}\, dt, \tag{31}$$

где $\lambda = |x|^{3/2}$, $S(t) = i\left(\frac{t^3}{3} - t\right)$. Точки перевала $t_{1,2} = \pm 1$ функции $S(t)$ лежат на контуре интегрирования. Продеформируем контур интегрирования так, чтобы $\max \operatorname{Re} S(t)$ достигался только в точках перевала $t_{1,2}$.

На действительной оси в комплексной плоскости t имеем $\operatorname{Re} S(t) = 0$. Выясним, в каких областях функция $\operatorname{Re} S(t)$ отрицательна. Полагая $t = \xi + i\eta$, получаем, что уравнение $\operatorname{Re} S(t) = 0$ имеет вид $\eta\left(\xi^2 - \frac{\eta^2}{3} - 1\right) = 0$. Поэтому кривая $\operatorname{Re} S(t) = 0$ состоит из действительной оси ($\eta = 0$) и гиперболы $\xi^2 - \frac{\eta^2}{3} - 1 = 0$. Эта кривая изображена на рис. 164 (области, в которых $\operatorname{Re} S(t) < 0$, заштрихованы). Заменим контур интегрирования контуром γ (рис. 164). Так как $t \sim |t|\, e^{i\pi/6}$ на контуре γ при $\operatorname{Re} t \to +\infty$, то $\operatorname{Re} S(t) \sim -\frac{1}{3}|t|^3$ и функция $|e^{\lambda S(t)}|$ экспоненциально убывает при $\operatorname{Re} t \to +\infty$, $t \in \gamma$; то же самое верно и

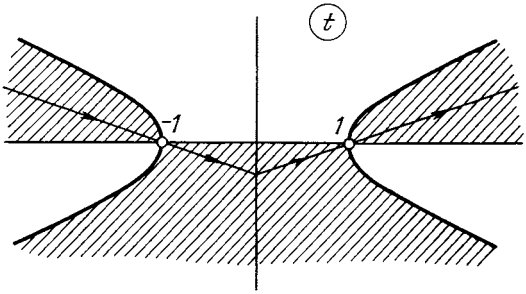


Рис. 164

при $\operatorname{Re} t \to -\infty$, $t \in \gamma$. Можно показать, что интеграл (31) равен интегралу по контуру γ:

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} e^{\lambda S(t)} dt.$$

На контуре γ имеем $\operatorname{Re} S(t) < 0$ всюду, кроме точек перевала $t_{1,2}$, в которых $\operatorname{Re} S(t) = 0$. В силу следствия 2 асимптотика интеграла $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от точек перевала $t_{1,2}$.

Имеем $S(t_{1,2}) = \mp \frac{2}{3} i$, $S''(t_{1,2}) = \pm 2i$, и окончательно получаем

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \left[\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-3/2}\right)\right],$$

$$x \to -\infty. \quad \square$$

§ 46. Метод контурного интегрирования Лапласа

1. Контурное преобразование Лапласа. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с линейными коэффициентами

$$(a_0 z + a_1) w'' + (b_0 z + b_1) w' + (c_0 z + c_1) w = 0, \tag{1}$$

где a_j, b_j, c_j — постоянные. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$w(z) = \int_C e^{\zeta z} v(\zeta)\, d\zeta, \tag{2}$$

где $v(\zeta)$ — неизвестная функция, C — некоторый контур интегрирования, не зависящий от z. Проведем прежде всего формальные выкладки. Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$w'(z) = \int_C e^{\zeta z} \zeta v(\zeta)\, d\zeta, \quad w''(z) = \int_C e^{\zeta z} \zeta^2 v(\zeta)\, d\zeta.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$zw(z) = \int_C v(\zeta)\, de^{\zeta z} = v(\zeta)\, e^{\zeta z}\Big|_C - \int_C e^{\zeta z} v'(\zeta)\, d\zeta,$$

где внеинтегральная подстановка берется на концах контура C. Аналогично доказывается, что

$$zw'(z) = \zeta v(\zeta)\, e^{\zeta z}|_C - \int_C e^{\zeta z} (\zeta v(\zeta))'\, d\zeta,$$

$$zw''(z) = \zeta^2 v(\zeta)\, e^{\zeta z}|_C - \int_C e^{\zeta z} (\zeta^2 v(\zeta))'\, d\zeta.$$

Пусть контур C и функция $v(\zeta)$ выбраны так, что равна нулю внеинтегральная подстановка:

$$(a_0\zeta^2 + b_0\zeta + c_0)\, v(\zeta)\, e^{\zeta z}|_C = 0. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\int_C e^{\zeta z} [(a_1\zeta^2 + b_1\zeta + c_1)\, v(\zeta) - a_0 (\zeta^2 v(\zeta))' - b_0 (\zeta v(\zeta))' - c_0 v'(\zeta)]\, d\zeta = 0.$$

Выберем функцию $v(\zeta)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}\left(a_0\zeta^2 v(\zeta) + b_0\zeta v(\zeta) + c_0 v(\zeta)\right) - \left(a_1\zeta^2 + b_1\zeta + c_1\right) v(\zeta) = 0, \quad (4)$$

тогда функция $w(z)$ будет решением уравнения (1).

Уравнение (4) — линейное однородное уравнение первого порядка, и оно легко интегрируется. Имеем из (4)

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{a_1\zeta^2 + (b_1 - 2a_0)\zeta + (c_1 - b_0)}{a_0\zeta^2 + b_0\zeta + c_0}.$$

Разложим правую часть этого уравнения на простейшие дроби. Рассмотрим два варианта.

1. $a_0 \neq 0$. Будем считать, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$; к этому виду уравнение (1) легко приводится с помощью линейной замены переменной. Пусть уравнение

$$\zeta^2 + b_0\zeta + c_0 = 0 \quad (5)$$

имеет два различных корня ζ_1, ζ_2, тогда

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{p-1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{q-1}{\zeta - \zeta_2}, \quad (6)$$

$$p = \frac{(b_1 - 2)\zeta_1 + (c_1 - b_0) + \zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2},$$

$$q = \frac{(b_1 - 2)\zeta_2 + (c_1 - b_0) + \zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}.$$

Интегрируя уравнение (6), находим

$$v(\zeta) = A(\zeta - \zeta_1)^{p-1}(\zeta - \zeta_2)^{q-1},$$

так что

$$w(z) = A\int_C (\zeta - \zeta_1)^{p-1}(\zeta - \zeta_2)^{q-1} e^{\zeta z} d\zeta. \quad (7)$$

Здесь A — произвольная постоянная, и должно выполняться условие

$$(\zeta - \zeta_1)^p (\zeta - \zeta_2)^q e^{\zeta z}\big|_C = 0. \quad (8)$$

2. $a_0 = 0$. Будем считать, что $a_1 = 1$ и $b_0 \neq 0$. Тогда

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)} = A\zeta + B + \frac{p}{\zeta + c_0/b_0},$$

$$A = \frac{1}{b_0}, \quad B = \frac{b_1}{b_0} - \frac{c_0}{b_0^2}, \quad p = \frac{c_0^2}{b_0^3} - \frac{b_1 c_0}{b_0^2} + \frac{c_1}{b_0} - 1.$$

Интегрируя, получаем $v(\zeta) = ce^{\frac{1}{2}A\zeta^2+B\zeta}\left(\zeta + \frac{c_0}{b_0}\right)^p$, так что

$$w(z) = c\int_C \left(\zeta + \frac{c_0}{b_0}\right)^p e^{\frac{1}{2}A\zeta^2+B\zeta+\zeta z}d\zeta. \tag{9}$$

Если же $a_0 = b_0 = 0$, $a_1 = 1$, то аналогично находим, что

$$w(z) = c\int_c \exp\left[c_0^{-1}\left(\frac{\zeta^3}{3} + \frac{b_1\zeta^2}{2} + c_1\zeta\right) + \zeta z\right]d\zeta, \tag{10}$$

где c — произвольная постоянная.

Чтобы полностью решить уравнение (1), необходимо указать выбор контура C. Два линейно независимых решения уравнения (1) строятся с помощью выбора двух разных контуров C. Предварительно мы рассмотрим одно из простейших уравнений вида (1).

2. Уравнение Эйри. Так называется уравнение

$$w'' - zw = 0. \tag{11}$$

Его решение, в силу (10), имеет вид $w(z) = \int_c e^{\zeta z - \zeta^3/3}d\zeta$, если обращается в нуль внеинтегральная подстановка

$$e^{\zeta z - \zeta^3/3}\Big|_C = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что в качестве C необходимо взять незамкнутый контур интегрирования, так как в противном случае $w(z) \equiv 0$. Далее, контур C должен быть бесконечным, иначе подстановка (12) не будет равна нулю при всех z. Исследуем поведение функции $e^{-\zeta^3/3}$ при $\zeta \to \infty$. Эта функция стремится к нулю вдоль любого луча с началом в точке $\zeta = 0$, лежащего в одном из секторов

$$S_0\colon\ |\arg\zeta| < \pi/6, \quad S_1\colon\ \pi/2 < \arg\zeta < 5\pi/6,$$
$$S_{-1}\colon\ -5\pi/6 < \arg\zeta < -\pi/2.$$

Пусть l_0, $l_{\pm 1}$ — лучи $\arg\zeta = 0$, $\arg\zeta = \pm 2\pi/3$. Рассмотрим контуры $C_1 = l_1 - l_{-1}$, $C_2 = l_0 - l_1$, $C_3 = l_{-1} - l_0$. Любой из них удовлетворяет условию (12), и мы получаем три решения уравнения (11):

$$w_j(z) = \int_{C_j} e^{\zeta z - \frac{\zeta^3}{3}}d\zeta, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Эти решения, конечно, не являются линейно независимыми; из построения контуров C_j следует, что

$$w_1(z) + w_2(z) + w_3(z) \equiv 0. \tag{14}$$

Любые же два из этих решений, как будет показано ниже, линейно независимы.

Наибольший интерес для многих приложений представляет решение $w_1(z)$. Преобразуем его к стандартному виду. С помощью леммы Жордана можно показать, что контур C_1 можно при $\operatorname{Im} z > 0$ продеформировать в мнимую ось, так что

$$w_1(z) = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tz+t^3/3)}dt. \tag{15}$$

Решение $w_1(z)$ отличается от функции Эйри $\operatorname{Ai}(z)$ (§ 41) лишь постоянным множителем.

Решения $w_{2,3}(z)$ можно выразить через $w_1(z)$. Так как контуры $C_2(C_3)$ получаются из контура C_1 поворотом на угол $-2\pi/3(+2\pi/3)$ и так как $(\zeta e^{\pm i2\pi/3})^3 = \zeta^3$, то

$$w_2(z) = e^{-2i\pi/3}w_1(e^{-2\pi i/3}z), \quad w_3(z) = e^{2i\pi/3}w_1(e^{2\pi i/3}z).$$

3. Уравнение (1) в случае $a_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$zw'' + (b_0z + b_1)w' + (c_0z + c_1)w = 0. \tag{16}$$

Пусть корни ζ_1, ζ_2 уравнения (5) различны, тогда интеграл (7) есть решение уравнения (16), если выполнено условие (8). Выберем контур C так, чтобы это условие выполнялось. Точки ζ_1, ζ_2 являются точками ветвления подынтегральной функции, если p, q — нецелые. Фиксируем точку ζ_0, отличную от точек ζ_1, ζ_2, и совершим следующие обходы: 1) вокруг ζ_1 в положительном направлении; 2) вокруг ζ_2 в положительном направлении; 3) вокруг ζ_1 в отрицательном направлении; 4) вокруг ζ_2 в отрицательном направлении. Тогда получим замкнутый контур C (рис. 165). После первого обхода исходное значение функции $(\zeta-\zeta_1)^{p-1}(\zeta-\zeta_2)^{q-1}$ в точке ζ_0 умножится на $e^{2\pi ip}$, после второго — на $e^{2\pi iq}$, после третьего — на $e^{-2\pi ip}$, после четвертого — на $e^{-2\pi iq}$, так что эта функция однозначна на контуре C.

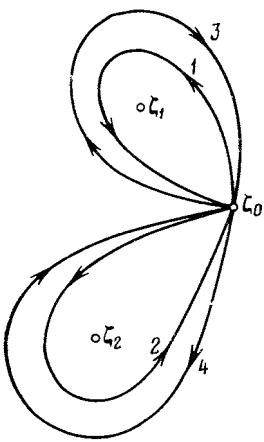


Рис. 165

Напомним, что одно из решений уравнения (16) регулярно в точке $z = 0$ (§ 27), его мы и построили. Второе линейно независимое решение придется строить с помощью другого выбора контура C. Проведем разрезы l_1, l_2 вдоль лучей, идущих из точек ζ_1, ζ_2 налево параллельно вещественной оси (рис. 166). Пусть для простоты $\operatorname{Im}\zeta_1 \neq \operatorname{Im}\zeta_2$. Выберем в качестве C_1, C_2 контуры, которые обходят разрезы в положительном направлении (рис. 166). По теореме о монодромии в плос-

кости с разрезами l_1, l_2 функция $(\zeta-\zeta_1)^{p-1}(\zeta-\zeta_2)^{q-1}$ распадается на регулярные ветви; фиксируем одну из этих ветвей. Положим

$$w_j(z)=\int\limits_{C_j}(\zeta-\zeta_1)^{p-1}(\zeta-\zeta_2)^{q-1}e^{\zeta z}\,d\zeta,\qquad j=1,2. \tag{17}$$

Покажем, что при $\operatorname{Re} z>0$ эти интегралы сходятся, и условие (8) выполняется. На контуре C_1 имеем $\zeta=\zeta_1-t$, $0<t<\infty$, так что $|e^{\zeta z}|=|e^{\zeta_1 z}|e^{-t\operatorname{Re} z}$, и потому $|e^{\zeta z}|$ экспоненциально убывает при $t\to+\infty$. Фупкция $|(\zeta-\zeta_1)^{p-1}(\zeta-\zeta_2)^{q-1}|$ может при $t\to+\infty$ расти лишь степенным образом, откуда следует сходимость интеграла для $w_1(z)$ при $\operatorname{Re} z>0$. Нетрудно показать, что этот интеграл сходится равномерно в любой полуплоскости вида $\operatorname{Re} z\geqslant a>0$. Следовательно (§ 16, следствие 1), функция $w_1(z)$ (и соответственно $w_2(z)$) регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$.

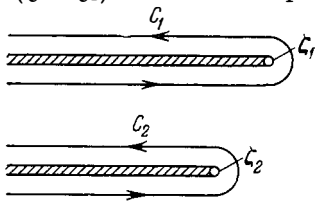


Рис. 166

В § 27 показано, что всякое решение уравнения (16) есть аналитическая функция в комплексной плоскости z с выколотыми точками ζ_1, ζ_2. Мы же доказали аналитичность функций $w_{1,2}(z)$ только в правой полуплоскости. Поворачивая контур интегрирования C_2 так же, как и в § 16 (теорема 6), можно показать, что решение $w_1(z)$ ($w_2(z)$) можно аналитически продолжить на плоскость с разрезом по лучу, вершина которого находится в точке $\zeta_1(\zeta_2)$ и который проходит через точку $\zeta_2(\zeta_1)$.

4. Асимптотика решений. Ограничимся случаем, когда показатели p, q — действительные и нецелые. Ветви функций $(\zeta-\zeta_1)^{p-1}$, $(\zeta-\zeta_2)^{q-1}$ выберем так, чтобы они были положительны при $\zeta-\zeta_1>0$, $\zeta-\zeta_2>0$, т. е. на продолжениях разрезов. Покажем, что при действительных $x\to+\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$\begin{aligned} w_1(x)&\sim e^{\zeta_1 x}x^{-p}\sin\pi p\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{-n},\\ w_2(x)&\sim e^{\zeta_2 x}x^{-q}\sin\pi q\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{-n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты a_n. b_n имеют вид

$$\begin{aligned} a_n&=2i(-1)^n\Gamma(n+p)(\zeta_1-\zeta_2)^{q-n-1}\frac{(q-1)\ldots(q-k)}{k!},\\ b_n&=2i(-1)^n\Gamma(n+q)(\zeta_2-\zeta_1)^{p-n-1}\frac{(p-1)\ldots(p-k)}{k!}. \end{aligned} \tag{19}$$

Выбор ветвей следующий: $|\arg(\zeta_1-\zeta_2)|<\pi$ в первой из формул (19) и $|\arg(\zeta_2-\zeta_1)|<\pi$ во второй.

Для вычисления асимптотики решений воспользуемся леммой Ватсона (§ 43). Рассмотрим решение $w_1(x)$. Сделаем в интеграле (17) замену переменной $\zeta - \zeta_1 = t$, тогда

$$w_1(x) = e^{\zeta_1 x} \int\limits_{(0+)} t^{p-1} (t + \zeta_1 - \zeta_2)^{q-1} e^{xt}\, dt.$$

Контур интегрирования обходит разрез $(-\infty, 0)$ в положительном направлении. Пусть $p > 0$, тогда контур интегрирования можно продеформировать в контур, идущий по берегам разреза. В силу выбора ветви имеем $t^{p-1} = e^{i\pi(p-1)}|t|^{p-1}$ на верхнем и $t^{p-1} = e^{-i\pi(p-1)}|t|^{p-1}$ на нижнем берегах разреза. Следовательно,

$$w_1(x) = 2i \sin \pi p e^{\zeta_1 x} I(x),$$

$$I(x) = \int\limits_0^\infty t^{p-1} (\zeta_1 - \zeta_2 - t)^{q-1} e^{-tx}\, dt.$$

Асимптотика интеграла $I(x)$ при $x \to +\infty$ вычисляется с помощью леммы Ватсона (здесь $\alpha = 1$, $\beta = p$, $f(t) = (\zeta_1 - \zeta_2 - t)^{q-1}$), и мы получаем (18), (19).

Пусть $p < 0$. Проинтегрируем по частям

$$w_1(x)\, e^{-\zeta_1 x} = \frac{1}{p} \int\limits_{(0+)} \varphi(t)\, dt^p = -\frac{1}{p} \int\limits_{(0+)} t^p \varphi'(t)\, dt,$$

$$\varphi(t) = (t + \zeta_1 - \zeta_2)^{q-1} e^{xt}.$$

Если $p > -1$, то асимптотику полученного интеграла можно вычислить тем же методом, что и при $p > 0$. Если же $p > -m$, где $m > 1$ целое, то проинтегрируем по частям еще $(m-1)$ раз, тогда получим интеграл

$$w_1(x) = e^{\zeta_1 x} (-1)^m \frac{1}{p(p+1)\dots(p+m-1)} \int\limits_{(0+)} t^{p+m-1} \varphi^{(m)}(t)\, dt,$$

асимптотика которого вычисляется тем же способом, что и при $p > 0$. Остается показать, что формулы (18), (19) сохраняются и при $p < 0$. Пусть $p > 0$; тогда также можно проинтегрировать по частям m раз. Для полученного интеграла справедливо асимптотическое разложение (18), так как он совпадает с исходным, а асимптотическое разложение единственно. Следовательно, при $p < 0$ формулы (18), (19) сохраняются. Асимптотика решения $w_2(x)$ вычисляется точно так же.

Замечание 1. Формулы (18), (19) справедливы не только при $x \to +\infty$, но и при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, равномерно по $\arg z$ в любом секторе вида $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это следует из леммы Ватсона.

Замечание 2. Асимптотические разложения (18) можно дифференцировать почленно любое число раз.

В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - n^2)w = 0. \tag{20}$$

Сделаем подстановку

$$w = z^n u, \tag{21}$$

тогда для функции $u(z)$ получим уравнение вида (1)

$$zu'' + (2n+1)u' + zu = 0.$$

В этом случае $\zeta_{1,2} = \pm i$, $p = q = n + 1/2$, и мы получаем два линейно независимых решения уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} w_1(z) &= z^n \int_{C_1} (\zeta^2 + 1)^{n-1/2} e^{\zeta z}\, d\zeta, \\ w_2(z) &= z^n \int_{C_2} (\zeta^2 + 1)^{n-1/2} e^{\zeta z}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{22}$$

Контуры C_1, C_2 имеют вид, изображенный на рис. 166, где $\zeta_1 = i$, $\zeta_2 = -i$.

Асимптотические формулы (18), (19) принимают вид

$$w_1(z) \sim \frac{1}{\sqrt{z}} e^{iz} e^{-\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)i} (1 + e^{2\pi n i})\, 2^{n-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - 1/2}{k} \Gamma(n + k + 1/2)\, (i/2z)^k,$$

$$w_2(z) \sim \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-iz} e^{-\frac{3\pi}{2}ni + \frac{3\pi i}{4}} (1 + e^{2\pi n i})\, 2^{n-1/2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - 1/2}{k} \Gamma(n + k + 1/2) \left(-\frac{i}{2z}\right)^k.$$

Эти асимптотические разложения пригодны при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Метод контурного интегрирования Лапласа позволяет решить обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами любого порядка. Решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k0}z + a_{k1})\, w^{(n-k)}(z) = 0$$

ищется в виде (2), и для неизвестной функции $v(\zeta)$ получается линейное однородное уравнение первого порядка, которое легко интегрируется.

5. Разностные уравнения с линейными коэффициентами. Рассмотрим однородное разностное уравнение второго порядка

$$A_n y_{n+2} + B_n y_{n+1} + C_n y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

где A_n, B_n, C_n — заданные числа. Числа y_0, y_1 считаются заданными, так что из рекуррентных соотношений (23) можно последовательно найти y_2, y_3, ... Задача, которую мы рассматриваем, состоит в отыскании явной формулы для общего члена y_n последовательности. Такие формулы известны, если A_n, B_n, C_n — постоянные, т. е. не зависят от номера n [18]. Оказывается, что явные формулы, хотя и не столь простые, можно получить и в том случае, когда коэффициенты уравнения (23) линейные, т. е. для уравнений вида

$$[a_0(n+2)+a_1]y_{n+2}+[b_0(n+1)+b_1]y_{n+1}+(c_0n+c_1)y_n=0. \quad (24)$$

Здесь a_j, b_j, c_j — комплексные постоянные и $(a_0, a_1)\neq(0, 0)$.

Простейший пример уравнения вида (24) — двучленное уравнение

$$[a_0(n+2)+a_1]y_{n+2}+(c_0n+c_1)y_n=0. \quad (25)$$

Положим $y_1=0$, $y_0\neq 0$, тогда все члены последовательности $\{y_n\}$ с нечетными номерами обратятся в нуль $y_{2m+1}=0$, $m=0, 1, 2, \ldots$ Имеем из (25) $y_{2n}=-\dfrac{(2n-2)c_0+c_1}{2na_0+a_1}y_{2n-2}$, откуда находим

$$y_{2n}=\frac{(-1)^n[(2n-2)c_0+c_1][(2n-4)c_0+c_1]\ldots c_1}{(2na_0+a_1)(2(n-1)a_0+a_1)\ldots(2a_0+a_1)}y_0.$$

Преобразуем знаменатель этой дроби. Имеем

$$(2na_0+a_1)\ldots(2a_0+a_1)=$$

$$=2^na_0^n\left(n+\frac{a_1}{2a_0}\right)\ldots\left(1+\frac{a_1}{2a_0}\right)=2^na_0^n\frac{\Gamma\left(n+1+\dfrac{a_1}{2a_0}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{a_1}{2a_0}\right)}.$$

Аналогично преобразуется числитель, и мы получаем

$$y_{2n}=\frac{(-1)^n\Gamma\left(n+\dfrac{c_1}{2c_0}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{a_1}{2a_0}\right)}{\Gamma\left(n+1+\dfrac{a_1}{2a_0}\right)\Gamma\left(\dfrac{c_1}{2c_0}\right)}\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^n y_0. \quad (26)$$

Эта формула получена в предположении, что $a_0\neq 0$, $c_0\neq 0$ и что $\dfrac{a_1}{2a_0}, \dfrac{c_1}{2c_0}+1$ не являются целыми отрицательными числами. Положив $y_0=0$, $y_1\neq 0$, получим последовательность, в которой отличны от нуля только члены с нечетными номерами, и для них можно получить формулу, аналогичную (26). Если $\{y_n^1\}$ — последовательность (26), где $y_0=1$, $y_1=0$, а $\{y_n^2\}$ — последовательность, у которой $y_0=0$, $y_1=1$, то всякое решение урав-

нения (25) имеет вид $\{c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2\}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Используя формулу (26), можно найти асимптотику y_{2n} при $n \to \infty$. Воспользуемся формулой Стирлинга для гамма-функции (§ 43)

$$\Gamma\left(n + 1 + \frac{a_1}{2a_0}\right) \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n-a_1/2a_0} \left(n + \frac{a_1}{2a_0}\right)^{n+a_1/2a_0}, \qquad n \to \infty.$$

Последний сомножитель равен

$$n^{n+\frac{a_1}{2a_0}} \left(1 + \frac{a_1}{2na_0}\right)^{n+a_1/2a_0} \sim n^{n+a_1/2a_0} e^{a_1/2a_0}, \qquad n \to \infty,$$

и окончательно получаем

$$\Gamma\left(n + 1 + \frac{a_1}{2a_0}\right) \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^{n+a_1/2a_0}, \qquad n \to \infty.$$

Аналогично получаем

$$\Gamma\left(n + \frac{c_1}{2c_0}\right) \sim \sqrt{2\pi n}\, n^{n+\frac{c_1}{2c_0}-1} e^{-n}, \qquad n \to \infty,$$

так что

$$y_{2n} \sim (-1)^n n^{\alpha} \left(\frac{c_0}{a_0}\right)^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{a_1}{2a_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{c_1}{2c_0}\right)} y_0, \qquad n \to \infty, \tag{27}$$

$$\alpha = \frac{c_1}{2c_0} - \frac{a_1}{2a_0} - 1.$$

Отсюда следует, что y_{2n} растут (или убывают) при $n \to \infty$ как экспонента.

Вернемся к уравнению (24). Введем *производящую функцию* $w(z)$ последовательности $\{y_n\}$:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n. \tag{28}$$

Если ряд (28) сходится в некотором круге $|z| < r$, то y_n можно выразить через функцию $w(z)$:

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} z^{-n-1} w(z)\, dz, \tag{29}$$

где $0 < \rho < r$.

Выведем дифференциальное уравнение для производящей функции. Умножим n-е уравнение (24) на z^n и просуммируем. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_0 n + c_1) y_n z^n = c_0 z w'(z) + c_1 w(z),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [b_0 (n+1) + b_1] y_{n+1} z^n = b_0 w'(z) + b_1 z^{-1} (w(z) - y_0),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_0 (n+2) + a_1] y_{n+2} z^n = a_0 z^{-1} (w'(z) - y_1) + a_1 z^{-2} (w(z) - y_0 - y_1 z),$$

то для $w(z)$ получаем обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z(c_0 z^2 + b_0 z + a_0) w' + (c_1 z^2 + b_1 z + a_1) w = f(z) \equiv (a_1 + b_1 z) y_0 + (a_0 + a_1) z y_1. \quad (30)$$

Пусть z_1, z_2 — корни уравнения

$$c_0 z^2 + b_0 z + a_0 = 0. \quad (31)$$

Будем предполагать, что эти корни различны и отличны от нуля, тогда

$$\frac{c_1 z^2 + b_1 z + a_1}{z(c_0 z^2 + b_0 z + a_0)} = -\frac{r-1}{z} - \frac{p-1}{z-z_1} - \frac{q-1}{z-z_2}, \quad r = 1 - \frac{a_1}{a_0}. \quad (32)$$

Однородное уравнение (30) (при $y_0 = 0$, $y_1 = 0$) имеет решение

$$w_0(z) = z^{r-1} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{q-1}, \quad (33)$$

и потому всякое решение уравнения (30) имеет вид

$$w(z) = c w_0(z) + \int_{z_0}^{z} \frac{w_0(z)}{w_0(t)} \frac{f(t)}{t(c_0 t^2 + b_0 t + a_0)} dt. \quad (34)$$

Здесь c — постоянная, которую необходимо выбирать так, чтобы функция $w(z)$ была регулярна в точке $z = 0$ в соответствии с (28). Ветви функций $(1 - z/z_1)^{p-1}$, $(1 - z/z_2)^{q-1}$ выбираем так, чтобы при $z = 0$ они были равны единице.

Ограничимся случаем, когда отношение a_1/a_0 — действительное число, и пусть

$$a_1/a_0 > 0, \quad (35)$$

так что $r < 1$. Положим $z_0 = 0$ в (34) и заметим, что

$$\frac{f(t)}{w_0(t)\, t(c_0 t^2 + b_0 t + a_0)} = t^{-r} g(t),$$

где $g(t)$ — регулярная в точке $t=0$ функция, $g(0)=a_1a_0^{-1}y_0$. Поэтому

$$\int_0^z t^{-r}g(t)\,dt = z^{-r+1}h(z),$$

где $h(z)$ — регулярная в точке $z=0$ функция, $h(0)=y_0$. В этом можно убедиться, разложив функцию $g(t)$ в ряд Тейлора по степеням t и проинтегрировав ряд почленно. Положим $c=0$ в (34) и окончательно получим

$$w(z) = \int_0^z \frac{w_0(t)}{w_0(z)} \frac{(a_1+b_1t)\,y_0 + (a_0+a_1)\,ty_1}{t\left(c_0t^2+b_0t+a_0\right)}\,dt, \tag{36}$$

где функция $w_0(z)$ определяется формулой (33). По доказанному выше функция $w(z)$ регулярна в точке $z=0$.

Таким образом, отыскание общего члена последовательности y_n приводится к двум квадратурам (см. (29), (36)). К тому же интеграл (36), вообще говоря, не берется и выражается через гипергеометрическую функцию. Разумеется, если необходимо найти не очень большое число первых членов последовательности $\{y_n\}$, то проще вычислять их непосредственно из рекуррентных соотношений. Формулы (29), (36) интересны главным образом тем, что они позволяют исследовать поведение y_n при $n\to\infty$.

Конечными особыми точками функции $w(z)$ могут быть только точки z_1 и z_2, и потому ряд (28) сходится в круге $|z|<R$, где $R=\min(|z_1|, |z_2|)$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|y_n|}\leqslant 1/R$$

в силу формулы Коши — Адамара. Если же числа p, q нецелые, то функция $w(z)$ будет иметь особенности в точках z_1, z_2, и в этом случае

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|y_n|} = 1/R. \tag{37}$$

В частности, всегда справедлива оценка

$$|y_n|\leqslant C_\varepsilon\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)^n, \qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

при любом ε таком, что $0<\varepsilon<R^{-1}$ с некоторой постоянной C_ε, так что решения уравнения (24) не могут расти быстрее членов некоторой геометрической прогрессии.

Глава VIII

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Одним из важных приложений теории функций комплексного переменного является метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений, основанный на интегральном преобразовании Лапласа (операционный метод). Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции действительного переменного ее изображение — функцию комплексного переменного. При этом операции над изображениями оказываются значительно более простыми, чем операции над исходными функциями (оригиналами). Так, например, линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для оригинала заменяется алгебраическим уравнением для его изображения. Решив полученное для изображения уравнение, восстанавливают по изображению его оригинал, который и является искомым решением заданного дифференциального уравнения.

§ 47. Основные свойства преобразования Лапласа

1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Пусть функция $f(t)$ действительного переменного определена на полуоси $t \geqslant 0$. Ее преобразованием Лапласа называется функция комплексного переменного

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Будем рассматривать комплекснозначные функции $f(t)$, заданные на всей действительной оси t и удовлетворяющие условиям:

1. На любом конечном интервале оси t функция $f(t)$ непрерывна кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

2. $f(t) = 0$ при $t < 0$.

3. Существуют такие постоянные C и α, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}. \tag{2}$$

Функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям 1—3, будем называть *оригиналом*, а ее преобразование Лапласа, т. е. функцию $F(p)$ — *изображением* функции $f(t)$. Связь между изображением и соответствующим оригиналом будем обозначать так:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteqdot f(t).$$

Отметим, что, как правило, для функций, с помощью которых описываются физические процессы, условия 1—3 выполняются.

Пример 1. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt$ определена в области $\operatorname{Re} p > 0$ и $F(p) = -e^{-pt}/p\,\big|_0^\infty = 1/p$. Следовательно,

$$\theta(t) \doteqdot \frac{1}{p}. \quad \square \tag{3}$$

Заметим, что если для функции $g(t)$, удовлетворяющей условиям 1 и 3, не выполняется условие 2, то для функции

$$f(t) = \theta(t)\,g(t) = \begin{cases} g(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

условие 2 выполняется, и, следовательно, эта функция является оригиналом. Например, функции $\theta(t)t$, $\theta(t)e^t$, $\theta(t)\cos t$ — оригиналы.

Условимся в дальнейшем опускать множитель $\theta(t)$ в записи функций, считая эти функции равными нулю при $t < 0$. Например, вместо $\theta(t)$, $\theta(t)t^2$, $\theta(t)\sin t$ будем писать соответственно 1, t^2, $\sin t$. Тогда формула (3) примет вид

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Пример 2. Найдем изображение функции $e^{\lambda t}$, где λ — комплексная постоянная. Интеграл

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}dt$$

сходится в области $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$ и $F(p) = \dfrac{1}{p-\lambda}$. Следовательно,

$$e^{\lambda t} \doteqdot \frac{1}{p-\lambda}. \quad \square \tag{5}$$

Покажем, что преобразование Лапласа есть регулярная в некоторой полуплоскости функция, если $f(t)$ — оригинал. В § 16

было доказано (теорема 3), что если функция $f(t)$ непрерывна на полуоси $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию (2), то функция $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Это утверждение остается в силе и в случае, когда функция $f(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода. Назовем точную нижнюю грань тех значений α, при которых для функции $f(t)$ выполняется условие (2), *показателем роста функции* $f(t)$. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Для всякого оригинала* $f(t)$ *его изображение* $F(p)$ *является регулярной функцией в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, *где* α_0 — *показатель роста функции* $f(t)$.

Следствие. *Если* $f(t)$ — *оригинал, то*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0. \tag{6}$$

Действительно, если α_0 — показатель роста функции $f(t)$ и $s = \operatorname{Re} p$, то $|f(t)| \leqslant c_1 e^{(\alpha_0+\varepsilon)t}$, где $c_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ и

$$|F(p)| \leqslant c_1 \int_0^\infty e^{(\alpha_0+\varepsilon-s)t}\, dt = \frac{c_1}{s-(\alpha_0+\varepsilon)},$$

откуда следует соотношение (6).

2. Свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, то для любых комплексных λ и μ

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \doteqdot \lambda F(p) + \mu G(p).$$

Это свойство следует из определения преобразования Лапласа и линейности интеграла.

Пример 3. Найдем изображения тригонометрических и гиперболических функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\operatorname{sh} \omega t$, $\operatorname{ch} \omega t$. Из равенства $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ и формулы (5) следует, что

$$\sin \omega t \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

так что

$$\sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{7}$$

Из равенства $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ получаем

$$\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{8}$$

Аналогично, используя формулы $\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ и $\operatorname{ch}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$, находим

$$\operatorname{sh}\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch}\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad \square$$

2. Подобие. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Действительно, полагая $\alpha t = \tau$, получаем

$$\int_0^\infty f(\alpha t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}\, d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ — оригиналы и $(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \\ - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (9)$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В самом деле, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt = \left[f(t)\, e^{-pt} \right]\Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt.$$

Если $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, где α_0 — показатель роста $f(t)$, то подстановка при $t = \infty$ дает нуль, и поэтому

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0). \quad (10)$$

Справедливость формулы (9) при любом n устанавливается с помощью индукции.

Формула (9) упрощается, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p)$ и, в частности, $f'(t) \doteqdot pF(p)$, т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение на p его изображения. Это одно из важнейших свойств преобразования Лапласа.

4. Дифференцирование изображения. Если $F(p) \doteqdot f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t). \quad (11)$$

Действительно, так как функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, где α_0 — показатель роста функции $f(t)$, то по

теореме 2 § 16

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt} f(t)\right) dt = \int_0^\infty e^{-pt}(-tf(t))\, dt.$$

Следовательно, $F'(p) \doteq (-t) f(t)$. Общая формула (11) доказывается по индукции.

Пример 4. Найдем изображение функций t^n, $t^n e^{\lambda t}$, $t^n \sin \omega t$, $t^n \cos \omega t$. Из формул (4), (5), (7) и (8) следует, что

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{\lambda t} \doteq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \tag{12}$$

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \doteq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Полагая в (12) $\lambda = i\omega$, получаем

$$t^n e^{i\varphi t} \doteq \frac{n!}{(p-i\omega)^{n+1}} = \frac{n!\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}},$$

откуда находим

$$t^n \cos \omega t \doteq n! \frac{\operatorname{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}},$$

$$t^n \sin \omega t \doteq n! \frac{\operatorname{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$$

(при p действительном). □

5. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \tag{13}$$

Действительно, если $f(t)$ — оригинал, то легко проверить, что функция $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ также является оригиналом, причем $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$. Если $g(t) \doteq G(p)$, то по формуле (10) получаем

$$f(t) = g'(t) \doteq pG(p), \quad \text{т. е.} \quad F(p) = pG(p),$$

откуда следует формула (13).

6. Интегрирование изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$ и если $f(t)/t$ — оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(\zeta)\, d\zeta. \tag{14}$$

В самом деле, пусть $f(t)/t \doteqdot \Phi(p)$. Дифференцируя функцию $\Phi(p)$, регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, получаем

$$\Phi'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = -F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) - \Phi(\infty) = \int_p^\infty F(\zeta)\, d\zeta, \tag{15}$$

где путь интегрирования (p, ∞) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Так как $\Phi(\infty) = 0$ в силу (6), то из (15) следует формула (14).

Пример 5. Найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau}\, dt.$$

Используя формулы (7) и (14), получаем

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

откуда в силу (13) находим

$$\operatorname{si} t \doteqdot \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}. \quad \square$$

7. Запаздывание оригинала. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $f(t) = 0$ при $t < \tau$, где $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p). \tag{16}$$

Действительно, полагая $t - \tau = \xi$, получаем

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty f(t-\tau)\, e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(\xi)\, e^{-p(\tau+\xi)}\, d\xi =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty f(\xi)\, e^{-p\xi} d\xi = e^{-p\tau} F(p),$$

откуда следует формула (16).

Пример 6. Найдем изображение ступенчатой функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (n+1)\, h, & n\tau < t < (n+1)\, \tau, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $\tau > 0$, $h = \text{const}$, $h > 0$.

Заметив, что $f(t) = h[\theta(t) + \theta(t-\tau) + \ldots + \theta(t-k\tau) + \ldots]$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, по свойству запаздывания оригинала

получаем

$$f(t)=h\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\ldots+\frac{1}{p}e^{-kp\tau}+\ldots\right].$$

Пусть $\operatorname{Re} p>0$, тогда $|e^{-p\tau}|<1$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-kp\tau}$ сходится, а его сумма равна $1/(1-e^{-p\tau})$.

Следовательно, $f(t)\doteqdot\dfrac{h}{p(1-e^{-p\tau})}$ или

$$f(t)\doteqdot\frac{h}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right). \quad \square$$

Пример 7. Найдем изображение периодической при $t>0$ функции $f(t)$ с периодом $T>0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\begin{cases}f(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & t<0,\ t>T.\end{cases}$$

Тогда

$$f(t)=\varphi(t)+f(t-T). \tag{17}$$

Если $f(t)\doteqdot F(p)$, $\varphi(t)\doteqdot\Phi(p)$, то из равенства (17) в силу свойства запаздывания оригинала получаем

$$F(p)=\Phi(p)+e^{-Tp}F(p),$$

откуда

$$F(p)=\frac{\int\limits_0^T e^{-pt}f(t)\,dt}{1-e^{-Tp}}. \tag{18}$$

Найдем по формуле (18) изображение периодической функции $f(t)=|\sin t|$ с периодом $T=\pi$. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{1+e^{-\pi p}}{1+p^2}.$$

Следовательно,

$$|\sin t|\doteqdot\frac{1+e^{-\pi p}}{(1-e^{-\pi p})(1+p^2)}=\frac{\operatorname{cth}(\pi p/2)}{1+p^2}. \quad \square$$

8. Смещение изображения. Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то для любого комплексного λ

$$e^{\lambda t}f(t)\doteqdot F(p-\lambda).$$

В самом деле, $e^{\lambda t}f(t)\doteqdot\int\limits_0^{\infty}f(t)\,e^{-(p-\lambda)t}dt=F(p-\lambda)$.

Пример 8. Найдем изображение функций $e^{\lambda t}\cos\omega t$ и $e^{\lambda t}\sin\omega t$.

Так как $\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то по правилу смещения изображений

$$e^{\lambda t}\cos\omega t \doteqdot \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \quad e^{\lambda t}\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}. \quad \square$$

9. Изображение свертки. *Сверткой* функций f и g называется функция, которая обозначается $f*g$ и определяется равенством $(f*g)(t)=\int\limits_0^t f(\xi)\,g(t-\xi)\,d\xi$.

Докажем, что при свертывании оригиналов их изображения перемножаются, т. е. если $f(t)\doteqdot F(p)$, $g(t)\doteqdot G(p)$, то

$$(f*g)(t)\doteqdot F(p)\,G(p). \tag{19}$$

Покажем сначала, что $\varphi(t)=(f*g)(t)$ — оригинал. В самом деле, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, так как $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы. Пусть $\gamma=\max(\alpha,\beta)$, где α, β — показатели роста функций $f(t)$ и $g(t)$. Тогда

$$|f(t)|\leqslant Ce^{(\gamma+\varepsilon)t}, \quad |g(t)|\leqslant Ce^{(\gamma+\varepsilon)t},$$

где $C>0$, $\varepsilon>0$, поэтому

$$|\varphi(t)|\leqslant C^2\int\limits_0^t e^{\gamma(\xi+\varepsilon)+\gamma(t+\varepsilon-\xi)}d\xi = C^2te^{\gamma(t+2\varepsilon)}.$$

Фиксируя $\delta>0$, найдем число $C_1>0$ такое, что $C^2t\leqslant C_1e^{\delta t}$ при $t\geqslant 0$. Следовательно, $|\varphi(t)|\leqslant C_1e^{(\gamma+2\varepsilon+\delta)t}$, т. е. $\varphi(t)$ — оригинал.

Заметим, что показатель роста функции $\varphi(t)$ не превосходит наибольшего из показателей роста функций $f(t)$ и $g(t)$, так как ε и δ можно взять сколь угодно малыми.

Найдем изображение $\Phi(p)$ функции $\varphi(t)$. По определению изображения

$$\Phi(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f(\xi)\,g(t-\xi)\,d\xi\right)dt.$$

Так как двойной интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}p>\gamma$, то, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\Phi(p)=\int\limits_0^\infty f(\xi)\,d\xi\int\limits_\xi^\infty e^{-pt}g(t-\xi)\,dt.$$

Полагая $t-\xi=\tau$ во внутреннем интеграле, имеем

$$\Phi(p)=\int_0^\infty e^{-p\xi}f(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau=F(p)\,G(p).$$

Формула (19) доказана.

В заключение приведем таблицу оригиналов и изображений, часто встречающихся в приложениях.

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

§ 48. Восстановление оригинала по изображению

1. Формула обращения преобразования Лапласа.

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ — оригинал, а $F(p)$ — его изображение. Если функция $f(t)$ непрерывна в точке t и имеет в этой точке конечные односторонние производные, то*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp. \tag{1}$$

Интеграл (1) берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = b > \alpha_0$, где α_0 — показатель роста функции $f(t)$, и понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = e^{-bt} f(t)$, где $b > \alpha_0$. Функция $F(b + iu)$ является преобразованием Фурье функции $g(t)$, так как

$$F(b + iu) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(b+iu)t} dt = \int_{-\infty}^\infty g(t)\, e^{-iut} dt.$$

В силу условий теоремы 1 функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на всей прямой, непрерывна в точке t и имеет в этой точке конечные односторонние производные. По теореме об обращении преобразования Фурье [9]

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(b + iu)\, e^{iut} du,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(b + iu)\, e^{(b+iu)t} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{pt} dp.$$

Формула (1) доказана. Ее называют *формулой обращения преобразования Лапласа* или *формулой Меллина.*

Следствие. *Оригинал $f(t)$ однозначно определяется по его изображению $F(p)$ во всех точках, где функция $f(t)$ дифференцируема.*

2. Условия существования оригинала.

Теорема 2. *Пусть функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и удовлетворяет условиям:*

1. *Интеграл* $\int_{-\infty}^\infty |F(a + i\sigma)|\, d\sigma$ *сходится при любом* $a > \alpha$;

2. $M(R) = \max_{p \in \Gamma_R} |F(p)| \to 0$ *при* $R \to \infty$, *где* Γ_R *— дуга окружности:* $|p| = R$, $\operatorname{Re} p \geqslant a > \alpha$.

Тогда $F(p)$ — изображение функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \tag{2}$$

где $a > \alpha$, интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Покажем сначала, что интеграл (2) не зависит от выбора $a\,(a > \alpha)$. В самом деле, интеграл от функции $e^{pt} F(p)$ по границе прямоугольника с вершинами в точках $a \pm ib$,

$a_1 \pm ib$ $(a > \alpha,\ a_1 > \alpha,\ b > 0)$ равен нулю по интегральной теореме Коши. Интегралы по горизонтальным сторонам этого прямоугольника стремятся к нулю при $b \to \infty$ в силу условия 2. Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p)\, dp = \lim_{b\to\infty} \int_{a_1-ib}^{a_1+ib} e^{pt} F(p)\, dp,$$

т. е. интеграл (2) не зависит от a и является функцией одной переменной t.

Докажем, что интеграл (2) является оригиналом заданной функции $F(p)$, т. е. удовлетворяет условиям 1—3 § 47.

Этот интеграл сходится в силу условия 1 и имеет место неравенство

$$|f(t)| \leqslant \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)|\, d\sigma = Ce^{at}. \tag{3}$$

Из (3) следует равномерная сходимость интеграла (2) по параметру t на любом конечном промежутке $[0, T]$ и непрерывность функции $f(t)$ при $t \geqslant 0$.

Покажем, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Рассмотрим замкнутый контур γ_R, состоящий из отрезка $[a - iR,\ a + iR]$ и дуги окружности Γ_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p \geqslant a$. По интегральной теореме Коши интеграл от функции $e^{pt}F(p)$ по контуру γ_R равен нулю, а интеграл по Γ_R стремится к нулю при $R \to \infty$ $(t < 0)$ в силу леммы Жордана (§ 29). Поэтому

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{pt} F(p)\, dp = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp = 0, \quad t < 0.$$

Покажем, что для любого $p_0\,(\operatorname{Re} p_0 > a)$ изображение функции $f(t)$ равно $F(p_0)$. Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp\, dt. \tag{4}$$

Так как $\left|F(p)\, e^{(p-p_0)t}\right| = |F(a + i\sigma)|\, e^{-(\operatorname{Re} p_0 - a)t}$, причем интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)|\, d\sigma$ и $\int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{Re} p_0 - a)t} dt$ сходятся, а внутренний интеграл в (4) сходится равномерно, то можно изменить порядок интегрирования, т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p_0 - p}\, dp. \tag{5}$$

Выберем $R>0$ так, чтобы точка $p=p_0$ оказалась внутри контура γ_R. По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}\frac{F(p)}{p-p_0}\,dp=F(p_0).$$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{F(p)}{p-p_0}\,dp\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M(R)\,2\pi R}{R-|p_0|}\to 0,\qquad R\to\infty.$$

Поэтому, переходя к пределу при $R\to\infty$ в равенстве

$$F(p_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-iR}^{a+iR}\frac{F(p)}{p_0-p}\,dp+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{F(p)}{p-p_0}\,dp$$

и используя (5), получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-p_0 t}f(t)\,dt=F(p_0).$$

Так как p_0 — произвольная точка области $\operatorname{Re}p>a$, то $f(t)\doteqdot F(p)$. Отметим, что формула (2) совпадает с формулой обращения (1).

Пример 1. Найдем с помощью формулы обращения оригинал функции

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}},\quad \alpha>0.$$

Пусть D — плоскость p с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Функция $F(p)$, где $\sqrt{p}$ — регулярная в D ветвь корня, принимающая положительные значения при $\operatorname{Im}p=0$, $\operatorname{Re}p>0$, удовлетворяет при $\operatorname{Re}p>0$ условиям теоремы 2.

Рассмотрим контур Γ_R, состоящий из дуги окружности C_R: $|p|=R$, $\operatorname{Re}p\leqslant a\,(a>0)$, хорды этой окружности l_R: $\operatorname{Re}p=a$, $-\sqrt{R^2-a^2}\leqslant\operatorname{Im}p<\sqrt{R^2-a^2}$, окружности C_ρ: $|p|=\rho<R$ и отрезков, лежащих на берегах разреза γ: $\operatorname{Im}p=0$, $-R\leqslant\operatorname{Re}p\leqslant-\rho$. В силу интегральной теоремы Коши

$$\int\limits_{\Gamma_R}F(p)\,e^{pt}dp=0.\tag{6}$$

Пусть $p=re^{i\varphi}$, тогда на верхнем берегу разреза $\varphi=\pi$, $p=-r$, $\sqrt{p}=i\sqrt{r}$, а на нижнем берегу $\varphi=-\pi$, $p=-r$, $\sqrt{p}=-i\sqrt{r}$. Из (6)

имеем

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} e^{pt}F(p)\,dp+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} e^{pt}F(p)\,dp+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho}^{R} e^{-rt}\,\frac{e^{ia\sqrt{r}}-e^{-ia\sqrt{r}}}{r}\,dr-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} e^{pt}F(p)\,dp. \qquad (7)$$

Так как $\int\limits_{C_R} e^{pt}F(p)\,dp\to 0$ при $R\to\infty$, $t>0$ (лемма Жордана),

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} e^{pt}F(p)\,dp\to f(t)$ при $R\to\infty$ (формула обращения),

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}}\,d\varphi\to 1 \text{ при } \rho\to 0,$$

то переходя в равенстве (7) к пределу при $\rho\to 0$, $R\to\infty$, получим

$$f(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-rt}\,\frac{\sin\alpha\sqrt{r}}{r}\,dr+1. \qquad (8)$$

Полагая в (8) $\sqrt{r}=x$, получаем

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-tx^2}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx+1. \qquad (9)$$

Для вычисления интеграла (9) воспользуемся известным интегралом (§ 29, пример 17)

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx^2}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}. \qquad (10)$$

Обозначим

$$I(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-tx^2}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Тогда из (10) имеем

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\alpha/4t},$$

откуда

$$I(\alpha)=\sqrt{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,e^{-\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)^2}d\xi=\sqrt{\pi}\int_0^{\alpha/2\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau,$$

так как $I(0)=0$. Поэтому формулу (9) можно записать в виде

$$f(t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha/2\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau=1-\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

где

$$\operatorname{erf}(x)=\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-\tau^2}d\tau$$

— функция ошибок (интеграл вероятностей). Полагая $1-\operatorname{erf}(x)=\operatorname{Erf}(x)$, окончательно получаем

$$\frac{1}{p}\,e^{-\alpha\sqrt{p}}\doteqdot\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right).\quad\square \tag{11}$$

3. Теоремы разложения. Оригинал $f(t)$ по заданному отображению $F(p)$ легко найти, если функция $F(p)$ регулярна в бесконечно удаленной точке. В этом случае функцию $F(p)$ можно разложить в ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$:

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}.$$

Заметим, что $C_0=0$, так как $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re}p\to\infty$ (§ 47, (6)).

Теорема 3. *Пусть функция регулярна в точке* $p=\infty$, $F(\infty)=0$ *и пусть ее ряд Лорана в окрестности точки* $p=\infty$ *имеет вид*

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}. \tag{12}$$

Тогда оригиналом функции $F(p)$ *является функция*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\,t^n. \tag{13}$$

Доказательство. Выберем R_0 столь большим, чтобы множество $|p|\geqslant R_0$ не содержало особых точек функции $F(p)$. Так как $p=\infty$ — нуль функции $F(p)$, то существуют $M>0$, $R_1\geqslant R_0$ такие, что

$$|F(p)|\leqslant M/R \text{ при } |p|=R\geqslant R_1.$$

Из неравенств Коши (§ 17) следует, что

$$|c_n| \leqslant MR^{n-1}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \right| \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n |t|^n}{n!} = Me^{R|t|}. \tag{15}$$

В силу (15) ряд (13) сходится во всей плоскости, а его сумма $f(t)$ — целая функция. Ее называют целой функцией *экспоненциального типа.*

Умножим ряд (13) на e^{-pt} и проинтегрируем почленно по t от 0 до ∞. Используя соотношения $t^n \doteqdot n!/p^{n+1}$ и линейность преобразования Лапласа, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} = F(p).$$

Теорему 3 называют *первой теоремой разложения.*

Замечание. Справедлива теорема, обратная теореме 3: если $f(t) = \theta(t) g(t)$ — оригинал, причем $g(t)$ — целая функция экспоненциального типа, то ее изображение $F(p)$ есть функция, регулярная в бесконечно удаленной точке.

Пример 2. Найдем оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{n+k+1}},$$

где n — натуральное число.

По теореме 3 $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}$. Используя формулу для бесселевой функции $t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}$, получаем

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p}. \tag{16}$$

В частности,

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-1/p}. \quad \square \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть мероморфная функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и удовлетворяет условиям:*

1. *Существует система окружностей*

$$C_n\colon\ |p| = R_n,\quad R_1 < R_2 < \ldots,\ R_n \to \infty\ \ (n \to \infty)$$

такая, что $\max\limits_{p \in C_n} |F(p)| \to 0 \quad (n \to \infty)$;

2. *При любом* $a > \alpha$ *интеграл* $\int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)|\,d\sigma$ *сходится. Тогда* $F(p)$ *— изображение, оригиналом для которого служит функция*

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left[F(p)\,e^{pt}\right], \tag{18}$$

где сумма берется по всем полюсам функции $F(p)$.

Доказательство. Функция $F(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, в силу этой теоремы, $F(p)$ — изображение функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{19}$$

Пусть Γ_n — дуга окружности C_n, расположенная слева от прямой $\operatorname{Re} p = a$, $a \pm ib_n$ — точки пересечения C_n с этой прямой, γ_n — замкнутый контур, состоящий из отрезка $[a-ib_n;\ a+ib_n]$ и дуги Γ_n.

Так как интеграл (19) понимается в смысле главного значения и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{20}$$

При $t > 0$ по лемме Жордана $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_n} e^{pt}F(p)\,dp = 0$. Поэтому формулу (20) можно записать в виде

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} e^{pt}F(p)\,dp. \tag{21}$$

Применяя к интегралу (21) теорему о вычетах, получаем формулу (18). Теорему 4 называют второй теоремой разложения.

Следствие. *Если* $F(p) = A_n(p)/B_m(p)$, *где* A_n, B_m *— многочлены степени* n *и* m *соответственно, не имеющие общих нулей, и если* $n < m$, *то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!}\,\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left\{F(p)\,e^{pt}(p-p_k)^{m_k}\right\}\Big|_{p=p_k}, \tag{22}$$

где $p_1, \ldots, p_l$ *— различные нули многочлена* $B_m(p)$, m_k *— кратность нуля* p_k.

Формула (22) получается из (18), если воспользоваться правилом вычисления вычета в полюсе кратности m_k (§ 28). В частности, если все полюсы функции $F(p)$ простые, то формула (22)

принимает вид

$$\frac{A_n(p)}{B_m(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{m} \frac{A_n(p_k)}{B'_m(p_k)} e^{p_k t}. \qquad (22')$$

Пример 3. Найдем оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{p+8}{p^2+p-2}.$$

Так как функция $F(p) = \frac{p+8}{(p-1)(p+2)}$ имеет простые полюсы $p_1 = 1$, $p_2 = -2$, то по формуле (22′) находим

$$f(t) = \left(\frac{p+8}{2p+1} e^{pt}\right)_{p=1} + \left(\frac{p+8}{2p+1} e^{pt}\right)_{p=-2}.$$

Следовательно, $f(t) = 3e^t - 2e^{-2t}$. Этот же результат можно получить, разложив $F(p)$ на элементарные дроби $F(p) = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p+2}$ и используя формулу $\frac{1}{p-\lambda} \doteqdot e^{\lambda t}$. □

Пример 4. Найдем оригинал $f(t)$, если его изображение

$$F(p) = \frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}.$$

Функция $F(p) = \frac{1+2p^2}{(p-i)^2(p+i)^2}$ имеет полюсы второго порядка $p_1 = i$, $p_2 = -i$. Применив формулу (18) и правило вычисления вычета в кратном полюсе (§ 28), получаем

$$f(t) = \left[\frac{1+2p^2}{(p+i)^2} e^{pt}\right]'_{p=i} + \left[\frac{1+2p^2}{(p-i)^2} e^{pt}\right]'_{p=-i}.$$

Отсюда находим $f(t) = \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \sin t$. Этот же результат следует из равенства

$$\frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{p^2+1}$$

и формул $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \doteqdot t \cos t$, $\frac{1}{1+p^2} \doteqdot \sin t$. □

Пример 5. Найдем оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

Функция $F(p)$ имеет полюсы третьего порядка $p_1 = i$; $p_2 = -i$. По формуле (18) в силу правила вычисления вычета в кратном

полюсе получаем $f(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^3}\right]''_{p=i}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{pt}}{(p-i)^3}\right]''_{p=-i}$, откуда находим

$$f(t)=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t. \quad \square$$

4. Изображение некоторых элементарных и специальных функций.

1. Степенная функция. Рассмотрим функцию $f(t)=t^\beta$. Если $-1<\beta<0$, то $f(0)=\infty$, и поэтому функция $f(t)$ не удовлетворяет условиям, наложенным на оригиналы в § 47. Однако при $\beta>-1$ и $\operatorname{Re} p>0$ интеграл

$$F(p)=\int_0^\infty t^\beta e^{-pt}dt \tag{23}$$

сходится и представляет функцию, регулярную в области $\operatorname{Re} p>0$. Вычислим этот интеграл.

Пусть p действительно и положительно. Полагая в (23) $pt=\tau$, получаем

$$F(p)=\int_0^\infty t^\beta e^{-pt}dt=\frac{1}{p^{\beta+1}}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^\beta d\tau.$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}}, \quad p>0. \tag{24}$$

Продолжая аналитически функцию $F(p)$ с полуоси $(0, +\infty)$ в область $\operatorname{Re} p>0$, получаем, что формула (24) верна при $\operatorname{Re} p>0$, так что

$$t^\beta \doteqdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}}, \quad \beta>-1, \quad \operatorname{Re} p>0. \tag{25}$$

Отметим важный частный случай $\beta=-1/2$ формулы (25). Так как $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, то

$$1/\sqrt{\pi t} \doteqdot 1/\sqrt{p}. \tag{26}$$

2. Импульсные функции. Рассмотрим функцию

$$\delta_h(t)=\begin{cases}\frac{1}{h}, & 0<t<h,\\ 0, & t<0,\ t>h.\end{cases} \tag{27}$$

Эту функцию при малых h можно физически истолковать как силу постоянной величины $1/h$, действующую на малом

промежутке $0 < t < h$ с импульсом, равным единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\,dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1. \tag{28}$$

Введем условную функцию, которую будем считать пределом при $h \to 0$ семейства функций $\delta_h(t)$. Обозначим эту функцию $\delta(t)$ и назовем *импульсной функцией нулевого порядка* или *δ-функцией Дирака.*

В силу (27) и (28) эта функция должна удовлетворять условиям

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1,$$

которые для обычных функций не могут одновременно выполняться. Тем не менее δ-функция используется как условное сокращенное обозначение для предельного физического процесса, в котором рассматривается бесконечно большая величина (например сила), действующая в бесконечно малый промежуток времени с суммарным эффектом, равным единице.

Заметим, что

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h}\,[\theta(t) - \theta(t-h)], \tag{29}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Условимся считать, что изображение δ-функции является пределом при $h \to 0$ изображения функции $\delta_h(t)$. Так как $\delta_h(t) \doteq (1 - e^{-ph})/ph$, то

$$\delta(t) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph},$$

т. е.

$$\delta(t) \doteq 1. \tag{30}$$

Отметим еще, что в силу (29) функцию $\delta(t)$ можно формально рассматривать как производную от функции $\theta(t)$, т. е.

$$\delta(t) = \theta'(t). \tag{31}$$

Поэтому формулу (30) можно получить из формулы $\theta(t) \doteq 1/p$ по правилу дифференцирования оригинала.

Из (30) по свойству запаздывания оригинала находим

$$\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}, \quad \tau > 0.$$

Аналогично вводятся импульсные функции $\delta^{(n)}(t)$ для $n \geqslant 2$ и получаются формулы

$$\delta^{(n)}(t) \doteq p^n. \tag{32}$$

Обоснование формул (32) можно дать на основе теории обобщенных функций [2].

3. Бесселевы функции. Функция

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2\,p^{2k+1}}$$

регулярна в бесконечности и $F(\infty)=0$. По первой теореме разложения

$$F(p)\doteqdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}=J_0(t).$$

Таким образом, доказана формула

$$J_0(t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{33}$$

Заменяя в формуле (33) t на $i\beta t$, в силу свойства подобия получаем $J_0(i\beta t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2-\beta^2}}$, откуда по правилу смещения изображения находим

$$e^{-\alpha t}J_0(i\beta t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}}. \tag{34}$$

Формулу (34) можно записать так:

$$e^{-\alpha t}I_0(\beta t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}},$$

где $I_0(t)$ — бесселева функция от чисто мнимого аргумента.

Используя формулу (33), докажем методом индукции, что

$$J_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{35}$$

При $n=0$ формула (35) совпадает с формулой (33). Так как

$$J_1(t)=-J_0'(t),\quad J_0(0)=1, \tag{36}$$

то по правилу дифференцирования оригинала из (36) и (33) находим $J_1(t)\doteqdot(\sqrt{p^2+1}-p)/\sqrt{p^2+1}$, т. е. формула (35) верна при $n=1$. Пусть эта формула справедлива для всех номеров, меньших n $(n\geqslant 2)$.

Используя формулу $J_n(t)=J_{n-2}(t)-2J_{n-1}'(t)$ и соотношение $J_{n-1}(0)=0$, находим

$$J_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}}-2p\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Окончательно получаем $J_n(t)\doteqdot\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$.

4. Функции, связанные с интегралом вероятностей. Рассмотрим функции

$$\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau,$$

$$\operatorname{Erf}(t)=1-\operatorname{erf}(t),\quad f(t)=e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Эти функции являются оригиналами, причем

$$f'(t)=f(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \tag{37}$$

Пусть $f(t)\doteqdot F(p)$. Тогда из (37), используя формулу $1/\sqrt{\pi t}\doteqdot 1/\sqrt{p}$ и правило дифференцирования оригинала, получаем $pF(p)=F(p)+\frac{1}{\sqrt{p}}$, откуда $F(p)=\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$, т. е.

$$e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}. \tag{38}$$

Из (38) по правилу смещения изображения находим

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p\sqrt{p+1}}. \tag{39}$$

Рассмотрим функцию

$$g(t)=e^t\operatorname{Erf}(\sqrt{t})=e^t-e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t}). \tag{40}$$

Из (40) и (39) следует, что

$$g(t)\doteqdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}=\frac{1}{p+\sqrt{p}}.$$

Следовательно, $e^t\operatorname{Erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p+\sqrt{p}}$, откуда получаем

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t})\doteqdot\frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}. \tag{41}$$

Далее, из равенства

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}=\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}+\frac{\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}}$$

и формулы $\frac{1}{\sqrt{p}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ следует, что

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}\doteqdot e^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+\alpha\int_0^t e^{-\alpha\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}},$$

или

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}+\sqrt{\alpha}\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}),\quad \alpha>0. \tag{42}$$

§ 49. Применение преобразования Лапласа к решению линейных уравнений

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$Lx = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t). \quad (1)$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (2)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — заданные постоянные. Предполагая, что $f(t)$ — оригинал, будем искать решение $x(t)$ задачи (1) — (2) такое, что $x(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$. По правилу дифференцирования оригинала и свойству линейности, переходя к изображениям в уравнении (1), в силу условий (2) получаем

$$p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - px_{n-2} - x_{n-1} + a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \ldots - px_{n-3} - x_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(pX(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p)$$

или

$$A(p)X(p) - B(p) = F(p),$$

где $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$ — характеристический многочлен уравнения $Lx = 0$,

$$B(p) = x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + x_{n-2}(p + a_1) + x_{n-1}.$$

Отсюда $X(p) = (B(p) + F(p))/A(p)$. Для нахождения искомого решения $x(t)$ задачи (1) — (2) нужно восстановить по изображению $X(p)$ его оригинал $x(t)$. Это можно сделать с помощью формулы обращения. При практическом применении операционного метода вместо формулы обращения обычно используются таблицы оригиналов и их изображений. В частности, если $f(t)$ — квазимногочлен (линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$), то $X(p)$ — рациональная функция. Для нахождения оригинала эту функцию часто бывает удобно представить в виде суммы элементарных дробей.

Для обоснования возможности применения операционного метода к задаче (1) — (2) достаточно убедиться в том, что $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$ — оригиналы. Воспользуемся представлением $x(t)$ в виде $x(t) = \tilde{x}(t) + x_0(t)$, где $\tilde{x}(t)$ — решение однородного

уравнения

$$Lx = 0 \tag{3}$$

с заданными начальными условиями (2), а $x_0(t)$ — решение уравнения (1) с нулевыми начальными условиями. Заметим, что $\tilde{x}(t)$ есть линейная комбинация функций вида $t^r e^{\lambda t}$ ($r \geqslant 0$ — целое), и поэтому все производные функции $\tilde{x}(t)$ — оригиналы. Функцию $x_0(t)$ можно представить в виде свертки

$$x_0(t) = \int_0^t f(\xi)\, z(t-\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

где $z(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0, \quad z^{(n-1)}(0) = 1. \tag{5}$$

Из формулы (4) и условий (5) следует, что

$$x_0^{(k)}(t) = \int_0^t f(\xi)\, z^{(k)}(t-\xi)\, d\xi + f(t)\, z^{(k)}(0), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Так как изображение функции $z(t)$ есть функция $Z(p) = 1/A(p)$, регулярная в бесконечности, и $Z(\infty) = 0$, то $z(t)$ — целая функция экспоненциального типа (§ 48, теорема 3) и в силу (4) и (6) функции $x_0(t)$, $x_0'(t)$, $\ldots$, $x_0^{(n)}(t)$ — оригиналы. Следовательно, $x(t)$, $x'(t)$, $\ldots$, $x^{(n)}(t)$ — оригиналы.

Функцию $z(t)$ часто называют функцией единичного точечного источника для уравнения $Lz = 0$, а функцию $\varepsilon(t) = \theta(t)\, z(t)$ — *фундаментальным решением* оператора L, т. е. решением уравнения

$$L\varepsilon = \delta(t),$$

где $\delta(t)$ — δ-функция Дирака.

Замечание. Если начальные условия (2) задаются не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то заменой $\tau = t - t_0$ задача (1) — (2) приводится к решению уравнения

$$Ly(\tau) = f(\tau + t_0)$$

с начальными условиями при $\tau = 0$.

Пример 1. Решим задачу Коши для уравнения

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t}$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 2,$$
$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 2p.$$

Переходя к изображениям в уравнении, получаем

$$p^2X(p) - 2p - 3(pX(p) - 2) + 2X(p) = \frac{6}{p+1}, \quad X(p) = \frac{2p}{p^2-1},$$

откуда $x(t) = 2\operatorname{ch} t$. □

Пример 2. Найдем решение уравнения

$$x'''(t) + x'(t) = \cos t$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда $x'(t) \doteq pX(p)$, $x'''(t) \doteq p^3X(p) + 2p$.

Переходя к изображениям в уравнении, получаем $(p^3 + p) \times$ $\times X(p) + 2p = \frac{p}{1+p^2}$, откуда $X(p) = -\frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}$. Следовательно, (§ 48, пример 4)

$$X(p) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1},$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}t\cos t - \frac{3}{2}\sin t. \quad \square$$

Пример 3. Решим уравнение

$$x^{IV}(t) + 2x''(t) + x(t) = \sin t$$

при нулевых начальных условиях. Если $x(t) \doteq X(p)$, то

$$(p^4 + 2p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

откуда $X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}$. Поэтому (§ 48, пример 5)

$$x(t) = \frac{3}{8}\sin t - \frac{3}{8}t\cos t - \frac{1}{8}t^2\sin t. \quad \square$$

Аналогично применяется операционный метод к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 4. Решим задачу Коши для системы уравнений

$$x''(t) + a^2y(t) = 0, \quad y''(t) + b^2x(t) = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$ — постоянные, с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 1$.

Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$, тогда

$$p^2X(p) - 1 + a^2Y(p) = 0, \quad p^2Y(p) - 1 + b^2X(p) = 0.$$

Решая эту систему, находим

$$X(p) = \frac{p^2-a^2}{p^4-a^2b^2} = \frac{b-a}{2b}\frac{1}{p^2-ab} + \frac{b+a}{2b}\frac{1}{p^2+ab},$$

$$Y(p) = \frac{p^2-a^2}{p^4-a^2b^2} = \frac{a-b}{2a}\frac{1}{p^2-ab} + \frac{a+b}{2b}\frac{1}{p^2+ab},$$

следовательно,

$$X(t)=\frac{b-a}{2b\sqrt{ab}}\operatorname{sh}(\sqrt{ab}\,t)+\frac{b+a}{2b\sqrt{ab}}\sin(\sqrt{ab}\,t),$$

$$y(t)=\frac{a-b}{2a\sqrt{ab}}\operatorname{sh}(\sqrt{ab}\,t)+\frac{a+b}{2a\sqrt{ab}}\sin(\sqrt{ab}\,t).\quad\square$$

2. Интегральные уравнения Вольтерра. Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром K, зависящим от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t K(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где $K(t)$, $f(t)$ — заданные функции, $\varphi(t)$ — искомая.

Пусть $\varphi(t)\doteqdot\Phi(p)$, $f(t)\doteqdot F(p)$, $K(t)\doteqdot G(p)$. Переходя в уравнении (7) к изображениям и используя изображение свертки, получаем $\Phi(p)=F(p)+G(p)F(p)$, откуда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-G(p)}.$$

Оригинал для $\Phi(p)$ есть искомое решение уравнения (7).

Пример 5. Решим интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\sin t+\int_0^t(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Переходя в уравнении к изображениям, получаем

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2-1}\right),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}(\sin t+\operatorname{sh} t).\quad\square$$

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром K, зависящим только от разности аргументов, т. е. уравнение вида

$$\int_0^t K(t-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=f(t), \tag{8}$$

где f — заданная, φ — искомая функция. Пусть $f(t)\doteqdot F(p)$, $K(t)\doteqdot G(p)$, $\varphi(t)\doteqdot\Phi(p)$. Тогда из уравнения (8) получаем $\Phi(p)=\frac{F(p)}{G(p)}$. Оригинал для $\Phi(p)$ есть искомое решение уравнения (8).

Пример 6. Решим интегральное уравнение

$$\int_0^t e^{t-\xi}\varphi(\xi)\,d\xi = t.$$

Переходя к изображениям, получаем $\frac{1}{p-1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2}$, откуда $\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$, $\varphi(t) = 1 - t$. □

3. Уравнения с частными производными. Рассмотрим задачу о колебаниях струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, предполагая, что начальные скорости точек струны и начальное отклонение струны заданы. Эта задача [2] ставится так: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}$$

при нулевых краевых условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \tag{10}$$

и заданных начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x). \tag{11}$$

Будем предполагать, что функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют дополнительным условиям в концах отрезка $[0; l]$, обеспечивающим существование достаточно гладкого решения задачи (9)—(11).

Пусть $U(p, x)$ — изображение функции $u(x, t)$. Тогда, считая p параметром, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt}dt = \frac{d^2U}{dx^2}.$$

В силу правила дифференцирования оригинала и условий (11) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot pU(x, p) - pu_0(x) - u_1(x).$$

Переходя в уравнении (9) к изображениям, получаем

$$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - p^2U + pu_0(x) + u_1(x) = 0, \tag{12}$$

а из условий (10) имеем

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \tag{13}$$

Решая задачу (12)—(13), находим изображение $U(x, p)$, а затем его оригинал $u(x, t)$.

Пример 7. Решим задачу (9)—(11) при $a=1$, $l=1$,

$$u_0(x)=\sin \pi x, \quad u_1(x)=0.$$

В этом случае уравнение (12) примет вид

$$\frac{d^2U}{dx^2}-p^2U=-p\sin \pi x.$$

Решая это уравнение при условиях $U|_{x=0}=U|_{x=1}=0$, получаем $U(x, p)=\frac{p\sin \pi x}{p^2+\pi^2}$, откуда $u(x, t)=\cos \pi t \sin \pi x$. □

Пример 8. Решим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

при нулевых начальных условиях $u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ и следующих граничных условиях:

$$u|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=\sin \omega t.$$

Пусть $u(x, t) \doteqdot U(x, p)$, тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot p^2 \frac{d^2U}{dx^2}$. Переходя к изображениям в уравнении и учитывая начальные условия, получаем $\frac{d^2U}{dx^2}=p^2U$, откуда находим общее решение $U(x, p)=C_1 \operatorname{ch} px+C_2 \operatorname{sh} px$. Так как $\sin \omega t \doteqdot \omega/(p^2+\omega^2)$, то из граничных условий имеем

$$U|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=1}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Следовательно,

$$U(x, p)=\frac{\omega \sin xp}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch} p}.$$

Функция $U(x, p)$ имеет полюсы в точках $\pm i\omega$, $\pm i\omega_k$, где $\omega_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$; $k=1, 2, \ldots$ В силу второй теоремы разложения

$$u(x, t)=\operatorname*{res}_{p=i\omega} G(p)+\operatorname*{res}_{p=-i\omega} G(p)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\operatorname*{res}_{p=p_k} G(p)+\operatorname*{res}_{p=-p_k} G(p)\right],$$

где $p_k=i\omega_k$, $G(p)=U(x, p)e^{pt}$.

Будем предполагать, что $|\omega| \neq \omega_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, тогда все полюсы функции $G(p)$ являются простыми, причем

$$\operatorname*{res}_{p=i\omega} G(p) = \left(\frac{\omega e^{pt} \sin xp}{p \operatorname{ch} p}\right)_{p=i\omega} \frac{1}{(p^2+\omega^2)'_{p=i\omega}} = -\frac{i \sin \omega x e^{i\omega t}}{2\omega \cos \omega},$$

$$\operatorname*{res}_{p=p_k} G(p) = \left(\frac{\omega e^{pt} \sin xp}{p(p^2+\omega^2) \operatorname{sh} p}\right)_{p=p_k} = (-1)^{k-1} \frac{i\omega e^{i\omega_k t} \sin \omega_k x}{(\omega_k^2 - \omega^2)\omega_k}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname*{res}_{p=i\omega} G(p) + \operatorname*{res}_{p=-i\omega} G(p) = 2 \operatorname{Re} \operatorname*{res}_{p=i\omega} G(p) = \frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\omega \cos \omega},$$

$$\operatorname*{res}_{p=p_k} G(p) + \operatorname*{res}_{p=-p_k} G(p) = 2 \operatorname{Re} \operatorname*{res}_{p=p_k} G(p) = 2(-1)^k \frac{\omega \sin \omega_k x \sin \omega_k t}{\omega_k(\omega_k^2 - \omega^2)},$$

окончательно получаем

$$u(x, t) = \frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\omega \cos \omega} + 2\omega \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \omega_k x \sin \omega_k t}{\omega_k(\omega_k^2 - \omega^2)}. \quad \square$$

Рассмотрим применение операционного метода для решения уравнения теплопроводности. Найдем распределение температуры в полубесконечном стержне $0 < x < \infty$, предполагая, что начальная температура стержня равна нулю, а на его левом конце поддерживается заданный температурный режим.

Задача состоит в нахождении ограниченного при $x \geqslant 0$ решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{14}$$

при условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = f(t). \tag{15}$$

Пусть $f(t)$ — оригинал и пусть $u(x, t) \doteqdot U(x, p)$. Тогда, учитывая (15), имеем $\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{d^2 U}{dx^2}$. Переходя в уравнении (14) к изображениям, получим краевую задачу

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = 0, \tag{16}$$

$$U|_{x=0} = F(p), \quad |U(x, p)| < \infty, \tag{17}$$

где $F(p) \doteqdot f(t)$. Решая задачу (16)—(17), находим

$$U(x, p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Искомое решение $u(x, t)$ можно найти по его изображению

$U(x, p)$ с помощью формулы обращения. Однако удобнее представить $U(x, p)$ в виде

$$U(x, p) = pF(p)\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}},$$

воспользоваться правилом изображения производной и свертки, а также полученной в § 48 формулой

$$\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \doteq 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = G(x, t).$$

Имеем

$$U(p, x) \doteq u(x, t) = \int\limits_0^t f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}G(x, t-\tau)\,d\tau,$$

где $\frac{\partial}{\partial t}G(x, t-\tau) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$. Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

§ 50. Колебания струны под действием мгновенных толчков

1. Полубесконечная струна. Малые свободные колебания однородной струны описываются волновым уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{1}$$

Здесь $u(t, x)$ — отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, $a > 0$ — постоянная.

Пусть струна полубесконечная $(0 < x < \infty)$, ее конец $x = 0$ свободен и в начальный момент времени струна покоится, т. е. данные Коши нулевые:

$$u|_{t=0} \equiv 0, \quad u_t|_{t=0} \equiv 0. \tag{2}$$

В момент времени $T > 0$ по концу $x = 0$ струны наносится мгновенный удар, так что выполняется краевое условие

$$u_x(t, 0) = V\delta(t - T), \tag{3}$$

где δ есть δ-функция Дирака, $V \neq 0$ — постоянная.

Решим смешанную задачу (1)—(3) в области $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$. Перейдем к преобразованию Лапласа

$$v(p, x) = \int\limits_0^\infty u(t, x)e^{-pt}\,dt. \tag{4}$$

Тогда для функции v получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v''_{xx} - \frac{p^2}{a^2} v = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{5}$$

и краевое условие

$$v'_x\big|_{x=0} = Ve^{-pT}. \tag{6}$$

Поставим еще краевое условие на бесконечности:

$$v(p, x) \to 0, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty. \tag{7}$$

Тогда $v(p, x) = -\frac{aV}{p} e^{-\frac{p}{a}x - pT}$, и по формуле обращения находим

$$u(t, x) = -\frac{aV}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p} e^{p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)} dp,$$

где $c > 0$. Отсюда получаем (§ 48), что

$$u(t, x) \equiv 0, \quad t < T + \frac{x}{a}, \qquad u(t, x) = -aV, \quad t > T + \frac{x}{a},$$

или

$$u(t, x) = -aV\theta\left(t - T - \frac{x}{a}\right), \tag{8}$$

где θ — функция Хевисайда.

Таким образом, по струне после удара побежит плоская волна (прямоугольная ступенька высоты $a|V|$) со скоростью a.

Колебания струны при наличии трения описываются уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \alpha u_t, \tag{9}$$

где $a > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные. Начальные и граничные условия снова возьмем в виде (2), (3). Для преобразования Лапласа $v(p, x)$ функции u получим уравнение

$$v''_{xx} - \frac{p^2 + \alpha p}{a^2} v = 0 \tag{10}$$

и краевые условия (6), (7). Отсюда находим

$$v = -\frac{aV}{\sqrt{p^2 + \alpha p}} e^{-\frac{1}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\,x - pT}$$

и по формуле обращения получаем

$$u(t, x) = -\frac{aV}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{p(t-T)-\frac{x}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}}}{\sqrt{p^2 + \alpha p}} dp. \tag{11}$$

Функция $\sqrt{p^2+\alpha p}$ имеет две точки ветвления: $p=0$, $p=-\alpha$. Ее регулярная ветвь в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$ выбрана так, что $\sqrt{p^2+\alpha p}>0$ при действительных $p>0$ с тем, чтобы функция $v(p, x)$ удовлетворяла условию (7).

При $p\to\infty$ показатель экспоненты в (11) равен

$$p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)-\frac{\alpha x}{2a}+o(1).$$

Подынтегральная функция в формуле (11) не имеет полюсов в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$, и по лемме Жордана $u(t, x)\equiv 0$ при $t-T-\frac{x}{a}<0$.

При $t-T-\frac{x}{a}>0$ интеграл (11) не выражается через элементарные функции, и мы воспользуемся известной формулой операционного исчисления [10]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-b^2}+tp}}{\sqrt{p^2-b^2}}=I_0\left(b\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\theta(t-\tau),$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента. Интеграл (11) приводится к такому виду с помощью замены $p=\tilde{p}-\alpha/2$, так что $b=\alpha/2$, $\tau=x/a$, и окончательно получаем

$$u(t, x)=-aVe^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)}I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{(t-T)^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)\theta\left(t-T-\frac{x}{a}\right). \tag{12}$$

При $\alpha=0$ эта формула переходит в (8). Решение (12) также описывает волну, передний фронт которой — точка $x=a(t-T)$ — движется направо со скоростью a.

Фиксируем точку $x>0$ и исследуем поведение $u(t, x)$ при $t\to+\infty$. Используя асимптотику

$$I_0(x)\sim\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}},\quad x\to+\infty,$$

получаем из (12) $u(t, x)\sim-\frac{aV}{\sqrt{\alpha\pi t}}$ $(t\to+\infty)$, так что колебания в фиксированной точке со временем затухают в отличие от (8). Это явление обусловлено наличием трения.

2. Конечная струна, колебания без трения. Пусть струна конечна $(0<x<l)$, ее левый конец $x=0$ свободен, а правый конец $x=l$ закреплен, так что

$$u(0, l)=0. \tag{13}$$

Как и в п. 1, зададим нулевые данные Коши и условие, что при $t=T>0$ происходит мгновенный удар. Тогда $u(t, x)$ удовлетво-

ряет уравнению (1), данным Коши (2) и краевым условиям (3), (13). Переходя к преобразованию Лапласа (4), для функции v получаем уравнение (5) и краевые условия

$$v'_x|_{x=0} = Ve^{-pT}, \quad v|_{x=l} = 0. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$v(p, x) = \frac{aVe^{-pT}}{p \operatorname{ch}(pl/a)} \operatorname{sh}\left[\frac{p}{a}(x-l)\right] \tag{15}$$

и по формуле обращения получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} v(p, x)\, dp,$$

где $c > 0$. Вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Особые точки подынтегральной функции совпадают с нулями функции $\operatorname{ch}\frac{pl}{a}$ (точка $p = 0$ — неособая). Следовательно, подынтегральная функция имеет полюсы в точках $p = p_n$, где

$$p_n = \frac{ia\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, \ \pm 1, \ldots$$

Все эти полюсы простые и располагаются на мнимой оси, причем

$$\operatorname*{res}_{p=p_n}(e^{pt}v(p, x)) = \frac{aVe^{p_n(t-T)} \operatorname{sh}\left(\frac{p_n}{a}(x-l)\right)}{p_n\left(\operatorname{ch}\frac{pl}{a}\right)'\Big|_{p=p_n}} =$$

$$= \frac{2iaV(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)} e^{i\frac{\pi\alpha}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-T)} \varphi_n(x), \tag{16}$$

где

$$\varphi_n(x) = \sin\left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-l)\right]. \tag{17}$$

Покажем, что

$$u(t, x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{res}_{p=p_n}(e^{pt}v(p, x)) \tag{18}$$

при $t > T + l/a$. Так как a — скорость распространения возмущений, то за такое время возмущение успеет достигнуть правого конца и отразиться от него. Если же $t < T + l/a$, то нетрудно показать, что решение имеет вид (8).

Рассмотрим интеграл

$$J_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} e^{pt} v(p, x)\, dp, \tag{19}$$

где Γ_N — прямоугольник с вершинами в точках $c \pm iy_N$, $\pm iy_N - y_N$, $y_N = \pi aN/l$. Интеграл J_N равен сумме вычетов по полюсам подынтегральной функции, лежащим внутри контура Γ_N. Интеграл по отрезку $[c - iy_N,\ c + iy_N]$ при $N \to \infty$ стремится к $u(t, x)$, и остается показать, что интеграл по контуру $\widetilde{\Gamma}_N$, состоящему из остальных трех отрезков, стремится к нулю при $N \to \infty$. Имеем

$$\operatorname{ch} \frac{pl}{a} = \frac{1}{2} e^{-pl/a} \varphi(p), \quad \varphi(p) = 1 + e^{2pl/a}.$$

Покажем, что $|\varphi(p)| \geqslant A > 0$ при $p \in \widetilde{\Gamma}_N$, где постоянная A не зависит от N. На отрезке $[-y_N + iy_N,\ c + iy_N]$ имеем

$$|\varphi(p)| = 1 + e^{\frac{2l}{a} y}, \quad -y_N \leqslant y \leqslant C,$$

так что $|\varphi(p)| \geqslant 1$. Такая же оценка имеет место на отрезке $[-y_N - iy_N,\ c - iy_N]$, а на оставшемся отрезке функция $e^{\frac{2l}{a} p}$ экспоненциально убывает при $N \to \infty$. Поэтому подынтегральная функция из (15) равна

$$\frac{aV}{2\varphi(p)\, p} \left[e^{p\left(t - T + \frac{l}{a} + \frac{x-l}{a}\right)} - e^{p\left(t - T + \frac{l}{a} - \frac{x-l}{a}\right)} \right].$$

Первый сомножитель имеет порядок $O(1/p)$ на контурах $\widetilde{\Gamma}_N$ при $N \to \infty$, а показатели экспонент строго положительны, так как $t > T + \frac{l}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant l$. По лемме Жордана интеграл по контуру $\widetilde{\Gamma}_N$ стремится к нулю при $N \to \infty$.

Из (8), (6) находим

$$u(t, x) = -\frac{2iaV}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{i\pi a}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - T)} \frac{\varphi_n(x)}{2n + 1}.$$

Объединяя попарно слагаемые с номерами n, $-n-1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) и учитывая, что $\varphi_{-n-1}(x) = -\varphi_n(x)$, окончательно получаем

$$u(t, x) = \frac{4Va}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \sin(\omega_n (t - T)) \sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x - l)\right), \qquad (20)$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi a}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (21)$$

Каждое слагаемое в этой сумме — это собственное колебание струны, у которой конец $x = 0$ свободен, а конец $x = l$ закреплен. Собственные частоты этих колебаний равны ω_n.

Как видно из (20), толчок возбуждает все собственные колебания струны. Их амплитуды убывают как $1/n$ с ростом частоты, но энергия E_n каждого из собственных колебаний примерно

одинакова. Действительно, пусть ρ — плотность массы струны, T — натяжение, $a^2 = T/\rho$. Тогда энергия E_n собственного колебания с номером n равна

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{2a^2V^2}{l}\left[\rho a^2 \cos^2(\omega_n(t-T)) + T\sin^2(\omega_n(t-T))\right]. \quad (22)$$

Рассмотрим результат воздействия на струну серии из N периодических толчков. Пусть они имеют одинаковую величину и совершаются в моменты времени T, $2T$, ..., NT. Это означает, что краевое условие (3) заменяется условием

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(t, 0) = V\sum_{m=1}^{N}\delta(x - mT).$$

Очевидно, что при $t > NT + l/a$

$$u_N(t, x) = \sum_{m=1}^{N} u_1(t - (m-1)T, x),$$

где $u_1(t, x)$ — решение, имеющее вид (20). Имеем (§ 1, пример 6)

$$\sum_{m=1}^{N}\sin(\omega(t - mT)) = \frac{\sin(\omega_n NT/2)\sin(\omega_n(t - (N+1)/2)T)}{\sin(\omega_n T/2)}.$$

Окончательно получаем

$$u_N(t, x) = \frac{4aV}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\omega_n NT/2)}{(2n+1)\sin(\omega_n T/2)} \times$$

$$\times \sin\left(\omega_n\left(t - \frac{N+1}{2}\right)T\right)\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x - l)\right). \quad (23)$$

Амплитуда n-го колебания A_n равна

$$A_n = \frac{4aV(-1)^n\sin(\omega_n NT/2)}{\pi(2n+1)\sin(\omega_n T/2)}. \quad (24)$$

Рассмотрим резонансный случай: период толчков T совпадает с одной из собственных частот, т. е. $T = 2\pi/\omega_n$. Тогда из (24) получаем

$$A_n = \frac{4aVN(-1)^n}{\pi(2n+1)}, \quad (25)$$

так что $|A_n|$ принимает наибольшее возможное значение и неограниченно возрастает с ростом N.

Особенно интересен случай, когда T совпадает с периодом первого собственного колебания, т. е.

$$T = 2\pi/\omega_0 = 4l/a. \tag{26}$$

В этом случае имеем

$$u(t, x) = \frac{4aVN}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin(\omega_n T) \sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right), \tag{27}$$

так что

$$u_N(t, x) = Nu_1(t, x). \tag{28}$$

Таким образом, колебание $u_1(t, x)$ после последующих $(N-1)$-го толчка с периодом вида (24) усиливается в N раз.

3. Конечная струна, колебания при наличии трения. В этом случае функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (9), а данные Коши и краевые условия остаются теми же, что и в п. 2. Переходя к преобразованию Лапласа, получаем для функции v уравнение (10) и краевые условия (14). Решив эту задачу, получим

$$v(p, x) = \frac{aVe^{-pT} \operatorname{sh}\left(\frac{x-l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}{\sqrt{p^2+\alpha p}\operatorname{ch}\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}. \tag{29}$$

Заметим, что v — однозначная функция p, так как функции $\operatorname{ch}\sqrt{z}$, $\operatorname{sh}\sqrt{z}/\sqrt{z}$ — однозначные функции z (§ 22, примеры 18, 19). Особые точки функции v — корни уравнения $\operatorname{ch}\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right) = 0$, которые равны

$$p_n^{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{i\sqrt{D_n}}{2}, \quad D_n = \frac{\pi^2 a^2}{l^2}(2n+1)^2 - \alpha^2. \tag{30}$$

Все они — простые полюсы и расположены на прямой $\operatorname{Re} p = -\alpha/2$, за исключением, быть может, конечного числа, так как $D_n > 0$ при больших n. Если $\alpha > \frac{\pi a(2n+1)}{l}$ при некотором n, то корни $p_n^{\pm}$ действительны и отрицательны.

Как и в предыдущем случае, интеграл $u(t, x)$ равен сумме вычетов по всем полюсам подынтегральной функции. При вычислении вычетов следует учесть, что выбор значения $\sqrt{p^2+\alpha p}$ безразличен — важно лишь, чтобы это значение было одним и тем же во всех содержащих его функциях. Вычисляя интеграл

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{pt} V(p, x)\, dp,$$

получаем

$$u(t, x) = \frac{2ia^2V}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)}\right) \frac{(-1)^n \varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}},$$

где $\varphi_n(x)$ — те же, что и в (17). Преобразуем это выражение. Имеем

$$e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)} = -2ie^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T)\right).$$

Объединяя затем слагаемые с номерами n, $-n-1$, находим

$$u(t, x) =$$

$$= \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T)\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-l)\right). \tag{31}$$

При $\alpha = 0$ это выражение совпадает с (20). Из (31) следует, что трение изменяет собственные частоты колебаний струны: в данном случае

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\pi^2a^2}{l^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}}. \tag{32}$$

Пусть $\alpha < \pi a/l$ для определенности, тогда $\sqrt{D_n} > 0$ при всех n. Решение $u(t, x) = O\left(e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right)$ при $t \to +\infty$, т. е. экспоненциально убывает, что обусловлено наличием трения. Рассмотрим результат воздействия на струну N одинаковых толчков, которые совершаются в моменты времени T, $2T$, ..., NT. Суммируя эти колебания, при $t > NT + l/a$ получаем

$$u_N(t, x) = \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}} \times$$

$$\times \left[\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}t\right) - e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t+T)\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}(N+1)T} \times\right.$$

$$\left.\times \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-(N+1)T)\right) + e^{\frac{\alpha}{2}(N+1)T} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-NT)\right)\right] \times$$

$$\times \left[1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T} \cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}\right]^{-1}. \tag{33}$$

Пусть число толчков велико, т. е. $N \to \infty$. Тогда величина $e^{-\frac{\alpha}{2}NT}$ экспоненциально мала, и сумму (33) можно приближенно

заменить выражением

$$u_N(t, x) \approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(\tau-T)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \times$$

$$\times \frac{e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}\tau\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau - T)\right)}{1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T} \cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}}, \quad (34)$$

где обозначено

$$t = NT + \tau, \quad \tau > l/a. \quad (35)$$

Рассмотрим случай, когда период толчков совпадает с периодом первого собственного колебания струны, т. е. $T = 2\pi/\omega_0 = 4\pi/\sqrt{D_0}$. Тогда соотношение (34) примет вид

$$u_N(t, x) \approx$$

$$\approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(\tau-T)} \left[-\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{D_0}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{D_0}}{2}\tau\right) e^{\frac{\alpha}{2}T}}{\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}T}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{e^{\frac{\alpha}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau - T)\right)}{1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T} \cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}} \right]. \quad (36)$$

В этом случае резонанс проявляется значительно слабее (ср. (18)), поскольку при наличии трения собственные частоты ω_n не являются целыми кратными наименьшей частоты ω_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций.— М.: Наука, 1984.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.
3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1975.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М.: Наука, 1968.
6. Евграфов М. А. Аналитические функции.— М.: Наука, 1968.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.
8. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений.— М.: ИЛ, 1963.
9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.— М.: Высшая школа, 1988.— Т. 1, 2.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1988.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М.: Наука, 1967.— Т. 1; 1968.— Т. 2.
12. Морс Б. А., Фешбах Б. Методы теоретической физики.— М.: ИЛ, 1958.— Т. 1.
13. Никольский С. М. Курс математического анализа.— М.: Наука, 1983.— Т. 1, 2.
14. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.
15. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.
16. Сборник задач по теории аналитических функций/Под редакцией Евграфова М. А.— М.: Наука, 1972.
17. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1979.
18. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— М.: Наука, 1974.— Т. 3, ч. 2.

19. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
20. Титчмарш Е. Теория функций.— М.: Наука, 1980.
21. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: Наука, 1963.— Т. 1, 2.
22. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
23. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.— М.: Физматгиз, 1959.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1985.— Ч. 1, 2.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абеля теорема 87
Аналитическое продолжение 109
— — вдоль кривой 141
— — — цепочки областей 140
— — гамма-функции 108
— — интегралов 116, 119, 120
— —, принципы 110
— — степенных рядов 142
Аргумент комплексного числа 12
—, принцип 252
—, приращение 51
— производной 71
Арксинус 166
Арктангенс 165
Асимптотическая оценка 36, 366
— последовательность 385
—, ряд 386
—, формула 386
Асимптотическое разложение 386
— — Беллеля функции 408
— — гамма-функции 401
— —, единственность 386
— — Макдональда функции 397
— — Эйри — Фока функции 417

Бернулли формула 360
— числа 87
Бесконечное произведение 262
Бесконечно удаленная точка 21
Бесселя уравнение 215, 431
— функция 408
Бета-функция 329
Бурмана — Лагранжа ряд 266

Ватсона лемма 395
Вебера уравнение 205
Вейерштрасса признак 38
— теоремы 20, 93, 94
Векторное поле 350
— —, вихреисточник 352
— —, вихрь 352, 357
— — гармоническое 354
— —, дивергенция 351
Векторное поле, диполь 357
— —, источник 356
— —, комплексный потенциал 355
— —, критическая точка 350
— —, линия тока 350
— —, мультиполь 358
— — потенциальное 354
— —, поток 351
— —, ротор 352
— — соленоидальное 353
— —, сток 356
— —, циркуляция 352
— —, эквипотенциальные линии 354
Ветвь функции 51
— аналитическая 192
— регулярная 169
Вольтерра интегральное уравнение 460
Вычет 218
— в бесконечно удаленной точке 220
— в полюсе 219, 220
—, основная теорема 222, 223

Гамма функция 115, 401
Гармоническая функция 61
— —, принцип максимума и минимума 273
— — сопряженная 62
Гипергеометрическое уравнение 213
Гомотопные кривые 34
Граница области 31
Граничная точка области 31
Грина функция 343

Дельта-функция Дирака 454
Дирихле задача 335
Длина кривой 29
Дуга 29

Жордана лемма 232
— теорема 33

Жуковского профиль 312
— теорема 361
— функция 295

Изображение 437
Интеграл вероятностей 395
—, зависящий от параметра 111, 112
— Лапласа 390
— по кривой 44
— типа Коши 118
— Фурье 402

Комплексная плоскость 11
— — расширенная 21
Комплексные числа 7
— — в алгебраической форме 8
— — в показательной форме 15
— — в тригонометрической форме 13
— —, геометрическая интерпретация 10
— — сопряженные 8
Коши — Адамара задача 203
— — интегральная теорема 75
— — интегральная формула 84
— — критерий 20, 24, 38
— — неравенства 125
— — формула 87
Коши — Римана условия 59
Кривая 27
— гладкая 30
— замкнутая 28
— кусочно гладкая 30
— неограниченная 30
—, параметрическое уравнение 27
— простая 28
— спрямляемая 29
Кристоффеля — Шварца интеграл 323
— — теорема 324
— — формула 324

Лапласа интеграл 390
— метод асимптотических оценок 390
— метод контурного интегрирования 425
— преобразование 394, 436
— уравнение 61, 335
— формула обращения 444
Лежандра уравнение 216
— эллиптический интеграл 330
Линия наибыстрейшего спуска 413
— тока 350
— уровня 353
— — гармонической функции 412
Лиувилля теорема 137
Логарифм 41, 105, 145
Лорана ряд 121
— —, главная часть 127
— —, правильная часть 127
Луночка 292

Меллина преобразование 114
Метод Лапласа 390
— перевала 424
— стационарной фазы 402
Мероморфная функция 138
—, разложение на простейшие дроби 257, 259
Модуль комплексного числа 8
Монодромии теорема 169, 170
Морера теорема 93
Муавра формула 14

Неймана задача 345
Неравенства треугольника 12
Нули регулярной функции 100
Ньютона — Лейбница формула 26

Область 31
— многосвязная 79
— ограниченная 32
— односвязная 33
Окрестность 19
— бесконечно удаленной точки 21
Операционное исчисление (метод) 436
Определяющее уравнение 214
Оригинал 437
Основная теорема высшей алгебры 137
Особая точка 126
— — граничная 187
— — многозначного характера 192
— — однозначного характера 126
— — регулярная 211
— —, существенно особая 126
— — уравнения 207
— — устранимая 126
Ось действительная 11
— мнимая 11
Отображение 66
— взаимно однозначное 66
— дробно-линейное 279
— однолистное 66
— конформное 73, 274

Первообразная 80
Пикара теорема 138
Показатель роста функции 438

Полюс 126
Последовательность 18
— ограниченная 20
— равномерно сходящаяся 38
— сходящаяся 19
Предел последовательности 18
— функции 35
Преобразование Лапласа 113, 116
— Меллина 114
— Фурье 113
Прингсхейма теорема 191
Принцип аргумента 252
— аналитического продолжения 110
— максимума модуля 272
— — и минимума гармонических функций 273
— симметрии 314
— соответствия границ 276
— сохранения области 271
Производная 25
— высших порядков 91
—, геометрический смысл 71, 72
Производящая функция 433
Пуассона уравнение 345
— формула решения задачи Дирихле 338, 341
— — суммирования 408
Пюизо ряд 202

Разностные уравнения 431
Радиус сходимости 87
Римана — Лебега лемма 403
Римана поверхность 152, 161, 202
— сфера 22
— теорема 276
Руше теорема 254
Ряд абсолютно сходящийся 23
— асимптотический 387
— равномерно сходящийся 38
— степенной 86
— сходящийся 23

Свертка функций 443
Симметрии принцип 314
Сохоцкого теорема 133
Стереографическая проекция 22
Стирлинга формула 401

Тейлора ряд 91
Теорема единственности 107
— об обратной функции 101, 263
— о среднем 85
— — — для гармонических функций 86
— разложения 450, 451
Точка ветвления 159
— — логарифмическая 160
— перевала 411

Угол в бесконечно удаленной точке 274
Условие Коши — Римана 59
— Чаплыгина 364

Формула обращения преобразования Лапласа 444
— — — Меллина 445
Френеля интеграл 236
Фундаментальное решение 458
Функция аналитическая 142
— дифференцируемая 57
— гиперболическая 43
— дробно-линейная 279
— импульсная 453
— линейная 66
— логарифмическая 50, 145
— мероморфная 138
— многозначная 142
— непрерывная 25, 37, 39, 40
— обратная 66
— однолистная 65, 269
— показательная 41
— производная 57
— равномерно непрерывная 37
— рациональная 58
— регулярная 63, 64
— степенная 156
—, суперпозиция 58
— тригонометрическая 42
— фазовая 402
— целая 110
— эллиптическая 330
Фурье интеграл 402
— преобразование 402

Хевисайда функция 437

Чаплыгина формула 361

Шварца лемма 273
— формула 339

Эйлера уравнение 207
— формула 13, 14
Эйри уравнение 204, 427
— функция 205
Элемент 140

Якоби эллиптическая функция 330

Учебное издание

СИДОРОВ Юрий Викторович,
ФЕДОРЮК Михаил Васильевич,
ШАБУНИН Михаил Иванович

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, М. Н. Дронова*

ИБ № 12915

Сдано в набор 05.03.88. Подписано к печати 04.01.89. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 30. Усл. кр.-отт. 30. Уч.-изд. л. 29,3. Тираж 18 500 экз. Заказ № 85. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Готовится к печати в 1989 году:

Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф от эвольвент до квазикристаллов.— 8 л.— (Современная математика для студентов). (Темплан 1989 г., п. 56)

В книге, написанной на основе лекции для студентов, посвященной трехсотлетию «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона, рассказывается о рождении современной математики и теоретической физики в трудах великих ученых XVII века. Некоторые идеи Гюйгенса и Ньютона опередили свое время на несколько столетий и получили развитие только в последние годы. Об этих идеях, включая несколько новых результатов, также рассказано в книге.

Для студентов и преподавателей вузов, учителей математики средней школы и историков науки.

Заказы на книгу принимают все магазины Союзкниги и Академкниги, занимающиеся распространением физико-математической литературы.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Готовится к печати в 1989 году:

Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: Учебник.— 35 л. (Темплан 1989 г., п. 48)

Излагаются традиционные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление, функции одного и многих переменных, теория рядов, а также элементы функционального анализа, теории обобщенных функций и гармонического анализа.

Для студентов технических и экономических специальностей вузов.

Заказы на книгу принимают все магазины Союзкниги и Академкниги, занимающиеся распространением физико-математической литературы.

1 р. 50 к.