

ДЖ.ХАМФРИ

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Перевод с английского
А. Е. ЗАЛЕССКОГО

Под редакцией
В. П. ПЛАТОНОВА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.144
X 18
УДК 512.8

James E. Humphreys
Linear Algebraic
Groups

Springer-Verlag
New York Heidelberg Berlin
1975

Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы: Пер. с англ./Под ред В. П. Платонова. — М.: Наука, 1980. — 400 с.

Книга посвящена систематическому изложению основ теории линейных алгебраических групп. Она представляет несомненный интерес для специалистов в различных областях алгебры, геометрии, функционального анализа, теории представлений и др. Отточенное, тщательно продуманное изложение делает книгу особенно удобной для первоначального знакомства с предметом.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов университетов.

© 1975 by Springer-Verlag New York Inc. All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York.

© Перевод на русский язык. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1980

X 20203—123
053(02)—80 59-80. 1702030000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	7
Предисловие автора	9
Соглашения	12
Глава I. Алгебраическая геометрия .	13
§ 0. Некоторые сведения из коммутативной алгебры .	13
§ 1. Аффинные и проективные многообразия	18
1.1. Идеалы и аффинные многообразия (18). 1.2. Топология Зарисского на аффинном пространстве (22). 1.3. Неприводимые компоненты (23). 1.4. Произведения аффинных многообразий (26). 1.5. Аффинные алгебры и морфизмы (28). 1.6. Проективные многообразия (30). 1.7. Произведения проективных многообразий (33). 1.8. Многообразия флагов (35). Упражнения (38).	
§ 2. Многообразия	39
2.1. Локальные кольца (39). 2.2. Предмногообразия (40). 2.3. Морфизмы (43). 2.4. Произведения (46). 2.5. Аксиома Хаусдорфа (50). Упражнения (51).	
§ 3. Размерность	52
3.1. Размерность многообразия (52). 3.2. Размерность подмногообразия (54). 3.3. Теорема о размерности (55). 3.4. Следствия (57). Упражнения (59).	
§ 4. Морфизмы	59
4.1. Слои морфизма (60). 4.2. Конечные морфизмы (62). 4.3. Образ морфизма (63). 4.4. Конструктивные множества (65). 4.5. Открытые морфизмы (67). 4.6. Биективные морфизмы (68). 4.7. Бирациональные морфизмы (71). Упражнения (71).	
§ 5. Касательные пространства	72
5.1. Касательное пространство Зарисского (72). 5.2. Существование простых точек (75). 5.3. Локальное кольцо простой точки (77). 5.4. Дифференциал морфизма (80). 5.5. Дифференциальный критерий сепарабельности (81). Упражнения (84).	
§ 6. Полные многообразия	84
6.1. Основные свойства (84). 6.2. Полнота проективных многообразий (86). 6.3. Многообразия, изоморфные $\mathbb{P}^1$ (87). 6.4. Автоморфизмы многообразия $\mathbb{P}^1$ (89). Упражнения (92).	
Глава II. Аффинные алгебраические группы	93
§ 7. Основные понятия и примеры	93
7.1. Понятие алгебраической группы (93). 7.2. Некоторые классические группы (95). 7.3. Компонента единицы (96). 7.4. Подгруппы и гомоморфизмы (97). 7.5. Порождаемость неприводимыми подмножествами (99). 7.6. Алгебры Хопфа (101). Упражнения (103).	

§ 8. Действие алгебраических групп на многообразиях . . .	103
8.1. Действия групп на множествах (104). 8.2. Действия алгебраических групп (105). 8.3. Замкнутые орбиты (108). 8.4. Полупрямые произведения (108). 8.5. Сдвиг функций (110). 8.6. Линеаризация аффинных групп (110). Упражнения (113).	
Глава III. Алгебры Ли	114
§ 9. Алгебра Ли алгебраической группы	114
9.1. Алгебра Ли и касательные пространства (114). 9.2. Конволюции (118). 9.3. Примеры (118). 9.4. Подгруппы и подалгебры Ли (119). 9.5. Двойные числа (121). Упражнения (122).	
§ 10. Дифференцирования	123
10.1. Некоторые элементарные формулы (123). 10.2. Дифференциал правого сдвига (124). 10.3. Присоединенное представление (126). 10.4. Дифференциал морфизма Ad (127). 10.5. Коммутаторы (129). 10.6. Централизаторы (130). 10.7. Автоморфизмы и дифференцирования (131). Упражнения (133).	
Глава IV. Однородные пространства	135
§ 11. Построение некоторых представлений	135
11.1. Действие на внешних степенях (135). 11.2. Теорема Шевалле (136). 11.3. Переход к проективному пространству (137). 11.4. Характеристики и полуинварианты (138). 11.5. Нормальные подгруппы (139). Упражнения (141).	
§ 12. Факторы	142
12.1. Свойство универсального отображения (142). 12.2. Топология на множестве Y (144). 12.3. Функции на множестве Y (144). 12.4. Дополнения (145). 12.5. Характеристика 0 (146). Упражнения (146).	
Глава V. Теория в случае характеристики 0	147
§ 13. Соответствие между группами и алгебрами Ли	147
13.1. Структурное соответствие (147). 13.2. Инварианты и инвариантные подпространства (148). 13.3. Нормальные подгруппы и идеалы (149). 13.4. Центры и централизаторы (150). 13.5. Полупростые группы и алгебры Ли (150). Упражнения (151).	
§ 14. Полупростые группы	152
14.1. Присоединенное представление (152). 14.2. Подгруппы полупростых групп (153). 14.3. Полная приводимость представлений (154). Упражнения (157).	
Глава VI. Полупростые и унитарные элементы	158
§ 15. Разложение Жордана—Шевалле	158
15.1. Разложение эндоморфизма (158). 15.2. $GL(n, K)$ и $\mathfrak{gl}(n, K)$ (161). 15.3. Разложение Жордана в алгебраических группах (164). 15.4. Перестановочные множества эндоморфизмов (166). 15.5. Строение коммутативных алгебраических групп (167). Упражнения (167).	
§ 16. Диагонализируемые группы	168
16.1. Характеристики и d -группы (168). 16.2. Торы (171). 16.3. Жесткость диагонализируемых групп (174). 16.4. Веса и корни (176). Упражнения (178).	
Глава VII. Разрешимые группы	179
§ 17. Нильпотентные и разрешимые группы	179
17.1. Лемма из теории групп (179). 17.2. Взаимный коммутант (181). 17.3. Разрешимые группы (182). 17.4. Нильпотентные группы (183). 17.5. Унитарные группы (184). 17.6. Теорема Ли—Колчина (186). Упражнения (188).	

§ 29. Системы Титса	279
29.1. Аксиомы (279). 29.2. Разложение Брюа (281). 29.3. Параболические подгруппы (281). 29.4. Образующие и соотношения для W (284). 29.5. Нормальные подгруппы группы G (287). Упражнения (289).	
§ 30. Параболические подгруппы	290
30.1. Стандартные параболические подгруппы (290). 30.2. Разложение Леви (291). 30.3. Параболические подгруппы, ассоциированные с некоторыми унитарными подгруппами (293). 30.4. Максимальные подгруппы и максимальные унитарные подгруппы (296). Упражнения (297).	
Глава XI. Представления и классификация полупростых групп	298.
§ 31. Представления	298
31.1. Веса (298). 31.2. Максимальные векторы (300). 31.3. Неприводимые представления (301). 31.4. Построение неприводимых представлений (303). 31.5. Кратности и минимальные старшие веса (306). 31.6. Контраградиентные представления и инвариантные билинейные формы (307). Упражнения (308).	
§ 32. Теорема об изоморфизме	309
32.1. Проблема классификации (310). 32.2. Продолжение Φ_T на $N(T)$ (313). 32.3. Продолжение Φ_T на Z_α (315). 32.4. Продолжение Φ_T на TU_α (318). 32.5. Продолжение Φ_T на B (321). 32.6. Мультипликативность Φ (323). Упражнения (327).	
§ 33. Системы корней ранга 2	328
33.1. Другая формулировка условий (A), (Б), (В) (328). 33.2. Предварительные соображения (330). 33.3. Тип A_2 (332). 33.4. Тип B_2 (333). 33.5. Тип G_2 (335). 33.6. Проблема существования (340). Упражнения (342).	
Глава XII. Обзор свойств рациональности	343
§ 34. Поля определения	343
34.1. Основные понятия (343). 34.2. Обзор предыдущих глав (345). 34.3. Торы (346). 34.4. Некоторые основные теоремы (347). 34.5. Структурная теория Бореля—Титса (348). 34.6. Пример: ортогональные группы (350).	
§ 35. Частные случаи	352
35.1. Разложимые и квазиразложимые группы (352). 35.2. Конечные поля (353). 35.3. Вещественное поле (354). 35.4. Локальные поля (355). 35.5. Классификация (357).	
Добавление. Системы корней	360
Библиография	366
Предметный указатель	394
Указатель обозначений	397

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Изданная в серии «Graduate Texts in Mathematics» книга американского математика Дж. Хамфри «Линейные алгебраические группы» занимает промежуточное положение между учебником и монографией. Теория линейных алгебраических групп играет важную роль в современной математике. Ее чрезвычайно интенсивное развитие в последние 15 лет характеризуется глубокими связями почти со всеми основными разделами математики, в частности, с алгеброй, алгебраической геометрией, теорией чисел, функциональным анализом и топологией. Книга Дж. Хамфри представляет собой введение в теорию линейных алгебраических групп и не затрагивает ее многочисленных приложений. Автор стремился к тому, чтобы дать четкое, последовательное и замкнутое в себе изложение основ теории, доступное студентам старших курсов университетов. И это ему удалось. Более того, можно утверждать, что книга Хамфри является пока лучшим изложением основ теории линейных алгебраических групп. Как отмечает сам автор, многие разделы теории остались за рамками книги. Их включение потребовало бы увеличить объем книги в несколько раз. В то же время последняя, двенадцатая, глава книги представляет собой обзор основных фактов о строении алгебраических групп над незамкнутыми полями, имеющих существенное значение для приложений. Материал этой главы, как упоминает автор, составит главную часть второго тома,готавливаемого к печати.

Изложение в книге местами намеренно сделано упрощенным и совсем не ориентируется на схемную технику. В действительности все делается для алгебраически замкнутого поля K (произвольной характеристики), несмотря на то, что в большей части рассуждений нетрудно было бы принимать во внимание детали, связанные с полем определения k . Я считаю, что это можно оправдать следующим образом. Чтобы с самого начала работать с полем k , необходимо было бы затратить значительное время на усовершенствование изложения соответствующего материала из алгебраической геометрии, причем результаты о рациональности, которые мы могли бы получить на первом этапе, довольно таки незначительны (см. (34.2)). Более глубокие факты можно было бы установить не ранее главы X. Обзор вопросов рациональности (без доказательств) читатель найдет в главе XII.

Я приложил особые усилия для обеспечения ясности изложения. Если не считать уклонения в характеристику 0 в главе V, от главы II до главы XI изложение довольно последовательно восходит от общих основополагающих фактов к изучению строения связных алгебраических групп и затем далее к описанию строения, представлений и, наконец, классификации редуктивных групп. В главах II—IV, IX—X мы ориентировались в основном на лекции Бореля [4], которые представляют собой усовершенствование подхода Шевалле в [8], тогда как глава XI — гибрид изложения Шевалле [8] и СГ. Начиная с § 27, мы постоянно используем основные факты о системах корней; все эти факты (с соответствующими ссылками) перечислены в Добавлении. Мы не используем, помимо фактов из § 0, добавления и ссылки на теорему Бернсайда, никаких других посторонних результатов. Однако некоторые несложные факты предложены читателю в качестве упражнений.

Хотя доказательства теорем следуют главным образом Борелю [4], имеется ряд усовершенствований, среди которых — новое доказательство теоремы о нормализаторе, любезно предоставленное мне Борелем.

Часть изложенного здесь материала входила в курсы лекций, прочитанные мною в Queen Mary College в 1969 г. и в Нью-Йоркском университете в 1971—1972 гг. Коллеги сделали мне ряд ценных замечаний после ознакомления с предварительным текстом рукописи данной книги; я в особенности хочу выразить мою признательность Герхарду Хохшильду, Джорджу Селигману и Фердинанду Фельдкампу. Я хочу также поблагодарить за помощь Мишеля Дж. Дериза. Наконец, я хочу выразить благодарность за поддержку Национальной научной ассоциации*), а также Элен Саморай и ее помощницам за напечатание рукописи.

Джеймс Е. Хамфри

*) National Science Foundation. — *Прим. перев.*

СОГЛАШЕНИЯ

K^* — мультипликативная группа поля K ,

$\text{char } K$ — характеристика поля K ,

$\text{char exp } K$ — характеристическая экспонента поля K , т.е. $\max \{1, \text{char } K\}$,

$\det$ — определитель,

Tr — след,

card — мощность,

$\coprod$ — прямая сумма.

Все кольца предполагаются коммутативными и содержащими единицу.

0.1. Кольцо R нётерово $\Leftrightarrow$ каждый идеал кольца R конечно порожден $\Leftrightarrow R$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей идеалов $\Leftrightarrow$ каждая непустая система идеалов имеет максимальный элемент относительно включения. Любой гомоморфный образ нётерова кольца — нётерово кольцо [Л, VI, § 1], [АМ, гл. 6, 7].

Теорема Гильберта о базисе: если R — нётерово кольцо, то и $R[T]$, кольцо полиномов от одной переменной, является нётеровым кольцом. В частности, для любого поля K кольцо $K[T_1, \dots, T_n]$ является нётеровым [Л, VI, § 2], [ЗС, IV, § 1], [АМ, 7.5].

0.2. Если K — поле, то $K[T_1, \dots, T_n]$ — кольцо с однозначным разложением на множители [Л, V, § 6].

0.3. Слабая теорема о нулях: Пусть K — поле, $L = K[x_1, \dots, x_n]$ — конечно порожденное кольцо над K . Если L — поле, то все элементы x_i алгебраичны над K [Л, X, § 2], [ЗС, VII, § 3], [АМ, 5.24; гл. 5, упр. 18; 7.9].

0.4. Пусть L/K — расширение поля K . Элементы $x_1, \dots, x_d \in L$ называются алгебраически независимыми над K , если ни для какого полинома $f(T_1, \dots, T_d) \neq 0$ с коэффициентами в поле K не выполняется соотношение $f(x_1, \dots, x_d) = 0$. Максимальное множество алгебраически независимых элементов поля L над K называется базисом трансцендентности поля L над K . Мощность базиса трансцендентности поля L над K не зависит от выбора базиса трансцендентности и называется степенью трансцендентности поля L над K . Степень трансцендентности обозначается через $\text{tr. deg}_K L$. Если $L = K(x_1, \dots, x_n)$, то базис трансцендентности можно выбрать среди элементов x_i , скажем, $x_1, \dots, x_d$. Тогда поле $K(x_1, \dots, x_d)$ чисто трансцендентно над K и поле L есть конечное алгебраическое расширение поля $K(x_1, \dots, x_d)$ [Л, X, § 1], [ЗС, II, § 12].

Теорема Люрота. Пусть $L = K(T)$ — простое чисто трансцендентное расширение поля K . Тогда любое подполе поля L , содержащее K и не совпадающее с K , является простым чисто трансцендентным расширением поля K [ВВ, 10, § 73].

0.5. Пусть E — конечное расширение поля F . Существует отображение $N_{E/F}: E \rightarrow F$, называемое нормой,

которое индуцирует гомоморфизм мультипликативных групп $E^* \rightarrow F^*$ и такое, что $N_{E/F}(a)$ есть степень постоянного члена минимального полинома элемента a над F и, в частности, $N_{E/F}(a) = a^{[E:F]}$ при $a \in F$. Чтобы определить норму, рассмотрим E как векторное пространство над F . Для каждого $a \in E$ отображение $x \mapsto ax$ является линейным преобразованием $E \rightarrow E$. По определению норма есть определитель этого линейного преобразования.

0.6. Пусть $R \supset S$ — расширение колец. Элемент $x \in R$ является **целым над S** $\Leftrightarrow x$ есть корень полинома над S со старшим коэффициентом 1 $\Leftrightarrow$ подкольцо $S[x]$ кольца R — конечно порожденный S -модуль $\Leftrightarrow \Leftrightarrow$ кольцо $S[x]$ действует точно на некотором конечно порожденном S -модуле V (т. е. $yV = 0$ влечет $y = 0$). Кольцо R называется **целым над S** , если каждый его элемент цел над S . **Целое замыкание подкольца S в R** есть множество (в действительности подкольцо) кольца R , состоящее из всех элементов кольца R , целых над S . Если R — область целостности с полем частных F , то кольцо R называется **целозамкнутым**, если оно совпадает со своим целым замыканием в F . Если кольцо R целозамкнуто, то и кольцо полиномов $R[T]$ целозамкнуто [Л, IX, § 1], [ЗС, V, § 1], [АМ, гл. 5].

0.7. Лемма Нётер о нормализации. Пусть K — поле, $R = K[x_1, \dots, x_n]$ — конечно порожденная область целостности над K с полем частных F и $d = \text{tr. deg}_K F$. Тогда существуют элементы $y_1, \dots, y_d \in R$ такие, что кольцо R цело над $K[y_1, \dots, y_d]$ (и элементы y_i алгебраически независимы над K) [Л, X, § 4], [ЗС, V, § 4], [АМ, гл. 5, упр. 16].

0.8. Пусть R — расширение кольца S , причем кольцо R является целым над S .

Теорема о подъеме. Если P — простой (соответственно максимальный) идеал кольца S , то существует простой (соответственно максимальный) идеал Q кольца R , для которого $Q \cap S = P$ [Л, IX, § 1], [ЗС, V, § 2], [АМ, 5.10, 5.11].

Теорема о спуске. Пусть кольцо S целозамкнуто; если $P_1 \supset P_2$ — простые идеалы кольца S и Q_1 — простой идеал кольца R , для которого $Q_1 \cap S = P_1$, то

существует простой идеал $Q_2 \subset Q_1$ кольца R , для которого $Q_2 \cap S = P_2$ [ЗС, V, § 3], [АМ, 5.16].

Теорема о продолжении гомоморфизмов. Пусть R/S — целое расширение колец, K — алгебраически замкнутое поле. Тогда любой гомоморфизм $\varphi: S \rightarrow K$ продолжается до гомоморфизма $\varphi': R \rightarrow K$. Если $x \in R$, $a \in K$, то φ можно продолжить сначала до гомоморфизма $S[x] \rightarrow K$, отображающего x в a (a затем дальше продолжить на R , так как кольцо R цело над $S[x]$) при условии, что $f(x) = 0$ влечет $f_\varphi(a) = 0$ при $f(T) \in S[T]$ (здесь $f_\varphi(T)$ — полином над K , полученный применением φ к каждому коэффициенту полинома $f(T)$) [Л, IX, § 3], [АМ, гл. 5].

0.9. Пусть $P_1, \dots, P_n$ — простые идеалы кольца R . Если некоторый идеал содержится в объединении идеалов P_i , $i = 1, \dots, n$, то он уже содержится в одном из этих идеалов [ЗС, IV, § 6, замечание на стр. 247].

0.10. Пусть S — мультипликативное множество в кольце (т. е. $0 \notin S$, $1 \in S$, $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$). Обобщенное кольцо частных $S^{-1}R$ строится при помощи классов эквивалентности пар $(r, s) \in R \times S$, где $(r, s) \sim (r', s')$ означает, что $s''(rs' - r's) = 0$ для некоторого $s'' \in S$. (Простые) идеалы кольца $S^{-1}R$ соответствуют взаимно однозначно (простым) идеалам кольца R , которые не пересекаются с S . В случае, если R — область целостности с полем частных F , кольцо $S^{-1}R$ можно отождествить с множеством частных r/s в F . В общем случае каноническое отображение $R \rightarrow S^{-1}R$ (переводящее r в класс эквивалентности элемента $(r, 1)$) является инъективным, только если S не содержит делителей нуля. Например, возьмем $S = \{x^n | n \in \mathbb{Z}^+\}$, где элемент x не нильпотентен, и обозначим в этом случае кольцо $S^{-1}R$ через R_x ; кольцо R является подкольцом кольца R_x при условии, что x не является делителем нуля. Другой пример: пусть $S = R - P$, где P — простой идеал. Тогда кольцо $S^{-1}R$, обозначаемое обычно через R_P , является локальным кольцом (т. е. обладает единственным максимальным идеалом PR_P , состоящим из необратимых элементов кольца R_P). Простые идеалы кольца R_P естественным образом сопоставляются простым идеалам кольца R , содержащимся в P . Если R — целозамкнутая область, то R_P — целозамкнутая об-

ласть. Если кольцо R нётерово, то таково же и R_P . Если M — максимальный идеал в R , то поля R/M и R_M/MR_M естественным образом изоморфны, и каноническое отображение $R \rightarrow R_M$ индуцирует изоморфизм векторных пространств $M/M^2 \rightarrow MR_M/(MR_M)^2$ [Л, II, § 3], [АМ, гл. 3].

0.11. Лемма Накаямы. Пусть R — кольцо, M — его максимальный идеал, и V — конечно порожденный R -модуль, для которого $V = MV$. Тогда существует элемент $x \notin M$ такой, что $xV = 0$. В частности, если кольцо R локально (с единственным максимальным идеалом M), то элемент x должен быть обратимым и, следовательно, $V = 0$ [АМ, 2.5, 2.6], [Л, IX, § 1].

0.12. Размерность Крулля (нётерова) локального кольца R есть максимальная длина цепи простых идеалов $0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq P_k \subsetneq P$. Если размерность Крулля равна минимальному числу образующих максимального идеала M кольца R , то кольцо R называется регулярным.

Теорема. Регулярное локальное кольцо есть область целостности, целозамкнутая в своем поле частных [АМ, гл. 11], [ЗС, VIII, § 11; ср. с добавлением 6].

0.13. Пусть I — идеал в нётеровом кольце R , и пусть $P_1, \dots, P_t$ — минимальные простые идеалы, содержащие I . Образ пересечения $P_1 \cap \dots \cap P_t$ в факторкольце R/I есть нильрадикал кольца R/I и является нильпотентным идеалом. В частности, для достаточно большого n имеет место соотношение $P_1^n P_2^n \dots P_t^n \subset (P_1 \cap \dots \cap P_t)^n \subset I$ [АМ, 7.15], [Л, VI, § 4].

0.14. Расширение E поля F называется сепарабельным, если либо $\text{char } F = 0$, либо $\text{char } F = p > 0$ и p -е степени элементов $x_1, \dots, x_n \in E$, линейно независимых над F , снова являются линейно независимыми над F . Это обобщает обычное понятие сепарабельного расширения, если степень $[E : F]$ конечна. Поле $E = F(x_1, \dots, x_n)$ называется сепарабельно порожденным над F , если E — конечное сепарабельное расширение чисто трансцендентного расширения поля F . Для конечно порожденного расширения E/F «сепарабельная порожденность» эквивалентна «сепарабельности», и расширение E/F автоматически сепарабельно, если поле F

совершенно. Если $F \subset L \subset E$ и расширение E/F сепарабельно, то и расширение L/F сепарабельно. Если $F \subset L \subset E$ и расширения E/L и L/F сепарабельны, то E/F сепарабельно [ЗС, II, § 13], [Л, X, § 6] *).

0.15. Дифференцирование δ : $E \rightarrow L$, где E — поле, L — расширение поля E , есть отображение, которое обладает свойствами $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$ и $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$. Если F — подполе поля E , то δ называется F -дифференцированием, если дополнительно выполняется условие $\delta(x) = 0$ для всех $x \in F$ (так что отображение δ является F -линейным). Пространство $\text{Der}_F(E, L)$ всех F -дифференцирований $E \rightarrow L$ есть векторное пространство над L , размерность которого равна $\text{tr. deg}_F E$, если расширение E/F является сепарабельно порожденным. Расширение E/F сепарабельно тогда и только тогда, когда все дифференцирования $F \rightarrow L$ продолжаются до дифференцирований $E \rightarrow L$ (здесь L — расширение поля E). Если $\text{char } E = p > 0$, то все дифференцирования обращаются в нуль на подполе E^p p -х степеней элементов поля E [ЗС, II, § 17], [Л, X, § 7].

§ 1. Аффинные и проективные многообразия

В этом разделе мы рассматриваем подмножества аффинного или проективного пространства, определенные полиномиальными уравнениями, уделяя особое внимание способу, при помощи которого геометрические свойства этих множеств трансформируются в алгебраические свойства полиномиальных колец. K всегда обозначает алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики.

1.1. Идеалы и аффинные многообразия. Множество $K^n = K \times \dots \times K$ мы будем называть **аффинным n -пространством** и обозначать через A^n . Под **аффинным многообразием** мы будем подразумевать (предварительно) множество общих нулей в A^n конечной системы полиномов. Мы имеем в виду кривые, поверхности и т. п. Но систему полиномов, определяющих геометри-

*) На стр. 68 использовано еще понятие чисто несепарабельного расширения полей (см. Л, VII, § 7) и на стр. 70 — понятие сепарабельного полинома (см. Л, VII, § 4). — *Прим. перев.*

ческое множество, можно в некоторой степени варьировать, не оказывая влияния на геометрию; поэтому мы хотим установить более тесное соответствие между геометрией и алгеброй. В качестве первого шага заметим, что идеал в кольце $K[T] = K[T_1, \dots, T_n]$, порожденный множеством полиномов $\{f_\alpha(T)\}$, имеет в точности те же нули, что $\{f_\alpha(T)\}$. Кроме того, теорема Гильберта о базисе (0.1) утверждает, что каждый идеал в кольце $K[T]$ имеет конечное множество образующих, так что каждому идеалу соответствует аффинное многообразие. К сожалению, это соответствие не является взаимно однозначным: например, идеалы, порожденные полиномами T и T^2 , различны, но имеют одно и то же множество нулей $\{0\}$ в A^1 . Мы сейчас попытаемся разобраться в этом явлении.

Формально мы можем сопоставить каждому идеалу I в $K[T]$ множество $\mathcal{V}(I)$ его общих нулей в A^n , и каждому подмножеству $X \subset A^n$ совокупность всех $\mathcal{I}(X)$ полиномов, обращающихся в 0 на X . Ясно, что $\mathcal{I}(X)$ — идеал и что имеют место включения

$$X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)),$$

$$I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)).$$

Разумеется, ни одно из них не обязано быть равенством (примеры?). Рассмотрим более тщательно второе включение. По определению **радикал** $\sqrt{I}$ идеала I есть множество $\{f(T) \in K[T] \mid f(T)^r \in I \text{ для некоторого } r \geq 0\}$. Легко видеть, что $\sqrt{I}$ есть идеал, содержащий I . Если полином $f(T)$ не обращается в 0 в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$, то и полином $f(T)^r$ не обращается в нуль в точке x для любого $r \geq 0$. Отсюда следует, что $\sqrt{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. На самом деле имеет место равенство — факт, который является ключевым, хотя интуитивно отнюдь не очевидным.

Теорема (теорема Гильберта о нулях). Если I — любой идеал кольца $K[T_1, \dots, T_n]$, то $\sqrt{I} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

Доказательство. Ввиду конечной порожденности идеала I теорема эквивалентна следующему утверждению: для любых полиномов $f(T), f_1(T), \dots, f_s(T)$ из $K[T]$ таких, что полином $f(T)$ обращается в нуль в каждой точке $x \in A^n$, в которой обращаются в нуль

все полиномы $f_1(T), \dots, f_s(T)$, существует $r > 0$ и полиномы $g_1(T), \dots, g_s(T)$, удовлетворяющие соотношению: $f(T)^r = \sum_{i=1}^s g_i(T) f_i(T)$.

Мы покажем сначала, что это утверждение вытекает из следующего:

(*) Если $\mathcal{V}(I) = \emptyset$, то $I = K[T]$.

(Отметим, что это — частный случай доказываемой теоремы, поскольку лишь идеал $K[T]$ может иметь $K[T]$ в качестве радикала!) Введем новую переменную T_0 и рассмотрим совокупность полиномов от $(n+1)$ -й переменной $f_1(T), \dots, f_s(T), 1 - T_0 f(T)$. Они не имеют общих нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$ ввиду условия, наложенного на $f(T)$, поэтому из (*) вытекает, что они порождают кольцо $K[T, T_0]$. Найдем полиномы $h_i(T_0, \dots, T_n)$ и $h(T_0, T_n)$, для которых $1 = h_1(T_0, T) f_1(T) +$

$+ h_s(T_0, T) f_s(T) + h(T_0, T) (1 - T_0 f(T))$. Теперь подставим везде вместо T_0 выражение $1/f(T)$ и затем умножим на достаточно высокую степень $f(T)^r$, чтобы устранить знаменатели. В результате получим желаемое соотношение.

Остается доказать утверждение (*) или равносильное утверждение, что каждый собственный идеал кольца $K[T]$ имеет в $\mathbb{A}^n$ по крайней мере один общий нуль. (В частном случае $n=1$ это следует непосредственно из того факта, что поле K алгебраически замкнуто.) Попытаемся теперь наивно сконструировать общий нуль для полиномов идеала I . По лемме Цорна I лежит в максимальном идеале кольца $K[T]$, и общий нуль этого последнего идеала будет служить общим нулем и для идеала I . Поэтому мы можем предполагать, что идеал I максимален. Тогда кольцо классов вычетов $L = K[T]/I$ является полем; элементы поля K можно отождествить с классами вычетов скалярных полиномов. Если мы обозначим через t_i класс вычетов полинома T_i , то, очевидно, $L = K[t_1, \dots, t_n]$ (правая часть равенства обозначает наименьшее подкольцо в L , содержащее K и t_i). Кроме того, набор $(t_1, \dots, t_n)$ есть, по построению, общий нуль полиномов идеала I . Если бы мы могли отождествить поле L с K , то элементы t_i

принадлежали бы полю K . Но поле K алгебраически замкнуто; поэтому нам достаточно было бы показать, что элементы t_i алгебраичны над K , а именно это и содержится в утверждении (0.3). $\square$

Теорема о нулях влечет, что операторы $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех радикальных идеалов в $K[T]$ (т. е. идеалов, совпадающих со своими радикалами) и совокупностью всех аффинных многообразий в A^n . В самом деле, если $X = \mathcal{V}(I)$, то $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$, так что X совпадает с $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ (идеалы I и $\sqrt{I}$ имеют одно и то же множество общих нулей). С другой стороны, если $I = \sqrt{I}$, то I совпадает с $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Отметим, что соответствия $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ и $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ изменяют отношение включения на обратное. Таким образом, свойство нётеровости кольца $K[T]$ влечет условие обрыва убывающих цепей аффинных многообразий в A^n .

Примеры радикальных идеалов доставляют простые (в частности, максимальные) идеалы. Мы рассмотрим многообразия, соответствующие простым идеалам, в (1.3). Сейчас мы обсудим только случай $X = \mathcal{V}(I)$, где I — максимальный идеал. Теорема о нулях гарантирует нам, что X не пусто; пусть $x \in X$. Ясно, что $I \subset \mathcal{I}(\{x\}) \subsetneq K[T]$, поэтому ввиду максимальной

идеала I мы имеем $I = \mathcal{I}(\{x\})$ и $X = \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\{x\})) = \{x\}$. С другой стороны, если $x \in A^n$, то отображение $f(T) \rightarrow f(x)$ определяет гомоморфизм кольца $K[T]$ в K , ядро которого $\mathcal{I}(\{x\})$ является максимальным идеалом, ибо K — поле. Таким образом, точки пространства A^n взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам кольца $K[T]$.

Линейным многообразием, проходящим через точку $x \in A^n$, называется множество нулей полиномов вида $\sum a_i(T_i - x_i)$. Это — в точности векторное подпространство пространства A^n , если рассматривать A^n как векторное пространство с началом координат в точке x . Из теоремы о нулях (или линейной алгебры!) следует, что любой линейный полином, обращающийся в нуль на таком многообразии, является K -линейной комбинацией полиномов, указанных выше.

1.2. Топология Зарисского на аффинном пространстве.

Если бы K было полем комплексных чисел, то в A^n можно было бы задать топологию комплексного векторного пространства. Тогда множество нулей полинома $f(T)$ было бы замкнутым, как прообраз замкнутого множества $\{0\}$ в $\mathbb{C}$ относительно непрерывного отображения $x \mapsto f(x)$. Множество общих нулей системы полиномов также было бы замкнутым как пересечение замкнутых множеств. Разумеется, в комплексном n -мерном пространстве в изобилии имеются и другие замкнутые множества, как это видно уже при $n = 1$.

Идея топологизировать аффинное n -пространство, приняв в качестве замкнутых множеств систему всех аффинных многообразий, оказывается весьма плодотворной. Она приводит к топологии, называемой **топологией Зарисского**. Естественно, при этом нужно проверить, что выполнены аксиомы топологии: (1) A^n и $\emptyset$ — замкнутые множества, как множества нулей идеалов (0) и $K[T]$. (2) Если I, J — два идеала, то, очевидно, $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I \cap J)$. Чтобы установить обратное включение, предположим, что x есть нуль идеала $I \cap J$, но не является нулем идеала I или идеала J . Пусть $f(T) \in I$, $g(T) \in J$ и $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Так как $f(T)g(T) \in I \cap J$, то мы должны иметь $f(x)g(x) = 0$, что невозможно. Из этого рассуждения также следует, что конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множеством. (3) Пусть I_α — произвольный набор идеалов, и пусть $\sum_\alpha I_\alpha$ — идеал, порожденный всеми идеалами I_α . Ясно, что $\bigcap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha) = \mathcal{V}(\sum_\alpha I_\alpha)$, т. е. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Какого рода топология получается таким образом? Точки являются замкнутыми множествами, так как $x = (x_1, \dots, x_n)$ — единственный общий нуль системы полиномов $T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n$. Однако аксиома отделимости Хаусдорфа не имеет места. Это ясно уже в случае пространства A^1 — замкнутыми множествами здесь являются исключительно конечные множества (так что любые два непустых открытых множества имеют непустое пересечение). Читатель, привыкший к простран-

ствам с хорошими свойствами отделимости, должен, следовательно, поупражняться в рассуждениях с топологией Зарисского. Например, условие минимальности для замкнутых множеств (вытекающее из теоремы Гильберта о базисе) влечет условие максимальности для открытых множеств. Это показывает, что A^n есть компактное пространство. Но ввиду отсутствия условия отделимости Хаусдорфа мы не можем использовать рассуждения со сходимостью последовательностей или им подобные; по этой причине в этой ситуации иногда употребляют термин «квазикompактное пространство», оставляя термин «компактное пространство» для компактных хаусдорфовых пространств.

В качественном смысле все непустые открытые множества в A^n являются «большими» (как это можно думать о дополнении кривых в A^2 или поверхностей в A^3). Поскольку замкнутое множество $\mathcal{V}(I)$ есть пересечение множеств нулей различных полиномов $f(T) \in I$, то типичное непустое открытое множество может быть описано как объединение **главных открытых множеств** — множеств всех ненулей отдельных полиномов. Следовательно, главные открытые множества образуют базис топологии Зарисского, но и они, однако, не являются очень «малыми». Например, $GL(n, K)$ есть главное открытое множество в A^n , определяемое условием $\det(T_{ij}) \neq 0$; здесь $GL(n, K)$ — группа всех обратимых $(n \times n)$ -матриц над полем K .

1.3. Неприводимые компоненты. В топологии часто изучаются свойства связности. Но объединение двух пересекающихся кривых в A^n — связное множество, и в то же самое время его структуру можно анализировать «по компонентам». Это наводит на мысль использовать другой подход, основанный на несколько иных топологических свойствах. Имея в виду дальнейшие применения, мы опишем его в самых общих терминах.

Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что X **неприводимо**, если оно не может быть представлено как объединение двух собственных непустых замкнутых множеств. Подпространство Y пространства X называется **неприводимым**, если оно неприводимо как топологическое пространство (с индуцированной топологией). Отметим, что пространство X неприводимо тог-

да и только тогда, когда любые два непустых открытых множества в X имеют непустое пересечение, или, что равносильно, когда любое непустое открытое множество плотно в X . Очевидно, неприводимое пространство является связным, тогда как обратное не всегда верно.

Предложение А. Пусть X — топологическое пространство.

(а) Подпространство Y пространства X неприводимо тогда и только тогда, когда его замыкание $\bar{Y}$ неприводимо.

(б) Если $\varphi: X \rightarrow X'$ — непрерывное отображение и пространство X неприводимо, то и пространство $\varphi(X)$ неприводимо.

Доказательство. (а) Ввиду предыдущих замечаний пространство Y неприводимо тогда и только тогда, когда пересечение двух открытых подмножеств пространства X , каждое из которых имеет общие точки с Y , само имеет общие точки с Y ; подобное утверждение справедливо и для $\bar{Y}$. Но открытое множество имеет общие точки с Y тогда и только тогда, когда оно имеет общие точки с $\bar{Y}$.

(б) Если U, V — открытые множества в X' , которые имеют общие точки с $\varphi(X)$, то мы должны показать, что пересечение $U \cap V$ имеет общие точки с $\varphi(X)$. Но $\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(V)$ — (непустые) открытые множества в X , так что они имеют непустое пересечение (ибо X неприводимо), образ которого при отображении φ лежит в $U \cap V \cap \varphi(X)$. $\square$

Теперь мы хотим разложить аффинное многообразие на неприводимые «компоненты». В действительности соображения, использующие лемму Цорна, показывают, что любое топологическое пространство можно представить в виде объединения его максимальных неприводимых подпространств (которые непременно замкнуты ввиду части (а) предыдущего предложения). Чтобы обеспечить *конечное* разложение такого рода, мы используем тот факт, что аффинное многообразие обладает условием максимальнойности для открытых подмножеств. Этому также можно придать общую форму. Назовем топологическое пространство **нётеровым**, если любая совокупность содержащихся друг в друге открытых множеств имеет **максимальный элемент** (или если

выполняется любое из следующих равносильных этому условий: открытые множества удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей; замкнутые множества удовлетворяют условию минимальности; замкнутые множества удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей).

Предложение Б. Пусть X — нётерово топологическое пространство. Тогда X обладает лишь конечным числом максимальных неприводимых подпространств (обязательно замкнутых, причем их объединение совпадает с X).

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\mathcal{A}$ всех конечных объединений замкнутых неприводимых подмножеств пространства X (например, $\emptyset \in \mathcal{A}$). Если пространство X само не принадлежит $\mathcal{A}$, то, используя свойство нётеровости, найдем замкнутое подмножество Y пространства X , которое является минимальным среди замкнутых подмножеств (таких, как X), не принадлежащих $\mathcal{A}$. Очевидно, множество Y не является ни пустым, ни неприводимым множеством; поэтому $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_i — собственные замкнутые подмножества множества Y . Ввиду минимальности Y оба подмножества Y_1 и Y_2 лежат в $\mathcal{A}$. Но тогда множество Y должно лежать в $\mathcal{A}$, что невозможно. Это доказывает, что X принадлежит $\mathcal{A}$.

Запишем $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$, где X_i — неприводимые замкнутые множества. Если Y — произвольное максимальное неприводимое подмножество пространства X ,

то $Y \cap X_i = Y$ для некоторого i , так как $Y = \bigcup_{i=1}^n (Y \cap X_i)$.

Поэтому ввиду максимальной Y мы имеем $Y = X_i$. $\square$

Это предложение позволяет нам представить нётерово пространство в виде объединения конечного числа максимальных неприводимых подпространств; эти подпространства называются неприводимыми компонентами пространства X .

Возвратимся теперь к аффинному n -пространству. Какие из его замкнутых подмножеств $\mathcal{V}(I)$ являются неприводимыми?

Предложение В. Замкнутое множество X в пространстве A^n неприводимо тогда и только тогда, когда его

идеал $\mathcal{I}(X)$ является простым. В частности, само пространство $\mathbb{A}^n$ неприводимо.

Доказательство. Запишем $I = \mathcal{I}(X)$. Предположим, что множество X неприводимо. Чтобы доказать, что I — простой идеал, предположим, что $f_1(T) f_2(T) \in I$. Тогда каждая точка $x \in X$ является нулем либо полинома $f_1(T)$, либо полинома $f_2(T)$, т. е. X покрывается множеством $\mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$, где I_i — идеал, порожденный полиномом $f_i(T)$ ($i = 1, 2$). Так как множество X неприводимо, то оно должно целиком лежать в одном из этих множеств, т. е. либо $f_1(T) \in I$ либо $f_2(T) \in I$, так что идеал I является простым.

Предположим теперь, что I — простой идеал, но $X = X_1 \cup X_2$, где X_i — замкнутые подмножества в X ($i = 1, 2$). Если ни одно из X_i не покрывает X , то мы можем найти полиномы $f_i(T) \in \mathcal{I}(X_i)$ такие, что $f_i(T) \notin I$. Но полином $f_1(T)f_2(T)$ обращается в нуль на X , так что $f_1(T)f_2(T) \in I$, что противоречит простоте идеала I . $\square$

Как отмечено в (1.1), простой идеал всегда совпадает со своим радикалом; таким образом, только что доказанный результат уточняет установленное в (1.1) взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подмножествами аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ и радикальными идеалами кольца $K[T_1, \dots, T_n]$.

1.4. Произведения аффинных многообразий. Декартово произведение двух (или более) топологических пространств можно топологизировать довольно непосредственным образом так, чтобы получалось «произведение» в категории топологических пространств (где морфизмами являются непрерывные отображения). Так как мы еще не ввели морфизмов аффинных многообразий, то было бы преждевременно искать здесь аналогичное категорное произведение. Однако естественно желать, чтобы произведение двух аффинных многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ в теоретико-множественном отношении выглядело как декартово произведение $X \times Y \subset \mathbb{A}^{m+n}$. В частности, мы должны *определить* произведение $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ равным $\mathbb{A}^{m+n}$ и снабдить $X \times Y$ индуцированной топологией подпространства пространства $\mathbb{A}^{m+n}$. Остается выяснить, является ли $X \times Y$ аффинным мно-

гообразием, т. е. является ли $X \times Y$ *замкнутым* множеством в A^{m+n} . Ответ оказывается утвердительным: если X есть множество нулей системы полиномов $f_i(T_1, \dots, T_n)$ и Y — множество нулей системы полиномов $g_i(U_1, \dots, U_m)$, то $X \times Y$ определяется как множество нулей системы из всех полиномов $f_i(T)$ и всех полиномов $g_i(U)$, рассматриваемых как полиномы от $n + m$ переменных. (Однако не так уж ясно, как описать идеал $\mathcal{I}(X \times Y)$ через $\mathcal{I}(X)$ и $\mathcal{I}(Y)$. Очевидное предположение оказывается неверным.)

Следует подчеркнуть, что индуцированная топология на $X \times Y$ не совпадает с топологией, которую мы получили бы, приняв обычную топологию произведения. Например, в топологии произведения $A^1 \times A^1$ очень немногие множества замкнуты, в отличие от топологии, индуцированной с A^2 . Топология на $A^n \times A^m$, которая отождествляет это множество с A^{m+n} , может быть названа *топологией Зарисского произведения*.

Предложение. Пусть $X \subset A^n$, $Y \subset A^m$ — замкнутые неприводимые множества. Тогда множество $X \times Y$ замкнуто и неприводимо в A^{m+n} .

Доказательство. Нам остается проверить только неприводимость. Предположим, что $X \times Y$ есть объединение двух замкнутых множеств Z_1, Z_2 . Мы должны показать, что $X \times Y$ совпадает с одним из этих множеств. Если $x \in X$, то множество $\{x\} \times Y$ замкнуто (так как множество $\{x\}$ замкнуто). Оно также неприводимо: любое разложение в объединение замкнутых множеств вело бы к подобному разложению множества Y , так как замкнутое подмножество множества $\{x\} \times Y$ должно иметь вид $\{x\} \times Z$ для некоторого замкнутого подмножества Z множества Y . Следовательно, пересечения множества $\{x\} \times Y$ с Z_1 и Z_2 не могут быть собственными подмножествами в $\{x\} \times Y$. Таким образом, $X = X_1 \cup X_2$, где $X_i = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset Z_i\}$ ($i = 1, 2$).

Заметим теперь, что каждое множество X_i замкнуто в X : множество $X \times \{y\}$ замкнуто для каждого $y \in Y$, так что и множество $(X \times \{y\}) \cap Z_i$ замкнуто; это в свою очередь приводит к тому, что множество $X_y^{(i)}$ первых координат замкнуто в X , и остается заметить, что $X_i = \bigcap_{y \in Y} X_y^{(i)}$.

Из неприводимости множества X теперь следует, что $X = X_1$, либо $X = X_2$, т. е. либо $X \times Y = Z_1$ либо $X \times Y = Z_2$. $\square$

1.5. Аффинные алгебры и морфизмы. Каждой категории нужны морфизмы. Так как аффинные многообразия определяются полиномиальными уравнениями, то вполне естественно обратиться к **полиномиальным функциям**. Если множество X замкнуто в A^n , то каждый полином $f(T) \in K[T]$ определяет функцию на X со значениями в K по правилу $x \mapsto f(x)$. Однако различные полиномы могут определять одну и ту же функцию; на самом деле простым рассуждением читатель может убедиться, что различные полиномиальные функции на X находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами кольца классов вычетов $K[T]/\mathcal{I}(X)$. Мы обозначим это кольцо через $K[X]$ и будем называть его **аффинной алгеброй** множества X (или **алгеброй полиномиальных функций** на X). Это конечно порожденная алгебра над полем K , которая является **приведенной** (т. е. не имеет ненулевых нильпотентных элементов) по той причине, что идеал $\mathcal{I}(X)$ совпадает со своим радикалом. Если множество X неприводимо, т. е. если $\mathcal{I}(X)$ — простой идеал (предложение 1.3.B), то кольцо $K[X]$ есть область целостности. Поэтому мы можем рассматривать его поле частных; оно обозначается через $K(X)$ и называется **полем рациональных функций** на X . Это поле является конечно порожденным расширением поля K . Хотя иногда мы вынуждены будем работать с приводимыми многообразиями, наши рассуждения, как правило, будут основаны на редукции к неприводимому случаю, когда поле функций оказывается незаменимым инструментом.

Аффинная алгебра $K[X]$ находится в таком же отношении к X , как $K[T]$ — к A^1 . С ее помощью мы можем внутренним образом сформулировать понятие «аффинного многообразия», не прибегая к пространству A^n . Начнем с того, что X — нётерово топологическое пространство (в топологии Зарисского) с базисом окрестностей, состоящим из **главных открытых множеств** $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, где $f \in K[X]$. Легко видеть, что замкнутые подмножества пространства X находятся во взаимно однозначном соответствии с радикальными

идеалами кольца $K[X]$ (следует переформулировать теорему о нулях для кольца $K[T]/\mathcal{I}(X)$), неприводимые множества взаимно однозначно соответствуют простым идеалам кольца $K[X]$. В частности, точки пространства X соответствуют взаимно однозначно максимальным идеалам кольца $K[X]$, или гомоморфизмам K -алгебр $K[X] \rightarrow K$. Таким образом, пространство X в известном смысле восстанавливается по $K[X]$.

Пусть теперь R — произвольная конечно порожденная приведенная коммутативная алгебра над полем K , скажем $R = K[t_1, \dots, t_n]$ (число n и выбор образующих не единственны). Тогда R — гомоморфный образ алгебры $K[T_1, \dots, T_n]$, которая является «универсальной» среди ассоциативных коммутативных K -алгебр с n образующими. Кроме того, тот факт, что алгебра R является приведенной, в точности означает, что ядро эпиморфизма, отображающего T_i в t_i , есть радикальный идеал I . Таким образом, алгебра R изоморфна аффинной алгебре многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$, определенного идеалом I . Это указывает путь к установлению эквивалентности категорий, к чему мы вскоре обратимся. Одно из преимуществ этого подхода заключается в том, что он позволяет нам наделять любое главное открытое подмножество X_f неприводимого аффинного многообразия X своей собственной структурой аффинного многообразия (в аффинном пространстве более высокой размерности): определим R как подкольцо поля $K(X)$, порожденное $K[X]$ и $1/f$, и заметим, что R автоматически оказывается (приведенной) конечно порожденной K -алгеброй. Кроме того, максимальные идеалы кольца R находятся во взаимно однозначном соответствии с их пересечениями с $K[X]$, которые в точности являются максимальными идеалами, не содержащими f . В свою очередь точки аффинного многообразия, определенного K -алгеброй R , естественным образом соответствуют точкам множества X_f . То, что мы проделали, является в действительности отождествлением точек множества $X_f \subset X \subset \mathbb{A}^n$ с точками $(x_1, \dots, x_n, 1/f(x))$ в $\mathbb{A}^{n+1}$.

Пусть теперь $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ — произвольные аффинные многообразия. Под морфизмом $\varphi: X \rightarrow Y$ мы понимаем отображение вида $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))$, где $\psi_i \in K[X]$. Отметим, что морфизм $X \rightarrow$

$\rightarrow Y$ всегда индуцирован морфизмом $A^n \rightarrow A^m$ (использовать любые прообразы полиномиальных функций ψ : в алгебре $K[A^n] = K[T]$) и что морфизм $X \rightarrow A^1$ — не что иное, как полиномиальная функция на X . Морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ непрерывен относительно топологий Зарисского на X и Y . В самом деле, если $Z \subset Y$ — множество нулей полиномиальных функций f_i на Y , то $\varphi^{-1}(Z)$ — множество нулей полиномиальных функций $f_i \circ \varphi$ на X .

С морфизмом $\varphi: X \rightarrow Y$ ассоциируется его **коморфизм** $\varphi^*: K[Y] \rightarrow K[X]$, определяемый соотношением $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Очевидно, что образ отображения φ^* лежит в $K[X]$, что φ^* — гомоморфизм K -алгебр и что имеют место обычные функториальные свойства: 1^* есть тождественное отображение, $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Кроме того, коморфизм φ^* определяет φ : алгебра $K[Y]$ порождается над K ограничениями на Y координатных функций $T_1, \dots, T_m$ на пространстве A^m ; обозначим эти ограничения через t_i ; тогда $\varphi^*(t_i)$ оказываются в точности функциями, использованными при определении φ выше. Это показывает, что каждый гомоморфизм K -алгебр возникает как коморфизм $K[Y] \rightarrow K[X]$ некоторого морфизма $X \rightarrow Y$.

Проведенное рассуждение устанавливает в действительности (контравариантную) эквивалентность между категориями аффинных K -алгебр (с гомоморфизмами в качестве морфизмов) и аффинных многообразий (с морфизмами, введенными выше). Этот способ рассмотрения аффинных многообразий, независимый от специфического вложения в аффинное пространство, будет еще обсуждаться в § 2. Будет показано, что произведение, определенное в (1.4), является категорным произведением и соответствует *тензорному произведению* K -алгебр (которое, как известно, является «копроизведением» в категории коммутативных колец).

Предположим, что $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм, для которого множество $\varphi(X)$ плотно в Y . Тогда коморфизм φ^* *инъективен* (см. упражнение 11 или (2.5) ниже). В частности, если X и Y — неприводимые многообразия, то φ^* индуцирует вложение поля $K(Y)$ в $K(X)$.

1.6. Проективные многообразия. Геометры давно признали преимущества работы в «проективном простран-

стве», где поведение точек в бесконечности можно изучать таким же образом, как и в любом другом месте. С алгебраической точки зрения теория проективных многообразий строится параллельно теории аффинных многообразий с использованием однородных полиномов вместо произвольных полиномов в аффинном случае. Здесь мы дадим только краткое введение, приспособленное для дальнейших применений. В § 2 аффинная и проективная теории будут излагаться в рамках общей теории «многообразий», а в § 6 мы систематически исследуем вопрос о «полноте» проективных многообразий (аналог компактности).

Проективное n -пространство $\mathbf{P}^n$ можно определить как совокупность классов эквивалентности точек множества $K^{n+1} - \{(0, 0, \dots, 0)\}$ относительно следующего отношения эквивалентности:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in K^*$ такой, что $y_i = ax_i$ для всех i . Интуитивно, $\mathbf{P}^n$ — это в точности совокупность всех прямых, проходящих через начало координат в K^{n+1} . Иногда бывает удобно, работая с векторным пространством V размерности $n+1$, отождествлять множество всех одномерных подпространств пространства V с $\mathbf{P}^n$; в этом случае вместо $\mathbf{P}^n$ мы используем запись $\mathbf{P}(V)$.

Каждая точка в пространстве $\mathbf{P}^n$ описывается **однородными координатами** $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, которые определены не однозначно, а с точностью до ненулевого множителя из поля K . Если мы хотим рассматривать в $\mathbf{P}^n$ множества, являющиеся совокупностью решений полиномиальных уравнений (от переменных $X_0, X_1, \dots, X_n$), то такая неоднозначность вынуждает нас требовать, чтобы эти полиномы были однородными. Напомним, что полином $f(X_0, \dots, X_n)$ является **однородным** степени d , если он есть линейная комбинация одночленов $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots$

$X_n^{i_n}$, у которых $\sum_{j=1}^n i_j = d$. Такой полином удовлет-

воряет уравнению $f(ax_0, \dots, ax_n) = a^d f(x_0, \dots, x_n)$; в частности, если он обращается в нуль при одном вы-

боре однородных координат некоторой точки в $\mathbf{P}^n$, то он обращается в нуль и при любом другом выборе координат этой точки.

Теперь мы можем топологизировать пространство $\mathbf{P}^n$, выбирая в качестве замкнутых множеств общие нули системы однородных полиномов или, если угодно, идеала, который они порождают. Отметим, что идеал, порожденный множеством однородных полиномов, есть **однородный идеал** (т. е. он содержит однородные части всех своих элементов). Как и в аффинном случае, мы можем определить операторы $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}$, устанавливая сохраняющее включение соответствие между **проективными многообразиями** (замкнутыми множествами пространства $\mathbf{P}^n$) и однородными идеалами. Как в аффинном случае, идеалы вида $\mathcal{I}(X)$ являются радикальными идеалами. Здесь также имеется свой вариант теоремы о нулях, который требует только незначительных пояснений. Именно, идеал I_0 , порожденный полиномами $X_0, \dots, X_n$, является собственным, но, конечно, не имеет нулей в $\mathbf{P}^n$ (поскольку начало координат из K^{n+1} было удалено). Таким образом, мы приходим к следующей формулировке, которую читатель легко может проверить, используя аффинную теорему о нулях (1.1).

Предложение. *Операторы $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}$ устанавливают взаимно однозначное соответствие (с изменением включения) между замкнутыми подмножествами пространства $\mathbf{P}^n$ и однородными радикальными идеалами кольца $K[X_0, \dots, X_n]$, отличными от I_0 . $\square$*

Рассуждения о неприводимых компонентах в (1.3) с успехом проходят и здесь. В частности, неприводимые проективные многообразия соответствуют однородным простым идеалам (отличным от I_0).

Как и в аффинном случае, главные открытые подмножества образуют базис топологии Зарисского в $\mathbf{P}^n$. Некоторые из них особенно полезны ввиду того, что они естественным образом изоморфны аффинному n -пространству. (Это указывает на связи с аффинным случаем, которые будут использованы при общем обсуждении «многообразий» в § 2). Пусть U_i — множество точек пространства $\mathbf{P}^n$ с ненулевой i -й однородной координатой. Тогда точки множества U_i взаимно однозначно соответствуют точкам аффинного n -пространства $\mathbf{A}^n$ при

отображении $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$. Эти частные однородных координат называются **аффинными координатами** на U_i ($0 \leq i \leq n$). Заметим, что множества U_i покрывают пространство $\mathbb{P}^n$.

Соответствием между U_i и $\mathbb{A}^n$ не только теоретико-множественное: согласуются также и топологии Зарисского. Чтобы убедиться в этом, введем переменные $T_1, \dots, T_n$. Каждому полиному $f(T_1, \dots, T_n)$ мы можем сопоставить однородный полином

$$X_i^{\deg f} f(X_0/X_i, \dots, X_{i-1}/X_i, X_{i+1}/X_i, \dots, X_n/X_i),$$

где $\deg f$ — наибольшая степень одночленов, входящих в $f(T)$. Тогда, если $X \subset \mathbb{A}^n$ — множество нулей некоторых полиномов $f(T)$, то образ множества X в U_i есть пересечение множества U_i с множеством нулей в $\mathbb{P}^n$ соответствующих однородных полиномов. В обратную сторону, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — множество нулей некоторой совокупности однородных полиномов $f(X_0, \dots, X_n)$. Для каждого i рассмотрим полином

$$f(X_0/X_i, \dots, X_{i-1}/X_i, 1, X_{i+1}/X_i, \dots, X_n/X_i) = g(T_1, \dots, T_n),$$

где $T_k = X_k/X_i$. Ясно, что множество $X \cap U_i$ соответствует множеству нулей в $\mathbb{A}^n$ этих полиномов $g(T)$.

Основной момент приведенного рассуждения заключается в том, что подмножество пространства $\mathbb{P}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с аффинными открытыми множествами U_i все замкнуто в U_i (здесь U_i канонически отождествляется с $\mathbb{A}^n$). В более общей форме, если X — замкнутое подмножество пространства $\mathbb{P}^n$, то подмножество $Y \subset X$ замкнуто в X (или в $\mathbb{P}^n$) тогда и только тогда, когда все пересечения $Y \cap U_i$ замкнуты. Этот «аффинный критерий» в самое ближайшее время найдет эффективное применение.

1.7. Произведения проективных многообразий. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ — два проективных многообразия. Если существует некоторое «произведение» многообразий X и Y , то множество его элементов должно быть декартовым произведением X и Y . Но это множество не может быть непосредственно отождествлено с подмножеством

множества $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ ввиду особых свойств однородных координат. Вместо этого мы должны прибегнуть к более изощренному способу вложения. С этой целью мы рассмотрим отображение прямого произведения $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ в $\mathbf{P}^q$, где $q = (n+1)(m+1) - 1$, задаваемое соотношением

$$\begin{aligned} \varphi((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_m)) = \\ = (x_0y_0, \dots, x_0y_m, x_1y_0, \dots, x_1y_m, \dots, x_ny_0, \dots, x_ny_m). \end{aligned}$$

Заметим, что это отображение определено корректно.

Мы хотим показать, что образ отображения φ замкнут в $\mathbf{P}^q$, используя аффинный критерий, полученный в (1.6). Обозначим однородные координаты в $\mathbf{P}^n$ через X_i , в $\mathbf{P}^m$ — через Y_j и в $\mathbf{P}^q$ — через Z_{ij} ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$). Пусть $\mathbf{P}_i^n$, $\mathbf{P}_j^m$, $\mathbf{P}_{ij}^q$ — соответствующие аффинные открытые подмножества с аффинными координатами S_i , T_j , U_{ij} . Очевидно, φ отображает $\mathbf{P}_i^n \times \mathbf{P}_j^m$ в $\mathbf{P}_{ij}^q$. Для упрощения обозначений мы разберем только (типичный) случай $i = j = 0$. В аффинных координатах φ отображает $((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_m))$ в $(\dots, u_{kl}, \dots)$, где $u_{kl} = s_k t_l$ ($k, l \geq 1$), $u_{k0} = s_k$, $u_{0l} = t_l$. Следовательно, образ отображения φ в $\mathbf{P}_{00}^q$ является в точности множеством решений уравнений $U_{kl} = U_{k0}U_{0l}$ ($k, l \geq 1$) и, значит, является замкнутым множеством, что и требовалось.

Кроме того, легко построить обратное отображение на каждом аффинном открытом множестве $\mathbf{P}_{ij}^q$; например, на $\mathbf{P}_{00}^q$ отобразим $(\dots, u_{kl}, \dots)$ в $((u_{10}, \dots, u_{n0}), (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}))$. Таким образом, φ в действительности индуцирует изоморфизмы аффинных произведений $\mathbf{P}_i^n \times \mathbf{P}_j^m$ на их образы. Это позволяет нам, наконец, перейти к произвольным замкнутым множествам $X \subset \mathbf{P}^n$, $Y \subset \mathbf{P}^m$. Множество X является объединением своих пересечений X_i с $\mathbf{P}_i^n$, и каждое множество X_i замкнуто в аффинном пространстве $\mathbf{P}_i^n$; то же самое справедливо и для Y . Ввиду (1.4) множество $X_i \times Y_j$ замкнуто в $\mathbf{P}_i^n \times \mathbf{P}_j^m$ и, следовательно, отображается изоморфно на замкнутое подмножество аффинного открытого множества $\varphi(\mathbf{P}_i^n \times \mathbf{P}_j^m)$ в $\varphi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$. Из аффинного крите-

рия (1.6) следует, что множество $\varphi(X \times Y)$ замкнуто в $\varphi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$, которое в свою очередь замкнуто в $\mathbf{P}^q$. Реализуя, получаем

Предложение. *Отображение $\varphi: \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^{nm+n+m}$ является биекцией на замкнутое подмножество. Если множество X замкнуто в $\mathbf{P}^n$, а Y замкнуто в $\mathbf{P}^m$, то множество $\varphi(X \times Y)$ замкнуто в $\mathbf{P}^{nm+n+m}$. $\square$*

Таким образом, декартово произведение двух проективных многообразий можно отождествить с некоторым проективным многообразием. К счастью, способ, при помощи которого это делается, оказывается хорошо приспособленным к категорному понятию «произведения» (2.4).

1.8. Многообразия флагов. Некоторые из наиболее интересных (с нашей точки зрения) примеров проективных многообразий получаются в результате следующей конструкции, восходящей к Грассману.

Пусть V — векторное пространство размерности n над K , и пусть $\wedge V$ — его **внешняя алгебра** (факторалгебра тензорной алгебры на V по идеалу, порожденному всеми элементами $v \otimes v$ ($v \in V$)). Напомним, что $\wedge V$ — конечномерная градуированная алгебра над K , причем $\wedge^0 V = K$, $\wedge^1 V = V$. Если $v_1, \dots, v_n$ — упорядоченный базис пространства V , то $\binom{n}{d}$ внешних произведений $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_d$) образуют базис пространства $\wedge^d V$. Отметим, что пространство $\wedge^n V$ является одномерным, т. е. внешнее произведение элементов произвольного базиса пространства V отличается от $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ ненулевым скалярным множителем. Если W — подпространство пространства V , то пространство $\wedge^d W$ канонически отождествляется с подпространством пространства $\wedge^d V$.

Все эти замечания показывают, что существует отображение ψ множества $\mathcal{G}_d(V)$ всех d -мерных подпространств пространства V в $\mathbf{P}(\wedge^d V)$, задаваемое сопоставлением подпространству D точки проективного пространства, которая соответствует прямой $\wedge^d D$ ($d \geq 1$). Оказывается, отображение ψ *инъективно*. В самом деле, пусть D, D' — два d -мерных подпространства. Выберем базис пространства V так, чтобы векторы $v_1, \dots, v_d$

порождали D , а векторы $v_r, \dots, v_{r+d-1}$ порождали D' . Тогда элемент $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ не может быть пропорционален элементу $v_r \wedge \dots \wedge v_{r+d-1}$, за исключением случая $r = 1$, т. е. $D = D'$.

Чтобы снабдить $\mathcal{G}_d(V)$ структурой проективного многообразия, достаточно теперь проверить, что образ отображения ψ замкнут. Ввиду аффинного критерия (1.6) достаточно проверить это на аффинных открытых множествах, которые покрывают пространство $\mathbf{P}(\wedge^d V)$. (Разумеется, крайние случаи $d = 1$, $d = n$ не требуют никакой проверки, так как тогда пространство $\mathcal{G}_d(V)$ есть соответственно $\mathbf{P}(V)$ или точка.)

Зафиксируем упорядоченный базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства V и соответствующий базис пространства $\wedge^d V$, состоящий из элементов $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$. Типичное аффинное открытое множество U в $\mathbf{P}(\wedge^d V)$ состоит тогда из точек, однородная координата которых относительно базисного вектора (скажем) $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ является ненулевой. Мы хотим показать, что пересечение множества $\text{Im } \psi$ с U является замкнутым подмножеством. Обозначим через D_0 пространство, натянутое на векторы $v_1, \dots, v_d$. Ясно, что $\psi(D)$ принадлежит U тогда и только тогда, когда естественная проекция пространства V на D_0 отображает D изоморфно на D_0 . В этом случае прообразы элементов $v_1, \dots, v_d$ относительно этой проекции образуют базис пространства D вида $v_i + x_i(D)$, где $x_i(D) = \sum_{j>d} a_{ij} v_j$. (И это единственный базис пространства D такого вида.) Внешнее произведение элементов этого базиса выглядит следующим образом:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d + \sum_{1 \leq i \leq d} (v_1 \wedge \dots \wedge x_i(D) \wedge \dots \wedge v_d) + (*),$$

где $(*)$ — это сумма тех базисных векторов, которые содержат $d - 2$ или менее элементов $v_1, \dots, v_d$. Здесь

$$v_1 \wedge \dots \wedge x_i(D) \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{j>d} a_{ij} (v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_d)$$

с элементами v_j , вставленными вместо v_i . Таким образом, $\pm a_{ij}$ ($1 \leq i \leq d$, $d+1 \leq j \leq n$) можно рассматривать как коэффициент базисного элемента $v_1 \wedge$

$\wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_d \wedge v_j$ (элемент v_i опущен) во внешнем

произведении элементов выписанного выше базиса пространства D . Кроме того, коэффициенты в (*) являются, очевидно, *полиномиальными функциями* от a_{ij} , не зависящими от D .

Обратно, если мы возьмем $d(n-d)$ произвольных элементов a_{ij} из K , то векторы $v_i + x_i(D)$ порождают d -мерное подпространство пространства V , образ которого при отображении ψ лежит в U . Пересечение $\text{Im}(\psi) \cap U$ состоит из всех точек с (аффинными) координатами $(\dots a_{ij} \dots, f_k(a_{ij}) \dots)$, где a_{ij} произвольны и f_k — полиномиальные функции на $\mathbf{A}^{d(n-d)}$. Это множество можно рассматривать как график морфизма из аффинного пространства $\mathbf{A}^{d(n-d)}$ в другое аффинное пространство. Такой график замкнут в топологии Зарисского произведения (см. упражнение 8); в свою очередь пересечение $\text{Im}(\psi) \cap U$ замкнуто в U (см. (1.4)).

Из **грассмана** **многообразия** $\mathcal{G}_d(V)$ можно получить другие проективные многообразия следующим приемом. Флаг в пространстве V — это, по определению, цепочка $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k = V$ подпространств пространства V , каждое из которых собственным образом содержится в следующем. **Полный флаг** — это флаг, для которого $k = \dim V$ (т. е. $\dim V_{i+1}/V_i = 1$). Обозначим через $\mathcal{F}(V)$ совокупность всех полных флагов пространства V . Мы хотим наделить $\mathcal{F}(V)$ структурой проективного многообразия (которое будет называться **многообразием флагов** пространства V).

Ввиду (1.7) на декартовом произведении $\mathcal{G}_1(V) \times \mathcal{G}_2(V) \times \dots \times \mathcal{G}_n(V)$ можно задать структуру проективного многообразия. Множество $\mathcal{F}(V)$ очевидным образом отождествляется с подмножеством этого декартова произведения, и нам нужно только доказать, что оно *замкнуто*. Чтобы избежать громоздких обозначений, мы ограничимся рассмотрением произведения $\mathcal{G}_d(V) \times \mathcal{G}_{d+1}(V)$. Как только будет доказано, что множество S пар (D, D') , для которых $D \subset D'$, является замкнутым множеством, читатель без всякого труда сможет дополнить наше рассуждение.

Как и выше, мы зафиксируем базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V и рассмотрим различные аффинные открытые подмножества пространств $\mathbf{P}(\wedge^d V)$, $\mathbf{P}(\wedge^{d+1} V)$, произведения которых покрывают многообразие $\mathcal{G}_d(V) \times$

$\times \mathbb{G}_{a+1}(V)$. Мы можем ограничиться парами вида U, U' , где множество U определено, как и выше по отношению к вектору $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, а U' состоит из всех точек пространства $\mathbf{P}(\wedge^{d+1} V)$ с ненулевой координатой при базисном векторе $v_1 \wedge \dots \wedge v_{d+1}$. (Множество S всегда покрывается произведениями вида $U \times U'$.) Если образ множества D (соответственно D') лежит в U (соответственно в U'), то мы получаем (как и ранее) канонические базисы: $v_i + x_i(D)$, $1 \leq i \leq d$; $v_i + y_i(D')$, $1 \leq i \leq d+1$. Здесь $x_i(D) = \sum_{j>d} a_{ij} v_j$, $y_i(D') = \sum_{j>d+1} b_{ij} v_j$. Простое вычисление с этими базисами показывает, что $D \subset D'$ тогда и только тогда, когда $x_i(D) = y_i(D') + a_{i, d+1}(v_{d+1} + y_{d+1}(D'))$ при $1 \leq i \leq d$. Это в свою очередь может быть описано некоторыми полиномиальными соотношениями между a_{ij} , b_{ij} , откуда следует, что пересечение S с $U \times U'$ есть замкнутое множество.

Упражнения

1. Если I, J — идеалы в кольце $K[T_1, \dots, T_n]$, то напомним, что IJ — идеал, состоящий из сумм всевозможных произведений $f(T)g(T)$ ($f(T) \in I$, $g(T) \in J$). Доказать, что $\mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$. Показать на примере, что идеал IJ может собственным образом содержаться в $I \cap J$.

2. Каждый радикальный идеал в $K[T_1, \dots, T_n]$ есть пересечение простых идеалов.

3. Любое подпространство нётерова топологического пространства также нётерово.

4. Пусть X — нётерово топологическое пространство, Y — подпространство с неприводимыми компонентами $Y_1, \dots, Y_n$. Доказать, что $\bar{Y}_i$ — неприводимые компоненты пространства $\bar{Y}$.

5. Найти открытое подмножество в A^2 , которое (с заданной на нем топологией Зарисского) не изоморфно никакому аффинному многообразию. [Выбросить точку $(0, 0)$.]

6. Показать, что отображение между аффинными многообразиями, непрерывное относительно топологий Зарисского, не обязано быть морфизмом. [Рассмотреть $A^1 \rightarrow A^1$.]

7. Доказать, что проекция на одну из координат определяет морфизм $A^n \rightarrow A^1$, который не всегда переводит замкнутое множество в замкнутое.

8. График морфизма $X \rightarrow Y$ (X, Y — аффинные многообразия) замкнут в $X \times Y$. Как обстоит дело, если X, Y — проективные многообразия?

9. Закончить доказательство в (1.8) того факта, что множество $\mathcal{F}(V)$ замкнуто в произведении

$$\mathbb{G}_1(V) \times \dots \times \mathbb{G}_n(V).$$

10. Показать, что каждый автоморфизм пространства A^1 ($=$ биективный морфизм, обратный которому — снова морфизм) имеет вид $x \mapsto ax + b$ ($a \in K^*$, $b \in K$).

11. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм аффинных многообразий, для которого множество $\varphi(X)$ плотно в Y , то коморфизм $\varphi^*: K[Y] \rightarrow K[X]$ инъективен.

12. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, $f \in K(X)$. Множество точек $x \in X$, в которых функция f определена (т. е. функция f может быть записана в виде g/h , где $g, h \in K[X]$ и $h(x) \neq 0$) открыто.

Замечания. Хорошее изложение разделов алгебраической геометрии, необходимых для наших целей, имеется в книгах Мамфорда [3, гл. 1] и Шафаревича [1], [2].

§ 2. Многообразия

Понятие «предмногообразия» вводится здесь как обобщение понятий аффинного и проективного многообразий. После определений морфизмов и произведений мы обсудим в (2.5) дополнительное условие («аксиома Хаусдорфа»), которое характеризует «многообразия».

2.1. Локальные кольца. Точка в проективном многообразии обладает окрестностью, которая устроена в точности как аффинное многообразие. Такое «локальное» поведение проективных многообразий наводит на мысль пойти по этому пути далее. Имеется аналогия с теорией аналитических многообразий, где каждая точка имеет окрестность, неразличимую с открытым подмножеством евклидова пространства. Однако топология Зарисского не разделяет точки обычным образом; поэтому наша конструкция приведет (в неприводимом случае) к покрытию аффинными открытыми множествами, которые в большой степени перекрываются друг с другом.

Чтобы выяснить локальное строение аффинного многообразия X , предположим сначала, что X *неприводимо* и $K(X)$ — его поле функций. Рассмотрим рациональные функции, которые определены в точке $x \in X$, т. е. функции, представимые в виде $f = g/h$ ($g, h \in K[X]$), где $h(x) \neq 0$. Легко видеть, что эти функции образуют кольцо $\mathcal{O}_x$, которое мы назовем **локальным кольцом** точки x на X . На самом деле $\mathcal{O}_x$ получается при помощи конструкции, описанной в (0.10), и является «локальным кольцом» в обычном смысле: если $R = K[X]$, $P = \{f | f(x) = 0\}$, то $R_P = \mathcal{O}_x$. Единственный максималь-

ный идеал m_x кольца $\mathcal{O}_x$ состоит из всех рациональных функций, представимых в виде g/h ($g, h \in K[X]$), где $g(x) = 0$, $h(x) \neq 0$.

Локальные кольца неприводимого аффинного многообразия X в действительности определяют кольцо $K[X]$ и, следовательно, определяют многообразие X , как показывает следующее предложение.

Предложение. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Тогда $K[X] = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_x$.

Доказательство. Очевидно, кольцо $K[X]$ содержится во всех локальных кольцах $\mathcal{O}_x$. Обратно, пусть функция $f \in K(X)$ принадлежит всем кольцам $\mathcal{O}_x$. Это означает, что для каждого $x \in X$ функция f представима в виде $f = g/h$ для некоторых функций $g, h \in K[X]$, причем $h(x) \neq 0$. Конечно, такое представление не единственно. Рассмотрим идеал I , порожденный всеми возможными знаменателями h , когда x пробегает X . Если бы идеал I был собственным идеалом в кольце $K[X]$, то существовал бы общий нуль этого идеала на X , что невозможно. Таким образом, $I = K[X]$, что позволяет нам записать *) $f = g/1$ ($g \in K[X]$).

2.2. Предмногообразия. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Каждому (непустому) открытому подмножеству $U \subset X$ мы сопоставим подкольцо поля $K(X)$, состоящее из регулярных (т. е. всюду определенных) функций на U :

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x.$$

Например, предложение 2.1 показывает, что $\mathcal{O}_X(X) = K[X]$ или, в большей общности, что $\mathcal{O}_X(X_f) = K[X_f] = K[X]_f$ (так как локальные кольца точек аффинного многообразия X_f совпадают с их локальными кольцами на X).

$\mathcal{O}_X$ служит примером пучка функций на X . Для наших целей пучок функций на топологическом простран-

*) Здесь необходимо добавить следующее рассуждение. Так как $I = K[X]$, то существуют такие $h_i, g_i, t_i \in K[X]$, что $f = g_i/h_i$, $\sum_i t_i h_i = 1$. Умножая последнее равенство на f , получим $f = \sum_i g_i h_i \in K[X]$. — Прим. ред.

стве можно определить как функцию $\mathcal{P}$, которая сопоставляет каждому открытому подмножеству $U \subset X$ некоторую K -алгебру $\mathcal{P}(U)$, состоящую из функций на U со значениями в K , причем выполняются следующие два требования:

(S1) Если $U \subset V$ — два открытых множества и $f \in \mathcal{P}(V)$, то $f|_U \in \mathcal{P}(U)$.

(S2) Пусть открытые подмножества U_i покрывают открытое множество U (i пробегает некоторое множество индексов I). При $f_i \in \mathcal{P}(U_i)$ предположим, что функции f_i и f_j совпадают на пересечении $U_i \cap U_j$ для всех пар индексов $i, j \in I$. Тогда существует функция $f \in \mathcal{P}(U)$, ограничение которой на U_i совпадает с f_i ($i \in I$).

Ясно, что $\mathcal{O}_X$ удовлетворяет условиям (S1) и (S2). Кроме того, если $X = X_1 \cup \dots \cup X_l$ — произвольное аффинное многообразие с неприводимыми компонентами X_i , то имеется единственный разумный способ определить пучок на X , который был бы расширением пучков $\mathcal{O}_{X_i}$. Именно, запишем открытое множество $U \subset X$ в виде объединения открытых множеств $U_i = U \cap X_i$ и определим $\mathcal{O}_X(U)$ как множество функций на U со значениями в K , ограничение которых на каждом множестве U_i принадлежит $\mathcal{O}_{X_i}(U_i)$. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = K[X]$, как и в неприводимом случае.

Если X — неприводимое аффинное многообразие, мы можем восстановить локальные кольца $\mathcal{O}_x$ как слои пучка $\mathcal{O}_X$: открытые множества, содержащие данную точку, образуют обратную систему по отношению к включению, и $\mathcal{O}_x = \varinjlim_U \mathcal{O}_X(U)$ (прямой предел по си-

стеме этих открытых множеств), так как в этом случае прямой предел есть в точности объединение (в $K(X)$). (Это наталкивает на мысль определить $\mathcal{O}_x$ как такой прямой предел и в том случае, когда многообразие X не является неприводимым.)

Имея в виду пример многообразия $\mathbb{P}^n$, мы теперь определим неприводимое предмногообразие X как неприводимое нётерово топологическое пространство, снабженное пучком $\mathcal{O}_X$ функций со значениями в K и такое, что X — объединение конечного числа открытых подмножеств U_i , каждое из которых изоморфно аффин-

ному многообразию относительно ограничения пучка функций $\mathcal{O}_X|U_i$. (Ясно, как $\mathcal{O}_X$ индуцирует пучок функций на любом открытом подмножестве множества X .) Под **предмногообразием** мы будем понимать нётерово топологическое пространство X , неприводимые компоненты которого X_i — неприводимые предмногообразия, причем $\mathcal{O}_{X_i}$ и $\mathcal{O}_{X_j}$ индуцируют один и тот же пучок функций на $X_i \cap X_j$ для всех i, j . Тогда имеется единственный пучок $\mathcal{O}_X$, являющийся расширением пучков $\mathcal{O}_{X_i}$, как и в аффинном случае выше. Элементы пучка $\mathcal{O}_X(U)$ называются **регулярными функциями** на U . Открытые множества U_i называются **аффинными открытыми подмножествами** предмногообразия X . Мы также называем так любое открытое подмножество предмногообразия X , которое с индуцированным на нем пучком функций изоморфно аффинному многообразию.

Мы можем показать теперь, что $X = \mathbb{P}^n$ представляет собой неприводимое предмногообразие относительно топологии Зарисского и покрытия открытыми множествами U_i (каждое из которых соответствует $\mathbb{A}^n$) так, как это сделано в (1.6). Пучок $\mathcal{O}_X$ должен быть определен так, чтобы на U_i он индуцировал пучок, канонически определенный на $\mathbb{A}^n$. Это довольно легко сделать. Сначала сопоставим каждому элементу $x \in U_i$ его локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ в $K(\mathbb{A}^n)$; заметим, что оно не зависит от выбора множества U_i , содержащего x . Затем определим $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$, чтобы получить желаемый пучок на X .

На произвольном проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$ может быть задана индуцированная структура предмногообразия. Это справедливо также для *открытых* или *замкнутых* подмножеств любого предмногообразия ввиду следующего. Пусть, скажем, $(X, \mathcal{O}_X)$ — неприводимое предмногообразие, $U \subset X$ — (непустое) открытое множество. Сузим $\mathcal{O}_X$ до пучка функций на U , как мы это делали выше; тогда U становится также неприводимым предмногообразием. С другой стороны, если $Z \subset \subset X$ — замкнутое (и неприводимое) множество, то мы можем покрыть Z конечным числом замкнутых подмножеств Z_i аффинных многообразий U_i , покрывающих X .

Каждое множество Z_i имеет канонический пучок $\mathcal{O}_{Z_i}$, и эти пучки согласуются на пересечениях $Z_i \cap Z_j$; таким образом, они могут быть склеены, как и раньше, чтобы получился пучок $\mathcal{O}_Z$, который не зависит от сделанного выбора многообразий U_i .

Назовем подмножество топологического пространства **локально замкнутым**, если оно является пересечением открытого и замкнутого множеств. Мы будем называть локально замкнутые подмножества предмногообразия X с индуцированными на них, как описано выше, пучками функций, **подпредмногообразиями** предмногообразия X . В действительности во всех интересующих нас случаях достаточно открытых подмножеств проективных многообразий: такие подпредмногообразия будут называться **квазипроективными** многообразиями. В то же время естественно работать с несколько более общими понятиями.

Заметим, что если X — неприводимое предмногообразие, покрытое аффинными открытыми множествами U_i , то пересечения $U_i \cap U_j$ должны быть непусты ввиду неприводимости X . Отсюда следует, что U_i, U_j должны иметь одно и то же поле функций, которое мы называем **полем функций** $K(X)$ многообразия X .

2.3. Морфизмы. Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ (X, Y — предмногообразия) называется **морфизмом**, если оно согласовано с естественными структурами на X и Y , а именно, топологией и пучками функций. Таким образом, мы должны потребовать выполнения двух следующих условий:

(M1) отображение φ непрерывно;

(M2) если множество $V \subset Y$ открыто и $U = \varphi^{-1}(V)$, то $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ всякий раз, когда $f \in \mathcal{O}_Y(V)$.

Легко проверить, что это определение эквивалентно определению, данному в (1.5), если X, Y — аффинные многообразия. Очевидно, что ограничение морфизма на подпредмногообразие есть снова морфизм. Отметим, что мы получаем очевидным образом понятие **изоморфизма** предмногообразий.

Посмотрим повнимательнее на условие (M2). Соответствие $f \rightarrow f \circ \varphi$ есть гомоморфизм K -алгебр $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$, который мы обозначим через φ^* и назовем **коморфизмом** морфизма φ . (Строго говоря, φ^* сле-

довало бы здесь обозначать через φ_V^* .) В случае, если предмногообразия X, Y неприводимы и множество $\varphi(X)$ плотно в Y , коморфизм φ^* морфизма φ можно понимать глобально как кольцевой гомоморфизм $K(Y) \rightarrow K(X)$, ограничение которого на $\mathcal{O}_Y(V)$ имеет образ, лежащий в $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$. Здесь коморфизм φ^* инъективен, что позволяет нам трактовать $K(X)$ как расширение поля $K(Y)$ (ср. с аффинным случаем (1.5)).

Каково влияние морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$ на *локальные кольца*? Пусть, скажем, предмногообразия X, Y неприводимы и множество $\varphi(X)$ плотно в Y , и пусть $\varphi^*: K(Y) \rightarrow K(X)$. Так как $\mathcal{O}_x$ ($x \in X$) есть в точности объединение (совпадающее в этом случае с прямым пределом) всех $\mathcal{O}_x(U)$ (где U — открытая окрестность точки x) и то же самое имеет место для $\mathcal{O}_y$, $y \in Y$, то ясно, что φ^* отображает $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$ в $\mathcal{O}_x$ (переводя $m_{\varphi(x)}$ в m_x). Обратно, это условие (по крайней мере в неприводимом случае) можно использовать вместо (M2), так как $\mathcal{O}_x(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$.

Важно уметь распознавать, когда отображение предмногообразий является морфизмом. Для этой цели мы установим **аффинный критерий**.

Предложение. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — отображение (X, Y — предмногообразия). Предположим, что имеется покрытие Y аффинными открытыми множествами V_i ($i \in I$, I — конечное множество индексов) и покрытие X открытыми множествами U_i такие, что:

(а) $\varphi(U_i) \subset V_i$ ($i \in I$);

(б) $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_x(U_i)$ всякий раз, когда $f \in \mathcal{O}_Y(V_i)$.

Тогда φ — морфизм.

Доказательство. Сведем дело вначале к случаю, когда множества U_i все также *аффинны*: если U — аффинное открытое подмножество множества U_i , то условие (б) показывает, что композиция с φ определяет отображение $\mathcal{O}_Y(V_i) = K[V_i]$ в $\mathcal{O}_X(U) = K[U]$. Следовательно, без всякого ущерба мы можем заменить U_i на аффинное открытое покрытие (расширяя множество индексов I).

Предположения обеспечивают нам теперь, что ограничение φ на U_i есть морфизм аффинных многообразий

$\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$, так как φ_i полностью определяется гомоморфизмом K -алгебр $\varphi_i^*: K[V_i] \rightarrow K[U_i]$ (ср. (1.5)). В частности, отображение φ_i непрерывно. Теперь очевидно, что и отображение φ непрерывно.

Остается проверить (M2). Возьмем открытое множество $V \subset Y$ и положим $U = \varphi^{-1}(V)$. Если $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, то ввиду (б) мы имеем $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V \cap V_i))$. Но $\varphi^{-1}(V \cap V_i) \supset U \cap U_i$, так что $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)$ для всех $i \in I$. В свою очередь, так как U — объединение множеств $U \cap U_i$ и так как $\mathcal{O}_X$ — пучок, то $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(U)$. $\square$

В оставшейся части этого пункта мы сконцентрируем внимание на неприводимых предмногообразиях. Ясно, что регулярная функция $f \in \mathcal{O}_X(X)$ определяет морфизм $X \rightarrow \mathbf{A}^1$, но, разумеется, рациональная функция не обязана быть регулярной (ср. проективные многообразия!). Тем не менее, задав $f \in K(X)$ и аффинное покрытие $\{U_i\}$ предмногообразия X , мы видим, что подмножество множества U_i , на котором функция f определена, является открытым (упражнение 1.12), так что и подмножество U тех точек $x \in X$, в которых функция f определена, также является открытым. Поэтому f индуцирует морфизм $U \rightarrow \mathbf{A}^1$. В свою очередь подмножество множества U , на котором $f \neq 0$, является открытым; мы обозначим его через X_f . Подобным образом, мы можем определить, как и в аффинном случае, множество $\mathcal{V}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ для $f \in \mathcal{O}_X(X)$.

Два неприводимых предмногообразия X, Y могут иметь поля функций, связанные мономорфизмом $\sigma: K(Y) \rightarrow K(X)$. Мы утверждаем, что σ индуцирует «частичный морфизм», т. е. морфизм некоторого непустого открытого подмножества множества X в Y , коморфизм которого по существу совпадает с σ . В самом деле, мы сначала можем заменить X, Y на аффинные открытые подмножества; это не повлияет на поля функций. Таким образом, поле $K(Y)$ имеет вид $K(f_1, \dots, f_n)$, где $K[Y] \cong K[f_1, \dots, f_n]$. Положим $g_i = \sigma(f_i) \in K(X)$. Перейдем, как и выше, к открытому подмножеству множества X , на котором все функции g_i определены, а затем к аффинному открытому множеству U , на котором все g_i принадлежат $K[U]$. Теперь σ переводит $K[Y]$ в $K[U]$,

так что имеется единственный морфизм $U \rightarrow Y$, для которого σ является коморфизмом.

Введем, наконец понятие **бirationального морфизма**: морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ назовем бирациональным, если φ^* есть изоморфизм поля $K(Y)$ на поле $K(X)$. Неприводимые предмногообразия с изоморфными полями функций называются **бirationально эквивалентными**; однако они не всегда изоморфны (ср. A^n и P^n).

2.4. Произведения. Для пар аффинных или проективных многообразий мы смогли наделить структурой того же типа их декартово произведение (как множеств) (см. (1.4), (1.7)). Для произвольных предмногообразий наиболее надежным путеводителем будет для нас категорное понятие «произведения». **Произведение** объектов X и Y состоит из объекта Z вместе с морфизмами $\pi_1: Z \rightarrow X$, $\pi_2: Z \rightarrow Y$ (**проекции**), удовлетворяющими свойству универсального отображения: для любого объекта W и любых морфизмов $\varphi_1: W \rightarrow X$, $\varphi_2: W \rightarrow Y$ существует единственный морфизм $\psi: W \rightarrow Z$ такой, что $\pi_i \psi = \varphi_i$ ($i = 1, 2$). Это определение приспособлено к тому, чтобы обеспечить *единственность* произведения, если оно существует, но *существование* должно устанавливаться специальным построением.

Для предмногообразий X , Y их произведение Z как множество должно быть декартовым произведением: применим свойство универсальности к морфизмам $W \rightarrow \{x\}$, $W \rightarrow \{y\}$, где W — предмногообразие, состоящее из одной точки, чтобы заключить, что точки множества Z взаимно однозначно соответствуют парам (x, y) . Конструкция в (1.7) наводит на мысль о том, что произведение $X \times Y$ следует наделить структурой предмногообразия путем покрытия его произведениями различных открытых аффинных подмножеств предмногообразий X и Y . Поэтому мы вначале более подробно рассмотрим аффинную ситуацию.

Предложение. Пусть $X \subset A^n$, $Y \subset A^m$ — аффинные многообразия, и пусть $R = K[X]$, $S = K[Y]$. Снабдим декартово произведение $X \times Y$ топологией Зарисского произведения (1.4). Тогда:

(а) $X \times Y$ вместе с проекциями $\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X$ и $\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ есть произведение (в категорном смысле) предмногообразий X , Y и $K[X \times Y] \cong R \otimes_K S$.

(б) Если $(x, y) \in X \times Y$, то $\mathcal{O}_{(x, y)}$ есть локализация кольца $\mathcal{O}_x \otimes_K \mathcal{O}_y$ по (максимальному) идеалу $m_x \otimes \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \otimes m_y$.

Доказательство. (а) Опишем сначала аффинную алгебру множества $X \times Y$, которое по построению есть замкнутое подмножество пространства $\mathbf{A}^{n+m}$. При помощи проекций полиномиальные функции на X, Y индуцируют полиномиальные функции на $X \times Y$. Сопоставим каждой паре функций $(g, h) \in R \times S$ полиномиальную функцию $f(x, y) = g(x)h(y)$ на $X \times Y$. Это отображение билинейно по каждой из переменных g, h , так что оно индуцирует гомоморфизм K -алгебр $\sigma: R \otimes_K S \rightarrow K[X \times Y]$. Ясно, что каждый полином от $m+n$ переменных $T_1, \dots, T_n, U_1, \dots, U_m$ выражается в виде конечной суммы произведений $g(T)h(U)$. Это показывает, что гомоморфизм σ сюръективен (полиномиальные функции на $X \times Y$ являются ограничениями полиномиальных функций на $\mathbf{A}^{m+n}$).

Чтобы показать, что гомоморфизм σ инъективен, предположим, что он отображает элемент $f = \sum_{i=1}^r g_i \otimes h_i$ в нуль. Мы можем считать, что в записи f число r выбрано минимально возможным. Мы утверждаем, что если $f \neq 0$, то $r = 1$. В самом деле, в этом случае не все функции h_i равны нулю, так что мы можем зафиксировать некоторую точку $y \in Y$, для которой не все значения $h_i(y)$ являются нулевыми. Так как $\sum g_i(x) h_i(y) = 0$ для всех $x \in X$, то мы получаем $\sum h_i(y) g_i = 0$ в R , т. е. функции g_i линейно зависимы над K . Если $r > 1$, то мы можем уменьшить на 1 число функций g_i и получить противоречие с минимальностью r . Следовательно, $r = 1$. Но тогда $g_1 = 0$, так что и $f = 0$.

Остается проверить свойство универсальности отображения для $X \times Y$. Зададим предмногообразие W и морфизмы $\varphi_1: W \rightarrow X, \varphi_2: W \rightarrow Y$; мы должны построить соответствующий морфизм $\psi: W \rightarrow X \times Y$. Имеется единственное отображение множеств, для которого $\varphi_i = \text{pr}_i \circ \psi$. Чтобы проверить, что это отображение есть морфизм, мы используем аффинный критерий (2.3). Поскольку множество $X \times Y$ аффинно, то нам нужно лишь убедиться, что ψ превращает полиномиальные функции

на $X \times Y$ в регулярные функции на W . Кольцо $K[X \times Y]$ порождается функциями, получающимися из $K[X]$, $K[Y]$ с помощью коморфизмов pr_i , а φ_i являются морфизмами по предположению, откуда все следует.

(б) Если многообразия X , Y неприводимы, то и $X \times Y$ неприводимо (1.4); часть (а) показывает, что кольцо $R \otimes_K S$ есть область целостности с полем частных, изоморфным $K(X \times Y)$. Теперь мы имеем включения $R \otimes S \subset \mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}_y \subset \mathcal{O}_{(x, y)}$. Так как кольцо $\mathcal{O}_{(x, y)}$ есть локализация кольца $R \otimes S$ относительно идеала $m_{(x, y)}$, то оно также совпадает с локализацией кольца $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}_y$ по его идеалу m функций, обращающихся в 0 в (x, y) . Очевидно, $m_x \otimes \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \otimes m_y \subset m$. Обратно, пусть $f = \sum g_i \otimes h_i \in m$, где $g_i \in \mathcal{O}_x$, $h_i \in \mathcal{O}_y$. Если $g_i(x) = a_i$, $h_i(y) = b_i$, то $f - \sum a_i b_i = \sum (g_i - a_i) \otimes h_i + \sum a_i \otimes (h_i - b_i) \in m_x \otimes \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \otimes m_y$. Это влечет $\sum a_i b_i = 0$, что и завершает доказательство. $\square$

Это предложение показывает, что произведение $X \times Y$ имеет внутренний смысл в категории предмногообразий, если многообразия X и Y аффинны, независимо от любых их конкретных вложений в аффинное пространство.

Прежде, чем разбирать общий случай произвольных предмногообразий X , Y , мы рассмотрим *неприводимые* предмногообразия. Чтобы снабдить декартово произведение $X \times Y$ структурой предмногообразия, необходимо задать топологию и покрытие аффинными открытыми множествами. Для всех аффинных открытых множеств $V \subset Y$, $U \subset X$ и всех конечных множеств полиномиальных функций f_i на U и g_i на V главные открытые множества $(U \times V)_{\sum f_i g_i}$ следует принять в качестве базис-

ных открытых множеств в $X \times Y$. Заметим, что эти множества действительно образуют базис для некоторой топологии, так как пересечение двух таких множеств есть некоторое другое множество такого же типа. Кроме того, описание аффинной алгебры $U \times V$ в части (а) предложения показывает, что топология, индуцированная на $U \times V$, совпадает с топологией Зарисского произведения на $U \times V$.

Поле функций на $X \times Y$ должно будет совпадать с полем функций на $U \times V$, где $U \subset X$, $V \subset Y$ — аффинные открытые множества. Так как $K[U \times V] = K[U] \otimes K[V]$, то, очевидно, поле $K(U \times V)$ может быть описано как поле частных (области целостности!) $K(U) \otimes K(V)$. Обозначим это поле через F . Часть (б) предложения обязывает нас определить *локальное кольцо* точки $(x, y) \in X \times Y$ как локализацию кольца $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}_y$ относительно идеала $m_x \otimes \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \otimes m_y$. В свою очередь мы получаем пучок функций на $X \times Y$ путем сопоставления каждому открытому множеству U пересечения всех колец $\mathcal{O}_{(x, y)}$, $(x, y) \in U$. (Это согласуется на каждом произведении аффинных открытых множеств с уже определенным аффинным произведением.) Ясно, что $X \times Y$ приобретает таким образом структуру предмногообразия. Кроме того, теоретико-множественные проекции на X , Y являются морфизмами: использовать аффинный критерий (2.3).

Чтобы проверить свойство универсального отображения, рассмотрим некоторое предмногообразие W с морфизмами $\varphi_1: W \rightarrow X$, $\varphi_2: W \rightarrow Y$. Как и раньше, имеется единственное отображение множеств $\psi: W \rightarrow X \times Y$, для которого $\varphi_i = \text{pr}_i \circ \psi$. Мы привлечем аффинный критерий (2.3), чтобы показать, что ψ — морфизм. По построению произведения $U \times V$ аффинных открытых множеств в X , Y являются аффинными открытыми множествами, покрывающими $X \times Y$. Открытые множества вида $W' = \varphi_1^{-1}(U) \cap \varphi_2^{-1}(V)$ покрывают W , и свойство универсальности произведения $U \times V$ показывает, что ограничение ψ на W' есть морфизм.

Это решает дело в неприводимом случае. Для произвольных предмногообразий X , Y с неприводимыми компонентами X_i , Y_j мы образуем предмногообразия $X_i \times Y_j$, как и выше. Затем мы топологизируем произведение $X \times Y$, определяя открытое множество как множество, каждое из пересечений которого с $X_i \times Y_j$ открыто. Наконец, мы снабдим $X \times Y$ пучком функций, как в (2.2). Стандартным образом проверяется, что $X \times Y$ есть категорное произведение. Следовательно, нами доказана

Теорема. Произведения в категории предмногообразий существуют. $\square$

Читателю следует проверить, что предыдущая процедура является абстрактным вариантом конструкции произведения проективных многообразий (1.7). Однако вложение в проективное пространство в (1.7) необходимо для того, чтобы убедиться, что полученное произведение — снова *проективное* многообразие.

2.5. Аксиома Хаусдорфа. Можно привести примеры предмногообразий, патологические с геометрической точки зрения. Например, пусть X покрывается двумя копиями U, V многообразия A^1 , причем точка $x \in U$ совпадает с точкой $x \in V$, за исключением случая, когда $x = 0$ («аффинная прямая с удвоенной точкой»).

Предмногообразие X называется **многообразием**, если оно удовлетворяет **аксиоме Хаусдорфа**: диагональ $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$. (В категории топологических пространств с заданной на $X \times X$ обычной топологией произведения это условие эквивалентно обычной аксиоме отделимости Хаусдорфа.) Эквивалентное условие заключается в следующем: (*) для любых двух морфизмов $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$ (Y — любое предмногообразие) множество $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ замкнуто в Y .

В самом деле, применяя (*) к ситуации $X \times X \xrightarrow{\text{pr}_1} X \xleftarrow{\text{pr}_2} X$ мы получаем, что $\Delta(X)$ замкнуто в $X \times X$; наоборот, в ситуации $Y \xrightarrow{\varphi \times \psi} X \times X \xrightarrow{\text{pr}_1} X \xleftarrow{\text{pr}_2} X$ прообраз множества $\Delta(X)$ есть $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$.

Условие (*) не выполнено в примере, приведенном выше: если мы возьмем два отображения $A^1 \rightarrow U \subset X$, $A^1 \rightarrow V \subset X$, то множество $A^1 - \{0\}$ не замкнуто в A^1 . С другой стороны, многообразия имеются в изобилии.

Примеры. (1) Аффинное многообразие есть многообразие. (Ясно, что диагональ задается полиномиальными условиями.)

(2) Подпредмногообразия в многообразии являются снова многообразиями. Они называются **подмногообразиями**.

(3) Если X, Y — многообразия, то и $X \times Y$ — многообразие.

(4) Проективное многообразие есть многообразие. (Это вытекает из следующего удобного критерия.)

Лемма. Пусть X — предмногообразие, и предположим, что каждая пара $x, y \in X$ лежит в некотором аффинном открытом подмножестве предмногообразия X . Тогда X — многообразие.

Доказательство. Пусть задано предмногообразие Y и морфизмы $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$, и пусть $Z = \{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$. Мы должны показать, что множество Z замкнуто. Если $z \in Z$, то пусть $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$. По предположению, точки x и y лежат в некотором аффинном открытом множестве V . Тогда $U = \varphi^{-1}(V) \cap \psi^{-1}(V)$ — открытая окрестность точки z , которая должна иметь пересечение с Z . Но $Z \cap U = \{y \in U \mid \varphi'(y) = \psi'(y)\}$, где $\varphi', \psi': U \rightarrow V$ — ограничения. Так как V — многообразие, то множество $Z \cap U$ замкнуто в U . Это означает, что $U - (Z \cap U)$ — открытое множество, не пересекающееся с Z , в частности не содержащее z . Следовательно, $z \in Z$. $\square$

Следующее предложение показывает, почему лучше иметь дело с многообразиями, чем с предмногообразиями.

Предложение. Пусть Y — многообразие, и X — предмногообразие.

(а) Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм, то график $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}$ замкнут в $X \times Y$.

(б) Если $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$ — морфизмы, которые совпадают на некотором плотном подмножестве предмногообразия X , то $\varphi = \psi$.

Доказательство. (а) График Γ_φ есть прообраз множества $\Delta(Y)$ относительно морфизма $X \times Y \rightarrow Y \times Y$, который переводит (x, y) в $(\varphi(x), \varphi(y))$.

(б) Множество $\{x \in X \mid \varphi(x) = \psi(x)\}$ замкнуто в X , так как Y — многообразие. По предположению, оно плотно в X , так что оно должно совпадать с X . $\square$

На практике мы будем в дальнейшем иметь дело лишь с аффинными и проективными многообразиями, их подмногообразиями и произведениями.

Упражнения

1. Показать, что определение «морфизма» (2.3) согласуется с определением, данным для аффинных многообразий в (1.5).

2. Если $\varphi: A^1 \rightarrow A^1$ — бирациональный морфизм, то φ обязательно является изоморфизмом.

3. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Показать, что отображение $T_i \rightarrow T_i^p$ определяет мономорфизм K -алгебр $K[T] \rightarrow K[T]$, который является морфизмом морфизма $\varphi: \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^n$ (называемого **отображением Фробениуса**). Описать морфизм φ в явном виде.

4. Пусть X, Y — предмногообразия. Доказать, что проекции $X \times Y \rightarrow X$, $X \times Y \rightarrow Y$ являются открытыми отображениями (т. е. переводят открытые множества в открытые). Должны ли эти проекции переводить замкнутые множества в замкнутые?

5. Если X, Y — предмногообразия, и W — открытое (соответственно замкнутое) множество в X , то $W \times Y$ — открытое (соответственно замкнутое) множество в $X \times Y$.

6. Доказать, что топологическое пространство X есть T_2 -пространство тогда и только тогда, когда множество $\{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнуто в $X \times X$ (в обычной топологии произведения).

7. Пусть $\varphi, \psi: Y \rightarrow X$ — морфизмы (X, Y — предмногообразия). Доказать, что множество $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ локально замкнуто в Y .

8. Если Y — предмногообразие, для которого утверждение предложения 2.5 (а) (соответственно (б)) имеет место для всех предмногообразий X , то Y — многообразие.

9. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм многообразий. Доказать, что φ_* индуцирует изоморфизм графика $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ на X .

Замечания. Мы следовали здесь Мамфорду [3, I, § 6]. В современной терминологии слово «многообразие» (соответственно «отделимое многообразие») употребляется вместо нашего «предмногообразия» (соответственно «многообразие»); но мы предпочитаем придерживаться старого обычая, поскольку все предмногообразия, которые нам встретятся, являются в действительности многообразиями.

§ 3. Размерность

Интуитивно точка нульмерна, кривая одномерна, поверхность двумерна. Цель этого параграфа — придать точный алгебраический смысл геометрическому понятию размерности. Это в свою очередь позволит нам в следующем параграфе описать поведение многообразий при действии морфизмов.

3.1. Размерность многообразия. С неприводимым многообразием X ассоциируется его поле $K(X)$ рациональных функций. Будучи конечно порожденным расширением поля K , поле $K(X)$ имеет конечную степень трансцендентности над K (0.4), сокращенно $\text{tr. deg}_K K(X)$. Это число называется **размерностью** многообразия X и обозначается $\dim X$. Например, $\dim \mathbf{A}^n = \dim \mathbf{P}^n = n$. Таким образом, размерность измеряется максимальным числом алгебраически независимых функций на X (или

числом «параметров», требующихся для описания X). В случае, если X имеет более одной неприводимой компоненты, скажем $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, разумно определить $\dim X$ как $\max(\dim X_i)$.

Пусть X — неприводимое многообразие. Так как $K(X) = K(U)$ для любого аффинного открытого подмножества U , то $\dim X = \dim U$. Аналогично $\dim X = \dim X_f$ для любой функции $f \in K(X)$. Например, $GL(n, K)$ есть главное открытое подмножество пространства $\mathbf{A}^{n^2}$, состоящее из точек, в которых определитель не обращается в нуль, так что размерность $GL(n, K)$ равна n^2 .

Предложение. Пусть X, Y — неприводимые многообразия размерности m, n соответственно. Тогда $\dim X \times Y = m + n$.

Доказательство. В силу предыдущих замечаний мы можем предполагать, что многообразия X, Y аффинны и $X \subset \mathbf{A}^p, Y \subset \mathbf{A}^q$. (Читатель, который желает избежать вложения X и Y в аффинные пространства, может рассуждать, используя отождествление $K[X] \otimes K[Y] = K[X \times Y]$ (2.4).) Если $S_1, \dots, S_p$ (соответственно $T_1, \dots, T_q$) — координаты в $\mathbf{A}^p$ (соответственно в $\mathbf{A}^q$), то их ограничения s_i (соответственно t_i) порождают поле $K(X)$ (соответственно $K(Y)$). Из этих порождающих множеств мы можем выбрать базисы трансцендентности (0.4), скажем $s_1, \dots, s_m$ и $t_1, \dots, t_n$. Ясно, что $K(X \times Y) = K(s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q)$ и что поле $K(X \times Y)$ алгебраично над подполем $K(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n)$. Таким образом, достаточно показать, что это последнее поле чисто трансцендентно над K . Предположим, что имеется полиномиальное соотношение $f(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n) = 0$. Тогда для каждого фиксированного $x = (x_1, \dots, x_p) = (s_1(x), \dots, s_p(x)) \in X$ полиномиальная функция $f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ обращается в нуль на Y . Алгебраическая независимость функций t_i ведет к тому, что все коэффициенты $g(x_1, \dots, x_m)$ полинома $f(x_1, \dots, x_m, T_1, \dots, T_n)$ равны нулю. В свою очередь мы имеем $g(s_1, \dots, s_m) = 0$ (так как точка $x \in X$ была произвольной), так что алгебраическая независимость функций s_i влечет $g(S_1, \dots, S_m) = 0$. Следовательно, $f(S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n) = 0$. $\square$

3.2. Размерность подмногообразия. Следующее предложение есть первый шаг к пониманию того, как изменяется размерность при переходе к подмногообразиям.

Предложение. Пусть X — неприводимое многообразие, Y — собственное замкнутое неприводимое подмногожество. Тогда $\dim Y < \dim X$.

Доказательство. Мы можем предположить, что многообразие X аффинно, скажем, размерности d . Пусть $R = K[X]$, $\bar{R} = K[Y] \cong R/P$ (где P — ненулевой простой идеал кольца R). Ясно, что базисы трансцендентности для полей $K(X)$, $K(Y)$ можно найти в R , $\bar{R}$. Предположим, что $\dim Y \geq d$, и выберем алгебраически независимые элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d \in \bar{R}$ (образы элементов $x_1, \dots, x_d \in R$, которые, разумеется, тоже алгебраически независимы). Пусть $f \in P$ — ненулевой элемент. Так как $\dim X = d$, то должно существовать нетривиальное полиномиальное соотношение $g(f, x_1, \dots, x_d) = 0$, где $g(T_0, T_1, \dots, T_d) \in K[T]$. Поскольку $f \neq 0$, мы можем предположить, что T_0 не делит все одночлены в полиноме $g(T_0, T_1, \dots, T_d)$, т. е. полином $h(T_1, \dots, T_d) = g(0, T_1, \dots, T_d)$ отличен от нуля. Тогда $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) = 0$, что противоречит независимости $\bar{x}_i$. $\square$

Определим **коразмерность** $\text{codim}_X Y$ подмногообразия Y многообразия X как число $\dim X - \dim Y$.

Следствие. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, Y — замкнутое неприводимое подмногообразие коразмерности 1. Тогда Y есть компонента многообразия $\mathcal{V}(f)$ для некоторого элемента $f \in K[X]$.

Доказательство. По предположению, $Y \neq X$, так что имеется ненулевая функция $f \in K[X]$, обращающаяся в нуль на Y . Тогда $Y \subset \mathcal{V}(f) \subsetneq X$. Пусть Z — неприводимая компонента многообразия $\mathcal{V}(f)$, содержащая Y . Согласно предположению $\dim Z < \dim X$, тогда как $\dim Y \leq \dim Z$ с равенством лишь при $Y = Z$. Так как $\text{codim}_X Y = 1$, должно иметь место равенство. $\square$

В ситуации, рассмотренной в следствии, равенство $Y = \mathcal{V}(f)$ не всегда возможно. Однако оно имеет место, если Y имеет коразмерность 1 в некотором аффинном пространстве A^n , или, более общо, когда $K[X]$ — область с однозначным разложением на множители (упражнение 6).

Если подмногообразия коразмерности 1 существуют (и тогда, по индукции, существуют подмногообразия всех возможных размерностей), то следствие указывает, какого они будут вида. Наша следующая цель — установить обращение этого следствия.

3.3. Теорема о размерности. Множество нулей в A^n одного нескаллярного полинома $f(T_1, \dots, T_n)$ называется **гиперповерхностью**; ее неприводимые компоненты — это в точности гиперповерхности, определенные неприводимыми множителями полинома $f(T)$. Более общо, если X — аффинное многообразие, то ненулевой необратимый элемент $f \in K[X]$ определяет гиперповерхность в X (компоненты которой не так легко охарактеризовать, если $K[X]$ не является областью с однозначным разложением на множители). Например, $SL(n, K)$ есть гиперповерхность в $GL(n, K)$ или в A^{n^2} , определенная соотношением $\det(T_{ij}) = 1$.

Предложение. Все неприводимые компоненты гиперповерхности в A^n имеют коразмерность 1.

Доказательство. Достаточно рассмотреть множество нулей X неприводимого полинома $p(T)$. Мы можем предполагать, что (скажем) T_n реально имеется в полиноме $p(T)$ (который, по предположению, не скаляр). Пусть t_i — ограничение функции T_i на X , так что $K(X) = K(t_1, \dots, t_n)$. Мы утверждаем, что $t_1, \dots, t_{n-1}$ алгебраически независимы над K . Иначе существует нетривиальное полиномиальное соотношение $g(t_1, \dots, t_{n-1}) = 0$ и, значит, полином $g(T_1, \dots, T_{n-1})$ обращается в нуль на X ; но $\mathcal{J}(X) = (p(T))$, следовательно, полином $g(T)$ кратен $p(T)$. Это невозможно, так как T_n имеется в $p(T)$, но отсутствует в $g(T)$. Мы заключаем, что $\dim X \geq n - 1$, и здесь должно быть на самом деле равенство ввиду предложения 3.2. $\square$

Мы хотим обобщить этот результат на произвольные аффинные многообразия. Для этого необходимы два технических средства: лемма Нётер о нормализации (0.7) и норменное отображение $N_{E/F}: E \rightarrow F$ для конечного расширения E поля F (0.5).

Теорема. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, $0 \neq f \in K[X]$ — необратимый элемент, и Y — неприводимая компонента многообразия $\mathcal{V}(f)$. Тогда Y имеет коразмерность 1 в X .

Доказательство. Пусть $P = \mathcal{I}(Y) \subset K[X]$ и $Y_1, \dots, Y_t$ — компоненты многообразия $\mathcal{V}(f)$, отличные от Y , а $P_i = \mathcal{I}(Y_i)$. Из теоремы о нулях (1.1) вытекает равенство $\sqrt{(f)} = P \cap P_1 \cap \dots \cap P_t$. Выберем элемент $g \in P_1 \cap \dots \cap P_t - P$ (g существует, так как Y не содержится в $Y_1 \cup \dots \cup Y_t$). Тогда X_g — неприводимое аффинное многообразие той же размерности, что и X , и $Y \cap X_g$ есть в точности множество нулей полинома f в X_g . Так как $Y \cap X_g$ — главное открытое множество в Y , то достаточно доказать, что его коразмерность в X_g равна 1. Таким образом, мы могли бы предполагать с самого начала, что $Y = \mathcal{V}(f)$, $P = \sqrt{(f)}$.

Теперь мы применим лемму о нормализации (0.7) к области $R = K[X]$: кольцо R является целым над некоторым подкольцом S , изоморфным $K[T_1, \dots, T_d]$, $d = \dim X$. Пусть $E = K(X)$, F — поле частных кольца S , так что расширение E/F конечно. Заметим, что норма $N_{E/F}$ на элементах из R принимает значения в S . В самом деле, если $h \in R$, то h удовлетворяет полиномиальному уравнению над S с коэффициентом 1 при старшем члене и, по определению «нормы», $N_{E/F}(h)$ есть степень свободного члена.

Пусть $f_0 = N_{E/F}(f) \in S$. Мы утверждаем, что $f_0 \in P = \sqrt{(f)}$. Запишем: $f^k + a_1 f^{k-1} + \dots + a_k = 0$ ($a_i \in S$), где $f_0 = (a_k)^m$ (см. предыдущий абзац). Тогда

$$0 = (f^k + a_1 f^{k-1} + \dots + a_k) a_k^{m-1} = f(f^{k-1} a_k^{m-1} + \dots + a_{k-1} a_k^{m-1}) + f_0,$$

так что элемент f_0 является R -кратным элементу f .

Если обозначить через $\sqrt{(f_0)}$ радикал идеала (f_0) в S , то из результата предыдущего абзаца следует, что $\sqrt{(f_0)} \subset P \cap S$. Обратное включение также имеет место: пусть $g \in P \cap S$, так что, в частности, $g \in \sqrt{(f)}$ и $g^l = fh$ для некоторых $l \in \mathbb{Z}^+$, $h \in R$. Вычисляя нормы, получаем $g^{l[E:F]} = N_{E/F}(g^l) = N_{E/F}(f) N_{E/F}(h)$, где первое равенство имеет место ввиду того, что $g \in S$, и второе — ввиду мультипликативности нормы $N_{E/F}$. Как отмечалось ранее, $N_{E/F}(h) \in S$, поэтому некоторая степень элемента g является S -кратной f_0 , что и утверждалось. Теперь мы заменим простой идеал $P = \sqrt{(f)}$ в R на

простой идеал $P \cap S = \sqrt{(f_0)}$ в S . Преимущество этого заключается в том, что S — область с *однозначным разложением на множители*. В частности, так как радикал идеала (f_0) является простым идеалом, то, как легко видеть, f_0 (с точностью до обратимого множителя) есть степень неприводимого полинома p , откуда следует, что $P \cap S$ — в точности главный идеал (p) . Ясно, что элемент p не скаляр.

Если рассматривать S как аффинную алгебру многообразия A^d , то $P \cap S$ определяет гиперповерхность в A^d , размерность которой равна 1 (ввиду предыдущего предложения). Это означает, что поле частных кольца $S/(P \cap S)$ имеет степень трансцендентности $d - 1$ над K . С другой стороны, тот факт, что кольцо R цело над S , очевидно, влечет, что кольцо R/P цело над $S/(P \cap S)$, так что эти два поля частных имеют одинаковую степень трансцендентности. Но поле частных кольца R/P есть $K(Y)$, следовательно, $\dim Y = d - 1$. $\square$

Эта теорема может быть легко переформулирована как утверждение о произвольном неприводимом многообразии X : если U — открытое множество в X , и $0 \neq f \in \mathcal{O}_X(U)$ — необратимый элемент, то каждая неприводимая компонента множества нулей функции f в U имеет коразмерность 1 в X . (Выведите это из теоремы путем ограничения на аффинное открытое подмножество множества U , которое пересекается с рассматриваемой неприводимой компонентой).

3.4. Следствия. Теорема 3.3 гарантирует нам, что n -мерное многообразие X обладает неприводимыми замкнутыми подмножествами всех размерностей, меньших n . Более точно:

Следствие А. Пусть X — неприводимое многообразие, Y — замкнутое неприводимое подмножество коразмерности $r \geq 1$. Тогда существуют замкнутые неприводимые подмножества Y_i коразмерности $1 \leq i \leq r$ такие, что $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_r = Y$.

Доказательство. Достаточно доказать это для аффинного открытого подмножества многообразия X , которое пересекается с Y , так что мы можем предполагать также, что многообразие X аффинно. При $r = 1$ доказывать нечего. Используем индуктивное рассуждение. Так как $Y \neq X$, то существует функция $f \neq 0$ в $\mathcal{O}(Y)$, и Y ле-

жит в некоторой неприводимой компоненте Y_1 множества $\mathcal{V}(f)$. Согласно теореме 3.3 $\text{codim}_X Y_1 = 1$. По предположению индукции, Y_1 обладает замкнутым неприводимым подмножеством требуемого типа. $\square$

Очевидной индукцией устанавливается также

Следствие Б. Пусть X — неприводимое многообразие, $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$. Тогда каждая неприводимая компонента множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ имеет коразмерность не более чем r . $\square$

Это неравенство не может быть улучшено (например, пусть $f_1 = f_2 = \dots = f_r$). Но мы можем высказать нечто полезное в другом направлении, соответствующем той геометрической идее, что поверхность (соответственно кривая, точка) в трехмерном пространстве должна определяться одним (соответственно двумя, тремя) полиномиальными уравнениями.

Следствие В. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, Y — замкнутое неприводимое подмножество коразмерности $r \geq 1$. Тогда Y есть компонента множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ для некоторого набора функций $f_i \in K[X]$.

Доказательство. Легче доказать более общее утверждение: для замкнутых неприводимых подмножеств $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_r$, удовлетворяющих условию $\text{codim}_X Y_i = i$, существуют функции $f_i \in K[X]$ такие, что все компоненты множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_q)$ имеют коразмерность q в X , причем Y_q — одна из этих компонент ($1 \leq q \leq r$). (Это действительно более общее утверждение ввиду следствия А.)

Доказательство проведем индукцией по q (r фиксировано). При $q = 1$ мы обратимся сначала к следствию 3.2, чтобы получить существование f_1 , а затем к теореме 3.3, чтобы заключить, что все компоненты множества $\mathcal{V}(f_1)$ имеют коразмерность 1.

Предположим, что функции $f_1, \dots, f_{q-1}$ уже найдены. Пусть $Z_1 = Y_{q-1}$, $Z_2, \dots, Z_m$ — компоненты множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_{q-1})$. Так как каждая из них имеет коразмерность $q-1$, то ни одна из них не лежит в Y_q ; следовательно, идеал $\mathcal{I}(Z_i)$ не содержит $\mathcal{I}(Y_q)$ ($1 \leq i \leq m$). Идеалы $\mathcal{I}(Z_i)$ просты, и поэтому из (0.9) следует, что их объединение также не содержит $\mathcal{I}(Y_q)$. Выберем функцию f_q , обращающуюся в нуль на Y_q , но не обра-

щающуюся в нуль тождественно на Z_i . Если Z — любая компонента множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_q)$, то Z , разумеется, лежит в одной из компонент Z_i множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_{q-1})$, а также в $\mathcal{V}(f_q)$. Теорема 3.3 показывает, что множество $\mathcal{V}(f_q) \cap Z_i$ имеет коразмерность 1 в Z_i (так как f_q не обращается в нуль на Z_i), и, следовательно, имеет коразмерность q в X . С другой стороны, следствие В показывает, что $\text{codim}_X Z \leq q$. Следовательно, Z должно иметь в точности коразмерность q . Так как функция f_q обращается в нуль на Y_q , и Y_q имеет коразмерность q , то Y_q — одна из компонент множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_q)$. $\square$

Упражнения

1. Многообразие имеет размерность 0 тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного множества точек.

2. Показать, что размерность грассманова многообразия $\mathcal{G}_d(V)$ d -мерных подпространств n -мерного векторного пространства V (1.8) равна $d(n-d)$. Попробуйте определить размерность многообразия флагов $\mathcal{F}(V)$.

3. Пусть X — произвольное многообразие, Y — замкнутое подмножество. Доказать, что $\dim Y \leq \dim X$.

4. Размерность неприводимого многообразия X есть наибольшее число d , для которого существует цепь (непустых) замкнутых неприводимых подмножеств $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_d = X$ (все включения собственные).

5. В многообразии X замкнутые неприводимые подмножества удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей.

6. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, для которого $K[X]$ — область с однозначным разложением на множители, например $X = \mathbb{A}^n$. Доказать, что каждое замкнутое подмножество Y коразмерности 1 имеет вид $\mathcal{V}(f)$ для некоторой функции $f \in K[X]$. (Рассмотреть сначала случай, когда множество Y неприводимо. Показать, что минимальные простые идеалы кольца $K[X]$ являются главными.)

Замечания. В изложении этого параграфа мы следовали Мамфорду [3, I, § 7].

§ 4. Морфизмы

В изучении линейных алгебраических групп два типа морфизмов играют особо важную роль: гомоморфизмы групп, которые одновременно должны быть морфизмами многообразий, и канонические отображения $G \rightarrow G/H$ (где на пространстве смежных классов должна быть задана соответствующая структура многообразия, не обя-

зательно аффинного). В настоящем параграфе развивается аппарат для изучения этих и других морфизмов. Доказательства существенным образом опираются на рассмотрение размерности. Как и в § 3, обычно достаточно рассматривать неприводимые многообразия, которые часто (хотя и не всегда) можно предполагать аффинными.

4.1. Слои морфизма. По определению **слои** морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$ — это замкнутые множества вида $\varphi^{-1}(y)$ ($y \in Y$). (Если φ — гомоморфизм групп, то слои оказываются смежными классами по подгруппе $\text{Ker } \varphi$). Мы хотим определить размерности слоев и, в частности, доказать, что эти размерности «не слишком малы». Конечно, множество $\varphi^{-1}(y)$ пусто, если $y \notin \text{Im } \varphi$, что следует принимать во внимание в дальнейшем. Мы будем изучать более общий случай множеств вида $\varphi^{-1}(W)$, где W — замкнутое неприводимое множество.

Обычно мы без колебаний заменяем Y на замыкание множества $\varphi(X)$; это упрощает соотношения между размерностями. Если многообразие X неприводимо и множество $\varphi(X)$ плотно в Y , то мы говорим, что φ — **доминантный** морфизм. Мы могли бы использовать этот термин и в случае, если многообразие X не является неприводимым; однако мы предпочитаем сохранить термин «доминантный» для следующей более специфической ситуации: морфизм φ отображает каждую компоненту многообразия X на плотное подмножество некоторой компоненты многообразия Y , и образ $\varphi(X)$ плотен в Y . Даже если морфизм φ является доминантным, его ограничение на неприводимую компоненту множества $\varphi^{-1}(W)$ (W — замкнутое неприводимое подмножество многообразия Y) не обязано, разумеется, быть доминантным, если его рассматривать как морфизм этой компоненты в W . Но если это так, то мы говорим, что рассматриваемая компонента **доминирует** W . Одно замечание: если $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный морфизм, X, Y — неприводимые многообразия, то коморфизм φ^* индуцирует вложение поля $K(Y)$ в $K(X)$; в частности, $\dim X \geq \dim Y$.

Теорема. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий, и пусть $r = \dim X - \dim Y$. Пусть W — замкнутое неприводимое подмножество мно-

многообразия Y . Если Z — неприводимая компонента множества $\varphi^{-1}(W)$, которая доминирует W , то $\dim Z \geq \geq \dim W + r$. В частности, если $y \in \varphi(X)$, то размерность каждой компоненты множества $\varphi^{-1}(y)$ не менее r .

Доказательство. Если U — аффинное открытое подмножество многообразия Y , которое имеет общие точки с W , то пересечение $U \cap W$ плотно в W . Для сравнения размерностей мы могли бы, следовательно, заменить Y на U и X на открытое подмногообразие $\varphi^{-1}(U)$. Таким образом, мы можем с самого начала предполагать, что многообразие Y аффинно.

Пусть $s = \text{codim}_Y W$. В соответствии со следствием В из (3.4) W есть компонента множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_s)$ для подходящих функций $f_i \in K[Y]$. Полагая $g_i = \varphi^*(f_i) \in \mathcal{O}_X(X)$, мы заключаем, что Z лежит в $\mathcal{V}(g_1, \dots, g_s)$. Так как множество Z неприводимо, то оно лежит в некоторой компоненте Z_0 множества $\mathcal{V}(g_1, \dots, g_s)$. Но, по предположению, $W = \overline{\varphi(Z)}$ и $\overline{\varphi(Z)} \subset \overline{\varphi(Z_0)} \subset \mathcal{V}(f_1, \dots, f_s)$. Из того, что W — компонента множества $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_s)$, следует, что $\overline{\varphi(Z)} = \overline{\varphi(Z_0)} = W$, откуда $Z_0 \subset \varphi^{-1}(W)$. Но Z — компонента множества $\varphi^{-1}(W)$, так что $Z = Z_0$, т. е. Z — компонента множества $\mathcal{V}(g_1, \dots, g_s)$. Теперь в силу следствия Б из (3.4) мы имеем $\text{codim}_X Z \leq s$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Мы видим теперь, что (непустые) слои морфизма φ в ситуации, описанной в теореме, не слишком малы. Естественнее далее спросить, могут ли они быть «слишком велики». Простой геометрический пример позволяет проиллюстрировать возникающие здесь возможности: определим морфизм $\varphi: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ соотношением $\varphi(x, y) = (xy, y)$. Образ этого морфизма состоит из дополнения к « x -оси» и из точки $(0, 0)$. Это множество, как легко видеть, плотно, так что морфизм φ является доминантным (хотя и не сюръективным). Если U — главное открытое множество в $\mathbb{A}^2$, определенное условием $y \neq 0$, то φ индуцирует биекцию из $U = \varphi^{-1}(U)$ на U , которая оказывается даже изоморфизмом многообразий. Но слой $\varphi^{-1}(0, 0)$ является одномерным, так как он состоит из всех точек вида $(x, 0)$.

Этот пример наводит на мысль о том, что нам следует искать *открытое* множество в Y , все слои которого имеют «правильную» размерность $\dim X - \dim Y$. Но если такое открытое множество существует, оно должно лежать в $\varphi(X)$. Таким образом, изучение слоев морфизма φ приводит также к изучению его образа. В качестве подготовки к основной теореме (4.3) мы кратко рассмотрим один специальный тип морфизмов, которые оказываются сюръективными.

4.2. Конечные морфизмы. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм *аффинных* многообразий. Если кольцо $K[X]$ является целым над подкольцом $\varphi^*K[Y]$, то мы говорим, что морфизм φ **конечен**. Заметим, что если X, Y — неприводимые многообразия и если φ — доминантный морфизм, то поле $K(X)$ — конечное алгебраическое расширение поля $\varphi^*K(Y)$, так что $\dim X = \dim Y$.

Пример морфизма, который *не* является конечным, доставляет рассмотренный в конце (4.1) морфизм $\varphi(x, y) = (xy, y)$. Здесь коморфизм $\varphi^*: K[S_1, S_2] \rightarrow K[T_1, T_2]$ инъективен и переводит S_1 в T_1T_2 и S_2 в T_2 . Легко видеть, что, например, элемент T_1 не является целым над $K[T_1T_2, T_2]$. Это также вытекает из следующего результата:

Предложение. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — конечный доминантный морфизм аффинных многообразий.

(а) Если множество Z замкнуто в X , то множество $\varphi(Z)$ замкнуто в Y и ограничение φ на Z является конечным морфизмом. В частности, морфизм φ сюръективен.

(б) Предположим, что X, Y — неприводимые многообразия и кольцо $K[Y]$ целозамкнуто. Если W — замкнутое неприводимое подмножество многообразия Y и Z — любая компонента множества $\varphi^{-1}(W)$, то $\varphi(Z) = W$.

Доказательство. Пусть $R = K[X]$, $S = K[Y]$. Поскольку морфизм φ является доминантным, коморфизм φ^* инъективен. Допуская вольность в обозначениях, мы рассматриваем S как подкольцо кольца R (которое, по предположению, является целым расширением кольца S). Если I — идеал кольца R , то кольцо R/I можно естественным образом рассматривать как расширение кольца $S/(S \cap I)$. Ясно, что это расширение также является целым.

(а) Пусть теперь $Z = \mathcal{V}(I)$ — замкнутое множество в X , где $I = \mathcal{I}(Z)$. Тогда φ отображает Z в множество нулей Z' идеала $I' = I \cap S$, который является радикальным идеалом в S (и, следовательно, совпадает с $\mathcal{I}(Z')$). Соответствующие аффинные алгебры есть R/I и $S/(S \cap I)$, так что предыдущее замечание показывает, что $\varphi: Z \rightarrow Z'$ — снова конечный (и доминантный) морфизм. Достаточно теперь доказать, что любой конечный доминантный морфизм сюръективен. Если $y \in Y$, то соотношение $\varphi(x) = y$ равносильно тому, что коморфизм φ^* отображает локальное кольцо точки y в локальное кольцо точки x , или что φ^* отображает максимальный идеал M' кольца S , состоящий из всех функций, равных 0 в точке y , в максимальный идеал M кольца R , состоящий из всех функций, равных 0 в точке x . Чтобы убедиться в том, что морфизм φ сюръективен, мы должны, следовательно, показать, что M' лежит в некотором максимальном идеале M кольца R (S все еще рассматривается как подкольцо кольца R). Но это следует из теоремы о подъеме (0.8), так как кольцо R цело над S .

(б) В соответствии с утверждением (а) ограничение морфизма φ на Z снова является конечным морфизмом, так что $\varphi(Z)$ — замкнутое неприводимое множество. Теперь достаточно показать, что $\dim Z = \dim W$. Если $I = \mathcal{I}(Z)$, $I' = \mathcal{I}(W)$, то I — минимальный простой идеал кольца R , для которого $I \cap S \supset I'$. В свою очередь из теоремы о спуске (0.8) следует, что $I \cap S = I'$. Но, как и раньше, кольцо R/I цело над S/I' , так что соответствующее расширение полей частных является алгебраическим и размерности совпадают. $\square$

4.3. Образ морфизма. Лемма Нётер о нормализации (0.7) означает, что конечно порожденная область над K может быть построена в два шага: сначала чисто трансцендентное расширение, а затем целое расширение. Чтобы иметь дело с парой неприводимых аффинных многообразий, связанных доминантным морфизмом $\varphi: X \rightarrow Y$, нам необходимо рассмотреть вариант этой леммы для пары колец.

Пусть $S \subset R$ — две конечно порожденные области над K с соответствующими полями частных $E \subset F$. Обозначим через R' локализацию кольца R относительно мультипликативной системы S^* ненулевых элементов

кольца S (0.10). Конечно, F — по-прежнему поле частных кольца R' . С другой стороны, кольцо R' содержит E , и, следовательно, его можно рассматривать как конечно порожденную E -алгебру. Согласно лемме о нормализации кольцо R' цело над подкольцом $E[x_1, \dots, x_r]$, для некоторых элементов $x_i \in R'$, которые алгебраически независимы над E . Ясно, что x_i можно выбрать из R (так как все возникающие здесь знаменатели принадлежат E). Ясно также, что $r = \text{tr. deg}_E F$.

Сравним теперь целое расширение $E[x_1, \dots, x_r] \subset R'$ с расширением $S[x_1, \dots, x_r] \subset R$. Последнее не обязательно является целым. Но кольцо R конечно порождено над S , и каждая образующая кольца R удовлетворяет полиномиальному уравнению над $E[x_1, \dots, x_r]$ со старшим коэффициентом 1. Выбирая подходящий общий знаменатель $f \in S$, мы можем, следовательно, гарантировать, что кольцо R_f цело над подкольцом $S_f[x_1, \dots, x_r]$ (R_f и S_f — кольца частных, полученные в результате допущения в знаменателях степеней элемента f). Это будет использовано в доказательстве следующей ключевой теоремы.

Теорема. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий, $r = \dim X - \dim Y$. Тогда:

(а) Y содержит непустое открытое подмножество U такое, что $U \subset \varphi(X)$;

(б) если все локальные кольца точек многообразия Y целозамкнуты, то мы можем выбрать множество U в утверждении (а) обладающим следующим свойством: если $W \subset Y$ — неприводимое замкнутое множество, которое имеет нетривиальное пересечение с U , и если Z — компонента множества $\varphi^{-1}(W)$, которая пересекается с $\varphi^{-1}(U)$, то $\dim Z = \dim W + r$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 4.1, мы можем заменить Y аффинным открытым подмножеством. Мы можем также предполагать, что многообразие X аффинно: если бы мы нашли открытые подмножества $U_i \subset Y$, обладающие указанными в теореме свойствами, для каждого из ограничений морфизма φ на конечное число аффинных открытых множеств X_i , покрывающих X , то множество $U = \bigcap_i U_i$, очевидно, удовлетворяло бы условиям (а) и (б).

Пусть $R = K[X]$, $S = K[Y]$; рассмотрим S как подкольцо кольца R (вложение осуществляется при помощи коморфизма φ^*) и описанным выше способом найдем элементы $x_1, \dots, x_r \in R$, $f \in S$ такие, что кольцо R_f цело над подкольцом $S_f[x_1, \dots, x_r]$; последнее изоморфно кольцу полиномов над S_f . Кольца R_f , S_f — аффинные алгебры главных открытых множеств X_f , Y_f соответственно (1.5); таким образом, кольцо $S_f[x_1, \dots, x_r]$ можно рассматривать как аффинную алгебру многообразия $Y_f \times \mathbb{A}^r$. Ограничение морфизма φ на X_f представимо в виде произведения морфизмов $X_f \xrightarrow{\psi} Y_f \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\text{pr}_1} Y_f$, где ψ — конечный (и доминантный) морфизм. Положим $U = Y_f$ и заметим, что $\varphi^{-1}(U) = X_f$.

Согласно предложению 4.2 морфизм ψ сюръективен; ясно также, что и морфизм pr_1 сюръективен. Следовательно, множество U лежит в $\varphi(X)$, что доказывает (а). Для доказательства (б) положим также $X = X_f$, $U = Y = Y_f$ и, как и выше, рассмотрим разложение $\varphi = \text{pr}_1 \circ \psi$, где ψ — конечный морфизм. Из предположения о локальных кольцах следует, что кольцо $K[Y] = S_f$ целозамкнуто (2.1); поэтому кольцо $S_f[x_1, \dots, x_r]$ также целозамкнуто (0.6). Если W — замкнутое неприводимое подмножество многообразия Y и Z — любая компонента множества $\varphi^{-1}(W)$, то Z — компонента множества $\psi^{-1}(W \times \mathbb{A}^r)$ и, следовательно, отображается на $W \times \mathbb{A}^r$, причем $\dim Z = \dim \psi(Z) = \dim W + r$ (4.2) (б). $\square$

В (б) было бы достаточно предполагать, что локальные кольца целозамкнуты лишь для точек из некоторого непустого открытого подмножества; на самом деле это условие выполняется автоматически, см. (5.2), (5.3).

В (21.1) будет использовано утверждение, содержащееся в предыдущем рассуждении при $r = 0$:

Следствие (доказательства). Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — биективный морфизм неприводимых многообразий. Тогда $\dim X = \dim Y$ и существуют аффинные открытые подмножества $U \subset X$, $V \subset Y$ такие, что $\varphi(U) \subset V$ и ограничение $\varphi|_U$ есть конечный морфизм. $\square$

4.4. Конструктивные множества. Чтобы охарактеризовать образ произвольного морфизма, можно воспользоваться утверждением (а) теоремы 4.3. Напомним, что

подмножество топологического пространства X называется локально замкнутым, если оно — пересечение открытого и замкнутого множеств. Конечное объединение локально замкнутых множеств назовем **конструктивным множеством**. (Конструктивные множества образуют наименьшую совокупность подмножеств пространства X , содержащую все открытые и все замкнутые множества и полную относительно булевых операций, см. упражнение 3.) Заметим, что конструктивное подмножество многообразия содержит плотное открытое подмножество своего замыкания. Следующий весьма полезный результат принадлежит Шевалле.

Теорема. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм многообразий. Тогда φ отображает конструктивные множества в конструктивные; в частности множество $\varphi(X)$ конструктивно.

Доказательство. Локально замкнутое подмножество многообразия само является многообразием; очевидно поэтому, что достаточно доказать конструктивность множества $\varphi(X)$. В свою очередь мы можем предполагать, что многообразия X, Y неприводимы. Воспользуемся индукцией по $\dim Y$; если $\dim Y = 0$, то доказывать нечего. Ввиду предположения индукции нам достаточно рассмотреть только случай доминантного морфизма φ .

Выберем открытое подмножество U многообразия Y , содержащееся в $\varphi(X)$ в соответствии с теоремой 4.3 (а). Тогда неприводимые компоненты $W_1, \dots, W_i$ многообразия $Y - U$ имеют меньшую размерность, чем размерность Y (предложение 3.2). Ограничения морфизма φ на различные компоненты Z_{ij} множества $\varphi^{-1}(W_i)$ имеют образы, конструктивные в W_i (по предположению индукции) и, следовательно, также конструктивные в Y . Значит, множество $\varphi(X)$ конструктивно, как объединение множества U и конечного числа множеств $\varphi(Z_{ij})$. $\square$

Эта теорема будет многократно использоваться. Другой факт, основанный на подобной индукции, понадобится в одном из последующих рассуждений (5.2). Он называется «полунепрерывностью размерности сверху».

Предложение. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий. При $x \in X$ пусть $\epsilon(x)$ обозначает максимальную размерность любой компоненты множества $\varphi^{-1}(\varphi(x))$, содержащей точку x .

Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ множество $\{x \in X \mid \varepsilon_\varphi(x) \geq n\}$ замкнуто в X .

Доказательство. Используем индукцию по $\dim Y$. Выберем множество $U \subset \varphi(X)$, как в теореме 4.3, и пусть $r = \dim X - \dim Y$, $E_n(\varphi) = \{x \in X \mid \varepsilon_\varphi(x) \geq n\}$. Из теоремы 4.1 следует, что $\varepsilon_\varphi(x) \geq r$, так что множество $E_n(\varphi) = X$ замкнуто, если $n \leq r$. С другой стороны, теорема 4.3 показывает, что $E_n(\varphi) \subset X - \varphi^{-1}(U)$ всякий раз, когда $n > r$. Пусть $W_1, \dots, W_t$ — неприводимые компоненты множества $Y - U$ и Z_{ij} — различные компоненты множества $\varphi^{-1}(W_i)$, и $\varphi_{ij}: Z_{ij} \rightarrow W_i$ — ограничение морфизма φ . Так как $\dim W_i < \dim Y$, то, согласно предположению индукции, множество $E_n(\varphi_{ij})$ замкнуто в Z_{ij} (и, следовательно, в X). Но при $n > r$ мы имеем $E_n(\varphi) = \bigcup_{i,j} E_n(\varphi_{ij})$ — конечное объединение замкнутых множеств. $\square$

4.5. Открытые морфизмы. Пример в конце п. (4.1) показывает, что образ открытого множества относительно морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$ не всегда является открытым множеством. В этом прослеживается тот факт, что не все компоненты множества $\varphi^{-1}(W)$, где W — неприводимое замкнутое множество, обязаны иметь одну и ту же размерность. Такое явление по существу может возникнуть лишь на дополнении к некоторому открытому множеству в Y ввиду теоремы 4.3 (б); таким образом, в достаточно «однородной» ситуации будут выполнены предположения следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий, $r = \dim X - \dim Y$. Предположим, что для каждого замкнутого неприводимого подмножества $W \subset Y$ все неприводимые компоненты множеств $\varphi^{-1}(W)$ имеют размерность $r + \dim W$. Тогда морфизм φ отображает открытые множества в открытые.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, в частности, что морфизм φ сюръективен и что все неприводимые компоненты множества $\varphi^{-1}(W)$ доминируют W .

Пусть $x \in X$, и пусть U — любая открытая окрестность точки x . Мы должны показать, что точка $\varphi(x) = y$ лежит во внутренней части множества $\varphi(U) = V$. Предположим противное. Тогда y лежит в замыкании мно-

жества $Y - V$. Поскольку множество V конструктивно (теорема 4.4), то и множество $Y - V$ конструктивно. Таким образом, точка y лежит в замыкании C некоторого локально замкнутого множества $O \cap C$, содержащегося в $Y - V$ (здесь O открыто в Y , и мы можем предполагать, что C неприводимо, так что множество $O \cap C$ плотно в C). По предположению, неприводимые компоненты множества $C' = \varphi^{-1}(C)$ имеют одинаковые размерности, и каждая из них доминирует C . Таким образом, множество $O' = \varphi^{-1}(O)$ имеет общие точки с каждой такой компонентой; следовательно, множество $O' \cap C'$ плотно в C' . Но множество $O' \cap C' = \varphi^{-1}(O \cap C)$ лежит в замкнутом множестве $X - U$, откуда следует, что $C' \subset X - U$. Это противоречит тому, что $x \in C'$. $\square$

Эта теорема применяется в § 12 к каноническому отображению $G \rightarrow G/H$, где G — линейная алгебраическая группа и H — замкнутая подгруппа (однородное пространство наделено соответствующей структурой многообразия).

4.6. Биективные морфизмы. Если морфизм биективен, то в поведении его слоев или образа нет ничего загадочного. Но его топологическое поведение и действие соответствующего коморфизма на функции может быть весьма прихотливо. Здесь мы коснемся главным образом последнего. Отображение Фробениуса $A^1 \rightarrow A^1$, $x \rightarrow x^p$ (где $\text{char } K = p > 0$) иллюстрирует, насколько несепарабельность может усложнить вопрос. (Но даже в характеристике 0 мы не можем утверждать, что биективный морфизм является изоморфизмом, см. упражнение 5.) Следующая теорема имеет важное техническое значение при изучении однородных пространств в главе 5.

Теорема. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — доминантный инъективный морфизм неприводимых многообразий. Тогда $K(X)$ — конечное чисто несепарабельное расширение поля $\varphi^*K(Y)$.

Доказательство. Так как φ — доминантный морфизм, то коморфизм φ^* инъективен, и мы можем отождествить поле $K(Y)$ с $\varphi^*K(Y)$. Согласно теореме 4.3 $\dim X = \dim Y$. Следовательно, $K(X)$ — конечно порожденное алгебраическое расширение поля $K(Y)$, т. е. конечное расширение.

Поля функций не изменятся, если мы заменим многообразия X, Y на непустые открытые подмножества. Для начала рассмотрим сепарабельное замыкание F поля $K(Y)$ в $K(X)$ (т.е. множество всех элементов поля $K(X)$, которые сепарабельны над $K(Y)$). Будучи конечно порожденным расширением поля K , поле F может быть рассматриваемо как поле функций некоторого многообразия Z . Тогда замечания в п. (2.3) позволяют нам разложить φ в композицию двух (инъективных) морфизмов $X \rightarrow Z, Z \rightarrow Y$ после замены X, Z, Y подходящими открытыми множествами. Теперь достаточно доказать, что морфизм $Z \rightarrow Y$ бирационален, т.е. теорему достаточно доказать в случае, когда расширение $K(X)/K(Y)$ сепарабельно.

Пусть $n = [K(X) : K(Y)]$. Чтобы показать, что $n = 1$, мы будем искать некоторую точку $y \in Y$, слой $\varphi^{-1}(y)$ над которой имеет мощность не менее n .

Теорема о примитивном элементе позволяет нам выбрать одну образующую f поля $K(X)$ над $K(Y)$, минимальный полином которой имеет вид $p(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} g_i T^i$ ($g_i \in K(Y)$). Ввиду сепарабельности этого расширения (функция f не является корнем полинома $p'(T)$). Теперь многообразия X, Y можно заменить на такие открытые подмножества, чтобы рациональные функции f, g_i (т.е. $\varphi^* g_i$) были всюду определены на X . Мы можем также предполагать, что многообразие Y аффинно, и $g_i \in S = K[Y]$. Тогда элемент f является *целым* над кольцом S , так что кольцо $R = S[f]$ цело над S . Если U — аффинное открытое множество в X , то φ^* индуцирует включения $S \subset R \subset K[U]$. Кольцо R само по себе является аффинной алгеброй, так что оно соответствует некоторому аффинному многообразию X' , и факторизация коморфизма φ^* соответствует факторизации $U \rightarrow X' \rightarrow Y$. Но $K(U) = K(X)$, в то время как поле частных кольца R есть $K(Y)$ ($f \in K(X)$). Таким образом, достаточно доказать, что *конечный* морфизм $\psi: X' \rightarrow Y$ бирационален. В отличие от φ , этот морфизм может не быть инъективным. Но его ограничение на некоторое непустое открытое множество будет таковым: образ множества U в X' содержит плотное открытое подмножество U' (4.3),

и после удаления из него его пересечения с собственным замкнутым подмножеством $\psi^{-1}(\psi(X' - U'))$ останутся лишь слои, состоящие из отдельных точек. В свою очередь образ этого открытого множества в Y содержит некоторое плотное открытое подмножество Y .

Рассмотрим теперь слой $\psi^{-1}(y)$, $y \in Y$. Точка y соответствует гомоморфизму K -алгебр $\varepsilon_y: S \rightarrow K$, тогда как различные точки $x \in \psi^{-1}(y)$ соответствуют гомоморфизмам $\varepsilon_x: R \rightarrow K$, которые продолжают ε_y . Целость кольца R над S уже обеспечивает по меньшей мере одно продолжение гомоморфизма ε_y (см. (4.2)); однако нам необходим более точный результат — получение n различных продолжений.

Так как f — корень полинома $p(T)$, то $f(x)$ — корень полинома $p_\varepsilon(T)$, полученного применением гомоморфизма $\varepsilon = \varepsilon_y$ к каждому коэффициенту. Мы утверждаем, что при подходящем выборе точки y полином $p_\varepsilon(T)$ имеет n различных корней (т. е. он является сепарабельным полиномом над K). Для этого мы рассмотрим его производную. Из сепарабельности $p(T)$ над полем $K(Y)$ следует, что $p'(f) \neq 0$. Так как элемент f является целым над S , то и элемент $p'(f)$ цел над S ; таким образом, имеется полином $q(T) = T^m + \sum h_i T^i$ ($h_i \in S$), корнем которого является $p'(T)$ (и мы можем предполагать, что $h_0 \neq 0$, ибо $p'(f) \neq 0$). Выберем точку $y \in V$, для которой $h_0(y) \neq 0$. Если $\psi(x) = y$, то, ввиду выбора точки y , $p'(f)(x) \neq 0$; значит, $f(x)$ не может быть корнем полинома $p'_\varepsilon(T)$. Это доказывает наше утверждение о том, что полином $p_\varepsilon(T)$ сепарабелен над K при $\varepsilon = \varepsilon_y$.

Для каждого из n корней a полинома $p_\varepsilon(T)$ мы теперь найдем точку $x \in \psi^{-1}(y)$ такую, что $f(x) = a$, что и завершит доказательство. Задача состоит в том, чтобы продолжить ε до гомоморфизма $\varepsilon': R \rightarrow K$, для которого $\varepsilon'(f) = a$. По теореме о стандартном продолжении (0.8) это можно сделать при условии, что для каждого полинома $h(T) \in S[T]$ условие $h(f) = 0$ влечет $h_\varepsilon(a) = 0$. Но $p(T)$ — минимальный полином элемента f над $K(Y)$, так что условие $h(f) = 0$ влечет $h(T) = p(T)k(T)$ ($k(T)$ — некоторый полином над $K(Y)$ и, следовательно, над S , так как старший коэффициент полинома $p(T)$ равен 1 и оба полинома $h(T)$, $p(T)$ лежат в $S[T]$). Из

соотношения $p_\varepsilon(a) = 0$ мы получаем $h_\varepsilon(a) = 0$, что и требовалось. $\square$

4.7. Бирациональные морфизмы. Бирациональный морфизм не обязан быть изоморфизмом (см. $\mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ или пример в конце (4.1)); но все же он не слишком далек от изоморфизма.

Предложение. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — бирациональный морфизм неприводимых многообразий. Тогда существует непустое открытое множество $U \subset Y$ такое, что φ индуцирует изоморфизм множества $\varphi^{-1}(U)$ на U .

Доказательство. Не теряя общности, мы можем предполагать, что многообразие Y аффинно; положим $S = K[Y]$. Пусть $V \subset X$ — любое аффинное открытое множество и $R = K[V]$. Рассмотрим множество $W = \overline{\varphi(X - V)}$, все неприводимые компоненты которого имеют размерность меньшую, чем Y (так как компоненты множества $X - V$ имеют меньшую размерность, чем X , и $\dim X = \dim Y$). Так как W — собственное замкнутое подмножество многообразия Y , то можем найти функцию $0 \neq f \in S$ такую, что f обращается в нуль на W , откуда $\varphi^{-1}(Y_f) = X_{\varphi^*f} \subset V$. Заменяя Y на Y_f и X на X_{φ^*f} , мы, следовательно, можем предположить, что оба многообразия X и Y аффинны, и R, S — соответствующие им аффинные алгебры. По предположению, коморфизм φ^* отображает поле частных кольца S изоморфно на поле частных кольца R . Пусть $f_1, \dots, f_n$ порождают кольцо R над K , где $f_i = \varphi^*g_i/\varphi^*h$ ($g_i, h \in S$). Ясно, что φ^* отображает кольцо частных S_h на R_{φ^*h} изоморфно. Поэтому мы можем выбрать $U = Y_h$. $\square$

Упражнения

1. Все слои конечного морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$, где X, Y — аффинные многообразия, конечны.

2. Указать подмножество пространства $\mathbf{A}^2$, которое конструктивно, но не локально замкнуто.

3. Конструктивные подмножества топологического пространства X образуют булеву алгебру, порожденную открытыми (или замкнутыми) подмножествами пространства X , т.е. наименьшую совокупность множеств, содержащую все открытые множества, и замкнутую относительно взятия конечных объединений и дополнений.

4. Для примера в (4.1) проверить непосредственно предложение 4.4 путем нахождения множеств $E_n(\varphi)$.

5. Определим морфизм $\varphi: \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^2$ соотношением $\varphi(x) = (x^2, x^3)$. Проверить, что множество $X = \text{Im } \varphi$ замкнуто в $\mathbf{A}^2$ и что морфизм

$\varphi: A^1 \rightarrow X$ биективен, бинепрерывен и бирационален, но не является изоморфизмом.

Замечания. Пункты (4.1) — (4.4) основаны на изложении Мамфорда [3, I, § 8]. Доказательство теоремы 4.5, по существу, заимствовано у Шевалле [10, V, Pgor. 3]; несколько более специальный критерий открытости, который соответствует тому, что будет нам необходимо в § 12, имеется у Стейнберга [13, дополнение к 2.11]. Доказательство теоремы 4.6 заимствовано у Шевалле [10, II, V, Pgor. 1 и Corollary].

§ 5. Касательные пространства

Касательная к кривой в данной точке представляет собой хорошую локальную аппроксимацию, коль скоро она однозначно определена, т. е. когда рассматриваемая точка не является двойной точкой, точкой возврата или другой особенностью. В этом разделе мы развиваем чисто алгебраическое понятие касательного пространства к многообразию в данной точке, которое в случае алгебраической группы, как мы увидим в § 9, снабжено дополнительно структурой алгебры Ли. Идея заключается в том, чтобы линеаризовывать задачи и тем самым упрощать их. Для наших целей будет достаточно рассматривать те точки, которые лежат только на одной неприводимой компоненте многообразия. Поэтому мы предполагаем, если не оговорено противное, что все многообразия неприводимы.

5.1. Касательное пространство Зарисского. Прежде всего мы попытаемся сформулировать геометрически идею «касательного пространства к многообразию X в точке x ». Если бы X было кривой в A^2 , определенной одним уравнением $f(T_1, T_2) = 0$, то мы могли бы описать касательное пространство в точке $x = (x_1, x_2)$ как множество решений линейного уравнения $\frac{\partial f}{\partial T_1}(x)(T_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(x)(T_2 - x_2) = 0$. Это множество представляет собой прямую, проходящую через точку x , если только обе частные производные не обращаются в 0 в точке x .

Рассуждая аналогично, предположим, что $X \subset A^n$ — многообразие, определенное полиномами $f(T_1, \dots, T_n)$.

Положим $d_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)(T_i - x_i)$. Обозначим теперь че-

рез $\text{Тап}(X)_x$ линейное многообразие в A^n , образованное всеми точками, в которых обращаются в 0 все функции $d_x f$, когда $f(T)$ пробегает идеал $\mathcal{I}(X)$. Легко видеть, что для любого конечного множества образующих идеала $\mathcal{I}(X)$ соответствующие функции $d_x f$ порождают идеал функций многообразия $\text{Тап}(X)_x$ (упражнение 1); таким образом, это геометрическое касательное пространство в некоторых случаях может быть точно вычислено. Заметим, что касательное пространство к линейному многообразию (такому, как само A^n) есть в точности это же самое многообразие.

Если X — произвольное многообразие (не обязательно аффинное), то мы могли бы выбрать некоторое вложение в A^n для открытой аффинной окрестности точки $x \in X$ и затем определить $\text{Тап}(X)_x$, как и выше. Однако эта процедура зависит от сделанного выбора. Вместо нее мы рассмотрим алгебраическое описание касательного пространства при помощи локального кольца $\mathcal{O}_x$.

Предположим сначала, что многообразие $X \subset A^n$ аффинно, и пусть $M = \mathcal{I}(X)$ — максимальный идеал кольца $R = K[X]$, обращающийся в 0 в точке x . Так как факторкольцо R/M отождествляется с K , то R/M -модуль M/M^2 есть векторное пространство над K (конечномерное, так как M — конечно порожденный R -модуль). Заметим, что $d_x f$ для произвольной функции $f(T) \in K[T]$ может рассматриваться как линейная функция на A^n (с «началом координат» в точке x) и, следовательно, как линейная функция на векторном подпространстве $\text{Тап}(X)_x$ пространства A^n . Так как все функции $d_x f$ ($f(T) \in \mathcal{I}(X)$), по определению, обращаются в 0 на $\text{Тап}(X)_x$, то $d_x f$ однозначно зависит от образа функции $f(T)$ в кольце $R = K[T]/\mathcal{I}(X)$. Следовательно, мы можем писать $d_x f$ при $f \in R$. Очевидно, что таким образом d_x становится K -линейным отображением из R в дуальное пространство $(\text{Тап}(X)_x)^*$. Оно сюръективно, ибо линейная функция g на $\text{Тап}(X)_x$ есть ограничение линейной функции на A^n (начало координат — в точке x), задаваемой линейным полиномом $\hat{f}(T)$, для которого функция $d_x f$ есть данная функция g .

Так как $R = K + M$ (прямая сумма векторных пространств), и так как d_x от константы есть 0, то мы можем также рассматривать d_x как отображение из M на

двойственное пространство пространства $\text{Tan}(X)_x$. Мы утверждаем, что $\text{Ker } d_x = M^2$. Предположим, что функция $d_x f$ ($f \in M$) обращается в 0 на $\text{Tan}(X)_x$ и f — образ некоторой непостоянной функции $f(T) \in K[T]$. По построению $d_x f = \sum a_i d_x f_i$ для некоторых $a_i \in K$, $f_i(T) \in \mathcal{I}(X)$. Полагая $g(T) = f(T) - \sum a_i f_i(T)$, мы видим, что функция $d_x g$ обращается в нуль на всем многообразии A^n , т. е. есть тождественный нуль. Так как $f(T)$ непостоянна, мы можем предполагать, что и $g(T)$ непостоянна. Тогда $g(T)$ не должна содержать линейных членов, т. е. $g(T)$ принадлежит квадрату идеала $(T_1, \dots, T_n)$. Образ этого идеала в R есть M , и $g(T)$ имеет тот же образ f в R , что и $f(T)$; отсюда мы заключаем, что $f \in M^2$, что и утверждалось.

Этого отождествления касательного пространства $\text{Tan}(X)_x$ с двойственным пространством $(M/M^2)^*$ еще недостаточно для введения понятия касательного пространства внутренним образом. Но легко перейти к локальному кольцу $(\mathcal{O}_x, m_x)$: так как $\mathcal{O}_x = R_m$, $m_x = MR_m$, то имеется канонический изоморфизм R/M -модуля M/M^2 на $\mathcal{O}_x/m_x$ -модуль m_x/m_x^2 , индуцированный включением $R \rightarrow R_m$ (0.10). Следовательно, мы можем избежать вложения многообразия X в A^n и определить **касательное пространство** $\mathcal{T}(X)_x$ многообразия X в точке x как дуальное векторное пространство $(m_x/m_x^2)^*$ над полем $K = \mathcal{O}_x/m_x$. Это определение имеет смысл, если X — произвольное неприводимое многообразие (и даже если X приводимо, при условии, что мы позаботимся об определении кольца $\mathcal{O}_x$ для этого случая). Мы будем использовать буквы x, y, z для обозначения элементов пространства $\mathcal{T}(X)_x$.

В некоторых случаях полезен несколько другой взгляд на касательное пространство. Определим **дифференцирование в точке x** как отображение $\delta: \mathcal{O}_x \rightarrow K$, которое ведет себя подобно K -дифференцированию кольца $\mathcal{O}_x$ с последующим вычислением значения в точке x ; иначе говоря, δ есть K -линейное отображение, удовлетворяющее условию

$$(*) \quad \delta(fg) = \delta(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta(g).$$

Ясно, что дифференцирования в точке x кольца $\mathcal{O}_x$ образуют векторное пространство над K , которое мы обозначим через $\mathcal{D}_x$. Мы утверждаем, что $\mathcal{D}_x$ естественным образом изоморфно $\mathcal{T}(X)_x$. В самом деле, если $f \in \mathcal{O}_x$ — константа или элемент из m_x^2 , то соотношение (*) показывает, что $\delta(f) = 0$ при $\delta \in \mathcal{D}_x$. Следовательно, δ полностью определяется своим действием на m_x или индуцированным действием на m_x/m_x^2 . Это доставляет вложение $\mathcal{D}_x$ в $\mathcal{T}(X)_x$. С другой стороны, K -линейное отображение $m_x/m_x^2 \rightarrow K$ в композиции с $m_x \rightarrow m_x/m_x^2$ определяет K -линейное отображение $m_x \rightarrow K$, которое можно расширить на кольцо $\mathcal{O}_x = K + m_x$, отображая константы в 0. Для него легко проверить соотношение (*).

Таким образом, имеется несколько возможностей представлять себе касательное пространство. Например, касательное пространство многообразия A^n (или P^n) в точке x геометрически есть в точности A^n , рассматриваемое как векторное пространство с началом координат в точке x ; алгебраически касательное пространство есть множество дифференцирований $\sum a_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)$ в точке x локального кольца точки x в $K(T_1, \dots, T_n)$.

Если X — объединение непересекающихся неприводимых компонент, или если x лежит только на одной компоненте Y , то мы можем определить $\mathcal{T}(X)_x$ как $\mathcal{T}(Y)_x$. (Или же мы можем использовать дуальное пространство $(m_x/m_x^2)^*$ для соответствующим образом определенного локального кольца $\mathcal{O}_x$ в общем случае.)

При образовании произведения касательное пространство ведет себя так, как этого следует ожидать.

Предложение. Пусть X, Y — (неприводимые) многообразия, $x \in X, y \in Y$. Тогда $\mathcal{T}(X \times Y)_{(x, y)} \cong \mathcal{T}(X)_x \oplus \mathcal{T}(Y)_y$.

Доказательство. Это очевидно, если мы используем геометрическое описание касательного пространства. В алгебраических терминах это утверждение следует из того факта, что $\mathcal{O}_{(x, y)}$ — локализация кольца $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}_y$ относительно максимального идеала $m_x \otimes \mathcal{O}_y + \mathcal{O}_x \otimes m_y$ (см. предложение 2.4). $\square$

5.2. Существование простых точек. В случае кривой в аффинном пространстве касательное пространство в

«несингулярной» точке имеет размерность 1, в то время как в «сингулярной» точке эта размерность может возрасти. Мы вскоре увидим, что $\dim \mathcal{T}(X)_x \geq \dim X$ для любого многообразия. Если имеет место равенство, то x называется **простой точкой** многообразия X . Если же все точки являются простыми, то многообразие X называется **гладким** (или **неособым**).

Из этого определения ясно, что A^n и P^n — гладкие многообразия. Из предложения 5.1 следует, что произведение гладких многообразий — снова гладкое многообразие (см. предложение 3.1). Не вполне очевидно, однако, что произвольное многообразие вообще обладает простыми точками. Рассмотрим частный случай неприводимой гиперповерхности X в A^n , где $\mathcal{I}(X)$ — идеал, порожденный одним неприводимым полиномом $f(T_1, \dots, T_n)$. Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, то вычисление в (5.1) показывает, что $\text{Тан}(X)_x$ — множество нулей ли-

нейного полинома $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)(T_i - x_i)$. Так как $\dim X =$

$= n - 1$, то x не будет простой точкой, если этот полином обращается в 0 на A^n , т. е. если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial T_i}$ обращаются в 0 в точке x (и в этом случае

$\dim \text{Тан}(X)_x = n$). Если $\text{char } K = 0$, то это последнее условие не может иметь места для каждой точки $x \in X$, так как в противном случае полином $f(T)$ был бы константой. То же самое справедливо, если $\text{char } K = p > 0$:

если все $\frac{\partial f}{\partial T_i}$ обращаются в 0 на X , то все степени переменных T_i в $f(T)$ должны быть кратны p , так что $f(T) = g(T)^p$ для некоторого полинома $g(T)$, вопреки неприводимости f . Следовательно, и в этом случае многообразие X имеет простые точки. В действительности проведенное рассуждение показывает, что они образуют (плотное) открытое множество. Используя это, мы докажем следующий общий результат.

Теорема. Пусть X — любое (неприводимое) многообразие. Тогда $\dim \mathcal{T}(X)_x \geq \dim X$ для всех $x \in X$, причем равенство имеет место для всех точек x из некоторого плотного открытого подмножества.

Доказательство. $K(X)$ есть **сепарабельно порожденное** расширение поля K (0.14), т. е. $K(X)$ — сепарабельное алгебраическое расширение подполя $L = K(t_1, \dots, t_d)$, которое в свою очередь есть чисто трансцендентное расширение поля K ($d = \dim X$). Теорема о примитивном элементе позволяет нам найти одну образующую t_0 расширения $K(X)/L$. Пусть $f(T_0) \in L(T_0)$ — ее минимальный полином. Он задает рациональную функцию $f(T_0, T_1, \dots, T_d) \in K(T_0, T_1, \dots, T_d)$, определенную на аффинном открытом подмножестве пространства $\mathbf{A}^{d+1}$, причем множество ее нулей Y представляет собой гиперповерхность с полем функций $K(Y)$, изоморфным $K(X)$. Из замечаний в (2.3) и предложения 4.7 следует, что некоторые непустые открытые множества в X и Y изоморфны. Точки $y \in Y$, для которых $\dim \mathcal{T}(Y)_y = \dim Y = d$, образуют плотное открытое подмножество в Y , так что, в частности, $\mathcal{T}(X)_x = \dim X = d$ для всех x из некоторого плотного открытого подмножества многообразия X .

Теперь мы применим свойство «непрерывности размерности сверху» (предложение 4.4), чтобы получить информацию о $\mathcal{T}(X)_x$ для произвольной точки $x \in X$. Здесь достаточно предполагать, что X — аффинная открытая окрестность точки x . Таким образом, рассмотрим X как замкнутое подмножество некоторого пространства $\mathbf{A}^n$ и рассмотрим все касательные пространства как линейные подмногообразия в $\mathbf{A}^n$. Пары $(x, y) \in X \times \mathbf{A}^n$, для которых $y \in \text{Tan}(X)_x$, как легко видеть, образуют замкнутое подмножество T этого произведения. Проекция на первый множитель определяет морфизм $\varphi: T \rightarrow X$, слой которого $\varphi^{-1}(x)$ имеет ту же размерность, что и $\mathcal{T}(X)_x$. Для каждого m множество $X_m = \{x \in X \mid \dim \mathcal{T}(X)_x \geq m\}$ замкнуто в X (4.4). Но, как мы видели выше, множество X_d *плотно* в X , так что $X_d = X$. $\square$

5.3. Локальное кольцо простой точки. Неравенство $\dim T(X)_x \geq \dim X$ (5.2) можно интерпретировать как утверждение, что для определения точки x требуется не менее чем $\dim X$ «локальных параметров». Чтобы придать этой идее точный смысл, нам необходима следующая лемма.

Лемма. Пусть R — нётерово локальное кольцо с единственным максимальным идеалом M . Тогда M порождается как R -модуль элементами $f_1, \dots, f_n$ в том и только в том случае, когда M/M^2 порождается как R/M -модуль образами элементов $f_1, \dots, f_n$.

Доказательство. В одну сторону это очевидно. Поэтому пусть образы элементов f_i порождают M/M^2 , и пусть N есть R -подмодуль модуля M , порожденный $f_1, \dots, f_n$. Тогда конечно порожденный R -модуль M/N удовлетворяет соотношению $M(M/N) = M/N$. Согласно лемме Накаямы (0.11) $M/N = 0$, т. е. $M = N$. $\square$

В частности, минимальное число образующих n идеала m_x совпадает с размерностью векторного пространства m_x/m_x^2 или его двойственного пространства $\mathcal{T}(X)_x$. Каково значение этого факта, если x — простая точка, так что $n = \dim X$?

Для (нётерова) локального кольца (R, M) **размерность Крулля** кольца R определяется как наибольшая длина k цепи $0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq M = P_k$ простых идеалов. В случае кольца $\mathcal{O}_x$ мы видим, что размерность Крулля в точности равна $\dim X$. В самом деле, мы можем предполагать, что многообразие X аффинно, так что $\mathcal{O}_x = K[X]_{\mathcal{J}(x)}$, где $\mathcal{J}(x)$ — максимальный идеал кольца $K[X]$; из теоремы о размерности (см. упражнение 3.4) следует, что $\dim X$ есть длина максимальной цепи различных простых идеалов между 0 и $\mathcal{J}(x)$. Но простые идеалы кольца $K[X]$, содержащиеся в $\mathcal{J}(x)$, взаимно однозначно соответствуют простым идеалам кольца $\mathcal{O}_x$.

Локальное кольцо (R, M) называется **регулярным**, если его размерность Крулля совпадает с минимальным числом образующих идеала M (которая, согласно лемме, равна также $\dim_{R/M} M/M^2$). Регулярное локальное кольцо является областью целостности и целозамкнуто (в своем поле частных); см. (0.12). Следовательно, проведенным рассуждением установлена

Теорема А. Пусть $x \in X$ — простая точка на (неприводимом) многообразии X . Тогда $\mathcal{O}_x$ — регулярное локальное кольцо, и, следовательно, оно целозамкнуто (в своем поле частных $K(X)$). $\square$

Затратив несколько больше труда, можно показать, что регулярное локальное кольцо является даже

областью с однозначным разложением на множители. Нам это потребуется только при условии, что $\dim X=1$, а в этом случае легко дать непосредственное доказательство (упражнение 2).

Тот факт, что локальное кольцо простой точки целозамкнуто, позволит нам применить следующий результат к изучению однородных пространств (12.3).

Теорема Б. Пусть X — неприводимое многообразие, $x \in X$ — точка, локальное кольцо которой $\mathcal{O}_x$ целозамкнуто, $f \in K(X)$ — функция, не принадлежащая $\mathcal{O}_x$. Тогда существует подмногообразие Y многообразия X , содержащее точку x , такое, что $f' = 1/f \in \mathcal{O}_y$ для некоторой точки $y \in Y$, причем f' принимает значение 0 на Y всюду, где она определена.

Доказательство. Пусть $R = \mathcal{O}_x$. Тогда $I = \{g \in R \mid gf \in R\}$ — собственный идеал кольца R (так как, по предположению, $f \notin R$), и, следовательно, I содержится в m_x . Пусть $P = P_1, P_2, \dots, P_t$ — различные минимальные содержащие I простые идеалы кольца R (они содержатся в m_x), см. (0.13). Для достаточно большого n мы имеем $P^n \subset I$. При $i > 1$ ясно, что P_i порождает в локальном кольце $R_P \subset K(X)$ идеал, совпадающий с R_P , так что $P^n R_P \subset I R_P$. В частности, так как $I f \subset R$, то $P^n f \subset (I f) R_P \subset R_P$. Выберем $k \geq 0$ насколько возможно малым, чтобы выполнялось соотношение $P^k f \subset R_P$ (тогда $k > 0$), и пусть $g \in P^{k-1} f$, $g \notin R_P$ (тогда $Pg \subset R_P$).

По предположению кольцо R целозамкнуто; поэтому кольцо R_P целозамкнуто (0.10). Так как $g \notin R_P$, то элемент g не может быть целым над R_P . Из (0.6) следует, что умножение на g не может оставлять инвариантным конечно порожденный R_P -модуль PR_P , т. е. $PR_P g \not\subset PR_P$ (хотя $Pg \subset R_P$). Другими словами, Pg порождает идеал, совпадающий с R_P , и, следовательно, содержит обратимый элемент из R_P . Поэтому $1/g \in PR_P$ и в действительности $PR_P = (1/g)R_P$.

Теперь $h = f/g^k \in f P^k R_P \subset R_P$ (ввиду выбора k). Заметим, что h — обратимый элемент кольца R_P ; в противном случае $h \in PR_P = (1/g)R_P$, или $f/g^{k-1} \in R_P$, что противоречит выбору k . Таким образом, $1/f = h^{-1}(1/g^k) \in PR_P$. Если Y — множество нулей идеала P (т. е. прообраза P в аффинной алгебре некоторого аффинного открытого подмножества в X , содержащего

x), то это означает, что $1/f$ определяет рациональную функцию на Y и обращается в 0 во всех точках, где она определена. Кроме того, $x \in Y$. $\square$

5.4. Дифференциал морфизма. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм (неприводимых) многообразий. Если $x \in X$, $y = \varphi(x)$, то φ^* отображает $(\mathcal{O}_y, m_y)$ в $(\mathcal{O}_x, m_x)$. При помощи композиции с φ^* линейная функция t на m_x/m_x^2 индуцирует, следовательно, линейную функцию $d\varphi_x(t)$ на m_y/m_y^2 . Полученное отображение $d\varphi_x: \mathcal{T}(X)_x \rightarrow \mathcal{T}(Y)_y$, очевидно, K -линейно. Мы называем его **дифференциалом морфизма φ в точке x** .

Дифференцирование обладает ожидаемыми функториальными свойствами: если $\varphi: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то и $d\varphi_x$ — тождественное отображение. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ и $\psi: Y \rightarrow Z$ — морфизмы, причем для $x \in X$ мы имеем $\varphi(x) = y \in Y$, $\psi(y) = z \in Z$, то $d(\psi \circ \varphi)_x = d\psi_y \circ d\varphi_x: \mathcal{T}(X)_x \rightarrow \mathcal{T}(Z)_z$.

Для вычислительных целей иногда полезно точное правило. Скажем, пусть $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, так что φ задается m координатными функциями $\varphi_i(T_1, \dots, T_n)$. Пусть $x \in X$, $y = \varphi(x)$; отождествим соответствующие касательные пространства с подпространствами пространств K^n и K^m . Это в точности отождествляет точку $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ с дифференцированием $\mathcal{O}_x \rightarrow K$ в точке x , индуцированным отображением $\sum a_i \frac{\partial}{\partial T_i}$ (с последующим вычислением значения в точке x). Тогда $d\varphi_x(a) = (b_1, \dots, b_m)$, где $b_k = \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial T_i}(x) a_i$ (упражнение 3).

Важный пример доставляет определитель: отображение $GL(n, K) \rightarrow GL(1, K) \subset \mathbb{A}^1$ задается одним полиномом от n^2 переменных T_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). Так как $GL(n, K)$ — аффинное открытое множество в $\mathbb{A}^{n^2}$, то его касательное пространство в каждой точке есть в точности K^{n^2} . Удобно рассматривать это векторное пространство как множество $M(n, K)$ всех $n \times n$ матриц. Тогда простое вычисление с вышеуказанной формулой для $d\varphi_e$ приводит к такому результату: $d(\det)_e(a) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \in M(1, K) = K$. Другими словами, **дифференциал определителя есть след**.

Вычисления, связанные со следующими примерами, будут проведены позднее:

(1) Если $\varphi: \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^n$ — линейное отображение, то $d\varphi_x$ можно отождествить с φ , если $\mathcal{T}(\mathbf{A}^n)_x$ отождествить с $\mathbf{A}^n$.

(2) Пусть V — n -мерное векторное пространство над K , и пусть $\varphi: V - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(V)$ — каноническое отображение, где $V - \{0\}$ рассматривается как открытое множество в $V = \mathbf{A}^n$. Пусть $0 \neq v \in V$; рассмотрим $d\varphi_v$, отождествив $\mathcal{T}(V - \{0\})_v$ с V . Если принять v за первый базисный вектор, то отображение φ можно описать в соответствующих аффинных координатах следующим образом: $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1)$. Отсюда легко вытекает, что ядро линейного отображения $d\varphi_v$ есть в точности подпространство Kv (и, значит, отображение $d\varphi_v$ сюръективно, как следует из сравнения размерностей).

(3) Если Y — подмногообразие многообразия X и $y \in Y$, то отображение включения $i: Y \rightarrow X$ индуцирует мономорфизм $di_y: \mathcal{T}(Y)_y \rightarrow \mathcal{T}(X)_y$. Таким образом, мы можем рассматривать первое касательное пространство как подпространство последнего.

5.5. Дифференциальный критерий сепарабельности.

Расширение полей E/F называется **сепарабельным**, если либо $\text{char } F = 0$, либо $\text{char } F = p$ и p -е степени элементов $x_1, \dots, x_r \in E$, линейно независимых над F , снова линейно независимы над F . Нам необходимо иметь в виду некоторые факты (0.14): (1) это определение эквивалентно обычному определению сепарабельности, если расширение E/F конечно; (2) если $F \subset L \subset E$ — расширения полей и E/F сепарабельно, то L/F сепарабельно (однако E/L не всегда сепарабельно); (3) если поле F совершенно, то расширение E/F всегда сепарабельно; (4) для конечно порожденных расширений поля F сепарабельность эквивалентна сепарабельной порожденности.

В наших рассуждениях вопрос о сепарабельности возникает в связи с доминантными морфизмами $\varphi: X \rightarrow Y$ неприводимых многообразий (см. теорему 4.6). Здесь φ^* отождествляет $K(Y)$ с подполем поля $K(X)$, над которым $K(X)$ конечно порождено, но не всегда сепарабельно. Например, отображение Фробениуса $x \rightarrow x^p$ — биективный морфизм $\mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$, коморфизм кото-

рого отображает поле $K(A^1) = K(T)$ на подполе $K(T^p)$. Если расширение $K(X)/\varphi^*K(Y)$ сепарабельно, то мы называем морфизм φ **сепарабельным**. В характеристике 0 все морфизмы сепарабельны. Предположим на время, что $\text{char } K = p > 0$.

Вопрос о сепарабельности конечных расширений полей может быть решен проверкой минимальных полиномов определенных элементов поля на наличие кратных корней; для этого удобен признак, использующий производную. Здесь мы постараемся развить аналогичный «дифференциальный критерий» для сепарабельности. Нам потребуется еще несколько общих фактов (0.15):

(5) Пусть E/F — сепарабельно порожденное расширение, и пусть $\mathcal{D}$ — векторное пространство над L всех F -дифференцирований $E \rightarrow L$, где L — некоторое расширение поля E ; тогда $\dim_L \mathcal{D} = \text{tr. deg}_F E$;

(6) расширение полей E/F сепарабельно, если (и только если) все дифференцирования $F \rightarrow L$ продолжаются до дифференцирований $E \rightarrow L$ ($L \supset E$ — любое вспомогательное поле);

(7) все дифференцирования $E \rightarrow L$ являются E^p -дифференцированиями; в частности, если поле E совершенно, то все дифференцирования поля E нулевые. Это применимо, в частности, к алгебраически замкнутому полю K .

Так как поле K совершенно, то любое поле функций $K(X)$ автоматически сепарабельно порождено (и сепарабельно) над K ввиду утверждений (3) и (4), сформулированных выше. Поэтому (5) влечет соотношение $\dim X = \dim_L \text{Der}(K(X), L)$ для любого расширения L поля K . (Все дифференцирования являются K -дифференцированиями, так что индекс K мы опускаем.) В частности, рассмотрим доминантный морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$. Тогда $\dim X = \dim_{K(X)} \text{Der}(K(X), K(X))$ и $\dim Y = \dim_{K(X)} \text{Der}(\varphi^*K(Y), K(X))$. С другой стороны, φ индуцирует $K(X)$ -линейное отображение, которое мы обозначим через $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi: \text{Der}(K(X), K(X)) \rightarrow \text{Der}(\varphi^*K(Y), K(X)).$$

Если нам известно, что отображение $\delta\varphi$ *сюръективно*, то из (6) следует, что расширение $K(X)/\varphi^*K(Y)$ сепарабельно (т. е. морфизм φ сепарабелен), и обратно.

На этом критерии будут основаны некоторые точные вычисления в (6.4). Отметим, что эта теорема может быть частично обращена (что, впрочем, нам здесь не требуется): если морфизм f сепарабелен, то отображение df_x сюръективно для всех элементов x из некоторого непустого открытого подмножества (см. Борель [4, АГ 17.3]).

Упражнения

1. Пусть X — аффинное многообразие, $X \subset \mathbb{A}^n$. Докажите, что если функции $f_1(T), \dots, f_r(T)$ порождают идеал $\mathcal{I}(X)$, то $d_x f_1, \dots, d_x f_r$ порождают идеал, ассоциированный с многообразием $\text{Тан}(X)_x$ ($x \in X$).

2. Пусть $\dim X = 1$, и $x \in X$ — простая точка. Доказать, что кольцо $\mathcal{O}_x$ — область с однозначным разложением на множители. (Показать, что, с точностью до обратимых элементов, образующая идеала m_x — единственный неприводимый элемент кольца $\mathcal{O}_x$ и, следовательно, что $\mathcal{O}_x$ — область главных идеалов с единственным ненулевым простым идеалом m_x .)

3. Проверить формулу для df_x в (5.4).

4. Доказать, что канонический морфизм $V - \{0\} \rightarrow P(V)$ сепарабелен.

Замечания. По поводу теоремы Б (5.3) см. Шевалле [8, exposé 8, lemme 1].

§ 6. Полные многообразия

Сведения о полноте многообразий из (6.1) и (6.2) будут играть важную роль, начиная с § 21, при изучении тех однородных пространств G/H , которые являются проективными многообразиями. Некоторые дополнительные замечания о $\mathbb{P}^1$ будут даны в (6.3) и (6.4) и в надлежащий момент найдут применение в структурной теории редуктивных групп (25.3).

6.1. Основные свойства. Многообразие X называется полным, если для любого многообразия Y проекция $\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y$ — замкнутое отображение (т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые). Геометрический смысл полноты в этом определении интуитивно не ясен, но подразумевается некоторого рода «компактность». Для достаточно хороших хаусдорфовых пространств сформулированный критерий с заданной на $X \times Y$ обычной топологией произведения эквивалентен компактности.

Одна точка, рассматриваемая как многообразие, очевидно, представляет собой полное многообразие. Ясно также, что многообразие X является полным тогда и только тогда, когда полными многообразиями являются его неприводимые компоненты, и что вспомогательные многообразия Y в определении можно выбирать неприводимыми (и даже аффинными), если данное многообразие X проверяется на полноту. Не столь ясно, что существуют «интересные» полные многообразия. В (6.2) будет показано, что проективные многообразия являются полными. С другой стороны, не все многообразия полны: множество нулей уравнения $T_1 T_2 = 1$ в $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ проектируется на незамкнутое подмножество в $\mathbf{A}^1$, так что $\mathbf{A}^1$ не может быть полным.

Мы соберем здесь элементарные факты о полноте, некоторые из которых должны напомнить читателю свойства компактных хаусдорфовых пространств.

Предложение. Пусть X, Y — многообразия.

(а) Если многообразие X является полным и Y замкнуто в X , то Y полно.

(б) Если X и Y полны, то $X \times Y$ полно.

(в) Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм и X — полное многообразие, то многообразие $\varphi(X)$ замкнуто и полно.

(г) Если Y — полное подмногообразие многообразия X , то Y замкнуто.

(д) Если X — полное аффинное многообразие, то $\dim X = 0$.

(е) Полное квазипроективное многообразие проективно.

Доказательство. (а), (б) Это следует непосредственно из определений.

(в) Так как X, Y — многообразия, то график морфизма φ замкнут в $X \times Y$ (2.5). Его образ относительно pr_2 совпадает с $\varphi(X)$, и это множество замкнуто, так как многообразие X полно. Чтобы проверить полноту $\varphi(X)$, мы можем принять $Y = \varphi(X)$. Для любого многообразия Z рассмотрим проекции $\text{pr}_2: X \times Z \rightarrow Z$, $\text{pr}'_2: Y \times Z \rightarrow Z$. Если множество W замкнуто в $Y \times Z$, то множество $\text{pr}'_2(W) = \text{pr}_2(\varphi \times 1)^{-1}(W)$ замкнуто в Z , ибо X — полное многообразие.

(г) Применить (в) к морфизму включения $Y \rightarrow X$.

(д) Как отмечено выше, многообразие A^1 не является полным. Ввиду (в) единственными морфизмами $X \rightarrow A^1$ неприводимого полного многообразия X являются постоянные отображения. Таким образом, полное неприводимое аффинное многообразие X удовлетворяет условию $K[X] = K$, откуда следует, что X — точка.

(е) Это следует из (г). $\square$

6.2. Полнота проективных многообразий. Теорема.
Любое проективное многообразие полно.

Доказательство. Ввиду предложения (6.1) (а) достаточно показать, что проекция $\text{pr}_2: \mathbf{P}^n \times Y \rightarrow Y$ для любого многообразия Y замкнута. Мы можем даже предполагать, что Y — неприводимое аффинное многообразие с аффинной алгеброй R . Произведение $\mathbf{P}^n \times Y$ покрывается аффинными открытыми множествами $U_i = \mathbf{P}_i^n \times Y$. Если $X_0, \dots, X_n$ — однородные координаты на $\mathbf{P}^n$, то аффинная алгебра множества U_i может быть записана в виде $R_i = R[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]$, где $X_0/X_i, \dots, X_n/X_i$ — аффинные координаты на $\mathbf{P}_i^n$, как в (1.6).

Выберем любое замкнутое множество Z в $\mathbf{P}^n \times Y$ и любую точку $y \in Y - \text{pr}_2(Z)$. Мы хотим найти окрестность точки y в Y вида Y_f , которая не пересекается с $\text{pr}_2(Z)$. Это равносильно нахождению функции $f \in R$, $f \notin M = \mathcal{I}(y)$, которая обращается в 0 на $\text{pr}_2(Z)$, т. е. такой, что соответствующая f функция в R_i принадлежит $\mathcal{I}(Z_i)$ для всех i , где $Z_i = Z \cap U_i$. Существование такой функции f следует из некоторого варианта леммы Накаямы, примененной к подходящему R -модулю, к построению которого мы сейчас и переходим.

Прежде всего рассмотрим полиномиальное кольцо $S = R[X_0, \dots, X_n]$ с естественной градуировкой $S = \sum S_m$, и зададим однородный идеал $I \subset S$ условием, что I_m состоит из всех функций $f(X_0, \dots, X_n) \in S_m$ таких, что $f(X_0/X_i, \dots, X_n/X_i) \in \mathcal{I}(Z_i)$ для каждого i .

Затем зафиксируем i и возьмем $f \in \mathcal{I}(Z_i)$. Мы утверждаем, что после умножения на достаточно высокую степень переменной X_i функция f попадает в I . В самом деле, если рассматривать f как полином от $X_0/X_i, \dots, X_n/X_i$, то $X_i^m f$ становится однородным полиномом (степени m) от $X_0, \dots, X_n$ для достаточно большого m . В свою очередь функция $(X_i^m/X_i^m)f \in R_i$ обра-

щается в 0 на множестве $Z_i \cap U_j = Z_j \cap U_i$, тогда как функция $(X_i^{m+1}/X_j^{m+1})f$ обращается в 0 во всех точках множества Z_j , не лежащих в U_i . Так как номер j произволен, то мы заключаем, что $X_i^{m+1}f$ лежит в I_{m+1} .

Теперь Z_i и $\mathbf{P}_i^n \times \{y\}$ — непересекающиеся замкнутые подмножества аффинного многообразия U_i , так что их идеалы функций $\mathcal{I}(Z_i)$ и MR_i порождают R_i . В частности, существует уравнение $1 = f_i + \sum_j m_{ij}g_{ij}$, где $f_i \in \mathcal{I}(Z_i)$, $m_{ij} \in M$, $g_{ij} \in R_i$. Ввиду предыдущего абзаца умножением на достаточно высокую степень переменной X_i функция f_i переводится в I . Мы можем выбрать указанную степень достаточно большой, чтобы это было так (для соответствующих уравнений) при всех i , а также выбрать все g_{ij} в S . Таким образом, мы получаем $X_i^m \in I_m + MS_m$ (для всех i). Увеличивая m еще более, мы можем добиться того, чтобы все одночлены степени m от $X_0, \dots, X_n$ лежали в $I_m + MS_m$. Это ведет к соотношению $S_m = I_m + MS_m$.

Применим теперь (0.11) к конечно порожденному R -модулю S_m/I_m , который удовлетворяет условию $M(S_m/I_m) = S_m/I_m$. В результате можем сделать вывод, что существует функция $f \in R$, $f \notin M$, которая аннулирует S_m/I_m . Таким образом, $fS_m \subset I_m$; в частности, $fX_i^m \in I_m$, так что f обращается в 0 на $\text{pr}_2(Z)$. $\square$

6.3. Многообразия, изоморфные $\mathbf{P}^1$. Локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ простой точки неприводимого многообразия X есть целозамкнутая область (теорема 5.3А). Легко получить усиление этого утверждения: кольцо $\mathcal{O}_x$ есть область с однозначным разложением на множители, если $\dim X = 1$ (упражнение 5.2). В этом случае максимальный идеал m_x является *главным* и, следовательно, порождается неприводимым элементом q . Поскольку множество $\mathcal{O}_x - m_x$ состоит только из обратимых элементов, ясно, что q , с точностью до обратимого множителя, — единственный неприводимый элемент кольца $\mathcal{O}_x$. Отсюда следует, что $\mathcal{O}_x$ — **кольцо нормирования**, т.е. для каждого элемента $f \in K(X)$ либо $f \in \mathcal{O}_x$ либо $1/f \in \mathcal{O}_x$. В самом деле, если $f = g/h$ ($g, h \in \mathcal{O}_x$), то мы можем предполагать, что один из элементов g, h не делится на q ; тогда либо g , либо h — обратимый элемент в $\mathcal{O}_x$.

Перейдем теперь к случаю, когда $K(X) \cong K(T)$ — поле функций на $\mathbf{A}^1$ или $\mathbf{P}^1$, и предположим, что все точки многообразия X просты. Предыдущее рассуждение показывает, что либо T либо $1/T$ принадлежит каждому локальному кольцу $\mathcal{O}_x$. Простое упражнение — определить все кольца нормирования поля $K(T)$, которые содержат либо $K[T]$ либо $K[1/T]$: они являются (кроме самого $K(T)$) в точности локальными кольцами точек многообразия $\mathbf{P}^1$ (упражнение 2). Заметим также, что различные указанные кольца нормирования не могут содержаться друг в друге.

Теорема. Пусть X — гладкое многообразие размерности 1, и пусть $\varphi: \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ — доминантный морфизм. Тогда X изоморфно $\mathbf{P}^1$ (хотя φ — не обязательно изоморфизм).

Доказательство. Ввиду предложения 6.1 (в) морфизм φ сюръективен, и многообразие X полно (и неприводимо). Коморфизм φ^* отождествляет $K(X)$ с подполем поля $K(\mathbf{P}^1) = K(T)$, имеющим степень трансцендентности 1 над K . В силу теоремы Люрота (0.4) каждое такое подполе изоморфно $K(T)$. Таким образом, мы можем отождествить $K(X)$ с $K(T)$; покажем, что это вместе с полнотой X ведет к тому, что X изоморфно $\mathbf{P}^1$.

Пусть функции $f, g \in K(X)$ соответствуют элементам T и $1/T$. Как отмечалось выше, тот факт, что $\mathcal{O}_x$ ($x \in X$) — кольцо нормирования, позволяет заключить, что либо $f \in \mathcal{O}_x$, либо $g \in \mathcal{O}_x$; если $f, g \in \mathcal{O}_x$, то мы имеем $f(x)g(x) = 1$. Открытые подмножества U, V многообразия X , состоящие из всех точек, в которых определены функции f, g , покрывают X . Мы можем определить морфизм $U \rightarrow \mathbf{P}^1$ (соответственно $V \rightarrow \mathbf{P}^1$), отображая точку x в точку, однородные координаты которой есть $(f(x), 1)$ (соответственно $(1, g(x))$). Так как $f(x)g(x) = 1$ для $x \in U \cap V$, то эти морфизмы вместе доставляют морфизм $\psi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ (2.3).

Так как многообразие X полно, то морфизм ψ сюръективен (предложение 6.1 (в)). По построению ψ^* — изоморфизм полей функций. Для того чтобы утверждать, что ψ — изоморфизм, остается показать, что ψ^* отображает локальные кольца многообразия $\mathbf{P}^1$ изоморфно на локальные кольца многообразия X . Но, как упоминалось выше, не существует собственных включе-

ний между кольцами нормирований поля $K(I)$, которые мы рассматриваем. $\square$

6.4. Автоморфизмы многообразия $\mathbf{P}^1$. Для использования в (25.3) нам необходимо определить группу $\text{Aut } \mathbf{P}^1$ автоморфизмов проективной прямой. Вначале мы укажем некоторые специальные автоморфизмы, индуцированные естественным действием группы $GL(2, K)$ на ненулевых векторах в K^2 . Мы можем рассматривать это действие как перестановку прямых (проходящих через начало координат) в K^2 , причем индуцируемая группа перестановок множества прямых дважды транзитивна: любая пара различных прямых может быть переведена в любую другую пару различных прямых, поскольку $GL(2, K)$ действует транзитивно на базисах пространства K^2 . Скалярные матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ($a \in K^*$), оставляют прямые инвариантными, так что мы получаем действие группы $PGL(2, K) = GL(2, K)/K^*$. Обозначим эту группу через G , а образ элемента $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из группы $GL(2, K)$ в G — через $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Проективную прямую $\mathbf{P}^1$ мы можем представлять как множество всех прямых, проходящих в K^2 через начало координат, а точки множества $\mathbf{P}^1$ записывать в виде $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ($x, y \in K, (x, y) \neq (0, 0)$), причем $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}$ для всех $a \in K^*$. Группа G будет действовать на $\mathbf{P}^1$ как группа перестановок $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$. Ясно, кроме того, что каждый элемент группы G определяет автоморфизм $\mathbf{P}^1$ как многообразия.

Теорема. $PGL(2, K) \cong \text{Aut}(\mathbf{P}^1)$.

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, чтобы охарактеризовать автоморфизмы пространства $\mathbf{P}^1$ их действием на тройку $(0, 1, \infty)$, где $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Здесь $\mathbf{P}^1 = \mathbf{A}^1 \cup \{\infty\}$ и точки $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ соответствуют точкам аффинной прямой.)

Определим G -эквивариантное отображение $\varphi: G \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ формулой $\varphi(g) = (g(0), g(1), g(\infty))$, т. е.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right)$. Если $\varphi(g) = (0, 1, \infty)$, то $g = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, откуда вытекает инъективность отображения φ . С другой стороны, если (x, y, z) — тройка различных точек множества $\mathbf{P}^1$, то мы можем следующим образом найти элемент группы G , преобразующий $(0, 1, \infty)$ в (x, y, z) . Сначала используем двойную транзитивность группы G , чтобы преобразовать тройку (x, y, z) в $(0, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \infty)$, где $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \neq 0, \infty$ (и, таким образом, $uv \neq 0$). В свою очередь $\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$ преобразует тройку $(0, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \infty)$ в $(0, 1, \infty)$.

Пусть теперь σ — произвольный автоморфизм пространства $\mathbf{P}^1$. Тогда $(\sigma(0), \sigma(1), \sigma(\infty))$ — тройка различных точек, которая ввиду предыдущего рассуждения имеет вид $(g(0), g(1), g(\infty))$ для некоторого элемента $g \in G$. Следовательно, автоморфизм $\tau = \sigma^{-1}g$ оставляет неподвижными точки $0, 1, \infty$. В частности, τ может быть ограничен до автоморфизма пространства $\mathbf{A}^1 \subset \mathbf{P}^1$. Такой автоморфизм, как легко видеть, имеет вид $a \mapsto ra + s$ ($r \in K^*, s \in K$), см. упражнение 1.10. Так как точки $0, 1$ неподвижны, то $\tau = 1$ и $\sigma = g \in G$. $\square$

Отображение φ , введенное в процессе доказательства теоремы, оказывается при более тщательном рассмотрении морфизмом (и даже изоморфизмом) аффинных многообразий. Группу $GL(2, K)$ можно, разумеется, рассматривать как главное открытое подмножество в $\mathbf{A}^4$, и отображение $\psi: GL(2, K) \rightarrow Y \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, определенное соотношением $\psi(g) = (g(0), g(1), g(\infty))$, является, очевидно, морфизмом ($Y = \text{Im}(\psi)$). В главе IV мы увидим, как можно превратить $PGL(2, K)$ в 3-мерное аффинное многообразие, так что каноническое отображение $\pi: GL(2, K) \rightarrow PGL(2, K)$ (а также отображение φ) станет морфизмом. Из разложения $\psi = \varphi\pi$ будет следовать тогда, что φ — сепарабельный морфизм, если ψ сепарабелен. (В свою очередь, как мы увидим в (12.4), это ведет к тому, что $\varphi: PGL(2, K) \rightarrow Y$ — изоморфизм многообразий.)

Используем теперь *дифференциальный критерий* (5.5), чтобы установить, что морфизм ψ сепарабелен. Очевидно, многообразие $GL(2, K)$ является гладким (либо как главное открытое множество в A^4 , либо как «алгебраическая группа» (7.1)). Так как Y имеет транзитивную группу автоморфизмов, то из того факта, что некоторые точки на Y являются простыми (5.2), следует, что все точки просты. Поэтому нам требуется лишь проверить сюръективность $d\psi_e$, где $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для

этого мы отождествим касательное пространство в точке e с $M(2, K)$ (т. е. с A^4) и применим формулу (5.4).

Напомним (1.7), как многообразие $P^1 \times P^1 \times P^1$ вкладывается в P^7 . Отображение ψ преобразует $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в точку $\left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right)$ с однородными координатами $(ab(a+b), ab(c+d), bc(a+b), bc(c+d), ad(a+b), ad(c+d), cd(a+b), cd(c+d))$. Заметим, что $\psi(e)$ принадлежит аффинному открытому множеству в P^7 , выделяемому условием неравенства нулю 6-й координаты.

Таким образом, в аффинных координатах ψ задается в окрестности точки e семью координатными функциями, например $\psi_1(T_1, T_2, T_3, T_4) = T_2(T_1 + T_2)/T_4(T_3 + T_4)$. Теперь следует вычислить их частные производные в точке e . Положим $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Стандартное вычисление (упражнение 3) показывает, что $d\psi_e$ отображает x в точку $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, y — в точку $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$ и z — в точку $(0, 0, 0, 0, -1, 1, 1)$. Следовательно, образ отображения $d\psi_e$ есть 3-мерное подпространство 3-мерного пространства $\mathcal{T}(Y)_{\psi(e)}$. Вывод: морфизм ψ сепарабелен.

Как только в (12.4) будет установлено, что ϕ — изоморфизм, мы сможем сделать вывод, что для любой алгебраической группы H (7.1), действующей на P^1 , имеется морфизм $H \rightarrow PGL(2, K)$, реализующий это действие. В самом деле, действие автоморфизма пространства P^1 на тройку $(0, 1, \infty)$ полностью определяет автоморфизм, как показано выше; таким образом, нам оста-

ется только взять композицию орбитного отображения $H \rightarrow Y$ с обратным морфизмом φ^{-1} .

Упражнения

1. Всякий ли доминантный морфизм $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ обязан быть изоморфизмом?

2. Доказать, что кольцо нормирования $R \subset K(T)$, которое содержит $K[T]$ и отлично от $K(T)$, должно состоять из всех функций $f(T)/g(T)$, где $f(T), g(T) \in K(T)$ взаимно просты, и некоторый фиксированный линейный полином $T - a$ не делит $g(T)$. Описать подобным образом кольца нормирования, которые содержат $K[1/T]$. Показать, что не существует никаких собственных включений между парами таких колец нормирований.

3. Провести подробное вычисление дифференциала в конце (6.4).

Замечания. Доказательство теоремы 6.2 (принадлежащее Гротендику) воспроизводится по Мамфорду [3, I, § 9]. Относительно некоторых фактов о кривых, содержащих и теорему 6.3, см. Мамфорд [3, III, § 8, теорема 5]. Рассуждение в (6.4) взято у Бореля [4, 10.8]. Теорема 6.4 представляет собой частный случай основной теоремы проективной геометрии.

АФФИННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§ 7. Основные понятия и примеры

7.1. Понятие алгебраической группы. Пусть G — многообразие (не обязательно неприводимое), обладающее структурой группы. Если оба отображения $\mu: G \times G \rightarrow G$ и $\iota: G \rightarrow G$, где $\mu(x, y) = xy$, $\iota(x) = x^{-1}$, являются морфизмами многообразий, то мы называем G **алгебраической группой**. Читатель, знакомый с понятием «аналитической группы», заметит здесь очевидную аналогию. Однако имеется и существенное различие: заданная на $G \times G$ топология Зарисского является более тонкой, чем топология произведения, так что алгебраическая группа *не является* топологической группой (за исключением случая группы размерности 0). В самом деле, группа G обладает свойством T_1 , но не обладает свойством T_2 (за исключением случая группы размерности 0), в то время как топологическая группа со свойством T_1 автоматически обладает свойством T_2 .

Сдвиг на элемент $y \in G$ ($x \mapsto xy$) является, очевидно, изоморфизмом многообразий $G \rightarrow G$, и, следовательно, все геометрические свойства многообразия G в некоторой одной точке автоматически переносятся в любую другую точку при подходящем выборе элемента y . Например, исходя из того факта, что группа G обладает простыми точками, мы заключаем, что все точки группы G должны быть простыми: многообразие G является *гладким*.

Очевидным образом вводится понятие **изоморфизма**: алгебраические группы G и G' называются **изоморфными**, если существует изоморфизм многообразий $\varphi: G \rightarrow G'$, который одновременно является изоморфизмом групп. Изоморфизм, отображающий G на G , называется **автоморфизмом** группы G . Алгебраическая группа, многообразие которой полно (6.1), называется **абелевым многообразием**. Мы не будем пытаться изучать их здесь

(см. замечания ниже). Вместо этого мы всегда используем термин «алгебраическая группа» для тех групп, многообразие которых аффинно, если только противное специально не оговорено. Имея в виду это соглашение, мы перейдем к некоторым примерам.

Аддитивная группа G_a есть аффинная прямая A^1 с групповым умножением $\mu(x, y) = x + y$ (так что $\iota(x) = -x$, $e = 0$). **Мультипликативная группа G_m** есть аффинное открытое подмножество $K^* \subset A^1$ с групповым умножением $\mu(x, y) = xy$ (так что $\iota(x) = x^{-1}$, $e = 1$). Каждая из этих групп неприводима (как многообразие) и 1-мерна; после определенной подготовки мы сможем доказать, что (с точностью до изоморфизма) эти группы — единственные алгебраические группы, обладающие этими двумя свойствами (§ 20). В качестве обобщения аддитивной группы можно рассмотреть аффинное n -мерное пространство A^n , наделенное естественной (аддитивной) структурой алгебраической группы. Во всех этих примерах алгебраическая группа оказывалась коммутативной.

Обозначим через $GL(n, K)$ множество всех обратимых $n \times n$ матриц с коэффициентами в K ; это множество образует группу относительно умножения матриц, которая называется **полной линейной группой**. Множество $M(n, K)$ всех $n \times n$ матриц над полем K можно отождествить с A^{n^2} , а $GL(n, K)$ — с главным открытым подмножеством, задаваемым тем условием, что полином $\det$ не обращается в 0. Алгебра полиномиальных функций на группе $GL(n, K)$, рассматриваемой теперь как алгебраическое многообразие, порождается ограничениями на $GL(n, K)$ n^2 координатных функций T_{ij} вместе с функцией $1/\det(T_{ij})$. Формулы умножения и обращения матриц показывают, что $GL(n, K)$ — алгебраическая группа. Заметим, что G_m — это в точности $GL(1, K)$.

Легко построить новые примеры, пользуясь тем очевидным фактом, что *замкнутая подгруппа алгебраической группы есть снова алгебраическая группа*. Например, группа $T(n, K)$ всех верхних треугольных матриц есть множество нулей в $GL(n, K)$ полиномов T_{ij} ($i > j$); подгруппа $D(n, K)$ (соответственно $U(n, K)$), состоящая из диагональных матриц (соответственно из верхних треугольных матриц с 1 по диагонали), является замк-

и той по аналогичным причинам. Заметим, что алгебраическая группа $U(2, K)$ естественным образом изоморфна G_a .

Задав (не обязательно ассоциативную) конечномерную алгебру $\mathfrak{A}$, мы можем рассматривать ее группу автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{A})$ как подгруппу полной линейной группы $GL(n, K)$, выбрав базис в $\mathfrak{A}$ ($n = \dim \mathfrak{A}$); легко видеть, что это — *замкнутая* подгруппа (упражнение 3).

Упомянем наконец, что **прямое произведение** двух (или более) алгебраических групп, т. е. обычное прямое произведение групп, снабженное топологией Зарисского произведения, снова является алгебраической группой. Например, группу $D(n, K)$ можно рассматривать как прямое произведение n экземпляров группы G_m , а аффинное n -пространство — как прямое произведение n экземпляров группы G_a .

7.2. Некоторые классические группы. Мы введем сейчас некоторые семейства линейных групп, которые играют центральную роль в теории, развиваемой в этой книге. В каждом случае параметр l есть размерность замкнутой подгруппы диагональных матриц рассматриваемой группы.

A_l : специальная линейная группа $SL(l+1, K)$, состоящая из всех матриц с определителем 1 в группе $GL(l+1, K)$. Ясно, что это группа (ввиду правила произведения для определителя) и что эта группа замкнута (как множество нулей полинома $\det(T_{ij}) - 1$). Так как она определяется одним полиномом, то $SL(l+1, K)$ — гиперповерхность в $M(l+1, K)$ (3.3); следовательно, ее размерность равна $(l+1)^2 - 1 = l^2 + 2l$.

C_l : симплектическая группа $Sp(2l, K)$, состоящая из всех $x \in GL(2l, K)$, удовлетворяющих соотношению

$${}^t x \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } J = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, {}^t x -$$

транспонированная матрица x . Непосредственно проверяется, что $Sp(2l, K)$ — группа. Ее замкнутость следует из того факта, что определяющее уравнение налагает определенные (довольно сложные) полиномиальные условия на x . В этом случае размерность трудно вычислить непосредственно.

B_l : специальная ортогональная группа $SO(2l+1, K)$. Если $\text{char } K \neq 2$, то она состоит из всех матриц $x \in SL(2l+1, K)$, удовлетворяющих уравнению ${}^t x s x = s$, где $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \\ 0 & J & 0 \end{pmatrix}$. Опять легко проверить, что это условие определяет замкнутую подгруппу полной линейной группы.

D_l : специальная ортогональная группа $SO(2l, K)$, определяемая аналогично B_l условием ${}^t x s x = s$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$ (если $\text{char } K \neq 2$).

Симплектические и специальные ортогональные группы возникают геометрически как группы линейных преобразований, сохраняющих некоторую кососимметрическую (соответственно симметрическую) билинейную форму. Если $\text{char } K = 2$, то определение ортогональных групп более сложное (см. Дьедонне [13], Картер [1, гл. 1]).

7.3. Компонента единицы. Пусть G — алгебраическая группа. Мы утверждаем, что e содержится только в одной неприводимой компоненте многообразия группы G . В самом деле, пусть $X_1, \dots, X_m$ — различные компоненты, содержащие e . Образ неприводимого многообразия $X_1 \times \dots \times X_m$ (1.4) при морфизме произведения есть неприводимое подмножество $X_1 \dots X_m$ группы G , которое снова содержит e . Поэтому $X_1 \dots X_m$ лежит в некотором X_i . С другой стороны, каждая из компонент $X_1, \dots, X_m$, очевидно, лежит в $X_1 \dots X_m$. Это влечет $m = 1$. Эту единственную неприводимую компоненту группы G , содержащую e , мы будем обозначать через G^0 и называть **компонентой единицы** группы G .

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа.

(а) G^0 — нормальная подгруппа конечного индекса в группе G , смежные классы по которой являются одновременно связными и неприводимыми компонентами группы G .

(б) Каждая замкнутая подгруппа конечного индекса группы G содержит G^0 .

Доказательство. (а) Для каждого элемента $x \in G^0$ множество $x^{-1}G^0$ есть неприводимая компонента группы G , содержащая e , так что $x^{-1}G^0 = G^0$. Следовательно

но, $G^0 = (G^0)^{-1}$, и, далее, $G^0 G^0 = G^0$, т. е. G^0 — (замкнутая) подгруппа группы G . Для любого $x \in G$ множество xG^0x^{-1} — неприводимая компонента группы G , содержащая e ; поэтому $xG^0x^{-1} = G^0$ и G^0 — нормальная подгруппа группы G . Левые или правые смежные классы по этой группе — это просто сдвиги множества G^0 , и, следовательно, они также должны быть неприводимыми компонентами группы G . Число их должно быть конечно (ибо G — нётерово пространство). Поскольку они не пересекаются, то они являются также связными компонентами группы G .

(б) Если H — замкнутая подгруппа конечного индекса группы G , то каждый из (конечного множества) левых смежных классов G по H является замкнутым множеством, и, следовательно, замкнутым множеством является объединение всех классов, отличных от H . Как дополнение этого замкнутого множества множество H должно быть *открыто*. Поэтому пересечения G^0 с левыми смежными классами по H разбивают G^0 в конечное объединение открытых подмножеств. Поскольку множество G^0 связно и пересекается с H , мы получаем $G^0 \subset H$. $\square$

В дальнейшем мы будем называть алгебраическую группу **связной**, если $G = G^0$, в связи с тем, что термин «неприводимая группа» имеет совершенно иной смысл в теории линейных групп или теории представлений.

Группы, введенные выше, большей частью связны, как, например, G_a и G_m . Группа $GL(n, K)$ связна, поскольку ее многообразие является главным открытым множеством в аффинном пространстве. Однако связность группы $SL(n, K)$ и других классических групп не усматривается сразу из определения, так что для доказательства нам потребуется развить дополнительную технику (7.5). Хотя мы будем интересоваться главным образом связными группами, нам иногда придется рассматривать и несвязные группы (например, группу «монмиальных» матриц в $GL(n, K)$, см. упражнение 7).

7.4. Подгруппы и гомоморфизмы. Следующая тривиальная лемма будет часто использоваться.

Лемма. Пусть U, V — два плотных открытых подмножества алгебраической группы G . Тогда $G = U \cdot V$.

Доказательство. Так как инверсия (т. е. взятие обратного элемента) есть гомеоморфизм, то V^{-1} — также плотное открытое множество. Таким же является и его сдвиг xV^{-1} (для любого $x \in G$). Следовательно, U пересекается с xV^{-1} , откуда $x \in U \cdot V$. $\square$

Мы уже указывали, что замкнутая подгруппа алгебраической группы есть снова алгебраическая группа. Что мы можем сказать о произвольной подгруппе?

Предложение А. Пусть H — подгруппа алгебраической группы G , $\bar{H}$ — ее замыкание.

(а) $\bar{H}$ — подгруппа группы G .

(б) Если множество H конструктивно, то $H = \bar{H}$.

Доказательство. (а) Поскольку инверсия является гомеоморфизмом, то, очевидно, $\bar{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \bar{H}$. Аналогично сдвиг на элемент $x \in H$ есть гомеоморфизм, поэтому $x\bar{H} = \overline{xH} = \bar{H}$, т. е. $H\bar{H} \subset \bar{H}$. В свою очередь, если $x \in \bar{H}$, то $Hx \subset \bar{H}$, и мы имеем $\bar{H}x = \overline{Hx} \subset \bar{H}$. Это показывает, что $\bar{H}$ — группа.

(б) Поскольку H — конструктивное множество, то оно содержит плотное открытое подмножество U своего замыкания $\bar{H}$. Так как $\bar{H}$ — группа, то из предыдущей леммы следует, что $\bar{H} = U \cdot U \subset H \cdot H = H$. $\square$

Следствие. Пусть A, B — замкнутые подгруппы алгебраической группы G . Если B нормализует A , то AB — замкнутая подгруппа группы G .

Доказательство. Так как $B \subset N_G(A)$, то AB — подгруппа. Далее, AB — конструктивное множество как образ многообразия $A \times B$ относительно морфизма произведения $G \times G \rightarrow G$ (см. (4.4)); ввиду части (б) предложения А множество AB замкнуто. $\square$

По определению **морфизм алгебраических групп** есть гомоморфизм групп, являющийся одновременно морфизмом многообразий.

Предложение Б. Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп. Тогда:

(а) $\text{Ker } \varphi$ — замкнутая подгруппа группы G .

(б) $\text{Im } \varphi$ — замкнутая подгруппа группы G' .

(в) $\varphi(G^0) = \varphi(G)^0$.

(г) $\dim G = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$.

Доказательство. (а) Отображение φ непрерывно и $\text{Кер } \varphi$ — прообраз замкнутого множества $\{e\}$.

(б) $\varphi(G)$ — подгруппа группы G' и одновременно конструктивное множество ввиду (4.4); оно замкнуто ввиду утверждения (б) предложения А.

(в) группа $\varphi(G^0)$ замкнута (утверждение (б)) и связна (= неприводима) и, следовательно, лежит в $\varphi(G)^0$. Так как $\varphi(G^0)$ имеет в $\varphi(G)$ конечный индекс, то в силу предложения 7.3 (б) $\varphi(G^0)$ совпадает с $\varphi(G)^0$.

(г) Из теоремы 4.3 следует, что $\dim G - \dim \varphi(G) = \dim \varphi^{-1}(x)$ для некоторого (на самом деле для «почти каждого») элемента $x \in \varphi(G)$. Но все слои $\varphi^{-1}(x)$ имеют размерность, равную размерности $\text{Кер } \varphi$, откуда все следует. $\square$

Хороший пример, который стоит иметь в виду, составляет определитель: $\det: GL(n, K) \rightarrow GL(1, K) = \mathbf{G}_m$, являющийся, очевидно, морфизмом алгебраических групп. Его образ есть $\mathbf{G}_m$, а ядро — $SL(n, K)$. Из утверждения (г) предложения Б мы вновь получаем соотношение $\dim SL(n, K) = n^2 - 1$.

Если мы рассматриваем морфизм $\varphi: G \rightarrow GL(n, K)$, то φ называется **рациональным представлением**. В этой связи иногда желательно рассматривать $GL(V)$ как алгебраическую группу (V — векторное пространство над K размерности n). Так как замена базиса в K^n соответствует внутреннему автоморфизму $x \rightarrow yxy^{-1}$ группы $GL(n, K)$, то топология Зарисского на $GL(V)$ определяется однозначно произвольным выбором базиса в V , отождествляющего V с K^n .

7.5. Порождаемость неприводимыми подмножествами.

Доказать, что группа $SL(n, K)$ порождается подгруппами U_{ij} ($i \neq j$), где U_{ij} состоит из всех матриц с единицами по диагонали, произвольными элементами на позиции (i, j) и нулями на остальных позициях, — в сущности, простое упражнение по линейной алгебре. (Подобным образом группа $U(n, K)$ порождается группами U_{ij} при $i < j$.) Очевидно, что группа U_{ij} изоморфна, как алгебраическая группа, группе $\mathbf{G}_a$, поскольку умножение матриц этой группы сводится просто к сложению элементов на позиции (i, j) . Наше следующее

предложение, основанное на использовании конструктивных множеств в (7.4), позволит из связности группы G_a вывести связность $SL(n, K)$. Подобная техника может, разумеется, использоваться и для других групп.

Сначала определение. Задав произвольное подмножество M алгебраической группы G , обозначим через $\mathcal{A}(M)$ пересечение всех замкнутых подгрупп группы G , содержащих M . Это — наименьшая замкнутая подгруппа группы G , содержащая M ; мы называем ее **групповым замыканием** множества M .

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа, I — множество индексов, $f_i: X_i \rightarrow G$ ($i \in I$) — семейство морфизмов неприводимых многообразий X_i таких, что $e \in Y_i = f_i(X_i)$ для каждого $i \in I$. Положим $M = \bigcup_{i \in I} Y_i$.

Тогда:

(а) $\mathcal{A}(M)$ — связная подгруппа группы G .

(б) Для некоторой конечной последовательности $a = (a(1), \dots, a(n))$ индексов из I мы имеем $\mathcal{A}(M) = Y_{a(n)}^{e_1} \dots$

$$Y_{a(1)}^{e_n} (e_i = \mp 1).$$

Доказательство. Мы можем без ущерба расширить I таким образом, чтобы морфизмы $x \rightarrow f_i(x)^{-1}$ многообразий X_i в G также были в числе f_i . Для каждой конечной последовательности $a = (a(1), \dots, a(n))$ индексов из I мы положим $Y_a = Y_{a(1)} \dots Y_{a(n)}$. Как образ неприводимого многообразия $X_{a(1)} \times \dots \times X_{a(n)}$ относительно морфизма $f_{a(1)} \times \dots \times f_{a(n)}$ с последующим умножением в G , множество Y_a конструктивно (4.4), и поэтому $\bar{Y}_a$ — неприводимое многообразие (1.3), содержащее точку e . Используя условие максимальности для неприводимых замкнутых подмножеств многообразия G^0 , мы можем, следовательно, найти такую последовательность a , для которой множество $\bar{Y}_a$ максимально.

Пусть b, c — две произвольные последовательности индексов из I ; мы утверждаем, что (*) $\bar{Y}_b \bar{Y}_c \subset \bar{Y}_{(b, c)}$, где (b, c) — более длинная последовательность, полученная приписыванием c к b . Доказательство утверждения (*) проводится в два шага. При $x \in Y_c$ (непрерывное) отображение $y \mapsto yx$ переводит Y_b в $Y_{(b, c)}$ и, следовательно, переводит $\bar{Y}_b$ в $\bar{Y}_{(b, c)}$, т. е. $\bar{Y}_b Y_c \subset \bar{Y}_{(b, c)}$. В свою очередь

элемент $x \in \bar{Y}_b$ переводит множество Y_c в $\bar{Y}_{(b,c)}$ и, следовательно, также переводит $\bar{Y}_c$ в $\bar{Y}_{(b,c)}$.

Поскольку множество $\bar{Y}_a$ максимально и элемент e лежит в каждом $\bar{Y}_b$, из (*) следует, что

$$\bar{Y}_a \subset \bar{Y}_a \bar{Y}_b \subset \bar{Y}_{(a,b)} = \bar{Y}_a$$

для любого b . Полагая $b = a$, мы видим, что $\bar{Y}_a$ замкнуто относительно умножения. Выбирая b с таким расчетом, чтобы $Y_b = Y_a^{-1}$ (см. первую фразу доказательства), мы заключаем, что множество $\bar{Y}_a$ не меняется при инверсии. Вывод: $\bar{Y}_a$ — замкнутая *подгруппа* группы G , содержащая все Y_i ($i \in I$), так что $\bar{Y}_a = \mathcal{A}(M)$, что доказывает утверждение (а). Сверх того, так как множество Y_a конструктивно, то лемма 7.4 показывает, что $\bar{Y}_a = Y_a \cdot Y_a = Y_{(a,a)}$, так что последовательность (a, a) удовлетворяет утверждению (б). $\square$

Следствие. Пусть G — алгебраическая группа, Y_i ($i \in I$) — семейство замкнутых связных подгрупп группы G , которые порождают G как абстрактную группу. Тогда группа G связна. $\square$

Предложение, а также его следствие будут использованы в (17.2), когда мы рассмотрим замыкание и свойства связности коммутанта.

7.6. Алгебры Хопфа. Аффинное многообразие полностью определяется своей аффинной алгеброй (1.5). Поэтому интересно переформулировать аксиомы (аффинной) алгебраической группы G как систему условий, налагаемых на алгебру $A = K[G]$. Если e рассматривать как морфизм группы из одного элемента в G (аффинная алгебра группы из одного элемента есть K), то коморфизм $e^*: A \rightarrow K$ переводит f в $f(e)$. Из морфизма $\mu: G \times G \rightarrow G$ мы получаем коморфизм $\mu^*: A \rightarrow A \otimes_K A$, преобразующий f в $\sum g_i \otimes h_i$, если $f(xy) = \sum g_i(x) h_i(y)$. Морфизму инверсии $\iota: G \rightarrow G$ соответствует коморфизм $\iota^*: A \rightarrow A$, где $(\iota^* f)(x) = f(x^{-1})$. Полезно также обозначить через $p: G \rightarrow G$ постоянный морфизм $p(x) = e$. Тогда коморфизм $p^*: A \rightarrow A$ удовлетворяет условию $(p^* f)(x) = f(e)$.

Теперь групповые аксиомы для G (закон ассоциативности, единица, наличие обратного элемента), опре-

деленные коммутативностью диаграмм слева, преобразуются в соответствующие условия для $(A, e^*, \mu^*, \iota^*, \rho^*)$:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times 1} & G \times G \\
 \downarrow 1 \times \mu & & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu^* \otimes 1} & A \otimes A \\
 \uparrow 1 \otimes \mu^* & & \uparrow \mu^* \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\mu^*} & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\rho \times 1} & G \times G \\
 \downarrow 1 \times \rho & \searrow 1 & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{\rho^* \otimes 1} & A \otimes A \\
 \uparrow 1 \otimes \rho^* & \searrow 1 & \uparrow \mu^* \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\mu^*} & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\iota \times 1} & G \times G \\
 \downarrow 1 \times \iota & \searrow \rho & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{\iota^* \otimes 1} & A \otimes A \\
 \uparrow 1 \otimes \iota^* & \searrow \rho^* & \uparrow \mu^* \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\mu^*} & A
 \end{array}$$

Отметим, что ρ^* есть композиция коморфизма $e^*: A \rightarrow K$ и естественного включения $K \rightarrow A$. Таким образом, чтобы задать структуру алгебраической группы на многообразии, соответствующем алгебре A , необходимо только ввести отображения e^*, μ^*, ι^* так, чтобы три диаграммы, указанные выше, были коммутативны. (И тогда A станет примером **алгебры Хопфа** с единицей.)

Полезно найти e^*, μ^*, ι^* для некоторых групп из наших ранее рассмотренных примеров. Группа G_a имеет $K[T]$ в качестве аффинной алгебры, так что достаточно указать, как различные отображения действуют на T ; мы имеем $e^*(T) = 0$, $\mu^*(T) = (T \otimes 1) + (1 \otimes T)$, $\iota^*(T) = -T$. Группа G_m в качестве аффинной алгебры имеет $K[T, T^{-1}]$, и $e^*(T) = 1$, $\mu^*(T) = T \otimes T$, $\iota^*(T) = T^{-1}$. Аффинная алгебра для группы $GL(n, K)$ имеет вид $A = K[T_{11}, T_{12}, \dots, T_{nn}, d^{-1}]$, $d = \det(T_{ij})$. В этом случае $e^*(T_{ij}) = \delta_{ij}$, $\mu^*(T_{ij}) = \sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}$, $\iota^*(T_{ij}) = (-1)^{i+j} d^{-1} \det(T_{rs})_{\substack{r \neq i \\ s \neq j}}$. (Читателю следует проверить эти формулы.)

Упражнения

1. Доказать, что группы G_a и G_m неизоморфны.
2. Показать, что размерности групп $T(n, K)$, $D(n, K)$, $U(n, K)$ равны соответственно $n(n+1)/2$, n , $n(n-1)/2$.
3. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная K -алгебра. Доказать, что $\text{Aut } \mathfrak{A}$ — замкнутая подгруппа группы $GL(\mathfrak{A})$.
4. Доказать, что единственными автоморфизмами группы G_m (как алгебраической группы) являются отображения $x \mapsto x$, $x \mapsto x^{-1}$, в то время как $\text{Aut } G_a \cong K^*$.
5. Замкнутое подмножество алгебраической группы, содержащее e и замкнутое относительно произведения, есть подгруппа.
6. Доказать, что G^0 — характеристическая подгруппа группы G , т. е. подгруппа G^0 инвариантна относительно всех автоморфизмов группы G .
7. Пусть $N \subset GL(n, K)$ — группа **мономиальных** матриц, т. е. матриц, имеющих в точности один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце. Доказать, что N — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$, причем $N^0 = D(n, K)$ и $[N, N^0] = n!$ (Заметить, что группа N/N^0 изоморфна симметрической группе S_n .)
8. Доказать, что $T(n, K)$, $D(n, K)$, $U(n, K)$ — связные группы.
9. В предложении 7.5. (6) показать, что в качестве n можно взять число, меньшее или равное $2 \dim G$.
10. Показать на примере, что подгруппа алгебраической группы, порожденная двумя замкнутыми множествами, которые не являются неприводимыми, не обязательно замкнута. (Использовать циклические подгруппы группы $GL(2, \mathbb{C})$, порожденные матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.)
11. Пусть G — связная алгебраическая группа. Доказать, что любая конечная нормальная подгруппа H группы G лежит в **центре** $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ для всех } y \in G\}$. (Рассмотреть морфизм $G \rightarrow H$, определенный соотношением $x \mapsto xyx^{-1}$ ($y \in H$).)
12. Рассмотрим морфизм $\mu \times \mu: G \times G \times G \times G \rightarrow G \times G$; пусть X — прообраз диагонали $\{(x, x) \mid x \in G\}$. Если группа G связна, доказать, что X — замкнутое неприводимое подмножество в $G \times G \times G \times G$. (Заметить, что отображение $(w, x, y, z) \mapsto (w, x, y)$ индуцирует изоморфизм X на $G \times G \times G$.)

Замечания. Идея предложения (7.5) восходит к Шевалле [4, § 7]. По поводу теории абелевых многообразий см. Ленг [2], Мамфорд [2], Вейль [1].

§ 8. Действие алгебраических групп на многообразиях

При изучении алгебраических групп мы часто будем использовать их действие на себе и других естественным образом возникающих многообразиях. В настоящем параграфе вводится большая часть необходимой

техники, а затем с ее помощью доказывается, что каждая (аффинная) алгебраическая группа изоморфна замкнутой подгруппе некоторой полной линейной группы $GL(n, K)$.

8.1. Действия групп на множествах. Если G — абстрактная группа, X — множество, то мы говорим о **действии группы G на X** , если задано отображение $\varphi: G \times X \rightarrow X$, обозначаемое для краткости через $\varphi(x, y) = x \cdot y$, такое, что:

$$(A1) \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot y) = (x_1 x_2) \cdot y \quad \text{при} \quad x_i \in G, y \in X;$$

$$(A2) \quad e \cdot y = y \quad \text{для всех} \quad y \in X.$$

Эти два условия можно истолковать как требование, что φ индуцирует гомоморфизм группы G в симметрическую группу множества X . Тройку (G, X, φ) мы иногда называем **пространством преобразований**.

Пусть группа G действует на X . Мы говорим, что G действует **транзитивно**, если $G \cdot y = X$ для любого $y \in X$. В любом случае множество $G \cdot y$ называется **орбитой** элемента y ; очевидно, различные орбиты дают разбиение множества X на непересекающиеся подмножества, причем G действует транзитивно на каждой такой орбите. Через X^G мы обозначаем множество **точек, неподвижных** относительно G (т.е. множество тех $y \in X$, орбиты которых состоят только из y). Если $y \in X$, то мы определяем **стабилизатор** точки $y \in X$ в G как множество $G_y = \{x \in G \mid x \cdot y = y\}$. Ясно, что G_y — группа. Кроме того, **орбитное отображение** $G \rightarrow G \cdot y$, задаваемое формулой $x \mapsto x \cdot y$, индуцирует биекцию $G/G_y \rightarrow G \cdot y$. Если $z = x \cdot y$ для некоторого элемента $x \in G$, то, как легко видеть, стабилизаторы G_y и G_z сопряжены: $x G_y x^{-1} = G_z$. Если H — произвольная подгруппа группы G , то имеется естественное транзитивное действие группы G на множестве левых смежных классов по H , т.е. на пространстве G/H ($yH \mapsto xyH$), причем H — стабилизатор класса H . Ввиду предыдущих замечаний каждое транзитивное действие группы G , в сущности, имеет такой вид.

Рассмотрим теперь некоторые естественные действия группы G на себе. При $x \in G$ отображение $y \mapsto x y x^{-1} = \text{Int } x(y)$ задает действие **внутренними автоморфизмами**

и определяет гомоморфизм $G \rightarrow \text{Aut } G$ (Ядро этого гомоморфизма есть $Z(G)$, **центр** группы G , а образ $\text{Int } G$, — очевидно, нормальная подгруппа группы $\text{Aut } G$). Орбита элемента y есть **класс сопряженности** элемента y , а стабилизатор в данном случае представляет собой **централизатор** $C_G(y)$ этого элемента. Множество неподвижных точек совпадает с $Z(G)$.

Группа G действует также на себе и как группа **левых** (соответственно **правых**) сдвигов: $y \mapsto xy$ (соответственно $y \mapsto yx^{-1}$). Эти действия, очевидно, транзитивны и их стабилизаторы все тривиальны.

8.2. Действия алгебраических групп. Пусть G — алгебраическая группа, X — многообразие. Если для морфизма $\varphi: G \times X \rightarrow X$ выполняются аксиомы (A1), (A2) (8.1), то мы говорим, что G действует на X **регулярно** *) (или просто «действует», если не возникает путаницы). Например, действия группы G на себе, описанные выше, являются, очевидно, действиями такого сорта. Как и в (8.1), мы имеем понятия орбиты, стабилизатора, Другим полезным понятием является понятие **транспортера**: $\text{Trans}_G(Y; Z) = \{x \in G \mid x \cdot Y \subset Z\}$, где Y и Z — подмножества множества X . Наконец, положим $C_G(Y) = \bigcap_{y \in Y} G_y$; это — **централизатор** множества Y в G .

Предложение. Пусть алгебраическая группа G регулярно действует на многообразии X . Пусть Y, Z — подмножества множества X , причем Z замкнуто. Тогда:

- (а) $\text{Trans}_G(Y, Z)$ — замкнутое подмножество в G ;
- (б) Для каждого элемента $y \in X$ группа G_y замкнута в G ; в частности, группа $C_G(Y)$ замкнута.
- (в) Множество неподвижных точек любого элемента $x \in G$ замкнуто в X ; следовательно, множество X^G замкнуто.

(г) Если группа G связна, то G оставляет инвариантной каждую неприводимую компоненту множества X , и, в частности, действует на X тривиально, если множество X конечно.

Доказательство. Для каждого элемента $y \in X$ орбитное отображение $\varphi_y: G \rightarrow X$ ($x \mapsto x \cdot y$) есть композиция

*) В оригинале «morphically». — Прим. перев.

отображения $x \mapsto (x, y)$ и φ ; следовательно, это морфизм. Если y пробегает множество Y , то прообразы $\varphi_y^{-1}(Z)$ все замкнуты в G (ибо множество Z замкнуто в X); поэтому пересечение $\text{Tran}_G(Y, Z)$ этих прообразов замкнуто в G , откуда следует (а). Поскольку $G_y = \text{Tran}_G(\{y\}, \{y\})$, то G_y — замкнутая подгруппа группы G ввиду (а). В свою очередь $C_G(Y) = \bigcap_{y \in Y} G_y$, откуда следует (б).

Для доказательства утверждения (в) выберем элемент $x \in G$ и рассмотрим морфизм $\psi: X \rightarrow X \times X$, определенный соотношением $y \mapsto (y, x \cdot y)$. Множество неподвижных точек X^x — это в точности прообраз диагонали относительно отображения ψ ; диагональ замкнута (2.5). Отсюда следует (в).

Наконец, пусть G — связная группа. Стабилизатор H в группе G неприводимой компоненты множества X замкнут ввиду (а) и является подгруппой. Так как группа G перемещает между собой конечное число компонент множества X , то группа H имеет в G конечный индекс. Следовательно, $H = G$ (Предложение 7.3 (б)). $\square$

Следствие. Пусть G — алгебраическая группа, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда $N_G(H)$ и $C_G(H)$ — замкнутые подгруппы, так же как и подгруппа $C_G(x)$ для любого элемента $x \in G$. (Здесь $N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$ — нормализатор подгруппы H в G .)

Доказательство. Для групп $C_G(H)$ и $C_G(x)$ эти результаты вытекают из части (б) предыдущего предложения, если мы рассмотрим действие группы G на себе посредством внутренних автоморфизмов. Для группы $N_G(H)$ результат вытекает из части (а) предложения и того факта, что $N_G(H) = \text{Tran}_G(H, H)$. В самом деле, автоморфизм $\text{Int } y$ ($y \in G$) отображает H в замкнутую подгруппу группы G той же размерности, что и размерность H , причем компонента единицы этой подгруппы имеет в ней индекс $[H : H^0]$. Поэтому $\text{Int } x$ отображает группу H в H тогда и только тогда, когда $\text{Int } x$ отображает H на H . $\square$

Мы будем часто пользоваться тем фактом, что нормализаторы, централизаторы и множества неподвижных точек есть замкнутые множества. Однако орбиты часто оказываются не замкнутыми (например, классы сопря-

женных элементов) (см. ниже (8.3)). Возможно, стоит обратить внимание и на тот факт, что *связность* нормализаторов и централизаторов не всегда имеет место. Некоторые более тонкие рассуждения в последующих главах будут относиться именно к этому вопросу.

Предположим, далее, что $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ — (рациональное) представление алгебраической группы G . Если отождествить V с аффинным n -пространством ($n = \dim V$), то, очевидно, правило $x \cdot v = \varphi(x)(v)$, где $x \in G$, $v \in V$, определяет действие группы G на V . В этом случае мы называем V (рациональным) **G -модулем**. Для последующих ссылок мы опишем здесь некоторые необходимые понятия и конструкции.

С представлением φ ассоциировано **дуальное, или контрагredientное** представление $G \rightarrow GL(V^*)$, где V^* — дуальное векторное пространство. Это представление задается правилом: $(x \cdot f)(v) = f(x^{-1} \cdot v)$ ($f \in V^*$, $v \in V$, $x \in G$). Мы должны писать x^{-1} , чтобы обеспечить выполнение условия $y \cdot (x \cdot f) = (yx) \cdot f$. Если в V , V^* выбраны двойственные базисы, то сразу становится ясным, что двойственное представление действительно является рациональным представлением группы G .

Рассмотрим теперь пару представлений $\varphi: G \rightarrow GL(V)$, $\psi: G \rightarrow GL(W)$. **Тензорное произведение** $V \otimes W$ пространств V , W в качестве базиса имеет векторы $v_i \otimes w_j$, если v_i (соответственно w_j) пробегает базис пространства V (соответственно W). Зададим линейное действие элемента $x \in G$ на $V \otimes W$ соотношением $x \cdot (v_i \otimes w_j) = (x \cdot v_i) \otimes (x \cdot w_j)$. (Конечно, нам не было бы необходимости выбирать базис, если бы мы использовали непосредственно универсальное свойство тензорного произведения.) Ясно, что мы получаем таким образом (рациональное) представление $G \rightarrow GL(V \otimes W)$, которое называется **тензорным произведением представлений** φ , ψ и обозначается $\varphi \otimes \psi$.

Хорошо известно, что векторное пространство $V^* \otimes V$ естественным образом отождествляется с векторным пространством $\text{End } V$, — элементу $f \otimes v$ ставится в соответствие эндоморфизм $w \mapsto f(w)v$. Следовательно, (рациональное) представление $G \rightarrow GL(V)$ индуцирует действие группы G на $\text{End } (V)$, которое фактически преобразует элемент $t \in \text{End } V$ в xtx^{-1} ($x \in G$). Читатель мо-

жет проверить, что неподвижная точка действия группы G на $\text{End } V$ — в точности некоторый гомоморфизм G -модулей $V \rightarrow V$.

Если группа G действует на двух многообразиях X , Y , то морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ называется **G -эквивариантным**, если $\varphi(z \cdot x) = z \cdot \varphi(x)$ для любых элементов $z \in G$, $x \in X$. Например, рассмотрим действие подгруппы $G \subset GL(V)$ на V и на самой себе при помощи левых сдвигов. При $v \in V$ орбитное отображение $G \rightarrow V$, преобразующее z в $z \cdot v$, является G -эквивариантным морфизмом. (См. также упражнение 6.)

8.3. Замкнутые орбиты. Предложение. Пусть алгебраическая группа G регулярно действует на (непустом) многообразии X . Тогда каждая орбита есть гладкое локально замкнутое подмножество многообразия X , граница которого — объединение орбит строго меньшей размерности. В частности, орбиты минимальной размерности замкнуты (и, таким образом, замкнутые орбиты всегда существуют).

Доказательство. Пусть $Y = G \cdot y$ — орбита элемента $y \in X$. Как образ группы G относительно орбитного отображения, множество Y конструктивно (4.4) и, следовательно, содержит открытое плотное подмножество множества $\bar{Y}$. Но группа G действует на Y транзитивно (оставляя множество $\bar{Y}$ инвариантным), так что множество Y является гладким и содержит окрестность в $\bar{Y}$ каждой из своих точек, т. е. Y открыто в $\bar{Y}$. Поэтому множество $\bar{Y} - Y$ замкнуто и его размерность строго меньше размерности множества $\bar{Y}$. Поскольку это множество инвариантно относительно G , оно является объединением G -орбит. $\square$

Это предложение будет весьма полезным в дальнейшем. К нему приходится обращаться, если заранее неизвестно, имеет ли многообразие X неподвижные точки относительно группы G .

8.4. Полупрямые произведения. Действие одной группы на другой (как группы автоморфизмов) позволяет построить новую, большую группу. Напомним сначала (абстрактную) теоретико-групповую конструкцию: если группа G действует (как группа автоморфизмов) на группе N , то декартово произведение $N \times G$ становится группой, если мы определим на нем умножение при по-

мощи формулы $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1(y_1 \cdot x_2), y_1 y_2)$. Эта группа называется **полупрямым произведением** групп N и G и обозначается через $N \rtimes G$. Прямое произведение возникает как частный случай этой конструкции (когда группа G действует на N тривиально). Группа N вкладывается в $N \rtimes G$ как нормальная подгруппа: $x \mapsto (x, e)$, а G — как подгруппа $y \mapsto (e, y)$, так что каждый элемент группы $N \rtimes G$ можно однозначно записать в виде xy ($x \in N, y \in G$). В результате действие группы G на N реализуется внутренними автоморфизмами. Эта конструкция может быть описана также при помощи точной последовательности (где σ — только что описанное каноническое вложение, а π — проекция на второй множитель):

$$e \rightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes G \xrightleftharpoons[\sigma]{\pi} G \rightarrow e.$$

Как узнать, является ли данная группа полупрямым произведением? Если G' — некоторая группа с подгруппами N и G , причем подгруппа N нормальна в G' , то G действует на N внутренними автоморфизмами, что позволяет нам построить полупрямое произведение $N \rtimes G$. Легко проверить, что гомоморфизм $N \rtimes G \rightarrow G'$, определенный соотношением $(x, y) \mapsto xy$, является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $G' = NG$ и $N \cap G = e$.

Это рассуждение почти дословно переносится на случай алгебраических групп. Если G, N — алгебраические группы и G регулярно действует на N автоморфизмами, то многообразие $N \times G$ становится алгебраической группой $N \rtimes G$ и отображения i, π, σ оказываются морфизмами алгебраических групп.

С другой стороны, заданная алгебраическая группа G' с замкнутыми подгруппами G, N (причем группа N нормальна в G') отождествляется описанным выше способом с полупрямым произведением $N \rtimes G$ при условии, что естественный морфизм $N \rtimes G \rightarrow G'$ есть изоморфизм алгебраических групп. (Вообще говоря, *не достаточно*, чтобы этот морфизм был изоморфизмом абстрактных групп). *Пример*: группа $T(n, K)$ — полупрямое произведение (как алгебраическая группа) своих подгрупп $D(n, K)$ и $U(n, K)$, причем группа $U(n, K)$ нормальна в $T(n, K)$ (упражнение 2).

8.5. Сдвиг функций. Если алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X (например, на себе самой), то мы получаем также еще и интересное линейное действие группы G на аффинной алгебре $K[X]$ и некоторых ее конечномерных подпространствах. Именно, обозначим через τ_x коморфизм, ассоциированный с морфизмом $y \mapsto x^{-1} \cdot y$ ($x \in G, y \in X$). Таким образом, если $f \in K[X]$, $y \in X$, то $(\tau_x f)(y) = f(x^{-1} \cdot y)$. Мы берем здесь x^{-1} , чтобы отображение $\tau: G \rightarrow GL(K[X])$, где $\tau(x) = \tau_x$, было гомоморфизмом групп. Назовем этот коморфизм τ_x **сдвигом функций** на x . Отметим, что τ_x на самом деле является автоморфизмом K -алгебры $K[X]$.

Например, если $X = G$ и G действует на себе при помощи левых (соответственно правых) сдвигов (8.1): $y \mapsto xy$ (соответственно $y \mapsto yx^{-1}$), то введенный выше ассоциированный морфизм имеет вид $y \mapsto x^{-1}y$ (соответственно $y \mapsto yx$), а его коморфизм λ_x (соответственно ρ_x) называется **левым** (соответственно **правым**) **сдвигом функций** на x :

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y),$$

$$(\rho_x f)(y) = f(yx).$$

Как и выше, отображения $\lambda: G \rightarrow GL(K[G])$ и $\rho: G \rightarrow GL(K[G])$, где $\lambda(x) = \lambda_x$ и $\rho(x) = \rho_x$ — гомоморфизмы групп. Кроме того, очевидно, сдвиги λ_x и ρ_y коммутируют (для каждой пары элементов $x, y \in G$). Эти операторы окажутся в высшей степени полезными в дальнейшем. Для примера мы используем правые сдвиги, чтобы охарактеризовать замкнутые подгруппы.

Лемма. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G , и пусть I — идеал кольца $K[G]$, множество нулей которого совпадает с H . Тогда $H = \{x \in G \mid \rho_x(I) \subset I\}$.

Доказательство. Пусть сначала $x \in H$. Если $f \in I$, то $(\rho_x f)(y) = f(yx) = 0$ для всех $y \in H$ (ибо $yx \in H$); поэтому $\rho_x f \in I$. Наоборот, пусть $\rho_x(I) \subset I$; в частности, если $f \in I$, то функция $\rho_x f$ обращается в 0 в точке $e \in H$, т. е. $f(x) = 0$. Поэтому $x \in H$. $\square$

8.6. Линеаризация аффинных групп. Как было отмечено в (7.1), любая замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$ является (аффинной) алгебраической группой.

Мы покажем, что обратное тоже верно, построив конечномерное подпространство алгебры $K[G]$, на котором группа G действует сдвигами. Однако вначале необходимо выполнить некоторую подготовительную работу.

Предложение. Пусть алгебраическая группа G регулярно действует на аффинном многообразии X , и пусть F — конечномерное подпространство алгебры $K[X]$.

(а) Существует конечномерное подпространство E алгебры $K[X]$, содержащее F , которое инвариантно относительно всех сдвигов τ_x ($x \in G$).

(б) Подпространство F само инвариантно относительно всех сдвигов τ_x ($x \in G$) тогда и только тогда, когда $\varphi^*F \subset K[G] \otimes_K F$, где морфизм $\varphi: G \times X \rightarrow X$ задает действие группы G на X .

Доказательство. (а) Мы можем считать, что пространство F натянуто на один элемент $f \in K[X]$ (а потом сложить все полученные пространства E). Запишем (неоднозначно) $\varphi^*f = \sum f_i \otimes g_i \in K[G] \otimes K[X]$. Для каждого элемента $x \in G$, $y \in X$ имеем $(\tau_x f)(y) = f(x^{-1}y) = \sum f_i(x^{-1})g_i(y)$, откуда $\tau_x f = \sum f_i(x^{-1})g_i$. Следовательно, функции g_i порождают над K конечномерное подпространство в $K[X]$, которое содержит все сдвиги функции f . Таким образом, в качестве E можно взять K -пространство, натянутое на все $\tau_x f$.

(б) Если $\varphi^*F \subset K[G] \otimes F$, то доказательство утверждения (а) показывает, что функции g_i можно выбрать в F , т. е. пространство F инвариантно относительно всех сдвигов τ_x ($x \in G$). Обратно, пусть пространство F инвариантно относительно сдвигов: дополним базис $\{f_i\}$ пространства F до базиса $\{f_i\} \cup \{g_j\}$ пространства $K[X]$. Если $\varphi^*f = \sum r_i \otimes f_i + \sum s_j \otimes g_j$, то мы имеем $\tau_x f = \sum r_i(x^{-1})f_i + \sum s_j(x^{-1})g_j$. Левая часть лежит в F ; поэтому функции s_j должны обращаться в 0 на всей группе G , т. е. все $s_j = 0$, откуда $\varphi^*F \subset K[G] \otimes F$. $\square$

Теорема. Пусть G — (аффинная) алгебраическая группа. Тогда G изоморфна замкнутой подгруппе группы $GL(n, K)$ для подходящего n .

Доказательство. Выберем в аффинной алгебре $K[G]$ образующие $f_1, \dots, f_n$. Применяя часть (а) предыдущего предложения к линейной оболочке F элементов f_i , мы можем найти большее конечномерное подпростран-

ство $E \subset K[G]$, инвариантное относительно всех правых сдвигов ρ_x ($x \in G$). Изменяя обозначения, мы можем считать, что $f_1, \dots, f_n$ — базис векторного пространства E (и $K[G]$ порождается, как алгебра над K , этими элементами). Обозначим через φ действие группы G на E ; в силу утверждения (б) предложения, можно записать $\varphi^* f_i = \sum_j m_{ij} \otimes f_j$, где $m_{ij} \in K[G]$. Тогда $(\rho_x f_i)(y) = f_i(yx) = \sum_j m_{ij}(x) f_j(y)$, откуда $\rho_x f_i = \sum_j m_{ij}(x) f_j$. Другими сло-

вами, матрица оператора $\rho_x|E$ (в базисе $f_1, \dots, f_n$) есть $(m_{ij}(x))$. Это показывает, что $\psi: G \rightarrow GL(n, K)$, где $\psi(x) = (m_{ij}(x))$, — морфизм алгебраических групп.

Заметим, что $f_i(x) = f_i(ex) = \sum_j m_{ij}(x) f_j(e)$, или $f_i = \sum_j f_j(e) m_{ij}$. Это показывает, что функции m_{ij} также порождают алгебру $K[G]$; в частности, морфизм ψ *инъективен*. Кроме того, образ $G' = \psi(G)$ — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$ (утверждение (б) предложения 7.4 Б). Чтобы закончить доказательство, нам остается только убедиться, что ψ — изоморфизм многообразий. Но ограничения на G' координатных функций T_{ij} отображаются коморфизмом ψ^* в соответствующие m_{ij} , которые, как только что показано, порождают алгебру $K[G]$. Таким образом, коморфизм ψ^* сюръективен, следовательно, он отождествляет алгебры $K[G']$ и $K[G]$. $\square$

Подобно тому как теорема Кэли в теории групп сводит изучение абстрактных групп к группам подстановок, эта теорема сводит изучение аффинных алгебраических групп к линейным группам. Однако «произвольность» конкретно выбранного представления вынуждает нас большей частью предпочитать оставаться в общей ситуации. Для наших целей эта теорема служит главным образом техническим средством в некоторых доказательствах: мы вкладываем данную группу в полную линейную группу (в качестве замкнутой подгруппы), а затем используем конкретные свойства матриц (например, поведение собственных значений). Эта процедура не слишком элегантна, и часто ее можно избежать, но она делает порой некоторые доказательства более понятными.

В известном смысле действие группы G на $K[G]$ правыми сдвигами содержит всю информацию о линейных представлениях группы G . Переход от x к ρ_x мы будем существенным образом использовать в следующей главе.

Упражнения

Через G всюду обозначается произвольная алгебраическая группа.

1. Пусть группа $GL(n, K)$ обычным образом действует в пространстве K^n , которое мы отождествляем с аффинным n -пространством. Доказать, что имеется ровно две орбиты, одна из которых замкнута, а другая — нет.

2. Проверить утверждение из (8.4) о том, что группа $T(n, K)$ — полупрямое произведение групп $D(n, K)$ и $U(n, K)$.

3. Доказать, что $K[G]$ — объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно правых сдвигов на элементах из G .

4. Показать, что каждое конечномерное подпространство $K[G]$ содержится в конечномерном подпространстве, инвариантном относительно всех λ_x и ρ_x ($x \in G$).

5. Показать, что следующие соотношения задают на A^2 структуру (связной) алгебраической группы. Пусть $\text{char } K = p > 0$, и пусть q, r — некоторые степени числа p . Положим $(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d + a^q c^r)$. При $q \neq r$ проверьте, что эта группа некоммукативна. Попытайтесь найти замкнутую подгруппу группы $U(5, K)$, изоморфную этой группе.

6. Группа $GL(V)$ действует на многообразии $V - \{0\}$, (рассматриваемом как открытое множество в аффинном пространстве) и на $P(V)$ как алгебраическая группа преобразований. Показать, что каноническое отображение $V - \{0\} \rightarrow P(V)$ есть G -эквивариантный морфизм для любой замкнутой подгруппы $G \subset GL(V)$.

7. Предположим, что G -модуль V изоморфен G -модулю V^* (8.2). Доказать, что существует невырожденная билинейная форма $\beta: V \times V \rightarrow K$, которая инвариантна относительно G в том смысле, что $\beta(x \cdot v, x \cdot w) = \beta(v, w)$ для всех $x \in G, v, w \in V$.

8. Доказать, что нормализатор группы $D(n, K)$ в $GL(n, K)$ есть группа N мономиальных матриц (см. упражнение 7.7).

Замечания. Относительно внутреннего подхода к аффинным алгебраическим группам, основанного в гораздо большей мере на их алгебрах Хопфа, нежели на реализациях в виде линейных групп, см. Хохшильд [8].

АЛГЕБРЫ ЛИ

§ 9. Алгебра Ли алгебраической группы

9.1. Алгебры Ли и касательные пространства. Цель этого параграфа — сопоставить алгебраической группе алгебру Ли. Для наших целей достаточно определить алгебру Ли над полем K как подпространство ассоциативной K -алгебры, которое замкнуто относительно скобочного умножения $[x, y] = xy - yx$. Важный пример доставляет полная линейная алгебра $\mathfrak{gl}(n, K)$, которая представляет собой ассоциативную алгебру $M(n, K)$, рассматриваемую как алгебра Ли. (Мы увидим в дальнейшем, что $\mathfrak{gl}(n, K)$ есть, в сущности, алгебра Ли полной линейной группы $GL(n, K)$.)

Пусть G — алгебраическая группа и $A = K[G]$. Напомним (8.5), что G действует на A при помощи левых (соответственно правых) сдвигов: $(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y)$ (соответственно $(\rho_x f)(y) = f(yx)$). Легко проверить, что скобочное произведение двух дифференцирований (под которыми мы всегда понимаем K -дифференцирования) алгебры A снова будет дифференцированием; следовательно, $\text{Der } A$ — алгебра Ли. Алгеброй Ли будет также подпространство $\mathcal{L}(G) = \{\delta \in \text{Der } A \mid \delta \lambda_x = \lambda_x \delta \text{ для всех } x \in G\}$, — пространство левинвариантных дифференцирований алгебры A , ибо скобка двух дифференцирований, перестановочных с λ_x , есть, очевидно, дифференцирование, перестановочное с λ_x . Мы называем $\mathcal{L}(G)$ алгеброй Ли группы G .

В этом месте возникают некоторые естественные вопросы. (1) Является ли алгебра Ли $\mathcal{L}(G)$ конечномерной, и если да, то какова ее размерность? (2) Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то как связаны алгебры Ли $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{L}(G')$? (3) Как отражает строение алгебры Ли $\mathcal{L}(G)$ строение группы G ? (4) Если H — замкнутая подгруппа группы G , то как алгебра Ли $\mathcal{L}(H)$ связана с $\mathcal{L}(G)$?

Решению этих вопросов в значительной мере способствует сравнение алгебры Ли $\mathcal{L}(G)$ с касательным пространством $\mathcal{T}(G)_e$ (5.1). Напомним, что $\mathcal{T}(G)_e$ отождествляется с $\mathcal{T}(G^0)_e$; оно имеет структуру векторного пространства над K , размерность которого равна $\dim G$ (ибо e — простая точка (7.1)). Как правило, мы вместо $\mathcal{T}(G)_e$ будем писать $\mathfrak{g}$. Задав морфизм $\varphi: G \rightarrow G'$, который переводит e в e (например, морфизм алгебраических групп), мы получаем линейное отображение $d\varphi_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$. Дифференцирование обладает функториальными свойствами (5.4): $d(1_G)_e = 1_{\mathfrak{g}}$, $d(\psi \circ \varphi)_e = d\psi_e \circ d\varphi_e$. Мы знаем также, что $\mathcal{T}(G)_e$ можно описать алгебраически как пространство дифференцирований (в точке) локального кольца элемента e в K . Но такие дифференцирования однозначно определяются своим действием на подкольцо $A = K[G]$. Это заставляет думать, что мы могли бы перейти от $\mathcal{L}(G)$ к $\mathfrak{g}$ вычислением значений функций в точке e . Формально мы определим K -линейное отображение $\theta: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ соотношением $(\theta\delta)f = (\delta f)(e)$ ($\delta \in \mathcal{L}(G)$, $f \in A$).

Теорема. Пусть G — алгебраическая группа, $\mathfrak{g} = \mathcal{T}(G)_e$, $\mathcal{L}(G)$ — как и выше. Тогда $\theta: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ — изоморфизм векторных пространств. Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то $d\varphi_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли (на $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ мы переносим скобочное умножение алгебр $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{L}(G')$).

Доказательство этой теоремы будет дано в (9.2). Поскольку это доказательство довольно формально, мы поясним здесь неформальным образом его основную идею. Если мы рассмотрим композицию произвольного дифференцирования $\delta: A \rightarrow A$ с последующим вычислением значения в точке $x \in G$, то получим касательный вектор в точке x . (Таким образом, δ определяет «касательное векторное поле» на G , сопоставляя каждой точке группы G касательный вектор.) Левая инвариантность дифференцирования δ попросту означает, что касательный вектор в точке e , определяемый δ , «преобразуется» (при помощи левых сдвигов) в касательный вектор в каждой другой точке x , определяемый δ . Следовательно, дифференцирование δ должно однозначно определяться касательным вектором $f \mapsto (\delta f)(e)$ (и лю-

бой касательный вектор в точке e должен приводить к некоторому такому дифференцированию δ).

Теорема дает ответ на вопросы (1) и (2), поставленные выше. (Вскоре мы обсудим и вопросы (3) и (4)). Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то мы будем писать $d\varphi$ вместо $d\varphi_e$. Рассмотрим, например, *внутренний автоморфизм* $\text{Int } x(y) = xyx^{-1}$ ($x, y \in G$). Его дифференциал $d(\text{Int } x)$ будет играть важную роль в дальнейшем; мы обозначим его через $\text{Ad } x$. В соответствии с теоремой $\text{Ad } x$ есть *автоморфизм* алгебры Ли $\mathfrak{g}$: обратимость следует из того факта, что $(\text{Ad } x)(\text{Ad } x^{-1}) = d(\text{Int } x) \circ d(\text{Int } x^{-1}) = d(\text{Int } e) = \text{Id}$. В действительности $(\text{Ad } x)(\text{Ad } y) = \text{Ad } xy$, так что $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g} \subset GL(\mathfrak{g})$ — гомоморфизм (абстрактных групп), называемый **присоединенным представлением** группы G .

Интересно точно вычислить действие автоморфизма $\text{Ad } x$ на $\mathcal{L}(G)$ (при помощи отождествления θ). Мы утверждаем, что $\text{Ad } x(\delta) = \rho_x \delta \rho_x^{-1}$. (Поскольку правые и левые сдвиги коммутируют, то правая часть принадлежит $\mathcal{L}(G)$). Если $\text{Ad } x(\delta) = \delta'$, то, по определению, $(\delta'f)(e) = \delta(\varphi^*f)(e)$ для всех $f \in K[G]$, где $\varphi = \text{Int } x$. Это применимо, в частности, к функциям вида $\rho_x f$. Но $\varphi^*(\rho_x f)(y) = (\rho_x f)(xyx^{-1}) = f(xy) = (\lambda_{x^{-1}}f)(y)$, т. е. $\varphi^*(\rho_x f) = \lambda_{x^{-1}}f$. Теперь $(\delta' \rho_x)(f)(e) = \delta(\lambda_{x^{-1}}f)(e) = \lambda_{x^{-1}}(\delta f)(e)$ (дифференцирование δ левоинвариантно!) $= (\delta f)(x) = \rho_x \delta(f)(e)$. Это показывает, что $\delta' = \rho_x \delta \rho_x^{-1}$, как и утверждалось.

9.2. Конволюции. Чтобы доказать теорему 9.1, мы построим обратное отображение $\eta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(G)$, отображающее касательный вектор x в дифференцирование $*x$, называемое **правой конволюцией** *) вектора x :

$$(f * x)(x) = x(\lambda_{x^{-1}}f) \quad (x \in G, f \in A).$$

Прежде всего необходимо проверить, что $*x$ — действительно левоинвариантное дифференцирование алгебры A . При $x, y \in G, f, g \in A$ мы имеем

$$\begin{aligned} (fg * x)(x) &= x(\lambda_{x^{-1}}(fg)) = x((\lambda_{x^{-1}}f)(\lambda_{x^{-1}}g)) = \\ &= x(\lambda_{x^{-1}}f)g(x) + f(x)x(\lambda_{x^{-1}}g) = \\ &= ((f * x)g + f(g * x))(x) \end{aligned}$$

*) Или сверткой. — Прим. перев.

(так что $*x$ — дифференцирование, ибо линейность этого отображения по K очевидна) и

$$\begin{aligned}(\lambda_y(f * x))(x) &= (f * x)(y^{-1}x) = \\&= x(\lambda_{x^{-1}y}f) = \\&= x(\lambda_{x^{-1}}(\lambda_y f)) = \\&= ((\lambda_y f) * x)(x)\end{aligned}$$

(так что дифференцирование $*x$ левоинвариантно).

Ясно теперь, что η есть K -линейное отображение. Чтобы убедиться, что оно является обратным к θ , мы должны вычислить $\eta \circ \theta$ и $\theta \circ \eta$:

$$\begin{aligned}(f * \theta(\delta))(x) &= \theta(\delta)(\lambda_{x^{-1}}f) = \\&= \delta(\lambda_{x^{-1}}f)(e) = \\&= \lambda_{x^{-1}}(\delta f)(e) = \\&= (\delta f)(x)\end{aligned}$$

(таким образом, $(\eta \circ \theta)\delta = \delta$ при $\delta \in \mathcal{L}(G)$) и

$$\begin{aligned}\theta(*x)(f) &= (f * x)(e) = \\&= x(\lambda_{e^{-1}}f) = \\&= x(f)\end{aligned}$$

(так что при $x \in \mathfrak{g}$ мы имеем $(\theta \circ \eta)(x) = x$).

Остается показать, что если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то отображение $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ сохраняет скобочное умножение. При $x, y \in \mathfrak{g}$ положим $x' = d\varphi(x)$, $y' = d\varphi(y)$. Пусть $f' \in K[G']$; положим $f = \varphi^* f'$. По определению $[x', y'](f') = (f' * y' * x')(e) - (f' * x' * y')(e) = x'(f' * y') - y'(f' * x') = x(\varphi^*(f' * y')) - y(\varphi^*(f' * x'))$. С другой стороны, $d\varphi([x, y])$ отображает f' в $(f * y * x)(e) - (f * x * y)(e) = x(f * y) - y(f * x)$. Мы утверждаем, что каждый член здесь равен соответствующему члену предыдущего уравнения; для этого достаточно показать, что $f * x = \varphi^*(f' * x')$, т. е. что $(\varphi^* f') * x = \varphi^*(f' * d\varphi(x))$. Обе части этого равенства есть функции на G , так что мы сравним значения в точке $x \in G$; мы имеем $(\varphi^* f' * x)(x) = x(\lambda_{x^{-1}} \varphi^* f')$, тогда как $(f' * d\varphi(x))(\varphi(x)) = d\varphi(x)(\lambda_{\varphi(x)^{-1}} f') = x(\varphi^*(\lambda_{\varphi(x)^{-1}} f'))$. Остается дока-

зять, что $\lambda_{x-1}\varphi^*f' = \varphi^*(\lambda_{\varphi(x)}f')$. Это непосредственно следует из вычисления значений обеих частей этого соотношения в точке $y \in G$. $\square$

9.3. Примеры. Пусть $G = G_a$, так что $K[G] = K[T]$. Алгебра Ли $\mathcal{L}(G)$ является одномерной, так что ее скобочная операция есть 0, т. е. $[\alpha, \beta] = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(G)$. Мы утверждаем, что дифференцирование

$\delta = \frac{d}{dT}$ является левоинвариантным (и, следовательно, порождает $\mathcal{L}(G)$ над K). Это достаточно проверить для полинома T при произвольном $x \in G$; мы имеем: $\lambda_{-x}\delta T = \lambda_{-x}1 = 1$ и $\delta\lambda_{-x}T = \delta(T+x) = \delta T = 1$.

Пусть теперь $G = G_m$, $K[G] = K[T, T^{-1}]$ (кольцо полиномов Лорана). Алгебра Ли $\mathcal{L}(G)$ снова одномерна. Если мы положим $\delta T = T$, то δ продолжается единственным образом до некоторого дифференцирования кольца $K[T, T^{-1}]$, которое оказывается левоинвариантным (ибо $\delta(aT) = a\delta T$ при $a \in K^*$).

Эти два примера достаточно легко разобрать непосредственно. Но для групп больших размерностей необходимо развить более систематическую процедуру для вычисления $\mathcal{L}(G)$. Поскольку касательное пространство часто более доступно, чем абстрактно определенное пространство левоинвариантных дифференцирований, то предпочтительно ввести скобочную операцию непосредственно на $\mathcal{T}(G)_e$. Мы сделаем это при помощи ассоциативного произведения $x \cdot y$ на касательных векторах в точке e , которое, конечно, должно включать некоторым образом групповую операцию. При $A = K[G]$ запишем $\mu^*f = \sum f_i \otimes g_i$ ($f, f_i, g_i \in A$), где $\mu: G \times G \rightarrow G$ — умножение в группе G . Если $x, y \in \mathcal{T}(G)_e$ рассматривать как дифференцирования $A \rightarrow K$, то можно определить K -линейное отображение $x \otimes y: A \otimes A \rightarrow K$ с помощью соотношения $(x \otimes y)(f \otimes g) = (xf)(yg)$. (Проверьте корректность, рассмотрев билинейное отображение $A \times A \rightarrow K$.) Теперь мы положим $x \cdot y = (x \otimes y) \circ \mu^*: A \rightarrow K$.

Вместо того, чтобы непосредственно проверять, что операция $x \cdot y$ ассоциативна и что операция $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ соответствует лиевой скобке в $\mathcal{L}(G)$, мы покажем что при отображении $\theta: \mathcal{L}(G) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ обычное ассоциатив-

ное произведение $(*x)(*y)$ переходит в $x \cdot y$. Заметим сначала, что если $\mu^* f = \sum f_i \otimes g_i$, то

$$f * x = \sum f_i x(g_i).$$

(Вычислите обе части этого равенства в точке $x \in G$ и используйте тот факт, что $\lambda_{x^{-1}} f = \sum f_i(x) g_i$). Теперь, по определению, мы имеем $(x \cdot y)(f) = \sum x(f_i) y(g_i)$. С другой стороны, используя только что сделанное замечание, получаем

$$\begin{aligned} ((f * y) * x)(e) &= ((\sum f_i y(g_i)) * x)(e) = \\ &= (\sum (f_i * x) y(g_i))(e) = \sum x(f_i) y(g_i). \end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить алгебру Ли группы $G = GL(n, K)$. Так как G — открытое множество в аффинном n^2 -пространстве, то его касательное пространство в точке e имеет в качестве канонического базиса различные операторы частного дифференцирования $\partial/\partial T_{ij}$ с последующим вычислением значения на единичной матрице. Удобно определить касательный вектор x при помощи n^2 чисел $x_{ij} = x(T_{ij})$, расположенных в виде квадратной матрицы. При таком соглашении мы имеем $(x \cdot y)(T_{ij}) = (x \otimes y) \left(\sum_h T_{ih} \otimes T_{hj} \right) = \sum_h x_{ih} y_{hj}$ (обычное матричное произведение). Другими словами, K -линейное отображение $x \mapsto (x_{ij})$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $M(n, K)$ отождествляет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{gl}(n, K)$. (Это отображение инъективно, так как только нулевой касательный вектор обращает в 0 все T_{ij} , и сюръективно, так как размерности этих пространств равны n^2 .) Таким образом, $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как «геометрическое» касательное пространство к G в точке e (именно, аффинное n^2 -пространство) с перенесением точки e в 0.

9.4. Подгруппы и подалгебры Ли. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G . Включение $\eta: H \rightarrow G$ есть изоморфизм на замкнутую подгруппу: коморфизм η^* отображает $K[G]$ на $K[H] \cong K[G]/I$, где I — идеал функций, обращающихся в 0 на H . Следовательно, дифференциал $d\eta_e$ отождествляет пространство $\mathcal{T}(H)_e$ с подпространством пространства $\mathcal{T}(G)_e$, состоящим из всех тех x , для которых $x(I) = 0$. Но η — мор-

физм алгебраических групп, так что $d\eta: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ — гомоморфизм алгебр Ли, который позволяет нам рассматривать $\mathfrak{h}$ как подалгебру Ли алгебры $\mathfrak{g}$ (9.1). Напомним, что группу H можно охарактеризовать как множество всех элементов $x \in G$, для которых $\rho_x(I) \subset I$ (лемма 8.5). Имеется подобная характеристика подалгебры $\mathfrak{h}$, использующая правую конволюцию.

Лемма. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G , и пусть I — идеал алгебры $K[G]$, состоящий из функций, обращающихся в 0 на H . Тогда $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid I * x \subset I\}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{h}$. Если $f \in I$, $x \in H$, то $(f * x)(x) = x(\lambda_{x^{-1}}f) = 0$, так как $\lambda_{x^{-1}}f$ снова принадлежит идеалу I . Таким образом, $f * x \in I$. Наоборот, пусть элемент $x \in \mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $I * x \subset I$. Если $f \in I$, то $(f * x)(e) = x(\lambda_e f) = x(f) = 0$ (так как $e \in H$), откуда следует, что $x \in \mathfrak{h}$. $\square$

Эта лемма не находит больших применений в практике вычисления алгебры $\mathfrak{h}$ (но позднее найдет некоторые теоретические приложения). Вместо этого часто оказывается возможным описать алгебраическую группу как замкнутую подгруппу некоторой полной линейной группы $GL(n, K)$, а затем вычислить в явном виде ее алгебру Ли как подалгебру алгебры $\mathfrak{gl}(n, K)$.

Рассмотрим, например, группу $T(n, K)$. Ее можно рассматривать как главное открытое множество в аффинном пространстве $\mathbf{A}^{n(n+1)/2}$ (вложенном очевидным образом в $\mathbf{A}^{n^2}$), определенное условием, что определитель не равен 0, так что касательное пространство в точке e есть это аффинное пространство. Другими словами, после переноса касательного пространства из точки e в 0 алгебра Ли группы $T(n, K)$ есть множество $\mathfrak{t}(n, K)$ всех верхних треугольных матриц. Аналогично алгебра Ли группы $D(n, K)$ есть множество $\mathfrak{d}(n, K)$ всех диагональных матриц. Группа $U(n, K)$ есть замкнутое подмножество в $M(n, K)$, определенное обращением в 0 линейных полиномов $T_{ii} - 1$, T_{ij} ($i > j$); поэтому в соответствии с (5.1) ее касательное пространство в точке e (снова передвинутое в точку 0) состоит из всех матриц с нулями на диагонали и под ней. Эта алгебра Ли обозначается через $\mathfrak{n}(n, K)$ (что не вполне удачно). Заметим, что в каждом из этих случаев размерность группы

(или ее алгебры Ли) легко вычислить; но это не всегда так просто в общем случае.

Рассмотрим еще группу $SL(n, K)$, множество нулей полинома $f(T) = \det(T_{ij}) - 1$. Как отмечено в (5.4), $\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial T_{ij}}(e) T_{ij} = \sum_i T_{ii}$; поэтому, в соответствии с (5.1),

алгебра Ли группы $SL(n, K)$ лежит в множестве $\mathfrak{sl}(n, K)$ матриц со следом 0. Но в обоих случаях размерность равна $n^2 - 1$, см. (7.2), так что должно иметь место равенство, т. е. $\mathfrak{sl}(n, K)$ есть алгебра Ли группы $SL(n, K)$.

9.5. Двойные числа. Существует иной путь рассмотрения алгебры Ли, на основе теоретико-схемного подхода. Мы кратко наметим его, отсылая читателя к Борелю [4], Демазюру и Габриэлю [1] за строгим изложением. Этот пункт нигде в дальнейшем не используется.

Пусть G — алгебраическая группа, $A = K[G]$. Точки группы G взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам кольца A (1.5) или гомоморфизмам K -алгебр $A \rightarrow K$. Множество таких гомоморфизмов мы обозначим через $\text{Hom}(A, K)$. Точке $x \in G$ соответствует гомоморфизм ε_x , где $\varepsilon_x(f) = f(x)$. Как переносится в $\text{Hom}(A, K)$ умножение μ в группе G ? Пусть $x, y \in G$; рассмотрим композицию отображений $A \xrightarrow{\mu^*} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon_x \otimes \varepsilon_y} K \otimes K \rightarrow K$, где последняя стрелка есть умножение в K .

Если мы заменим K на произвольную (коммутативную) K -алгебру B , то множество гомоморфизмов K -алгебр $\text{Hom}(A, B)$ аналогичным образом наделяется групповой структурой. Элементы множества $\text{Hom}(A, B)$ можно понимать как «точки группы G над B ». Таким образом, можно теперь понимать G как функтор, сопоставляющий каждой K -алгебре B группу $G(B) = \text{Hom}(A, B)$. Например, вместо одной группы $GL(n, K)$ мы могли бы изучать функтор $\mathbf{GL}_n$, который сопоставляет алгебре B группу $GL(n, B)$. Аналогично можно рассматривать как функторы и $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_m$.

По определению алгебра двойных чисел есть $K[T]/(T^2)$, или $K[\delta]$, где $\delta^2 = 0$. Общий элемент этой алгебры имеет, следовательно, вид $a + b\delta$ ($a, b \in K$). Если G — функтор только что описанного типа, то

мы называем $\mathcal{T}(G) = G(K[\delta])$ касательным расслоением группы G . По существу, это — совокупность всех касательных пространств в точках группы $G(K)$. Включение $K \rightarrow K[\delta]$ и проекция $K[\delta] \rightarrow K$ ($a + \beta\delta \rightarrow a$) индуцируют групповые гомоморфизмы $G(K) \rightarrow \mathcal{T}(G)$, $\mathcal{T}(G) \rightarrow G(K)$, которые в свою очередь приводят к расщепляющейся точной последовательности, ядро которой интерпретируется как касательное пространство в точке e :

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}(G) \rightarrow G(K) \rightarrow e.$$

В самом деле, общий элемент касательного расслоения $\mathcal{T}(G)$ можно записать в виде $e_x + \delta x$, где $x \in G$ и $x \in \mathcal{T}(G)_x$; этот гомоморфизм $A \rightarrow K[\delta]$ отображает f в $e_x(f) + \delta x(f)$. Произведение $(e_x + \delta x)(e_y + \delta y)$ равно $e_{xy} + \delta(e_xy + e_yx)$.

Эти наши рассуждения позволяют сделать некоторые вычисления в § 10 совершенно прозрачными и естественными. Например $\text{Ad } x$ — это в точности ограничение на $\mathfrak{g}$ автоморфизма $\text{Int } e_x$. Вообще морфизм алгебраических групп $\varphi: G \rightarrow G'$ индуцирует гомоморфизм $\mathcal{T}(G) \rightarrow \mathcal{T}(G')$, ограничение которого на $\mathfrak{g}$ есть в точности $d\varphi$. Это позволяет весьма просто вычислить некоторые дифференциалы.

Упражнения

1. Пусть G — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$ и I — идеал всех полиномов в $K[T_{ij}]$, обращающихся в 0 на G . Доказать, что $G = \{x \in GL(n, K) \mid \rho_x I = I\}$, $\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid I \cdot x \subset I\}$. Сравнить I с идеалом I кольца $K[T_{ij}, 1/\det]$, состоящим из функций, обращающихся в 0 на G , и использовать леммы 8.5 и 9.4).

2. Пусть $G = SL(2, K)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, K)$. Вычислить матрицу отображения $\text{Ad } x$ ($x \in G$) в базисе

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебры $\mathfrak{g}$:

3. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Алгебра Ли, замкнутая по отношению к возведению в ассоциативную *) p -ю степень, называется p -алгеброй Ли (или ограниченной алгеброй Ли); примеры: $\mathfrak{gl}(n, K)$ или $\mathfrak{sl}(n, K)$.

*) То есть относительно ассоциативного умножения. — Прим. перев.

(а) Если $\mathfrak{A}$ — произвольная K -алгебра, то $\text{Der } \mathfrak{A}$ есть p -алгебра Ли.

(б) Если G — алгебраическая группа, то $L(G)$ есть p -алгебра Ли.

(в) Пусть $G = G_a$ (соответственно $G = G_m$), δ — как и в (9.3). Тогда $\delta^p = 0$ (соответственно $\delta^p = \delta$).

(г) Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то $d\varphi$ — гомоморфизм p -алгебр Ли, т. е. $d\varphi(x)^p = d\varphi(x^p)$.

Замечания. Рассуждения этой главы основаны на книге Бореля [4, § 3], однако он делает большее ударение на двойных числах.

§ 10. Дифференцирования

Переход от группы G к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ позволяет «линеаризовать» ряд задач. Эта техника особенно полезна, когда мы имеем дело с морфизмами. В этом параграфе мы вычислим дифференциалы некоторых морфизмов и выведем ряд непосредственных следствий, например покажем, что алгебра Ли замкнутой нормальной подгруппы есть *идеал*.

10.1. Некоторые элементарные формулы. Пусть G — алгебраическая группа с произведением $\mu: G \times G \rightarrow G$ и взятием обратного элемента $\iota: G \rightarrow G$. Чтобы вычислить $d\mu_{(e, e)}$, напомним сначала, что пространство $\mathcal{T}(G, G)_{(e, e)}$ канонически изоморфно $\mathcal{T}(G)_e \oplus \mathcal{T}(G)_e = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (5.1). Если $f \in K[G]$, то пусть $\mu^*f = \sum f_i \otimes g_i$, так что $f(xy) = \sum f_i(x) g_i(y)$. В частности,

$$(*) \quad f = \sum g_i(e) f_i = \sum f_i(e) g_i.$$

Если теперь $(x, y) \in \mathcal{T}(G \times G)_{(e, e)}$ ($x, y \in \mathfrak{g}$), то мы имеем, по определению, $z = d\mu_{(e, e)}(x, y)$, где $z(f) = (x, y)(\sum f_i \otimes g_i) = \sum x(f_i) g_i(e) + \sum f_i(e) y(g_i)$. Но ввиду формулы (*) этот же результат получается, если применить $x + y$ к f , так что $d\mu_{(e, e)}(x, y) = x + y$. (Это указывает на то, что сложение в $\mathfrak{g}$ есть инфинитезимальный аналог умножения в G).

Вычислим теперь $d\iota_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Рассмотрим отображения $G \xrightarrow{(1, \iota)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$. Так как композиция этих отображений преобразует каждый элемент x в e , то дифференциал отображает каждый элемент $x \in \mathfrak{g}$ в 0. Используя тот факт, что $d(1) = 1$ и что $d(1, \iota) = (d(1), d(\iota))$, получаем $0 = d(\mu \circ (1, \iota))_e(x) = d\mu_{(e, e)}(d(1, \iota)_e(x)) = d\mu_{(e, e)}(x,$

$d\iota_e(x) = x + d\iota_e(x)$ ввиду формулы для $d\mu_{(e, e)}$, указанной выше. Следовательно, $d\iota_e(x) = -x$ (т. е. отображение $x \mapsto -x$ в $\mathfrak{g}$ есть аналог отображения $x \mapsto x^{-1}$ в G).

Другой интересный морфизм — сопряжение фиксированного элемента $x \in G$, т. е. $\varphi_x(y) = yxy^{-1}$ ($y \in G$). Этот морфизм не отображает e в e (если x отличен от e), поэтому мы сначала рассмотрим морфизм $\psi(y) = xy^{-1}x^{-1}$. Очевидно, $\psi = \text{Int } x \circ \iota$, так что $d\psi_e(x) = d(\text{Int } x)(d\iota_e(x)) = \text{Ad } x(-x) = -\text{Ad } x(x)$, где $\text{Ad } x$ есть, по определению, $d(\text{Int } x)$ (9.1). Рассмотрим коммутаторный морфизм относительно x , т. е. $\gamma_x(y) = yxy^{-1}x^{-1}$; он реализуется как композиция морфизмов $G \xrightarrow{(\iota, \psi)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$. При $x \in \mathfrak{g}$ мы имеем $(d\gamma_x)_e(x) = d\mu_{(e, e)}(x, d\psi_e(x)) = x - \text{Ad } x(x) = (1 - \text{Ad } x)(x)$. На-

конец, морфизм φ_x можно записать в виде $G \xrightarrow{(\gamma_x, e)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$, где $\varepsilon(y) = x$ для всех $y \in G$. Позднее мы используем описание морфизма φ_x через γ_x при изучении сепарабельности морфизма φ_x .

Наши рассуждения можно подытожить следующим образом.

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа. Тогда для любых $x, y \in \mathfrak{g}$ мы имеем:

- (а) $d\mu_{(e, e)}(x, y) = x + y$;
- (б) $d\iota_e(x) = -x$;
- (в) $(d\gamma_x)_e(x) = (1 - \text{Ad } x)(x)$, где $\gamma_x(y) = yxy^{-1}x^{-1}$ ($x, y \in G$). $\square$

Сделаем еще замечание, которое будет полезно при получении из информации о группе $GL(n, K)$ соответствующих результатов о ее замкнутых подгруппах. Если H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G , то дифференциал ограничения на H некоторого морфизма φ группы G (отображающего e в e) есть ограничение на $\mathfrak{h}$ дифференциала $d\varphi_e$ (т. е. операция ограничения коммутирует с дифференцированием). Это очевидным образом вытекает из определений.

10.2. Дифференциал правого сдвига. Напомним (8.5), что группа G действует на $K[G]$ при помощи левых и правых сдвигов $(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y)$, $(\rho_x f)(y) = f(yx)$. Получающиеся при этом гомоморфизмы $\lambda, \rho: G \rightarrow GL(K[G])$ нельзя рассматривать как морфизмы алгебраических

групп, так как пространство $K[G]$ бесконечномерно. Однако $K[G]$ есть объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно всех сдвигов ρ_x (или всех λ_x). Если E — такое подпространство (инвариантное относительно всех ρ_x) с базисом $(f_1, \dots, f_n)$, то $\rho_x f_i = \sum_j m_{ij}(x) f_j$, причем коморфизм φ^* действия $\varphi: G \times E \rightarrow E$ отображает f_i в $\sum_j m_{ij} \otimes f_j$. (См. предложение 8.6 и доказательство теоремы 8.6.) Отсюда следует, что формула $\psi(x) = (m_{ij}(x))$ определяет морфизм $\psi: G \rightarrow GL(n, K)$ — матричное представление, ассоциированное с данным базисом пространства E . Заметим также, что подпространство пространства $K[G]$, натянутое на m_{ij} , содержит E и все свои левые сдвиги; это следует из такого вычисления: $(\lambda_{x^{-1}} f_i)(y) = f_i(xy) = \sum_j m_{ij}(y) f_j(x)$ (напомним, что здесь действие группы G на E определено через правое умножение в G).

Интересно вычислить дифференциал $d\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, K)$. Если $x \in \mathfrak{g}$, то, по определению, матрица $d\psi(x)$ имеет на позиции (i, j) элемент, который получается в результате применения x к $\psi^*(T_{ij})$. Но, как отмечалось выше, $\psi^* T_{ij} = m_{ij}$, так что $d\psi(x) = (x(m_{ij}))$. С другой стороны, рассмотрим действие x на базис $(f_1, \dots, f_n)$ при помощи правой конволюции: $(f_i * x)(x) = x(\lambda_{x^{-1}} f_i) = x(\sum_j f_j(x) m_{ij}) = \sum_j f_j(x) x(m_{ij})$ (мы использовали выражение для $\lambda_{x^{-1}} f_i$, полученное выше). Другими словами, x оставляет пространство E инвариантным и имеет в базисе $(f_1, \dots, f_n)$ матрицу $(x(m_{ij}))$. Резюмируем:

Предложение. Действуя на $K[G]$ правыми конволюциями, алгебра $\mathfrak{g}$ оставляет инвариантным каждое подпространство пространства $K[G]$, инвариантное относительно действия группы G . На любом конечномерном G -инвариантном подпространстве дифференциал правого сдвига есть правая конволюция. $\square$

Мы могли бы, разумеется, заменить прилагательное «правый» на «левый». Отметим, что это предложение проливает некоторый свет на аналогию между леммами 8.5 и 9.4.

10.3. Присоединенное представление. Действие группы G на $K[G]$ правыми сдвигами особенно полезно при построении (конечномерных) линейных представлений группы G с хорошими свойствами; это станет вполне очевидно в главе IV. Однако присоединенное действие группы G на $\mathfrak{g}$ легче вычисляется и в случае $\text{char } K = 0$ дает значительную информацию о группе G . Оно оказывается ценным инструментом и в общем случае. Чтобы вычислить присоединенное действие, мы начнем с группы $GL(n, K)$, а затем приспособим наши вычисления к ее замкнутым подгруппам.

Напомним (9.1), что $\text{Ad } x$ ($x \in G$) определяется как дифференциал автоморфизма $\text{Int } x$ группы G ; следовательно, $\text{Ad } x$ есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если реализовать $\mathfrak{g}$ как алгебру $\mathcal{L}(G)$ левоинвариантных дифференцирований $K[G]$, то $\text{Ad } x$ действует по формуле $\delta \mapsto \rho_x \delta \rho_x^{-1}$ (9.1), что наводит на мысль рассмотреть конкретный случай группы $G = GL(n, K)$.

Итак, рассмотрим *частный случай* $G = GL(n, K)$ с $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. Мы начнем с явного описания действия группы G (соответственно алгебры Ли $\mathfrak{g}$) на $K[G]$ сдвигами (соответственно конволюциями). Для этого достаточно проследить за действием на координатные функции T_{ij} , так как оно определяет действие на $1/\det T_{ij}$. Обозначим через T матрицу, в которой на позиции (i, j) стоит T_{ij} .

Лемма А. Пусть $x \in GL(n, K)$, $x \in \mathfrak{gl}(n, K)$. Тогда $\rho_x T_{ij}$ (соответственно $\lambda_x T_{ij}$, соответственно $T_{ij} * x$) — это (i, j) -й матричный элемент матрицы Tx (соответственно $x^{-1}T$, соответственно Tx).

Доказательство. При $y \in GL(n, K)$ мы имеем $(\rho_x T_{ij})(y) = T_{ij}(yx) = \sum_h y_{ih} x_{hj} = \sum_h T_{ih}(y) x_{hj} = (Tx)_{ij}(y)$ и аналогично для левых сдвигов. Используя это, мы получаем

$$\begin{aligned} (T_{ij} * x)(y) &= x(\lambda_{y^{-1}} T_{ij}) = x\left(\sum_h y_{ih} T_{hj}\right) = \\ &= \sum_h y_{ih} x(T_{hj}) = \sum_h y_{ih} x_{hj} = \sum_h T_{ih}(y) x_{hj} = (Tx)_{ij}(y). \quad \square \end{aligned}$$

Располагая этим описанием, легко вычислить $\text{Ad } x$.

Лемма Б. Пусть $x \in GL(n, K)$, $x \in \mathfrak{gl}(n, K)$. Тогда $\text{Ad } x(x) = xxx^{-1}$ (произведение матриц).

Доказательство. Достаточно проверить, что действие обеих частей этого равенства на T_{ij} одинаково:

$$\begin{aligned}
 \text{Ad} x(x)(T_{ij}) &= \rho_x(*x) \rho_x^{-1}(T_{ij}) = \\
 &= \rho_x(*x)(Tx^{-1})_{ij} = \\
 &= \rho_x\left(\sum_h (Tx)_{ih} x_{hj}^{-1}\right) = \\
 &= \rho_x\left(\sum_h \sum_l T_{il} x_{lh} x_{hj}^{-1}\right) = \\
 &= \sum_h \sum_l \sum_m (T_{im} x_{ml} x_{lh} x_{hj}^{-1}) = \\
 &= (Txhx^{-1})_{ij} = \\
 &= xhx^{-1}(T_{ij}).
 \end{aligned}$$

Здесь мы вторично использовали лемму А. $\square$

Следствие. $\text{Ad}: GL(n, K) \rightarrow GL(n^2, K)$ — морфизм алгебраических групп (при любом выборе базиса в $\mathfrak{gl}(n, K)$).

Доказательство. Это вытекает из явной формулы, полученной в лемме Б. $\square$

Рассмотрим теперь *общий случай*. Ввиду теоремы 8.6 любая алгебраическая группа G может рассматриваться как замкнутая подгруппа некоторой $GL(n, K)$; в этом случае $\mathfrak{g}$ отождествляется с подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{gl}(n, K)$. Кроме того, если $x \in G$, то $\text{Int}_G x$ есть ограничение на G автоморфизма $\text{Int}_{GL(n, K)} x$. Поскольку ограничение коммутирует с дифференцированием (10.1), $\text{Ad}_G x$ — ограничение на $\mathfrak{g}$ автоморфизма $\text{Ad}_{GL(n, K)} x$. Следовательно, лемма Б и ее следствие переносятся без изменения на общий случай.

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа. Тогда $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ — морфизм алгебраических групп. Если G — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$, то $\text{Ad} x$ — в точности сопряжение при помощи элемента x ($x \in G$). $\square$

10.4. Дифференциал морфизма Ad. Пусть G — алгебраическая группа. Для каждого элемента $x \in G$ отображение $\text{Ad} x$ является дифференциалом морфизма $\text{Int} x$ (в точке e). В свою очередь $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ оказывается морфизмом алгебраических групп (10.3); его

дифференциал, следовательно, есть гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (также называемый представлением, поскольку его образ лежит в некоторой алгебре $\mathfrak{gl}(m, K)$).

Теорема. Дифференциал морфизма Ad есть ad , где $\text{ad } x(y) = [x, y]$ при $x, y \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Как и в (10.3), мы рассмотрим сначала частный случай $G = GL(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. Если $x \in G$, то $\text{Ad } x$ есть образ элемента x при композиции отображений $G \xrightarrow{(\iota, \iota)} G \times G \xrightarrow{\sigma \times \tau} GL(\mathfrak{g}) \times GL(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mu} GL(\mathfrak{g})$, где $\iota(x) = x^{-1}$, μ — морфизм произведения и $\sigma(x)$ (соответственно $\tau(x)$) — операция левого (соответственно правого) умножения на x в $\mathfrak{g}$. Следует отметить, что σ, τ — морфизмы (многообразий), которые отображают e в единичную матрицу. Мы сделаем это очевидным и одновременно сможем вычислить дифференциалы, если будем работать со стандартным базисом алгебры $\mathfrak{g}$, состоящим из матриц e_{ij} (имеющих 1 на позиции (i, j) и 0 на остальных местах). Тогда (i, j) -й элемент матрицы $x e_{tm}$ есть в точности x_{ti} (если $m = j$) и 0 в остальных случаях. Поэтому матричные элементы матрицы $\sigma(x)$ (или $\tau(x)$) являются линейными полиномами простейшего вида от коэффициентов матрицы x ; это показывает, что σ (или τ) — морфизм. Отсюда следует, например, что $d\sigma_e(x)$ есть левое умножение на x в $\mathfrak{g}$ ($x \in \mathfrak{g}$).

Мы уже вычислили в (10.1) дифференциалы морфизмов ι и μ . Следовательно, $d(\text{Ad})$ задается правилом $x \mapsto \mapsto (x, -x) \mapsto \{\text{левое умножение на } x \text{ минус правое умножение на } x\}$, т. е. $d(\text{Ad})x(y) = xy - yx = [x, y]$.

В общем случае мы используем теорему 8.6, чтобы отождествить G с замкнутой подгруппой некоторой группы $GL(n, K)$, а затем воспользуемся тем фактом (10.1), что операция ограничения коммутирует с дифференцированием, и перенесем предыдущие результаты на подгруппу G . $\square$

Стоит заметить, что подобно тому как $\text{Ad } x$ есть автоморфизм алгебры Ли (а не только обратимое линейное преобразование), также и $\text{ad } x$ имеет некоторое дополнительное свойство сверх того, что $\text{ad } x$ — линейное преобразование пространства $\mathfrak{g}$. Из тождества Якоби следует, что $\text{ad } x$ — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (в действительности это эквивалентно тождеству Якоби).

Отметим еще, что Ker ad есть в точности центр $\mathfrak{z}(g)$ алгебры Ли g (центр состоит из всех элементов, «коммутирующих» со всеми элементами алгебры g). С другой стороны, если $x \in Z(G)$, то $\text{Int } x = 1$, и, следовательно, $\text{Ad } x = 1$, т. е. $Z(G) \subset \text{Ker Ad}$. Оказывается, что в характеристике 0 всегда имеет место равенство (13.4); в положительной характеристике имеются исключения (см. упражнение 3).

Теорема, доказанная выше, позволяет нам лучше уяснить природу соответствия $G \mapsto g$ из категории алгебраических групп в категорию алгебр Ли.

Следствие А. Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа алгебраической группы G . Тогда $\mathfrak{h}$ — идеал в g (т. е. $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для любых элементов $x \in g, y \in \mathfrak{h}$).

Доказательство. Утверждение, что группа H нормальна, означает, что все автоморфизмы $\text{Int } x$ ($x \in G$) оставляют группу H инвариантной; следовательно, все автоморфизмы $\text{Ad } x$ ($x \in G$) оставляют инвариантной подалгебру $\mathfrak{h}$. Если мы дополним базис алгебры $\mathfrak{h}$ до базиса алгебры g , то матрица автоморфизма $\text{Ad } x$ примет вид $\begin{pmatrix} * & | & * \\ \hline 0 & | & * \end{pmatrix}$, и ясно, что матрица эндоморфизма $d(\text{Ad})x$

($x \in g$) наследует этот вид. Но $d(\text{Ad}) = \text{ad}$, откуда следует, что $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ ($x \in g$). $\square$

Следствие Б. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G , и пусть $N = N_G(H)$ — ее нормализатор. Тогда $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{a}(\mathfrak{h}) = \{x \in g \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Доказательство. Мы знаем, что группа N замкнута, (следствие 8.2), так что алгебра Ли $\mathfrak{n}$ определена. Применяя следствие А к нормальной подгруппе H группы N , мы видим, что $\mathfrak{h}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{n}$, и, следовательно, $\mathfrak{n}$ нормализует $\mathfrak{h}$. $\square$

Если $\text{char } K = 0$, то включение в этом следствии в действительности является равенством (упражнение 13.1). Но это свойство (как и многие другие свойства алгебр Ли) не сохраняется в простой характеристике (см. упражнение 4).

10.5. Коммутаторы. Как мы знаем из предложения 10.1 (в), коммутаторный морфизм $\gamma_x: G \rightarrow G$, задаваемый формулой $\gamma_x(y) = yxy^{-1}x^{-1}$ имеет дифференциал (в точке e) вида $1 - \text{Ad } x: g \rightarrow g$.

Предложение. Пусть A, B — замкнутые подгруппы алгебраической группы G , и пусть C — замыкание подгруппы (A, B) , порожденной всеми коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$ ($a \in A, b \in B$). Тогда C содержит все элементы вида $y - \text{Ad } x(y)$, $x - \text{Ad } y(x)$, $[x, y]$ ($x \in A, x' \in \mathfrak{a}, y \in B, y' \in \mathfrak{b}$).

Доказательство. Если $x \in A$, то γ_x отображает B в C , так что дифференциал $1 - \text{Ad } x$ отображает $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{c}$. Это дает все элементы первого типа; аналогичным образом получаем элементы второго типа. Далее, при $x \in \mathfrak{a}$ пусть $\varphi: B \rightarrow C$ — морфизм (C рассматривается как аффинное пространство), определенный соотношением $\varphi(y) = x - \text{Ad } y(x)$. (Мы только что показали, что его образ лежит в C). Так как φ отображает e в 0 , мы можем вычислить образ отображения $d\varphi_e: \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{c}$ (рассматривая C как свое собственное касательное пространство в точке 0). Но $d(\text{Ad}) = \text{ad}$ (теорема 10.4), так что $d\varphi_e(y) = -[y, x] = [x, y]$ лежит в $\mathfrak{c}$. $\square$

Подобно тому, как сумма и умножение на -1 в $\mathfrak{g}$ — инфинитезимальные аналоги произведения и взятия обратного элемента в группе G (10.1), скобка $[x, y]$, как мы теперь видим, есть аналог коммутатора в G (который характеризует отклонение от коммутативности).

Следствие. Пусть G — алгебраическая группа, H — замыкание подгруппы (G, G) . Тогда $\mathfrak{h}$ содержит $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (= множество всех линейных комбинаций элементов $[x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$). $\square$

Как мы увидим позднее (17.2), группа (G, G) всегда замкнута. Включение $\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ в действительности всегда является равенством в случае, если $\text{char } K = 0$, и может быть строгим включением в положительной характеристике (упражнение 3).

10.6. Централизаторы. Рассмотрим коммутаторное отображение $\gamma_x: G \rightarrow G$ при фиксированном $x \in G$. Слой этого отображения $\gamma_x^{-1}(e)$ есть в точности $C_G(x)$. Из того факта (10.1), что $(d\gamma_x)_e = 1 - \text{Ad } x$, мы заключаем, что $\mathcal{P}(C_G(x))$ содержится в $\mathfrak{c}_x(x) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad } x(x) = x\}$ (инфинитезимальный централизатор элемента x). Как обычно, это включение может не быть равенством в положительной характеристике (см. упражнение 3). Но в случае, если $G = GL(n, K)$, ситуация всегда благоприятна. В самом деле, неподвижные точки автоморфизма

$\text{Ad } x$ в $\mathfrak{g}$ — это в точности матрицы, коммутирующие с x (лемма Б в (10.3)), так что централизатор $C_G(x)$ состоит из обратимых матриц в $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(x)$; иными словами, $C_G(x)$ — главное открытое множество аффинного пространства $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(x)$; поэтому размерности равны. Вместе с только что установленным включением мы получаем

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа и $x \in G$. Тогда $\mathcal{L}(C_G(x)) \subset \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(x)$. Если $G = GL(n, K)$, то имеет место равенство. $\square$

10.7. Автоморфизмы и дифференцирования. Цель данного раздела — придать точный смысл следующему утверждению: если алгебраическая группа G действует как группа автоморфизмов, то $\mathfrak{g}$ действует как алгебра Ли дифференцирований. Это уже было нами отмечено в связи с присоединенным представлением (10.4).

Мы начнем с более тщательного рассмотрения действия группы G на двойственном пространстве и на пространстве тензорного произведения (8.2). Для краткости мы будем обозначать через $x \cdot v$ вектор $\varphi(x)(v)$, где $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление. Аналогично мы положим $x \cdot v = d\varphi(x)(v)$ при $x \in \mathfrak{g}$.

Предложение. Пусть G — алгебраическая группа, и пусть $\varphi: G \rightarrow GL(V)$, $\psi: G \rightarrow GL(W)$ — рациональные представления. Тогда:

(а) Группа G действует на V^* по правилу $(x \cdot f)(v) = f(x^{-1} \cdot v)$, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — по правилу $(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v)$, где $x \in G$, $x \in \mathfrak{g}$, $f \in V^*$, $v \in V$.

(б) Группа G действует на пространстве $V \otimes W$ по правилу $x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes x \cdot w$, а алгебра $\mathfrak{g}$ — по правилу $x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w$, где $x \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ и $v \otimes w$ ($v \in V$, $w \in W$) — элемент пространства $V \otimes W$.

Доказательство. (а) Действие группы G задано в соответствии с определением в (8.2). Если мы зафиксируем базис пространства V и запишем $\varphi(x)$ в виде матрицы, то, очевидно, матрица действия элемента x на V^* (относительно двойственного базиса) есть в точности транспонированная обратная матрица. Ввиду (10.1) дифференциал морфизма $x \mapsto x^{-1}$ есть $x \mapsto -x$, а отображение транспонирования $GL(n, K) \rightarrow GL(n, K)$, очевидно, имеет своим дифференциалом отображение транспонирования $\mathfrak{gl}(n, K) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, K)$ (морфизм здесь задается ли-

нейными полиномами). Таким образом, x действует на V^* , как указано в (а).

(б) Как отмечено в (8.2), соотношения в (б) определяют (либо при помощи явного выбора базиса, либо ввиду универсального свойства тензорного произведения) действие группы G на $V \otimes W$. Зафиксируем базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V и базис $w_1, \dots, w_m$ пространства W . В этих базисах действия типичного элемента $x \in G$ задаются $n \times n$ матрицей (a_{ij}) и $m \times m$ матрицей (b_{ij}) . В пространстве $V \otimes W$ выберем в качестве базисных элементов $v_r \otimes w_s$ (в некотором порядке), так что группа G действует на $V \otimes W$ при помощи матричного представления $\tau: G \rightarrow GL(mn, K)$, матричный элемент которого, лежащий в (i, j) -й строке и в (r, s) -м столбце, равен, очевидно, $a_{ir}b_{js}$. Представление τ раскладывается в произведение двух морфизмов $G \xrightarrow{\varphi \times \psi} GL(n, K) \times GL(m, K) \rightarrow GL(mp, K)$, последний из которых задается правилом $Z_{ijrs} = X_{ir}Y_{js}$. Здесь мы имеем дело с морфизмом аффинного $(n^2 + m^2)$ -мерного пространства в аффинное $(nm)^2$ -мерное пространство, и его дифференциал легко вычислить, используя метод (5.4). Если (c_{ij}) и (d_{ij}) — типичные элементы алгебр $\mathfrak{gl}(n, K)$ и $\mathfrak{gl}(m, K)$, то дифференциал отображает эту пару в матрицу, у которой на позиции $((i, j), (r, s))$ находится элемент $\delta_{js}c_{ir} + \delta_{ir}d_{js}$. Но это именно то правило, которое мы хотим доказать. $\square$

Часть (б) предложения распространяется на произведение трех или более сомножителей. В частности, действие группы $GL(V)$ на тензорной алгебре $\mathfrak{T}(V)$ как группы автоморфизмов (алгебры) имеет в качестве инфинитезимального аналога действие алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ на $\mathfrak{T}(V)$ как алгебры Ли дифференцирований. Поскольку $GL(V)$ оставляет инвариантным идеал алгебры $\mathfrak{T}(V)$, по которому надо профакторизовать, чтобы получить внешнюю алгебру $\wedge V$ (1.8), то мы получаем аналогичные действия группы $GL(V)$ и алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ на внешней алгебре. (Этим мы воспользуемся ниже в (11.1).)

Чтобы прийти к общему утверждению, сформулированному в начале этого параграфа, мы заметим, что ненулевой вектор $v \in V$, неподвижный относительно

замкнутой подгруппы группы $GL(V)$, аннулируется алгеброй Ли этой подгруппы. Это достаточно легко проверить (упражнение 2). Такой вектор мы называем инвариантом.

Следствие. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная K -алгебра (не обязательно ассоциативная), и пусть G — замкнутая подгруппа группы $GL(\mathfrak{A})$, состоящая из автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{g}$ состоит из дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Ввести на $\mathfrak{A}$ структуру K -алгебры — это то же самое, что задать билинейное отображение $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ или, что равносильно, определить K -линейное отображение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$. Но имеется стандартное отождествление (см. (8.2)) пространства $\text{Hom}(V, W)$ с $V^* \otimes W$, так что структура K -алгебры на $\mathfrak{A}$ задается элементом $t \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})^* \otimes \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^* \otimes \mathfrak{A}^* \otimes \mathfrak{A}$. Для того чтобы элемент $x \in GL(\mathfrak{A})$ был автоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы вектор t был инвариантом относительно x (как легко проверить). Следовательно, предыдущее замечание показывает, что вектор t должен быть инвариантом относительно $\mathfrak{g}$. Отсюда мы выведем требуемое утверждение.

Из предложения и только что сделанных отождествлений вытекает, что действие элемента $x \in \text{gl}(\mathfrak{A})$ на $\text{Hom}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ задается следующим образом $(x \cdot f)(v \otimes w) = x \cdot (f(v \otimes w)) - f(x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w)$, где $f \in \text{Hom}(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, $v, w \in \mathfrak{A}$. В частности, соотношение $x \cdot t = 0$ равносильно соотношению $x \cdot (vw) = (x \cdot v)w + v(x \cdot w)$, где умножение в алгебре показано последовательной записью перемножаемых элементов. $\square$

Упражнения

1. Пусть G — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$. Пусть G оставляет инвариантным подпространство $W \subset K^n$. Доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(n, K)$ также оставляет инвариантным W . Верно ли обратное?

2. Если все элементы замкнутой подгруппы G группы $GL(n, K)$ оставляют неподвижным некоторый вектор в K^n , то доказать, что все элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображают этот вектор в 0.

3. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Следующий пример показывает, что Ker Ad может быть больше, чем $Z(G)$. Пусть группа $G \subset GL(3, K)$

состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^p & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Тогда G — замкнутая

подгруппа, размерность которой равна 2. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($a, b \in K$), так что алгебра $\mathfrak{g}$

является коммутативной. Кроме того, $e = Z(G) \subsetneq \text{Ker Ad} \subsetneq G$.

4. Пусть $\text{char } K = 2$, $G = SL(2, K)$, $B = T(2, K) \cap G$. Проверить, что $N_G(B) = B$, тогда как $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{g}$ (см. следствие Б теоремы 10.4).

5. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G , $C = C_G(H)$. Доказать, что $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] = 0\}$.

6. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G , $x \in G$. Доказать, что $\text{Ad } x(\mathfrak{h}) = \mathcal{L}(\text{Int } x(H))$.

7. Описать в явном виде матрицы в $GL(n, K)$ (соответственно в $\mathfrak{gl}(n, K)$), которые коммутируют с данной диагональной матрицей (см. предложение 10.6).

Замечания. Пример в упражнении 3 взят из книги Шевалле [4]

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 11. Построение некоторых представлений

Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G . Можно ли снабдить однородное пространство G/H (или $H \backslash G$) «разумной» структурой многообразия? Это тонкий вопрос, отчасти потому, что мы должны будем с необходимостью прийти к неаффинным многообразиям (при некоторых H). В этом разделе мы покажем, как построить G -орбиту в проективном пространстве, имеющую группу H в качестве стабилизатора некоторой точки, а затем уточним это построение в случае, если H — нормальная подгруппа. В следующем параграфе мы покажем, что построенное таким образом многообразие обладает естественными свойствами «фактор-многообразия».

11.1. Действие на внешних степенях. Нам потребуются некоторые простые факты из линейной алгебры.

Напомним (10.7), как группа $GL(n, K)$ и алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, K)$ действуют на внешних степенях векторного пространства $W = K^n$. Если M есть d -мерное подпространство пространства W , то особенно полезным оказывается рассмотрение действия на $L = \wedge^d M$; ясно, что L — одномерное подпространство пространства $V = \wedge^d W$.

Лемма. При только что введенных обозначениях пусть $x \in GL(W)$, $x \in \mathfrak{gl}(W)$. Тогда

- (а) $(\wedge^d x)L = L$, если (и только если) $x(M) = M$;
- (б) $(d \wedge^d x)L \subset L$, если (и только если) $x(M) \subset M$.

Доказательство. В каждом случае часть «если» очевидна. Для доказательства (а) выберем базис $(w_1, \dots, w_n)$ пространства W такой, что M порождается элементами $w_1, \dots, w_d$ и $x(M)$ порождается элементами $w_{l+1}, \dots, w_{l+d}$ для некоторого $l \geq 0$. Требуется доказать, что $l = 0$. Далее, элемент $w_1 \wedge \dots \wedge w_d$ порождает L и умножается под действием $\wedge^d x$ на (ненулевой) множитель (по предположению). Но ясно, что оператор

$\wedge^d x$ преобразует этот элемент в элемент, кратный $\omega_{i+1} \dots \omega_{i+d}$, откуда и следует, что $l = 0$.

Для доказательства (б) выберем базис в M таким образом, чтобы при отображении x образы векторов из линейной K -оболочки первой части этого базиса лежали в M , а образы остальных векторов пространства M не лежали в M . Затем построим некоторый элемент $y \in \mathfrak{gl}(W)$, действующий так же, как x , на первую часть базиса и отображающий в 0 остальные базисные векторы из M . Очевидно, оператор y оставляет пространство M инвариантным, так что оператор $(d \wedge^d)(y)$ оставляет инвариантным L . Следовательно, элемент $x - y$ удовлетворяет условиям в (б). Если мы покажем, что оператор $x - y$ оставляет инвариантным M , то мы сможем заключить, что и x оставляет инвариантным пространство M . Таким образом, мы можем заменить x на $x - y$. Это позволяет нам считать, что пространство M имеет тривиальное пересечение с $x(M)$. Пусть теперь $\omega_1, \dots, \omega_d$ — базис пространства M , выбранный таким образом, что элементы $x(\omega_1), \dots, x(\omega_c)$ образуют базис пространства $x(M)$, а $x(\omega_{c+1}) = \dots = x(\omega_d) = 0$. По определению $(d \wedge^d)(x)(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d) = \sum_i \omega_1 \wedge \dots \wedge x(\omega_i) \wedge \dots \wedge \omega_d$. По предположению, этот элемент кратен $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d$. Но векторы $\omega_1 \wedge \dots \wedge x(\omega_i) \wedge \dots \wedge \omega_d$ линейно независимы или равны 0, и ни один из них не равен $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d$. Вывод: $x(\omega_i) = 0$ ($1 \leq i \leq d$), так что x оставляет пространство M инвариантным (и отображает M в 0). $\square$

11.2. Теорема Шевалле.

Теорема. Пусть G — алгебраическая группа, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда существует рациональное представление $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ и одномерное подпространство L пространства V такие, что

$$H = \{x \in G \mid \varphi(x)L = L\}$$

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid d\varphi(x)L \subset L\}.$$

Доказательство. Пусть I — идеал кольца $K[G]$, состоящий из всех функций, обращающихся в 0 на H . Тогда идеал I конечно порожден, и пространство, натянутое на некоторое конечное множество образующих, лежит в конечномерном подпространстве W алгебры $K[G]$,

инвариантно относительно всех правых сдвигов ρ_x ($x \in G$) (предложение 8.6). Положим $M = W \cap I$ (так что пространство M порождает I). Заметим, что пространство M инвариантно относительно всех сдвигов ρ_x ($x \in H$), поскольку $H = \{x \in G \mid \rho_x I = I\}$ (лемма 8.5). В свою очередь пространство M инвариантно относительно всех операторов $*x$ ($x \in \mathfrak{h}$) (предложение 10.2). Мы утверждаем, что $H = \{x \in G \mid \rho_x M = M\}$, $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid M * x \subset M\}$. Пусть, скажем, $\rho_x M = M$ ($x \in G$). Так как I — идеал кольца $A = K[G]$, порожденный M , то мы имеем $\rho_x I = \rho_x(MA) = \rho_x(M)\rho_x(A) = MA = I$, откуда следует, что $x \in H$ (лемма 8.5). Пусть $M * x \subset M$ ($x \in \mathfrak{g}$). Тогда правило дифференцирования произведения дает: $I * x = (MA) * x \subset (M * x)A + M(A * x) \subset MA = I$; следовательно, $x \in \mathfrak{h}$ (лемма 9.4).

Мы получили хорошее первое приближение к теореме. Остается только превратить M в прямую, что достигается переходом к $V = \wedge^d W$, $L = \wedge^d M$ ($d = \dim M$). Пусть $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ есть d -я внешняя степень представления, построенного выше. Желаемая характеристизация группы H и алгебры Ли $\mathfrak{h}$ следует тогда непосредственно из леммы 11.1. $\square$

Эта теорема Шевалле полезна не только для целей этой главы, но и при изучении представлений группы G , где она помогает доказать существование некоторых важнейших представлений; она находит применения также и в ряде других ситуаций.

11.3. Переход к проективному пространству. Как и в (11.2), пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G . Выбор рационального представления $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ и прямой L в V служит для отождествления группы H со стабилизатором в G точки $[L]$ проективного пространства $\mathbf{P}(V)$, которая соответствует прямой L . В результате однородное пространство G/H соответствует (теоретико-множественно) орбите точки $[L]$ в $\mathbf{P}(V)$. Согласно (8.3) такая орбита сама является многообразием (квазипроективным, так как она является открытым подмножеством своего замыкания).

Нам необходимо в более точной форме описать инфинитезимальное поведение морфизма $\pi: G \rightarrow \mathbf{P}(V)$, заданного правилом $x \mapsto \varphi(x)[L] = [\varphi(x)L]$. Каноническое отображение $\sigma: V - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(V)$ имеет своим дифферен-

циалом в точке v ($=$ любой вектор, порождающий L) линейное отображение, ядро которого есть в точности L (5.4). Зафиксируем v и рассмотрим орбитное отображение $\omega: GL(V) \rightarrow V$, задаваемое формулой $\omega(x) = x(v)$. В базисе $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V отображение ω сопоставляет матрице ее первый столбец. В частности, отображение ω задается *линейными* полиномами, так что и дифференциал $d\omega$ задается тем же способом: $d\omega_g(x) = x(v)$ ($x \in \mathfrak{gl}(V)$).

Комбинируя эти замечания, мы заключаем, что дифференциал $d\pi_e$ отображает $x \in \mathfrak{g}$ в образ $d\varphi(x)(v)$ в касательном пространстве к многообразию $P(V)$ в точке $[L]$. В частности, ввиду теоремы 11.2 алгебра Ли $\mathfrak{h}$ совпадает с $\text{Ker } d\pi_e$. Из соображений размерности вытекает, что отображение $d\pi_e$ сюръективно, и, следовательно (5.5), морфизм π *сепарабелен*. Отметим также, что морфизм π является G -эквивариантным (при действии группы G на себе при помощи левых умножений), см. (8.2) и упражнение 8.6.

11.4. Характеры и полуинварианты. Чтобы уточнить построение в (11.3) в случае, если H — нормальная подгруппа, нам нужно ввести понятие **характера** алгебраической группы. Это, по определению, произвольный морфизм алгебраических групп $\chi: G \rightarrow G_m$, например $\det: GL(n, K) \rightarrow G_m$. Если χ_1, χ_2 — два характера группы G , то их «произведение» $\chi_1\chi_2$ определяется формулой $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$. Это наделяет множество $X(G)$ всех характеров структурой коммутативной группы. Следует отметить, что некоторые группы не имеют нетривиальных характеров, например G_a и $SL(n, K)$ (упражнение 2), тогда как другие группы могут иметь много характеров, например группа $D(n, K)$. Это мы обсудим подробнее в § 16.

Характеры следующим образом возникают в связи с линейными представлениями. Пусть G — замкнутая подгруппа группы $GL(V)$. Для каждого характера $\chi \in X(G)$ положим $V_\chi = \{v \in V \mid x \cdot v = \chi(x)v \text{ для всех } x \in G\}$. Очевидно, V_χ — подпространство пространства V , инвариантное относительно G (возможно, нулевое). Любой ненулевой элемент пространства V_χ называется **полуинвариантом** группы G **веса** χ . Обратно, если v — любой ненулевой вектор, который порождает G -инвари-

антную прямую в V , то ясно, что соотношение $x \cdot v = \chi(x)v$ определяет характер χ группы G .

Более общо, если $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление, то полуинварианты группы G в V есть, по определению, полуинварианты группы $\varphi(G)$. Заметим, что композиция с φ индуцирует инъективный гомоморфизм групп $X(\varphi(G)) \rightarrow X(G)$, так что пространство V_χ можно очевидным образом определить для любого $\chi \in X(G)$, являющегося характером $\varphi(G)$.

Лемма. Пусть $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление. Тогда подпространства V_χ ($\chi \in X(G)$) линейно независимы; в частности, только конечное число таких пространств отлично от нулевого.

Доказательство. В противном случае мы можем взять минимальное число $n \geq 2$ и ненулевые векторы $v_i \in V_\chi$ (для различных χ_i , $1 \leq i \leq n$) такие, что $v_1 + \dots + v_n = 0$. Так как характеры χ_i различны, то $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$ для некоторого элемента $x \in G$. Но $0 = \varphi(x)(\sum v_i) = \sum \chi_i(x)v_i$, так что $\sum \chi_1(x)^{-1}\chi_i(x)v_i = 0$. Коэффициент при v_2 отличен от 1; если мы вычтем это уравнение из уравнения $\sum v_i = 0$, то получим нетривиальную зависимость, связанную с $n - 1$ характерами, что противоречит выбору n . $\square$

Теперь мы слегка изменим ситуацию, предполагая, что N — замкнутая нормальная подгруппа группы G , и сосредоточим внимание на подпространствах V_χ при $\chi \in X(N)$. Мы утверждаем, что каждый элемент группы $\varphi(G)$ отображает пространство V_χ в некоторое другое пространство $V_{\chi'}$. Для доказательства мы можем предполагать, что $G \subset GL(V)$. При $x \in G$, $y \in N$ мы имеем $yx \cdot v = x(x^{-1}yx) \cdot v = x \cdot \chi(x^{-1}yx)v = \chi(x^{-1}yx)x \cdot v$ ($v \in V_\chi$) и функция $y \mapsto \chi(x^{-1}yx)$ есть, очевидно, характер χ' группы N . Таким образом, x отображает V_χ в $V_{\chi'}$. В действительности это вычисление показывает, что группа G действует естественным образом на $X(N)$, так что мы можем записать $\chi' = x \cdot \chi$.

11.5. Нормальные подгруппы.

Теорема. Пусть G — алгебраическая группа, N — замкнутая нормальная подгруппа группы G . Тогда су-

существует рациональное представление $\psi: G \rightarrow GL(W)$ такое, что $N = \text{Ker } \psi$ и $\mathfrak{n} = \text{Ker } d\psi$.

Доказательство. Используем теорему 11.2, чтобы построить морфизм $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ и прямую L в пространстве V , стабилизатор которой в G (соответственно в $\mathfrak{g}$) есть N (соответственно $\mathfrak{n}$). Так как N действует на L скалярными умножениями, то мы имеем $xl = \chi_0(x)l$ ($\chi_0 \in X(N)$). Рассмотрим в V сумму всех ненулевых подпространств V_χ ($\chi \in X(N)$); ввиду леммы 11.4 эта сумма прямая (так что лишь конечное число характеров χ может здесь появиться) и, конечно, содержит L . Кроме того, мы видели в (11.4), что $\varphi(G)$ переставляет различные пространства V_χ , ибо группа N нормальна в G . Заменяя представление φ на его ограничение, мы можем считать, что само пространство V есть прямая сумма подпространств V_χ и группа N действует на каждом из них скалярными умножениями *).

Пусть теперь W — подпространство пространства $\text{End } V$, состоящее из всех тех эндоморфизмов, которые оставляют инвариантным каждое пространство V_χ ($\chi \in X(N)$). Имеется естественный изоморфизм $W \cong \coprod \text{End}(V_\chi)$. (Пространство W можно представить себе состоящим из всех блочно диагональных матриц с блоками размеров $\dim V_\chi$.) Если мы рассмотрим $\text{End } V$ как $\mathfrak{gl}(V)$, то группа $GL(V)$ действует на $\text{End } V$ при помощи присоединенного представления: $\text{Ad } x$ есть сопряжение при помощи x (предложение 10.3). Заметим, что подгруппа $\varphi(G)$ при таком действии оставляет инвариантным пространство W , поскольку $\varphi(G)$ переставляет пространства V_χ , а W оставляет их инвариантными. Следовательно, мы получаем гомоморфизм групп $\psi: G \rightarrow GL(W)$, где ψ есть результат последовательного выполнения сначала морфизма φ , затем Ad , а потом ограничения на подпространство W пространства $\mathfrak{gl}(V)$; ясно, что ψ — рациональное представление.

Остается вычислить $\text{Ker } \psi$ и $\text{Ker } d\psi$. Если $x \in N$, то $\varphi(x)$ действует на каждом пространстве V_χ как умноже-

*) Более того, можно считать, что пространства V_χ транзитивно перемещаются группой G . Отсюда следует, что группа G неприводима (использовать лемму 11.4). — *Прим. перев.*

ние на скаляр; поэтому сопряжение при помощи $\varphi(x)$ не влияет на W , т. е. $x \in \text{Кег } \psi$. Обратно, пусть $x \in G$, $\psi(x) = e$. Это означает, что $\varphi(x)$ оставляет инвариантным каждое пространство V_x и коммутирует с $\text{End } V_x$. Но центр кольца $\text{End } V_x$ состоит из скаляров*), так что $\varphi(x)$ действует на каждом пространстве V_x как скаляр. В частности, $\varphi(x)$ оставляет инвариантным пространство $L \subset V_{x_0}$, откуда следует, что $x \in N$ (теорема 11.2). Значит, $N = \text{Кег } \psi$.

Рассуждение для $d\psi$ аналогично (с использованием того факта, что $d(\text{Ad}) = \text{ad}$ (теорема 10.4)). При $x \in \mathfrak{n}$ оператор $d\psi(x)$ действует (посредством $d\chi$) на каждом пространстве V_x как скаляр, так что отображение $\text{ad}(d\psi(x))$ равно 0 на W , и $x \in \text{Кег } d\psi$. Обратно, при $x \in \text{Кег } d\psi$ оператор $\text{ad}(d\psi(x))$ равен 0 на W , так что $d\psi(x)$ оставляет каждое пространство V_x инвариантным и коммутирует с $\text{End } V_x$; следовательно, он действует на V_x как скаляр. В частности, $d\psi(x)L \subset L$, откуда $x \in \mathfrak{n}$. $\square$

При помощи этой теоремы мы можем наделить абстрактную группу G/N структурой (аффинной) алгебраической группы, отождествляя ее с $\psi(G)$. Однако необходима некоторая дополнительная работа для того, чтобы убедиться, что эта процедура не зависит от выбора исходного представления и прямой L и приводит к хорошим универсальным свойствам. Во всяком случае, из приведенной конструкции следует, что алгебра Ли группы $\psi(G)$ есть факторалгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$.

Упражнения

1. Доказать, что $X(G_m)$ — бесконечная циклическая группа. Что представляет собой группа характеров группы $D(n, K)$?
2. Доказать, что группы G_a и $SL(n, K)$ не имеют нетривиальных характеров.

Замечания. Материал этого и следующего параграфа заимствован у Бореля [4, гл. II].

*) Ввиду леммы Шура, см. стр. 187. — *Прим. перев.*

§ 12. Факторы

12.1. Свойство универсального отображения. Если задана замкнутая подгруппа H алгебраической группы G , то существует сепарабельный G -эквивариантный морфизм $\pi: G \rightarrow Y$ (где Y есть G -орбита в некотором проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$), слои которого есть в точности смежные классы xH (11.3). Если группа H нормальна в G , то в качестве Y можно выбрать аффинную алгебраическую группу и в качестве π — гомоморфизм групп (11.5). Задача заключается теперь в том, чтобы показать, что пара (π, Y) удовлетворяет очевидному требованию: (*) Для любого многообразия X и любого морфизма $\varphi: G \rightarrow X$, непустые слои которого — объединения смежных классов xH , существует единственный морфизм $\psi: Y \rightarrow X$ такой, что $\psi \circ \pi = \varphi$.

Это условие, примененное к любому другому морфизму $\pi': G \rightarrow Y'$, который мы могли бы построить методом § 11, сразу показывает, что многообразие Y' должно быть изоморфно многообразию Y , причем изоморфизм осуществляется единственным морфизмом ψ , для которого $\psi \circ \pi = \pi'$. Это в свою очередь дает нам право назвать Y **однородным пространством G/H** , а π — **каноническим морфизмом**. (Аналогичное рассуждение, разумеется, ведет к пространству $H \backslash G$ смежных классов Hx). Таким образом, остается доказать следующее утверждение.

Теорема. *Пара (π, Y) удовлетворяет условию (*).*

Для доказательства мы используем некоторые факты о морфизмах, установленные в (4.5) и (4.6), а также результат из (5.3). Детали будут приведены в (12.2), (12.3), а сейчас мы переформулируем условие (*). Единственность искомого морфизма $\psi: Y \rightarrow X$, если он существует, очевидна, так как элемент $\pi(x)$ должен отображаться в $\varphi(x)$ для всех $x \in G$ (и так как морфизм π сюръективен). Для того чтобы построить морфизм ψ , мы должны рассмотреть вопрос с трех точек зрения на Y .

(1) *Y как множество.* По построению Y соответствует множеству смежных классов xH , а π — отображению $x \mapsto xH$. Ввиду условий, наложенных на φ , это обеспечивает существование теоретико-множественного отображения $\psi: Y \rightarrow X$ такого, что $\psi \circ \pi = \varphi$.

(2) Y как топологическое пространство. Требуется доказать, что отображение $\psi: Y \rightarrow X$ в (1) непрерывно. Для этого достаточно показать, что Y обладает топологией факторпространства, т. е. что множество U открыто в Y , если (и только если) множество $\pi^{-1}(U)$ открыто в G . Поскольку мы имеем дело с группой, это эквивалентно на первый взгляд более сильному утверждению, что отображение π открыто. Действительно, пусть множество U открыто в G . Тогда множество $\pi^{-1}(\pi(U))$ есть объединение тех смежных классов, которые пересекаются с U ; но это совпадает с объединением всех H -сдвигов множества U , что является объединением открытых множеств, и, следовательно, есть открытое множество. Таким образом, множество $\pi(U)$ должно быть открыто (если Y обладает топологией факторпространства). В (12.2) будет показано, что отображение π в действительности открыто.

(3) Y как пространство с пучком функций. Отображение ψ должно индуцировать гомоморфизмы $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}U)$ для всех открытых множеств $U \subset X$. Из предположений относительно ψ следует, что для каждого такого множества U коморфизм ψ^* отображает $\mathcal{O}_X(U)$ в алгебру тех регулярных функций на $\psi^{-1}U$, которые принимают постоянные значения на каждом смежном классе xH . Поэтому достаточно убедиться, что $\pi^*\mathcal{O}_Y(\psi^{-1}U)$ состоит из *всех* таких функций: тогда $\psi^*(\mathcal{O}_X(U))$ автоматически содержится в $\mathcal{O}_Y(\psi^{-1}U)$ ввиду определения ψ . Это будет сделано в (12.3).

Эти замечания сводят доказательство теоремы к проверке двух свойств пары (π, Y) . Мы утверждаем, что это достаточно сделать при дополнительном предположении о том, что группа G *связна*. В самом деле, предположим, что в случае связной группы теорема доказана. Пусть $H' = G^0 \cap H$, Y' — орбита относительно G^0 некоторой точки $y \in Y$, и $\pi': G^0 \rightarrow Y'$ — орбитное отображение. Так как группа H' имеет в H конечный индекс, то ее алгебра Ли совпадает с $\mathfrak{h}$. По построению Y группа H' совпадает со стабилизатором точки y в G^0 , а ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G^0)$, состоящая из всех элементов, аннулирующих y . Из теоремы для связного случая тогда следует, что пара (π', Y') обладает желаемыми двумя свойствами. Благодаря G -эквивариантности ото-

бражения π мы можем распространить эти свойства на пару (π, Y) .

12.2. Топология на множестве Y . Теорема 4.5 дает критерий того, когда доминантный морфизм неприводимых многообразий открыт. Мы хотим проверить справедливость предположений этой теоремы для морфизма $\pi: G \rightarrow Y$. Поскольку группа G действует на Y транзитивно и Y обладает простой точкой (5.2), то все точки являются простыми; поэтому их локальные кольца целозамкнуты (теорема 5.3А). Следовательно, мы можем выбрать открытое множество $U \subset Y$, как в теореме 4.3(б). Согласно этой теореме для каждого замкнутого неприводимого подмножества $W \subset Y$, которое имеет непустое пересечение с U , компоненты множества $\pi^{-1}(W)$, пересечение которых с $\pi^{-1}(U)$ не пусто, все имеют «правильную» размерность. Так как группа G действует на Y транзитивно, то G -сдвиги множества U покрывают Y (а G -сдвиги множества $\pi^{-1}(U)$ покрывают G). Отсюда следует, что все компоненты всех множеств $\pi^{-1}(W)$ имеют правильную размерность и, таким образом, мы можем воспользоваться теоремой 4.5.

12.3. Функции на множестве Y . Вначале мы хотим показать, что полиномиальная функция $f \in K[G]$, постоянная на смежных классах xH , есть образ относительно π^* некоторой рациональной функции на Y . (Напомним, что группа G предполагается связной, так что существует поле рациональных функций $K(Y)$.) Пусть $G \xrightarrow{\varphi} Y \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\text{pr}_1} Y$, где $\varphi(x) = (\pi(x), f(x))$. Композиция этих отображений совпадает с π . Если X — замыкание в $Y \times \mathbb{A}^1$ множества $\varphi(G)$, то множество X неприводимо и pr_1 индуцирует сюръективный морфизм $\psi: X \rightarrow Y$. По построению морфизм π *сепарабелен*; поэтому ψ — также сепарабельный морфизм.

Далее, $\varphi(G)$ содержит (плотное) открытое подмножество множества X (4.3). Так как функция f постоянна на слоях морфизма π , то ограничение морфизма ψ на это открытое множество является, очевидно, инъективным морфизмом, а также доминантным и сепарабельным. Поэтому мы можем применить теорему 4.6. В результате мы заключаем, что ψ^* отображает поле $K(Y)$ изоморфно на поле $K(X)$. Но проекция $\text{pr}_2: Y \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$

индуцирует на X морфизм $g: X \rightarrow \mathbf{A}^1$ (т. е. регулярную функцию). Поскольку $g \in K(X)$, существует рациональная функция $h \in K(Y)$, для которой $g = \psi^*h$. Заметим, наконец, что $\varphi^*g = \varphi^*\psi^*h = \pi^*h$ совпадает с f во всех точках G . Следовательно, $f = \pi^*h$, что и требовалось.

Теперь мы хотим показать, что рациональная функция $h \in K(Y)$, которую мы только что построили, является регулярной функцией на Y . Так как все точки в Y просты, то теорема 5.3Б показывает, что если функция h определена не везде, то $1/h$ принимает значение 0 в некоторой точке множества Y . Но тогда функция $\pi^*(1/h) = 1/f$ также должна принимать в некоторой точке значение 0, что невозможно (ибо $f \in K[G]$).

Отметим, что проведенное рассуждение проходит почти дословно, если мы заменим Y открытым подмножеством U (все точки которого снова просты!) и группу G — на $\pi^{-1}(U)$. Таким образом, мы в действительности показали, что каждая функция $f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))$, постоянная на смежных классах по подгруппе H является образом π^*h для некоторой функции $h \in \mathcal{O}_Y(U)$. Это завершает доказательство теоремы 12.1. $\square$

12.4. Дополнения. (1) Доказательство теоремы 12.1 содержит доказательства следующего утверждения:

Если G — алгебраическая группа, Y — многообразие, на котором группа G регулярно действует, $\pi: G \rightarrow Y$ — сюръективный сепарабельный G -эквивариантный морфизм, слоями которого являются смежные классы xH по некоторой замкнутой подгруппе H группы G , то многообразие Y определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Это можно применить, в частности, в случае $H = e$, чтобы завершить обсуждение группы $G = PGL(2, K)$ в (6.4). Напомним, что орбитное отображение $\varphi: G \rightarrow Y \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ является, как было показано, биективным и сепарабельным. Теперь мы можем сделать вывод, что φ — изоморфизм.

(2) Пусть H — замкнутая подгруппа группы G . Естественно поставить вопрос, когда многообразие G/H аффинно или проективно. Если группа H нормальна в G , то, как мы видели, многообразие G/H аффинно. С другой стороны, в главе VIII будут приведены важные примеры, когда это многообразие проективно (см. ниже

упражнение 3). Однако в общем случае о природе многообразия G/H известно очень мало (см. замечания).

12.5. Характеристика 0. Вопрос о сепарабельности не возникает, если $\text{char } K = 0$. Это обстоятельство весьма удобно при рассмотрении соответствия между алгебраическими группами и их алгебрами Ли, которое будет обсуждаться в следующей главе.

Теорема. Пусть $\text{char } K = 0$.

(а) Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то $\text{Ker } d\varphi = \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi)$.

(б) Если A, B — замкнутые подгруппы алгебраической группы G , то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathcal{L}(A \cap B)$.

Доказательство. (а) Мы можем предполагать, что морфизм φ сюръективен. Так как морфизм φ сепарабелен, то замечание (1) в (12.4) позволяет нам отождествить φ с каноническим морфизмом $G \rightarrow G/\text{Ker } \varphi$; тогда утверждение (а) следует из конструкции в (11.5).

(б) Пусть $\pi: G \rightarrow G/B$ — канонический морфизм. Тогда $\text{Ker } d\pi_e = \mathfrak{b}$. Рассмотрим ограничение $\pi': A \rightarrow \pi(A)$. Слои морфизма π' есть смежные классы $x(A \cap B)$ и морфизм π' автоматически сепарабелен (ибо $\text{char } K = 0$). Замечание (1) в (12.4) позволяет отождествить π' с каноническим морфизмом $A \rightarrow A/(A \cap B)$. Следовательно, $\text{Ker } d\pi'_e = \mathcal{L}(A \cap B)$. Но, очевидно, $\text{Ker } d\pi'_e = \mathfrak{a} \cap \text{Ker } d\pi_e = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. $\square$

Упражнения

1. Пусть G — алгебраическая группа, A, B — ее замкнутые подгруппы. Доказать, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathcal{L}(A \cap B)$ тогда и только тогда, когда ограничение на A канонического морфизма $\pi: G \rightarrow G/B$ — снова сепарабельный морфизм.

2. Пусть G — связная алгебраическая группа, H — замкнутая подгруппа. Тогда H действует на $K(G)$ естественным образом как группа автоморфизмов, и поле $K(G/H)$ изоморфно подполю $K(G)^H$ функций, неподвижных относительно H .

3. Доказать, что многообразие $GL(n, K)/T(n, K)$ изоморфно многообразию флагов $\mathfrak{F}(K^n)$ (1.8). Использовать этот факт для вычисления размерности многообразия флагов (ср. упражнение 3.2).

4. Пусть X, Y — многообразия, на которых транзитивно действует алгебраическая группа G , и пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — сюръективный G -эквивариантный морфизм. Доказать, что φ — открытое отображение.

Замечания. Относительно природы многообразия G/H см. Бялиньски-Бируля [1], Борель [3], стр. 45—49, Мацусима [1], Розенлихт [4], а также список литературы к 14-й проблеме Гильберта, приведенный ниже в замечаниях к § 14.

ТЕОРИЯ В СЛУЧАЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Эта глава посвящена краткому обсуждению случая, когда $\text{char } K = 0$. Ни один из доказываемых здесь результатов не будет существенно использоваться в дальнейшем изложении.

В § 13 от читателя требуется лишь небольшое знакомство с алгебрами Ли, однако в § 14 необходимо знать некоторые из основных теорем о полупростых алгебрах Ли. Здесь встретятся также некоторые понятия, которые предваряют их формальное появление несколько далее в тексте.

§ 13. Соответствие между группами и алгебрами Ли

13.1. Структурное соответствие. На некоторых примерах в предыдущих главах (см., например, упражнения 10.3, 10.4) мы убедились, что алгебраические группы и их алгебры Ли могут вести себя по-разному в случае простой характеристики основного поля. Еще с большей ясностью это выявится в главе VI. Причина этого заключается в несепарабельности некоторых расширений полей; это явление отсутствует в нулевой характеристике, и алгебра Ли весьма точно отражает то, что происходит в группе.

Из сепарабельности морфизмов следует, во-первых, что для любого морфизма алгебраических групп $\varphi: G \rightarrow G'$ имеет место равенство $\text{Ker}(d\varphi) = \mathcal{L}(\text{Ker } \varphi)$, а во-вторых, что алгебра Ли пересечения замкнутых подгрупп совпадает с пересечением их алгебр Ли (12.5). Эти факты являются ключевыми для доказательства всех результатов настоящего пункта.

Теорема. Пусть G — связная алгебраическая группа. Тогда соответствие $H \rightarrow \mathfrak{h}$ взаимно однозначно и сохраняет включение между замкнутыми связными подгруп-

нами H группы G и их алгебрами Ли, рассматриваемыми как подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Использовать теорему 12.5. $\square$

Подалгебра $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется **алгебраической**. Нелегко точно определить, какие подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$ являются алгебраическими (в терминах алгебр Ли), например, уже в случае, когда $G = GL(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. Об этом известно сравнительно немного*) (см. замечания ниже).

Эта теорема имеет и другой недостаток: она не описывает поведение нормальных подгрупп. В любой характеристике верно, что алгебра Ли замкнутой нормальной подгруппы группы G является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (следствие 10.4A). Мы вскоре докажем, что в характеристике 0 справедливо обратное, если мы ограничимся связными группами. (Почему это необходимо?)

13.2. Инварианты и инвариантные подпространства. Предположим, что H — замкнутая подгруппа некоторой полной линейной группы $GL(V)$. В любой характеристике имеет место тот факт, что алгебра Ли $\mathfrak{h}$ оставляет инвариантным каждое подпространство пространства V , инвариантное относительно H , и аннулирует векторы, неподвижные относительно H . Оба эти утверждения можно усилить следующим образом. Рассмотрим подпространство W пространства V , и пусть $G_W = \{x \in GL(V) \mid x(W) = W\}$, $\mathfrak{g}_W = \{x \in \mathfrak{g} \mid x(W) = W\}$. Аналогично при $v \in V$ положим $G_v = \{x \in GL(V) \mid x(v) = v\}$ и $\mathfrak{g}_v = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(v) = 0\}$. Группы G_W и G_v замкнуты в $GL(V)$ (8.2), а $\mathfrak{g}_W$, $\mathfrak{g}_v$ — подалгебры Ли алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Мы утверждаем, что (в любой характеристике) $\mathcal{L}(G_W) = \mathfrak{g}_W$ и $\mathcal{L}(G_v) = \mathfrak{g}_v$. Доказательства основаны на сравнении размерностей. Выберем базис $v_1, \dots, v_n$ пространства V такой, что $v_1, \dots, v_m$ порождают пространство W (соответственно такой, что $v_1 = v$). Тогда $\mathfrak{g}_W$ (соответственно $\mathfrak{g}_v$) можно отождествить с линейным многообразием размерности $n(n-m) + m^2$ (соответственно $n^2 - n$) в A^{n^2} , и G_W (соответственно G_v) — с аффинным открытым подмножеством этого линейного многообразия. (Строго говоря, в случае группы G_v сле-

*) В характеристике 0 существует критерий алгебраичности подалгебры, см. Шевалле [4, II, § 14]. — *Прим. ред.*

дует еще сделать сдвиг на единичную матрицу.) Так как $\mathcal{L}(G_w) \subset \mathfrak{g}_w$, $\mathcal{L}(G_v) \subset \mathfrak{g}_v$ (согласно упражнениям 10.1, 10.2), то должно иметь место равенство.

Теорема. Пусть H — замкнутая подгруппа полной линейной группы $GL(V)$. Если W — подпространство пространства V (соответственно $v \in V$), то определим замкнутые подгруппы G_w , G_v группы $GL(V)$, как и выше, и пусть $H_w = H \cap G_w$, $H_v = H \cap G_v$. Тогда $\mathcal{L}(H_w) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_w$, $\mathcal{L}(H_v) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_v$.

Доказательство. Применить предыдущие замечания вместе с теоремой 12.5. $\square$

Заметим, что если $\varphi: H \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление, то ввиду $d\varphi(\mathfrak{h}) = \mathcal{L}(\varphi(H))$, мы можем применить эту теорему в следующей форме: H и $\mathfrak{h}$ оставляют инвариантными одни и те же подпространства пространства V (соответственно имеют одни и те же инварианты в V).

Мы использовали инварианты в (10.7), чтобы показать, что алгебра Ли группы автоморфизмов конечномерной K -алгебры состоит из дифференцирований этой алгебры. В характеристике 0 это утверждение можно усилить.

Следствие. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная K -алгебра, $H = \text{Aut } \mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{h} = \text{Der } \mathfrak{A}$ — алгебра всех дифференцирований.

Доказательство. Доказательство следствия 10.7 показывает, что $x \in GL(\mathfrak{A})$ — автоморфизм тогда и только тогда, когда x оставляет неподвижным некоторый тензор $t \in \mathfrak{A}^* \otimes \mathfrak{A}^* \otimes \mathfrak{A}$, а элемент $x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$ является дифференцированием тогда и только тогда, когда он аннулирует t . Теперь применяем предыдущую теорему (и следующие за ней комментарии). $\square$

Например, если $\mathfrak{A}$ — алгебра Кэли (некоторая 8-мерная неассоциативная алгебра над K), то $\text{Aut } \mathfrak{A}$ имеет $\text{Der } \mathfrak{A}$ в качестве своей алгебры Ли. Последняя, как известно, есть простая алгебра Ли типа G_2 , откуда следует, что группа $\text{Aut } \mathfrak{A}$ «почти проста»; дальнейшие применения см. в § 14.

13.3. Нормальные подгруппы и идеалы.

Теорема. Пусть G — связная алгебраическая группа, H — замкнутая связная подгруппа. Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда группа H нормальна в G .

Доказательство. Часть «тогда» уже известна. Предположим, что $\mathfrak{h}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и рассмотрим группу $N = \{x \in G \mid \text{Ad } x \mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$. В соответствии с теоремой 13.2 (и следующими за ней замечаниями) мы имеем $\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g} \mid d(\text{Ad } x)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad } x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{g}$ (так как ad есть дифференциал морфизма Ad (10.4)). Поскольку группа G связна, $N = G$. Если теперь $x \in G$, то $\mathcal{L}(\text{Int } x(H)) = \text{Ad } x(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Две связные группы H и xHx^{-1} имеют одну и ту же алгебру Ли, следовательно, они совпадают (теорема 13.1). $\square$

Подобным образом доказывается, что алгебра Ли группы $N_G(H)$ совпадает с нормализатором алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ (упражнение 1).

13.4. Центры и централизаторы.

Теорема. Пусть G — связная алгебраическая группа.

- (а) Если $x \in G$, то $\mathcal{L}(C_G(x)) = \mathfrak{c}_g(x) (= \{x \in \mathfrak{g} \mid [\text{Ad } x(x) = x]\})$.
 (б) $\text{Ker Ad} = Z(G)$ и алгебра Ли группы $Z(G)$ совпадает с $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Доказательство. (а) Предложение 10.6 показывает, что это утверждение справедливо для группы $G = GL(n, K)$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. В общем случае вложим группу G в некоторую полную линейную группу $GL(n, K)$ в качестве замкнутой подгруппы (теорема 8.6). Тогда $C_G(x) = G \cap C_{GL(n, K)}(x)$, в то время как $\mathfrak{c}_g(x) = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{c}_{\mathfrak{gl}(n, K)}(x)$. Таким образом, применима теорема 12.5.

(б) Из сепарабельности морфизмов вытекает, что группа $N = \text{Ker Ad}$ имеет в качестве своей алгебры Ли $\text{Ker } d(\text{Ad}) = \text{Ker ad}$ (10.4), что, по определению, совпадает с $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Остается показать, что $N = Z(G)$. Мы уже знаем, что $\text{Ad } x = 1$ при $x \in Z(G)$ (так как $\text{Ad } x$ есть дифференциал морфизма $\text{Int } x$). Обратно, если $\text{Ad } x = 1$, то $\mathfrak{c}_g(x) = \mathfrak{g}$; но ввиду (а) это совпадает с $\mathcal{L}(C_G(x))$, откуда $C_G(x) = G$, или $x \in Z(G)$. $\square$

13.5. Полупростые группы и алгебры Ли. Теорема 13.4(б) показывает, что связная алгебраическая группа коммутативна тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли коммутативна, т. е. $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. По определению алгебра Ли положительной размерности **полупроста**, если она не содержит ненулевых коммутативных идеалов. Это дает нам основание назвать связную алгеб-

раическую группу **полупростой**, если она не содержит замкнутых связных коммутативных нормальных подгрупп, отличных от единичной подгруппы. Другое, эквивалентное определение будет дано в (19.5). Теперь мы можем доказать следующий результат.

Теорема. *Связная алгебраическая группа G полупроста тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста.*

Доказательство. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Если N — замкнутая связная коммутативная нормальная подгруппа группы G , то $\mathfrak{n}$ — коммутативный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (используйте теорему 13.3 и предыдущие замечания). Таким образом, $\mathfrak{n} = 0$, откуда $N = e$.

Обратно, пусть G — полупростая группа, и пусть $\mathfrak{n}$ — коммутативный идеал ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим $N = C_G(\mathfrak{n})^0$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$ (это следует из теоремы 13.2, см. упражнение 2). Так как $\mathfrak{n}$ — идеал, то тождество Якоби показывает, что $\mathfrak{h}$ — также идеал (содержащий $\mathfrak{n}$ как часть своего центра, ибо алгебра Ли $\mathfrak{n}$ коммутативна). Согласно теореме 13.3 группа N нормальна в G , откуда вытекает, что группа $Z = Z(N)^0$ нормальна в G . По теореме 13.4(б) $\mathfrak{z}$ есть центр алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и, следовательно, содержит $\mathfrak{n}$. Поскольку группа G полупроста, $Z = e$, $\mathfrak{z} = 0$. Это дает $\mathfrak{n} = 0$. $\square$

О полупростых алгебрах Ли известно очень много, так что эта теорема, как мы увидим в следующем параграфе, имеет особое значение.

Упражнения

1. Пусть G — связная алгебраическая группа, H — замкнутая связная подгруппа. Доказать, что $\mathcal{P}(N_G(H)) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ (см. следствие 10.4Б) и что $\mathcal{P}(C_G(H)) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ (см. упражнение 10.5).

2. Пусть G — связная алгебраическая группа, и $\mathfrak{n}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что $\mathcal{P}(C_G(\mathfrak{n})) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}) (= \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in \mathfrak{n}\})$.

3. Доказать, что группа $SL(2, K)$ полупроста.

Замечания. Соответствие между линейными алгебраическими группами и алгебрами Ли впервые глубоко изучено Шевалле [4], [5] при помощи формальных экспоненциальных степенных рядов; другой подход предложил Хохшильд [8]. Дальнейшие результаты можно найти у Бореля [4, II, § 7] и Демазюра и Габриэля [1, II, § 6]. Некоторые вопросы об алгебраических алгебрах Ли обсуждаются Хохшильдом [2], [7], Хамфри [1], [2], [3], Селигманом [1], [2], [3].

§ 14. Полупростые группы

Как и в § 13, мы предполагаем, что $\text{char } K = 0$. Мы также предполагаем, что читатель знаком с теорией полупростых алгебр Ли.

14.1. Присоединенное представление. В общем случае $\text{Ker Ad} = Z(G)$ и алгебра Ли группы $Z(G)$ есть $\text{Ker ad} = \mathfrak{z}(g)$ (13.4). Если группа G полупроста, то алгебра Ли g также полупроста (13.5), так что $\mathfrak{z}(g) = 0$ и группа $Z(G)$ конечна. В этом случае более интересны образы отображений Ad и ad .

Теорема. Пусть группа G полупроста. Тогда $\text{Ad } G = (\text{Aut } g)^0$ и $\text{ad } g = \text{Der } g$.

Доказательство. Известно, что все дифференцирования полупростых алгебр Ли являются «внутренними» (т. е. имеют вид $\text{ad } x$), так как форма Киллинга не вырождена. Таким образом, $\text{ad } g = \text{Der } g$. В свою очередь, согласно следствию 13.2, $\text{Der } g$ есть алгебра Ли группы $\text{Aut } g$. Так как $\text{Ker Ad} = Z(G)$ — конечная группа и $\text{Ker ad} = 0$, то размерности групп G , $\text{Ad } G$, $\text{Aut } g$ и алгебр Ли g , $\text{Der } g$ все совпадают. В частности, из $\text{Ad } G \subset (\text{Aut } g)^0$ следует, что имеет место равенство. $\square$

Эта теорема — начало долгого пути к классификации полупростых алгебраических групп (в характеристике 0). Из нее уже следует, что если G , G' — полупростые группы, алгебры Ли которых изоморфны, то группа $G/Z(G)$ изоморфна $G'/Z(G')$. (Таким образом, группы G и G' «локально изоморфны», если воспользоваться терминологией теории групп Ли.) Благодаря классическим работам Киллинга и Картана классификация полупростых алгебр Ли полностью известна: алгебра Ли определяется (с точностью до изоморфизма) своей «системой корней» (см. Добавление), которая представляет собой объединение (непересекающихся) неприводимых систем корней, принадлежащих однозначно определенным простым идеалам, в прямую сумму которых распадается исходная алгебра Ли. Неприводимые системы корней состоят из четырех бесконечных семейств A_i , B_i , C_i , D_i и пяти исключительных типов E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 .

Для полноты картины мы должны, конечно, описать группу $Z(G)$. Оказывается, что группа $Z(G)$ должна быть изоморфна подгруппе «фундаментальной группы»

системы корней (см. Добавление), являющейся, по определению, фактором решетки весов по подрешетке корней. Например, в случае группы типа A_1 эта группа имеет порядок 2; таким образом, $SL(2, K)$ и $PGL(2, K)$ — единственные полупростые группы типа A_1 .

Замечательно, что классификация полупростых групп в простой характеристике (глава XI) приводит, по существу, к тем же самым результатам. Алгебра Ли не играет более столь важной роли, но система корней неожиданно появляется как основной инвариант группы. Все это, однако, требует значительной подготовительной работы. Эта подготовительная работа дает гораздо более детальную информацию о группе, чем можно получить из алгебры Ли даже в характеристике 0, так что дополнительные усилия оправданы даже для читателя, который интересуется только случаем нулевой характеристики.

14.2. Подгруппы полупростых групп. Пусть снова G — полупростая группа. Интересно выяснить, что дает нам знание строения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для получения сведений о замкнутых подгруппах группы G . Как упоминалось в (13.1), в общем случае трудно решить вопрос*), является ли данная подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ алгеброй Ли какой-либо подгруппы H группы G . Однако до некоторой степени можно использовать хорошее соответствие между нормализаторами (или централизаторами).

Рассмотрим, например, каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых идеалов $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_t$, о котором мы упоминали в (14.1). (Ненулевая алгебра Ли называется **простой**, если она некоммутативна и не имеет собственных ненулевых идеалов.) Здесь $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_t) = \mathfrak{g}_1$ и это — алгебра Ли группы $G_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_t)$ (см. упражнение 13.2). Пусть G_1 компонента единицы этой последней группы. Тогда G_1 нормальна в G (13.3). Если G_1 имеет собственную замкнутую связную нормальную подгруппу H , то ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ будет собственным идеалом в $\mathfrak{g}_1$, вопреки простоте. Таким образом, G_1 почти проста, т. е. некоммутативна и не имеет собственных замкнутых связных нормальных подгрупп. Построим подобным же способом группы $G_2, \dots, G_t$. Так как $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ при $i \neq j$, то группа G_i

*) См. примечание на стр. 148. — *Прим. перев.*

централизует G_j . Кроме того, $G = G_1 \dots G_t$ (так как правая часть есть замкнутая подгруппа, алгебра Ли которой содержит $\mathfrak{g}$) и каждая группа G_i пересекается с произведением остальных подгрупп по центральной (и, следовательно, конечной) подгруппе. Таким образом, группа G разлагается в «почти прямое» произведение.

С другой стороны, читатель, знакомый с картановскими и борелевскими подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, каждая из которых совпадает со своим нормализатором, без труда построит соответствующие подгруппы в группе G . Такие подгруппы будут введены позднее в случае произвольной характеристики основного поля как (соответственно) «максимальные торы» и «борелевские подгруппы». Будет показано с использованием алгебро-геометрических методов, что все подгруппы каждого из типов сопряжены в G . Следовательно, в случае характеристики 0 картановские (соответственно борелевские) подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$ все сопряжены при помощи элементов группы $\text{Ad } G$. Этот последний результат, разумеется, хорошо известен (хотя доказывается отнюдь не просто!), если $\text{Ad } G$ определить непосредственно как подгруппу группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$, порожденную «внутренними» автоморфизмами вида $\exp \text{ad } \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ пробегает элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которых эндоморфизм $\text{ad } \mathfrak{n}$ нильпотентен.

14.3. Полная приводимость представлений. Фундаментальная теорема Вейля утверждает, что каждое (конечномерное) представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ полупростой алгебры Ли **вполне приводимо**. Это означает, что каждое подпространство пространства V , инвариантное относительно $\rho(\mathfrak{g})$, обладает дополнением с тем же свойством. Таким образом, пространство V можно записать в виде прямой суммы подпространств, инвариантных относительно $\rho(\mathfrak{g})$. Ввиду теоремы 13.2 рациональное представление полупростой алгебраической группы также вполне приводимо. Этот факт имеет важное приложение к **четырнадцатой проблеме Гильберта**, которое мы бегло изложим.

Группа $GL(n, K)$ действует естественным образом на K^n и, следовательно, на симметрической алгебре этого векторного пространства, которую можно отождествить с алгеброй полиномов $R = K[T_1, \dots, T_n]$. Это — «рацио-

нальное» действие в том смысле, что R — объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно $GL(n, K)$, на каждом из которых группа $GL(n, K)$ действует рационально. Чтобы убедиться в этом, заметим, что R обладает естественной градуировкой (по степеням), которая согласуется с действием группы. Если G — произвольная подгруппа группы $GL(n, K)$, то через R^G обозначим множество неподвижных элементов в R относительно G . Очевидно, R^G есть K -алгебра. Проблема Гильберта заключается в следующем: *является ли алгебра R^G конечно порожденной* (как K -алгебра)? Ответ, как мы увидим, утвердителен во многих интересных случаях; но в 1958 г. Нагата построил пример, в котором ответ оказался отрицательным (для произвольной характеристики поля K). Так как группа G и ее замыкание в топологии Зарисского имеют одно и то же множество неподвижных точек R^G , то мы можем предполагать, что группа G замкнута в $GL(n, K)$.

Теорема. *Пусть G — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$, действующая естественным образом на кольце $R = K[T_1, \dots, T_n]$. Предположим, что все рациональные представления группы G вполне приводимы. Тогда R^G — конечно порожденная K -алгебра.*

Доказательство. Заметим сначала, что если группа G оставляет некоторый полином неподвижным, то она оставляет неподвижными также однородные части этого полинома, так что кольцо R^G наследует градуировку кольца R . Полная приводимость представлений группы G на отдельных градуирующих подпространствах кольца R позволяет нам записать $R = R^G \oplus S$, где S — сумма всех подпространств, на которых G действует неприводимо, но нетривиально. Очевидно, $R^G \cap R^G S = 0$. Так как пространство $R^G S$ инвариантно относительно G , то ввиду полной приводимости $R^G S \subset S$.

Мы покажем теперь, что кольцо R^G нётерово. Если I — идеал кольца R^G , то $IR = IR^G \oplus IS \subset R^G \oplus S$ (так как кольцо R^G оставляет инвариантным R^G и S), откуда $IR \cap R^G = I$. Таким образом, расширение и затем ограничение идеала кольца R^G возвращает нас снова к исходному идеалу. Отсюда следует, что кольцо R^G удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей идеалов, поскольку кольцо R обладает этим свойством.

В частности, однородный идеал кольца R^G , состоящий из полиномов положительной степени, имеет конечное множество образующих, которые мы можем считать однородными. Обозначим их через $f_1, \dots, f_t$. Мы утверждаем, что каждый однородный полином $f \in R^G$ положительной степени является полиномом от элементов f_i , откуда будет следовать, что $R^G = K[f_1, \dots, f_t]$. Запишем $f = \sum a_i f_i$, где $a_i \in R^G$ — однородный полином степени $\deg f - \deg f_i \geq 0$ (либо $a_i = 0$, если $\deg f < \deg f_i$). Тогда либо $a_i \in K$, либо $0 < \deg a_i < \deg f$, и в этом случае можно воспользоваться индукцией. $\square$

Одна из причин интереса к вопросу о конечной порожденности колец инвариантов заключается в следующем. Если алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X , то множество Y ее орбит в X часто можно наделить структурой многообразия таким образом, чтобы канонический морфизм $X \rightarrow Y$ имел хорошие универсальные свойства. Например, X может быть алгебраической группой, содержащей G , а действие группы G на X — действием при помощи левых или правых сдвигов; тогда Y есть множество правых или левых смежных классов (см. главу IV). Коль скоро такой «фактор» построен, естественно спросить, будет ли его многообразие *аффинным* или нет. Если оно аффинно, то единственным кандидатом быть его аффинной алгеброй является кольцо инвариантов $K[X]^G$ (кольцо полиномиальных функций на X , принимающих постоянные значения на каждой G -орбите). Таким образом, мы приходим к вопросу, является ли это кольцо конечно порожденным. Обратное, если группа G действует на X и если известна конечная порожденность кольца $K[X]^G$, то можно попытаться наделить множество G -орбит соответствующей структурой аффинного многообразия так, чтобы орбитное отображение обладало нужным универсальным свойством. Для этого приходится накладывать дополнительные условия, например, что все орбиты замкнуты в X .

В теореме, доказанной выше, рассматривается случай, когда многообразие X имеет в качестве своего кольца полиномиальных функций кольцо $K[T_1, \dots, T_n]$. Но общий случай можно свести к этому (упражнение 2), так как $K[X]$ — гомоморфный образ такого кольца.

В итоге мы получаем конечную порожденность кольца $K[X]^G$ при условии, что все рациональные представления группы G вполне приводимы.

Упражнения

1. Пусть G — алгебраическая группа, R — конечно порожденная коммутативная K -алгебра, на которой группа G действует как группа автоморфизмов. Мы говорим, что группа G действует «рационально» на R , если каждый элемент кольца R лежит в конечномерном G -инвариантном подпространстве, на котором индуцируется рациональное действие группы G . Пусть группа G действует рационально на двух таких алгебрах R, R' , и пусть $\varphi: R \rightarrow R'$ — некоторый G -эквивариантный эпиморфизм. В предположении, что все рациональные представления группы G вполне приводимы, доказать, что φ отображает R^G на R'^G .

2. Пусть алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X . В предположении, что все рациональные представления группы G вполне приводимы, доказать, что $K[X]^G$ — конечно порожденная K -алгебра. (Использовать упражнение 1, чтобы свести дело к теореме 14.3.)

Замечания. По поводу теории полупростых алгебр Ли можно обратиться к Джекобсону [1], Серру [2], Хамфри [6]. Литература по теории инвариантов и 14-й проблеме Гильберта весьма обширна, см.: Дьедонне и Керрол [1], Фогарти [1], Гроссханс [4], Хохшильд и Мостов [4], Мамфорд [1], Нагата [1], [2], [3], Сешадри [1], [2], [3], Такеучи [1].

ПОЛУПРОСТЫЕ И УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 15. Разложение Жордана — Шевалле

Жорданова нормальная форма (сумма диагонального и нильпотентного элементов) для одного линейного преобразования имеет в $GL(n, K)$ мультипликативный аналог (произведение диагонального и унипотентного элементов). Основным результатом этого параграфа (теорема 15.3) утверждает, что замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$ содержит эти компоненты для каждого своего элемента. Отсюда мы выведем затем некоторые следствия о строении коммутативных алгебраических групп (15.5).

15.1. Разложение эндоморфизма. Пусть $x \in \text{End } V$, где V — конечномерное векторное пространство над полем K . Элемент x называется **нильпотентным**, если $x^n = 0$ для некоторого натурального числа n (или, что равносильно, если 0 — единственное собственное значение эндоморфизма x). Элемент x называется **полупростым**, если минимальный полином элемента x имеет различные корни (что имеет место тогда и только тогда, когда элемент x диагонализирован над K). Очевидно, 0 — единственный эндоморфизм, одновременно нильпотентный и полупростой. Хорошо известно следующее (аддитивное) разложение Жордана.

Лемма А. Пусть $x \in \text{End } V$. Тогда:

(а) Существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \text{End } V$, удовлетворяющие следующим условиям: $x = x_s + x_n$, элемент x_s полупрост, элемент x_n нильпотентен и $x_s x_n = x_n x_s$.

(б) Существуют полиномы $p(T), q(T)$ от одной переменной без постоянного члена такие, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. В частности, x_s и x_n перестановочны с любым эндоморфизмом пространства V , который перестановочен с x .

(в) Если $A \subset B \subset V$ — подпространства и x отображает B в A , то каждый из элементов x_s, x_u отображает B в A .

(г) Если $xy = yx$ ($y \in \text{End } V$), то $(x + y)_s = x_s + y_s$ и $(x + y)_u = x_u + y_u$. $\square$

Если $x \in GL(V)$, то все его собственные значения отличны от 0; следовательно, $x_s \in GL(V)$. Поэтому мы можем записать $x_u = 1 + x_s^{-1}v_n$, получая, таким образом, (мультипликативное) разложение Жордана $x = x_s x_u$. Заметим, что элемент $x_s^{-1}x_n$ нильпотентен (так как x_n нильпотентен и x_s^{-1} коммутирует с x_n). Мы называем обратимый эндоморфизм **унипотентным**, если он представим в виде суммы тождественного и нильпотентного эндоморфизмов, или, что равносильно, если все его собственные значения равны 1. Мы только что показали, как записать x в виде произведения перестановочных полупростого и унипотентного эндоморфизмов. Если $x = su$ — произвольное такое разложение, то $x = s(1 + n)$, где эндоморфизм n нильпотентен и $ns = sn$ или $x = s + sn$ (где эндоморфизм s полупрост, sn нильпотентен и s перестановочен с sn). Ввиду утверждения (а) леммы А мы имеем $s = x_s$ и $sn = x_n$, откуда следует, что $u = 1 + n = x_u$. Тем самым (с учетом леммы А) доказана

Лемма Б. Пусть $x \in GL(V)$. Тогда:

(а) Существуют единственные элементы $x_s, x_u \in GL(V)$, удовлетворяющие следующим условиям: $x = x_s x_u$, элемент x_s полупрост, элемент x_u унипотентен и $x_s x_u = x_u x_s$.

(б) Элементы x_s, x_u перестановочны с любым эндоморфизмом пространства V , который перестановочен с x .

(в) Если A — подпространство пространства V , инвариантное относительно x , то A инвариантно относительно x_s и x_u .

(г) Если $xy = yx$ ($y \in GL(V)$), то $(xy)_s = x_s y_s$, $(xy)_u = x_u y_u$. $\square$

Мы называем x_s полупростой частью и x_u — унипотентной частью элемента x . Отметим, что если эндоморфизм x одновременно полупрост и унипотентен, то $x = 1$.

Иногда полезно предполагать пространство V *бесконечномерным*, хотя понятия «полупростой» и «унипотентный» непосредственно не переносятся на бесконечномер-

ный случай. Если $x \in GL(V)$, и если пространство V — объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно x , то разложения $x|W = (x|W)_s (x|W)_u$ существуют для всех таких подпространств W . Более того, ограничение полупростого (соответственно унитарного) эндоморфизма на пересечение $W \cap W'$ будет эндоморфизмом того же типа; ясно поэтому, что мы можем склеить различные эндоморфизмы $(x|W)_s$ и $(x|W)_u$, чтобы получить обратимые эндоморфизмы пространства V , произведением которых является эндоморфизм x . Их можно снова обозначить через x_s , x_u и назвать жордановыми компонентами эндоморфизма x . Следует отметить, что ввиду утверждения (в) леммы Б элементы x_s и x_u оставляют инвариантным каждое подпространство пространства V , конечномерное или нет, которое инвариантно относительно x . Подобные замечания относятся, конечно, и к аддитивному разложению Жордана.

Поведение полупростых эндоморфизмов более или менее одинаково как в нулевой, так и в простой характеристиках. Однако это отнюдь не так для унитарных эндоморфизмов. Если $0 < p = \text{char } K$, то элемент $x \in GL(V)$ унитарен тогда и только тогда, когда $x^{p^t} = 1$ для некоторого $t \geq 0$. В самом деле, пусть $x = 1 + n$, где n — нильпотентный элемент; тогда $n^{p^t} = 0$ для достаточно большого номера t , откуда следует, что $x^{p^t} = (1 + n)^{p^t} = 1 + n^{p^t} = 1$. (Это рассуждение обратимо.) Совершенно иная картина получается, если $\text{char } K = 0$, поскольку отличный от 1 унитарный элемент группы $GL(V)$ должен быть бесконечного порядка (упражнение 5). В этом случае природу унитарных элементов можно лучше уяснить, если ввести экспоненциальные и логарифмические степенные ряды. Если элемент $n \in \text{End } V$ нильпотентен, то ряд $\exp n = \sum_{i=0}^{\infty} n^i/i!$ является

полиномом и, следовательно, определяет некоторый элемент группы $GL(V)$, который оказывается унитарным (как сумма 1 и нильпотентного эндоморфизма). Если элемент $x \in GL(V)$ унитарен, то $x - 1$ — нильпотентный элемент, и ряд $\log x = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} (x - 1)^i/i$ оказы-

вается полиномом, который определяет нильпотентный эндоморфизм пространства V . Ввиду обычных формальных тождеств для этих рядов мы имеем $\exp(\log x) = x$ и $\log(\exp n) = n$.

Лемма В. Пусть $\text{char } K = 0$. Если $x \in GL(V)$ — унитарный элемент, $x \neq 1$, то отображение $\varphi(a) = \exp(an)$ ($n = \log x$) определяет изоморфизм группы G_a на замкнутую подгруппу группы $GL(V)$, которая является единственной наименьшей замкнутой подгруппой группы $GL(V)$, содержащей x . В частности, каждая связная замкнутая одномерная подгруппа группы $GL(V)$, которая содержит отличный от 1 унитарный элемент, изоморфна группе G_a .

Доказательство. Соотношение $\varphi(a) = \exp(an)$ определяет морфизм многообразий $G_a \rightarrow GL(V)$, который одновременно является гомоморфизмом групп ввиду формального тождества $\exp((T + T')n) = (\exp Tn) \times (\exp T'n)$. (Это имеет место для кольца формальных степенных рядов от двух переменных T, T' над коммутативным подкольцом $K[n]$ кольца $\text{End}(V)$.) Кроме того, $\varphi(1) = x$. Чтобы убедиться в том, что отображение φ — изоморфизм, мы заметим, что $an = \log \exp(an) = \log \varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} (\varphi(a) - 1)^i / i$ — полином от $\varphi(a)$.

Наконец, так как x — элемент бесконечного порядка, то размерность замыкания подгруппы, которую он порождает, не менее чем 1, и, следовательно, эта замкнутая подгруппа должна совпадать с замкнутой подгруппой $\varphi(G_a)$, ибо размерность последней равна 1. $\square$

15.2. $GL(n, K)$ и $\mathfrak{gl}(n, K)$. Если G — произвольная подгруппа группы $GL(n, K)$, то нет никакой причины ожидать, что она содержит полупростую и унитарную части каждого своего элемента. Однако если группа G замкнута, то это так. (Оказывается, что и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит полупростую и нильпотентную части в $\mathfrak{gl}(n, K)$ каждого из своих элементов.) Причина этого станет ясной, если мы напомним критерий принадлежности элемента группе G (соответственно алгебре $\mathfrak{g}$) (лемма 8.5 (соответственно лемма 9.4)). Например, задав элемент $x \in G$, мы хотим узнать, оставляет ли элемент ρ_x инвариантным идеал $I \subset K[GL(n, K)]$, состоящий из функ-

ций, равных 0 на группе G . Учитывая рассуждение в (15.1), нам достаточно выяснить, является ли ρ_{x_s} «полупростой частью» элемента ρ_x . Поэтому мы сначала рассмотрим этот вопрос (который относится уже не к группе G).

Предложение. Пусть $G = GL(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. Если $x \in G$ (соответственно $x \in \mathfrak{g}$), то $\rho_{x_s} \rho_{x_u}$ (соответственно $*x_s + *x_u$) есть жорданово разложение элемента ρ_x (соответственно $*x$).

Доказательство. Так как $K[G]$ — объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно всех операторов ρ_x (и, следовательно, относительно всех $*x$, см. предложение 10.2), то разложения Жордана существуют. Более того, $\rho_x = \rho_{x_s} \rho_{x_u}$ (соответственно $*x = *x_s + *x_u$) и эти операторы перестановочны; таким образом, нам достаточно показать, что элементы ρ_{x_s} и $*x_s$ полупросты, что элемент ρ_{x_u} унитарен и что элемент $*x_u$ нильпотентен.

Кольцо $K[G]$ есть кольцо частных кольца полиномов $K[T]$ от n^2 переменных T_{ij} , которое получится, если допустить появление в знаменателях степеней полинома $d = \det(T_{ij})$. Из леммы 10.3А следует, что кольцо $K[T]$ инвариантно относительно правых сдвигов и правых конволюций. Кроме того, легко описать, как группа G и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действуют на d . Прежде всего, мы имеем $(\rho_x d)(y) = \det(yx) = \det y \cdot \det x$, так что $\rho_x d = \det x \cdot d$. Это показывает, что пространство, натянутое на d , инвариантно относительно группы G , и, следовательно (предложение 10.2), инвариантно относительно $\mathfrak{g}$, причем $d * x = \text{Tr}(x) d$ ввиду того факта (5.4), что дифференциал морфизма $\det$ есть след. Отсюда видно, как описать действие оператора ρ_x или $*x$ на $K[G]$, коль скоро его действие на $K[T]$ известно.

В частности, если элемент $\rho_x|K[T]$ полупрост, то элемент ρ_x полупрост (ибо d — собственный вектор оператора ρ_x в любом случае). Если оператор $\rho_x|K[T]$ унитарен, то его собственное значение $\det x$ на пространстве, натянутом на d , должно быть равно 1; таким образом, элемент ρ_x унитарен. Аналогично, если оператор $*x|K[T]$ полупрост (соответственно нильпотентен), то и

оператор $*x$ полупрост (соответственно нильпотентен). (Напомним, что $*x$ действует на $f(T)/d^t$ по правилу дифференцирования дробей.) Следовательно, достаточно рассмотреть действия операторов $\rho_x, *x$ на пространстве $K[T]$ вместо $K[G]$.

Пусть $E = \text{End } V$, где $V = K^n$; рассмотрим G как подмножество $GL(V)$ пространства E , так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) = E$. Алгебру $K[T]$ можно отождествить с симметрической алгеброй $\mathfrak{S}(E^*)$ на двойственном пространстве пространства E . При $x \in E$ определим эндоморфизм $r_x: E \rightarrow E$ соотношением $r_x(y) = yx$, и пусть $r_x^*: E^* \rightarrow E^*$ — дуальный эндоморфизм. Тогда мы видим, что ρ_x (соответственно $*x$) есть в точности каноническое расширение r_x^* (соответственно r_x^*) до автоморфизма (соответственно дифференцирования) алгебры $\mathfrak{S}(E^*)$, см. лемму 10.3А. Таким образом, достаточно убедиться, что свойство быть полупростым или унитарным (соответственно полупростым или нильпотентным) элементом сохраняется на каждом шаге, когда мы переходим от x к r_x , затем к r_x^* и, далее, к ρ_x (соответственно от x к r_x , затем к r_x^* и потом к $*x$). Переход от r_x к r_x^* не составляет проблемы. Чтобы перейти от действия на E^* к действию на $\mathfrak{S}(E^*)$, мы сначала рассмотрим действие на тензорных степенях пространства E^* (см. упражнение 1), а затем профакторизуем тензорную алгебру по соответствующему идеалу, инвариантному относительно данного действия, чтобы получить $\mathfrak{S}(E^*)$; таким образом, этот переход также не составляет труда. Остается рассмотреть переход от x к r_x ($x \in E$).

Разберем отдельно полупростой, нильпотентный и унитарный случаи. Если элемент $x \in E$ полупрост, то выберем базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства V из собственных векторов эндоморфизма x , так что $x \cdot v_i = a_i v_i$ для подходящих элементов $a_i \in K$. Выберем затем соответствующий базис e_{ij} в E , для которого $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$; тогда $r_x e_{ij} = a_j e_{ij}$. Это показывает, что элемент r_x полупрост. Если элемент $x \in E$ нильпотентен, скажем, $x^t = 0$, то $(r_x)^t(y) = yx^t = 0$ для всех $y \in E$ и, таким образом, элемент r_x нильпотентен. Если $x = 1 + n$ — унитарный элемент, скажем, $n^t = 0$, то $r_x = 1 + r_n$, так что $(r_x - 1)^t = 0$ и элемент r_x унитарен. (Эти случаи

можно разобрать другим способом: заметим, что если канонически отождествить E с $V^* \otimes V$, то r_x будет соответствовать эндоморфизму $x^* \otimes 1$.) $\square$

15.3. Разложение Жордана в алгебраических группах.

Для того чтобы изложить общий случай, рассмотрим более детально правые сдвиги и конволюции для произвольных алгебраических групп. Прежде всего, они являются *точными* представлениями группы G и алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Кроме того, сдвиги и конволюции хорошо ведут себя при переходе от G к ее замкнутой подгруппе H . В самом деле, при $x \in H$ следующая диаграмма будет коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \xrightarrow{\rho_x} & K[G] \\ \downarrow & & \downarrow \\ K[H] & \xrightarrow{\rho_x} & K[H] \end{array}$$

(здесь ρ_x вверху — правый сдвиг на x , рассматриваемый как элемент группы G , а вертикальные отображения являются каноническими). Подобную диаграмму мы имеем и для правых конволюций. Аналогично, если $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм алгебраических групп, то φ^* отождествляет $K[G']$ с подкольцом кольца $K[G]$. Если $x \in G$, то, очевидно, оператор $\rho_{\varphi(x)}$ можно рассматривать как ограничение оператора ρ_x на это подкольцо (и $*d\varphi(x)$ — как ограничение оператора $*x$).

Теорема. Пусть G — алгебраическая группа.

(а) При $x \in G$ существуют единственные элементы $s, u \in G$ такие, что $x = su$, $su = us$, причем элемент ρ_s полупрост, а элемент ρ_u унитарен. (Мы называем s полупростой частью элемента x и обозначаем через x_s , а u — унитарной частью x и обозначаем через x_u .)

(б) При $x \in \mathfrak{g}$ существуют единственные элементы $s, n \in \mathfrak{g}$ такие, что $x = s + n$, $[s, n] = 0$, причем элемент $*s$ полупрост, а элемент $*n$ нильпотентен. (Мы называем их полупростой частью x и нильпотентной частью элемента x и обозначаем через x_s, x_n соответственно.)

(в) Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп, то $\varphi(x)_s = \varphi(x_s)$, $\varphi(x)_u = \varphi(x_u)$, $d\varphi(x)_s = d\varphi(x_s)$ и $d\varphi(x)_n = d\varphi(x_n)$ для всех элементов $x \in G$, $x \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Мы можем вложить G в $GL(n, K)$ в качестве замкнутой подгруппы (теорема 8.6). Если

I — идеал кольца $K[GL(n, K)]$, определяющий G , то критерий для того, чтобы элемент $x \in GL(n, K)$ (соответственно $x \in gl(n, K)$) лежал в G (соответственно в g) состоит в том, что ρ_x (соответственно $*x$) оставляет идеал I инвариантным (леммы 8.5, 9.4). Пусть теперь $x \in G$, и пусть $x = su$ — его разложение Жордана в $GL(n, K)$. Согласно предложению 15.2 мы имеем $(\rho_x)_s = \rho_s$ и $(\rho_x)_u = \rho_u$. Замечания в (15.1) показывают тогда, что оба эти оператора оставляют инвариантным идеал I , так что $s, u \in G$. С учетом предыдущих замечаний это ведет к желаемому разложению элемента x в группе G (единственность есть следствие точности представления ρ). Параллельное рассуждение проходит для $x \in g$. Таким образом, утверждения (а) и (б) доказаны.

Рассмотрим теперь морфизм $\varphi: G \rightarrow G'$; он представим в виде произведения двух морфизмов: эпиморфизма $G \rightarrow \varphi(G)$ и последующего включения $\varphi(G) \rightarrow G'$. Достаточно разобрать каждый из этих случаев в отдельности. В случае, если φ — эпиморфизм, правые сдвиги на $\varphi(x)$, как мы видели выше, — это, в сущности, ограничения оператора ρ_x на кольцо $K[G']$, рассматриваемое как подкольцо кольца $K[G]$ (и аналогично для правых конволюций). Но ограничение полупростого (соответственно унитарного) оператора на подпространство снова является оператором того же типа. Отсюда следует, что $\rho_{\varphi(x)} = \rho_{\varphi(x_s)} \rho_{\varphi(x_u)}$ — разложение Жордана оператора $\rho_{\varphi(x)}$, так что $\varphi(x_s) = \varphi(x)_s$, $\varphi(x_u) = \varphi(x)_u$ (и аналогично для $d\varphi(x)$). В случае, если φ — включение, ситуация вполне аналогична рассмотренной выше (когда мы рассматривали группу G как подгруппу группы $GL(n, K)$). $\square$

Эта теорема показывает, что в любой алгебраической группе G подмножества $G_s = \{x \in G | x = x_s\}$ и $G_u = \{x \in G | x = x_u\}$ определяются внутренним образом и пересекаются по e . (Аналогично мы можем определить подмножества g_s и g_n ; они пересекаются по 0 .) Утверждение (в) теоремы гарантирует нам, что морфизмы алгебраических групп (и их дифференциалы) сохраняют эти множества: $\varphi(G_s) = \varphi(G)_s$ и т. д. Кроме того, множества G_u и g_n замкнуты (на g задана топология аффинного n -пространства). Чтобы в этом убедиться, заметим, что

множество всех унипотентных (соответственно нильпотентных) элементов в $GL(n, K)$ (соответственно в $M(n, K)$) замкнуто, как множество нулей полиномов, которые получаются из уравнения $(x-1)^n=0$ (соответственно $x^n=0$). Напротив, множество G_s редко бывает замкнутым в G .

15.4. Перестановочные множества эндоморфизмов. Подмножество M множества $M(n, K)$ называется **диагонализируемым** (соответственно **триангулируемым**), если существует такой элемент $x \in GL(n, K)$, что $xMx^{-1} \subset \mathfrak{d}(n, K)$ (соответственно $\subset \mathfrak{t}(n, K)$).

Предложение. Если $M \subset M(n, K)$ — некоторое множество перестановочных матриц, то множество M триангулируемо. Если M состоит из полупростых матриц, то оно даже диагонализируемо.

Доказательство. Положим $V = K^n$ и воспользуемся индукцией по n . Если $x \in M$, $a \in K$, то подпространство $W = \text{Ker}(x - a \cdot 1)$, очевидно, инвариантно относительно эндоморфизмов пространства V , перестановочных с x и, следовательно, инвариантно относительно M . Если множество M содержит нескалярные матрицы (в противном случае доказывать нечего), можно выбрать элементы x и a так, что $0 \neq W \neq V$. По предположению индукции существует вектор $v_1 \in W$ такой, что прямая Kv_1 инвариантна относительно M . Применяя затем предположение индукции к индуцированному действию множества M на факторпространстве V/Kv_1 , мы получим векторы $v_2, \dots, v_n \in V$, дополняющие v_1 до базиса пространства V и такие, что M оставляет инвариантным каждое подпространство $Kv_1 + \dots + Kv_i$ ($1 \leq i \leq n$). Следовательно, переход от канонического базиса пространства V к базису $(v_1, \dots, v_n)$ триангулирует множество M .

В случае, если множество M состоит из полупростых матриц, для каждого элемента $x \in M$ мы можем записать $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, $V_i = \text{Ker}(x - a_i \cdot 1)$, где $a_1, \dots, a_r$ — различные собственные значения элемента x . Как и выше, каждое пространство V_i инвариантно относительно M . Если M состоит не только из скалярных матриц (тогда оно диагонально), то мы можем выбрать элемент x таким, что $r > 1$. Тогда предположение индукции позволяет нам диагонализировать действие множества M на каждом V_i . $\square$

15.5. Строение коммутативных алгебраических групп.

Теорема. Пусть G — коммутативная алгебраическая группа. Тогда G_s, G_u — замкнутые подгруппы, связанные, если группа G связна, и отображение произведения $\varphi: G_s \times G_u \rightarrow G$ — изоморфизм алгебраических групп. Кроме того, $\mathcal{L}(G_s) = \mathfrak{g}_s, \mathcal{L}(G_u) = \mathfrak{g}_u$.

Доказательство. Тот факт, что G_s, G_u — подгруппы группы G , следует из леммы Б(г) в (15.1). Мы уже видели (15.3), что множество G_u замкнуто. Далее, теорема 15.3 показывает, что φ — изоморфизм групп. Вложим теперь группу G в $GL(n, K)$ для некоторого n . Предложение 15.4 позволяет нам без ущерба для общности предполагать, что $G \subset T(n, K)$ и, сверх того, что $G_s \subset D(n, K)$. Отсюда следует, что $G_s = G \cap D(n, K)$, так что множество G_s также замкнуто. Кроме того, φ — морфизм алгебраических групп.

Требуется доказать, что обратное отображение есть морфизм. Для этого достаточно показать, что $x \rightarrow x_s$ и $x \rightarrow x_u$ — морфизмы. Но второе отображение будет морфизмом, коль скоро первое отображение — морфизм, ибо $x_u = x_s^{-1}x$. Если $x \in G$, то собственные значения элемента x (с учетом кратностей) есть собственные значения его диагональной части. Но элемент x_s диагонален и имеет в точности те же самые собственные значения; кроме того, x_s есть полином от x (15.1). Поэтому x_s должен быть просто диагональной частью элемента x . Отсюда следует, что отображение $x \rightarrow x_s$ — морфизм. Далее, если G связна, то и группы G_s, G_u связны (как образы группы G относительно морфизмов $x \mapsto x_s, x \mapsto x_u$).

Указанное выше вложение группы G в $T(n, K)$ показывает также, что $\mathcal{L}(G_s) \subset \mathfrak{b}(n, K), \mathcal{L}(G_u) \subset \mathfrak{n}(n, K)$. Следовательно, $\mathcal{L}(G_s) \subset \mathfrak{g}_s$ и $\mathcal{L}(G_u) \supset \mathfrak{g}_u$. Но φ — изоморфизм, так что $\mathcal{L}(G_s) + \mathcal{L}(G_u) = \mathfrak{g}$. Так как также и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s + \mathfrak{g}_u$ (и это разложение единственно), то мы заключаем, что каждое включение должно быть равенством. $\square$

Упражнения

1. Пусть $x \in GL(V), y \in GL(W)$. Доказать, что $(x \otimes y)_s = x_s \otimes y_s$ и что $(x \otimes y)_u = x_u \otimes y_u$.
2. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная K -алгебра. Если $x \in \text{Aut } \mathfrak{A}$ (соответственно $x \in \text{Der } \mathfrak{A}$), то $x_s, x_u \in \text{Aut } \mathfrak{A}$ (соответственно $x_s, x_u \in \text{Der } \mathfrak{A}$).

3. Найти подгруппу группы $GL(2, K)$, которая не содержит полупростых и унипотентных частей всех своих элементов.

4. Показать, что полупростые (соответственно унипотентные) элементы группы $SL(n, K)$ ($n \geq 2$) не образуют подгруппы.

В остальных упражнениях $\text{char } K = 0$.

5. Элемент группы $GL(n, K)$, порядок которого конечен, является полупростым.

6. Доказать, что любая замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$, состоящая из унипотентных элементов, связна.

7. Доказать, что каждое нетривиальное рациональное представление $G_a \rightarrow GL(V)$ имеет вид, указанный в лемме 15.1 В.

8. Доказать, что отображения $\exp$ и $\log$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством нильпотентных матриц в $M(n, K)$ и множеством унипотентных матриц в $GL(n, K)$.

9. Элемент $x \in GL(V)$ является унипотентным тогда и только тогда, когда существует рациональное представление $G_a \rightarrow GL(V)$, образ которого содержит x .

10. Если U — замкнутая подгруппа группы $GL(V)$, состоящая из унипотентных элементов, то $\lg x$ принадлежит $\mathfrak{u}$.

11. Доказать, что одномерная алгебраическая группа, состоящая из унипотентных элементов, изоморфна G_a .

Замечания. Наше изложение здесь следует Борелю [4, § 4]; см. также работу Бореля и Спрингера [1], которой предшествовала их статья в АГДП. Доказательство теоремы 15.3 у Шевалле [8, 4—10] сложнее и менее наглядно. Относительно происхождения этой теоремы см. Колчин [1], Шевалле [4], Борель [1].

§ 16. Диагонализируемые группы

16.1. Характеры и d -группы. Алгебраическую группу G естественно называть **диагонализируемой**, если она изоморфна замкнутой подгруппе диагональной группы $D(n, K)$ для некоторого n . В этом случае группа G , очевидно, коммутативна и состоит из полупростых элементов. Обратно, если группа G обладает этими свойствами и если мы вложим G в некоторую группу $GL(n, K)$, то из (15.4) следует, что группа G сопряжена в $GL(n, K)$ с некоторой подгруппой группы $D(n, K)$. Заметим, что *замкнутые подгруппы и гомоморфные образы диагонализируемых групп являются снова диагонализируемыми группами* (ибо такие группы коммутативны и состоят из полупростых элементов).

Точное строение диагонализируемой группы G не усматривается непосредственно из определения. Например, возникает естественный вопрос: если G — связная n -мерная группа, то изоморфна ли она группе $D(n, K)$? Хотелось бы также (в принципе) описать все

замкнутые подгруппы группы $D(n, K)$ для заданного n . Напомним (11.4) понятие (рационального) характера алгебраической группы G . По определению **характер** — это любой морфизм алгебраических групп $\chi: G \rightarrow G_m$. Если χ, ψ — два характера группы G , то мы можем получить новый характер путем перемножения значений: $(\chi\psi)(x) = \chi(x)\psi(x)$. Таким образом, мы получаем абелеву группу $X(G)$, **группу характеров** группы G . Заметим, что $X(G)$ можно рассматривать как подмножество алгебры $K[G]$.

Группа $D(n, K)$ в изобилии обладает характерами, например характерами являются координатные функции $\chi_i: \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$. (В действительности $X(D(n, K))$ — свободная абелева группа ранга n с базисом $\chi_1, \dots, \chi_n$). Напротив, группа $SL(n, K)$ (которая совпадает со своим коммутантом) не имеет нетривиальных характеров (упражнение 3). Это наводит на мысль охарактеризовать диагонализированные группы как алгебраические группы, которые обладают достаточным числом характеров, чтобы разделять точки. Нам потребуется следующая хорошо известная лемма.

Лемма. Пусть G — (абстрактная) группа, X — множество всех гомоморфизмов $G \rightarrow K^*$. Тогда X — линейно независимое подмножество пространства всех функций на G со значениями в K .

Доказательство. Предположим противное: пусть $\chi_1, \dots, \chi_n \in X$ — линейно зависимые функции, причем $n > 1$ выбрано наименьшим возможным. Запишем $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i + \chi_n = 0$ ($a_i \in K$). Так как $\chi_1 \neq \chi_n$, то мы можем найти такую точку $y \in G$, что $\chi_1(y) \neq \chi_n(y)$. Для произвольного элемента $x \in G$ мы получаем два уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i(x) \chi_i(y) + \chi_n(x) \chi_n(y) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i(x) \chi_n(y) + \chi_n(x) \chi_n(y) = 0.$$

Вычитая второе из первого, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\chi_i(y) - \chi_n(y)) \chi_i(x) = 0,$$

причем не все коэффициенты равны 0, что противоречит минимальности n . $\square$

Будем говорить, что алгебраическая группа G есть d -группа, если пространство $K[G]$ имеет базис, состоящий из характеров. (Ввиду предыдущей леммы это эквивалентно утверждению, что $X(G)$ — базис пространства $K[G]$). Например, $D(n, K)$ есть d -группа, поскольку любая полиномиальная функция есть линейная комбинация одночленов, полученных из координатных функций и их обратных. Если G, G' есть d -группы, то морфизм $\varphi: G \rightarrow G'$ алгебраических групп индуцирует групповой гомоморфизм $\varphi^0: X(G') \rightarrow X(G)$, — ограничение коморфизма $\varphi^*: K[G'] \rightarrow K[G]$. Обратно, гомоморфизм групп $X(G') \rightarrow X(G)$ продолжается до гомоморфизма K -алгебр $K[G'] \rightarrow K[G]$ и в свою очередь определяет морфизм $G \rightarrow G'$.

Предложение. (а) Если H — замкнутая подгруппа d -группы G , то H — также d -группа, совпадающая с пересечением ядер некоторых характеров группы G . В частности, диагонализированные группы являются d -группами. (б) Любая d -группа диагонализирована.

Доказательство. (а) Канонический гомоморфизм $\varphi: K[G] \rightarrow K[H]$, индуцированный ограничением функций, сюръективен. Очевидно, ограничение на H характера группы G есть характер группы H , так что пространство $K[H]$ натянуто на характеры и H есть d -группа. Пусть, далее, $f \in \mathcal{I}(H)$, скажем, $f = \sum a_i \chi_i$ ($\chi_i \in X(G)$). Ввиду предыдущей леммы (примененной к H) сумма коэффициентов при характерах с одинаковыми ограничениями на H равна 0, так что пространство $\mathcal{I}(H)$ натянуто на различные элементы вида $g = \sum b_i \chi_i$, где $\sum b_i = 0$ и все χ_i имеют одинаковые ограничения на H . В свою очередь $g = \chi_i h$, где $h = \sum b_i (\chi_i^{-1} \chi_i - 1)$. Отсюда следует, что $\mathcal{I}(H)$ порождается как идеал всевозможными элементами $\theta - 1$, где $\theta = \chi_i^{-1} \chi_i \in X(G)$. Так как $D(n, K)$ есть d -группа, то мы приходим к выводу, что диагонализированные группы являются d -группами.

(б) Пусть G есть d -группа. Так как $K[G]$ — конечно порожденная K -алгебра, натянутая над K на $X(G)$, то она порождается как K -алгебра некоторым конечным множеством характеров $\chi_1, \dots, \chi_n$. Определим отобра-

жение $\varphi: G \rightarrow \underbrace{G_m \times \dots \times G_m}_{n \text{ экземпляров}} \cong D(n, K)$, полагая $\varphi(x) := (\chi_1(x), \dots, \chi_n(x))$. Очевидно, φ — морфизм алгебраических групп с тривиальным ядром (ибо характеры $\chi_1, \dots, \chi_n$ порождают $K[G]$). В частности, группа G должна быть коммутативной и состоять из полупростых элементов, т. е. G диагонализироваема. (Мы не утверждаем однако, что φ — изоморфизм группы G на подгруппу группы $D(n, K)$, если $\text{char } K \neq 0$, см. упражнение 8.) $\square$

Имеется понятие, двойственное понятию характера, с которым мы будем иметь дело несколько позже. Если G есть d -группа, то любой морфизм алгебраических групп $\lambda: G_m \rightarrow G$ называется **однопараметрической мультипликативной подгруппой** группы G . Множество этих подгрупп обозначается через $\Upsilon(G)$. Оно становится абелевой группой, если мы определим произведение формулой $(\lambda\mu)(a) = \lambda(a)\mu(a)$. Заметим, что композиция однопараметрической мультипликативной подгруппы λ с характером χ группы G приводит к морфизму алгебраических групп $G_m \rightarrow G_m$, т. е. к элементу группы $X(G_m) \cong \mathbb{Z}$. Это позволяет определить естественное спаривание $X(D) \times \Upsilon(D) \rightarrow \mathbb{Z}$, обозначаемое через $\langle \chi, \lambda \rangle$, относительно которого $X(D)$ и $\Upsilon(D)$ становятся двойственными $\mathbb{Z}$ -модулями, если группа D *связна* (упражнение 4). Что касается обозначений, то отныне группы $X(D)$ и $\Upsilon(D)$ мы будем записывать аддитивно.

16.2. Торы. Характеры d -групп (= диагонализироваемых групп) играют в теории алгебраических групп важную роль.

Лемма А. Пусть G — d -группа. Тогда $X(G)$ — конечно порожденная абелева группа.

Доказательство. Если $G \subset D(n, K)$, то $X(G)$ есть гомоморфный образ группы $X(D(n, K)) \cong \mathbb{Z}^n$. (Лемма в действительности верна для произвольной группы G , см. упражнение 12.) $\square$

Строение конечно порожденной абелевой группы A хорошо известно: $A = \mathbb{Z}^r \times B$, где B — периодическая *) подгруппа группы A (= множество всех элементов конечного порядка) и $r = \text{rank } A$ — однозначно определенное неотрицательное число. Заметим, что если $\text{char } K =$

*) В действительности, конечная. — Прим. перев.

$= p \neq 0$, то группа характеров $A = X(G)$ алгебраической группы не имеет элементов порядка p (так как поле K не содержит нетривиальных p -х корней из 1). Это показывает, что не каждая группа A может появиться как группа характеров $X(G)$; но мы увидим ниже, что исключения связаны только с отсутствием элементов порядка p .

Лемма Б. Если G — связная алгебраическая группа, то группа $X(G)$ не имеет элементов конечного порядка.

Доказательство. При $\chi \in X(G)$ образ $\chi(G)$ группы G в $\mathbf{G}_m$ является связной группой. Единственные связные подгруппы группы $\mathbf{G}_m$ — это она сама и 1; отсюда следует, что $\chi^n \neq 1$ ($n > 0$), если χ отличен от 1. $\square$

Возможно, читатель знаком с теорией двойственности локально компактных абелевых групп, где компактные торы находятся в соответствии с дискретными свободными абелевыми группами. Эта аналогия и некоторые другие соображения приводят нас к тому, чтобы назвать **тором** алгебраическую группу, изоморфную некоторой группе $D(n, K)$. Следующая лемма будет использована в (27.4).

Лемма В. Пусть T — тор. Если характеры $\chi_1, \dots, \chi_r \in X(T)$ линейно независимы, и $c_1, \dots, c_r \in \mathbf{G}_m$, то существует элемент $t \in T$, для которого $\chi_i(t) = c_i$ ($1 \leq i \leq r$).

Доказательство. Имеет смысл говорить о линейной независимости характеров, поскольку $X(T)$ — свободная абелева группа. Определим морфизм $\varphi: T \rightarrow \mathbf{G}_m \times$

$\times \mathbf{G}_m$ (r экземпляров) формулой $\varphi(t) = (\chi_1(t), \dots, \chi_r(t))$. Характеры $\sum m_i \chi_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}$) все различны, так что функции $\prod \chi_i^{m_i}$ (в мультипликативных обозначениях) линейно независимы над K в $K[T]$ (лемма 16.1). Отсюда следует, что характеры $\chi_1, \dots, \chi_r$ алгебраически независимы в $K(T)$, так что коморфизм φ^* инъективен и морфизм φ является доминантным. Следовательно, φ сюръективен, как морфизм алгебраических групп. $\square$

Настало время выяснить строение произвольных d -групп.

Теорема. Пусть G — произвольная d -группа. Тогда $G = G^0 \times H$ (прямое произведение алгебраических групп), где G^0 — тор и H — конечная группа (как под-

группа в G , вообще говоря, определенная не однозначно), порядок которой взаимно прост с p ($= \text{char exp } K$). В частности, связная d -группа есть тор.

Доказательство. Требуется найти дополнение H к тору *) G^0 . Мы можем предположить, что G — замкнутая подгруппа некоторой группы $D = D(n, K)$. Пусть ранг группы $X(G)$ равен r ($= \dim(G)$) **). Если $r = 0$, то доказывать нечего. В общем случае, вложение $G^0 \hookrightarrow D$ индуцирует сюръективный гомоморфизм ограничения $Z^n = X(D) \xrightarrow{\varphi} X(G^0) = Z^r$. Это позволяет нам воспользоваться характеристическим свойством свободных (=проективных) Z -модулей, чтобы получить расщепление $X(D) = \text{Ker } \varphi \oplus Z^r$. Будучи подгруппой свободной абелевой группы $X(D)$, ядро $\text{Ker } \varphi$ имеет базис χ_1 ,

χ_{n-r} , который можно дополнить базисом $\chi_{n-r+1}, \dots, \chi_n$ модуля Z^r (отображение φ переводит этот базис в базис модуля $X(G^0)$). Ясно, что отображение $x \mapsto \text{diag}(\chi_1(x), \dots, \chi_n(x))$ определяет автоморфизм группы D , преобразующий группу G^0 в подгруппу диагональных матриц, у которых первые $n-r$ координат равны 1. Если $D' = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_{n-r+1} = \dots = a_n = 1\}$, то $D = D' \times G^0$ (прямое произведение алгебраических групп). Следовательно, $G = H \times G^0$, где $H = D' \cap G \cong G/G^0$. Наконец, порядок группы H взаимно прост с p , поскольку 1 есть единственный корень степени p из 1 в K . $\square$

По-видимому, полезно в этом месте сформулировать на категорном языке связь между d -группами и конечно порожденными абелевыми группами без элементов порядка p . Обозначим через $\mathcal{D}$ и $\mathcal{A}$ категории с этими группами в качестве объектов и с очевидными морфизмами. С d -группой D мы можем, конечно, ассоциировать группу характеров $X(D)$, причем морфизму d -групп $\varphi: D \rightarrow D'$ мы сопоставим гомоморфизм групп характеров $\varphi^0: X(D') \rightarrow X(D)$, полученный в результате композиции φ с характерами группы D' . Тем самым мы получаем (контравариантный) функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$.

*) Эта фраза неудачна, так как еще не доказано, что G^0 — тор. — *Прим. ред.*

**) Это содержится в доказательстве леммы В. — *Прим. ред.*

Каким путем идти в обратном направлении? Пусть A — конечно порожденная абелева группа; образуем **групповую алгебру** $K[A]$, которая неформально может быть описана как множество конечных формальных линейных комбинаций элементов группы A с коэффициентами из K и умножение в которой определяется при помощи дистрибутивности на основе умножения в A . Строго говоря, $K[A]$ есть векторное пространство K -значных функций на A с конечными носителями и конволюцией в качестве произведения. Так как группа A конечно порождена, то $K[A]$ является, очевидно, конечно порожденной коммутативной K -алгеброй. Легко видеть, что отсутствие элементов порядка p в A эквивалентно отсутствию нильпотентных элементов в $K[A]$. В частности, мы получаем аффинную алгебру для каждого объекта A категории $\mathcal{A}$, определяющую, следовательно, аффинное многообразие. Но алгебра $K[A]$ несет также структуру алгебры Хопфа (возникающую из группового умножения в A), которая и дает нам аффинную алгебраическую группу (см. (7.6)); обозначим эту группу через $D(A)$. Что представляют собой ее характеры? Характеру $\chi: D(A) \rightarrow \mathbf{G}^m$ соответствует коморфизм $\chi^*: K[\mathbf{G}_m] \rightarrow K[D(A)] = K[A]$, который в свою очередь индуцирует гомоморфизм групп характеров $\mathbf{Z} \rightarrow A$. Но $\text{Hom}(\mathbf{Z}, A) \cong A$, откуда следует, что $X(D(A)) \cong A$. Это показывает, что $D(A)$ есть d -группа, и что $A \mapsto D(A)$ (вместе с индуцированным действием на морфизмы) есть контравариантный функтор $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$, композиция которого с F (в любом порядке) эквивалентна тождественному функтору. Следовательно, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ *канонически эквивалентны относительно F* .

16.3. Жесткость диагонализированных групп. Мы показали, что d -группа изоморфна прямому произведению алгебраических групп $\mathbf{G}_m \times \dots \times \mathbf{G}_m \times H$, где H — конечная группа (порядок которой взаимно прост с характеристической экспонентой p поля K). Это описание вполне удовлетворительно, если d -группа рассматривается изолированно. Но чаще возникают d -группы, лежащие в более сложных алгебраических группах, например группа $D(n, K)$ в $GL(n, K)$. Основной результат, который мы установим в этом пункте, заключается в том, что d -группа обладает «жесткостью», т. е. допускает «мало»

нетривиальных автоморфизмов; в частности, нормализатор d -группы в объемлющей алгебраической группе не намного больше, чем централизатор.

Жесткость вытекает из двух основных фактов об элементах конечного порядка в d -группе: (а) *элементы конечного порядка образуют плотное подмножество*; (б) *имеется лишь конечное число элементов данного конечного порядка*. Чтобы доказать эти факты, заметим, что достаточно рассматривать случай $G = G_m$. Элементы группы K^* , имеющие конечный порядок, — это в точности m -е корни из 1 ($m \in \mathbb{Z}^+$), число которых не превосходит m для каждого фиксированного m . Так как поле K алгебраически замкнуто, то поле K содержит бесконечное множество различных корней из 1; поскольку группа G_m связна и одномерна, замыкание периодической подгруппы, образованной всеми элементами конечного порядка, совпадает с G_m . (Можно высказаться и более точно относительно числа корней из 1: если $(p, m) = 1$, то имеется ровно $\varphi(m)$ элементов порядка m в K^* , где φ — функция Эйлера).

Предложение. Пусть $\varphi: V \times G \rightarrow H$ — морфизм многообразий, причем выполнены следующие условия:

(а) G — алгебраическая группа, элементы конечного порядка которой образуют плотное подмножество;

(б) H — алгебраическая группа, содержащая лишь конечное число элементов данного порядка m (для каждого $m > 0$);

(в) V — связное многообразие;

(г) для каждого элемента $x \in V$ морфизм $\varphi_x: G \rightarrow H$ ($y \mapsto \varphi(x, y)$ ($y \in G$)) есть гомоморфизм групп.

Тогда $x \mapsto \varphi(x)$ ($x \in V$) — постоянное отображение.

Доказательство. При $y \in G$ положим $\psi_y(x) = \varphi(x, y)$, так что $\psi_y: V \rightarrow H$ — морфизм. Если порядок элемента y конечен, то образ морфизма ψ_y также конечен ввиду (б) и (г). Но многообразие V связно ввиду (в); поэтому его образ должен быть точкой. Другими словами, для каждого элемента y конечного порядка в группе G мы имеем $\varphi(x, y) = \varphi(x', y)$ для всех $x, x' \in V$, т. е. $\varphi_x(y) = \varphi_{x'}(y)$. Следовательно, $\varphi_x \cdot \varphi_x^{-1}$ отображает плотное подмножество группы G (ввиду (а)) в e . Вывод: $\varphi_x = \varphi_{x'}$ для всех $x, x' \in V$. $\square$

Следствие. Пусть G — диагонализируемая подгруппа алгебраической группы G' . Тогда $N_{G'}(G)^0 = C_{G'}(G)^0$.

Доказательство. Пусть $G = H$ из предложения, так что предположения (а) и (б) выполняются ввиду предыдущих замечаний. Тогда положим $V = N_{G'}(G)^0$ и зададим морфизм $\varphi: V \times G \rightarrow G$ соотношением $\varphi(x, y) = x y x^{-1}$. Очевидно, предположения (в) и (г) выполняются. Из того, что отображение φ_x постоянно, следует, что $\varphi_x = \varphi_e$, т. е. что все элементы из группы $N_{G'}(G)^0$ на самом деле централизуют G . Разумеется, имеет место и обратное включение $C_{G'}(G)^0 \subset N_{G'}(G)^0$. $\square$

Например, нормализатор группы $D(n, K)$ в $GL(n, K)$ есть группа мономиальных матриц; централизатор группы $D(n, K)$ совпадает с самой этой группой, и факторгруппа нормализатора по централизатору — конечная группа, изоморфная симметрической группе S_n . С другой стороны, $D(n, K)$ совпадает со своим нормализатором в группе $T(n, K)$.

16.4. Веса и корни. Пусть D — диагонализируемая подгруппа алгебраической группы G . Мы уже видели выше, что группа D является довольно «жесткой» при действии группы G внутренними автоморфизмами. Важное значение имеет рассмотрение действия группы D на G . Например, если D — диагональная подгруппа группы $G = SL(n, K)$, то, очевидно, группа D оставляет инвариантными некоторые одномерные унитарные подгруппы группы G , соответствующие системе корней алгебры Ли ($\text{char } K = 0$).

В общем случае $\text{Int } x$ ($x \in D$) — автоморфизм группы G , так что его дифференциал $\text{Ad } x$ есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как Ad — морфизм алгебраических групп (10.3), то $\text{Ad } D$ — диагонализируемая подгруппа группы $\text{Aut } \mathfrak{g} \subset GL(\mathfrak{g})$. Для любой заданной диагонализируемой подгруппы d -группы $H \subset GL(V)$ удобно записывать V в виде прямой суммы подпространств V_α ($\alpha \in X(H)$), где

$$V_\alpha = \{v \in V \mid x \cdot v = \alpha(x) v \text{ для всех } x \in H\}.$$

Те функции α , для которых $V_\alpha \neq 0$, называются **весами** группы H в пространстве V (11.4). В частности, возвращаясь к ситуации $D \subset G$, $\text{Ad } D \subset GL(\mathfrak{g})$, мы получаем веса группы D (точнее, группы $\text{Ad } D$) в $\mathfrak{g}$. *Ненулевые*

веса *) в этой ситуации называются **корнями группы G относительно D** . Множество корней группы G относительно D обозначается через $\Phi(G, D)$ или просто Φ , если не возникает путаницы. Весу 0 соответствует пространство неподвижных точек $\mathfrak{g}^D$, которое, конечно, содержит $\mathfrak{h}$ (но может быть и большим). В этих обозначениях мы имеем разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^D \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, где $\Phi = \Phi(G, D)$.

Если группа G «полупроста» и в качестве D выбран тор максимальной размерности, то мы в соответствующем месте покажем, что Φ — **абстрактная система корней** в смысле Добавления и что группа G (почти) характеризуется системой корней Φ . В действительности полученное только что разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в случае характеристики 0 оказывается в точности классическим разложением Картана. Но доказательство этих фактов требует большой подготовительной работы.

В заключение этого параграфа мы докажем скромное, но полезное утверждение.

Предложение. Пусть D — связная d -подгруппа группы G (т. е. D — тор), H — замкнутая подгруппа группы G , инвариантная относительно $\text{Int } D$. Тогда существует элемент $x \in D$ такой, что $C_H(x) = C_H(D)$ и $\mathfrak{c}_\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(D)$. В частности, $C_G(D)$ совпадает с централизатором некоторого элемента группы D .

Доказательство. Мы можем предположить, что $G = GL(V)$ для некоторого V . Запишем $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, где подпространство V_i принадлежит весу $\alpha_i \in X(D)$. Так как группа D связна, то подгруппа $\text{Ker}(\alpha_i \alpha_j^{-1})$ ($i \neq j$) имеет коразмерность 1 в D ; следовательно, найдется элемент $x \in D$, не принадлежащий ни одной из этих подгрупп (число которых конечно). Рассмотрим группу $M = GL(V_1) \times \dots \times GL(V_r)$ как замкнутую подгруппу группы $GL(V)$. Тогда легко видеть, что $C_H(x) = M \cap H = C_H(D)$, $\mathfrak{c}_\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(D)$. $\square$

Если D — некоторая d -группа, действующая на G как группа автоморфизмов (не обязательно внутренних), то D действует как группа автоморфизмов также и на $\mathfrak{g}$. Это приводит снова к множеству $\Phi(G, D)$, которое состоит из ненулевых весов группы D в $\mathfrak{g}$.

*) То есть ненулевые элементы $X(D)$ при использовании аддитивной терминологии. — *Прим. перев.*

Упражнения

1. Привести пример алгебраической группы, которая не диагонализироваема, но все ее элементы полупросты.

2. Если G есть d -группа, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из полупростых элементов.

3. Если $G = (G, G)$, то $X(G) = 0$.

4. Пусть T — тор. Показать, что $X(T)$ и $Y(T)$ — двойственные Z -модули относительно естественного спаривания $\langle \chi, \lambda \rangle \in Z$. Как обстоит дело, если заменить T на несвязную d -группу?

5. Пусть T — тор, m — положительное целое число. Доказать, что морфизм $x \mapsto x^m$ отображает T на T , что он биективен, если m — степень числа p и сепарабелен, если $(p, m) = 1$ ($p = \text{char } K$).

6. Доказать, что связная подгруппа d -группы выделяется простым сомножителем (ср. с доказательством теоремы 16.2).

7. Предположим, что поле K не является алгебраическим замыканием конечного поля. Если T — тор, то доказать, что T — замыкание циклической подгруппы, порожденной одним из его элементов. (Заметить, что K^* содержит свободную абелеву группу сколь угодно большого ранга.)

8. Дифференциал характера $\chi: G \rightarrow G_m$ есть линейная функция $d\chi: \mathfrak{g} \rightarrow K$. Если G — тор и $\chi_1, \dots, \chi_n$ — базис группы характеров $X(G)$, то доказать, что $d\chi = 0$ тогда и только тогда, когда $\chi = \rho \sum a_i \chi_i$ ($a_i \in Z$) ($p = \text{char } K$).

9. Пусть $T = SL(n, K) \cap D(n, K)$, $\chi: T \rightarrow G_m$ — характер, отображающий $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ в $a_i a_{i+1}^{-1}$ для фиксированного $i < n$. Построить однопараметрическую подгруппу $\lambda: G_m \rightarrow T$ такую, что $\langle \chi, \lambda \rangle = 2$.

10. Для каждого ли элемента $x \in D(n, K)$ имеет место соотношение $C_{GL(n, K)}(x) = C_{GL(n, K)}(D(n, K))$?

11. Проверить в деталях эквивалентность между категориями $\mathcal{D}$ и $\mathcal{A}$, бегло описанную в (16.2).

12. Пусть G — алгебраическая группа, $H = \bigcap_{\chi \in X(G)} \text{Ker } \chi$. Доказать, что: (а) H — замкнутая нормальная подгруппа, (б) группа G/H диагонализироваема, (в) $X(G) \cong X(G/H)$. В частности, группа $X(G)$ конечно порождена. Описать группу $X(GL(n, K))$.

13. Доказать, что элементы $x \in D$, описанные в предложении 16.4, образуют плотное подмножество в D .

Замечания. Категорная техника, бегло описанная в 16.2, далеко развита в СГ и у Демазюра и Габриэля [1].

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

§ 17. Нильпотентные и разрешимые группы

Обычные понятия «нильпотентной» и «разрешимой» групп хорошо приспособляются к алгебраическим группам, так как разного рода коммутаторные группы оказываются *замкнутыми* (17.2). Для доказательства этого факта необходимо некоторое чисто теоретико-групповое утверждение, которое мы установим в (17.1), чтобы не прерывать изложение в дальнейшем. В (17.5) и (17.6) мы рассмотрим вопрос, при каких условиях разрешимая линейная группа приводится к треугольному виду. Результат из (17.5) является существенным для дальнейшего, тогда как теорема из (17.6) будет вновь доказана в § 21 на основе более совершенной техники (приведенное здесь доказательство, напротив, вполне элементарно).

17.1. Лемма из теории групп. Напомним, что через (x, y) обозначается коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$, где x, y — элементы группы G . Если A, B — две подгруппы группы G , то подгруппа группы G , порожденная всевозможными элементами вида (x, y) , $x \in A, y \in B$, обозначается через (A, B) . Тожество

$$(*) \quad z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zxz^{-1})^{-1}(zyz^{-1})^{-1}$$

показывает, что группа (A, B) нормальна в G , если обе подгруппы A, B нормальны.

Лемма А, доказанная ниже, является следствием основной леммы Б, но первая необходима для доказательства второй.

Лемма А. Пусть $[G: Z(G)] = n < \infty$. Тогда группа (G, G) конечна.

Доказательство. Пусть S — множество коммутаторов группы G , так что S порождает группу (G, G) . Ясно, что (x, y) зависит только от смежного класса элементов x, y по модулю $Z(G)$; в частности, $\text{card } S \leq n^2$. Если мы

имеем произведение коммутаторов, то любые два из них можно сделать соседними, если использовать подходящее сопряжение, например $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) = (x_1, y_1)(x_3, y_3)(z^{-1}x_2z, z^{-1}y_2z)$, где $z = (x_3, y_3)$. Следовательно, если показать, что $(n+1)$ -я степень элемента из S есть произведение n элементов из S , то мы сможем заключить, что каждый элемент группы (G, G) представим в виде произведения не более n^3 множителей из S . Отсюда, очевидно, будет следовать, что группа (G, G) конечна.

Теперь заметим, что $(x, y)^n \in Z(G)$, и поэтому $(x, y)^{n+1}$ можно переписать в виде $y^{-1}(x, y)^ny(x, y) = y^{-1}((x, y)^{n-1}(x, y^2))y$, т. е. в виде произведения n коммутаторов. $\square$

В доказательстве этой леммы мы пользовались только конечностью множества S и не пытались получить оценку для порядка группы $G/Z(G)$ в терминах n ; последнее требовало бы более сложного рассуждения. Нижеследующая лемма, принадлежащая Бэру, остается справедливой при более слабых предположениях (см. замечания), но нам она требуется лишь в том виде, в котором она сформулирована.

Лемма Б. Пусть A, B — нормальные подгруппы группы G ; предположим, что множество $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ конечно. Тогда группа (A, B) конечна.

Доказательство. Без ущерба для общности мы можем предполагать, что $G = AB$. При помощи внутренних автоморфизмов (см. выше (*)) группа G действует на S как группа перестановок. Если H — ядро получающегося при этом гомоморфизма $G \rightarrow \{\text{симметрическая группа множества } S\}$, то, очевидно, H — нормальная подгруппа конечного индекса группы G . Кроме того, группа H централизует группу $C = (A, B)$. Отсюда следует, что группа $H \cap C$ центральна в C и имеет в C конечный индекс. Ввиду леммы А группа (C, C) конечна (а также нормальна в G , так как $C \triangleleft G$). Таким образом, мы можем заменить группу G на $G/(C, C)$, т. е. мы можем считать группу C абелевой.

Далее, коммутаторы (x, y) , $x \in A$, $y \in C$ лежат в S и перестановочны друг с другом. Так как группа C абелева, то $(x, y)^2 = (x y x^{-1})^2 y^{-2} = (x, y^2)$ — другой такой коммутатор. Отсюда, очевидно, следует, что группа

(A, C) конечна (а также нормальна в G). Заменяя группу G на $G/(A, C)$, мы можем предполагать, что группа A централизует C . Отсюда следует, что квадрат произвольного коммутатора есть снова коммутатор. Следовательно, группа (A, B) конечна. $\square$

17.2. Взаимный коммутант. Если A и B — произвольные замкнутые (например, конечные) подгруппы алгебраической группы G , то группа (A, B) , порожденная коммутаторами $xux^{-1}y^{-1}$ ($x \in A$, $y \in B$), к сожалению, не всегда оказывается замкнутой (упражнение 1). Дело обстоит лучше, если группа A или B связна, или когда обе группы A и B нормальны в G . (В действительности утверждение (б) следующего предложения остается справедливым, если ограничиться требованием, что группа A нормализует B ; однако для доказательства этого факта нам необходим был бы более точный вариант леммы 17.1Б.)

Предложение. Пусть A , B — замкнутые подгруппы алгебраической группы G .

(а) Если группа A связна, то группа (A, B) замкнута и связна.

(б) Если группы A и B нормальны в G , то группа (A, B) замкнута (и нормальна в G). В частности, группа (G, G) всегда замкнута.

Доказательство. (а) Сопоставим каждому элементу $y \in B$ морфизм $\varphi_y: A \rightarrow G$, определенный соотношением $\varphi_y(x) = xux^{-1}y^{-1}$. Так как группа A связна и $\varphi_y(e) = e$, то предложение 7.5 показывает, что группа, порожденная всеми $\varphi_y(A)$ ($y \in B$), замкнута и связна; но, по определению (A, B) , она совпадает с (A, B) .

(б) Из утверждения (а) следует, что (A^0, B) и (A, B^0) — замкнутые, связные (а также нормальные) подгруппы группы G , так что и их произведение C обладает теми же свойствами (см. следствие 7.4). Чтобы убедиться, что группа (A, B) замкнута, достаточно, следовательно, показать, что группа C имеет конечный индекс в (A, B) , что представляет собой чисто теоретико-групповой вопрос. В абстрактной группе G/C образ группы A^0 (соответственно B^0) централизует образ группы B (соответственно A). Так как индексы $[A : A^0]$ и $[B : B^0]$ конечны, то, очевидно, имеется только конечное число коммутаторов в G/C , которые можно построить из образов

групп A и B . Лемма 17.1Б тогда гарантирует конечность группы $(A, B)/C$. $\square$

17.3. Разрешимые группы. Напомним, что абстрактная группа G разрешима, если ее ряд коммутантов доходит до e ; этот ряд определяется индуктивно следующим образом: $\mathcal{D}^0 G = G$, $\mathcal{D}^{i+1} G = (\mathcal{D}^i G, \mathcal{D}^i G)$ ($i \geq 0$). Если G — алгебраическая группа, то $\mathcal{D}^1 G = (G, G)$ — замкнутая нормальная подгруппа группы G , связная, если группа G связна (предложение 17.2). По индукции, это же справедливо для всех групп $\mathcal{D}^i G$. Следовательно, абстрактное понятие разрешимости годится для использования в контексте алгебраических групп. Например, если G — связная разрешимая алгебраическая группа положительной размерности, то $\dim(G, G) < \dim G$. Этот факт удобен в индуктивных рассуждениях. Легко видеть, что алгебраическая группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд замкнутых подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = e$, для которых $(G_i, G_i) \subset \subset G_{i+1}$ ($0 \leq i < n$), см. упражнение 4.

Следующие факты из теории групп хорошо известны.

Лемма. (а) Подгруппы и гомоморфные образы разрешимой группы разрешимы.

(б) Если N — нормальная разрешимая подгруппа группы G , для которой факторгруппа G/N разрешима, то и сама группа G разрешима.

(в) Если A, B — нормальные разрешимые подгруппы группы G , то и AB — нормальная разрешимая подгруппа группы G .

Поскольку теория конечных разрешимых групп сама по себе достаточно сложна, было бы нереальным ожидать детального описания всех разрешимых алгебраических групп. Оказывается, однако, что *связные* разрешимые алгебраические группы допускают удовлетворительное описание. Хорошим примером является группа верхних треугольных матриц $T(n, K)$. Так как диагональные элементы в произведении двух верхних треугольных матриц получаются в результате перемножения соответствующих диагональных элементов перемножаемых матриц, то, очевидно, коммутант группы $T = T(n, K)$ содержится в группе $U = U(n, K)$. (Это можно уточнить. Как мы знаем, группа U порождается подгруппами $U_{ij} = \{1 + ae_{ij} \mid a \in K\}$, $i < j$, каждая из ко-

торых изоморфна G_a . Согласно предложению 17.2 (а) группа $(D, U_{ij}) \subset U_{ij}$ замкнута и связна (где $D = D(n, K)$); очевидно также, что эта группа нетривиальна. Отсюда следует, что $U_{ij} = (D, U_{ij}) \subset (T, T)$, откуда $(T, T) = U$.

Рассмотрим теперь коммутирование в U . Удобно воспользоваться следующим приемом. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ полное множество верхних треугольных матриц, рассматриваемое как ассоциативная подалгебра алгебры $M(n, K)$ (и совпадающее с $\mathfrak{t}(n, K)$, если рассматривать это множество как алгебру Ли). Очевидно, что подмножество $\mathfrak{N}$ матриц с нулевой диагональю — двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{Z}$ (как алгебра Ли, $\mathfrak{N}$ совпадает с $\mathfrak{n}(n, K)$). Каждая степень $\mathfrak{N}^h$ ($h \geq 1$) идеала $\mathfrak{N}$, состоящая из всевозможных сумм h -кратных произведений элементов из $\mathfrak{N}$, есть опять двусторонний идеал. Легко видеть, что $\mathfrak{N}^h$ есть линейная оболочка всех e_{ij} ($j - i \geq h$). Теперь $U = 1 + \mathfrak{N}$, так что $U_h = 1 + \mathfrak{N}^h$ — замкнутая нормальная подгруппа группы U , причем $(U_h, U_i) \subset U_{h+i}$. В частности, группа U разрешима. Отсюда следует, что и группа T разрешима.

Мы увидим в (17.6), что каждая связная разрешимая алгебраическая группа изоморфна замкнутой подгруппе некоторой группы $T(n, K)$.

17.4. Нильпотентные группы. Убывающий центральный ряд группы G определяется индуктивно следующим образом: $\mathcal{C}^0 G = G$, $\mathcal{C}^{i+1} G = (G, \mathcal{C}^i G)$. Каждая группа $\mathcal{C}^i G$ нормальна в G . В силу предложения 17.2 эти подгруппы замкнуты, если G — алгебраическая группа (и связна, если группа G связна). Группа G называется нильпотентной, если $\mathcal{C}^n G = e$ для некоторого n . Очевидно, что коммутативная группа нильпотентна; с другой стороны, нильпотентная группа разрешима ввиду включения $\mathcal{D}^i G \subset \mathcal{C}^i G$. Вычисления, сделанные в (17.3), в действительности показывают, что группа $U(n, K)$ нильпотентна, в то время как группа $T(n, K)$ ($n \geq 2$) не нильпотентна. Для использования в дальнейшем определим $G^\infty = \bigcap \mathcal{C}^i G$.

Напомним несколько известных фактов из теории групп.

Лемма. (а) Подгруппы и гомоморфные образы нильпотентной группы являются нильпотентными группами.

(б) Если группа $G/Z(G)$ нильпотентна, то и группа G нильпотентна.

(в) Пусть G — нильпотентная группа. Если n — наибольший индекс, для которого $\mathcal{C}^n G \neq e$, то $\mathcal{C}^n G \subset Z(G)$; в частности, $Z(G) \neq e$ (если $G \neq e$).

(г) Пусть G — нильпотентная группа и H — собственная подгруппа группы G . Тогда группа H собственным образом содержится в $N_G(H)$. $\square$

Для алгебраических групп имеются два важных уточнения:

Предложение. Пусть G — связная нильпотентная алгебраическая группа положительной размерности. Тогда:

(а) центр $Z(G)$ имеет положительную размерность;

(б) если H — собственная замкнутая связная подгруппа группы G , то $\dim H < \dim N_G(H)$. В частности, если $\operatorname{codim} H = 1$, то группа H нормальна в G .

Доказательство. (а) Так как все группы $\mathcal{C}^i G$ связны, то утверждение (в) леммы показывает, что $Z(G)^0 \neq e$.

(б) Воспользуемся индукцией по $\dim G$. Если группа $Z = Z(G)^0$ содержится в H , то переходим к связной нильпотентной группе G/Z (размерность которой в силу утверждения (а) меньше размерности группы G). Ввиду предположения индукции образ группы H имеет меньшую размерность, чем его нормализатор, поскольку он является собственной подгруппой группы G/Z ; следовательно, это справедливо и для группы H . Если группа Z не содержится в H , то ZH — подгруппа группы $N_G(H)$, имеющая большую размерность, чем H . $\square$

17.5. Унипотентные группы. Подгруппа алгебраической группы называется **унипотентной**, если все ее элементы унипотентны (15.1). Пример: $U(n, K)$. Мы хотим доказать, что унипотентная линейная группа (замкнутая или нет) сопряжена с подгруппой группы $U(n, K)$ и, следовательно, нильпотентна. Это можно рассматривать как обобщение того факта, что конечная p -группа нильпотентна, поскольку в случае $\operatorname{char} K = p > 0$ эндоморфизм унипотентен тогда и только тогда, когда его порядок в группе $GL(V)$ есть степень числа p .

Теорема. Пусть G — унипотентная подгруппа группы $GL(V)$ и $0 \neq V$ — конечномерное пространство. Тогда

группа G имеет общий собственный вектор в V , т. е. ненулевой вектор, неподвижный относительно всех элементов группы G .

Доказательство. Предположим, что V обладает собственным ненулевым подпространством W , инвариантным относительно группы G . Тогда образ группы G в $GL(W)$ есть унитарная группа, и вектор из W , неподвижный относительно этой группы, является одновременно вектором пространства V , неподвижным относительно группы G . Следовательно, мы можем предполагать, что V — неприводимый G -модуль. Это позволяет нам обратиться к стандартной (хотя и нетривиальной) теореме Бернсайда: если R — некоторая подалгебра алгебры $\text{End } V$ и если R действует на пространстве V неприводимо, то $R = \text{End } V$. (Доказательство см. Ленг, Алгебра, гл. XVII, § 3.)

Предположение, что группа G унитарна, показывает теперь, что $\text{Tr}(x) = \text{Tr}(1) = (\dim V) \cdot 1$ для всех $x \in G$. Записывая произвольный элемент x группы G в виде $1 + n$ (где n — нильпотентный эндоморфизм), мы заключаем, что для произвольного элемента $y \in G$ имеет место равенство $\text{Tr}(y) = \text{Tr}(xy) = \text{Tr}((1 + n)y) = \text{Tr}(y) + \text{Tr}(ny)$, или $\text{Tr}(ny) = 0$. Следовательно, и K -линейные комбинации y элементов группы G удовлетворяют этому уравнению. Но они образуют подалгебру R алгебры $\text{End } V$, которая действует на V неприводимо (ибо G действует неприводимо). Согласно теореме Бернсайда для каждого элемента $x = 1 + n \in G$ и любого эндоморфизма $y \in \text{End } V$ мы имеем $\text{Tr}(ny) = 0$. Записывая n в матричном виде и принимая в качестве y всевозможные матричные единицы e_{ij} , мы видим, что все матричные элементы матрицы n равны 0, т. е. группа G состоит только из единичной матрицы (и $\dim V = 1$). $\square$

Если группа $G \subset GL(V)$ унитарна, то, согласно теореме, существует общий собственный вектор v_1 . Пусть $V_1 = Kv_1$; тогда группа G действует на факторпространстве V/V_1 и образ группы G в $GL(V/V_1)$ есть опять унитарная группа. Следовательно, индукция по $\dim V$ позволяет заключить, что V обладает полным флагом подпространств, инвариантных относительно группы G . На матричном языке это дает

Следствие. Если G — унипотентная подгруппа группы $GL(n, K)$, то группа G сопряжена с подгруппой группы $U(n, K)$. В частности, группа G нильпотентна.

Ничего подобного этой теореме нет для подгрупп, состоящих из *полупростых* элементов; примеры таких групп весьма разнообразны (см. упражнение 6). (По этой причине мы не хотим использовать термин «полупростая группа» для обозначения таких групп! См. (19.5) ниже.) После дальнейшего изучения разрешимых групп мы сможем, в порядке частичной компенсации, доказать, что *связная замкнутая* подгруппа группы $GL(V)$, состоящая из полупростых элементов, есть тор (упражнение 21.2).

17.6. Теорема Ли — Колчина. Теорема 17.5 и ее следствие могут рассматриваться как точный аналог теоремы Энгеля для алгебр Ли. Мы можем также доказать хороший аналог теоремы Ли (если наложим предположение о связности); это удастся сделать в произвольной характеристике, хотя соответствующая теорема для алгебр Ли в положительной характеристике не имеет места.

Теорема. Пусть G — связная разрешимая подгруппа группы $GL(V)$, и пусть $0 \neq V$ — конечномерное пространство. Тогда группа G имеет общий собственный вектор в пространстве V .

Доказательство. Мы можем предполагать, что группа G замкнута (см. упражнение 2). В случае, если группа G коммутативна, теорема следует непосредственно из предложения 15.4. Чтобы перейти к общему случаю, воспользуемся индукцией по $n = \dim V$ и по длине d ряда коммутантов группы G (т. е. d — наименьшее число, для которого $\mathcal{D}^d G = e$). Случай $n = 1$, $d = 1$ уже рассмотрены.

Предположим, что V обладает ненулевым собственным подпространством W , инвариантным относительно G . Если базис пространства W дополнить до базиса пространства V , то матрицы, соответствующие элементам группы G , имеют вид

Очевидно, что группа всех таких матриц замкнута в $GL(n, K)$ и гомоморфизм $x \mapsto \varphi(x)$ есть морфизм алгебраических групп. Так как группа G связна, то и группа $\varphi(G) \subset GL(W)$ связна, а также разрешима (17.3). Поскольку $n > \dim W$, то мы можем найти общий собственный вектор для группы $\varphi(G)$ в W и, следовательно, для группы G и V .

Остается рассмотреть случай, когда группа G действует на пространстве V неприводимо. Как и в доказательстве теоремы 17.5, мы должны показать, что $n = 1$. Положим $G' = (G, G)$, так что G' — связная (17.2) нормальная подгруппа, длина ряда коммутантов которой равна $d - 1$. По предположению индукции группа G' имеет общий собственный вектор в V , т. е. *полуинвариант* (11.4). Пусть W — линейная оболочка всех таких векторов в V . Тогда лемма 11.4 показывает, что группа G' действует диагонально на W . Рассуждение из (11.4) показывает, что пространство W инвариантно относительно G , так что $W = V$ ввиду неприводимости группы G . Так как группа G' действует на V диагонально, то группа G' коммутативна (т. е. $d \leq 2$).

Возьмем теперь элемент $y \in G'$. Ввиду сказанного выше для каждого элемента $x \in G$ матрица xyx^{-1} (в базисе пространства V , относительно которого действие группы G' диагонально) снова является диагональной. Будучи сопряженной с матрицей y , она имеет те же самые собственные значения, что и y , откуда следует, что матрица xyx^{-1} лежит в конечном фиксированном множестве диагональных матриц. Таким образом, образ группы G относительно морфизма $x \mapsto xyx^{-1}$ одновременно конечен и связан, и, следовательно, состоит только из y . Другими словами, $G' \subset Z(G)$.

Воспользуемся хорошо известной леммой Шура (которую также очень легко доказать): см. Ленг, Алгебра, гл. XVII, § 1. Поскольку поле K алгебраически замкнуто и группа G действует неприводимо, то лемма Шура показывает, что группа G' состоит из скалярных матриц. Но коммутатор двух матриц имеет определитель 1; поэтому скалярные матрицы группы G' есть корни n -й степени из 1 (которых в поле K не более чем n). Отсюда следует, что группа G' конечна, а также связна; поэтому $G' = e$ и $d = 1$, $n = 1$. $\square$

Эта теорема, обычно называемая **теоремой Ли — Колчина**, вновь будет доказана в § 21 способом, который не зависит от применения этой теоремы в § 19. Таким образом, настоящее доказательство, хотя и являющееся элементарным, может быть опущено.

Упражнения

1. Найти алгебраическую группу G , которая содержит замкнутые подгруппы A, B такие, что взаимный коммутант (A, B) не замкнут (ср. с упражнением 7.10).

2. Пусть G — алгебраическая группа, H — (не обязательно замкнутая) подгруппа. Пусть группа H коммутативна (соответственно нильпотентна, разрешима, унипотентна); доказать, что группа H обладает тем же самым свойством.

3. Пусть G — алгебраическая группа. Использовать лемму 17.1А для непосредственного доказательства того факта, что группа (G, G) замкнута (т. е. не использовать лемму 17.1Б).

4. Алгебраическая группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = e$ замкнутых подгрупп таких, что $(G_i, G_i) \subset G_{i+1}$ ($0 \leq i < n$). Дать аналогичный критерий для случая, когда группа G нильпотентна.

5. Пусть G — нильпотентная алгебраическая группа (не обязательно связная). Доказать, что центр $Z(G)$ имеет положительную размерность, если группа G имеет положительную размерность.

6. Доказать, что $SO(3, \mathbb{R})$ (= группа 3×3 вещественных ортогональных матриц с определителем 1) является некоммутативной связной подгруппой группы $SL(3, \mathbb{R})$ и состоит из полупростых элементов.

7. Воспользоваться следующим подходом, чтобы показать, что группа $U = U(n, K)$ обладает рядом замкнутых связных подгрупп, каждая из которых нормальна в U и имеет коразмерность 1 в предыдущей группе. Упорядочим пары (i, j) с $i < j$ при помощи правила: $(i, j) < (k, l)$, если $j < l$ или если $j = l$ и $i > k$. Таким образом, записывая их в возрастающем порядке, получаем: $(1, 2)$; $(2, 3)$, $(1, 3)$; $(3, 4)$, $(2, 4)$, $(1, 4)$; . . . ; $(2, n)$, $(1, n)$. Положим $U_{ij} = \{x \in U \mid x_{ki} = 0 \text{ при } (k, l) \leq (i, j)\}$. Проверить, что ряд $U \supset U_{12} \supset U_{23} \supset \dots \supset U_{1n} \supset e$ обладает желаемыми свойствами. Убедиться, что каждая группа U_{ij} нормализуется группой $D(n, K)$.

8. Пусть G — унипотентная алгебраическая группа, действующая на аффинном алгебраическом многообразии X . Доказать, что все G -орбиты замкнуты в X . В частности, все классы сопряженных элементов группы G замкнуты. (Рассмотреть действие группы G на $K[X]$ при помощи сдвигов (8.6). Если Y — незамкнутая орбита, то найти функцию $f \in K[X]$, обращающуюся в 0 и $\bar{Y} - Y$ и ненулевую на Y . Тогда G -сдвиги функции f порождают над K конечномерное G -инвариантное пространство, состоящее из функций, которые обращаются в 0 на $\bar{Y} - Y$. Применить теорему 17.5 к этому представлению группы G .)

Замечания. Лемма 17.1А восходит к Шуру, лемма 17.1Б в более сильном варианте принадлежит Бэру (см. Розенлихт [5] или Борель [4, стр. 111—114]). Теорема 17.5 была доказана Колчиным [2, стр. 775—776] (по поводу другого подхода см. Демазюр, Габриэль [1, IV, § 2]). Теорема 17.6 появилась у Колчина [1, стр. 19—20].

§ 18. Полупростые элементы

В § 16 мы изучали строение коммутативных алгебраических групп, состоящих из полупростых элементов и рассматривали, как такие группы действуют на объемлющей группе (или как объемлющая группа действует на них). Это действие в известной мере можно описать в терминах одного полупростого элемента s . Мы должны проанализировать теперь некоторые более тонкие аспекты этой ситуации, имея в виду доказательство структурной теоремы для разрешимых групп в § 19.

Для мотивировки дальнейших рассуждений поучительно обратить внимание на разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно автоморфизма $\text{Ad } s$, который также полупрост: $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(s) \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — сумма собственных пространств, отвечающих собственным значениям оператора $\text{Ad } s$, отличным от 1. Имеется ли подобное разложение для группы G ? С одной стороны, группа $C_G(s)$ должна соответствовать $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(s)$, т. е. последняя должна быть алгеброй Ли первой. Это справедливо для полупростого элемента s (18.1) (но не всегда верно для других элементов группы G , если $\text{char } K \neq 0$). Менее очевидно, что должно соответствовать $\mathfrak{n}$. Класс сопряженности $\text{Cl}_G(s)$ имеет правильную размерность. Оказывается, что он замкнут (а не только локально замкнут), если элемент s полупрост (18.2) и его сдвиг $M = \text{Cl}_G(s)s^{-1}$, как оказывается, имеет $\mathfrak{n}$ в качестве касательного пространства в точке e . Если мы обобщим эту ситуацию на случай, когда элемент s действует (при помощи сопряжения) на связной унитарной подгруппе U группы G , то получим в итоге разложение в U желаемого типа (18.3).

18.1. Глобальные и инфинитезимальные централизаторы. Пусть $G = GL(n, K)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$. В (10.6) было показано, что для произвольного элемента $x \in G$ алгебра Ли группы $C_G(x)$ есть в точности $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(x)$. Если $\text{char } K = 0$, то это верно для любой алгебраической группы

(13.4), но, к сожалению, это не так в характеристике p . Трудности здесь возникают в связи с плохим поведением унитарных элементов; они не появляются, если ограничиться рассмотрением *полупростых* элементов.

Пусть H — замкнутая подгруппа группы $G = GL(n, K)$, которая нормализуется некоторым полупростым элементом $s \in G$. Очевидно, $C_H(s) = H \cap C_G(s)$, откуда следует, что $\mathcal{L}(C_H(s)) \subset \mathfrak{h} \cap \mathcal{L}(C_G(s)) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(s)$. Чтобы доказать обратное включение, необходимо показать, что алгебра Ли $\mathfrak{c}_\mathfrak{h}(s)$ «не слишком велика». Но так как элемент $\text{Ad } s$ полупрост, то мы имеем разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(s) \oplus \mathfrak{n}'$ (см. начало этого параграфа), где $\mathfrak{n}'$ — сумма нетривиальных собственных пространств, и следовательно, достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{n}'$ «не слишком мала».

Класс сопряженности $\text{Cl}_G(s)$ — локально замкнутое множество (8.3) размерности, дополнительной к размерности централизатора $C_G(s)$ (см. теорему 4.3). Его сдвиг $M = \text{Cl}_G(s)s^{-1}$ содержит e , так что мы можем рассматривать его касательное пространство $\mathcal{T}(M)_e = \mathfrak{m}$ как подпространство в $\mathcal{T}(G)_e = \mathfrak{g}$. Мы увидим ниже, что $\mathfrak{m}$ совпадает с пространством $\mathfrak{n}$, которое было определено ранее: $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{n}$. Далее, $M \cap H \supset M'$ — аналогичное подмногообразие в H (размерности, дополнительной к $\dim C_H(s)$) и его касательное пространство $\mathfrak{m}'$ лежит в $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{n}'$. На этот раз это включение работает нам на пользу: соотношение $\dim \mathfrak{m}' \leq \dim \mathfrak{n}'$ влечет, что $\text{codim } C_H(s) \text{ в } H = \dim M' \leq \dim \mathfrak{n}' = \text{codim } \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(s) \text{ в } \mathfrak{h}$, откуда $\dim \mathfrak{c}_\mathfrak{h}(s) \leq \dim C_H(s)$, что и требовалось.

Остается показать, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. (Это относится только к G , но не к H). Напомним, что морфизм $\gamma_s: G \rightarrow G$, определенный правилом $\gamma_s(x) = xsx^{-1}s^{-1}$, имеет своим дифференциалом линейное отображение $1 - \text{Ad } s: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (10.1). Очевидно, $M = \gamma_s(G)$, так что $(1 - \text{Ad } s)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{m}$. С другой стороны, ясно, что $\text{Ker}(d\gamma_s) = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(s)$ и $\text{Im}(d\gamma_s) = \mathfrak{n}$, так что, в частности, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}$. Но мы уже знаем размерности левой и правой частей этого включения, так как $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(s) = \mathcal{L}(C_G(s))$, а именно: $\dim \mathfrak{m} = \dim M = \text{codim } C_G(s) = \text{codim } \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(s) = \dim \mathfrak{n}$. Следовательно, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. В итоге получаем

Предложение. Пусть H — замкнутая подгруппа группы $GL(n, K)$, которая нормализуется полупростым эле-

ментом $s \in GL(n, K)$. Тогда $c_b(s) = \mathcal{L}(C_H(s))$ и сумма всех нетривиальных собственных пространств оператора $\text{Ad}(s)$ в $\mathfrak{h}$ есть касательное пространство многообразия $\text{Cl}_H(s)s^{-1}$. $\square$

(Заметим, что это предложение остается в силе, если заменить $GL(n, K)$ на алгебраическую группу, содержащую H и s .)

Полезно дать интерпретацию этого результата в геометрических терминах. Пусть G, H, s , как и выше; рассмотрим морфизм класса сопряженности

$$\varphi: H \rightarrow \text{Cl}_H(s) \subset H,$$

где $\varphi(x) = xsx^{-1}$. Это — композиция морфизма γ_s и сдвига на s ; последний является изоморфизмом, так что $\text{Ker}(d\varphi)_e = \text{Ker}(d\gamma_s)_e = c_b(s) = \mathcal{L}(C_H(s))$. Так как слои морфизма φ есть смежные классы по подгруппе $C_H(s)$, то морфизм φ сепарабелен (5.5). Из замечания 1 в (12.4) мы теперь выводим

Следствие А. Пусть G, H, s , как и выше. Морфизм класса сопряженности $\varphi: H \rightarrow \text{Cl}_H(s)$ можно отождествить с каноническим морфизмом $H \rightarrow H/C_H(s)$. $\square$

Выше мы обсуждали вопрос об имитации разложения $\mathfrak{h} = c_b(s) \oplus \mathfrak{p}'$ в группе H . Поскольку $\mathfrak{p}'$ — в точности касательное пространство многообразия $M' = \text{Cl}_H(s)s^{-1}$, согласно выше приведенному доказательству, и так как $c_b(s)$ — алгебра Ли группы $C_H(s)$, то мы получаем следующее частичное решение нашего вопроса:

Следствие Б. Пусть G, H, s , как и выше. Пусть $G\tau: C_H(s) \times M' \rightarrow H$ — морфизм произведения. Тогда $d\tau_{(e, e)} —$ изоморфизм $c_b(s) \oplus \mathfrak{m}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$. Кроме того, $d(\gamma_s|_{M'}) = (1 - \text{Ad } s)|_{\mathfrak{m}'}: \mathfrak{m}' \rightarrow \mathfrak{m}'$ — изоморфизм. $\square$

18.2. Замкнутые классы сопряженных элементов.

Предложение. Пусть H — замкнутая подгруппа группы $G = GL(n, K)$, нормализуемая полупростым элементом $s \in G$. Тогда класс сопряженности $\text{Cl}_H(s)$ замкнут.

Доказательство. Если x — эндоморфизм конечномерного векторного пространства, и T — переменная, то обозначим через $t(x, T)$ (соответственно через $c(x, T)$) минимальный (соответственно характеристический) полином элемента x . Напомним, что элемент x полупрост тогда и только тогда, когда полином $t(x, T)$ не имеет кратных корней.

Положим теперь $W = \{x \in N_G(H) \mid m(s, x) = 0 \text{ и } c(\text{Ad } x|_{\mathfrak{h}}, T) = c(\text{Ad } s|_{\mathfrak{h}}, T)\}$. Очевидно, что W — замкнутое подмножество в $N_G(H)$ (и, следовательно, в G), инвариантное относительно сопряжения элементами из H . Первое условие в определении W требует, чтобы каждый элемент $x \in W$ аннулировал минимальный полином элемента s , который, по предположению, не имеет кратных корней; следовательно, полином $m(x, T)$ не имеет кратных корней, и элемент x также полупрост. Применим теперь к действию элемента x на H предложение 18.1; получим $\dim \text{Cl}_H(x) = \text{codim } C_H(x) = \text{codim } c_s(x) = \dim \mathfrak{h} - m_1(x)$, где $m_1(x)$ — кратность собственного значения 1 оператора $\text{Ad } x|_{\mathfrak{h}}$. Но второе условие в определении W дает $m_1(x) = m_1(s)$, откуда следует, что все H -орбиты в W имеют равные размерности. Ввиду предложения 8.3 все орбиты $\text{Cl}_H(x)$ замкнуты в W и, следовательно, в G . В частности, орбита $\text{Cl}_H(s)$ замкнута. $\square$

Имеется аналогичный результат для H -орбит полупростого элемента в $\mathfrak{g}$: см. упражнение 6. Как и в (18.1), отметим, что группу $GL(n, K)$ можно заменить на любую замкнутую подгруппу G , содержащую H и s .

Возможно, читателя заинтересует вопрос, какие классы сопряженности неполупростых элементов не замкнуты. Эта информация нигде в этой книге не потребуется, так что мы ограничимся лишь краткими указаниями по этому вопросу. Если H — коммутативная алгебраическая группа, то каждый класс состоит из одного элемента и, следовательно, замкнут. Классы сопряженности в унитарных группах также замкнуты (упражнение 17.8). Но если группа H редуцируема (19.5), то замкнутыми классами являются только классы сопряженности полупростых элементов. В некоторых случаях легко понять, почему это так. Например, в группе $GL(n, K)$ матрицы $1 + ae_{ij}$ при фиксированных $i \neq j$ образуют одномерную унитарную группу, нормализуемую группой $D(n, K)$, и, как легко видеть, все такие матрицы с $a \neq 0$ сопряжены. Но тогда замыкание класса сопряженности элемента $1 + e_{ij}$ в $GL(n, K)$ должно содержать 1 (упражнение 5), которая, конечно, не может лежать в классе сопряженности указанного элемента.

18.3. Действие полупростого элемента на унитарной группе. Если H — замкнутая подгруппа алгебраиче-

ской группы G и если H нормализуется некоторым полупростым элементом $s \in G$, то предложение 18.2 показывает, что множество $M = \text{Cl}_H(s)s^{-1}$ замкнуто в H (и неприводимо, если группа H связна, — как образ группы H относительно морфизма γ_s). С другой стороны, $C = C_H(s)$ — замкнутая подгруппа группы H . Если мы знаем, что группа H связна и что морфизм произведения $\tau: C \times M \rightarrow H$ биективен, то мы можем заключить, что группа C также связна: образ группы $C^0 \times M$ (обозначим ее через D) — конструктивное множество (4.4) и конечное число его левых сдвигов не пересекается и покрывает H . Так как множество $\bar{D}$ неприводимо, то $\bar{D} = H$. Но тогда левые сдвиги множества D содержат непересекающиеся открытые подмножества в H , что возможно только при $D = H$. К сожалению, морфизм τ не всегда биективен, и множество C не всегда связно, если только мы не подберем специальным образом группу H . Мы хотим теперь рассмотреть случай, когда группа H унитарна. Это позволит нам в полной мере использовать разложение Жордана, а также воспользоваться индукцией по $\dim H$ благодаря тому факту, что H — нильпотентная группа (следствие 17.5).

Теорема. Пусть U — связная унитарная подгруппа алгебраической группы G , и пусть $s \in G$ — полупростой элемент, нормализующий U . Положим $\gamma_s(x) = xsx^{-1}s^{-1}$ ($x \in G$), $M = \gamma_s(U)$, $C = C_U(s)$. Тогда:

(а) C — замкнутая подгруппа и M — замкнутое связное подмногообразие многообразия U ;

(б) морфизм произведения $\tau: C \times M \rightarrow U$ биективен и (следовательно) группа C связна;

(в) $\gamma = \gamma_s|_M$ — биекция многообразия M на себя.

Доказательство. Утверждение (а) следует из замечаний, сделанных выше. Для доказательства (б) достаточно проверить, что морфизм τ биективен, а для доказательства утверждения (в) мы должны показать, что морфизм γ биективен. Разобьем рассуждение на несколько шагов, из которых первый тривиален:

(1) Если $x \in U$, $y \in C$, то $\gamma_s(xy) = \gamma_s(x) = \gamma_s(x)\gamma_s(y)$.

(2) Если $x \in Z(U)$, $y \in U$, то $\gamma_s(xy) = \gamma_s(x)\gamma_s(y)$, откуда $\gamma_s(x^{-1}) = \gamma_s(x)^{-1}$.

Запишем $\gamma_s(xy) = xysy^{-1}s^{-1} = x(ysy^{-1}s^{-1})x^{-1}(xsx^{-1}s^{-1})$. Если элемент x централен, то это равно $\gamma_s(y)\gamma_s(x)$. Но

мы имеем равенство $\gamma_s(xy) = \gamma_s(yx)$, откуда следует утверждение (2).

(3) Если группа U абелева, то морфизм τ биективен. Так как $U = Z(U)$, то шаг (2) показывает, что $\gamma_s: U \rightarrow U$ — гомоморфизм групп. Его образ, по определению, совпадает с M , а ядро, очевидно, совпадает с C . Так как теперь M — группа, то τ — гомоморфизм групп и, следовательно, сюръективен (ибо $\dim U = \dim C + \dim M$). Если $x \in C$, $y \in M$ и $\tau(x, y) = xy = e$, то, записывая $y = \gamma_s(u)$ для некоторого $u \in U$, мы имеем $s^{-1}x = us^{-1}u^{-1}$; но элементы s и x коммутируют, так что левая часть есть разложение Жордана полупростого элемента $us^{-1}u^{-1}$, откуда $x = e = y$. Это показывает, что морфизм τ также инъективен.

(4) Морфизм τ всегда биективен. Воспользуемся здесь индукцией по $\dim U$. Поскольку группа U нильпотентна, то найдется нетривиальная связная подгруппа V группы $Z(U)$, нормализуемая s (например, компонента единицы группы $Z(U)$, см. (17.4) (а)). Если $V = Z(U) = U$, то мы можем использовать (3). В противном случае рассмотрим связную унипотентную группу $U' = U/V$ размерности меньшей, чем размерность группы U . Заметим, что как s , так и U принадлежат группе $N_G(V)$, в которой группа V нормальна; поэтому мы можем положить $s' = \pi(s)$, где $\pi: N_G(V) \rightarrow N_G(V)/V$ — канонический морфизм. Тройка (G', U', s') , где $G' = N_G(V)/V$, удовлетворяет исходным предположениям относительно (G, U, s) , так что, по предположению индукции, морфизм произведения $\tau': C_{U'}(s') \times M' \rightarrow U'$ биективен, где $M' = \gamma_{s'}(U') = \pi(M)$. Предположение индукции равным образом применимо и к (G, V, s) , так что $\tau_0: C_V(s) \times \gamma_s(V) \rightarrow V$ — биективный морфизм.

Теперь мы можем доказать, что морфизм τ инъективен. Пусть $z_1x = z_2y$ ($z_i \in C$, $x, y \in M$) или $zx = y$ ($z = z_2^{-1}z_1 \in C$). Применим к этому равенству морфизм π ; так как $\pi(z) \in C_{U'}(s')$ и $\pi(x), \pi(y) \in M'$, то инъективность морфизма τ' дает $\pi(z) = e$, или $z \in V$. Запишем $x = \gamma_s(u)$, $y = \gamma_s(v)$, так что $z(usu^{-1}) = vsu^{-1}$. Левая часть есть разложение Жордана полупростого элемента vsu^{-1} (ибо $V \subset Z(U)$); следовательно, $z = e$ и $x = y$, что и требовалось.

Остается показать, что морфизм τ сюръективен. Заметим сначала, что $\gamma_s(V) \subset M \cap V$. Обратно, любой элемент $v \in V$ имеет вид zy ($y \in \gamma_s(V)$, $z \in C_V(s)$), так как морфизм τ_0 сюръективен; кроме того, если $v \in M$, то $v = y \in \gamma_s(V)$, так как морфизм τ инъективен. Это равенство $\gamma_s(V) = M \cap V$ можно в свою очередь использовать для того, чтобы показать, что $C_{U'}(s') = \pi(C)$. Именно, пусть элемент $\pi(x) = x'$ ($x \in U$) перестановочен с элементом $\pi(s) = s'$. Тогда $\gamma_{s'}(x') = e$, или $\gamma_s(x) \in \text{Ker}(\pi) \cap M = V \cap M = \gamma_s(V)$, или $\gamma_s(x) = \gamma_s(v)$ ($v \in V$). Но $V \subset Z(U)$, так что из (2) следует, что $v^{-1}x \in C$, $\pi(v^{-1}x) = \pi(x)$, как и утверждалось.

Теперь легко показать, что морфизм τ сюръективен:

$$\begin{aligned} U &= CMV \text{ (морфизм } \tau' \text{ сюръективен, } \pi(M) = M', \\ &\qquad \qquad \qquad \pi(C) = C_{U'}(s')) \\ &= CVM \text{ (} V \subset Z(U) \text{)} \\ &= CC_V(s) \gamma_s(V) M \text{ (морфизм } \tau_0 \text{ сюръективен)} \\ &= CM \text{ (так как } \gamma_s(V) M = M \text{ ввиду (2)).} \end{aligned}$$

(5) *Морфизм γ биективен.* Ввиду шага (1) и сюръективности морфизма τ в (4) мы имеем $M = \gamma_s(U) = \gamma_s(CM) = \gamma_s(M)$, так что морфизм γ сюръективен. Если $\gamma_s(x) = \gamma_s(y)$ при $x, y \in M$, то $xy^{-1} \in C$ и $\tau(e, x) = \tau(xy^{-1}, y)$, откуда $xy^{-1} = e$ (ибо морфизм τ инъективен), $x = y$. $\square$

Связность группы $C_U(s)$ будет использована позднее. Вместо того чтобы доказывать это непосредственно, мы прибегли к некоторому окольному пути; этим иллюстрируется тот факт, что свойство связности централизаторов (и т. п.) часто весьма трудно уловимо. Следует указать, однако, что если $\text{char } K = 0$, то унипотентная группа (в частности, $C_U(s)$) всегда связна (упражнение 15.6). Биективность морфизмов τ и γ (необходимую для дальнейшего) в любом случае пришлось бы доказывать примерно так же, как и выше.

18.4. Действие диагонализированной группы. Пусть G — произвольная алгебраическая группа. Помимо изучения неподвижных точек одного полупростого элемента группы G на замкнутой подгруппе H , нам необходимо будет изучить действие d -группы D . Например, желательно

выяснить, имеется ли подобное (18.1) соответствие между глобальными и локальными централизаторами.

Предложение А. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G , нормализуемая d -группой D . Тогда $\mathcal{L}(C_H(D)) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{h}}(D)$.

Доказательство. Если $H^0 \subset C_H(D)$, то доказывать нечего. В противном случае воспользуемся индукцией по $\dim H$, начиная с размерности 0. Пусть $s \in D$ — такой элемент, для которого размерность группы $H' = C_H(s)$ меньше, чем размерность H . Конечно, $C_H(D) \subset H'$. Согласно предложению 18.1 мы имеем $\mathfrak{c}_{\mathfrak{h}}(s) = \mathfrak{h}'$; следовательно, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{h}}(D) \subset \mathfrak{h}'$. Используя эти факты и индукцию, получаем $\mathcal{L}(C_H(D)) = \mathcal{L}(C_{H'}(D)) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{h}'}(D) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{h}}(D) \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{c}_{\mathfrak{h}}(D)$. $\square$

Если d -группа D действует на алгебраической группе H , предложение А показывает, что алгебра Ли замкнутой подгруппы H^D состоит из неподвижных точек группы D на $\mathfrak{h}$. Для доказательства следует лишь принять в качестве G полупрямое произведение группы D и H .

Следствие. Пусть d -группа D действует на алгебраических группах H, H' , и пусть $\varphi: H \rightarrow H'$ — эпиморфизм, эквивариантный относительно этого действия группы D . Тогда φ отображает компоненту единицы группы H^D на компоненту единицы группы H'^D .

Доказательство. Морфизм φ можно представить в виде композиции D -эквивариантных морфизмов $H \rightarrow H/K \rightarrow H'$, где $K = \text{Кер } \varphi$. Так как вторая стрелка — биективный морфизм, то мы можем предполагать, что морфизм φ сепарабелен, $H' = H/K$. Это означает, что $\text{Кер } d\varphi = \mathfrak{k}$. Так как D действует на $\mathfrak{h}$ диагонально, то мы можем найти D -инвариантное подпространство $\mathfrak{n}$, дополнительное к $\mathfrak{k}$; тогда $\mathfrak{n}$ отображается $d\varphi$ изоморфно на $\mathfrak{h}'$, так что неподвижные точки группы D на $\mathfrak{n}$ соответствуют неподвижным точкам группы D на $\mathfrak{h}'$. Предложение показывает, что $\dim K^D = \dim \mathfrak{k}^D$, в то время как $\dim H'^D = \dim \mathfrak{h}'^D = \dim \mathfrak{h}^D$. Комбинируя эти соотношения, получаем $\dim H'^D = \dim \mathfrak{h}^D - \dim \mathfrak{k}^D = \dim H^D - \dim K^D = \dim \varphi(H^D)$. Так как φ отображает компоненту единицы группы H^D в компоненту единицы группы H'^D , то это обеспечивает сюръективность. $\square$

Наконец, мы рассмотрим аналог (18.3).

Предложение Б. Пусть U — связная замкнутая унитарная подгруппа группы G , нормализуемая d -группой D . Тогда группа $C_U(D)$ связна.

Доказательство. Если группа D централизует U , то доказывать нечего. В противном случае воспользуемся индукцией по $\dim U$. Пусть $s \in D$ — элемент, не централизующий группу U . Тогда группа $U' = C_U(s)$ связна (теорема 18.3) и содержит группу $C_U(D)$, так что мы можем заменить U на U' и воспользоваться индукцией. $\square$

Не лишне заметить, что в предложении Б и следствии предложения А ничего не говорится об алгебрах Ли; однако доказать эти утверждения без помощи инфинитезимальной техники не так то легко.

Упражнения

1. Пусть $G = PGL(2, \mathbb{C})$, $s = \text{diag}(i, -i)$, где $i^2 = -1$. Показать, что группа $C_G(s)$ состоит из двух связных компонент.

2. Пусть $G = GL(V)$, H — замкнутая подгруппа группы G . Предположим, что $(*)$ алгебра Ли $\mathfrak{h}$ обладает инвариантным относительно $\text{Ad } H$ дополнительным подпространством $\mathfrak{w}$ в $\mathfrak{g}$. Доказать, что если $x \in H$, то $\text{Cl}_G(x) \cap H$ есть объединение конечного числа классов H -сопряженности. Доказать аналогичное утверждение для $\text{Cl}_G(x) \cap \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{h}$. (Сравнить размерности, как в (18.1).)

3. Воспользоваться упражнением 2 для доказательства того факта, что группа $SL(n, K)$ имеет лишь конечное число классов сопряженных унитарных элементов при условии, что $\text{char } K$ не делит n (или использовать жорданову нормальную форму для произвольного n). Что вы можете сказать о других классических группах?

4. В предположении $(*)$ из упражнения 2 доказать, что глобальные и инфинитезимальные централизаторы в H и в $\mathfrak{h}$ соответствуют друг другу при произвольном $x \in G$.

5. Доказать утверждение (сформулированное в (18.2)) о том, что класс сопряженности элемента $1 + e_{ii}$ в $GL(n, K)$ (или в $SL(n, K)$) не замкнут. Указать незамкнутые унитарные классы в других классических группах.

6. Пусть H — замкнутая подгруппа алгебраической группы G . Мы говорим, что элемент $x \in \mathfrak{g}$ нормализует H , если $\text{Ad } y(x) = -x \in \mathfrak{h}$ для всех $y \in H$ (и в этом случае $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$). Доказать, что если элемент x полупрост и нормализует H , то множество $\{\text{Ad } y(x) \mid y \in H\}$ замкнуто в $\mathfrak{g}$. (Имитировать доказательство предложения 18.2.)

7. Пусть $G = SL(2, K)$, $s = \text{diag}(a, a^{-1})$, $a \neq \pm 1$. Тогда $C_G(s) = D(2, K) \cap G$. Показать, что пересечение $C_G(s) \cap \text{Cl}_G(s)s^{-1}$ совпадает с $\{1, \text{diag}(a^{-2}, a^2)\}$. Является ли отображение τ из теоремы 18.3 в этом случае сюръективным?

8. Доказать аналог теоремы 18.3, заменив s на унитарный элемент u , группу U — на тор T , в предположении, что $\mathcal{L}(C_T(u)) = c_t(u)$.

9. Доказать, что τ и γ в теореме 18.3 — изоморфизмы многообразий (относительно сепарабельности см. следствие Б предложения 18.1).

10. Пусть G — связная одномерная алгебраическая группа. Доказать, что каждый полупростой элемент группы G принадлежит центру $Z(G)$, а затем вывести отсюда, что $G = Z(G)$.

Замечания. Теорема 18.3 появилась у Бореля [1], хотя в полной мере соответствие между глобальными и инфинитезимальными централизаторами (18.1) было рассмотрено позднее, см. Борель [4, § 9], Борель, Титс [1, § 10], Борель, Спрингер [1] и, в предварительном виде, — в АГДП. Дальнейшее изучение замкнутых классов сопряженности проводилось Борелем, Хариш — Чандрой [1]. Техника (18.1) (см. упражнения 2, 3, 4) применялась для изучения унитарных классов сопряженности Ричардсоном [1]; см. также, Спрингер, Стейнберг [1, I. 5. 2].

§ 19. Связные разрешимые группы

В этом параграфе мы дадим описание произвольной связной разрешимой алгебраической группы: она представима в виде полупрямого произведения некоторого тора и (нормальной) унитарной подгруппы. Мы будем при этом существенно использовать результаты §§ 16 и 18, а также фундаментальную теорему Ли — Колчина (17.6).

19.1. Точная последовательность. Если G — связная разрешимая алгебраическая группа, то теорема Ли — Колчина позволяет нам рассматривать группу G как подгруппу некоторой верхней треугольной группы $T(n, K)$. Для этой последней мы имеем следующую расщепляющуюся точную последовательность:

$$1 \rightarrow U(n, K) \rightarrow T(n, K) \xrightarrow{\pi} D(n, K) \rightarrow 1.$$

Ограничение ее на группу G дает

$$(*) \quad 1 \rightarrow G_u \rightarrow G \xrightarrow{\pi} T' \rightarrow 1.$$

Здесь $G_u = G \cap U(n, K)$ — замкнутая нормальная подгруппа группы G , состоящая из всех унитарных элементов, а $T' = \pi(G)$ — замкнутая связная подгруппа группы $D(n, K)$, являющаяся, следовательно, тором

(предложение 16.2). Группа G/G_u абелева, G_u содержит коммутант (G, G) .

Мы утверждаем, что группа G_u *связна*. Это верно в коммутативном случае (15.5), в частности для группы $G/(G, G) = G' = G'_s \times G'_u$. Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — канонический морфизм. Очевидно, $G_u \subset \varphi^{-1}(G'_u)$. Обратно, из соотношения $(G, G) = \text{Ker } \varphi \subset G_u$ следует, что $\varphi^{-1}(G'_u) \subset G_u$. Наше утверждение следует теперь из того факта, что обе группы (G, G) и G'_u связны (см. (17.2)).

Рассматривая связанные компоненты пересечений группы G_u с последовательными членами соответствующего нормального ряда группы $U(n, K)$ (упражнение 17.7) и исключая повторения, мы получим убывающий ряд связанных подгрупп группы G_u , каждая из которых нормальна в G и имеет коразмерность 1 в предыдущей.

Требуется доказать, что точная последовательность (*) *расщепляется*. Для этого достаточно будет убедиться, что группа G содержит тор T той же размерности, что и T' , ибо в этом случае соотношение $T \cap G_u = e$ очевидно, а соотношение $\mathcal{L}(T) \cap \mathcal{L}(G_u) = 0$ почти очевидно (15.3); равенство $\pi(T) = T'$ следует из соображений размерности. Мы также докажем, что любые два максимальных тора группы G сопряжены. (Этот результат играет здесь ту же роль, которую в теории алгебр Картана.) Случай, когда группа G абелева, уже рассмотрен (15.5), так что мы рассмотрим сейчас случай, когда группа G нильпотентна.

19.2. Нильпотентный случай. Если группа G разрешима, то множество G_s всех полупростых элементов не обязательно замкнуто и не всегда является подгруппой (например, в случае $G = T(n, K)$, $n > 1$).

Предложение. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа. Тогда G нильпотентна в том и только в том случае, когда G_s — подгруппа; если это имеет место, то группа G_s замкнута и $G = G_s \times G_u$.

Доказательство. Пусть G_s — подгруппа группы G . В точной последовательности (*) из (19.1) отображение π вкладывает G_s в T' , так что G_s — абелева группа и, следовательно, $\bar{G}_s$ есть d -группа; отсюда следует, что $\bar{G}_s = G_s$. Ясно, что π отображает G_s на T' , так что последовательность (*) расщепляется и группа G есть полу-

прямое произведение $G_s \rtimes G_u$. Но, очевидно, группа G_s нормальна в G , так что в действительности это произведение прямое. В частности, группы G_s и G_u поэлементно перестановочны, так что $G_s \subset Z(G)$ (это следует также из жесткости d -групп, следствие 16.3). Группа $G/Z(G)$ изоморфна подгруппе нильпотентной группы G_u (17.5), так что группа G нильпотентна (лемма 17.4(б)).

Обратно, предположим, что группа G нильпотентна. Требуется доказать, что G_s — подгруппа; для этого достаточно, очевидно, показать, что любая пара полупростых элементов x, y коммутирует (произведение перестановочных полупростых элементов — снова полупростой элемент). Но $xyx^{-1}y^{-1} = z \in (G, G) \subset G_u$, $xyx^{-1} = zu$. Если мы сможем показать, что элемент y перестановочен со всеми унитарными элементами, то мы сможем сделать вывод о том, что правая часть есть разложение Жордана полупростого элемента xyx^{-1} , откуда $z = e$ и $xy = yx$, что и требуется. Чтобы убедиться в том, что элемент $y \in G_s$ централизует группу G_u , мы напомним ситуацию теоремы 18.3: элемент y действует на связной унитарной группе G_u , $M = \gamma_y(G_u)$ и $\gamma_y: M \rightarrow M$ — биективный морфизм (утверждение (в)). Но тогда $M \subset G^\infty$. Так как группа G нильпотентна, то $M = \{e\}$ и y централизует группу G_u . $\square$

Стоит особо отметить, что связная нильпотентная группа обладает *единственным максимальным тором* (именно, G_s), так что вопрос о сопряженности не возникает.

19.3. Общий случай.

Теорема. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа. Тогда:

(а) G_u — замкнутая связная нормальная подгруппа группы G , содержащая коммутант (G, G) , и обладающая рядом связных замкнутых подгрупп, каждая из которых нормальна в G и имеет коразмерность 1 в последующей;

(б) максимальные торы группы G сопряжены относительно группы G^∞ , и если T — один из этих торов, то $G = T \rtimes G_u$.

Доказательство. Утверждение (а) было доказано в (19.1). Для доказательства (б) воспользуемся индукцией по $\dim G$ (начиная с размерности 0). Прежде всего нам нужно найти тор в группе G , который проектируется

на T' в точной последовательности (*) из (19.1), откуда будет следовать, что $G = T \ltimes G_u$. Если группа G нильпотентна, то это установлено в предложении 19.2. Если G — ненильпотентная группа, то, очевидно, мы можем найти *нецентральный* полупростой элемент $s \in G$; тогда размерность группы $H = C_G(s)^0$ будет меньше размерности G . Если D — замыкание в G подгруппы, порожденной S , то морфизм $\pi: G \rightarrow G/G_u = T'$ эквивариантен относительно D , и действие группы $\pi(D)$ на T' тривиально, так как группа T' коммутативна. Применяя следствие предложения 18.4А, мы видим, что $\pi(H) = T'$. Это показывает, что коразмерность группы H_u равна $\dim T'$. По предположению индукции, группа H содержит тор размерности $\dim T'$, который, очевидно, будет максимальным тором в группе G .

Зафиксируем такой максимальный тор T в G . Приступая к доказательству того факта, что все остальные максимальные торы сопряжены с T , мы сначала покажем, что любой полупростой элемент $s \in G$ сопряжен (относительно группы G^∞) с некоторым элементом из T . Если группа G нильпотентна, то $T = G_s$ (19.2) и доказывать нечего. Если группа G ненильпотентна, то группа $G^\infty \subset G_u$ нетривиальна, а также связна и унипотентна (и, следовательно, *нильпотентна* согласно следствию 17.5). Поэтому размерность компоненты единицы N группы $Z(G^\infty)$ положительна; группа N , очевидно, нормальна в G . При каноническом отображении $\varphi: G \rightarrow G/N = G'$ группа G^∞ отображается на G'^∞ . Запишем $G' = S \ltimes G'_u$, $S = \varphi(T)$. По индукции $\varphi(x)\varphi(s)\varphi(x)^{-1} \in S$ для некоторого элемента $\varphi(x) \in G'^\infty$ (причем мы можем считать, что $x \in G^\infty$). Это означает, что элемент s G^∞ -сопряжен с $xsx^{-1} \in TN$. Поэтому (с изменением обозначений) достаточно доказать, что любой полупростой элемент $s \in TN$ сопряжен при помощи некоторого элемента из N с элементом группы T . Запишем $s = tn$ ($t \in T$, $n \in N$) и применим теорему 18.3(б) к действию элемента t^{-1} на N ; мы имеем $n = z\gamma_{t^{-1}}(u)$ для некоторых $z \in C_N(t)$, $u \in N$, откуда $s = tzt^{-1}utu^{-1} = z(utu^{-1})$. Но элемент z унипотентен и (так как группа N абелева) перестановочен с u и с t ; поэтому правая часть есть разложение Жордана элемента s , откуда $z = e$. Таким образом, $u^{-1}su = t \in T$.

Наконец, пусть S — произвольный максимальный тор группы G . Согласно предложению 16.4 существует $s \in S$, централизатор которого в G совпадает с централизатором тора S . Ввиду предыдущего абзаца мы можем предположить после замены тора S на сопряженный, что $s \in T$. Но тогда $T \subset C_G(s) = C_G(S)$. Следовательно, $(ST)^0$ — тор (= связная d -группа), содержащий максимальные торы S, T . Поэтому $S = T$. $\square$

При доказательстве сопряженности максимальных торов группы G мы в действительности установили

Следствие (доказательства). Пусть G — связная разрешимая группа. Тогда каждый полупростой (соответственно унитарный) элемент группы G лежит в некотором максимальном торе (соответственно в максимальной связной унитарной подгруппе). $\square$

Позднее мы сможем исключить слово «разрешимая» из этого утверждения: связная алгебраическая группа есть объединение связных разрешимых подгрупп (22.2).

Структурная теорема, которую мы только что доказали, дает удовлетворительную картину строения произвольных связных разрешимых групп, но она не описывает строения *одномерных групп*. В действительности G_a и G_m — единственные одномерные группы (см. § 20); однако доказательство этого факта в унитарном случае (если $\text{char } K > 0$) требует изобретательности.

19.4. Нормализатор и централизатор. Завершая наше изучение разрешимых групп, мы выведем некоторые полезные результаты, имеющие место только в разрешимом случае (см. упражнение 1).

Предложение. Пусть H — подгруппа (не обязательно замкнутая) связной разрешимой группы G , причем H состоит только из полупростых элементов. Тогда:

(а) группа H содержится в некотором торе;

(б) группа $C_G(H) = N_G(H)$ связна.

Доказательство. Каноническое отображение $\pi: G \rightarrow G/G_u$, будучи ограничено на H , становится инъективным. Следовательно, группа H коммутативна и ее замыкание $\bar{H}$ есть d -группа. Так как нормализаторы *) (соответственно централизаторы) групп H и $\bar{H}$ в G совпадают,

*) В действительности, совпадение нормализаторов является следствием рассуждения настоящего абзаца, которое, в сущности, не опирается на этот факт. — Прим. перев.

то мы можем предполагать, что группа H замкнута. Из жесткости d -групп (следствие 16.3) уже следует, что $N_G(H)^0 = C_G(H)^0$, но мы можем получить более точную информацию (используя π): если $x \in N_G(H)$, то, так как элемент $\pi(x)$ централизует $\pi(H)$, мы имеем $xyx^{-1} = yz$ при $y \in H$ ($z \in \text{Ker } \pi = G_u$), в то время как $xyx^{-1} \in H$. Таким образом, $z \in H \cap G_u = \{e\}$, $x \in C_G(H)$.

Зафиксируем теперь максимальный тор T группы G . Если $H \subset Z(G)$, то, как показывает следствие 19.3, каждый элемент группы H принадлежит T (и, разумеется, группа $C_G(H) = G$ связна). В противном случае пусть $s \in H$, $s \notin Z(G)$. Следствие 19.3 позволяет нам заменить T сопряженным тором, содержащим элемент s , и считать, что $T \subset C_G(s)$. В этом случае ясно, что $C_G(s) = T \rtimes C_{G_u}(s)$. Но группа $C_{G_u}(s)$ *связна* (теорема 18.3), так что и группа $C_G(s)$ связна, содержит H и имеет размерность меньшую, чем размерность группы G . Согласно предположению индукции H сопряжена в $C_G(s)$ подгруппе тора T и, сверх того, $C_G(H) = C_{C_G(s)}(H)$ связна. $\square$

19.5. Разрешимый и унипотентный радикалы. По модулю § 20 мы готовы теперь приступить к изложению общей структурной теории алгебраических групп. Это удобный момент для введения таких ключевых понятий, как «полупростая» группа и «редуктивная» группа. Мы могли бы сделать это несколько раньше, но в этом не было никакого практического смысла. Вместе со следствием 7.4 лемма 17.3(в) показывает, что произвольная алгебраическая группа G обладает единственной наибольшей нормальной разрешимой подгруппой, которая автоматически замкнута. Ее компонента единицы является тогда наибольшей связной нормальной разрешимой подгруппой группы G ; мы называем ее **радикалом** группы G и обозначаем через $R(G)$. Подгруппа радикала $R(G)$, состоящая из всех унипотентных элементов, нормальна в G ; мы называем ее **унипотентным радикалом** группы G и обозначаем через $R_u(G)$. Унипотентный радикал можно охарактеризовать как наибольшую связную нормальную унипотентную подгруппу группы G .

Если радикал $R(G)$ тривиален и группа $G \neq e$ связна, то мы говорим, что G — **полупростая группа** (пример: $SL(n, K)$). Если унипотентный радикал $R_u(G)$

тривиален и группа $G \neq e$ связна, то мы называем группу G **редуктивной** (примеры: $GL(n, K)$, произвольный тор, любая полупростая группа). Исходя из произвольной связной алгебраической группы G , мы, очевидно, получаем полупростую группу $G/R(G)$ и редуктивную группу $G/R_u(G)$, за исключением случаев $G=R(G)$ или $G=R_u(G)$. Следовательно, изучение произвольной группы G в известной степени сводится к изучению конечной группы G/G^0 , полупростой (или редуктивной) группы и связной разрешимой (или унипотентной) группы. Разумеется, необходимо также рассматривать вопрос о том, как эти куски соединяются вместе, образуя группу G (*проблема расширения*); практически это может оказаться довольно трудно сделать. Оставшаяся часть этой книги посвящена главным образом редуктивным группам. Весьма трудно, как мы увидим, непосредственно воспользоваться предположением, что группа G не содержит связных нормальных унипотентных подгрупп. Мы сделаем пока некоторые предварительные замечания.

Лемма. Пусть группа G редуктивна. Тогда $R(G) = Z(G)^0$ — тор и $R(G) \cap (G, G)$ — конечная группа.

Доказательство. Тот факт, что $R(G)$ — тор, следует из (19.1). Из жесткости торов (следствие 16.3) следует, что $G = N_G(R(G))^0 = C_G(R(G))^0$, так что тор $R(G)$ централен; разумеется, и наоборот, группа $Z = Z(G)^0$ всегда содержится в $R(G)$. Для доказательства оставшегося утверждения вложим G в некоторую группу $GL(V)$ и запишем $V = \prod V_\alpha$ (где α пробегает веса группы Z в V см. (16.4)). Очевидно, централизатор группы Z в $GL(V)$ состоит из соответствующих блочно диагональных матриц; мы запишем его в виде $\prod GL(V_\alpha)$. Этот централизатор содержит G . Следовательно, (G, G) содержится в $\prod SL(V_\alpha)$, тогда как каждый блок матрицы из Z есть скалярная матрица. Поскольку имеется только конечное число скалярных матриц данного размера с определителем 1, то наше утверждение доказано. $\square$

Позднее (27.5) мы докажем, что редуктивная группа G есть произведение своего центра и коммутанта (пересечение которых конечно согласно лемме). Читатель может попытаться сделать это сейчас, чтобы оценить трудность использования предположения $R_u(G) = e$.

Упражнения

1. Показать на примерах, что предложение 19.4 неверно без предположения о разрешимости группы G : группа H может не быть коммутативной, может не содержаться в торе, даже если она коммутативна, и т. д.

2. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа. Доказать, что $\mathcal{Z}(G_u)$ — множество всех нильпотентных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если группа G нильпотентна, то $\mathcal{Z}(G_s)$ — множество всех полупростых элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа. Если T — максимальный тор группы G , то группа $C_G(T)$ нильпотентна.

4. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа. Доказать, что $Z(G)_s$ совпадает с пересечением всех максимальных торов группы G .

5. Пусть G — произвольная связная алгебраическая группа, и T — тор, содержащийся в $Z(G)$. Доказать, что группа $(G, G) \cap T$ конечна (ср. с леммой 19.5).

6. Доказать, что замкнутая связная нормальная подгруппа положительной размерности в полупростой (соответственно, редуктивной) группе является полупростой (соответственно редуктивной) группой.

7. Пусть G — связная алгебраическая группа положительной размерности. Доказать, что группа G полупроста тогда и только тогда, когда G не имеет никаких связных замкнутых коммутативных нормальных подгрупп, кроме e .

Замечания. Теорема 19.3 принадлежит Борелю [1], см. Борель [4, 10.6].

§ 20. Одномерные группы

Цель этого параграфа — доказать, что G_m и G_a — единственные связные одномерные алгебраические группы. Сначала мы покажем, что такая группа коммутативна и, следовательно, состоит только из полупростых или только из унипотентных элементов. Единственный трудный случай — случай унипотентных групп в характеристике p — излагается в более общей ситуации « e -групп» (которые нигде более в тексте не используются), мы используем этот термин по аналогии с термином « d -группы». О других трактовках вопроса о строении одномерных групп сказано в замечаниях.

20.1. Коммутативность группы G . Пусть G — связная одномерная алгебраическая группа. Так как коммутант (G, G) связан, то группа G либо коммутативна, либо $G = (G, G)$. Используя мощную структурную теорию, развитую в следующей главе, мы могли бы легко исклю-

чить вторую возможность; можно, однако, использовать следующее элементарное рассуждение. Предположение $G = (G, G)$ показывает, что $\text{Ad } G = (\text{Ad } G, \text{Ad } G)$ принадлежит группе $SL(\mathfrak{g})$ (которая равна 1, ибо алгебра Ли $\mathfrak{g}$ одномерна). В частности, если элемент $s \in G$ полупрост, то из соотношения $c_{\mathfrak{g}}(s) = \mathfrak{g}$ следует, что $C_G(s) = G$, так как группа G связна (предложение 18.1). Это означает, что все полупростые элементы группы G принадлежат группе $Z(G)$, которая, разумеется, должна быть конечной. Группа $G/Z(G) = G'$ также связна и одномерна и не содержит полупростых элементов, отличных от e . Следовательно, группа G' унипотентна, и, значит, *нильпотентна* (следствие 17.5). Тогда и группа G *нильпотентна* (лемма 17.4(б)), что противоречит предположению о том, что $G = (G, G)$.

Итак, группа G коммутативна. Согласно теореме 15.5 либо $G = G_s$, либо $G = G_u$. В первом случае G — связная d -группа и, следовательно, тор (теорема 16.2) и, значит, изоморфна G_m . Во втором случае, если $\text{char } K = 0$, лемма 15.1В и упражнение 15.11 показывают, что группа G изоморфна G_a . Если $\text{char } K = p > 0$, то мы заметим, что $x \mapsto x^p$ — морфизм алгебраических групп $G \rightarrow G$, причем образ G^p связан и не совпадает с G . Следовательно, $G^p = e$. (В этом случае мы говорим, что группа G имеет **экспоненту** p .) Однако вовсе не очевидно, что группа G изоморфна G_a . В оставшейся части этого параграфа мы детально изучим строение коммутативных групп экспоненты p и получим требуемую теорему об одномерных группах в качестве побочного продукта.

20.2. Векторные группы и e -группы. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\text{char } K = p > 0$. Назовем **e -группой** любую коммутативную алгебраическую группу G экспоненты p (группа G тогда унипотентна). В качестве одного из примеров укажем конечную элементарную абелеву группу $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Другим полезным примером может служить аффинное n -пространство K^n , рассматриваемое как произведение $G_a \times \dots \times G_a$; любую e -группу, изоморфную некоторой таксй группе, мы будем называть **векторной группой**. Групповая операция часто будет записываться аддитивно.

Имеется определенная аналогия между торами и векторными группами или, в более общей форме, между d -группами и e -группами. Напомним некоторые основные свойства d -групп из § 16: (а) любая d -группа изоморфна замкнутой подгруппе некоторого тора; (б) любая замкнутая подгруппа тора есть пересечение ядер характеров; (в) замкнутая связная d -группа есть тор и выделяется прямым сомножителем из любого объемлющего тора. В настоящем пункте мы докажем аналог первого из этих свойств с уточнением, которое не имеет места для d -групп (см. упражнение 3).

Предложение. *Любая e -группа G изоморфна замкнутой подгруппе некоторой векторной группы, размерность которой можно считать на 1 большей размерности группы G .*

Доказательство. Мы попытаемся имитировать отображения $\log$, $\exp$ в характеристике 0 (15.1). Пусть $G \subset GL(n, K)$ для некоторого n . Пусть $\mathfrak{A}$ — подпространство в $M(n, K)$, натянутое на матрицы $x - 1$ ($x \in G$), так что $\mathfrak{A} = K + \mathfrak{A} \supset G$. Равенство $(x - 1)(y - 1) = (xy - 1) - (x - 1) - (y - 1)$ показывает, что пространство $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно умножения; следовательно, $\mathfrak{A}$ — коммутативное кольцо и $\mathfrak{A}$ — его идеал. Поскольку группа G имеет экспоненту p , то $(x - 1)^p = 0$ ($x \in G$) и, следовательно, $y^p = 0$ для всех $y \in \mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{A}$ попарно перестановочных нильпотентных матриц можно одновременно привести к треугольному виду (предложение 15.4). Отсюда следует, что k -кратные произведения элементов из $\mathfrak{A}$ все обращаются в 0, если k выбрано достаточно большим, т. е. $\mathfrak{A}$ — нильпотентный идеал кольца $\mathfrak{A}$ (см. (17.3)).

Поскольку $x^p = 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$, то мы можем определить ограниченный экспоненциал $\exp'(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k/k!$,

который, очевидно, содержится в $1 + \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Легко проверить (упражнение 4), что $\exp'(ax)\exp'(bx) = \exp'((a+b)x)$ при $a, b \in K$. Следовательно, мы можем определить относительно некоторого упорядоченного базиса $(x_1, \dots, x_t)$ пространства $\mathfrak{A}$, который мы опишем ниже, морфизм $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, полагая $\varphi(\sum a_i x_i) =$

$= \prod \exp'(a_i x_i)$. Это морфизм алгебраических групп, если на $\mathfrak{A}$ задана естественная аддитивная структура векторного пространства и $\text{Im } \varphi$ рассматривается как подгруппа мультипликативной группы кольца $\mathfrak{A}$ в $GL(n, K)$. Разумеется, группа G сама содержится в этой последней, но не очевидно, что содержится в $\text{Im } \varphi$.

Мы хотим показать, что φ имеет обратный морфизм (определенный на обратимых элементах кольца $\mathfrak{A}$). Для этого воспользуемся нильпотентностью идеала $\mathfrak{A}$: определим φ относительно такого упорядоченного базиса $(x_1, \dots, x_t)$ пространства $\mathfrak{A}$, что пространство $\mathfrak{A}^k$ натягивается на некоторый правый отрезок этого базиса. Пусть T_i, U_i ($i = 1, \dots, t$) — два множества независимых переменных; запишем $\prod \exp'(T_i x_i) = 1 + \sum U_i x_i$. Раскрытие выражения в левой части сразу показывает, что $U_i = T_i + f_i(T_1, \dots, T_{i-1})$, где f_i — некоторые полиномы от $i-1$ переменных. Обратимость отображения φ вытекает тогда из возможности выразить T_i через U_i . Но $T_1 = U_1$, $T_2 = U_2 - f_2(T_1) = U_2 - f_2(U_1)$, Таким образом, мы можем действовать рекуррентно.

Из этой конструкции следует, что группа G действительно лежит в $\text{Im } \varphi$ и что φ^{-1} отображает G изоморфно на замкнутую подгруппу векторной группы $\mathfrak{A}$.

Пусть теперь V — любая векторная группа (записанная аддитивно), G — замкнутая подгруппа коразмерности ≥ 2 в V . Мы постараемся заменить V на векторную группу на 1 меньшей размерности, содержащую изоморфную копию группы G ; рассуждение завершается тогда индукцией.

Объединение всех прямых, проходящих через 0 и через все другие точки группы G , не совпадает с V , так как $\text{codim } G \geq 2$ (это элементарный геометрический факт: упражнение 5). отождествим (канонически) V с $\mathcal{L}(V)$. Тогда линейное подпространство $\mathcal{L}(G)$ пространства $\mathcal{L}(V) = V$, очевидно, не может содержать того, что осталось от V , так как оно также имеет коразмерность, не меньшую 2. Следовательно, мы можем найти такую точку $x \in V$, что никакой ненулевой скалярный кратный вектора x не лежит в G или в $\mathcal{L}(G)$. Пусть $X = Kx$, и пусть $\pi: V \rightarrow W = V/X$ — канонический морфизм. Ввиду отождествления $V = \mathcal{L}(V)$ ясно, что $\text{Ker } d\pi = \mathcal{L}(X) =$

$= X$, где X рассматривается как векторная подгруппа в V . Ввиду выбора x мы имеем $\text{Ker } \pi \cap G = 0 = \text{Ker } d\pi \cap \mathcal{L}(G)$, так что морфизм $\pi|_G$ биективен и сепарабелен и, следовательно, является изоморфизмом группы G на $\pi(G)$ (см. замечание (1) в (12.4)). $\square$

20.3. Свойства p -полиномов. Характер алгебраической группы G — это просто морфизм алгебраических групп $G \rightarrow \mathbf{G}_m$. Очевидным унитарным аналогом этого понятия был бы морфизм $\varphi: G \rightarrow \mathbf{G}_a$. Какой вид должен иметь такой морфизм φ , если K — поле простой характеристики? Так как группа $\mathbf{G}_a$ изоморфна (как многообразие) аффинной прямой K , то морфизм φ задается одним полиномом. Рассмотрим сначала случай, когда G — векторная группа K^n (записанная аддитивно).

Лемма А. Пусть $f(T_1, \dots, T_n)$ — аддитивный полином, т. е. $f(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = f(a_1, \dots, a_n) + f(b_1, \dots, b_n)$ для всех $(a), (b) \in K^n$. Тогда $f(T)$ есть p -полином, т. е. $f(T)$ — линейная комбинация одночленов вида $T_i^{p^r}$ ($r \geq 0$).

Доказательство. Воспользуемся индукцией по степени полинома $f(T)$ и обозначим через $(D_i f)(T)$ «частную производную» полинома $f(T)$ по T_i . Из тождества $f(T_1 + a_1, \dots, T_n + a_n) = f(T) + f(a)$, $(a) \in K^n$, мы получаем $(D_i f)(T + a) = (D_i f)(T)$. Следовательно, полином $(D_i f)(T)$ принимает на K^n постоянное значение c_i и все частные производные полинома $f(T) - (c_1 T_1 + \dots + c_n T_n)$ равны 0. Легко проверить, что любой полином с этим свойством имеет вид $g(T_1^p, \dots, T_n^p)$, $g(T) \in K[T]$. Так как поле K алгебраически замкнуто, для произвольных элементов $(a), (b) \in K^n$ можно найти такие элементы $d_i, e_i \in K$, что $a_i = d_i^p$, $b_i = e_i^p$. Поэтому

$g(a + b) = g((d_1 + e_1)^p, \dots, (d_n + e_n)^p) = f(d + e) - \sum c_i (d_i + e_i) = g(a) + g(b)$. Полином $g(T)$ аддитивен и имеет меньшую степень чем $f(T)$, так что, по предположению индукции, $g(T)$ и, следовательно, $f(T)$ есть p -полином. $\square$

Конечно, и наоборот, любой p -полином определяет морфизм алгебраических групп $K^n \rightarrow \mathbf{G}_a$. Злоупотребляя терминологией, мы будем отождествлять полиномы и морфизмы, которые им соответствуют. Очевидно, ядро

ненулевого p -полинома (т. е. множество нулей полинома $f(T)$) есть замкнутая подгруппа группы K^n (коразмерности 1). Это свойство характеризует p -полиномы:

Лемма Б. Пусть $f(T_1, \dots, T_n)$ — полином, свободный от квадратов*), рассматриваемый как морфизм $K^n \rightarrow K$. Если множество нулей полинома $f(T)$ есть подгруппа в K^n , то $f(T)$ есть p -полином.

Доказательство. Мы можем считать, что $f(T) \neq 0$. Для доказательства того факта, что $f(T)$ есть p -полином, достаточно (ввиду леммы А) доказать его аддитивность. Пусть G — множество его нулей. При $(a) \in G$ полином $f(T+a)$ имеет то же множество нулей, что и $f(T)$, так как G — группа. Но полином $f(T)$ свободен от квадратов; поэтому первый полином скалярно кратен второму, скажем $\gamma(a)f(T)$ (напомним, что $K[T]$ — область с однозначным разложением на множители (0.2)). При $(a), (b) \in G$ мы имеем $\gamma(a+b)f(T) = f(T+a+b) = \gamma(b)f(T+a) = \gamma(a)\gamma(b)f(T)$. Следовательно, функция $\gamma: G \rightarrow G_m$ — гомоморфизм групп; поскольку G есть p -группа, а G_m не имеет элементов порядка p , то $\text{Im } \gamma = 1$. Это показывает, что $f(T+a) = f(T)$ для всех $(a) \in G$.

Далее, для всех $(a) \in K^n$ полином $f(T+a) - f(a) \neq 0$ обращается в 0 на G и, очевидно, свободен от квадратов. Отсюда следует, что функция $\delta: K^n \rightarrow G_m$ удовлетворяет условию $f(T+a) - f(a) = \delta(a)f(T)$. Для любого $(b) \in K^n$ непосредственное вычисление показывает, что $f(T+a+b) = f(a) + \delta(a)f(b) + \delta(a)\delta(b)f(T)$, в то время как мы также имеем $f(T+a+b) = f(a+b) + \delta(a+b)f(T)$. Сравнивая старшие члены, мы заключаем, что δ — гомоморфизм, который, следовательно, тривиален, т. е. $f(T+a) = f(a) + f(T)$ для всех $(a) \in K^n$. Это доказывает, что полином f аддитивен на K^n . $\square$

В (20.2) мы доказали, что всякая e -группа реализуется как замкнутая подгруппа векторной группы коразмерности 1. Теперь мы можем сделать следующий шаг.

Предложение. Пусть V — векторная группа (скажем, $V = K^n$) и G — замкнутая подгруппа коразмерности 1.

*) То есть полином f не кратен квадрату непостоянного полинома. — Прим. перев.

Тогда существует p -полином (от n переменных), для которого G есть множество его нулей.

Доказательство. Ввиду результатов § 3 (см. упражнение 3.6) G есть множество нулей некоторого полинома $f(T) \in K[T]$, и мы можем считать, что $f(T)$ свободен от квадратов. Тогда лемма Б показывает, что $f(T)$ должен быть p -полиномом. $\square$

20.4. Автоморфизмы векторных групп. Для доказательства того факта, что связная d -группа есть тор, мы сначала вкладывали ее в тор, а затем находили автоморфизм тора, который преобразовывал эту подгруппу в канонический подтор. Аналогичный подход эффективен и в случае e -групп. Мы будем строить автоморфизмы при помощи индукции по степеням; поэтому удобно ввести следующее определение. Пусть $f(T_1, \dots, T_n) = \sum_i \sum_r c_{ir} T_i^{p^r}$ — некоторый p -полином. Если $r(i)$ — наибольший показатель, для которого $c_{ir} \neq 0$, то **главная часть** полинома $f(T)$ есть полином $c_{1r(1)} T_1^{p^{r(1)}} + c_{nr(n)} T_n^{p^{r(n)}}$.

Предложение. Пусть $V = K^n$, $n \geq 1$, и пусть $f(T)$ — некоторый p -полином, рассматриваемый как морфизм алгебраических групп $V \rightarrow G_a$. Тогда существует автоморфизм ϕ группы V (т. е. замена координат $T_i \mapsto U_i$) такой, что ядро полинома $f(U) = f(T) \circ \phi$ содержит все элементы вида $(a, 0, \dots, 0) \in V$.

Доказательство. Запишем для краткости главную часть полинома $f(T)$ в виде $\sum_i c_i T_i^{p^{r(i)}}$. Очевидно, перестановка переменных $T_1, \dots, T_n$ индуцирует автоморфизм группы V , так что мы можем предполагать, что все $c_i \neq 0$ (в противном случае доказывать нечего) и что $r(1) \geq r(2) \geq \dots \geq r(n)$. Воспользуемся индукцией по $\sum r(i)$. Если это число равно 0, то $f(T)$ — **линейный** полином, и линейная замена переменных $T_i \mapsto U_i$ приводит к цели. В общем случае найдем нуль $(a) \in V$ для главной части полинома $f(T)$. Скажем,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0 \neq a_m.$$

Следующие уравнения определяют автоморфизм группы V (упражнение 6):

$$U_1 = T_1,$$

$$U_{m-1} = T_{m-1},$$

$$U_m = a_m T_m,$$

$$U_{m+1} = T_{m+1} + a_{m+1} T_m^{p^r(m)-r(m+1)},$$

$$U_n = T_n + a_n T_m^{p^r(m)-r(n)}.$$

После подстановки U_i вместо T_i в $f(T)$ мы получаем но-

вый p -полином $g(T) = \sum_{i \neq m} c_i T_i^{p^{r(i)}} + \left(\sum_{i=m}^n c_i a_i^{p^{r(i)}} \right) T_m^{p^r(m)} +$
 $+$ (члены меньших степеней). Ввиду выбора (а) сумма степеней в главной части полинома $g(T)$ меньше $\sum r(i)$. Таким образом, применимо предположение индукции. $\square$

При $V = K^n$ пусть V_i — множество векторов, все координаты которых, кроме i -й, равны 0.

Следствие. Пусть $V = K^n = \prod_{i=1}^n V_i$, как и выше, и пусть G — замкнутая связная подгруппа группы V . Тогда существует автоморфизм φ группы V такой, что $\varphi(G)$ — прямое произведение некоторого числа канонических подгрупп V_i группы V . В частности, G — векторная группа.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n (при $n=1$ доказывать нечего). Рассмотрим сначала случай $\dim G = n-1$. Согласно предложению 20.3 G — ядро некоторого p -полинома $f(T)$ (рассматриваемого как морфизм $V \rightarrow G_a$). Тогда предыдущее предложение позволяет найти автоморфизм φ группы V такой, что $\varphi(G)$ содержит V_1 . Если H — проекция группы $\varphi(G)$ на $V' =$

$= \sum_{i=2}^n V_i$, то, очевидно, $\varphi(G) = V_1 \times H$. Так как коразмерность группы H в V' равна 1 (и группа H связна), то индукция позволяет найти автоморфизм группы V' , который продолжается до автоморфизма группы V , оставляющего неподвижной подгруппу V_1 , и отображает H на произведение некоторых групп V_i .

Если размерность группы G меньше чем $n - 1$, то положим, как и выше, $V' = \sum_{i=2}^n V_i$ и спроектируем G в замкнутую связную подгруппу G' группы V' . По предположению индукции имеется автоморфизм φ' группы V' , преобразующий G' в произведение некоторых групп V_i . Расширим φ' до автоморфизма $\varphi: V \rightarrow V$ ($\varphi|_{V_1} = 1_{V_1}$), как и выше. Тогда $\varphi(G)$ лежит в произведении менее чем n групп V_i и мы можем отбросить остальные и снова воспользоваться индукцией. $\square$

20.5. Основная теорема. Из полученного выше описания e -групп мы выводим в качестве частного случая тот факт, что связная одномерная e -группа G изоморфна G_a . Читатель, которого интересует только этот результат, может несколько (но весьма немного) сократить доказательство. Существенная часть рассуждения заключается в следующем: группа G изоморфна замкнутой подгруппе векторной группы K^2 (20.2) и, следовательно, является множеством нулей p -полинома от двух переменных (20.3). Используя этот p -полином, можно построить автоморфизм группы K^2 такой, что образ группы G содержит каноническую копию группы G_a (20.4) (и, следовательно, совпадает с ней).

Так как связная одномерная унипотентная группа коммутативна (20.1) и, следовательно, имеет экспоненту p , и является e -группой, то этим завершается доказательство основной теоремы:

Теорема. Пусть K — поле произвольной характеристики. С точностью до изоморфизма единственными связными одномерными алгебраическими группами являются группы G_a и G_m . $\square$

Упражнения

1. Доказать, что группа G в (20.1) коммутативна, используя (18.2) вместо (18.1): полупростые классы сопряженности замкнуты (и связны); следовательно, они тривиальны.

2. Доказать, что группа G в (20.1) коммутативна, не используя результатов § 18, следующим образом. Пусть $x \notin Z(G)$. Класс сопряженности элемента x бесконечен и, следовательно, плотен (а также локально замкнут); вывести, что его дополнение конечно. Предположим, что $G \subset GL(n, K)$, и пусть $c_i(y)$ — i -й коэффициент характеристического полинома элемента $y \in G$. Тогда формула

$\varphi(y) = (c_0(y), \dots, c_n(y))$ определяет морфизм $G \rightarrow K^{n+1}$ с конечным образом. Вывести отсюда, что группа G унипотентна и, следовательно, нильпотентна.

3. Показать, что d -группа не всегда может быть вложена в тор в качестве замкнутой подгруппы коразмерности 1.

4. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Если $x \in M(n, K)$, $x^p = 0$, то показать, что $\exp'(ax)\exp'(bx) = \exp'((a+b)x)$ ($a, b \in K$), где $\exp'$ — ограниченный экспоненциал (20.2). С другой стороны, если элементы $x, y \in M(n, K)$ перестановочны и если $x^p = 0 = y^p$, то не всегда имеет место соотношение $\exp'(x+y) = \exp'(x)\exp'(y)$; пример: пусть $\text{char } K = 2$, и

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Пусть V — аффинное многообразие в $\mathbf{A}^n$ коразмерности ≥ 2 . Доказать, что множество $\{ax \mid a \in K, x \in V\}$ собственным образом содержится в $\mathbf{A}^n$ (рассмотреть $K \times V$).

6. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Проверить, что замена переменных $T_i \mapsto U_i$, описанная в доказательстве предложения 20.4, индуцирует автоморфизм пространства V . Попытайтесь сформулировать необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество из n p -полиномов определяло автоморфизм пространства V .

7. Пусть $\text{char } K = p > 0$. Доказать, что каждая замкнутая подгруппа векторной группы есть пересечение ядер p -полиномов.

Замечания. Материал этого параграфа заимствован у Титса [9, III.3.3]. Более раннее доказательство теоремы 20.5, принадлежащее Гротендику, см. Шевалле [8, exposé 7], кратко изложено Борелем [4, 11.6]; [4, 10.7—10.9]. Изучение коммутативных унипотентных групп и групповых схем можно продолжить по работам Демазюра и Габриэля [1], Оорта [1], Селигмана [4, 5], Серра [1, VII, § 2], Титса [9], Шеллера [1], Симона [1], Накамура [1, 2]. Пример в упражнении 4 предложен Джорджем Селигманом.

ПОДГРУППЫ БОРЕЛЯ

§ 21. Теорема о неподвижной точке
и теоремы сопряженности

Строение связных разрешимых групп довольно подробно изучено в предыдущей главе. Необходимо еще изучить связь между произвольной алгебраической группой и ее подгруппами этого типа. Эта связь описывается теоремой Бореля о неподвижной точке (21.2). Здесь мы впервые существенно используем свойства однородных пространств, которые являются *проективными* (или полными) многообразиями. Через G обозначается произвольная алгебраическая группа, которая, начиная с (21.3), предполагается связной.

21.1. Сведения о полных многообразиях. Для удобства читателя мы перечислим здесь свойства полных многообразий, которые нам потребуются в дальнейшем. По определению многообразие X является **полным**, если для любого многообразия Y проекция $X \times Y \rightarrow Y$ является замкнутым отображением. В главе I были установлены следующие факты о полных многообразиях:

(а) Замкнутое подмногообразие полного (соответственно проективного) многообразия само является полным (соответственно проективным) многообразием (см. (6.1) и (1.6)).

(б) Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм многообразий и многообразие X полно, то образ $\varphi(X)$ замкнут в Y и является полным многообразием (6.1).

(в) Полное аффинное многообразие имеет размерность 0 (6.1).

(г) Проективное многообразие полно (6.2); полное квазипроективное многообразие проективно (6.1).

(д) Многообразие флагов $\mathfrak{F}(V)$ конечномерного векторного пространства V является проективным (1.8) и, следовательно, полным многообразием.

Помимо этих фактов, нам необходима следующая лемма:

Лемма. Пусть алгебраическая группа G действует транзитивно на каждом из двух неприводимых многообразий X, Y , и пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — биективный G -эквивариантный морфизм. Если многообразие Y полно, то и X полно.

Доказательство. Заметим, что это утверждение не очевидно (в отличие от обратного утверждения, которое следовало бы из (б)). Ввиду (6.1) нам требуется показать, что проекция $\text{pr}_2: X \times Z \rightarrow Z$ замкнута для любого аффинного многообразия Z . Так как многообразие Y полно, то достаточно доказать, что $\varphi \times 1: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ является замкнутым отображением.

В соответствии со следствием 4.3 существуют открытые аффинные подмножества $U \subset X$, $V \subset Y$ такие, что $\varphi(U) \subset V$ и ограничение $\varphi|_U$ есть конечный морфизм. Пусть R, S, T — аффинные алгебры многообразий U, V, Z . Так как кольцо R цело над S , то, как легко проверить, кольцо $R \otimes T$ является целым над $S \otimes T$. Следовательно, отображение $\varphi \times 1: U \times Z \rightarrow V \times Z$ также является конечным морфизмом (см. (2.4)); в частности, это — замкнутое отображение (4.2). Ввиду того, что группа G действует на многообразиях X, Y транзитивно и морфизм φ является G -эквивариантным, многообразие X (соответственно Y) покрывается конечным числом множеств $x_i \cdot U$ (соответственно $x_i \cdot V$) для некоторых элементов $x_i \in G$. Отсюда следует, что отображение $\varphi \times 1: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ замкнуто. $\square$

21.2. Теорема о неподвижной точке.

Теорема. Пусть G — связная разрешимая алгебраическая группа, и пусть X — (непустое) полное многообразие, на котором действует группа G . Тогда группа G имеет на X неподвижную точку.

Доказательство. Если $\dim G = 0$, то $G = e$ и доказывать нечего. Воспользуемся индукцией по $\dim G$. Группа $H = (G, G)$ является связной (17.2), разрешимой и имеет меньшую размерность, чем G (ибо группа G разрешима), так что, по предположению индукции, множество Y неподвижных точек относительно группы H в X непусто. Множество Y замкнуто (предложение 8.2) и, следовательно, полно (21.1(a)). Поскольку группа H нормальна в G , группа G оставляет множество Y инвариантным, так что мы можем заменить X на Y .

Мы приходим к следующей ситуации: группа H содержится в G_x для всех точек $x \in X$ ($= Y$). В частности, стабилизатор точки x в G является *нормальной* подгруппой группы G , и, следовательно, G/G_x — *аффинное* многообразие. Выберем точку $x \in X$, орбита $G \cdot x$ которой замкнута и, значит, является полным многообразием (это возможно ввиду предложения 8.3). Далее, канонический морфизм $G/G_x \rightarrow G \cdot x$ биективен, причем левая часть есть аффинное, а правая часть — полное многообразие. Согласно лемме 21.1 многообразие G/G_x полно. В силу (21.1) (в) мы имеем $G = G_x$, т. е. x — искомая неподвижная точка. $\square$

Мы используем эту теорему сначала для нового вывода теоремы Ли — Колчина (17.6). Пусть G — замкнутая связная разрешимая подгруппа группы $GL(V)$. Тогда группа G действует на многообразии флагов $\mathfrak{F}(V)$, которое является полным многообразием (21.1 (д)); согласно теореме о неподвижной точке группа G оставляет неподвижным некоторый флаг $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$. Иными словами, группа G триангулируема при подходящем выборе базиса в пространстве V .

Теперь мы применим теорему о неподвижной точке более существенным образом.

21.3. Сопряженность подгруппы Бореля и максимальных торов.

Подгруппа Бореля группы G есть связная замкнутая разрешимая подгруппа, не содержащаяся ни в какой другой такой подгруппе (фактически слово «замкнутая» излишне). Поскольку подгруппы Бореля групп G и G^0 совпадают, то мы в дальнейшем *будем предполагать, что группа G связна*. Связная разрешимая подгруппа наибольшей возможной размерности является, очевидно, подгруппой Бореля; однако не очевидно, что размерности всех подгрупп Бореля совпадают. Это вытекает из более сильного результата:

Теорема. Пусть B — подгруппа Бореля группы G . Тогда G/B — проективное многообразие, и все подгруппы Бореля группы G сопряжены B .

Доказательство. Начнем с подгруппы Бореля S наибольшей возможной размерности. Рассмотрим представление группы G в некоторой полной линейной группе

$GL(V)$ такое, что группа S есть стабилизатор в G некоторого одномерного подпространства V_1 (теорема 11.2). По теореме Ли — Колчина (17.6) индуцированное действие группы S на фактор-пространстве V/V_1 триангулируемо, откуда следует, что существует инвариантный относительно S полный флаг $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V$ в пространстве V ; обозначим его через f . В действительности ввиду выбора подпространства V_1 группа S есть стабилизатор флага f в G . По этой причине индуцированный морфизм многообразия G/S на орбиту флага f в $\mathfrak{F}(V)$ является биекцией. С другой стороны, стабилизатор любого флага разрешим, и, следовательно, его размерность не превышает размерности группы S . Отсюда следует, что орбита флага f имеет наименьшую возможную размерность и, следовательно, замкнута (8.3). Поэтому эта орбита является полным многообразием (21.1(a), (д)). Это влечет полноту многообразия G/S (лемма 21.1) и, следовательно, его проективность (21.1(г)).

Любая заданная подгруппа Бореля B действует путем левых умножений на полном многообразии G/S . По теореме (21.2) она имеет неподвижную точку xS , т. е. $BxS = xS$ или $x^{-1}Bx \subset S$. Каждая из этих подгрупп является подгруппой Бореля, и мы заключаем, что $x^{-1}Bx = S$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следствие А. *Максимальные торы (соответственно максимальные связанные унипотентные подгруппы) группы G есть максимальные торы (соответственно максимальные связанные унипотентные подгруппы) подгрупп Бореля группы G и все они сопряжены.*

Доказательство. Пусть T — максимальный тор группы G и U — максимальная связанная унипотентная подгруппа. Очевидно, что T содержится в некоторой подгруппе Бореля B , и, следовательно, T — максимальный тор группы B , с которым все остальные максимальные торы группы B сопряжены (теорема 19.3). Аналогично U лежит в некоторой подгруппе Бореля B' , причем $U = B'_u$ ввиду максимальной. Так как все подгруппы Бореля группы G сопряжены, то следствие доказано. $\square$

Назовем общую размерность максимальных торов группы G **рангом** группы G . Например, ранг группы $SL(n, K)$ равен $n - 1$.

Тот факт, что G/B — проективное многообразие, может показаться в данный момент чисто случайным обстоятельством; однако в действительности геометрия этого многообразия играет исключительно важную роль в дальнейшем. Уже сейчас мы увидим, что G/B — *наибольшее однородное пространство группы G , обладающее структурой проективного многообразия*. В самом деле, если H — произвольная замкнутая подгруппа такая, что многообразие G/H проективно, то группа B имеет неподвижную точку на многообразии G/H , откуда следует, что группа B сопряжена с подгруппой группы H и что $\dim G/H \leq \dim G/B$. Обратно, если H — замкнутая подгруппа группы G , содержащая B , то $G/B \rightarrow G/H$ — сюръективный морфизм полного многообразия, так что и многообразие G/H полно (21.1(б)). Но тогда многообразие G/H проективно (21.1(г)), так как все однородные пространства квазипроективны по построению (11.3). Это рассуждение дает нам повод ввести специальный класс замкнутых подгрупп P группы G : назовем подгруппу P *параболической*, если многообразие G/P проективно (равносильно, полно). Мы доказали

Следствие Б. *Замкнутая подгруппа группы G является параболической тогда и только тогда, когда она содержит подгруппу Бореля. В частности, связная подгруппа H группы G является подгруппой Бореля тогда и только тогда, когда группа H разрешима и многообразие G/H полно.* $\square$

Пусть, например, $G = GL(n, K)$, $B = T(n, K)$. По теореме Ли — Колчина B — подгруппа Бореля группы G . Разумеется, G/B — это в точности орбита в $\mathfrak{F}(K^n)$ стандартного флага (и потому совпадает с $\mathfrak{F}(K^n)$). Какие параболические подгруппы группы G содержит B ? Если $(e_1, \dots, e_n)$ — стандартный базис пространства K^n , то для каждого частичного флага $(e_1, \dots, e_{i(1)}) \subset (e_1, \dots, e_{i(2)}) \subset \dots$ стабилизатор в G есть, очевидно, замкнутая подгруппа, содержащая группу B . В группе $GL(3, K)$ мы имеем две параболические подгруппы, отличные от B и G , которые возникают таким образом; они состоят из матриц одного из видов

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Характеризацию борелевских подгрупп в следствии Б можно с успехом использовать для описания их поведения при гомоморфизмах.

Следствие В. Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм (связных) алгебраических групп. Пусть H — подгруппа Бореля (соответственно параболическая подгруппа, максимальный тор, максимальная связная унитарная подгруппа) группы G . Тогда $\varphi(H)$ — подгруппа того же типа в G' и все такие подгруппы группы G' получаются указанным способом.

Доказательство. Ввиду следствий А, Б достаточно доказать это в случае, когда $H = B$ — борелевская подгруппа. Очевидно, группа $B' = \varphi(B)$ связна и разрешима. Но естественное отображение $G \rightarrow G' \rightarrow G'/B'$ индуцирует сюръективный морфизм $G/B \rightarrow G'/B'$; поэтому многообразие G'/B' является полным (21.1(б)), т. е. B' — параболическая подгруппа группы G' . Согласно следствию Б, B' — подгруппа Бореля. Но если одна из борелевских подгрупп группы G' имеет вид $\varphi(B)$, то, как следует из теоремы сопряженности (для G'), всякая подгруппа Бореля имеет такой вид.

21.4. Дальнейшие следствия. В этот момент легко перенести на произвольные связные группы G некоторые факты, доказанные в предшествующей главе для разрешимых групп. Результаты, которые мы здесь получим, являются сравнительно грубыми, но они будут уточнены в последующих параграфах.

Предложение А. Автоморфизм σ группы G , который оставляет неподвижными все элементы некоторой борелевской подгруппы группы B , должен быть тождественным.

Доказательство. Морфизм $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(x) = \sigma(x)x^{-1}$ отображает группу B в e и, следовательно, пропускается через морфизм $G \rightarrow G/B$. По теореме 21.3 (с учетом (21.1(б))) многообразие $\varphi(G)$ замкнуто (следовательно, аффинно) и полно. Ввиду (21.1(в)) мы имеем $\varphi(G) = e$. $\square$

Следствие. $Z(G)^0 \subset Z(B) \subset C_G(B) = Z(G)$.

Доказательство. Группа $Z(G)^0$ связна и разрешима и, следовательно, лежит в некоторой борелевской подгруппе группы G . При сопряжении последней с B (теорема 21.3) группа $Z(G)^0$ остается неподвижной, откуда следует первое включение. Второе включение очевидно,

так же как и включение $Z(G) \subset C_G(B)$. Наконец, если $x \in C_G(B)$, то $\sigma = \text{Int } x$ удовлетворяет условиям предложения А, и мы получаем $\text{Int } x = 1$, $x \in Z(G)$. $\square$

Позднее (следствие 22.2Б) мы увидим, что $Z(B) = Z(G)$, но пока это не очевидно.

Предложение Б. (а) Если некоторая подгруппа Бореля B нильпотентна (в частности, если $B = B_s$ или $B = B_u$), то $G = B$.

(б) Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда G имеет в точности один максимальный тор.

Доказательство. (а) Заметим сначала, что если $B = B_s$ или $B = B_u$, то B — тор или унипотентная группа (теорема 19.3), и, следовательно, в любом случае нильпотентна. Но центр нильпотентной группы положительной размерности сам имеет положительную размерность (предложение 17.4(а)). Ввиду предыдущего следствия мы имеем $Z(G)^0 \subset Z(B) \subset Z(G)$. Таким образом, мы можем перейти к группе $G/Z(G)^0$ меньшей размерности, для которой факторгруппа $B/Z(G)^0$ есть нильпотентная борелевская подгруппа (это очевидно даже без следствия В п. (21.3)). По предположению индукции, эти группы совпадают, откуда следует равенство $G = B$. (Индукция начинается с $\dim G = 0$.)

(б) Из (19.2) мы знаем, что нильпотентная группа обладает только одним максимальным тором. Обратно, если T — единственный максимальный тор группы G и B — некоторая содержащая его подгруппа Бореля, то группа B должна быть нильпотентной (19.2), (19.3), откуда $B = G$ ввиду части (а). $\square$

Следствие. Пусть T — максимальный тор группы G , $C = C_G(T)^0$. Тогда группа C нильпотентна и $C = N_G(C)^0$.

Доказательство. Ввиду теоремы сопряженности (следствие 21.3А) T — единственный максимальный тор группы C ; следовательно, ввиду только что доказанного предложения группа C нильпотентна. Очевидно, группа T нормальна в $N_G(C)^0$, а, следовательно, также и центрально ввиду жесткости тором (следствие 16.3).

Связный централизатор C максимального тора $T \subset G$ часто называют **подгруппой Картана** группы G по аналогии с подалгебрами Картана (нильпотентными подалгебрами, совпадающими со своими нормализато-

рами) в теории алгебр Ли. В § 22 будет показано, что в действительности уже сама группа $C_G(T)$ связна (если группа G связна), тогда как группа $N_G(C)$, вообще говоря, связной не является.

Упражнения

Через G обозначается связная алгебраическая группа.

1. Доказать, что $\text{rank } G = 0$ тогда и только тогда, когда группа G унитарна.

2. Доказать, что тор можно охарактеризовать как связную алгебраическую группу, состоящую из полупростых элементов.

3. Пусть T — тор, нормальный в G ; предположим, что G/T — также тор. Доказать, что группа G есть тор.

4. Если $\dim G \leq 2$, то группа G разрешима.

5. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G . Обозначим через L борелевскую подгруппу (соответственно максимальный тор, максимальную связную унитарную подгруппу) группы H . Доказать, что $L = (H \cap M)^0$ для подходящей подгруппы M группы G того же типа. Показать, что если группа H нормальна в G , то для любой такой группы M группа $(H \cap M)^0$ есть борелевская подгруппа (соответственно, ...) группы H . Что вы можете сказать о параболических подгруппах группы H ?

6. Радикал (соответственно унитарный радикал) группы G есть компонента единицы в пересечении всех борелевских подгрупп (соответственно их унитарных частей).

7. Проверить, что каждая подгруппа группы $GL(3, K)$, содержащая $T(3, K)$, есть стабилизатор некоторого частичного флага (и, следовательно, автоматически замкнута), а также, что она сама связна и совпадает со своим нормализатором.

8. Описать подгруппы Бореля различных классических групп, а также параболические подгруппы.

9. Пусть P — параболическая подгруппа группы G . Тогда борелевские подгруппы группы P являются борелевскими подгруппами группы G .

10. Если B — борелевская подгруппа группы G , то $B = N_G(B)^0$ (и аналогично для параболических подгрупп).

11. Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм связных алгебраических групп. Если T — максимальный тор группы G , и $T' = \varphi(T)$, то образ подгруппы Картана $C_G(T)^0$ при отображении φ есть подгруппа Картана $C_{G'}(T')^0$.

12. Пусть T — максимальный тор группы G и $C = C_G(T)^0$. Показать, что любая борелевская подгруппа группы G , содержащая T , содержит также C .

Замечания. Теоремы этого параграфа принадлежат Борелю [1] см. также Борель [4, §§ 10, 11]. Доказательство леммы 21.1 заимствовано у Стейнберга [13, дополнение к § 2.11]. У Свидлера [1] можно найти другое доказательство сопряженности борелевских подгрупп, которое не использует построения однородных пространств.

§ 22. Теоремы плотности и связности

Если G — связная разрешимая группа, то каждый полупростой (соответственно унитарный) элемент группы G лежит в максимальном торе (соответственно в максимальной связной унитарной подгруппе) и централизатор любого тора в группе G связан (см. предложение 19.4). В этом параграфе мы распространим эти результаты на произвольные связные алгебраические группы, используя борелевские подгруппы. Если противное не оговорено, G всегда предполагается *связной* группой.

22.1. Основная лемма. Что можно сказать об объединении всех подгрупп, сопряженных с данной замкнутой подгруппой H группы G ? Предположения о группе H в утверждениях (а) и (б) нижеследующей леммы окажутся справедливыми, если H — борелевская или картановская подгруппа соответственно.

Лемма. Пусть H — замкнутая связная подгруппа группы G , и пусть $X = \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}$. Тогда:

(а) Если многообразие G/H полно, то множество X замкнуто.

(б) Если некоторый элемент группы H оставляет неподвижными лишь конечное число точек многообразия G/H , то X содержит открытое подмножество группы G (в частности, множество X плотно).

Доказательство. Поскольку множество X довольно трудно изучать непосредственно, мы рассмотрим некоторые вспомогательные морфизмы:

$$G \times G \xrightarrow{\varphi} G \times G \xrightarrow{\psi} (G/H) \times G \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} G/H$$

Здесь $\varphi(x, y) = (x, xux^{-1})$, так что, очевидно, φ — изоморфизм многообразий, а $\psi(x, y) = (xH, y)$. Заметим, что ψ можно рассматривать как канонический морфизм $G \times G \rightarrow (G \times G)/(H \times e)$, так что ψ — *открытое* отображение (12.2). Пусть $M = \psi \circ \varphi(G \times H)$; очевидно, $X = \text{pr}_2(M)$.

Чтобы доказать (а), достаточно (ввиду определения полного многообразия) доказать, что множество M замкнуто. Для этого в свою очередь достаточно дока-

зять (ибо ψ — открытое отображение), что множество $\psi^{-1}(M)$ замкнуто. Но $\varphi(G \times H) \subset \psi^{-1}(M)$ и первое множество замкнуто, ибо φ — изоморфизм многообразий, и нам достаточно лишь показать, что здесь имеет место равенство. Пусть $x, y \in G$, причем $(xH, y) \in M$, т. е. $y = xzx^{-1}$ для некоторого элемента $z \in H$. Тогда $(x, y) = \varphi(x, z) \in \varphi(G \times H)$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь (б). Так как множество X конструктивно (как образ морфизма $\text{pr}_2 \circ \psi \circ \varphi$ (4.4)), то достаточно показать, что множество X плотно в G или что $\dim X = \dim G$. Мы показали уже, что множество M замкнуто, и мы легко можем вычислить его размерность: pr_1 отображает M на G/H и слой этого морфизма над xH , очевидно, изоморфен xHx^{-1} , откуда мы получаем $\dim M = \dim G/H + \dim H = \dim G$. С другой стороны, условие (б) означает, что слой морфизма $\text{pr}_2: M \rightarrow X \subset G$ по меньшей мере над одним элементом группы H имеет размерность 0 (и, конечно, не пуст). Кроме того, множество M связно, ибо группа H связна. Отсюда следует, что слои морфизма pr_2 в M «в общем положении» конечны (теоремы 4.1, 4.3). Так как $\dim M = \dim G$, мы заключаем, что pr_2 — доминантный морфизм и $X = G$. $\square$

22.2. Теорема плотности. Пусть T — максимальный тор группы G и $C = C_G(T)^0$. Мы знаем, что группа C нильпотентна (следствие предложения 21.4Б), и, следовательно, $C = T \times C_u$ (предложение 19.2). Далее, существует полупростой элемент $t \in T$ такой, что $C = C_G(t)^0$ (предложение 16.4). Мы утверждаем, что группа $H = C$ и элемент t удовлетворяют условию леммы 22.1 (б). Действительно, t оставляет неподвижной точку $xC \in G/C$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}tx \in C$. Далее, $x^{-1}tx \in C_s = T$, так что $T \subset C_G(x^{-1}tx)^0 = x^{-1}C_G(t^0)x = x^{-1}Cx$, или $xTx^{-1} \subset C$. Отсюда следует, что $xTx^{-1} = T$, $xCx^{-1} = C$. Но $C = N_G(C)^0$ (следствие предложения 21.4Б), так что для xC есть лишь конечное число возможностей.

Ввиду (21.3) выбор $H = C$ (любая борелевская подгруппа) удовлетворяет условию леммы 22.1 (а), так что мы можем установить следующий результат:

Теорема. Пусть B — подгруппа Бореля группы G , T — максимальный тор группы G и $C = C_G(T)^0$ — подгруппа Картана. Тогда объединение всех подгрупп, сопряжен-

ных с B (соответственно с T , соответственно с B_u) совпадает с G (соответственно с G_s , соответственно с G_u). Кроме того, объединение всех подгрупп, сопряженных с C , содержит (плотное) открытое подмножество группы G .

Доказательство. Утверждение относительно группы C следует из леммы 22.1(б) и предыдущих замечаний. Группа C содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с B , откуда следует, что объединение всех подгрупп, сопряженных с B , также плотно в G ; по лемме 22.1(а) оно замкнуто и, следовательно, совпадает с G . Утверждение относительно T вытекает теперь из предложения 19.4, а утверждение о группе B_u очевидно. $\square$

Следствие А. Каждый полупростой (соответственно унипотентный) элемент группы G лежит в связной нильпотентной подгруппе группы G . $\square$

Следствие Б. Если B — произвольная подгруппа Бореля группы G , то $Z(G) = Z(B)$.

Доказательство. Из теоремы сопряженности борелевских подгрупп мы уже вывели (следствие предложения 21.4А), что $Z(G)^0 \subset Z(B) \subset Z(G)$. При $x \in Z(G)$ теорема, доказанная выше, показывает, что x принадлежит некоторой борелевской подгруппе и, следовательно, по теореме сопряженности — всем группам B . $\square$

Имеется аналог этой теоремы для алгебр Ли: $\mathfrak{g}$ есть объединение подалгебр Бореля. Доказательство основано на аналоге леммы 22.1, но последний шаг требует более точной информации, чем та, которая нами получена, см. Борель [4, § 14.16].

22.3. Теорема связности. Следующий результат весьма полезен (и отчасти удивителен).

Теорема. Пусть S — тор группы G . Тогда группа $C_G(S)$ связна.

Доказательство. Это уже известно, если группа G разрешима (предложение 19.4). Чтобы свести общий случай к этому, достаточно показать, что существует борелевская подгруппа, содержащая как S , так и заданный элемент $x \in C_G(S)$: тогда x должен лежать в $C_G(S)^0$, что и требуется. В соответствии с теоремой 22.2 x принадлежит некоторой подгруппе, сопряженной с борелевской подгруппой B , т. е. множество X неподвижных относительно x точек в G/B непусто. Множество X замкнуто в G/B и, следовательно, полно. Так как S коммутирует

с x , то S оставляет множество X инвариантным и, следовательно, имеет на X неподвижную точку (21.2). Это приводит к искомой борелевской подгруппе. $\square$

Следствие А. *Подгруппы Картана группы G есть в точности централизаторы максимальных торов.* $\square$

Следствие Б. *Если элемент $x \in G$ полупрост и централизует некоторый тор S группы G , то $\{x\} \cup S$ принадлежит некоторому тору группы G .*

Доказательство. Доказательство теоремы позволяет нам включить x , S в подгруппу Бореля, так что мы можем предполагать, что группа G разрешима. Но тогда группа $C_G(S)$ связна и разрешима; S принадлежит некоторому (и, следовательно, каждому) максимальному тору группы $C_G(S)$, и один из них содержит x (следствие 19.3). $\square$

22.4. Подгруппы Бореля группы $C_G(S)$. Если B — подгруппа Бореля и H — произвольная замкнутая подгруппа группы G , то трудно ожидать, чтобы пересечение $B \cap H$ было борелевской подгруппой группы H или даже связной подгруппой. Однако это имеет место, если H — централизатор тора, содержащегося в B . (Поскольку подгруппы Бореля группы H сопряжены, то все они получаются таким способом).

Пусть B — фиксированная подгруппа Бореля группы G , содержащая тор S , и пусть $C = C_G(S)$. Рассмотрим действие группы S на многообразии G/B . Множество X неподвижных точек замкнуто (предложение 8.2(в)) и, следовательно, является полным многообразием (21.1(а)); очевидно, множество X инвариантно относительно C . Так как группа C связна (22.3), то она должна оставлять инвариантной каждую неприводимую компоненту множества X (предложение 8.2(г)). Эти компоненты также полны, как замкнутые множества в X .

Теорема. *Пусть S — тор в группе G и $C = C_G(S)$. Пусть B — борелевская подгруппа группы G , содержащая S , X — множество неподвижных точек в G/B относительно S и Y — неприводимая компонента множества X . Тогда группа C действует на Y транзитивно.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что группа C оставляет множество Y инвариантным. Предположим (не теряя общности), что B — стабилизатор некоторого элемента $y \in Y$. Требуется доказать, что $C \cdot y = Y$. Мы

будем доказывать равносильное утверждение: если Z — прообраз множества Y при каноническом отображении $G \rightarrow G/B$, то $CB = Z$.

Заметим, что Z — *неприводимое* многообразие, ибо многообразие Y неприводимо, и слои канонического отображения неприводимы. Кроме того, $z^{-1}Sz \subset B$ при $z \in Z$ по построению. Поэтому морфизм $Z \times S \rightarrow B$, определяемый соотношением $(z, s) \mapsto z^{-1}sz$, имеет смысл. Пусть ϕ — композиция этого гомоморфизма и канонического отображения $B \rightarrow B/B_u$. При фиксированном $z \in Z$ полученный морфизм $S \rightarrow B/B_u$ является, очевидно, гомоморфизмом торов. Ввиду связности Z из жесткости торов (16.3) вытекает, что это отображение не зависит от z . Но $e \in Z$, так что мы имеем $z^{-1}sz \equiv s \pmod{B_u}$ для всех $z \in Z$, $s \in S$. В частности, $z^{-1}Sz$ содержится в связанной разрешимой группе SB_u , в которой группы $z^{-1}Sz$ и S являются максимальными торами. Ввиду (19.3) существует элемент $u \in B_u$ такой, что $u^{-1}z^{-1}Szu = S$, или $zu \in N = N_G(S)$. Это доказывает, что $CB \subset Z \subset NB$. Но индекс $[N : C]$ конечен (16.3); следовательно, $\dim CB = \dim Z = \dim NB$. Наконец, $CB = Z$, так как обе эти группы связны. $\square$

Следствие. $C_B(S) = C \cap B$ — борелевская подгруппа группы C (и все борелевские подгруппы группы C получаются таким способом).

Доказательство. Пусть X и Y те же, что и выше, и B — стабилизатор некоторой точки $y \in Y$. Многообразие Y полно, и, в соответствии с теоремой, является орбитой точки y относительно C . Стабилизатор точки y в C есть $C \cap B = C_B(S)$. Следовательно, многообразие $C/C \cap B$ полно (лемма 21.1). Теперь мы можем применить критерий из следствия 21.3Б: группа $C \cap B$ разрешима и связна (19.4) и, таким образом, должна быть подгруппой Бореля группы C . $\square$

22.5. Подгруппы Картана: резюме. Если S — произвольный тор группы G , то, как мы видели, группа $C_G(S)$ связна (22.3). В частности, подгруппа Картана может быть определена просто как централизатор максимального тора (следствие 22.3А). Поскольку все максимальные торы сопряжены (21.3), то и все подгруппы Картана сопряжены. Пусть $C = C_G(T)$ — одна из них. Мы показали в (21.4), что группа C нильпотентна и что $C =$

$= N_G(C)^0$. Поэтому $C = T \times C_u(T)$, где T — максимальный тор в C . Кроме того, объединение всех сопряженных с C подгрупп содержит некоторое открытое подмножество группы G (и, следовательно, это объединение плотно в G) ввиду (22.2).

Если группа G *редуктивна*, то, как мы увидим позднее (§ 26), $C_u = e$, $C = T$. (Для полупростых или редуктивных алгебр Ли над полем характеристики 0 аналогичный результат доказывается довольно быстро при помощи формы Киллинга. Однако здесь это не так легко.) Таким образом, в роли картановских подгрупп выступают максимальные торы; это сильно облегчает дело, так как полупростые элементы (и торы) ведут себя единообразно в характеристике 0 и p , чего нельзя сказать об унитарных элементах.

Упражнения

Через G обозначается связная алгебраическая группа.

1. Доказать, что $Z(G)_s$ совпадает с пересечением всех максимальных торов группы G .

2. Если x_s — полупростая часть элемента $x \in G$, то $x \in C_G(x_s)^0$. Должен ли элемент x принадлежать $C_G(x_u)^0$?

3. Пусть B — подгруппа Бореля группы G и $U = B_u$. Доказать, что $B = N_G(U)^0$. (Показать, что $U = H_u$, где $H = N_G(U)^0$; вывести отсюда, что H/U — тор.)

4. Опираясь на упражнение 3, показать, что если P — любая параболическая подгруппа группы G (например, $P = B$), то $P = N_G(P)^0$ (сравните с упражнением 21.10). Если $\text{char } K = p > 0$, то U можно представлять себе как «силовскую p -подгруппу группы G »; этот результат имеет сходство с хорошо известной теоремой о конечных группах.

5. Если $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм алгебраических групп, то подгруппы Картана группы G' есть в точности образы подгрупп Картана группы G (ср. упражнение 21.11).

6. Подгруппа Картана группы G максимальна среди (не обязательно замкнутых) нильпотентных подгрупп группы G , но не каждая максимальная нильпотентная подгруппа обязана быть подгруппой Картана.

7. Предположим, что некоторый (и, следовательно, каждый) максимальный тор T группы G совпадает с $C_G(T)$. Тогда множество полупростых элементов $s \in G$, для которых $C_G(s)$ — тор, содержит непустое открытое множество. (Такие элементы называются **регулярными полупростыми элементами** группы G .)

8. Для $SL(n, K)$ и других классических групп доказать непосредственно, что каждый элемент группы G лежит в некоторой борелевской подгруппе и что всякий максимальный тор совпадает со своим централизатором.

9. Пусть C — замкнутая связная нильпотентная подгруппа группы G и $C = N_G(C)^0$. Доказать, что C — подгруппа Картана группы G .

10. Всегда ли централизатор $C_G(x)$ полупростого элемента $x \in G$ связан?

Замечания. Этот материал основывается на изложении Бореля [4, §§ 10, 11], которое в свою очередь использует статью Бореля [1].

§ 23. Теорема о нормализаторе

Как и в предыдущем параграфе, через G обозначается *связная* алгебраическая группа. Чтобы успешно использовать подгруппы Бореля группы G , необходимо доказать один весьма тонкий факт, а именно, что $B = N_G(B)$. Нетрудно видеть, что группа B имеет конечный индекс в своем нормализаторе (см. упражнения 21.10, 22.4), так что теорему о нормализаторе можно рассматривать как теорему о связности нормализатора.

23.1. Формулировка теоремы. Докажем вначале факт, о котором мы только что упомянули.

Лемма. Пусть B — борелевская подгруппа группы G , и $N = N_G(B)$. Тогда $B = N^0$.

Доказательство. Очевидно, что B — подгруппа Бореля группы G . Ввиду теоремы сопряженности (21.3) и того факта, что группа B нормальна в N^0 , она является единственной подгруппой Бореля в N^0 . Из теоремы плотности (22.2) тогда следует, что $B = N^0$. $\square$

Теперь мы сформулируем основную теорему, которая будет доказана в (23.2), и выведем из нее некоторые следствия.

Теорема. Пусть B — подгруппа Бореля группы G . Тогда $B = N_G(B)$.

Следствие А. Группа B максимальна в множестве разрешимых (не обязательно связных или замкнутых) подгрупп группы G .

Доказательство. Если S — максимальная разрешимая подгруппа группы G , то, очевидно, группа S замкнута. Если $S \supset B$, то $S^0 = B$ (по определению подгруппы Бореля), откуда $S \subset N_G(B) = B$. $\square$

В общем случае существуют, однако, максимальные разрешимые подгруппы группы G , которые не являются борелевскими подгруппами (см. замечания). Они всегда

несвязны и имеют меньшую размерность, чем B (упражнение 1). Заметим, что следствие А в действительности эквивалентно теореме (упражнение 2).

Следствие Б. Пусть P — параболическая подгруппа группы G . Тогда $P = N_G(P)$. В частности, группа P связна.

Доказательство. По определению P содержит некоторую борелевскую подгруппу B группы G . Пусть $x \in P$. Тогда B и $x B x^{-1}$ — борелевские подгруппы группы P^0 ; поэтому они сопряжены при помощи некоторого элемента $y \in P^0$ (21.3). В свою очередь $xy \in N_G(B) = B$ (ввиду теоремы). Но тогда из того, что $xy, y \in P^0$ следует, что $x \in P^0$, т. е. $P^0 = P = N_G(P)$. $\square$

Следствие В. Пусть P, Q — параболические подгруппы группы G , содержащие борелевскую подгруппу B . Если группы P, Q сопряжены в G , то $P = Q$.

Доказательство. Пусть $x^{-1}Px = Q$. Тогда B и $x^{-1}Bx$ — две борелевские подгруппы связной группы Q , так что существует элемент $y \in Q$ такой, что $B = y^{-1}x^{-1}Bxy$. Следовательно, $xy \in N_G(B) = B$, откуда $x \in Q$ и $P = Q$. $\square$

Это показывает, что число классов сопряженных параболических подгрупп группы G равно числу параболических подгрупп, содержащих данную группу B .

Следствие Г. Пусть B — борелевская подгруппа группы G и $U = B_u$. Тогда $B = N_G(U)$.

Доказательство. Положим $N = N_G(U)$. Так как U — максимальная связная унитарная подгруппа группы N^0 , то каждый унитарный элемент группы N^0 сопряжен с некоторым элементом из U (теорема 22.2). Но группа U нормальна в N^0 , откуда следует, что N^0/U состоит из полупростых элементов и, следовательно, является тором (см. упражнение 21.2). В частности, группа N^0 разрешима. Так как $B \subset N^0$, то $B = N^0$. Но $B = N_G(B)$, откуда следует, что $N^0 = N$. $\square$

23.2. Доказательство теоремы. Пусть B — подгруппа Бореля группы G , и пусть N — ее нормализатор (причем ввиду леммы 23.1 $B = N^0$). Для доказательства равенства $N = B$ воспользуемся индукцией по $\dim G$. Ясно, что $R(G)$ содержится в каждой борелевской подгруппе группы G (см. упражнение 21.6), так что без ущерба для общности мы можем предполагать, что группа G полупроста и имеет положительную размерность: в про-

тивном случае мы могли бы применить предположение индукции к группе $G/R(G)$.

Пусть $x \in N$, и пусть T — произвольный максимальный тор группы G , содержащийся в B . Тогда xTx^{-1} — также такой тор; поэтому существует элемент $y \in B$ такой, что $yxTx^{-1}y^{-1} = T$ (следствие 21.3А). Очевидно, элемент x принадлежит группе B тогда и только тогда, когда $yx \in B$, так что мы могли предполагать с самого начала, что $x \in N_G(T)$. Пусть $S = C_T(x)^0$ — подтор тора T . Возможны два случая.

Случай 1. $S \neq e$.

Тогда группа $C = C_G(S)$ обладает нетривиальным радикалом и, таким образом, C — собственная подгруппа группы G . Согласно (22.4), $B' = B \cap C$ — подгруппа Бореля группы C . Сверх того, группа C связна (22.3). Согласно предположению индукции $B' = N_C(B')$. Но x содержится в C и нормализует B , так что $x \in N_C(B') = B' \subset B$.

Случай 2. $S = e$.

Так как элемент x нормализует T , а T — коммутативная группа, то простое вычисление показывает, что коммутаторный морфизм $\gamma_x: T \rightarrow T$ (преобразующий t в $txt^{-1}x^{-1}$) в действительности является гомоморфизмом групп с ядром $C_T(x)$. Оно конечно, ибо $S = e$, так что морфизм γ_x должен быть сюръективен по соображениям размерности (предложение 7.4Б). Следовательно, T содержится в (M, M) , где M — подгруппа группы N , порожденная x и B . В результате мы получаем, что группа $B = TB_u$ содержится в подгруппе группы M , порожденной B_u и (M, M) .

Выберем теперь некоторое рациональное представление $\rho: G \rightarrow GL(V)$, где V содержит прямую D , стабилизатор которой в G совпадает с M (теорема 11.2). Пусть $\chi: M \rightarrow G_m$ — соответствующий характер. Тогда χ тривиален на (M, M) , а также на унитарной подгруппе B_u ; поэтому χ тривиален на B . Если $0 \neq v \in D$, то ρ индуцирует морфизм $G/B \rightarrow Y = \text{орбита вектора } v \text{ относительно } \rho(G)$. Так как G/B — полное многообразие, то его образ Y замкнут в V (и, следовательно, является аффинным многообразием); с другой стороны, Y — полное многообразие ввиду (21.1(б)). Но тогда Y — точка (21.1(в)). Следовательно, $G = M$. Так как группа G

связна и $[M \ B] < \infty$ (лемма 23.1), то $G = B$, — противоречие. $\square$

23.3. Многообразие G/B . Пусть B — произвольная подгруппа Бореля группы G (в силу теоремы сопряженности выбор группы B не имеет никакого существенного значения). Теорема о нормализаторе позволяет нам отождествить множество $\mathfrak{B}$ всех борелевских подгрупп группы G с проективным многообразием G/B . В самом деле, если $B' \in \mathfrak{B}$, то B' имеет неподвижную точку xB на G/B (т.е. $x^{-1}B'x = B$). Если yB — любая неподвижная точка группы B' , то $xBx^{-1} = B' = yBy^{-1}$, или $y^{-1}x \in N_G(B) = B$, откуда $xB = yB$. Это доказывает, что формула $B' \mapsto xB$ корректно определяет отображение. Оно *сюръективно*, так как $xBx^{-1} \mapsto xB$ для произвольного элемента $x \in G$. Наконец, оно *инъективно* ввиду теоремы о нормализаторе*). При только что описанном взаимно однозначном соответствии естественное действие группы G на $\mathfrak{B}$ ($B' \mapsto xB'x^{-1}$) переходит, очевидно, в естественное действие группы G на G/B ($yB \mapsto xyB$). В частности, для любой подгруппы H группы G множество всех борелевских подгрупп, содержащих H (если они существуют), соответствует множеству неподвижных точек группы H на G/B . Мы будем обозначать эти множества соответственно через $\mathfrak{B}^H$ и $(G/B)^H$. Первое из них определяется, конечно, внутренним образом, тогда как второе зависит от выбора B .

23.4. Резюме. Результаты этой главы образуют естественную основу для изучения редуктивных групп в последующих главах. Чтобы упростить ссылки и закрепить в уме читателя эти результаты, мы суммируем кратко основные факты (G — связная группа):

(а) Все борелевские подгруппы (соответственно максимальные торы) группы G сопряжены (21.3).

(б) Если B — борелевская подгруппа, то G/B — проективное многообразие (21.3).

(в) Замкнутая подгруппа P группы G содержит борелевскую подгруппу тогда и только тогда, когда G/P — полное многообразие (и тогда группа P называется параболической) (21.3).

*) На самом деле инъективность отображения $xBx^{-1} \mapsto xB$ — очевидное следствие его конструкции. — *Прим. ред.*

(г) Объединение всех подгрупп Бореля группы G совпадает с G .

(д) Если S — произвольный тор группы G , то централизатор $C_G(S)$ связан; если тор S максимален, то группа $C_G(S)$ нильпотентна и имеет конечный индекс в своем нормализаторе; она также содержится в каждой подгруппе Бореля, содержащей S (22.3). Для любого тора S и любой содержащей S подгруппы Бореля B группы G группа $B \cap C_G(S)$ — подгруппа Бореля группы $C_G(S)$ (22.4).

(е) Если P — параболическая подгруппа группы G , то $P = N_G(P)$ (23.1). В частности, если B — борелевская подгруппа, то G/B можно отождествить с совокупностью $\mathfrak{B}$ всех борелевских подгрупп группы G (23.3).

Все эти результаты опираются на теорему Бореля о неподвижной точке (21.2): если X — непустое полное многообразие, на котором действует связная разрешимая алгебраическая группа G , то существует точка на X , неподвижная относительно группы G .

Упражнения

Через G обозначается связная алгебраическая группа.

1. Пусть S — максимальная разрешимая подгруппа группы G , причем S не является подгруппой Бореля. Доказать, что группа S замкнута, несвязна и имеет меньшую размерность, чем любая подгруппа Бореля группы G .

2. Доказать, что теорема 23.1 эквивалентна своему следствию А.

3. Пусть B — подгруппа Бореля группы G . Если P, Q — параболические подгруппы группы G , содержащие B , то доказать, что соотношение $P \subset Q$ влечет $R_u(P) \supset R_u(Q)$.

4. При $G = SL(n, K)$ описать параболические подгруппы, содержащие группу $B = G \cap T(n, K)$ и вывести отсюда, что число классов сопряженных параболических подгрупп в этом случае равно 2^{n-1} ($n-1 = \text{ранг } G$). Рассмотреть аналогичным образом другие классические группы.

5. Если T — максимальный тор группы G , то число различных борелевских подгрупп, содержащих T , конечно и равно $[N_G(T): C_G(T)]$.

6. Если $\text{char } K = 0$ и если B — борелевская подгруппа группы G , то $\mathfrak{b}$ — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ и $N_G(\mathfrak{b}) = B$.

7. Почему в случае $\text{char } K = 0$ очевидно, что каждый унипотентный элемент, нормализующий подгруппу Бореля B группы G , должен принадлежать группе B ?

8. Доказать, что замкнутая подгруппа H группы G есть подгруппа Бореля тогда и только тогда, когда группа H разрешима и многообразие G/H полно.

Замечания. Теорема 23.1 была доказана Шевалле [8, exposé 9] и подготовила почву для дальнейшего развития структурной теории и классификации алгебраических групп. Приведенное здесь элегантное доказательство принадлежит Борелю (лекции 1973 г. в Буэнос-Айресе). Максимальные разрешимые подгруппы алгебраических групп исследовались Платоновым [4], который доказал, что они распадаются в конечное число классов сопряженных подгрупп.

ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ТОРОВ

Всюду в этой главе G — *связная* алгебраическая группа.

Совокупность $\mathfrak{B}$ всех борелевских подгрупп группы G можно отождествить с многообразием G/B при фиксированной подгруппе B из $\mathfrak{B}$ (23.3). Действие группы G на $\mathfrak{B}$, индуцированное сопряжением, соответствует левому умножению на G/B . Мы намереваемся изучить здесь вопрос, как различные торы S и их централизаторы действуют на $\mathfrak{B}$. Так как группа $C_G(S)$ связна (22.3) и имеет обычно меньшую размерность, чем группа G , то многие вопросы часто можно свести к случаю групп «полупростого ранга 1», когда действие на $\mathfrak{B}$ дает решающую информацию о строении группы G .

§ 24. Регулярные и сингулярные торы

Полезно различать торы в группе G по числу неподвижных точек на $\mathfrak{B}$ (т. е. по числу борелевских подгрупп, в которых тор содержится). Если множество B^S конечно, то мы называем тор S **регулярным**, а в противном случае — **сингулярным**. (У Шевалле [8] и Бореля [4] вместо термина «регулярный» используется термин «полурегулярный».) Например, вскоре мы увидим, что максимальные торы регулярны, а в случаях, подобных $SL(n, K)$, компонента единицы ядра корня оказывается сингулярным тором.

24.1. Группы Вейля. Пусть S — произвольный тор группы G . В силу жесткости торов (16.3) группа $N_G(S)/C_G(S)$ конечна; она называется **группой Вейля группы G относительно S** и обозначается через $W(G, S)$. Так как все максимальные торы сопряжены, то их группы Вейля изоморфны; поэтому группа Вейля максимального тора называется просто **группой Вейля группы G** .

Лемма. Пусть T — максимальный тор группы G и $C = C_G(T)$. Тогда C содержится в каждой борелевской подгруппе, содержащей T .

Доказательство. Так как группа C связна (22.3) и нильпотентна (21.4), то по меньшей мере одна борелевская подгруппа B содержит C . Если группа $B' = xBx^{-1}$ также содержится в $\mathfrak{B}^T$, то T и xTx^{-1} — максимальные торы группы B' и, следовательно, сопряжены посредством некоторого элемента $y \in B'$. Поэтому $y(xCx^{-1})y^{-1} = C \subset B'$, что и требуется. $\square$

Из этой леммы вытекает, что группа C действует тривиально на множестве $\mathfrak{B}^T$. С другой стороны, очевидно, $N = N_G(T)$ переставляет элементы $\mathfrak{B}^T$, в результате чего мы получаем действие группы $W = N/C$ на $\mathfrak{B}^T$.

Предложение А. Пусть T — максимальный тор группы G , и $W = W(G, T)$. Тогда W действует на множестве $\mathfrak{B}^T$ однотранзитивно*). В частности, $\text{Card } \mathfrak{B}^T = |W|$ — конечное число, так что тор T регулярен.

Доказательство. Покажем сначала, что группа W действует транзитивно. Пусть $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}^T$. Теорема сопряженности показывает, что $xB_2x^{-1} = B_1$ для некоторого элемента $x \in G$. Так как xTx^{-1} и T — максимальные торы группы B_1 , то существует такой элемент $y \in B_1$, что $yxTx^{-1}y^{-1} = T$, откуда $z = yx \in N_G(T)$. Но $zB_2z^{-1} = B_1$, так что смежный класс элемента z в W переводит B_2 в B_1 . Утверждение, что группа W действует однотранзитивно, означает, что стабилизатор в W элемента $B \in \mathfrak{B}^T$ тривиален; иначе говоря, если $xBx^{-1} = B$ при $x \in N_G(T)$, то $x \in C_G(T)$. Но $N_G(B) = B$ (23.1), в то время как $N_B(T) = C_B(T)$ (19.4), откуда и следует однотранзитивность. $\square$

Имея в виду обратиться к рассмотрению полупростого (или редуктивного) случая, мы займемся вопросом о том, как влияет на W переход к группе $G/R(G)$. В общем случае, если T — максимальный тор группы G и $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм, то мы знаем, что $T' = \varphi(T)$ — максимальный тор группы G' (следствие 21.3В).

Предложение Б. Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм алгебраических групп и $T, T' = \varphi(T)$ — соответствующие

*) В теории групп подстановок употребляется также термин «регулярно». — Прим. перев.

максимальные торы. Тогда φ индуцирует сюръективные отображения $\mathfrak{B}^T \rightarrow \mathfrak{B}'^{T'}$ и $W(G, T) \rightarrow W(G', T')$, которые оказываются и инъективными, если $\text{Кег } \varphi$ содержится в каждой борелевской подгруппе группы G .

Доказательство. Если B — борелевская подгруппа группы G , содержащая T , то $B' = \varphi(B)$ — борелевская подгруппа группы G' содержащая T' (следствие 21.3В); поэтому отображение $\mathfrak{B}^T \rightarrow \mathfrak{B}'^{T'}$ определено. Поскольку $\varphi(N_G(T)) \subset N_{G'}(T')$, $\varphi(C_G(T)) \subset C_{G'}(T')$, то, очевидно, отображение $W = W(G, T) \rightarrow W(G', T') = W'$ также определено.

Эпиморфизм φ индуцирует сюръективное отображение $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (следствие 21.3В). Если $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{B}'^{T'}$, то каждая борелевская подгруппа группы $H = \varphi^{-1}(B')^0$ есть борелевская подгруппа группы G , которую φ отображает на B' ; но T — максимальный тор группы H и, следовательно, лежит в одной из этих подгрупп. Это показывает, что отображение $\mathfrak{B}^T \rightarrow \mathfrak{B}'^{T'}$ сюръективно. Если $\text{Кег } \varphi$ содержится в каждой борелевской подгруппе группы G , то отображение $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ становится также и инъективным.

Переходя к группам Вейля, мы воспользуемся их однотранзитивностью (предложение А). Выберем $B \in \mathfrak{B}$ и положим $B' = \varphi(B)$; построим коммутативную диаграмму с вертикальными (биективными) орбитными отображениями:

$$\begin{array}{ccc} W & \rightarrow & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{B}^T & \rightarrow & \mathfrak{B}'^{T'} \end{array}$$

Сюръективность верхнего отображения вытекает из только что доказанной сюръективности нижнего отображения; аналогично устанавливается инъективность, если отображение $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ инъективно. $\square$

Напомним, что $R(G)$ — компонента единицы пересечения всех борелевских подгрупп группы G (упражнение 21.6); таким образом, предложение позволяет установить биекцию в двух важных частных случаях: $G' = G/R(G)$, $G' = G/R_u(G)$.

Прежде чем перейти к обсуждению произвольных подторов тора T , мы заметим, что группа Вейля W естественным образом действует на системе корней $\Phi =$

$= \Phi(G, T)$ как конечная группа перестановок. В самом деле, для любого тора T естественное действие его нормализатора на $X(T)$, $Y(T)$ индуцирует и действие группы $W = N_G(T)/C_G(T)$ (упражнение 8). Соответственно группа $N = N_G(T)$ (и, следовательно, W) переставляет собственные пространства тора T в $\mathfrak{g}$ согласно перестановке корней. Точнее, $(\sigma\alpha)(t) = \alpha(n^{-1}tn)$, если элемент $n \in N$ является представителем элемента $\sigma \in W$. В свою очередь W переставляет корневые пространства $\mathfrak{g}_\alpha$ (посредством $\text{Ad } N$): $\text{Ad}(n(\mathfrak{g}_\alpha)) = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$ (см. (16.4)).

24.2. Регулярные торы. Пусть S — произвольный тор и $C = C_G(S)$. В (22.4) мы изучали множество $\mathfrak{B}^S$ борелевских подгрупп, содержащих S , которое можно отождествить с замкнутым подмножеством X некоторого фактормногообразия G/B , где $B \supset S$. Связная группа C оставляет инвариантной каждую неприводимую компоненту Y множества X , и действует на Y транзитивно. Следовательно, полное многообразие Y выглядит как $C/C_B(S)$. Отсюда мы выводили, в частности, что $C_B(S)$ — борелевская подгруппа группы C .

Напомним, что тор S называется *регулярным*, если множество $\mathfrak{B}^S$ конечно. Например, максимальные торы регулярны (предложение 24.1A).

Предложение. Пусть S — тор в группе G и $C = C_G(S)$. Тогда тор S регулярен в том и только в том случае, если группа C разрешима. В этом случае группа C содержится в каждой борелевской подгруппе группы G , содержащей S , и для каждого максимального тора T , содержащего S , мы имеем $\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}^S$.

Доказательство. Как и выше, отождествим $\mathfrak{B}^S$ с замкнутым подмножеством X некоторого многообразия G/B , где $B \supset S$. Размерности всех неприводимых компонент Y множества X равны коразмерности в C борелевской подгруппы группы C . Поэтому тор S регулярен $\Leftrightarrow$ множество $\mathfrak{B}^S$ конечно $\Leftrightarrow$ группа C есть борелевская подгруппа в себе самой (т.е. группа C разрешима). Это рассуждение показывает также, что для регулярного тора S группа C содержится в каждой борелевской подгруппе группы G , содержащей S (т.е. C оставляет неподвижной каждую точку множества $\mathfrak{B}^S$). В частности, так как любой максимальный тор T , содержащий S , принадлежит C , то $\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}^S$. $\square$

24.3. Сингулярные торы и корни. Тор $S \subset G$ является *сингулярным*, если $\mathfrak{B}^S$ бесконечно или, что равносильно, если (ввиду предложения 24.2) группа $C = C_G(S)$ неразрешима. Наибольшие торы такого сорта возникают следующим образом в связи с корнями. Напомним, что если T — максимальный тор группы G , то *корни* группы G относительно T есть нетривиальные веса тора $\text{Ad } T$ в $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(T) \oplus \bigsqcup_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

где $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad } t(x) = \alpha(t)x, t \in T\}$ $\alpha \in X(T)$ (см. (16.4)).

Так как группа $\text{Ad } T$ диагонализируема, то для любой замкнутой подгруппы H группы G , нормализуемой тором T , мы можем отщепить дополнение к $\mathcal{L}(H)$ в $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\text{Ad } T$. В частности, пусть $H = I(T)$, где $I(T)$ — компонента единицы в пересечении всех борелевских подгрупп группы G , содержащих T , и запишем:

$$\mathfrak{g} = \mathcal{L}(I(T)) \oplus \bigsqcup_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}'_{\alpha}.$$

Заметим, что $C_G(T) \subset I(T)$ (лемма 24.1), так что $\Psi \subset \Phi$. Ясно, что Ψ не зависит от выбора дополнения. (В своем месте мы покажем, что $I(T) = T \cdot R_u(G)$.)

Определим $T_{\alpha} = (\text{Ker } \alpha)^0 \subset T$ для всех $\alpha \in \Phi$. Очевидно, что T_{α} — тор коразмерности 1 в T . Мы хотим показать, что тор T_{α} сингулярен.

Предложение. Пусть S — тор группы G и T — максимальный тор, содержащий S . Тор S сингулярен тогда и только тогда, когда $S \subset T_{\alpha}$ для некоторого корня $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. Пусть S — сингулярный тор. Тогда $C = C_G(S)$ — неразрешимая группа (24.2); в частности, группа C имеет большую размерность, чем разрешимая группа $C \cap I(T)$, так что пространство неподвижных точек тора S в $\mathfrak{g}$ не содержится целиком в $\mathcal{L}(I(T))$. Если тор S оставляет неподвижным элемент $x \in \mathfrak{g}$, то он также оставляет неподвижными различные $\mathfrak{g}'_{\alpha}$ -компоненты x , откуда мы заключаем, что $S \subset \text{Ker } \alpha$ по крайней мере для одного корня $\alpha \in \Psi$. Но тогда $S \subset T_{\alpha}$.

Обратно, пусть $S \subset T_{\alpha}$ для некоторого корня $\alpha \in \Psi$. Если тор S не сингулярен, то группа C должна быть раз-

решимой и содержаться в каждой борелевской подгруппе группы G , содержащей S ; в частности $C \subset I(T)$. Так как глобальный и инфинитезимальный централизаторы тора S согласованы (предложение 18.4A), то все неподвижные точки тора S в $\mathfrak{g}$ должны принадлежать $\mathcal{L}(I(T))$, что противоречит определению Ψ $\square$

Следствие. При $\alpha \in \Psi$ положим $Z_\alpha = C_\alpha(T_\alpha)$. Тогда $G_\alpha = Z_\alpha/R(Z_\alpha)$ — полупростая группа ранга 1.

Доказательство. Так как тор T_α сингулярен, то связанная группа Z_α неразрешима (24.2). Следовательно, группа G_α полупроста. Но $T_\alpha \subset Z(Z_\alpha)^0 \subset R(Z_\alpha)$, так что ранг группы G_α равен 1. $\square$

В § 25 мы докажем, что группа G_α «локально изоморфна» группе $PGL(2, K)$; в частности, ее размерность равна 3. (Это будет первым шагом при установлении того факта, что Ψ — абстрактная система корней в смысле дополнения). Доказательство тесно связано с тем, что группа Вейля группы G «не слишком мала». Отметим, если читатель сам еще не обратил на это внимания, что требуется еще доказать, что существует более чем одна борелевская подгруппа, содержащая данный максимальный тор (если группа G неразрешима).

24.4. Регулярные однопараметрические подгруппы. Зафиксируем максимальный тор T группы G . Противоположностью сингулярных торов T_α , $\alpha \in \Psi$ (24.3), ко-размерность которых в T равна 1, являются регулярные торы размерности 1. Назовем однопараметрическую подгруппу $\lambda \in Y(T)$ **регулярной**, если тор $\lambda(G_m) \subset T$ регулярен. Обозначим через $Y(T)_{\text{reg}}$ множество всех регулярных однопараметрических мультипликативных подгрупп. При условии $\dim T > 0$ мы можем доказать, что таких однопараметрических подгрупп очень много. Они играют решающую роль в § 25.

Предложение. Однопараметрическая мультипликативная подгруппа $\lambda \in Y(T)$ регулярна тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Psi$.

Доказательство. В силу предложения 24.3 подгруппа $S = \lambda(G_m)$ сингулярна тогда и только тогда, когда $S \subset T_\alpha$ для некоторого корня $\alpha \in \Psi$. Но это имеет место тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ для некоторого $\alpha \in \Psi$ ввиду определения спаривания групп $X(T)$ и $Y(T)$. $\square$

Упражнения

1. Если S — тор в группе G и $X = \mathfrak{B}^S$, то все неприводимые компоненты множества X имеют размерности, равные размерности многообразия борелевских подгрупп группы $C_G(S)$. Показать на примере, что эти компоненты не всегда транзитивно переставляются группой $W(G, S)$.

2. Пусть T — максимальный тор группы G и S — подтор тора T . Доказать, что T оставляет неподвижной некоторую точку на каждой неприводимой компоненте множества $\mathfrak{B}^S$ и вывести отсюда, что число таких компонент не превосходит $|W(G, T)|$.

3. Для группы $G = SL(n, K)$ (или для других классических групп) доказать, что группа $I(T)$ в (24.3) совпадает с T , так что $\Psi = \Phi(G, T)$.

4. Доказать, что группа Вейля группы Z_α в (24.3) имеет порядок 2. (Использовать предложение 24.1Б.) Описать группы Z_α , появляющиеся в $SL(n, K)$.

5. Доказать, что подтор диагонального тора в $SL(n, K)$ регулярен тогда и только тогда, когда он содержит регулярный полупростой элемент (упражнение 22.7).

6. Пусть T — максимальный тор группы G и S — подтор тора T . Тогда S регулярен $\Leftrightarrow C_G(S) \subset I(T) \Leftrightarrow \mathfrak{B}^S = \mathfrak{B}^T$.

7. Если S — сингулярный тор группы G , то $\dim C_G(S) \geq \text{rang } G + 2$.

8. Пусть T — тор группы G , $W = W(G, T)$, $X = X(T)$, $Y = Y(T)$. Если $n \in N_G(T)$ — представитель смежного класса, соответствующего элементу $\sigma \in W$, то показать, что следующие формулы определяют действие группы W на X , Y независимо от выбора n :

$$\begin{aligned}(\sigma\chi)t &= \chi(n^{-1}tn) & (t \in T, \chi \in X), \\(\sigma\lambda)(a) &= n\lambda(a)n^{-1} & (a \in G_m, \lambda \in Y).\end{aligned}$$

Проверить, что $\langle \sigma\chi, \sigma\lambda \rangle = \langle \chi, \lambda \rangle$ при $\sigma \in W$, $\chi \in X$, $\lambda \in Y$.

Замечания. В этой главе мы следуем с незначительными изменениями в изложении Борелю [4, гл. IV].

§ 25. Действие максимального тора на G/B

Любой максимальный тор T группы G оставляет неподвижной по меньшей мере одну и не более чем конечное число точек на G/B (24.1). В частности, действие тора T на G/B весьма нетривиально, если $G \neq B$. Мы хотим показать, что тор T оставляет неподвижными в точности две точки на G/B , если $\dim G/B = 1$, и не менее чем три точки, если $\dim G/B > 1$ (25.2). Одновременно мы получим хорошее описание группы $G/R(G)$ в случае, если эта группа имеет ранг 1 (и позднее при-

меним это к случаю, когда G — централизатор Z_α сингулярного тора T_α в некоторой большей связной группе).

Для всего этого мы рассмотрим однопараметрические подгруппы $\lambda: G_m \rightarrow T$ и распространим получающееся действие группы G_m на G/B до действия на $\mathbf{P}^1 = G_m \cup \{0\} \cup \{\infty\}$. Чтобы изучить многообразие G/B конкретно, мы можем отобразить G в некоторую $GL(V)$ и найти точку в $\mathbf{P}(V)$, стабилизатор которой в G совпадает с B , тем самым отождествляя G/B с G -орбитой этой точки в $\mathbf{P}(V)$ (11.3). Эта орбита, конечно, замкнута, ибо многообразие G/B полно. Мы можем даже сделать так, чтобы образ многообразия G/B в $\mathbf{P}(V)$ не лежал ни в какой гиперплоскости, — просто заменяя V на подпространство, натянутое на прообраз многообразия G/B относительно морфизма $\pi: V \rightarrow \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(V)$. (Подобным образом мы могли бы указать конкретную реализацию многообразия G/P , где P — любая параболическая подгруппа группы G .)

25.1. Действие однопараметрической подгруппы. (В этом пункте G не фигурирует.) Пусть T — тор в $GL(V)$ (максимальный или нет) и $\lambda: G_m \rightarrow T$ — однопараметрическая подгруппа. Тогда группа G_m действует (посредством λ) на $\mathbf{P}(V)$. Чтобы описать это действие в явном виде, выберем базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства V , состоящий из собственных векторов для T . Веса тора T в V являются ограничениями $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответствующих координатных функций; они порождают $X(T)$. Положим $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$. Если $v = \sum a_i v_i \in V$, $t \in G_m$, то мы имеем по определению: $\lambda(t) \cdot v = \sum a_i t^{m_i} v_i$. Действие группы G_m на $\mathbf{P}(V)$ получается путем перехода от $v \neq 0$ к $\pi(v) = [v]$.

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $v \in V$, $v = \sum a_i v_i$. По причинам, которые вскоре станут ясными, мы хотим расширить орбитное отображение $t \xrightarrow{\varphi} \lambda(t)[v]$ до морфизма $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}(V)$. Здесь мы рассматриваем $\mathbf{P}^1$ как пространство, покрытое двумя аффинными открытыми подмножествами $K^* \cup \{0\}$, $K^* \cup \{\infty\}$, так что достаточно расширить φ на каждое из них. (В действительности существование расширения морфизма φ на $\mathbf{P}^1$ можно доказать при весьма общих предположениях, если многообразие, в которое осуществляется отображение,

является полным; нам, однако, не требуется точное описание этой ситуации.)

Пусть, как и выше, $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$, и пусть m_0 (соответственно m^0) — минимальное (соответственно максимальное) значение m_i при $i \in I = \{i \mid a_i \neq 0\}$. Положим $I_0 = \{i \in I \mid m_i = m_0\}$, $I^0 = \{i \in I \mid m_i = m^0\}$. Заметим, что $[v] = [t^{-m_0} v] = [t^{-m^0} v]$ при $t \in K^*$. В соответствии с этим мы можем выразить φ двумя способами: $\varphi_0(t) = [\sum a_i t^{m_i - m_0} v_i]$ имеет смысл даже при $t = 0$, а $\varphi^0(t) = [\sum a_i t^{m_i - m^0} v_i]$ при $t = \infty$. (В каждом случае вектор в скобках является ненулевым вектором пространства V .) Очевидно, φ_0 , φ^0 определяют морфизмы соответствующих аффинных прямых $K^* \cup \{0\}$, $K^* \cup \{\infty\}$ в $\mathbf{P}(V)$, которые согласуются с φ на K^* ; поэтому они приводят к искомому морфизму $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}(V)$ (2.3). Образы точек $0, \infty$ мы обозначим через $\lambda(0)[v]$, $\lambda(\infty)[v]$:

$$\lambda(0)[v] = [\sum_{i \in I_0} a_i v_i], \quad \lambda(\infty)[v] = [\sum_{i \in I^0} a_i v_i].$$

Эти точные формулы показывают, что группа $\lambda(G_m)$ оставляет неподвижной каждую из двух точек $\lambda(0)[v]$ и $\lambda(\infty)[v]$ в $\mathbf{P}(V)$. (Именно для этой цели мы и строили эти точки). Необходимо еще выяснить, когда эти точки различны. Но это легко: $\lambda(0)[v] = \lambda(\infty)[v] \iff I_0 = I^0 \iff m_0 = m^0 \iff v$ есть собственный вектор тора $\lambda(G_m) \iff$ точка $[v]$ неподвижна относительно $\lambda(G_m)$. В противном случае, как легко видеть, точка $\lambda(t)[v]$ неподвижна только при $t = 0, \infty$ (упражнение 1).

Наше следующее наблюдение: если подгруппа λ выбрана таким образом, что числа $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$ при различных γ_i все различны, то собственные векторы тора T и $\lambda(G_m)$ совпадают. В этом случае мы имеем $\lambda(0)[v] = \lambda(\infty)[v] \iff T$ оставляет неподвижной точку $[v]$. Такой выбор λ всегда возможен, так как $X(T) \times Y(T) \rightarrow Z$ — спаривание, осуществляющее двойственность и так как Y_i порождают $X(T)$.

25.2. Существование достаточного числа неподвижных точек. Мы докажем сначала следующую вспомогательную геометрическую лемму.

Лемма. Пусть W — подпространство коразмерности 1 в векторном пространстве V , и пусть X — неприводимое

замкнутое подмногообразие многообразия $\mathbf{P}(V)$, которое не содержится целиком в $\mathbf{P}(W)$. Если $\dim X > 0$, то X пересекается с $\mathbf{P}(W)$ и каждая неприводимая компонента их пересечения имеет коразмерность 1 в X .

Доказательство. Если пересечение $X \cap \mathbf{P}(W)$ пусто, то X — полное замкнутое подмногообразие аффинного многообразия $\mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(W)$, откуда следует, что $\dim X = 0$ (21.1(в)). Остальные утверждения следуют из теоремы 3.3 и следствия 3.2. $\square$

Теорема. Пусть $T \subset GL(V)$ — тор, естественным образом действующий на $\mathbf{P}(V)$. Пусть X — неприводимое замкнутое множество в $\mathbf{P}(V)$, инвариантное относительно T . Тогда:

(а) Если $\dim X \geq 1$, то T оставляет неподвижными по меньшей мере две точки множества X .

(б) Если $\dim X \geq 2$, то T оставляет неподвижными по меньшей мере три точки множества X .

Доказательство. Пусть $(v_1, \dots, v_n)$ — базис пространства V , состоящий из собственных векторов относительно T с соответствующими весами $\gamma_i \in X(T)$. Выберем $\lambda \in Y(T)$ так, чтобы числа $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$ были различны, если γ_i различны. Как отмечалось в конце (25.1), торы T и $\lambda(\mathbf{G}_m)$ имеют одинаковое число неподвижных точек на $\mathbf{P}(V)$. Поэтому мы можем также предположить, что $T = \lambda(\mathbf{G}_m)$.

(а) Так как $\dim X \geq 1$, то множество X бесконечно. Если T оставляет неподвижными все точки множества X , то доказывать нечего. В противном случае пусть $[v] \in X$ — точка, не являющаяся неподвижной относительно T . Ввиду сказанного в (25.1) для такой точки v мы получаем две различные неподвижные точки $\lambda(0)[v]$ и $\lambda(\infty)[v]$ в $\mathbf{P}(V)$. Но образ ассоциированного морфизма $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}(V)$ замкнут (21.1(б)) и множество X замкнуто; поэтому эти две точки должны лежать в X .

(б) Как в доказательстве утверждения (а), мы можем предположить, что некоторая точка $[v]$ в X не является неподвижной относительно T . Используя обозначения (25.1) (при этом выборе точки v), упорядочим базис пространства V так, чтобы число $m_1 = m^0$ было максимальным среди m_i для базисных векторов v_i , входящих в разложение вектора v . Пусть W — подпростран-

ство пространства V , натянутое на $v_2, \dots, v_n$, так что $[v] \notin \mathbf{P}(W)$ и $X \not\subset \mathbf{P}(W)$. Тогда лемма показывает, что неприводимые компоненты множества $X \cap \mathbf{P}(W)$ имеют коразмерность 1 в X . Очевидно, что они инвариантны относительно T (так как X и W инвариантны) и имеют размерности, не меньше 1 (так как $\dim X \geq 2$). Пусть Y — одна из этих компонент. Тогда утверждение (а) показывает, что тор T оставляет неподвижными самое меньшее две точки множества Y . Остается найти третью точку. Ввиду выбора точки v точка $\lambda(\infty)[v] = \left[\sum_{i \in I^0} a_i v_i \right]$ не лежит в $\mathbf{P}(W)$ и является неподвижной относительно T , что и завершает доказательство. $\square$

Мы выведем теперь из теоремы тот факт, что группа G имеет достаточно много борелевских подгрупп, содержащих данный тор T .

Следствие А. Пусть P — собственная параболическая подгруппа группы G , T — любой тор в G . Тогда T оставляет неподвижными по меньшей мере две точки многообразия G/P (соответственно по меньшей мере три, если $\dim G/P > 1$). В частности, максимальный тор содержится по меньшей мере в двух борелевских подгруппах (соответственно по меньшей мере в трех, если $\dim G/B > 1$).

Доказательство. Как было отмечено в начале этого пункта, группу G можно отобразить в некоторую группу $GL(V)$ таким образом, чтобы многообразие G/P было изоморфно орбите X некоторой точки в $\mathbf{P}(V)$; мы можем даже обеспечить, чтобы множество X не содержалось ни в какой гиперплоскости. Так как многообразие G/P полно и неприводимо, то X замкнуто и неприводимо (21.1) (а); тор T оставляет X инвариантным, и мы можем применить теорему. $\square$

Это следствие можно сформулировать также как утверждение о том, что группа Вейля группы G «не слишком мала» ввиду предложения 24.1А:

Следствие Б. Пусть B — подгруппа Бореля группы G и T — максимальный тор. Пусть $W = N_G(T)/C_G(T)$ — группа Вейля группы G относительно T . Если $\dim G/B \geq 1$ (соответственно ≥ 2), то $|W| \geq 2$ (соответственно ≥ 3). $\square$

Следствие В. Пусть T — максимальный тор группы G . Тогда G порождается множеством $\mathfrak{B}^T$ подгрупп Бореля, содержащих T .

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности группы G . Подгруппа P группы G , порожденная множеством $\mathfrak{B}^T$, очевидно, является параболической. Предположим, что $P \neq G$. Ввиду следствия А существует по меньшей мере одна содержащая T подгруппа P' , сопряженная с P , причем $P' \neq P$. Но T — максимальный тор группы P' и борелевские подгруппы группы P' , содержащие T , являются также борелевскими подгруппами группы G (упражнение 21.9). Последние, по предположению индукции, порождают P' , откуда $P' \subset P$, что невозможно. $\square$

Позднее мы покажем, что уже две соответствующим образом выбранные подгруппы из $\mathfrak{B}^T$ порождают G . Например, если $G = SL(n, K)$, то мы можем выбрать для этой цели верхнюю и нижнюю треугольные группы (упражнение 2).

25.3 Группы полупростого ранга 1. Воспользовавшись результатами (25.2) и (6.3), (6.4), мы можем получить описание полупростых групп ранга 1. **Полупростой ранг** $\text{rank}_{ss} G$ (соответственно **редуктивный ранг** $\text{rank}_{\text{red}} G$) есть ранг группы $G/R(G)$ (соответственно группы $G/R_u(G)$). Например, группы $SL(2, K)$, $GL(2, K)$, $PGL(2, K)$ и группы Z_α (24.3) все имеют полупростой ранг 1, тогда как группа $GL(2, K)$ имеет редуктивный ранг 2.

Теорема. Пусть T — максимальный тор группы G и $W = W(G, T)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $\text{rank}_{ss} G = 1$.
- (б) $|W| = 2$.
- (в) $\text{card } \mathfrak{B}^T = 2$.
- (г) $\dim G/B = 1$.
- (д) $G/B \cong \mathbb{P}^1$.
- (е) Существует эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow PGL(2, K)$ такой, что $(\text{Ker } \varphi)^0 = R(G)$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Так как каждая подгруппа Бореля содержит $R(G)$, то борелевские подгруппы группы G , содержащие T , находятся во взаимно однозначном соответствии с борелевскими подгруппами группы $G' = G/R(G)$, содержащими образ $T' = T/(T \cap R(G))$,

и число этих подгрупп в каждом случае равно порядку соответствующей группы Вейля W , W' (предложение 24.1Б). Но $\dim T' = 1$, по предположению, и $\text{Aut } G_m = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (упражнение 7.4), так что $|W| = |W'| \leq 2$. С другой стороны, группа G , по предположению, неразрешима, так что $|W| \geq 2$ согласно следствию 25.2Б.

(б) $\Rightarrow$ (в) Эквивалентность утверждений (б) и (в) отмечена в предложении 24.1А.

(в) $\Rightarrow$ (г) Так как тор T содержится в двух различных борелевских подгруппах, то размерность многообразия G/B не меньше 1. Если $\dim G/B \geq 2$, то следствие 25.2А показывает, что $\text{card } \mathfrak{B}^T \geq 3$, что противоречит (в).

(г) $\Rightarrow$ (д). Пусть $\dim G/B = 1$. Как и в (25.1), мы можем построить непостоянный морфизм $\mathbf{P}^1 \rightarrow G/B \subset \mathbf{P}(V)$ для любой регулярной однопараметрической подгруппы $\lambda \in Y(T)$, где T — максимальный тор группы G . Его образ замкнут, ибо многообразие $\mathbf{P}^1$ полно (21.1(б)) и, следовательно, совпадает с G/B , так как G/B — неприводимое многообразие размерности 1. Это показывает, что многообразие G/B изоморфно $\mathbf{P}^1$ (6.3).

(д) $\Rightarrow$ (е) G действует как группа автоморфизмов на $G/B \cong \mathbf{P}^1$. Но мы знаем, что $\text{Aut } \mathbf{P}^1 = \text{PGL}(2, K)$, так что мы имеем морфизм алгебраических групп $\varphi: G \rightarrow \text{PGL}(2, K)$ (6.4). Очевидно, $\text{Ker } \varphi$ — пересечение всех борелевских подгрупп группы G , так что $(\text{Ker } \varphi)^0 = R(G)$ (упражнение 21.6). Так как $G' = G/R(G)$ — неразрешимая группа, ее размерность самое меньшее равна 3 (упражнение 21.4), откуда следует, что φ — эпиморфизм.

(е) $\Rightarrow$ (а) Это очевидно. $\square$

Эта теорема дает нам существенную информацию о строении полупростых групп ранга 1; в особенности важно, что размерность такой группы равна 3. Сверх того, мы получаем информацию о редуктивных группах полупростого ранга 1, которая в дальнейшем будет использована для описания групп Z_α в случае, когда группа G редуктивна:

Следствие. Пусть G — редуктивная группа, $\text{rank}_{ss} G = 1$, T — максимальный тор группы G и $Z = Z(G)^0$. Тогда:

(а) Группа (G, G) полупроста и имеет размерность 3,

(б) $G = (G, G) \cdot Z$, причем пересечение группы (G, G) с Z есть конечная группа.

(в) $C_G(T) = T$ и, в частности, $Z(G) \subset T$.

(г) Если $\varphi: G \rightarrow PGL(2, K)$ — эпиморфизм, то $\text{Ker } \varphi = Z(G)$.

Доказательство. Из утверждения (е) теоремы мы получаем эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow PGL(2, K)$, причем $(\text{Ker } \varphi)^0 = R(G)$. Так как группа G редуктивна, то $R(G) = Z$ и $R(G)$ — тор (лемма 19.5). С другой стороны, группа $PGL(2, K)$ совпадает со своим коммутантом: в противном случае, например, коммутант был бы разрешимой группой (упражнение 21.4), что противоречит полупростоте группы $PGL(2, K)$. Отсюда следует, что φ отображает группу (G, G) на $PGL(2, K)$. С учетом того факта, что группа (G, G) связна (17.2) и что пересечение $(G, G) \cap Z$ конечно (19.5), это доказывает как (а), так и (б). Используя простые вычисления в $SL(2, K)$, легко убедиться, что максимальный тор группы $PGL(2, K)$ совпадает со своим централизатором; поэтому группы $C_G(T)$ и T при отображении φ имеют один и тот же образ, откуда следует, что $T \subset C_G(T) \subset T \cdot \text{Ker } \varphi$. Но T — подгруппа конечного индекса в группе, стоящей в правой части, в то время как группа $C_G(T)$ связна (22.3). Это доказывает справедливость утверждений (в) и (г). $\square$

25.4. Камеры Вейля. Рассмотрим более внимательно борелевские подгруппы централизаторов сингулярных торов.

Зафиксируем максимальный тор T группы G . Для каждого корня $\alpha \in \Psi$ (24.3) группа $T_\alpha = (\text{Ker } \alpha)^0$ — сингулярный подтор тора T , централизатор которого Z_α имеет полупростой ранг 1. Из теоремы 25.3 (в действительности уже из упражнения 24.4) следует, что порядок группы $W_\alpha = W(Z_\alpha, T)$ равен 2, так что максимальный тор T группы Z_α лежит точно в двух борелевских подгруппах (скажем, B_α и B'_α) группы Z_α . Так как Z_α содержит $C_G(T)$, то группу W_α можно канонически отождествить с подгруппой группы $W = W(G, T)$; обозначим образующую группы W через σ_α и выберем представитель n_α элемента σ_α в $N_{Z_\alpha}(T)$. Тогда $n_\alpha B_\alpha n_\alpha^{-1} = B'_\alpha$. Для каждой группы $B \in \mathfrak{B}^T$ пересечение $B \cap Z_\alpha$ — борелевская подгруппа группы Z_α (22.4) и, следовательно, сов-

падает либо с B_α либо с B'_α . Пусть, скажем, $B \cap Z_\alpha = B_\alpha$, так что $n_\alpha B n_\alpha^{-1} \cap Z_\alpha = B'_\alpha$. Ясно, что ровно половина элементов группы W (порядок которой четен!) отображает B в другие борелевские подгруппы с тем же свойством; таким образом, α индуцирует естественное разбиение множества $\mathfrak{B}^T$. Мы можем сделать это разбиение более ясным, если опишем его в терминах однопараметрических подгрупп.

Идея заключается в том, чтобы сопоставить каждой подгруппе $\lambda \in \Upsilon(T)_{\text{reg}}$ борелевскую подгруппу $B(\lambda)$, содержащую T , таким образом, чтобы соотношение $B(\lambda) \cap Z_\alpha = B_\alpha$ имело место в точности тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. Поскольку подгруппа λ регулярна тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Psi$ (24.4), то эта идея вполне естественна. Разумеется, соответствие $\lambda \mapsto B(\lambda)$ не будет взаимно однозначным, ибо $\text{card } \mathfrak{B}^T = |W| < \infty$.

Выберем представление $G \rightarrow GL(V)$, так что многообразие G/B отождествляется с орбитой X некоторой точки в пространстве $\mathbf{P}(V)$ (причем X не содержится ни в какой гиперплоскости $\mathbf{P}(W)$). Как и в (25.1), положим $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$ при $\lambda \in \Upsilon(T)_{\text{reg}}$. Упорядочим базис $(v_1, \dots, v_n)$ пространства V таким образом, что $m^0 = m_1 = \dots = m_r > m_{r+1} \geq \dots \geq m_n = m_0$. Пусть W — подпространство, натянутое на $(v_2, \dots, v_n)$. По построению орбита X не содержится целиком в $\mathbf{P}(W)$, так что мы можем выбрать точку $[v] = [\sum a_i v_i] \in X$ с условием $a_1 \neq 0$. Рассуждение из (25.1) показывает, что группа $\lambda(G_m)$ оставляет неподвижной точку $\lambda(\infty)[v] = [a_1 v_1 + \dots + a_r v_r]$. Поскольку группа λ регулярна, мы можем утверждать, что $r=1$; в противном случае мы могли бы найти бесконечное множество различных точек в X вида $[v'] = [v_1 + b v_2 + \dots]$ с различными b , так как X не может лежать в объединении гиперплоскости $\mathbf{P}(W)$ и конечного числа других гиперплоскостей, определенных условиями « b — частное второй и первой координат». Таким образом, мы получили бы бесконечное множество различных неподвижных точек $\lambda(\infty)[v']$ относительно действия группы $\lambda(G_m)$ на X , что противоречит регулярности λ . Следовательно, $r=1$, $\lambda(\infty)[v] = [v_1]$.

Рассмотрим окрестность $U = X - (X \cap P(W))$ точки $[v_1]$. Предыдущее рассуждение показывает, что $\lambda(\infty)[v'] = [v_1]$ для всех $[v'] \in U$. Это означает, что неподвижная относительно группы $\lambda(G_m)$ точка $[v_1]$ заслуживает особого внимания: мы обозначим соответствующую борелевскую подгруппу через $B(\lambda)$. Заметим, что тор T оставляет неподвижной точку $[v_1]$ (ибо подгруппа λ регулярна), так что $B(\lambda) \in \mathfrak{B}^T$, что и требовалось.

Группа Вейля W действует на $\mathfrak{B}^T$ одностранзитивно (24.1). С другой стороны, группа W естественным образом действует на $Y(T)$ по формуле $(\sigma\lambda)(a) = n\lambda(a)n^{-1}$ (здесь n — любой представитель элемента σ в $N_G(T)$). Это действие обладает свойством $\langle \sigma\chi, \sigma\lambda \rangle = \langle \chi, \lambda \rangle$ при $\chi \in X(T)$, $\lambda \in Y(T)$ (упражнение 24.8). Так как подгруппа λ регулярна тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in \Psi$, то W действует на $Y(T)_{\text{reg}}$ как группа подстановок. Мы утверждаем, что эти два действия группы W согласованы с отображением $\lambda \mapsto B(\lambda)$. Пусть $\sigma \in W$ представлен элементом $n \in N_G(T)$. Элемент n переставляет собственные подпространства тора T в V и, следовательно, переставляет веса γ_i и целые числа $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$. Но тогда, согласно указанному выше правилу, мы находим, что $[n \cdot v_1]$ — неподвижная точка относительно группы $\sigma\lambda(G_m)$, так что соответствующая борелевская подгруппа $nB(\lambda)n^{-1}$ есть в точности $B(\sigma\lambda)$. Это доказывает наше утверждение. В частности, соответствие $\lambda \mapsto B(\lambda)$ является эпиморфизмом на $\mathfrak{B}^T$. Обозначим $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}) = \{\lambda \in Y(T)_{\text{reg}} \mid B = B(\lambda)\}$ для каждой группы $B \in \mathfrak{B}^T$ и назовем это множество **камерой Вейля группы B** (относительно T). Следовательно, (непустые) множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ образуют непересекающееся разбиение множества $Y(T)_{\text{reg}}$.

Возвратимся теперь к обсуждению групп Z_α ($\alpha \in \Psi$), начатому в начале этого пункта с обозначениями σ_α , n_α и т. д. Выберем $\lambda_0 \in Y(T)_{\text{reg}}$ таким образом, что $\langle \alpha, \lambda_0 \rangle > 0$; положив $B = B(\lambda_0)$, определим $B_\alpha = B \cap Z_\alpha$, $B'_\alpha = n_\alpha B_\alpha n_\alpha^{-1}$. Тогда B_α , B'_α — две борелевские подгруппы группы Z_α , содержащие тор T . Кроме того, так как $\sigma_\alpha \alpha = -\alpha$ (в аддитивных обозначениях!), то из W -эквивариантности отображения $\lambda \mapsto B(\lambda)$ следует, что соот-

ношение $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ имеет место в точности тогда, когда $B(\lambda) \cap Z_\alpha = B_\alpha$. Таким образом, мы доказали

Предложение. *Зафиксируем максимальный тор T группы G и сопоставим каждому элементу $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$ борелевскую подгруппу $B(\lambda)$, содержащую T , как указано выше. Пусть $\alpha \in \Psi$, $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$. Тогда две борелевские подгруппы B_α, B'_α группы Z_α , содержащие T , могут быть охарактеризованы свойством: $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ для всех $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}} \iff B(\lambda) \cap Z_\alpha = B_\alpha$. $\square$*

Упражнения

1. В обозначениях (25.1) предположим, что $\lambda(0)[v] \neq \lambda(\infty)[v]$. Доказать, что никакая другая точка $\lambda(t)[v]$ не может быть неподвижной относительно группы $\lambda(G_m)$.

2. Пусть $G = SL(n, K)$ (или другая классическая группа). Показать, что G порождается двумя подходящим образом выбранными борелевскими подгруппами.

3. Зафиксируем максимальный тор T группы G . Тогда G порождается всеми подгруппами $C_B(S)$, где B пробегает $\mathfrak{B}^r$, а S — пробегает подторы коразмерности 1 в T .

4. Пусть G — редуктивная группа полупростого ранга 1, T — максимальный тор, $\Phi = \Phi(G, T)$, $W = W(G, T)$. Доказать, что

(а) $\text{Ker Ad} = Z(G)$.

(б) $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ для некоторого $\alpha \in X(T)$ и $\sigma\alpha = -\alpha$, если σ порождает группу W .

(в) Если B, B' — две борелевские подгруппы, содержащие T , то $B \cap B' = T$, а группы B_u и B'_u изоморфны G_α .

(г) $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, где $\mathfrak{g}_\alpha = \mathcal{L}(B_u)$, $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathcal{L}(B'_u)$ (при подходящем выборе $\alpha, -\alpha$).

5. Указать три редуктивные группы размерности 4 и полупростого ранга 1, которые попарно неизоморфны (как алгебраические группы).

§ 26. Унипотентный радикал

Пусть T — фиксированный максимальный тор группы G . Мы намереваемся доказать, что $R_u(G)$ совпадает с унипотентной частью пересечения всех борелевских подгрупп, содержащих T . Вместе с данным выше описанием групп Z_α это позволит нам дать довольно ясную картину системы корней редуктивной группы.

26.1. Характеризация $R_u(G)$. Вначале мы докажем лемму, которая обеспечит существование достаточного числа регулярных однопараметрических подгрупп. Напомним, что Ψ — множество корней «вне» $I(T)_u$.

Лемма. Пусть $\alpha, \beta \in \Psi$ — непропорциональные корни. Тогда существует однопараметрическая подгруппа $\lambda \in \Upsilon(T)_{\text{reg}}$, для которой $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ и $\langle \beta, \lambda \rangle < 0$.

Доказательство. Критерий регулярности однопараметрической подгруппы $\lambda \in \Upsilon(T)$ состоит в том, что $\langle \gamma, \lambda \rangle \neq 0$ для всех $\gamma \in \Psi$ (24.4). Свободные абелевы группы $X(T)$ и $\Upsilon(T)$ ранга $n = \dim T$ становятся двойственными векторными пространствами над $\mathbb{Q}$, если мы образуем их тензорное произведение с $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Z}$ и продолжим спаривание $\langle \gamma, \lambda \rangle$. В этой ситуации α, β становятся линейно независимыми векторами, а условие регулярности заключается в том, что λ не лежит на конечном множестве гиперплоскостей (в том числе на гиперплоскостях, «ортогональных» к α, β). Таким образом, геометрически ясно, что условие леммы можно выразить в терминах некоторой $\mathbb{Q}$ -линейной комбинации однопараметрических подгрупп: попросту α и β должны лежать по разные стороны гиперплоскости, ортогональной к вектору λ . (Читателю следует провести алгебраическое доказательство.) Путем умножения на общий знаменатель коэффициентов мы можем вернуться в $\Upsilon(T)$, получив подгруппу λ , удовлетворяющую нужным условиям. $\square$

Как и в (24.3), через $I(T)$ обозначим компоненту единицы пересечения (конечного числа) борелевских подгрупп, содержащих T .

Теорема. $R_u(G) = I(T)_u$.

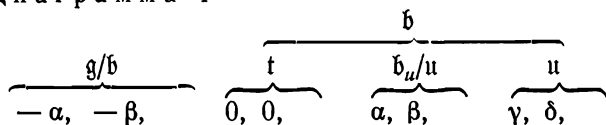
Доказательство. Обозначим для краткости $I(T)_u$ через U . Так как $R_u(G)$ содержится в B_u для всех борелевских подгрупп B , то, очевидно, $R_u(G) \subset U$. Чтобы получить обратное включение, достаточно показать, что $U \triangleleft G$. Но группа G порождается борелевскими подгруппами, содержащими T (следствие 25.2B). Мы утверждаем, что группа $B \in \mathfrak{B}^T$ порождается в свою очередь подгруппами $C_B(S)$, где S пробегает подторы коразмерности 1 в T . Пусть A — порожденная таким образом подгруппа группы B . Так как $C_B(T) \subset C_B(S)$, то всякий элемент веса 0 в $\mathfrak{b}$ содержится в $\mathfrak{a}$ (глобальные и инфинитезимальные централизаторы торов соответствуют друг другу: предложение 18.4A). Если α — нетривиальный вес, то группа $S = (\text{Ker } \alpha)^0$ имеет коразмерность 1 в T , так что все элементы веса α в $\mathfrak{b}$ уже содер-

жаться в $\mathfrak{a}$ (по той же причине). Вывод: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, следовательно, $A = B$ (так как $A \subset B$ и группа B связна).

Таким образом, дело сводится к доказательству того факта, что группа U нормализуется всеми $C_B(S)$, где S — те же, что и выше. Если тор *регулярен*, то группа $C_B(S) = C_G(S)$ содержится во всех подгруппах Бореля, содержащих T (24.2), а следовательно, в $I(T)$, так что в этом случае доказывать нечего. Пусть теперь тор S *сингулярен*, так что $S = (\text{Ker } \alpha)^0 = T_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Psi$ (24.3). Здесь $C_B(T_\alpha) = Z_\alpha \cap B$ — одна из двух подгрупп Бореля B_α, B'_α группы Z_α (25.4). Мы можем даже сказать, какая именно, если запишем $B = B(\lambda)$ для некоторой (не единственной) $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$: мы имеем $Z_\alpha \cap B = B_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$ (25.4). Заметим также, что группа $R_u(Z_\alpha)$ содержится во всех подгруппах Бореля группы Z_α и, следовательно, во всех группах $B \in \mathfrak{B}^T$; поэтому Z_α обладает корнями $\pm \alpha$ (с кратностью 1) вместе с разнообразными другими неизвестными нам корнями группы U .

Затруднительно доказать непосредственно, что группа B_α (или B'_α) нормализует U . Вместо этого мы попытаемся извлечь некоторую руководящую идею из рассмотрения структуры корней в целом. Это схематически показано на следующей диаграмме:

Диаграмма 1



Здесь $\Psi = \{\pm \alpha, \pm \beta, \dots\}$, в то время как различные $\gamma, \delta, \dots$, за которыми мы не можем следить (некоторые из них могут быть равны 0) появляются в u . Варьирование выбора группы $B \in \mathfrak{B}^T$ позволяет заменить некоторые корни из Ψ на противоположные (т. е. с противоположным знаком). Группе B_α соответствует (помимо веса 0, соответствующего $\mathfrak{t}$) корень α вместе с некоторыми неизвестными весами, которые появляются в u .

Наш план заключается в том, чтобы найти замкнутую подгруппу H группы B_u , содержащую как U , так и $(B_\alpha)_u$ с тем свойством, что *коразмерность U в H равна 1*.

Тогда из предложения 17.4(б) будет следовать, что группа U нормальна в H .

Пусть H — унипотентный радикал пересечения всех $B \in \mathfrak{B}$, для которых $B \cap Z_\alpha = B_\alpha$. Это совпадает (25.4) с пересечением тех $B(\lambda)_u$, $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$, для которых $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. Ясно, что группы U и $(B_\alpha)_u$ содержатся в H , так что нам остается лишь сравнить размерности. Для этого достаточно показать, что размерность алгебры Ли $\mathfrak{u}$ на 1 меньше размерности $\mathfrak{h}$. Так как группа H инвариантна относительно сопряжения при помощи элементов из T , то $\mathfrak{h}$ — сумма $\mathfrak{u}$ и некоторых пространств $\mathfrak{g}'_\beta$ при $\beta \in \Psi$ (в обозначениях (24.3)), включая α . Среди этих последних корней ни один не может появиться вместе со своим противоположным по знаку (см. диаграмму 1), так что при $\beta \neq \alpha$ из (25.3) вытекает, что β и α непропорциональны. Ввиду предыдущей леммы существует регулярная однопараметрическая подгруппа λ такая, что $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$, $\langle \beta, \lambda \rangle < 0$. Таким образом, $B(\lambda) \cap Z_\beta = B'_\beta$, тогда как $H \subset B(\lambda)$. Если считать, что β (но не $-\beta$) появляется в $\mathfrak{h}$, мы получаем $C_H(T_\beta) = e$. Но глобальные и инфинитезимальные централизаторы торов соответствуют друг другу (18.4А), так что β не может появиться в $\mathfrak{h}$. Следовательно, только α появляется в $\mathfrak{h}$ вне $\mathfrak{u}$. Так как $\dim \mathfrak{g}'_\alpha = 1$ (25.3), то доказательство окончено. $\square$

26.2. Некоторые следствия. Располагая теоремой 26.1, мы можем (для начала) полностью использовать предположение о редуکتивности группы G .

Следствие А. Пусть G — редуکتивная группа, S — любой подтор тора T . Тогда:

- (а) группа $C_G(S)$ редуکتивна;
- (б) если тор S регулярен, то $C_G(S) = T$. В частности, картановские подгруппы группы G — это в точности максимальные торы, и $Z(G) \subset T$.

Доказательство. Пусть $C = C_G(S)$. Согласно теореме 26.1, примененной к C , унипотентный радикал $R_u(C)$ есть унипотентная часть пересечения всех борелевских подгрупп группы C , содержащих максимальный тор T группы C . Она в свою очередь содержится в $I(T)_u = e$, что доказывает (а). В случае, если тор S регулярен, группа C разрешима (24.2), а также редуکتивна, т. е. C — тор. Отсюда следует (б). $\square$

Тот факт, что централизаторы торов в редуктивной группе являются редуктивными группами, позволяет часто использовать индукцию (именно по этой причине мы предпочитаем рассматривать редуктивные, а не полупростые группы).

Следствие Б. Пусть G — редуктивная группа и $\Phi = \Phi(G, T)$. Тогда:

(а) $\Phi = \Psi$ и $\Phi = -\Phi$;

(б) $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, причем $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$;

(в) сингулярные торы коразмерности 1 в T имеют вид $T_\alpha = (\text{Ker } \alpha)^0$, $\alpha \in \Phi$;

(г) если $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$ ($\alpha \in \Phi$), то Z_α — редуктивная группа полупростого ранга 1 и $\mathfrak{z}_\alpha = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Кроме того, группы Z_α порождают G ;

(д) $Z(G)^0 = \left(\bigcap_{\alpha \in \Phi} T_\alpha \right)^0$;

(е) ранг подгруппы R группы $X(T)$, порожденной Φ , равен $\text{rank}_{ss} G$.

Доказательство. Утверждения (а), (б), (в) и первая часть (г) непосредственно вытекает из следствия А и (25.3). Тот факт, что группы Z_α порождают G , вытекает из того, что они порождают замкнутую подгруппу группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. (б)). Рассмотрим (д). В соответствии со следствием А, $Z(G) \subset T$, откуда $Z(G)^0 \subset T_\alpha$ для всех α . Обратно, если $t \in T_\alpha$ для всех α , то t централизует каждую группу Z_α ; они порождают G (ввиду (г)), так что $t \in Z(G)$. Что касается (е), то нам нужно лишь доказать это для случая полупростой группы G . Пусть R' — аннулятор группы R в $Y(T)$ относительно спаривания $X(T) \times Y(T) \rightarrow Z$. Требуется доказать, что $R' = 0$. Условие $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$ означает, что $\lambda(G_m) \subset \text{Ker } \alpha$ и, следовательно, что $\lambda(G_m) \subset T_\alpha$ для всех α . Ввиду (д), $\lambda(G_m) \subset Z(G)^0$ и группа $Z(G)^0$ тривиальна, ибо группа G полупроста. Следовательно, $\lambda = 0$. $\square$

Следствие В. Пусть G — редуктивная группа. Для каждой борелевской подгруппы B , содержащей T , существует группа $B^- \in \mathfrak{B}^T$ такая, что $B \cap B^- = T$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{b} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$, где $B = TU$, $B^- = TU^-$.

Доказательство. Мы знаем, что $B = B(\lambda)$ для некоторой регулярной однопараметрической подгруппы λ и

что каждый элемент $\alpha \in \Phi$ удовлетворяет соотношению $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ (см. следствие Б). Положим $B^- = B(-\lambda)$. Для каждого $\alpha \in \Phi$ группы $Z_\alpha \cap B$ и $Z_\alpha \cap B^-$ являются, следовательно, двумя борелевскими подгруппами группы Z_α , содержащими T (25.4). Согласно части (б) следствия Б, $B \cap B^- = T$, и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается, как указано. $\square$

Группа B^- в действительности единственна (упражнение 6); она называется борелевской подгруппой, **противоположной** B (относительно T).

26.3. Группы U_α . Пусть G — редуктивная группа, $\Phi = \Phi(G, T)$, $W = W(G, T)$. До сих пор мы изучали корни как характеры группы T , переставляемые W (или N). Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ дает более содержатель-

ную информацию о Φ ; оно позволяет (например) сделать вывод о том, что $\dim G = \text{rank } G + \text{card } \Phi$.

Систему корней можно рассматривать как существующую внутри самой группы G в следующем смысле. Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ пространство $\mathfrak{g}_\alpha$ есть алгебра Ли унитарной части U_α одной из двух борелевских подгрупп группы Z_α , содержащих T (утверждение (г) следствия 26.2Б). В действительности U_α — *единственная связная инвариантная относительно T подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_\alpha$* . (В характеристике 0 это ясно, см. (13.1).) Действительно, предположим, что группа V_α удовлетворяет этим условиям. Так как ее алгебра Ли состоит из нильпотентных элементов, то V_α должна быть унитарной группой (20.5). Кроме того, $H = TV_\alpha$ — связная разрешимая подгруппа группы G и, следовательно, содержится в некоторой группе $B \in \mathfrak{B}^T$. Так как T_α централизует $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_\alpha$, то T_α должен централизовать H : глобальные и инфинитезимальные централизаторы соответствуют друг другу (предложение 18.4А). Следовательно, $V_\alpha \subset B \cap Z_\alpha$ (одна из двух борелевских подгрупп группы Z_α , содержащих T), откуда $V_\alpha = U_\alpha$.

Теорема. Пусть G — редуктивная группа и $\alpha \in \Phi$.

(а) Существует единственная связная инвариантная относительно T подгруппа U_α группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_\alpha$ (и $U_\alpha \subset Z_\alpha$).

(б) Если элемент $n \in N$ является представителем $\sigma \in W$, то $nU_\alpha n^{-1} = U_{\sigma(\alpha)}$.

(в) Существует изоморфизм $\varepsilon_\alpha: \mathbf{G}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ такой, что для всех $t \in T$, $x \in \mathbf{G}_\alpha$, мы имеем $t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)$.

(г) Группа G порождается подгруппами U_α ($\alpha \in \Phi$) и T .

Доказательство. Справедливость утверждения (а) уже установлена выше. Так как $\mathcal{L}(nUnU_\alpha n^{-1}, = \text{Ad } n(\mathcal{L}(U_\alpha)) = \text{Ad } n(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$ (24.1), а группа $nU_\alpha n^{-1}$, очевидно, связна и инвариантна относительно T , то (б) следует из (а). Утверждение (г) вытекает из следствия 26.2Б.

Остается доказать (в). Тот факт, что U_α — связная одномерная унипотентная группа, гарантирует существование некоторого изоморфизма $\varepsilon: \mathbf{G}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ (20.5). Следовательно, действие тора T на U_α внутренними автоморфизмами задает действие тора T на $\mathbf{G}_\alpha$, и мы имеем морфизм алгебраических групп $T \rightarrow \text{Aut } \mathbf{G}_\alpha \cong \mathbf{G}_m$ (упражнение 7.4), т. е. характер γ тора T . Таким образом, $t\varepsilon(x)t^{-1} = \varepsilon(\gamma(t)x)$. Для каждого элемента $t \in T$ имеется соответствующая коммутативная диаграмма, в которой вертикальная стрелка слева есть умножение на $\gamma(t)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_\alpha & \xrightarrow{\varepsilon} & U_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \text{Int } t \\ \mathbf{G}_\alpha & \xrightarrow{\varepsilon} & U_\alpha \end{array}$$

Если мы отождествим алгебру Ли группы $\mathbf{G}_\alpha$ с K , то дифференциалом умножения на $\gamma(t)$ будет снова умножение на $\gamma(t)$, тогда как $d(\text{Int } t) = \text{Ad } t$. Отсюда следует, что $\text{Ad } t(x) = \gamma(t)x$ при $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, что дает $\gamma = \alpha$. Таким образом, мы можем положить $\varepsilon_\alpha = \varepsilon$. $\square$

Доказательство утверждения (в) показывает, что любой изоморфизм $\mathbf{G}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ совместим с действием тора T ; но для выделения мы будем называть такой изоморфизм **допустимым**. Он является единственным с точностью до скалярного множителя (т. е. автоморфизма группы $\mathbf{G}_\alpha$), который определяется выбором базиса в $\mathfrak{g}_\alpha$.

Упражнения

Через G обозначается редуктивная группа.

1. Пусть S — произвольный тор в связной группе H . Доказать, что $C_{R_u(H)}(S) = R_u(C_H(S))$.

2. $Z(G)$ есть пересечение всех максимальных торов группы G .

3. Подтор группы G регулярен тогда и только тогда, когда он содержит регулярный полупростой элемент (упражнение 22.7).

$$4. Z(G) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \text{Ker } \alpha$$

5. Если элемент $x \in \mathfrak{g}$ полупрост, то группа $C_G(x)^0$ редуктивна.

6. Доказать, что борелевская подгруппа B^- в следствии 26.2В единственна.

7. Все элементы группы U_α (отличные от ϕ) сопряжены в G .

8. Группа характеров максимального тора в группе $\text{Ad } G$ порождается корнями.

9. Найти индекс в $X(T)$ подгруппы R , порожденной Φ , если $G = SL(n, K)$ (или если G — другая классическая группа). Каково строение группы $X(T)/R$?

10. Группы U_α порождают (G, G) .

11. Если B — борелевская подгруппа группы G , содержащая максимальный тор T , то $N_G(T) \cap B = T$.

12. Группа G порождается своими полупростыми элементами.

СТРОЕНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП

Изучая действие торов и их централизаторов на многообразии G/B , мы показали в главе IX, что редуктивная группа порождается централизаторами сингулярных торов (причем эти последние являются в точности связными ядрами корней). Кроме того, мы показали, что факторгруппа такого централизатора по его центру по существу является группой $PGL(2, K)$. Цель этой главы состоит в том, чтобы дать более подробное описание группы G : мы рассмотрим свойства системы корней, строение нормальных подгрупп группы G , «нормальную форму» элементов группы G , строение параболических подгрупп.

За исключением § 29 мы принимаем следующие обозначения: G — редуктивная группа, T — фиксированный максимальный тор, $\Phi = \Phi(G, T)$, $W = W(G, T)$, $X = X(T)$, $Y = Y(T)$.

§ 27. Система корней

Прежде всего мы хотим доказать, что Φ — абстрактная система корней в смысле Добавления. Это в свою очередь позволит нам определить замкнутые нормальные подгруппы группы G .

27.1. Абстрактные системы корней. Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. **Абстрактная система корней** в E состоит из подмножества Ψ пространства E , удовлетворяющего следующим аксиомам:

(R1) Множество Ψ конечно, порождает E и не содержит 0.

(R2) При $\alpha \in \Psi$ единственными кратными α векторами в Ψ являются векторы $\pm\alpha$.

(R3) При $\alpha \in \Psi$ существует отражение τ_α относительно вектора α , которое оставляет множество Ψ инвариантным.

(R4) Если $\alpha, \beta \in \Psi$, то вектор $\tau_\alpha(\beta) - \beta$ целочисленно кратен α .

Напомним (Д.1), что отражение τ_α в (R3) однозначно определяется вектором α , так что аксиома (R4) корректна. Кроме того, $\tau_\alpha = \tau_{-\alpha}$ и в любом случае вектор $\tau_\alpha(\beta) - \beta$ кратен α . Ранг системы Ψ есть $\dim(E)$. **Абстрактная группа Вейля** $W(\Psi)$ есть (конечная) подгруппа группы $GL(E)$, порожденная всеми τ_α ($\alpha \in \Psi$).

Располагая этими обозначениями, мы можем сформулировать основной результат этого параграфа.

Теорема. Пусть G — полупростая группа и $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$. Тогда Φ — абстрактная система корней в E , ранг которой совпадает с рангом группы G и абстрактная группа Вейля которой совпадает с W .

Доказательство выполнения аксиомы (R4) будет дано в (27.2), а выполнение остальных можно доказать без промедления. Аксиома (R1) следует из части (е) следствия 26.2Б, а (R2) есть следствие того факта (25.3), что $\pm\alpha$ — единственные корни группы Z_α относительно T . Изучение группы Z_α также приводит к единственному нетривиальному элементу $\sigma_\alpha \in W(Z_\alpha, T) \subset W$ (см. предложение 24.1Б), который отображает α в $-\alpha$ (и имеет порядок 2). Это — наш кандидат в отражение относительно α . Для того чтобы элемент σ_α был отражением, он должен оставлять неподвижными элементы некоторой подгруппы коранга 1 группы X . Выберем однопараметрическую подгруппу λ , для которой $\sigma_\alpha \lambda = -\lambda$. Тогда искомой подгруппой является подгруппа группы X , состоящая из характеров χ , для которых $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$. Аксиома (R3) требует, чтобы множество Φ было инвариантным относительно σ_α , но это было отмечено ранее для произвольных элементов группы W (24.1), (26.3).

Как только будет проверена аксиома (R4), абстрактную группу Вейля $W(\Phi)$ можно будет отождествить с подгруппой группы W , порожденной всеми σ_α ($\alpha \in \Phi$). Мы сможем тогда заключить, что $W(\Phi) = W$, замечая, что каждая из этих групп действует однотранзитивно на множестве одной и той же мощности: группа $W(\Phi)$ действует, таким образом, на множестве абстрактных камер Вейля в E (Д.4), в то время как W действует так на $\mathfrak{B}^r$ (24.1) или, что равносильно, на множестве камер Вейля в Υ . Чтобы убедиться, что оба эти множества

имеют одинаковое число элементов, достаточно заметить, что после расширения скаляров до $\mathbb{R}$ и отождествления E с $E^* = \mathbb{R} \otimes_Z Y$ эти два понятия камер Вейля совпадут. Действительно, в каждом случае рассматриваются связные компоненты дополнения к объединению гиперплоскостей, «ортогональных» к корням.

Хотя теорема непосредственно применима только к *полупростым* группам, не представляет труда использовать ее и для редутивных групп. Корни группы G и группы (G, G) (или $G/Z(G)^0$) находятся в естественном взаимно однозначном соответствии, что позволяет отождествить группы Вейля (24.1).

В случае, если $G = SL(n, K)$, легко видеть, что Φ — абстрактная система корней, диаграмма Дынкина которой (Д.7) имеет тип A_{n-1} (упражнение 1); другие классические группы приводят к типам B, C, D.

27.2. Аксиома целочисленности. Для того чтобы проверить выполнение аксиомы (R4), нам необходимо более тщательно изучить, как группа W действует на Φ . Если $n \in N_G(T)$ — представитель элемента $\sigma \in W$, то $\text{Ad } n$ отображает $\mathfrak{g}_\beta$ на $\mathfrak{g}_{\sigma(\beta)}$ (24.1). Теорема 26.3 показывает, что это инфинитезимальное действие в действительности выводится из действия автоморфизма $\text{Int } n$ на множестве подгрупп $\{U_\alpha, \alpha \in \Phi\}$, а именно, $nU_\beta n^{-1} = U_{\sigma(\beta)}$. Напомним еще, что для каждого корня $\beta \in \Phi$ существует (неединственный) изоморфизм $\varepsilon_\beta: G_\alpha \rightarrow U_\beta$ такой, что $t\varepsilon_\beta(x)t^{-1} = \varepsilon_\beta(\beta(t)x)$ для всех $t \in T$. Мы должны рассмотреть случай $\sigma = \sigma_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$) при произвольном β .

Наш план состоит в том, чтобы показать, что группа $\text{Ad } Z_\alpha$ оставляет инвариантным подпространство $\mathfrak{m} = \sum \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ ($k \in \mathbb{Z}$); отсюда будет следовать (R4), так как σ_α обладает представителем в $N_{Z_\alpha}(T)$. Далее, группа Z_α порождается T , U_α , $U_{-\alpha}$ (теорема 26.3) и, разумеется, $\text{Ad } T$ оставляет инвариантной $\mathfrak{m}$. Следовательно, достаточно показать (ввиду симметрии), что $\text{Ad } U_\alpha$ оставляет инвариантным $\mathfrak{m}$.

Заметим, что наша задача сводится к задаче, относящейся к редутивной группе Z_α , действующей на $\mathfrak{g}$ через присоединенное представление группы G . На самом же деле здесь нет ничего, относящегося специально к представлению Ad . По существу ситуация такова: ре-

дуктивная группа G вложена в некоторую группу $GL(V)$ и выделен вес χ относительно T (16.4) (например, возьмем $\text{Ad}: Z_\alpha \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ и вес β). Нам следует показать, что группа U_α оставляет инвариантным пространство $\sum_k V_{\chi+k\alpha}$, или просто что U_α отображает V_χ в $\sum V_{\chi+k\alpha}$ (где мы можем считать, что $k \in \mathbb{Z}^+$). Эта более общая формулировка будет использована в § 31 при изучении представлений группы G .

В техническом отношении удобно рассматривать только те представления $\rho: G \rightarrow GL(V)$, для которых $\text{Ker } \rho \subset Z(G)$. В действительности в конце этого пункта станет ясно, что $\text{Ker } \text{Ad} = Z(G)$ для любой редуктивной группы G . В случае ограничения $\text{Ad}: Z_\alpha \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ сравнение с гомоморфным образом $PGL(2, K)$ группы Z_α непосредственно показывает, что ядро здесь центрально. В самом деле, группа $PGL(2, K)$ неразрешима и, следовательно, не может иметь собственной замкнутой нормальной подгруппы положительной размерности (см. упражнение 21.4). В свою очередь, так как $T \not\subset \text{Ker } \text{Ad}$, то ограничение морфизма Ad на Z_α не может быть тривиальным, так что его ядро должно лежать в центре группы Z_α .

Предложение. Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление и $\text{Ker } \rho \subset Z(G)$. Пусть V_χ — весовое пространство относительно $\rho(T)$. Если $\alpha \in \Phi$, то $\rho(U_\alpha)$ отображает V_χ в $\sum V_{\chi+k\alpha}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Доказательство. Так как $\text{Ker } \rho \subset Z(G) \subset T$, то без ущерба для общности мы можем заменить G на линейную группу $\rho(G)$, которую мы можем рассматривать как матричную группу, если выберем базис в пространстве V , состоящий, скажем, из весовых векторов относительно T . Так как группа TU_α содержится в некоторой подгруппе Бореля, то теорема Ли — Колчина позволяет нам даже считать группу U_α состоящей из верхнетреугольных (унипотентных) матриц, а группу T — состоящей из диагональных матриц $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$. Заметим, что если $u \in U$, $t \in T$, то матричный элемент на позиции (i, j) в матрице tut^{-1} равен $t_i t_j^{-1} u_{ij}$.

Привлечем теперь к делу изоморфизм $\varepsilon_\alpha: \mathfrak{G}_\alpha \rightarrow U_\alpha$. Конкретно, элемент $\varepsilon_\alpha(x)_{ij}$ должен быть полиномом от

x , скажем $c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$ (где коэффициенты $c_k \in K$ не зависят от x). Следовательно, $\varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)_{ij} = c_0 + c_1(\alpha(t)x) + \dots + c_m(\alpha(t)^mx^m)$. Но это также равно $t_it_j^{-1}\varepsilon_\alpha(x)_{ij}$, так как $t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)$. Сравнивая эти два результата, мы получаем полиномиальное уравнение, справедливое при всех $x \in K$:

$$c_0(1 - t_it_j^{-1}) + c_1(\alpha(t) - t_it_j^{-1})x + \dots + c_m(\alpha(t)^m - t_it_j^{-1})x^m = 0.$$

Так как поле K бесконечно, то все коэффициенты должны обратиться в 0. Следовательно, мы должны иметь $\alpha^k = \gamma$ всякий раз, когда $c_k \neq 0$, где γ — характер $t \mapsto t_it_j^{-1}$. Так как α нетривиален, то ясно, что не более одного коэффициента c_k отлично от 0, и поэтому $\varepsilon_\alpha(x)_{ij} = c_kx^k$.

Посмотрим, что это означает в терминах весов. Скажем, пусть j -й базисный вектор имеет вес χ , т. е. $\chi(t) = t_j$. Тогда группа U_α отображает этот вектор в сумму векторов с весами $\eta(t) = t_i$. Наше вычисление показывает, что те η , которые действительно появляются, должны удовлетворять условию: $\eta\chi^{-1}$ — неотрицательная степень α . В аддитивных обозначениях это значит, что $\eta = \chi + k\alpha$ (для некоторого $k \in \mathbb{Z}^+$).

Как указывалось выше, это предложение завершает доказательство теоремы 27.1.

27.3. Простые корни. Теперь известно, что Φ — абстрактная система корней, так что все результаты, суммированные в Добавлении, имеют место. Напомним (Д.4), что база системы корней Φ есть подмножество $\Delta = \{\alpha_l, -\alpha_l\}$, $l = \text{rank}(\Phi)$, которое порождает E (и, следовательно, является базисом пространства E) и относительно которого каждый корень α имеет (единственное) представление $\alpha = \sum c_i\alpha_i$, где c_i — целые числа одного и того же знака. Элементы множества Δ называются **простыми корнями**. Базы действительно существуют; в действительности группа $W = W(\Phi)$ переставляет их однотранзитивно, и каждый корень принадлежит по меньшей мере одной базе. Кроме того, группа W порождается отражениями σ_α ($\alpha \in \Delta$) при любой базе Δ (Д.5).

Ввиду сказанного в (27.1) следующие объекты находятся в естественном взаимно однозначном соответствии и переставляются однотранзитивно группой W : базы, камеры Вейля в E , камеры Вейля в Y , борелевские подгруппы, содержащие T . В частности, каждый выбор группы $B \in \mathfrak{B}^T$ приводит к выбору Δ или к выбору системы **положительных** корней Φ^+ (т. е. тех корней, для которых все коэффициенты c_i неотрицательны). Если $B = B(\lambda)$, $\lambda \in Y_{\text{reg}}$, то корень α положителен тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$.

Факт, что группа W порождается отражениями $\{\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, ведет к соответствующему результату для группы G .

Теорема. Пусть Δ — база системы корней Φ . Тогда группа G порождается подгруппами Z_α ($\alpha \in \Delta$) или, что равносильно, тором T и всеми группами U_α ($\pm \alpha \in \Delta$).

Доказательство. Подгруппа H группы G , порожденная Z_α ($\alpha \in \Delta$), содержит T , а также представителей всех элементов $\sigma \in W$ (так как отражения σ_α , $\alpha \in \Delta$, порождают W). Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{h}$ содержит $\mathfrak{t}$ и все корневые подпространства $\mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$ ($\alpha \in \Delta$, $\sigma_\alpha \in W$). Как мы упоминали выше, множество $\sigma(\alpha)$ исчерпывает Φ , откуда следует, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ и, следовательно, $H = G$. Теорема 26.3(г) завершает доказательство. $\square$

27.4. Группа автоморфизмов полупростой группы. В (27.5) мы покажем, что полупростая группа есть произведение своих «простых» подгрупп, которые соответствуют неприводимым компонентам системы корней. Но сначала нам необходимо получить некоторую информацию об автоморфизмах. Предположим, что группа G полупроста, и обозначим через $\text{Aut } G$ (абстрактную) группу, состоящую из всех автоморфизмов группы G как алгебраической группы. Ясно, что $\text{Int } G$ — ее нормальная подгруппа. Другая подгруппа группы $\text{Aut } G$, обозначаемая через D , состоит из тех автоморфизмов, которые оставляют инвариантным некоторый фиксированный максимальный тор T и содержащую его фиксированную борелевскую подгруппу B .

Фиксируя выбор группы B , мы получаем некоторую фиксированную базу Δ системы корней Φ (27.3). Каждый автоморфизм $\sigma \in D$ индуцирует очевидным образом

некоторый автоморфизм $\hat{\sigma}$ системы корней Φ , ибо $\sigma(T) = T$. Кроме того, так как $\sigma(B) = B$, то $\hat{\sigma}$ оставляет инвариантным множество Δ . Следовательно, $\hat{\sigma}$ принадлежит группе автоморфизмов Γ диаграммы (или графа) системы Φ (Д.8). Соответствие $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ является, очевидно, гомоморфизмом групп $D \rightarrow \Gamma$.

Теорема. Пусть G — полупростая группа.

(а) $\text{Aut } G = (\text{Int } G)D$.

(б) Естественное отображение $D \rightarrow \Gamma$ индуцирует мономорфизм $\text{Aut } G / \text{Int } G \rightarrow \Gamma$; в частности, группа $\text{Int } G$ имеет конечный индекс в $\text{Aut } G$.

Доказательство. (а) Пусть $\sigma \in \text{Aut } G$; ввиду сопряженности борелевских подгрупп существует такой элемент $x \in G$, что $\text{Int } x(\sigma(B)) = B$. В свою очередь максимальные торы T и $x\sigma(T)x^{-1}$ группы B сопряжены при помощи некоторого элемента $y \in B$, так что $\text{Int } y \circ \text{Int } x \circ \sigma = \text{Int } yx \circ \sigma$ принадлежит D .

(б) Ввиду части (а) достаточно показать, что группа $(\text{Int } G) \cap D$ совпадает с ядром гомоморфизма $D \rightarrow \Gamma$. В одну сторону это ясно: если $\text{Int } x$ принадлежит D , то x нормализует B (и, следовательно, лежит в B по теореме 23.1) и x нормализует T (т. е. $x \in N = N_{\Delta}(T)$). Но $N \cap B = T$ (см. предложение 19.4, следствие 26.2А). Следовательно, $\text{Int } x$ индуцирует тождественный автоморфизм на Φ .

Наоборот, пусть автоморфизм $\sigma \in D$ индуцирует на Φ тождественное отображение. Мы должны показать, что автоморфизм σ внутренний. Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем как в (26.3) изоморфизм $\varepsilon_{\alpha}: \mathbf{G}_{\alpha} \rightarrow U_{\alpha}$. По предположению, $\sigma(U_{\alpha}) = U_{\alpha}$, так что существует элемент $c_{\alpha} \in K^*$ такой, что $\sigma(\varepsilon_{\alpha}(x)) = \varepsilon_{\alpha}(c_{\alpha}x)$ для всех $x \in K$. (Напомним, что $\text{Aut } \mathbf{G}_{\alpha} = K^*$, см. упражнение 7.4.) В свою очередь линейная независимость множества Δ позволяет нам выбрать элемент $t \in T$, для которого $\alpha(t) = c_{\alpha}$ ($\alpha \in \Delta$) (лемма 16.2Б). Заменяя σ на $(\text{Int } t^{-1})\sigma$, мы можем предполагать, что каждый элемент c_{α} равен 1. Этот новый элемент σ действует на U_{α} ($\alpha \in \Delta$) тождественно. В свою очередь, если элемент $t \in T$ произволен, то $\alpha(\sigma(t)) = \alpha(t)$ ($\alpha \in \Delta$). Так как группа G полупроста, то Δ порождает подгруппу конечного индекса в $X(T)$ (утверждение (е) следствия 26.3Б). Поэтому гомоморфизм $t \mapsto \sigma(t)t^{-1}$ имеет конечный и одновременно связ-

ный образ, откуда следует, что $\sigma(t) = t$ для всех $t \in T$. Таким образом, элемент σ оставляет неподвижными элементы тора T_α и, следовательно, оставляет инвариантной группу Z_α ($\alpha \in \Delta$), действуя на ее борелевской подгруппе TU_α тождественно; поэтому σ действует тождественно на Z_α (предложение 21.4А). Но подгруппы Z_α ($\alpha \in \Delta$) порождают G (теорема 27.3), откуда $\sigma = 1$. Это означает, что автоморфизм σ — внутренний. $\square$

27.5. Простые компоненты. Как и в (27.4), мы предположим, что группа G полупроста. Любая замкнутая связная нормальная подгруппа $\neq e$ также полупроста: ее радикал — характеристическая и, следовательно, нормальная подгруппа в G . Теперь мы в состоянии описать такие подгруппы.

Теорема. Пусть G — полупростая группа, и пусть $\{G_i | i \in I\}$ — минимальные замкнутые связные нормальные подгруппы положительной размерности.

(а) Если $i \neq j$, то $(G_i, G_j) = e$.

(б) Множество I конечно (скажем, $I = \{1, \dots, n\}$) и морфизм произведения $G_1 \times \dots \times G_n \rightarrow G$ сюръективен и имеет конечное ядро.

(в) Произвольная замкнутая связная нормальная подгруппа группы G является произведением содержащихся в ней подгрупп G_i и централизует остальные группы G_i .

(г) $G = (G, G)$.

(д) G порождается подгруппами U_α ($\pm\alpha \in \Delta$).

Доказательство. (а) (G_i, G_j) — замкнутая связная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся как в G_i , так и в G_j ; поэтому ввиду минимальности групп G_i она должна совпадать с e .

(б) Пусть $J = \{i(1), \dots, i(r)\} \subset I$. Из (а) следует, что отображение произведения $\pi: G_{i(1)} \times \dots \times G_{i(r)} \rightarrow G$ есть морфизм алгебраических групп. В частности, $G_{i(1)} \dots$

$G_{i(r)}$ — замкнутая связная нормальная подгруппа группы G ; она также полупроста. Из (а) следует также, что любая другая группа G_i ($i \notin J$) централизует эту группу, так что пересечение $G_i \cap G_{i(1)} \dots G_{i(r)}$ — конечная группа. Следовательно, Кег π должно быть конечно и при достаточно большом J множество I будет исчерпано, т. е. I конечно. Пусть, скажем, $I = \{1, \dots, n\}$, $H = G_1 \dots G_n$. Остается показать, что $H = G$.

Действие группы G на H внутренними автоморфизмами задает гомоморфизм групп $\psi: G \rightarrow \text{Aut } H$, причем $\psi(H) = \text{Int } H$. Так как группа H полупроста, то группа $\text{Int } H$ имеет конечный индекс в $\text{Aut } H$ (теорема 27.4). С другой стороны, $\text{Ker } \psi = C_G(H)$; обозначим компоненту единицы этой группы через H' . Тогда группа HH' имеет конечный индекс в G и, следовательно, совпадает с G ввиду связности последней. Так как $H' \triangleleft G$, то группа H' также полупроста. Ее минимальные замкнутые связные нормальные подгруппы $\neq e$ централизуют H и, следовательно, также нормальны в G ; но тогда они должны содержаться среди групп G_i и лежат в H . Это — противоречие, если только не имеет место случай $H' = e$, $H = G$.

(в) Пусть H — произвольная замкнутая связная нормальная подгруппа группы G и $H \neq e$. Рассуждение в (б) показывает, что каждая группа G_i ($i \in I$) либо содержится в H , либо централизует H . Отсюда вытекает, что минимальные замкнутые связные нормальные подгруппы группы H совпадают с некоторыми из групп G_i , и тогда (как в (б)) мы заключаем, что группа H — их произведение.

(г) Коммутант группы G_i — характеристическая подгруппа и, следовательно, нормальна в G ; так как группа G_i некоммутативна, то из минимальности G_i следует, что $(G_i, G_i) = G_i$. В силу (а) и (б) мы имеем $(G, G) = (G_1, G_1) \quad (G_n, G_n) = G_1 \quad G_n = G$.

(д) Так как группа G порождается группами T и U_α ($\pm\alpha \in \Delta$) (теорема 27.3), то группа H , порожденная только группами U_α , замкнута, связна и нормальна в G , причем ясно, что факторгруппа G/H есть тор. Но тогда $H \supset (G, G)$, так что (г) влечет $H = G$. $\square$

Из утверждения (г) теоремы непосредственно вытекает, что *редуктивная* группа G есть произведение своего центра и коммутанта, и пересечение этих групп конечно (см. лемму 19.5). Для редуктивных групп Z_α это уже было отмечено в следствии 25.3.

Напомним (Д.7), что система корней Φ называется **неприводимой**, если она (или, эквивалентно, Δ) не может быть разбита на два непересекающихся «ортогональных» подмножества, и что Φ однозначно разлагается в объединение непересекающихся неприводимых систем корней

$\Phi_1, \dots, \Phi_t$ (в подпространствах пространства E). Посмотрим, что происходит, если корни α и β лежат в непересекающихся компонентах. Прежде всего, никакой вектор $\beta + k\alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) не может быть корнем, если $k \neq 0$. Поэтому предложение 27.2 позволяет заключить, что группа $\text{Ad } Z_\alpha$ оставляет инвариантным одномерное подпространство g_β ; в частности, группа $\text{Ad } U_\alpha$ действует на нем тривиально (ибо она унипотентна). Если $x \in U_\alpha$, то $\mathcal{L}(xU_\beta x^{-1}) = \text{Ad } x(g_\beta) = g_\beta$, так что из предложения 26.3(а) следует, что $xU_\beta x^{-1} = U_\beta$, т. е. группа U_α нормализует U_β . По симметрии группа U_β нормализует U_α . Отсюда следует, что $(U_\alpha, U_\beta) = e$. Это рассуждение показывает, что подгруппы H_i группы G , порожденные группами U_α с $\alpha \in \Phi_i$, централизуют друг друга и вместе порождают группу G (утверждение (д) теоремы). Следовательно, группы H_i являются замкнутыми связными нормальными подгруппами, произведение которых совпадает с G . Согласно теореме каждая подгруппа H_i является произведением некоторых групп G_j . Но она не может быть произведением нескольких групп, так как корни, появляющиеся в различных группах G_j , «ортogonalны». Таким образом, мы получаем

Следствие. Разложение $G = G_1 \dots G_n$ в точности соответствует разложению системы корней Φ на неприводимые компоненты. $\square$

Из предыдущих рассуждений мы получаем, что каждая группа G_i некоммутативна и не имеет замкнутых связных нормальных подгрупп, отличных от самой себя и e . Такая алгебраическая группа называется **простой** (или **почти простой**, если мы хотим подчеркнуть тот факт, что эта группа не обязана быть простой как абстрактная группа). Пример: $SL(n, K)$. В § 29 будет показано, что если G — простая алгебраическая группа, то абстрактная группа $G/Z(G)$ проста в обычном смысле отсутствия собственных нормальных подгрупп, отличных от e .

Упражнения

1. Проверить, что группа $SL(n, K)$ имеет систему корней типа A_{n-1} .
2. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$ (база системы корней Φ). Доказать, что группы Z_α, Z_β порождают редуктивную подгруппу полупростого ранга 2 в группе G (если $\alpha \neq \beta$).

3. Что вы можете сказать о группе $\text{Aut } G$ (группа G редуктивна)?

4. Пусть G — полупростая группа. Если Φ имеет t неприводимых компонент, то G имеет в точности 2^t замкнутых связных нормальных подгрупп.

5. Доказать, что $\text{Ker Ad} = Z(G)$.

6. Собственная замкнутая нормальная подгруппа почти простой группы G лежит в $Z(G)$.

7. Если H — замкнутая нормальная подгруппа группы G , T — максимальный тор группы G , то $T \cap H$ — максимальный тор группы H .

Замечания. Наше изложение здесь несколько отличается от изложения Бореля [4, § 14]; предложение 27.2 в подобном контексте впервые использовал Стейнберг, см. Стейнберг [10, лемма 72] или [13, 3.3], Хамфри [1, лемма 2.1].

§ 28. Разложение Брюа

Как и в § 27, через G обозначается редуктивная группа, через T — ее максимальный тор. Мы фиксируем борелевскую подгруппу B группы G , содержащую T (т. е. фиксируем базу Δ системы корней Φ), и полагаем $U = B_u$, $N = N_G(T)$.

Наша цель сейчас — развить технику для построения некоторой нормальной формы элементов группы G , параметризуемой группой B и группой Вейля W . В случае $G = GL(n, K)$ читатель уже должен быть знаком с лежащей в основе этого подхода идеей. Заданная матрица умножается слева и справа на диагональные или верхние треугольные унитарные матрицы (соответствующие элементарным преобразованиям строк и столбцов) с таким расчетом, чтобы получилась матрица-перестановка (представитель элемента группы W в N). Это разложение $G = BNB$ нетрудно сделать единственным (если фиксировать представители группы W в N).

28.1. T -инвариантные подгруппы группы B_u . Алгебра Ли группы $U = B_u$ есть прямая сумма одномерных корневых пространств $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha > 0$), причем $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Дать точное описание структурных констант в этом месте было бы, конечно, затруднительно.) Нам необходима подобная информация о самой группе U или, точнее, о ее T -инвариантных подгруппах, например, (U_α, U_β) или $U \cap nUn^{-1}$ ($n \in N$). Если H — инвариантная относительно T замкнутая подгруппа группы U , то алгебра Ли $\mathfrak{h}$

инвариантна относительно $\text{Ad } T$ и, следовательно, является суммой некоторых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$. Мы хотим показать, что H — произведение соответствующих групп U_α . Точнее, мы будем говорить, что алгебраическая группа H **прямо порождена** своими замкнутыми подгруппами $H_1, \dots, H_n$ (в данном порядке), если морфизм произведения $H_1 \times \dots \times H_n \rightarrow H$ биективен. (Если мы знаем, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_n$, то этот морфизм также сепарабелен; так как рассматриваемые многообразия являются гладкими, то, используя частный случай основной теоремы Зарисского, можно показать тогда, что это — изоморфизм многообразий. Мы установим этот изоморфизм более прямым способом в интересующих нас случаях в (28.5) ниже.)

Важно заметить, что действие тора T на U не имеет неподвижных элементов, отличных от e (26.2).

Предложение. Пусть H — замкнутая инвариантная относительно T подгруппа группы U . Тогда группа H связна и прямо порождена теми подгруппами U_α , для которых $\mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ содержится в $\mathfrak{h}$ (группы U_α можно взять в любом порядке).

Доказательство. Пусть $\Psi = \Phi(H, T)$, так что $\mathfrak{h} = \bigcup_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Упорядочим Ψ произвольным образом; пусть $\Psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\pi: U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_n} \rightarrow H$ — морфизм произведения. Это определение имеет смысл, поскольку при $\alpha \in \Psi$ группа $U_\alpha = C_U(T_\alpha)$ содержится в H (применить предложение 18.4А к действию группы T_α на H). Нам требуется доказать, что морфизм π биективен (откуда будет следовать, что группа H связна). Воспользуемся индукцией по $\dim H$; для этой цели мы предположим, что U — связная унитарная группа, на которой T действует без нетривиальных неподвижных точек, а $\mathfrak{u}$ — прямая сумма одномерных собственных пространств относительно T , соответствующих характерам α с различными связными ядрами T_α .

Сначала мы рассмотрим случай, когда группа H *связна*. Если группа H коммутативна, то π — гомоморфизм групп, причем ядро $\text{Ker } \pi$ конечно и инвариантно относительно T . Связная группа T на конечном множестве $\text{Ker } \pi$ должна действовать тривиально (предложение 8.2(г)), откуда следует, что $\text{Ker } \pi$ содержится в множе-

стве неподвижных относительно T точек группы H , так что $H = e$. С другой стороны, образ $\text{Im } \pi$ — замкнутая подгруппа той же размерности, что и H , так что она совпадает с H (так как группа H связна).

Если группа H некоммутативна, то она нильпотентна и, следовательно, обладает центром положительной размерности (предложение 17.4(a)), который, очевидно, инвариантен относительно T . Рассматривая коммутативный случай, мы убедились, что группа $Z = Z(H)^0$ прямо порождена содержащимися в ней группами U_α (взятыми в любом порядке!). Заметим, что достаточно доказать биективность морфизма π , если центральные группы U_α отодвинуты в конец избранного порядка; пусть, скажем, эти группы занумерованы следующим образом: $U_{\alpha_{k+1}}, \dots, U_{\alpha_n}$. Если $\varphi: H \rightarrow H/Z$ — каноническое отображение, то группа T действует естественным образом на H/Z . Используя индукцию по размерности, мы заключаем, что группа $\varphi(H)$ прямо порождена группами $\varphi(U_{\alpha_1}), \dots, \varphi(U_{\alpha_k})$ в заданном порядке. Отсюда следует, что группа H прямо порождена группами $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$.

Наконец, снимем предположение о связности группы H . Проведенное только что рассуждение описывает строение групп U и H , что позволяет нам, в частности, записать $U = H^0 V$, где V — произведение тех групп U_α , которые не содержатся в H^0 . Таким образом, H — теоретико-множественное произведение групп H^0 и $H \cap V$. Но группа $H \cap V$ конечна и инвариантна относительно T ; следовательно, она тривиальна (как и в рассуждении выше). $\square$

Заметим, что предложение оставляет нерешенным вопрос, какие подмножества Ψ из Φ^+ действительно принадлежат T -инвариантным подгруппам группы U . Однако мы можем указать некоторые интересные примеры. Пусть $n \in N$ — представитель элемента $\sigma \in W$. Тогда группа nUn^{-1} не зависит от выбора представителя смежного класса, так как T нормализует U ; поэтому мы можем позволить себе записать $\sigma U \sigma^{-1}$. Аналогично мы запишем $\sigma U_\alpha \sigma^{-1} = U_{\sigma(\alpha)}$. Если $B^- = TU^-$ — борелевская подгруппа, содержащая T и противоположная к группе B (26.2), то мы получаем инвариантные относительно T

подгруппы группы U : $U_\sigma = U \cap \sigma U \sigma^{-1}$, $U'_\sigma = U \cap \sigma U^{-1} \sigma^{-1}$. Им соответствует разбиение множества корней Φ^+ :

$$\Phi_\sigma^+ = \{\alpha > 0 \mid \sigma(\alpha) > 0\}, \quad \Phi_\sigma^- = \{\alpha > 0 \mid \sigma(\alpha) < 0\}.$$

Предложение показывает, что $U = U_\sigma U'_\sigma = U'_\sigma U_\sigma$ ($\sigma \in W$), но, вообще говоря, U не является полупрямым произведением U_σ и U'_σ .

Рассмотрим, что произойдет, если $\alpha \in \Delta$, $\sigma = \sigma_\alpha$. Так как α — простой корень, то отражение σ_α переставляет положительные корни, отличные от α (Д.5). Таким образом, группа U_{σ_α} имеет коразмерность 1 в U (и $U = U_\alpha U_{\sigma_\alpha}$). Из предложения 17.4 следует, что группа U_{σ_α} нормальна в U . Мы можем утверждать больше: так как $\sigma_\alpha^2 = e$, то группа U_{σ_α} также нормализуется отражением σ_α (т. е. группой $N_{Z_\alpha} T$). Отсюда следует, что группа U_{σ_α} нормализуется группой Z_α . Этот факт вскоре будет использован.

28.2. Группы полупростого ранга 1. Сделаем прежде всего несколько общих замечаний. Так как тор T содержится в B , то двойные классы BnB не зависят от выбора представителя n данного элемента $\sigma \in W = N/T$. В этом случае удобно писать $B\sigma B$ (подобно тому, как мы писали $\sigma U \sigma^{-1}$ в (28.1)). Чередования латинских и греческих букв здесь должно быть достаточно, чтобы читатель не воспринимал эти обозначения слишком буквально. Заметим далее, что если мы хотим проверить равенство $G = BNB$, то это достаточно сделать для образа группы G относительно морфизма алгебраических групп с ядром, содержащимся в $Z(G)$. Более точно, если $\varphi: G \rightarrow G'$ — морфизм алгебраических групп и $\text{Ker } \varphi \subset Z(G) \subset T$, то группа $G' = \varphi(G)$ снова редуктивна (или тривиальна) с борелевской подгруппой $B' = \varphi(B)$, максимальным тором $T' = \varphi(T)$ и его нормализатором $N' = \varphi(N)$. Таким образом, соотношение $G' = B'N'B'$ влечет $G = BNB$ (и обратно).

Предложение. *Предположим, что $\text{rank}_{ss}(G) = 1$. Тогда $G = B \cup B\sigma B$ (причем множества B и $B\sigma B$ не пересекаются), где σ — нетривиальный элемент группы W . Кроме того, $B\sigma B = U\sigma T U$, и если $n \in N$ — фиксированный представитель элемента σ , то каждый элемент двой-*

ного смежного класса $B\sigma B$ имеет единственное представление в виде unt' ($u, u' \in U, t \in T$).

Доказательство. Напомним (следствие 25.3), что существует эпиморфизм $G \rightarrow PGL(2, K)$ с группой $Z(\bar{G})$ в качестве ядра. Ввиду предыдущих замечаний достаточно доказать все утверждения, если $G = SL(2, K)$. Ясно, что двойные смежные классы B и $B\sigma B$ не пересекаются, ибо двойные смежные классы всегда либо совпадают, либо не пересекаются, и $N \cap B = T$. Очевидно также, что $B\sigma B = U\sigma TU$. Требуется доказать, что каждый элемент группы G , не лежащий в B , имеет единственное выражение указанного вида. Непосредственное вычисление дает (если $c \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если представитель элемента σ фиксирован, например

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то, очевидно, диагональная часть определяется по c . Читатель легко сможет проверить выполнение других утверждений о единственности. $\square$

Этому результату можно дать геометрическую интерпретацию. Если G — группа полупростого ранга 1, мы рассмотрим, как группа U действует на (одномерном) многообразии G/B , которое, по существу, есть $\mathbf{P}^1$. Группа U оставляет, конечно, неподвижной точку, соответствующую B (и только ее). Вторая борелевская подгруппа, содержащая T , соответствует точке σB (т. е. nBn^{-1} , где n — представитель элемента σ) и, согласно предположению, ее U -орбита содержит все остальные точки многообразия G/B .

28.3. Разложение Брюа. Теперь мы можем получить разложение Брюа для группы G ; с его помощью мы получим некоторую нормальную форму для элементов группы G (28.4).

Теорема. $G = \bigcup_{\sigma \in W} B\sigma B$ (объединение непересекающихся двойных смежных классов), причем $B\sigma B = B\tau B$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \tau$.

Доказательство. Согласно теореме 27.3 группа G порождается подгруппами Z_α , где α пробегает *простые* корни. Предложение 28.2 показывает, что $Z_\alpha \subset BWB$. Чтобы убедиться, что $G = BWB$, достаточно, следовательно, показать, что множество BWB замкнуто относительно умножения (слева) на группы Z_α ($\alpha \in \Delta$). Мы упомянули в конце (28.1), что $U = U_{\sigma_\alpha} U_\alpha$ и что группа Z_α нормализует U_{σ_α} . Таким образом, любой элемент группы Z_α (в частности, представитель σ_α) можно передвинуть через U_{σ_α} .

Пусть $\sigma B = x_0$ ($\sigma \in W$) — точка многообразия G/B , соответствующая одной из $|W|$ борелевских подгрупп, содержащих T . Стабилизатор точки x_0 в Z_α есть одна из ее двух борелевских подгрупп (обозначим ее через B_α), содержащих тор T (25.4). Следовательно, многообразие Z_α/B_α отображается взаимно однозначно на орбиту точки x_0 относительно Z_α , причем это отображение эквивариантно относительно Z_α . Геометрическая интерпретация предложения 28.2 показывает, что эту орбиту можно записать в виде $U_\alpha \cdot x_0 \cup U_\alpha \sigma_\alpha \cdot x_0$ (независимо от того, лежит ли U_α в B_α или в противоположной борелевской подгруппе).

Комбинируя выводы этих абзацев, имеем: $Z_\alpha B \sigma B = Z_\alpha U_{\sigma_\alpha} U_\alpha \sigma B = U_{\sigma_\alpha} Z_\alpha \sigma B = U_{\sigma_\alpha} U_\alpha \sigma B \cup U_{\sigma_\alpha} U_\alpha \sigma_\alpha \sigma B = B \sigma B \cup B \sigma_\alpha \sigma B$. В частности, $Z_\alpha B W B \subset B W B$, что и требовалось.

Два двойных смежных класса $B \sigma B$, $B \tau B$ либо не пересекаются либо совпадают, так что остается доказать, что равенство имеет место только при $\sigma = \tau$. Для этого мы воспользуемся тем фактом, что $N \cap B = T$ и предыдущим вычислением: $\sigma_\alpha B \sigma \subset B \sigma B \cup B \sigma_\alpha \sigma B$ ($\sigma \in W$, $\alpha \in \Delta$). Так как элементы σ_α ($\alpha \in \Delta$) порождают W , то естественно привлечь функцию длины (Д.5) на W : $l(\sigma)$ есть минимальное число t такое, что $\sigma = \sigma_{\alpha(1)} \sigma_{\alpha(t)}$, $\alpha(i) \in \Delta$. Ясно, что $l(\sigma) = 1$ в точности тогда, когда $\sigma = \sigma_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$), и $l(e) = 0$.

Предположим, что $B \sigma B = B \tau B$ и (скажем) $l(\sigma) \leq l(\tau)$. Воспользуемся индукцией по $l(\sigma)$. Если $l(\sigma) = 0$, то $\sigma = e$, так что из соотношения $B = B \tau B$ следует, что τ нормализует B ; но $B \cap N = T$, откуда $\tau = e$. В общем случае запишем $\sigma = \sigma_\alpha \sigma^*$ ($\alpha \in \Delta$), где $l(\sigma^*) =$

$= l(\sigma) - 1$. Из соотношения $B\sigma B = B\tau B$ мы получаем $\sigma_\alpha \sigma^* B\tau \subset B\tau B$; следовательно, $\sigma^* B \subset \sigma_\alpha B\tau B \subset B\tau B \cup B\sigma_\alpha \tau B$ (ибо $\sigma_\alpha^2 = e$). Возможны два случая:

(а) $\sigma^* B \subset B\tau B$. Тогда $B\sigma^* B = B\tau B$, и, по предположению индукции, $\sigma^* = \tau$, что противоречит неравенству $l(\sigma^*) < l(\sigma) \leq l(\tau)$.

(б) $\sigma^* B \subset B\sigma_\alpha \tau B$. Тогда $B\sigma^* B = B\sigma_\alpha \tau B$. Очевидно, $l(\sigma^*) \leq l(\sigma_\alpha \tau)$, так что по индукции мы имеем $\sigma^* = \sigma_\alpha \tau$, откуда $\sigma = \sigma_\alpha \sigma^* = \sigma_\alpha^2 \tau = \tau$, что и требовалось. $\square$

Аксиоматическая версия разложения Брюа (предложенная Ж. Титсом) будет приведена в § 29. Ключевая аксиома, содержащаяся в только что приведенном доказательстве равенства $G = B\mathbb{W}B$, состоит в следующем.

Следствие (доказательства). Если $\alpha \in \Delta$, $\sigma \in \mathbb{W}$, то $\sigma_\alpha B\sigma \subset B\sigma B \cup B\sigma_\alpha \sigma B$. $\square$

Стоит отметить простое следствие теоремы, которое отнюдь не очевидно на более ранней стадии изложения.

Следствие. Пусть B' — произвольная подгруппа Бореля группы G . Тогда группа $B \cap B'$ связна и содержит максимальный тор группы G .

Доказательство. Как мы знаем, группы B и B' сопряжены (21.3). Согласно теореме сопрягающий элемент можно записать в виде $u\sigma b$ ($u \in U$, $\sigma \in \mathbb{W}$, $b \in B$), так что $B' = u\sigma B\sigma^{-1}u^{-1}$. Но $\sigma T\sigma^{-1} = T$ и $uTu^{-1} \subset B$, так что максимальный тор $T' = u\sigma T\sigma^{-1}u^{-1}$ группы B' содержится также в B . Если мы запишем $B' = T'U$, то $B \cap B' = T'H$, где группа $H = B \cap B' \cap U$ замкнута и инвариантна относительно T' . Ввиду предложения (28.1) группа H связна; поэтому и группа $B \cap B'$ связна. $\square$

28.4. Нормальная форма для элементов группы G . Двойные смежные классы $B\sigma B$ можно также записывать в виде $U\sigma B$ или в виде $U\sigma T U$, но здесь U -компоненты заданного элемента определены неоднозначно (исключением являются группы ранга 1, см. (28.2)). В общем же случае некоторая часть группы U может быть представлена с σ (и T) и соединена со второй копией группы U . После этого уточнения разложение оказывается однозначным.

Напомним рассуждение, приведенное в конце (28.1), где для каждого элемента $\sigma \in \mathbb{W}$ мы устраивали разбиение положительных корней и записывали $U = U_\sigma U_{\sigma'} =$

$= U'_\sigma U_\sigma$ (прямое порождение). Отсюда следует, что $B\sigma B = U\sigma B = U'_\sigma U_\sigma \sigma B = U'_\sigma \sigma B$, так как $\sigma^{-1}U_\sigma \sigma \subset U$.

Теорема. Для каждого элемента $\sigma \in W$ зафиксируем представитель $n(\sigma) \in N$. Тогда каждый элемент $x \in G$ можно записать в виде $x = u'n(\sigma)tu$, где все элементы $\sigma \in W$, $t \in T$, $u \in U$, $u' \in U'_\sigma$ определены однозначно элементом x .

Доказательство. Существование такого разложения вместе с тем фактом, что x однозначно определяет выбор σ , следует из теоремы 28.3 и предыдущих замечаний. Предположим, что мы также имеем $x = v'n(\sigma)t_0v$ ($v \in U$, $v' \in U'_\sigma$, $t_0 \in T$). Тогда $tu = (n(\sigma)^{-1}(u'^{-1}v')n(\sigma))t_0v$. Но выражение в скобках принадлежит $\sigma^{-1}U'_\sigma \sigma \subset U^-$ и $U^- \cap B = e$; поэтому это выражение равно e и $u' = v'$. Кроме того, $tu = t_0v$, откуда $t = t_0$ и $u = v$ (так как $T \cap U = e$). $\square$

28.5. Дополнения. До сих пор мы не обращали внимания на топологический аспект разложения Брюа. Пусть $B^- = TU^-$, как и выше, и пусть σ_0 — (единственный) элемент группы W , преобразующий B в B^- .

Предложение. Отображение произведения $\pi: U^- \times B \rightarrow G$ определяет биекцию множества $U^- \times B$ на открытое подмножество Ω группы G (называемое **большой клеткой**).

Доказательство. Так как $U^- \cap B = e$, то отображение π , конечно, инъективно. Кроме того, $\dim \Omega = \dim u^- + \dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{g} = \dim G$, так что конструктивное множество Ω содержит плотное открытое подмножество группы G . Но Ω есть сдвиг при помощи σ_0 двойного смежного класса $B\sigma_0 B$. Таким образом, достаточно показать, что множество $B\sigma_0 B$ открыто или что множество $B\sigma_0 \cdot x_0$ открыто в G/B (здесь x_0 — точка, соответствующая B). Множество $B\sigma_0 \cdot x_0$ конструктивно и является B -орбитой; поэтому оно открыто в своем замыкании (8.3); но мы отмечали, что это последнее совпадает с G/B . $\square$

Мы можем уточнить тот факт, что множество Ω открыто в G . Выберем базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащий элементы $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ для каждого корня $\alpha \in \Phi$, а также некоторый базис алгебры $\mathfrak{t}$ и образуем m -ю внешнюю степень пространства $\mathfrak{g}$, на котором группа G действует посредством присоединенного представления ($m =$

$= \text{card } \Phi^+)$. Пусть f — координатная функция на G , соответствующая внешнему произведению тех x_α , для которых $\alpha > 0$. Ясно, что f — полиномиальная функция на G , и можно показать, что Ω — в точности главное открытое множество, состоящее из всех тех точек группы G , в которых f не обращается в 0 (см. замечания ниже).

Для целей следующей главы важно знать, что $\pi: U^- \times B \rightarrow \Omega$ — в действительности *изоморфизм многообразий*. В самом деле, морфизм π биективен и сепарабелен, последнее — благодаря тому, что его дифференциал отображает пространство $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$ изоморфно на $\mathfrak{g}$ (= касательное пространство к Ω в точке e , см. (5.5)). Отсюда следует, что морфизм π бирационален (4.6) и, следовательно, что его ограничение на некоторое плотное открытое подмножество множества $U^- \times B$ есть изоморфизм (4.7). Множество всех таких открытых множеств имеет максимальный элемент (ввиду условия обрыва возрастающих цепей открытых множеств); обозначим его через O . Но морфизм π (слева) U^- -эквивариантен и (справа) B -эквивариантен; поэтому множество O инвариантно относительно левых умножений на U^- и правых умножений на B (ввиду максимальной). Отсюда следует, что $O = U^- \times B$.

Это рассуждение использует (как и в § 12) однородность, вытекающую из наличия группового действия. В действительности, опираясь на некоторый вариант основной теоремы Зарисского, мы могли бы показать, что сепарабельный биективный морфизм многообразий является изоморфизмом при условии, что многообразие, в которое осуществляется отображение, гладко (или хотя бы «нормально»).

Отображение произведения $U_\sigma \times U'_\sigma \rightarrow U$ в (28.1), как можно показать при помощи аналогичного рассуждения, является изоморфизмом многообразий. В главе XI нам потребуется подобный результат для более чем двух множителей, например нам будет необходим факт, что отображение произведения $U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_m} \rightarrow U$ есть изоморфизм многообразий, если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные корни, взятые в любом порядке. Этот факт можно доказать индуктивно, если использовать суще-

ствование ряда T -инвариантных связанных нормальных подгрупп группы U , каждая из которых — коразмерности 1 в последующей (теорема 19.3), и привлечь предложение 28.1.

Упражнения

1. Соответствие $H \rightarrow \mathfrak{h}$ — инъективное отображение множества всех T -инвариантных подгрупп группы U во множество всех T -инвариантных подалгебр алгебры $\mathfrak{u}$.

2. Пусть H , xHx^{-1} ($x \in U$) — замкнутые инвариантные относительно T подгруппы группы U . Доказать, что $H = xHx^{-1}$. (Воспользоваться предложением 28.1 и индукцией по $\dim U$ при переходе к U/U_β для некоторой подгруппы $U_\beta \subset Z(U)$.)

3. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi^+$. Доказать, что группа (U_α, U_β) содержится в произведении (в любом порядке) тех групп $U_{i\alpha+j\beta}$, для которых $i, j > 0$ и $i\alpha + j\beta \in \Phi$.

4. Выписать точные формулы для коммутаторов в группе U , использующие U_α, U_β , если $G = SL(3, K)$ $Sp(4, K)$.

5. Закончить доказательство единственности в (28.2).

6. Назовем две борелевские подгруппы *далекими*, если их пересечение есть тор (всегда максимальный согласно следствию 28.3). Если группы B', B'' обе далеки от B , то доказать, что группа B' сопряжена с B'' при помощи некоторого элемента из B .

7. Доказать, что $\dim U'_\sigma = l(\sigma)$, $\sigma \in W$. (Использовать Д.5.)

8. Пусть $G = SL(2, K)$, и Ω — как и в (28.5). Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит Ω тогда и только тогда, когда $a \neq 0$. (Если $G = SL(n, K)$, то критерий принадлежности элемента $x \in G$ множеству Ω состоит в том, что все главные миноры матрицы x отличны от 0).

9. Пусть H — алгебраическая группа, $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм абстрактных групп. Если ограничение $\varphi|_B$ — морфизм, то доказать, что и φ — морфизм. (Использовать изоморфизм $\Omega \cong U \times B$.)

10. Из предположения о справедливости следствия 28.3 вывести существование разложения $G = BNB$ в теореме 28.3.

11. Дать другое доказательство утверждения о единственности в теореме 28.3, основываясь на следующих соображениях. Если $B\sigma B = B\tau B$, то для представителей $n(\sigma), n(\tau) \in N$ существуют элементы $b, b' \in B$ такие, что $bn(\sigma) = n(\tau)b'$. Для произвольного $t \in T$ тогда $bn(\sigma)tn(\sigma)^{-1}b^{-1} = n(\tau)b'tb'^{-1}n(\tau)^{-1} \in B$. Переписать левую часть в виде $n(\sigma)tn(\sigma)^{-1}v$ и правую часть в виде $(n(\tau)tn(\tau)^{-1}) \times (n(\tau)v'n(\tau)^{-1})$ для некоторых элементов $v, v' \in B_u$ и заключить что $\sigma = \tau$.

Замечания. Разложение Брюа было первоначально найдено для классических линейных групп Ли; затем оно было использовано при изучении конечных простых групп и алгебраических групп Шевалле [7], [8] и позднее аксиоматизировано Титсом [3]. У Стейнберга

[13, 2.14] разложение Брюа для некоторых классических групп выводится непосредственно. По поводу более точного описания большой клетки (28.5) и роли, которую она играет, см. Шевалле [11], Борель [6, 4.5].

§ 29. Системы Титса

Под влиянием статьи Шевалле [7] Титс выделил некоторое множество аксиом для описания строения простых групп Шевалле (и их модификаций, построенных позже), получив в результате единое доказательство простоты для всех типов групп. Возникающие на этом пути «системы Титса» имеются во всех редуктивных алгебраических группах, а также в их подгруппах (быть может, конечных), состоящих из всех их матриц с коэффициентами в некотором подполе поля K . Они также появляются, хотя и несколько иным путем, в простых алгебраических группах над локальными полями (см. (35.4)). Ввиду того, что этот аксиоматический подход чрезвычайно полезен и ясен, мы изложим его здесь, несмотря на то, что наши применения будут относиться исключительно к редуктивным группам над K . Помимо более точного описания параболических подгрупп, мы выведем из этих аксиом полезное представление образующими и соотношениями группы Вейля, что найдет существенное применение в § 32, а также критерий полупростоты, из которого будет следовать, что простая алгебраическая группа не имеет собственных нормальных подгрупп, не содержащихся в ее центре. (Этот последний результат нигде в дальнейшем использоваться не будет.)

Чтобы избежать перегрузки обозначений и сделать рассуждения более интуитивными, мы сохраняем в аксиомах большинство уже введенных обозначений: G, B, T, N, W . Однако корни группы G относительно T обозначаются несколько иначе. Именно, выбор группы B определяет множество простых корней и, следовательно, множество S простых отражений (которые порождают W); для обозначения этих отражений мы используем букву ρ , а через σ будем обозначать произвольный элемент группы W .

29.1. Аксиомы. Пусть G — группа, порожденная двумя подгруппами B и N , где группа $T = B \cap N$ нормальна

в N . Обозначим фактор-группу N/T через W и предположим, что W порождается подмножеством S , состоящим из *инволюций* (т. е. элементов порядка 2). Такие обозначения, как $B\sigma B$ или σB или $B\sigma$ ($\sigma \in W$) допустимы, поскольку любые два представителя элемента σ в N отличаются только на элемент из T и $T \subset B$. Четверку (G, B, N, S) мы называем **системой Титса**, если выполняются следующие аксиомы:

(T1) если $\rho \in S$, $\sigma \in W$, то $\rho B \sigma \subset B \sigma B \cup B \rho \sigma B$;

(T2) если $\rho \in S$, то $\rho B \rho \neq B$.

Группа W называется **группой Вейля** системы Титса, а $\text{card } S$ — ее **рангом**. В большинстве применений ранг конечен, тогда как группа Вейля может быть конечной или бесконечной. (В любом случае никакие ограничения на мощность пока не налагаются.) Мы называем B или любую сопряженную с ней подгруппу группы G **борелевской подгруппой** группы G .

Аксиома (T1) является выражением того факта, что произведение двух двойных смежных классов $B\rho B$ и $B\sigma B$ (при $\rho \in S$) содержится в объединении указанных там *двух* двойных смежных классов. Несимметричность этой аксиомы относительно σ и ρ может быть устранена, если мы перейдем к обратным элементам и воспользуемся предположением о том, что $\rho^2 = e$:

(T1') если $\rho \in S$, $\sigma \in W$, то $\sigma B \rho \subset B \sigma B \cup B \rho \sigma B$.

Пример системы Титса, который должен сразу же прийти в голову: G — редуктивная алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа, содержащая максимальный тор T , $N = N_G(T)$, $W = N/T$ — группа Вейля, и S — множество простых отражений, соответствующих базе системы корней, определенной группой B . Мы знаем, что группа G порождается борелевскими подгруппами, содержащими T (следствие 25.2B) и, следовательно, группами B и N , причем S состоит из инволюций и порождает W (27.3). Аксиома (T1) — это в точности следствие 28.3, а аксиома (T2) следует из того факта, что W действует на $\mathfrak{g}^T$ однотранзитивно (24.1). Предостережение: в этом примере $\text{card } S$ есть ранг системы корней, т. е. *полупростой ранг* группы G . Таким образом, ранг системы Титса не обязательно является полным рангом группы G . (Дело в том, что центр группы G не играет здесь никакой роли.)

29.2. Разложение Брюа. В дальнейшем через (G, B, N, S) обозначается система Титса, с группой Вейля W . Назовем выражение $\sigma = \rho_1 \dots \rho_k$ ($\rho_i \in S$) приведенным, если k — наименьшее возможное число, и запишем $l(\sigma) = k$ (это длина элемента σ относительно S). По определению $l(\sigma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = e$. Очевидно, что $l(\sigma) = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in S$.

Для каждого подмножества $I \subset S$ обозначим через W_I подгруппу группы W , порожденную множеством I . Положим $P_I = BW_I B$ (множество произведений), так что $P_\emptyset = B$.

Теорема. (а) Если $I \subset S$, то P_I — подгруппа группы G (в частности, группа $P_S = BWB$ совпадает с G , так как группы B и N порождают G).

(б) При $\sigma, \sigma' \in W$ соотношение $B\sigma B = B\sigma' B$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma'$.

Доказательство. (а) Множество P_I замкнуто относительно взятия обратных элементов и относительно левых умножений на элементы группы B , так что достаточно проверить замкнутость относительно левого умножения на элемент $\rho \in I$. Но (T1) влечет $\rho BW_I B \subset BW_I B \cup \cup B\rho W_I B \subset P_I$.

(б) В доказательстве нуждается лишь часть «только тогда». Для этого мы повторим рассуждение в (28.3). Воспользуемся индукцией по $l(\sigma)$, причем мы можем предполагать, что $l(\sigma) \leq l(\sigma')$. Если $l(\sigma) = 0$, то $\sigma = e$ и предположение принимает вид $B = B\sigma' B$. Отсюда следует, что представитель элемента σ' в N принадлежит группе B . Но $B \cap N = T$, так что $\sigma' = e$. Таким образом, $B\sigma B = B\sigma' B$, и мы можем считать, что $l(\sigma) \geq 1$. Запишем $\sigma = \rho\sigma^*$ ($\rho \in S$), где $l(\sigma^*) = l(\sigma) - 1$. Следовательно, $\sigma B = \rho\sigma^* B \subset B\sigma' B$, или $\sigma^* B \subset \rho B\sigma' B$ (ибо $\rho^2 = e$). Используя (T1), получаем $\sigma^* B \subset B\sigma' B \cup B\rho\sigma' B$. В частности, $B\sigma^* B$ совпадает с одним из этих двойных классов.

Предположим, что $B\sigma^* B = B\sigma' B$. По предположению индукции $\sigma^* = \sigma'$, а это противоречит тому факту, что $l(\sigma^*) < l(\sigma) \leq l(\sigma')$. Следовательно, $B\sigma^* B = B\rho\sigma' B$. Очевидно, $l(\sigma^*) \leq l(\rho\sigma')$, так что из предположения индукции следует, что $\sigma^* = \rho\sigma'$, или $\rho\sigma^* = \sigma'$, или $\sigma = \sigma'$. $\square$

Отметим, что мы пока не обращались к аксиоме (T2).

29.3. Параболические подгруппы. Мы собираемся уточнить аксиому (T1), связав включение, указанное в

формулировке этой аксиомы, с длинами элементов группы W . Эта информация будет затем использована для доказательства того факта, что *единственными* подгруппами группы G , содержащими B , являются группы P_i из (29.2). Заметим, что аксиома (T1) вместе с утверждением (б) теоремы 29.2 позволяют нам заключить (при $\rho \in S$), что

$$(*) \quad \rho B \sigma \subset B \rho \sigma B \Leftrightarrow \rho B \sigma \cap B \sigma B = \emptyset.$$

Лемма А. Пусть $\rho \in S$, $\sigma \in W$.

(а) Соотношение $l(\rho\sigma) \geq l(\sigma)$ влечет $\rho B \sigma \subset B \rho \sigma B$.

(б) Соотношение $l(\rho\sigma) \leq l(\sigma)$ влечет $\rho B \sigma \cap B \sigma B \neq \emptyset$.

(в) $l(\rho\sigma) = l(\sigma) \pm 1$.

Доказательство. Заключение утверждений (а) и (б) несовместимы, ввиду (*), так что $l(\rho\sigma) \neq l(\sigma)$. С другой стороны, $l(\rho\sigma)$ не может, очевидно, отличаться более чем на 1, от $l(\sigma)$. Поэтому (в) будет следовать из (а) и (б).

(а). Воспользуемся индукцией по $l(\sigma)$; случай $l(\sigma) = 0$ очевиден. Запишем $\sigma = \sigma' \rho'$, где $\rho' \in S$ и $l(\sigma') = l(\sigma) - 1$. От противного предположим, что $\rho B \sigma$ имеет пересечение с $B \sigma B$. Умножение справа на ρ' дает $\rho B \sigma' \cap B \sigma B \rho' \neq \emptyset$. Но $l(\rho\sigma') \geq l(\rho\sigma' \rho) - 1 = l(\rho\sigma) - 1 \geq l(\sigma) - 1 = l(\sigma')$. По предположению индукции $\rho B \sigma' \subset B \rho \sigma' B$, откуда $B \sigma B \rho' \cap B \rho \sigma' B \neq \emptyset$. В свою очередь аксиома (T1) показывает, что $B \sigma B \rho' \subset B \sigma B \cup B \rho \sigma' B = B \sigma B \cup B \sigma' B$. Следовательно, класс $B \rho \sigma' B$ пересекается (и, следовательно, совпадает) с одним из этих двойных смежных классов. По теореме 29.2(б) либо $\rho\sigma' = \sigma$ (что невозможно, так как $l(\sigma') < l(\sigma) \leq l(\rho\sigma)$ по предположению), либо $\rho\sigma' = \sigma'$, $\rho = e$ (что также невозможно, ибо ρ имеет порядок 2). Это противоречие доказывает справедливость утверждения (а).

(б) Здесь мы используем обе аксиомы. Из (T1) вытекает, что $\rho B \rho \subset B \rho B \cup B$; следовательно, аксиома (T2) в действительности означает, что $\rho B \rho \cap B \rho B \neq \emptyset$. Умножая это справа на $\rho\sigma$, получим $\rho B \sigma \cap B \rho B \rho \sigma \neq \emptyset$. Но, по предположению, $l(\rho^2\sigma) = l(\sigma) \geq l(\rho\sigma)$, так что из (а) следует, что $B \rho B \rho \sigma \subset B \sigma B$, откуда $\rho B \sigma \cap B \sigma B \neq \emptyset$. $\square$

Из (в) следует, что число появлений ρ' в любом выражении (приведенном или нет) для элемента $\sigma \in W$ имеет ту же четность, что $l(\sigma)$.

Лемма Б. Пусть $\sigma = \rho_1 \dots \rho_k$ (приведенная форма) и пусть $I = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$. Тогда группа P_I порождается B и $\sigma B \sigma^{-1}$ или B и σ .

Доказательство. Положим $\sigma' = \rho_1 \sigma$, так что $l(\sigma') < l(\sigma)$. Утверждение (б) леммы А показывает, что $\rho_1 B \sigma$ имеет пересечение с $B \sigma B$; в частности, $\rho_1 \in B \sigma B \sigma^{-1} B$, что содержится в группе, порожденной B и $\sigma B \sigma^{-1}$. Используя индукцию по $l(\sigma)$, мы можем предположить уже, что элементы $\rho_2, \dots, \rho_k$ лежат в группе, порожденной B и $\sigma' B \sigma'^{-1} = \rho_1 \sigma B \sigma^{-1} \rho_1$. Комбинируя эти два шага, мы заключаем, что группа $P_I = B W_I B$ порождается B и $\sigma B \sigma^{-1}$. Но $\langle B, \sigma B \sigma^{-1} \rangle \subset \langle B, \sigma \rangle \subset P_I$, так что везде имеет место равенство. $\square$

Из леммы Б следует, что множество элементов $\rho \in S$, которые появляются в приведенном выражении для σ , однозначно определяется элементом σ (упражнение 4). Отметим некоторые другие следствия этой леммы, представляющие непосредственный интерес.

Лемма В. S совпадает с множеством тех элементов $\sigma \in W$, для которых $B \cup B \sigma B$ — группа (таким образом, G, B, N определяют S однозначно), и S — минимальное множество образующих для W .

Доказательство. Если $I = \{\rho\}$, $\rho \in S$, то $W_I = \{e, \rho\}$ и $P_I = B \cup B \rho B$ — группа в силу теоремы 29.2(а). Обратное, если $B \cup B \sigma B$ — группа и $\sigma = \rho_1 \dots \rho_k$ — приведенное выражение, то $\{\rho_1, \dots, \rho_k\} \subset \langle B, \sigma \rangle = B \cup B \sigma B$ по лемме Б. Так как порядки элементов ρ_i равны 2, то из теоремы 29.2(б) следует, что $\rho_i = \sigma$, откуда $\sigma \in S$ (и $k = 1$).

Предположим наконец, что подмножество $S' \subset S$ порождает W . Очевидно, что (G, B, N, S') — снова система Титса с группой Вейля W , так что сделанный только что вывод показывает, что множество S' можно охарактеризовать как множество тех элементов $\sigma \in W$, для которых $B \cup B \sigma B$ — группа. В частности, $S \subset S'$. $\square$

Лемма Г. Пусть $\sigma \in W$, и пусть $I, J \subset S$. Если $\sigma P_I \sigma^{-1} \subset P_J$, то $\sigma \in P_J$ (т. е. все представители смежного класса, отвечающего σ , принадлежат P_J).

Доказательство. По предположению обе группы B и $\sigma B \sigma^{-1}$ принадлежат P_J , так что и представители смежного класса, отвечающего σ , принадлежат P_J согласно лемме Б. $\square$

Подгруппу группы G назовем **параболической**, если она содержит борелевскую подгруппу (т. е. подгруппу, сопряженную с B). Теперь мы можем доказать, что каждая параболическая подгруппа сопряжена с некоторой группой P_I .

Теорема. (а) Единственными подгруппами группы G , содержащими B , являются подгруппы вида P_I , где $I \subset S$.

(б) Если группа P_I сопряжена с P_J , то $P_I = P_J$.

(в) $N_G(P_I) = P_I$ (в частности, $N_G(B) = B$).

(г) Если $W_I \subset W_J$, то $I \subset J$.

(д) Если $P_I \subset P_J$, то $I \subset J$.

Доказательство. (а) По теореме 29.2(а) любая подгруппа H группы G , содержащая B , представима в виде объединения двойных смежных классов $B\sigma B$. Пусть I — множество всех $\rho \in S$, которые появляются в приведенных выражениях для таких $\sigma \in W$. Тогда, очевидно, $H \subset P_I$. С другой стороны, из леммы Б следует, что $P_I \subset H$.

(б) Так как группы B и N (или W) порождают G , то две подгруппы, содержащие B , сопряжены в G , только если они сопряжены при помощи некоторого элемента $\sigma \in W$. Но тогда применима лемма Г.

(в) Применяем снова лемму Г.

(г) Каждый элемент $\rho \in I$ есть произведение некоторых элементов множества J , так что лемма В влечет $I \subset J$.

(д) Если $P_I \subset P_J$, то $W_I \subset P_J$, и тогда $W_I \subset W_J$ (теорема 29.2(б)), откуда $I \subset J$ ввиду утверждения (г). $\square$

Эта теорема показывает, что решетка подгрупп группы G , содержащих B , изоморфна решетке подмножеств множества S (упорядоченных по включению) или решетке подгрупп W_I группы W .

29.4. Образующие и соотношения для W . Если ранг системы Титса равен 1, то ее группа Вейля порождается одним элементом ρ с одним определяющим соотношением $\rho^2 = e$. В случае, если система Титса имеет ранг 2, группа W имеет две образующие ρ_1, ρ_2 , которые удовлетворяют по крайней мере соотношениям $\rho_i^2 = e$ ($i = 1, 2$). Если элемент $\rho_1 \rho_2$ имеет конечный порядок (скажем, m), то W — гомоморфный образ абстрактной группы с образующими и соотношениями $\langle \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \mid \hat{\rho}_i^2 = e = (\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2)^m \rangle$. Хорошо известно (и легко доказать), что эта последняя группа изоморфна диэдральной группе D_m порядка $2m$.

Но W также имеет порядок $2m$; в противном случае она совпадала бы со своей *циклической* подгруппой $\langle \rho_1 \rho_2 \rangle$ порядка m и, следовательно, содержала бы единственную подгруппу $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_2 \rangle$ порядка 2, что невозможно. Это показывает, что группа W диэдральна. Если элемент $\rho_1 \rho_2$ имеет бесконечный порядок, то группа W , очевидно, изоморфна *бесконечной диэдральной группе* D_∞ , абстрактное представление которой таково $\langle \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2 \mid \hat{\rho}_i^2 = e \rangle$.

Для упрощения обозначений мы будем предполагать, что множество S конечно и состоит из l элементов (хотя последующие рассуждения проходят для произвольного множества образующих). По определению **группа Кокстера** ранга l есть группа с образующими $\hat{\rho}_i$ ($1 \leq i \leq l$) и определяющими соотношениями $(\hat{\rho}_i \hat{\rho}_j)^{m(i,j)} = e$, где $m(i,i) = 1$ и $2 \leq m(i,j) = m(j,i) \leq \infty$ при $i \neq j$. (Если $m(i,j) = \infty$, то мы просто опускаем соответствующее соотношение.) Мы уже видели, что группа Вейля системы Титса ранга ≤ 2 есть группа Кокстера. Наша цель — доказать это в общем случае. В качестве первого шага мы заметим, что группа W удовлетворяет **условию замены**.

Лемма. Пусть $\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}$ — приведенное выражение для элемента $\sigma \in W$. Предположим, что $l(\rho_{i(0)} \sigma) \leq l(\sigma)$. Тогда существует такое число s , $1 \leq s \leq t$, что $\rho_{i(0)} \rho_{i(1)} \dots \rho_{i(s-1)} = \rho_{i(1)} \dots \rho_{i(s)}$.

Доказательство. По лемме А в (29.3) $\rho_{i(0)} B \subset B \sigma B \sigma^{-1} B$, что (ввиду повторного применения аксиомы T1) содержится в объединении всех двойных смежных классов $B \sigma \rho_{i(n_1)} \dots \rho_{i(n_r)} B$, где $r \leq t$ и $t \geq n_1 > n_2 > \dots > n_r \geq 1$. В частности, согласно теореме 29.2, элемент $\rho_{i(0)}$ равен одному (и только одному!) из указанных элементов группы W . Но $l(\sigma) = t$ и $l(\rho_{i(0)}) = 1$; ясно поэтому, что $r = t - 1$, так что только один элемент $\rho_{i(s)}$ был опущен. Этот выбор числа s удовлетворяет лемме. $\square$

Теорема. Пусть $m(i,j)$ ($\leq \infty$) — порядок элемента $\rho_i \rho_j$ в W ($1 \leq i, j \leq l$). Пусть $\pi: W \rightarrow W$ — канонический эпиморфизм, где W — группа Кокстера $\langle \hat{\rho}_i, 1 \leq i \leq l \mid (\hat{\rho}_i \hat{\rho}_j)^{m(i,j)} = e \rangle$. Тогда π — изоморфизм.

Доказательство. (1) Первый шаг состоит в том, чтобы показать, что если $\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}$ и $\rho_{j(1)} \dots \rho_{j(t)}$ — два

приведенных выражения некоторого элемента σ из W , то $\hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(t)} = \hat{\rho}_{j(1)} \dots \hat{\rho}_{j(t)}$ в $\hat{W}$. Для этого мы воспользуемся индукцией по t ; случай $t=1$ тривиален. Предположим, что результат доказан для длин $< t$. Для краткости мы пишем $(i(1), \dots, i(s)) \sim (j(1), \dots, j(s))$, если $\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(s)} = \rho_{j(1)} \dots \rho_{j(s)}$ и эти выражения приведены. Таким образом, наше предположение состоит в том, что $(i(1), \dots, i(t)) \sim (j(1), \dots, j(t))$.

Так как левое умножение на $j(1)$ сокращает длину элемента σ , то условие замены позволяет нам найти такое число s , $1 \leq s \leq t$, для которого $(i(1), \dots, i(s)) \sim (j(1), i(1), \dots, i(s-1))$. Следовательно, $(j(1), \dots, j(t)) \sim (i(1), i(t)) \sim (j(1), i(1), i(s-1), i(s+1), \dots, i(t))$, откуда $(j(2), j(t)) \sim (i(1), \dots, i(s-1), i(s+1), i(t))$.

По предположению индукции $\hat{\rho}_{j(2)} \dots \hat{\rho}_{j(t)} = \hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(s-1)} \hat{\rho}_{i(s+1)} \dots \hat{\rho}_{i(t)}$, или $\hat{\rho}_{j(1)} \dots \hat{\rho}_{j(t)} = \hat{\rho}_{j(1)} \hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(s-1)} \hat{\rho}_{i(s+1)} \dots \hat{\rho}_{i(t)}$. В случае $s < t$ индукция также дает $\hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(s)} \dots \hat{\rho}_{i(t)} = \hat{\rho}_{j(1)} \hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(s-1)} \hat{\rho}_{i(s+1)} \dots \hat{\rho}_{i(t)}$, что завершает доказательство.

Остается случай $s=t$, когда $\hat{\rho}_{j(1)} \dots \hat{\rho}_{j(t)} = \hat{\rho}_{j(1)} \hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(t-1)}$ (и $j(1) \neq i(1)$). Первоначальная задача была заменена задачей, относящейся к соотношению $(i(1), i(2), \dots, i(t)) \sim (j(1), i(1), \dots, i(t-1))$. Повторим рассуждение выше, на этот раз используя левое умножение на $i(1)$ для сокращения длины; тогда либо (1) доказано, либо мы приходим к соотношению $(i(1), j(1), i(1), \dots, i(t-2)) \sim (j(1), i(1), \dots, i(t-1))$. Это приводит в конце концов к последовательности длины t , содержащей только $i(1), j(1)$ (попеременно). Утверждение, что соответствующие элементы группы W равны (и приведены), равносильно утверждению, что t равно $m = m(i(1), j(1))$, так как подгруппа группы W , порожденная $\rho_{i(1)}$ и $\rho_{j(1)}$, является, как мы видели выше, *дизд-ральной*. В частности, так как $(\hat{\rho}_{i(1)} \hat{\rho}_{j(1)})^m = e$ и $(\hat{\rho}_i^2) = e$, то мы завершаем доказательство шага (1).

(2) Ввиду шага (1) мы имеем возможность определить функцию $\varphi: W \rightarrow W$ посредством соотношения $\varphi(\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}) = \hat{\rho}_{i(1)} \dots \hat{\rho}_{i(t)}$, коль скоро первое выра-

жение является приведенным. Очевидно, $\text{пф} = 1_{\mathcal{W}}$, так что отображение φ инъективно. Достаточно доказать, что оно сюръективно или что образ $\text{Im } \varphi$ (который содержит все образующие $\hat{\rho}_i$) есть *подгруппа* группы $\mathcal{W}$. Так как множество $\text{Im } \varphi$, очевидно, замкнуто относительно взятия обратного элемента (ибо ρ_i и $\hat{\rho}_i$ — инволюции), то достаточно показать, что множество $\text{Im } \varphi$ замкнуто относительно левого умножения на все элементы $\hat{\rho}_{i(0)}$. Пусть, скажем, выражение $\rho_{i(0)}\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}$ приведено. Тогда $\hat{\rho}_{i(0)}\varphi(\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}) = \varphi(\rho_{i(0)} \dots \rho_{i(t)})$ и доказывать нечего. В противном случае условие замены позволяет нам записать $\rho_{i(0)}\rho_{i(1)} \dots \rho_{i(s-1)}\rho_{i(s+1)} \dots \rho_{i(t)} = \rho_{i(1)} \dots \rho_{i(t)}$. Ввиду шага (1) соответствующее уравнение справедливо в $\mathcal{W}$. Умножая обе части этого уравнения на $\hat{\rho}_{i(0)}$ (заметим, что $\hat{\rho}_{i(0)}^2 = e$), заканчиваем доказательство теоремы. $\square$

Особенностью группы Кокстера (такой, как $\mathcal{W}$) является то, что ее определяющие соотношения возникают из подгрупп (Кокстера) ранга ≤ 2 . В § 32 мы увидим, что подобное явление имеет место для редуктивных алгебраических групп, что позволит нам свести проблему классификации к случаю ранга 2.

29.5. Нормальные подгруппы группы G .

Лемма. Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда существует разложение $S = I \cup J$ такое, что элементы множеств I и J попарно перестановочны и $HB = P_I$.

Доказательство. Так как группа H нормальна, то HB — параболическая подгруппа, и, следовательно, HB совпадает с некоторой группой P_I (теорема 29.3(a)). Пусть $J = S - I$. Мы должны показать, что I и J поэлементно перестановочны. Пусть $I' = \{\rho \in S \mid \text{Br}\rho \cap H \neq \emptyset\}$. Мы утверждаем, что $I = I'$. Так как $HB = P_I$, то включение $I \subset I'$ очевидно. Обратно, если $\text{Br}\rho$ имеет пересечение с H , то $\text{Br}\rho \subset HB$, так что по теореме 29.2 $\rho \in I$.

Возьмем теперь $\rho \in I$, $\rho' \in J$. Ясно, что $l(\rho\rho') \geq 1 = l(\rho)$, так что лемма А в (29.3) показывает, что $\rho\text{Br}\rho' \subset \text{Br}\rho'\text{Br}\rho$, или $\rho'\text{Br}\rho\rho' \subset \rho'\text{Br}\rho\rho'\text{Br}\rho \subset \text{Br}\rho'\text{Br} \cup \text{Br}\rho'\rho\rho'\text{Br}$ (Т1). Ввиду предыдущего абзаца группа H имеет нетривиальное пересечение с $\text{Br}\rho$; так как группа H нормальна,

то она также имеет пересечение с сопряженным множеством $\rho' B \rho B \rho' (\rho'^2 = e)$, которое содержится в указанном объединении двойных смежных классов. Следовательно, группа H имеет пересечение с одним из этих классов и либо $\rho\rho'$, либо $\rho'\rho\rho'$ принадлежит W_I . Первое невозможно, так как $\rho'\rho\rho' \in W_I \cap W_{\{\rho, \rho'\}} = W_{I \cap \{\rho, \rho'\}} = W_{\{\rho\}} = \{e, \rho\}$ (здесь мы воспользовались теоремой 29.3 (г), см. упражнение 5). Ясно, что $\rho'\rho\rho' \neq e$, так что $\rho'\rho\rho' = \rho$, откуда следует, что элементы ρ и ρ' перестановочны. $\square$

Любое разбиение множества S на два подмножества I, J , элементы которых попарно перестановочны, приводит к разложению группы W в прямое произведение $W_I \times W_J$. Если никакое разложение такого рода невозможно, то мы говорим, что группа **неприводима**. В этом случае нормальная подгруппа группы G должна быть (в соответствии с леммой) довольно «большой» или содержаться в B и, следовательно, во всех подгруппах, сопряженных с B . Запишем $Z = \bigcap_{x \in G} Bx^{-1}$. (Если G — редуктивная группа, то Z — центр группы G). Для того чтобы получить полезный критерий простоты, необходимо наложить дальнейшие ограничения.

Теорема. Пусть группа W неприводима и предположим, что группа G порождается группами, сопряженными с некоторой нормальной подгруппой U группы B . Если $G = (G, G)$, то группа G/Z проста, или тривиальна.

Доказательство. Требуется доказать, что нормальная подгруппа H группы G , не содержащаяся в Z , совпадает с G . Используя лемму и неприводимость группы W , мы получаем, что $G = HB$. Нормальность группы U в B ведет к тому, что подгруппа HU содержит все HB -сопряженные с U подгруппы (т.е. все G -сопряженные); эти последние порождают G , так что в действительности $G = HU$.

Стандартная теорема об изоморфизмах показывает, что $U/(U \cap H) \cong HU/H \cong G/H$. В левой части стоит разрешимая группа (так как группа U разрешима), тогда как в правой части — ее коммутант (так как группа G совпадает со своим коммутантом), следовательно, $G = H$. $\square$

Следствие. Пусть G — простая алгебраическая группа, Z — ее (конечный) центр. Тогда группа G/Z проста как абстрактная группа.

Доказательство. Примем в теореме 27.5 в качестве U группу B_u (или даже саму $B!$). $\square$

Заметим, что для конечных (или других) подгрупп алгебраической группы, не совпадающих со своими коммутантами, необходима менее ограничительная формулировка теоремы, доказанной выше. (Пример: группа $PGL(2, k)$, где k — подполе поля K ; коммутант, как правило, совпадающий с $PSL(2, k)$, может быть ее собственной подгруппой). Пусть, как и ранее, группа W неприводима. Потребуем, чтобы U была нормальной разрешимой подгруппой группы B , для которой $B = TU$, и чтобы $G' = (G', G')$, где G' — (нормальная) подгруппа группы G , порожденная всеми подгруппами, сопряженными с U . Тогда можно показать, что каждая подгруппа группы G , нормализуемая G' , содержится в Z либо содержит G' ; в частности, группа $G'/(G' \cap Z)$ проста (или тривиальна).

Упражнения

Здесь (G, B, N, S) — система Титса с группой Вейля W .

1. Доказать, что для каждого подмножества $I \subset S$ четверка (P_I, B, N_I, I) есть система Титса с группой Вейля W_I ; здесь через N_I обозначается прообраз группы W_I в N .

2. Если аксиому (T2) заменить условием $\rho B \rho^{-1} \not\subset B$ ($\rho \in S$), то факт, что множество S состоит из инволюций, можно вывести из других предположений. (Заметить, что двойные смежные классы $B \rho^{-1} B$ и $B \rho B$ имеют общие элементы, так что $B \subset B \rho B \rho B$.)

3. Пусть $\sigma = \rho_1 \dots \rho_k$, причем $l(\sigma) = k$. Доказать, что $B \sigma B = (B \rho_1 B)(B \rho_2 B) \dots (B \rho_k B)$. (Воспользоваться леммой 29.3А.)

4. Вывести из леммы 29.3Б, что множество элементов $\rho \in S$, которые появляются в приведенном выражении для элемента $\sigma \in W$, однозначно определяется элементом σ .

5. Доказать, что $W_I \cap J = W_I \cap W_J$ при $I, J \subset S$.

6. Пусть I — множество индексов, и пусть G' — группа, действующая на I дважды транзитивно. Зафиксируем различные индексы $i, j \in I$ и положим $B' = \{\pi \in G' \mid \pi(i) = i\}$, $N' = \{\pi \in G' \mid \pi(i, j) = \{i, j\}\}$. Показать, что группа $T' = B' \cap N'$ нормальна в N' и что порядок группы $W' = N'/T'$ равен 2. Если $S' = \{\rho\}$, где ρ порождает W' , то доказать, что (G', B', N', S') — система Титса ранга 1.

7. Пусть (G, B, N, S) — система Титса ранга 1 и $S = \{\rho\}$, так что $G = B \cup B \rho B$. Группа G действует на G/B (при помощи левых умножений), причем $B = \{x \in G \mid xB = B\}$. Пусть N — подгруппа группы G , оставляющая инвариантным множество $\{B, \rho B\}$. До-

казать, что G действует дважды транзитивно на G/B (см. упражнение 6).

8. Система Титса называется **насыщенной**, если $\prod_{x \in N} xBx^{-1} = T$ (в общем случае это пересечение содержит T). Обозначим это пересечение через T' , и пусть $N' = \langle N, T' \rangle$. Доказать, что группа $W' = N'/T'$ канонически изоморфна группе $W = N/T$. Если множество S' соответствует S (при этом изоморфизме), то доказать, что (G, B, N', S') — насыщенная система Титса (с группой Вейля W').

9. Доказать, что множество S можно единственным образом разбить на множества $I_1, \dots, I_t$, элементы которых попарно коммутируют, так что $W = W_{I_1} \times \dots \times W_{I_t}$ и никакое дальнейшее такое разбиение невозможно.

10. В доказательстве теоремы 29.5 показать, что предположение о том, что группа U разрешима, можно ослабить, требуя только, чтобы каждый нетривиальный гомоморфный образ группы U был отличен от своего коммутанта (например, этому требованию удовлетворяет симметрическая группа S_n).

Замечания. По поводу систем Титса и их применений к конечным группам лиевского типа см. Титс [3], [5], [6], [7], [12] и др., Бурбаки [1, гл. 4], Картер [1], Кэртис [3].

§ 30. Параболические подгруппы

Мы вернемся к ситуации § 28: пусть G — редуктивная группа, T — ее максимальный тор, B — борелевская подгруппа, содержащая T , и Δ — соответствующая база системы корней Φ .

Исходя из общего описания параболических подгрупп в системах Титса (29.3), мы исследуем более подробно внутреннее строение таких подгрупп группы G . В частности, мы покажем, что параболическая подгруппа есть полупрямое произведение своего унипотентного радикала и редуктивной подгруппы, причем последняя определена однозначно с точностью до сопряженности (30.2). Затем мы используем параболические подгруппы для того, чтобы получить дальнейшую информацию об унипотентных подгруппах группы G . Значительная часть материала этого параграфа существенна в приложениях алгебраических групп, но только (30.1) потребуется для классификационной теории в главе XI.

30.1. Стандартные параболические подгруппы. Для систем Титса теорема 29.3 утверждает, что классы сопряженных параболических подгрупп группы G взаимно однозначно соответствуют группам, содержащим B . Мы

будем называть эти последние **стандартными параболическими подгруппами** группы G (относительно B). Они взаимно однозначно соответствуют 2^l подмножествам базы корней Δ ($l = \text{rank}_{ss}(G)$), — множеству $I \subset \Delta$ соответствует группа $P_I = BW_I B$. Здесь W_I — подгруппа группы W , порожденная $\{\sigma_\alpha | \alpha \in I\}$. Конечно, все они могут быть получены непосредственно из разложения Брюа группы G , без формализма, развитого в § 29. (Отметим, что мы используем здесь I для обозначения подмножества множества Δ , тогда как в § 29 мы обозначали через I подмножество множества $\{\sigma_\alpha | \alpha \in \Delta\}$.)

Ясно, что $\mathcal{L}(P_I) = \mathfrak{t} \oplus \coprod \mathfrak{g}_\alpha$, где α пробегает некоторое множество корней Θ , содержащее Φ^+ . Наша первая задача состоит в описании множества Θ . Так как глобальные и инфинитезимальные централизаторы торов согласованы (18.4), то мы видим, что **отрицательный корень α принадлежит Θ тогда и только тогда, когда $Z_\alpha \subset P_I$** . По построению, если $\sigma_\alpha \in W_I$, то $Z_\alpha = B_\alpha \cup B_\alpha \sigma_\alpha B_\alpha \subset P_I$ (где $B_\alpha = B \cap Z_\alpha$). Далее, W_I — группа Вейля системы корней, состоящей из всех $\mathbb{Z}$ -линейных комбинаций множества I в Φ (Д.6). Отсюда следует, что все такие корни принадлежат Θ . Обратно, предположим, что пара $\{\alpha, -\alpha\}$ содержится в Θ . Тогда $\sigma_\alpha \in W_I$ в силу единственности разложения Брюа. Это в свою очередь показывает, что корень α ортогонален ортогональному дополнению подпространства, натянутого на I (в евклидовом пространстве E , содержащем Φ); таким образом, α есть линейная комбинация над $\mathbb{R}$ элементов множества I , и, следовательно, $\mathbb{Z}$ -линейная комбинация (ибо α — корень).

В итоге получаем следующий результат.

Теорема. (а) *Каждая параболическая подгруппа группы G сопряжена с одной и только одной подгруппой $P_I = BW_I B$, где $I \subset \Delta$.*

(б) *Корнями группы P_I относительно T являются все элементы множества Φ^+ , а также те элементы из Φ^- , которые представимы в виде $\mathbb{Z}$ -линейной комбинации элементов множества I . □*

30.2. Разложение Леви. Рассмотрим унипотентный радикал $V = R_u(P_I)$ стандартной параболической подгруппы. В двух крайних случаях $I = \Delta$; $I = \emptyset$ нет нужды описывать V . В общем случае группа V является инва-

риантной относительно T подгруппой группы $U = B_u$ и, следовательно, представима в виде произведения (в любом порядке) тех групп U_α , которые она содержит (28.1). Мы утверждаем, что эти корни α в точности совпадают с множеством положительных корней, не лежащих в Ψ , — подсистеме системы корней Φ , порожденной множеством I . В самом деле, T изоморфно отображается в максимальный тор редуктивной группы P_I/V (так как $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{v} = 0$), корни которого можно, следовательно, отождествить с некоторыми парами корней $\pm\alpha$ группы P_I относительно T . В силу теоремы 30.1 (б) все такие пары должны лежать в Ψ . С другой стороны, никакая пара $\pm\alpha$ не может появиться в $\mathfrak{v}$, откуда следует наше утверждение.

Алгебра Ли группы P_I представима в виде $\mathfrak{l} + \mathfrak{v}$ (прямая сумма), где $\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Так как $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, то $\mathfrak{l}$ — даже подалгебра, тогда как $\mathfrak{v}$ — идеал (ибо $V \triangleleft P_I$). Имеется ли соответствующее разложение группы P_I в виде полупрямого произведения LV ? Если да, то мы будем называть его **разложением Леви**, а L будем называть **фактором Леви**. Заметим, что группа L должна **быть** редуктивна. (В общем случае такое разложение (редуктивное расширение унипотентного радикала) существует в произвольной связной алгебраической группе, если $\text{char } K = 0$, но не всегда существует, если характеристика поля K проста.)

Для группы P_I имеется несколько подходов для того, чтобы построить группу L . Мы могли бы, например, взять подгруппу, порожденную T и всеми группами U_α ($\alpha \in \Psi$). Но тогда нам пришлось бы доказывать, что эта группа не слишком велика, т. е. не содержит групп U_α с $\alpha \notin \Psi$. Другой вариант: мы могли бы построить L как множество, ибо мы знаем, как должно выглядеть его разложение Брюа, а затем проверить, что это множество является группой. Для этой цели мы могли бы взять в качестве кандидата на борелевскую подгруппу группы L группу $B' = B^- \cap P_I$ (где B^- — борелевская подгруппа группы G , противоположная B относительно T), так что $L = B'W_I B'$.

Более удовлетворителен третий подход. Мы начнем с тора $Z = \left(\bigcap_{\alpha \in I} \text{Ker } \alpha \right)^0$ и положим $\tilde{L} = C_G(Z)$. Тогда

группа L автоматически редуктивна ввиду следствия 26.2А. Те корни, которые тривиальны на Z , являются в точности корнями, лежащими в Ψ , (так как характеры тора T , тривиальные на Z , являются $\mathbb{R}$ -линейными комбинациями элементов множества I). В частности, $I = i \oplus \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha (\alpha \in \Psi) \subset \mathcal{L}(P_I)$. Так как глобальные и инфинитезимальные централизаторы торов согласованы, то $L \subset P_I$ и, далее, $P_I = LV$ (так как алгебра Ли этой подгруппы есть $\mathcal{L}(P_I)$). Так как $I \cap \mathfrak{v} = 0$, то группа $L \cap V$ конечна, а также инвариантна относительно T ; поэтому $L \cap V = e$ (28.1). Полупрямое произведение $P_I = L \ltimes V$ является не только теоретико-групповым: так как дифференциал отображения произведения $\pi: L \times V \rightarrow P_I$ есть изоморфизм векторных пространств $I \oplus \mathfrak{v} \rightarrow \mathcal{L}(P_I)$, то можно показать, что π — изоморфизм многообразий. (Но мы не будем преследовать здесь этой цели.)

Заметим, что Z — не что иное, как связный центр группы L , так что $ZV = R(P_I)$. Если L' — другой фактор Леви группы P_I , то, очевидно, его связный центр Z' также является максимальным тором в группе $R(P_I)$ и $L' = C_G(Z')$. Но тогда $xZ'x^{-1} = Z$ для некоторого элемента $x \in V$ (теорема 19.3), так что мы имеем $xL'x^{-1} = L$. Тем самым установлена

Теорема. *Любая параболическая подгруппа P группы G обладает разложением Леви $P = LV$ ($V = R_u(P)$) и любые два фактора Леви сопряжены при помощи некоторого элемента из группы V $\square$*

Если $P \neq G$, то мы имеем $V \neq e$. Таким образом, редуктивная группа L имеет меньший полупростой ранг, чем G . Это дает весьма полезный индуктивный метод для изучения различных свойств редуктивных групп (например, представлений).

30.3. Параболические подгруппы, ассоциированные с некоторыми унипотентными подгруппами. Пусть U — замкнутая, но не обязательно связная унипотентная подгруппа группы G . Положим $N_1 = N_G(U)$, $U_1 = U \cdot R_u(N_1)$ и затем (индуктивно) $N_i = N_G(U_{i-1})$, $U_i = U_{i-1} \cdot R_u(N_i)$. Так как унипотентные радикалы связны, то, очевидно, либо $\dim U_{i+1} > \dim U_i$, либо $U_{i+1} = U_i$. В частности, эти две последовательности замкнутых подгрупп группы G должны стабилизироваться, скажем, $U_k = U_{k+1} = \dots$, $N_k = N_{k+1} = \dots$. Положим $\mathcal{P}(U) = N_k$, $V = U_k$. Преж-

де всего мы заметим, что любой автоморфизм группы $\mathcal{U}$ вида $\text{Int } x$ ($x \in G$) оставляет группу N_1 инвариантной и, следовательно, группа $R_u(N_1)$, группа $U_1, \dots$, и, далее, группа $\mathcal{P}(U)$ инвариантны относительно $\text{Int } x$. Следовательно, группа $N_G(U)$ нормализует $\mathcal{P}(U)$.

Предположим далее, что группа U содержится в некоторой борелевской подгруппе группы G (этого нельзя гарантировать, если группа U не связна!). В силу следующей леммы каждая группа U_i содержится тогда в борелевской подгруппе.

Лемма. Пусть H — алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа и A — подмножество группы B . Если S — связная разрешимая подгруппа группы H , нормализующая A , то $S \cdot A$ содержится в некоторой борелевской подгруппе группы H .

Доказательство. По предположению (замкнутое) множество X неподвижных относительно A точек на многообразии H/B непусто, и множество X инвариантно относительно S . Так как группа S связна и разрешима, то она имеет на X неподвижную точку (21.2), т. е. содержится в борелевской подгруппе, содержащей A . $\square$

Возвратимся к нашей конструкции. Группа $V = U_\kappa$ содержит унитарный радикал группы $N_G(V)$, а также группу U . Предполагая, что U (и, следовательно,) V содержится в некоторой борелевской подгруппе, мы будем доказывать, что группа $\mathcal{P}(U)$ является параболической и что группа V связна. Отсюда будет следовать, что $N_G(U) \subset \mathcal{P}(U)$, так как параболические подгруппы совпадают со своими нормализаторами (следствие 23.1Б), а также что $U \subset R_u(\mathcal{P}(U)) = V$.

Предложение. Пусть V — замкнутая унитарная подгруппа группы G и $N = N_G(V)$. Предположим, что V содержится в некоторой борелевской подгруппе группы G и что $V \supset R_u(N)$ (это равносильно тому, что $V^0 = R_u(N)$). Тогда N — параболическая подгруппа группы G и $V = R_u(N)$.

Доказательство. Пусть B — борелевская подгруппа группы G , содержащая V ; положим $S = (B \cap N)^0$. Тогда S содержится в борелевской подгруппе B_1 группы N , и мы можем выбрать «противоположную» группу nB_1n^{-1} ($n \in N$), так что $R_u(B_1 \cap nB_1n^{-1}) = R_u(N)$ (применить следствие 26.2В к группе $N^0/R_u(N)$). Благодаря такому

выбору мы имеем $R_u(N \cap B \cap B') \subset R_u(N) = V^0$, где $B' = nBn^{-1}$. С другой стороны, элемент n нормализует V , так что V лежит в унипотентном радикале разрешимой группы $N \cap B \cap B'$, откуда $V^0 = R_u(N \cap B \cap B')$. Далее, группа $B \cap B'$ связна (следствие 28.3), так что $V \subset \subset R_u(B \cap B')$. Если $\dim(V) < \dim(R_u(B \cap B'))$, то нормализатор группы V в этой группе должен был бы иметь большую размерность, чем размерность группы V (предложение 17.4(б)), что противоречит равенству $R_u(N \cap B \cap B') = V^0$. Следовательно, $V = R_u(B \cap B')$, откуда $B \cap B' \subset N$ (и группа V связна). Но $B \cap B'$ содержит максимальный тор T группы G (следствие 28.3), так что группа N — *максимального ранга в G* .

Покажем теперь, что группа N является параболической. Пусть Δ — база системы корней Φ , определенная группой B , и пусть Ψ — множество корней группы N относительно T : это в точности те корни $\alpha \in \Phi$, для которых $U_\alpha \subset V$, а также пары $\pm\beta$, соответствующие корням редуктивной группы N^0/V относительно канонического образа тора T . Пусть $\alpha \in \Delta$. Если $U_\alpha \subset V$, то $\alpha \in \Psi$. В противном случае $U_\alpha \subset B$; но $U_\alpha \not\subset V$, откуда $U_\alpha \not\subset B$ и в свою очередь $U_{-\alpha} \subset B'$. Пусть $B'' = \sigma_\alpha B \sigma_\alpha$ корни группы B'' совпадают с корнями группы B с той лишь разницей, что корень $-\alpha$ заменяется на α : простое отражение σ_α переставляет положительные корни, отличные от α (Д.5). Теперь группа $U_{-\alpha}$ нормализует обе группы B' и $R_u(B \cap B'')$; следовательно, $R_u(B \cap B' \cap B'') = R_u(B \cap B') = V$. Таким образом, $-\alpha \in \Psi$. Поскольку $U_{-\alpha} \not\subset V$, то корни $\pm\alpha$ должны принадлежать Ψ . Отсюда следует, что $\Delta \subset \Psi$ и, далее, что $B \subset N$.

Теперь мы можем сделать вывод, что группа N — параболическая; в самом деле, N — стандартная параболическая подгруппа (относительно B , T), определенная подмножеством $\{\alpha \in \Delta \mid U_\alpha \not\subset V\}$. $\square$

Из рассуждения, предшествующего предложению, мы непосредственно получаем

Следствие А. Пусть U — замкнутая унипотентная подгруппа группы G , содержащаяся в некоторой борелевской подгруппе. Тогда группа $P = \mathcal{P}(U)$, построенная выше, является параболической, причем $N_0(U) \subset P$ и $U \subset \subset R_u(P)$. $\square$

Поскольку каждая *связная* унипотентная группа всегда лежит в некоторой борелевской подгруппе, то мы также имеем

Следствие Б. Пусть U — *связная* унипотентная подгруппа группы G . Если $U = R_u(N_G(U))$, то группа $N_G(U)$ — *параболическая*. $\square$

30.4. Максимальные подгруппы и максимальные унипотентные подгруппы. Результаты (30.3) приводят к следующей довольно удивительной теореме.

Теорема. (а) Пусть H — *максимальная (собственная) замкнутая подгруппа* группы G . Тогда либо группа H^0 *редуктивна*, либо группа H *параболическая*.

(б) Каждая унипотентная подгруппа группы G содержится в некоторой борелевской подгруппе; в частности, *максимальные унипотентные подгруппы* группы G есть *унипотентные радикалы борелевских подгрупп*.

Доказательство. (а) Если группа H^0 не является редуктивной, то группа $U = R_u(H)$ нетривиальна. Так как группа G редуктивна, то $N_G(U)$ — *собственная замкнутая подгруппа* группы G , содержащая H . Из максимальной H следует, что $H = N_G(U)$. Из следствия Б в (30.3) вытекает тогда, что H — *параболическая группа*.

(б) Воспользуемся индукцией по $\dim G$. Пусть U — унипотентная подгруппа группы G (не обязательно замкнутая или *связная*), причем $U \neq e$. Так как группа U нильпотентна (17.6), то ее центр нетривиален. Выберем элемент $e \neq u \in Z(U)$. Замыкание U_1 подгруппы, порожденной u , содержится в унипотентной части некоторой борелевской подгруппы группы G , поскольку элемент u обладает этим свойством (по теореме плотности (22.2)). Поэтому из следствия А в (30.3) мы получаем параболическую подгруппу $P = \mathcal{P}(U_1)$ такую, что $U \subset \subset N_G(U_1) \subset P$ и $e \neq U_1 \subset R_u(P)$. В частности, $P \neq G$. Перейдем к редуктивной группе $P/R_u(P)$, размерность которой меньше, чем размерность группы G . Образ группы U является унипотентной группой (15.3) и, следовательно, содержится (по индукции) в некоторой борелевской подгруппе группы $P/R_u(P)$. Отсюда следует, что группа U содержится в некоторой борелевской подгруппе группы P , которая в свою очередь лежит в борелевской подгруппе группы G (на самом деле, совпадает с ней). $\square$

Отметим, что утверждение (б) можно распространить на произвольную связную группу G (не обязательно редуктивную). В характеристике 0 все унитарные группы, как известно, связны (упражнение 15.6), так что мы ничего нового не доказали. В характеристике p утверждение (б) в действительности означает, что максимальные « p -подгруппы» группы G существуют и сопряжены (ср. с теоремой Силова для конечных групп).

Упражнения

1. Найти стандартные параболические подгруппы группы $GL(n, K)$ (относительно группы $T(n, K)$) и определить их размерности. Описать их факторы Леви.

2. Описать параболические подгруппы группы $Sp(4, K)$ и их факторы Леви.

3. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G , содержащая T и по меньшей мере одну из групп $U_\alpha, U_{-\alpha}$ (для каждого корня $\alpha \in \Phi$). Доказать, что группа H параболическая. (Пример: $H = (P \cap P')R_u(P)$, где P и P' — параболические подгруппы.)

4. Верно ли, что всякий элемент группы G принадлежит некоторой (собственной) максимальной замкнутой подгруппе?

Замечания. Рассуждения в (30.1), (30.2) основаны на статье Бореля и Титса [1]; однако они рассматривают также поля определения. Точно так же материал п.п. (30.3) и (30.4) заимствован у Бореля и Титса [2] *). Утверждение (б) теоремы 30.4 в существенных чертах принадлежит Платонову [2].

*) Как отмечают Борель и Титс [2], предложение 30.3 фактически принадлежит В. П. Платонову [4]. — *Прим. перев.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

Для того чтобы классифицировать (с точностью до изоморфизма) полупростые алгебраические группы, необходимо получить некоторую информацию об их представлениях. Для этой цели существенны пп. (31.1) — (31.3) и начало п. (31.4). Читателю, конечно, стоит прочитать оставшуюся часть § 31, несмотря на то, что это несущественно для дальнейшего изложения.

§ 31. Представления

В этом параграфе мы изучаем рациональные представления полупростой группы G . Подобно теории Картана — Вейля для полупростых алгебр Ли над полем комплексных чисел, неприводимые представления оказываются возможным параметризовать «старшими весами». Пусть T — максимальный тор группы G , $B = TU$ — подгруппа Бореля, содержащая T , и $B^- = T^-U^-$ — противоположная борелевская подгруппа, содержащая T , и Δ — база системы корней Φ , определенной B .

31.1. Веса. Если $\rho: G \rightarrow GL(V)$ — рациональное представление, то **весами** представления ρ называются образы в $X(T)$ весов тора $\rho(T)$ в V (16.4) при каноническом гомоморфизме $X(\rho(T)) \rightarrow X(T)$. Разумеется, представление ρ имеет только конечное число ненулевых весов, поскольку пространство V конечномерно. Часто удобно рассматривать пространство V как G -модуль, так что **весовое пространство** V_λ описывается в виде $\{v \in V \mid t \cdot v = \lambda(t)v \text{ для всех } t \in T\}$. Мы называем $\dim V_\lambda$ **кратностью** веса λ . Заметим, что W переставляет веса представления ρ . Более точно, если элемент $n \in N_G(T)$ является представителем элемента $\sigma \in W$, то $n \cdot V_\lambda = V_{\sigma(\lambda)}$; таким образом, кратности весов в одной W -орбите равны.

Всегда существует изоморфизм группы G на некоторую замкнутую подгруппу группы $GL(V)$ для подходящего V (8.6). Веса этого представления порождают группу $X(T)$. В общем случае $\text{Кег } \rho$ — замкнутая нормальная подгруппа группы G , для которой имеется ограниченное число возможностей (27.5). Например, если группа G почти проста, $\text{Кег } \rho$ либо совпадает с группой G , либо является конечной нормальной (и, следовательно, центральной) подгруппой. В этом последнем случае веса представления ρ порождают подгруппу конечного индекса в $X(T)$. Если $\rho = \text{Ad}$, то это справедливо для любой полупростой группы (следствие 26.2Б(е)). Веса присоединенного представления — это в точности корни (каждый с кратностью 1) с добавлением тривиального веса 0 (с кратностью $l = \text{rank } G$).

Посмотрим, что мы можем сказать о весах произвольного рационального представления $\rho: G \rightarrow GL(V)$. Применяя предложение 27.2 к группе $\rho(G)$, которая либо полупроста, либо тривиальна, и возвращаясь обратно к G , мы видим, что для любого $\alpha \in \Phi$ группа $\rho(U_\alpha)$ отображает весовое пространство V_λ в $\sum V_{\lambda+k\alpha}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Отсюда следует, что $\rho(Z_\alpha)$ оставляет инвариантным пространство $\sum V_{\lambda+k\alpha}$ ($k \in \mathbb{Z}$); в частности, $\sigma_\alpha(\lambda)$ имеет вид $\lambda + k\alpha$. Но с точки зрения теории абстрактных систем корней (27.1) элемент σ_α действует в пространстве $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$ как отражение; $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$ (где скалярное произведение W -инвариантно). Отсюда следует, что число $\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ является *целым*. Следовательно, по определению λ — **абстрактный вес** (Д.9).

Абстрактные веса в пространстве E образуют решетку Λ (свободную абелеву группу ранга l), которая содержит решетку корней Λ_r в качестве подгруппы конечного индекса. Если $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, то Λ обладает базисом $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, состоящим из **фундаментальных доминантных весов**, определенных условиями $2(\lambda_i, \alpha_j) / (\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$. Напомним далее, что каждый абстрактный вес сопряжен относительно группы W в точности с одним доминантным весом (вес $\sum c_i \lambda_i$ ($c_i \in \mathbb{Z}$) называется **доминантным**, если $c_i \geq 0$ (Д.10)).

Комбинируя эти замечания, мы приходим к выводу, что *все веса рациональных представлений являются абстрактными весами*; отсюда можно вывести, что группа $X(T)$ состоит из абстрактных весов и индекс решетки корней в $X(T)$ ограничен константой, зависящей только от Φ . Например, пусть $\text{rank } G = 1$. Тогда $\lambda_1 = \alpha_1/2$, так что $[\Lambda: \Lambda_r] = 2$. Поэтому имеется только две возможности для расположения группы $X(T)$. В общем случае мы называем факторгруппу $\Lambda/X(T)$ **фундаментальной группой** группы G (ввиду аналогии с топологией компактных групп Ли) и обозначаем ее через $\pi(G)$. Если группа $\pi(G)$ тривиальна, то мы называем группу G **односвязной** (или группой **универсального типа**). В противоположном крайнем случае, когда $X(T) = \Lambda_r$, мы называем D группой **присоединенного типа** (такова, например, группа $\text{Ad } G$ для любой полупростой группы G). В этой терминологии группа $SL(2, K)$ односвязна, а группа $PGL(2, K)$ присоединенного типа. Очевидно, что фундаментальная группа группы G — важный инвариант, который следует принимать во внимание, если мы желаем прийти к классификации полупростых групп.

31.2. Максимальные векторы. Если $\rho: G \rightarrow GL(V)$, $V \neq 0$ — рациональное представление, то в силу теоремы Ли — Колчина существует одномерное подпространство пространства V , инвариантное относительно $\rho(B)$. По определению **максимальный вектор** $v \in V$ — это вектор, порождающий такое подпространство; это эквивалентно тому, что вектор $v \neq 0$ принадлежит некоторому весовому подпространству V_λ и неподвижен относительно всех групп $\rho(U_\alpha)$, $\alpha > 0$. Понятие максимального вектора зависит, разумеется, от выбора группы B . В дальнейшем мы без специальных оговорок исключаем случай $V = 0$ (но не случай $\dim V = 1$); поэтому максимальные векторы всегда существуют.

Предложение. Пусть V — (рациональный) G -модуль, v^+ — максимальный вектор с весом λ и V' — G -подмодуль, порожденный v^+ . Тогда веса пространства V' имеют вид $\lambda - \sum c_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Phi^+$, $c_\alpha \in \mathbb{Z}^+$) и вес λ имеет кратность 1. Кроме того, V' обладает единственным максимальным подмодулем.

Доказательство. Как отмечалось в (31.1), из предложения 27.2 следует, что для любого α группа U_α ото-

бражает V_λ в пространство $\sum V_{\lambda+k\alpha}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$). Точнее, если $x \in U_\alpha$, то $x \cdot v^+ = v^+ +$ (сумма векторов с весами $\lambda + k\alpha$, $k > 0$). В результате последовательного применения операторов из U^- получаются, следовательно, суммы векторов с весами $\lambda - \sum c_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Phi^+$, $c_\alpha \in \mathbb{Z}^+$), причем единственный вектор веса λ , который может таким образом появиться, есть v^+ . Далее, подпространство, натянутое на векторы $U^- \cdot v^+$, совпадает с подпространством, натянутым на векторы $U^- \cdot B \cdot v^+ = \Omega v^+$, причем, как известно, множество Ω плотно в G (28.5). Следовательно, рассматриваемое подпространство совпадает с подпространством V' , натянутым на векторы $G \cdot v^+$. Наконец, каждый собственный подмодуль в V' есть сумма весовых пространств весов, отличных от λ , так что сумма всех этих подмодулей — собственный подмодуль. $\square$

Решетка Λ абстрактных весов частично упорядочена следующим образом: $\lambda > \mu$, если $\lambda - \mu$ — сумма (возможно, 0) положительных корней (Д.10). Таким образом, предложение показывает, что λ — **старший вес** пространства V' , т. е. все другие веса $< \lambda$. Соображение, которое показывает, что каждый абстрактный вес W -сопряжен в точности с одним доминантным весом, позволяет также сделать вывод, что доминантный вес λ удовлетворяет условию: $\lambda > \sigma(\lambda)$ для всех $\sigma \in W$ (Д.10). Так как W действует как группа перестановок весов пространства V' , то мы получаем

Следствие. В обозначениях предложения λ — **доминантный вес**. $\square$

31.3. Неприводимые представления. Напомним, что G -модуль $V \neq 0$ называется **неприводимым**, если он не содержит G -инвариантных подпространств, отличных от 0 и от V . Примером такого модуля может служить пространство $V = K^n$, на котором естественным образом действует группа $G = SL(n, K)$, так как G транзитивно перемещает все одномерные подпространства пространства V . Произвольный G -модуль V , будучи конечномерным, обладает композиционным рядом с неприводимыми композиционными факторами, что естественно приводит к вопросу о том, как выглядят неприводимые модули.

Отметим, что в характеристике 0 можно воспользоваться теоремой Вейля о полной приводимости, чтобы

показать, что каждый G -модуль представим в виде прямой суммы неприводимых подмодулей, см. (14.3); но в простой характеристике этот факт не имеет места. Имеется, однако, более слабое условие, называемое **полуредуктивностью**, которому удовлетворяют все редуктивные группы: если задан G -модуль V с максимальным подмодулем W коразмерности 1, такой, что G действует тривиально на V/W , скажем, $V = Ku + W$, то имеется симметрическая степень модуля V , содержащая G -инвариантный полином, в который входит u . Это свойство было высказано в виде предположения Мамфордом [1] и недавно доказано Хабоушем *), см. Сешадри [3]. Оно эквивалентно свойству конечной порожденности колец инвариантов, как в (14.3); см. Нагата [2].

Предложение 31.2 показывает, что в случае, если пространство V неприводимо, оно должно совпадать с подмодулем V' , порожденным максимальным вектором. В свою очередь λ заслуживает особого внимания.

Теорема. Пусть V — неприводимый (рациональный) G -модуль.

(а) Имеется единственное одномерное подпространство, инвариантное относительно B , натянутое на максимальный вектор некоторого доминантного веса λ , кратность которого равна 1 (λ называется старшим весом G -модуля V).

(б) Все другие веса G -модуля V имеют вид $\lambda - \sum c_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Phi^+$, $c_\alpha \in \mathbb{Z}^+$). Они переставляются группой W , причем веса, сопряженные относительно W , имеют одинаковую кратность.

(в) Если V' — другой неприводимый G -модуль со старшим весом λ' , то G -модули V , V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda'$.

Доказательство. (а) (б) Мы уже отмечали, что в силу предложения 31.2 G -модуль V порождается некоторым максимальным вектором v^+ с (доминантным) весом λ , что вес λ имеет кратность 1 и что все другие веса меньше λ относительно частичного упорядочения. Если пространство V имеет максимальный вектор, непропорциональный v^+ , то его вес μ должен быть отличен от λ и $\mu < \lambda$. Но это же соображение, примененное к μ , дает

*) См. Хабоуш [2] (дополнительная библиография). — Прим. ред.

$\lambda < \mu$, что невозможно. Это доказывает все утверждения в (а) и (б), кроме последнего утверждения в (б), которое уже было установлено в (31.1).

(в) Если G -модули V, V' изоморфны, то из (а) сразу следует, что $\lambda = \lambda'$. Для доказательства обратного рассмотрим G -модуль $V \oplus V'$ и его проекции на V, V' (которые являются гомоморфизмами G -модулей). Пусть $v \in V, v' \in V'$ — соответствующие максимальные векторы веса $\lambda = \lambda'$. Тогда (v, v') — максимальный вектор веса λ в $V \oplus V'$, так что подмодуль V'' , порожденный вектором (v, v') , содержит вес λ только с кратностью 1 (31.2). Рассматривая V и V' как подмодули модуля $V \oplus V'$, мы, в частности, заключаем, что $v \notin V'', v' \notin V''$ (ни один из этих векторов не пропорционален вектору (v, v')). Таким образом, $V \cap V'', V' \cap V''$ — собственные подмодули модулей V, V' , следовательно, нулевые (ввиду неприводимости). Это показывает, что обе проекции отображают V'' изоморфно на (ненулевые) подмодули модулей V, V' , которые совпадают (ввиду неприводимости) с V, V' . Следовательно, V изоморфен V' . $\square$

31.4. Построение неприводимых представлений. Рассуждения в (31.3) параллельны рассуждениям для полупростых алгебр Ли над $\mathbb{C}$. Остается проблема построения неприводимого G -модуля старшего веса λ для каждого доминантного веса $\lambda \in X(T)$. Однако решение этого вопроса здесь менее непосредственно, чем для алгебр Ли.

Заметим прежде всего, что достаточно построить G -модуль, содержащий максимальный вектор веса λ . В самом деле, предложение 31.2 показывает, что подмодуль, порожденный этим вектором, обладает максимальным подмодулем, не содержащим веса λ , так что нам требуется только перейти к (неприводимому) фактормодулю. Это наблюдение полезно, когда мы имеем дело с *тензорными произведениями*. Пусть, скажем, v — максимальный вектор с весом λ в V и v' — максимальный вектор веса λ' в V' . При $t \in T$ мы имеем $t \cdot (v \otimes v') = t \cdot v \otimes t \cdot v' = \lambda(t)\lambda'(t)v \otimes v'$, а при $u \in U$ мы имеем $u \cdot (v \otimes v') = v \otimes v'$; таким образом, $v \otimes v'$ — максимальный вектор в $V \otimes V'$ веса $\lambda + \lambda'$ (аддитивные обозначения). Это показывает, что существование неприводимого модуля старшего веса $\lambda + \lambda'$ следует из существования

неприводимых модулей старших весов λ, λ' . (Аналогично для произвольных конечных сумм.)

Нам требуется еще одна важная конструкция, чтобы получить необходимые исходные факты. Для этого напомним теорему Шевалле 11.2. Каждый простой корень $\alpha \in \Delta$ определяет максимальную параболическую подгруппу $P_{\Delta - \{\alpha\}}$, см. (30.1). Пусть, скажем, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, $P_i = P_{\Delta - \{\alpha_i\}}$. Для каждого номера i выберем рациональное представление $G \rightarrow GL(V_i)$ с прямой $Kv_i \subset V_i$, стабилизатор которой в G совпадает с P_i . Каждый элемент σ_{α_k} ($k \neq i$) имеет представитель в P_i , который оставляет неподвижным вектор v_i . По построению v_i — максимальный вектор некоторого (доминантного) веса $\mu_i = \sum d_j \lambda_j$. Поэтому при $k \neq i$ мы имеем $\sigma_{\alpha_k}(\mu_i) = \mu_i$, откуда $d_k = 0$. С другой стороны, группа G действует на вектор v_i нетривиально, так что $\mu_i = d_i \lambda_i$, где $d_i > 0$.

Скомбинируем два предыдущих абзаца: если вес $\lambda = \sum c_i \lambda_i$ ($c_i \in \mathbb{Z}^+$) принадлежит $X(T)$, то $d\lambda$ — положительная $\mathbb{Z}$ -линейная комбинация элементов $\mu_i = d_i \lambda_i$ (где $d = \prod d_i$) и, следовательно, является старшим весом некоторого неприводимого G -модуля. Это — первое приближение к тому, что мы хотим доказать.

Чтобы выбрать правильную стратегию, предположим на момент, что мы уже нашли неприводимый G -модуль V старшего веса λ с максимальным вектором v^+ . Пусть V' — подпространство, натянутое на все весовые векторы с весами, отличными от λ , так что $V = Kv^+ \oplus V'$ (прямая сумма векторных пространств). Пусть $r^+ \in V^*$ — линейная функция, принимающая значение 0 на V' и значение 1 на v^+ . Определим тогда функцию c_λ на G следующим образом: $c_\lambda(x) = r^+(x \cdot v^+)$. Ясно, что $c_\lambda \in K[G]$ и что $x \cdot v^+ \equiv c_\lambda(x) v^+ \pmod{V'}$ для всех $x \in G$. (Представляйте себе c_λ как «координатную функцию».) Отсюда следует, что для всех $x \in B^-$, $y \in G$, $z \in B$:

$$(*) \quad c_\lambda(xyz) = \lambda(x) c_\lambda(y) \lambda(z),$$

где λ рассматривается как функция на B^- или на B , определенная дополнительным условием $\lambda(U^-) = \lambda(U) = 1$. Нужно использовать написанное выше сравнение вместе с тем фактом, что пространство V' инвариантно относительно B^- (см. предложение 27.2). В качестве ча-

стного случая соотношения $(*)$ мы получаем $c_\lambda(xy) = \lambda(y)$ при $x \in U^-$, $y \in B$. Так как множество $\Omega = U^-B$ плотно в G (28.5), то c_λ полностью определяется λ . Сверх того, соотношение $(*)$ показывает, что c_λ — максимальный вектор веса λ в $K[G]$, где группа G действует правыми сдвигами: $(\rho_x f)(y) = f(yx)$. Напомним (8.6), что $K[G]$ — объединение конечномерных G -инвариантных подпространств. Отсюда следует, что $K[G]$ содержит подмодуль типа, описанного в предложении 31.2, так что переход к неприводимому фактору приводит к копии модуля V (ср. (31.3)).

Отбросим теперь предположение, что модуль V существует. Предыдущее рассуждение указывает нам, где в $K[G]$ искать максимальный вектор веса λ . Но существует ли c_λ ? Заметим, что мы можем *определить* полиномиальную функцию на Ω правилом $c(xy) = \lambda(y)$ ($x \in U^-$, $y \in B$). Так как множество Ω открыто в G , то $K(\Omega) = K(G)$ и c — по крайней мере рациональная функция на G . Поэтому нам достаточно было бы доказать, что функция c всюду определена (см. предложение 2.1). В силу теоремы 5.3Б мы можем даже ограничиться доказательством того факта, что некоторая (положительная) *степень* функции c всюду определена. Выберем d , как и выше, так что старший вес $d\lambda$ обязательно появляется в качестве старшего веса некоторого неприводимого G -модуля и функция $c_{d\lambda}$ в $K[G]$ существует. Она совпадает на Ω с c^d . Так как множество Ω плотно в G , то функция c^d всюду определена, что и требовалось. Итак, нами доказана

Теорема. Пусть $\lambda \in X(T)$ — доминантный вес. Тогда существует неприводимый G -модуль со старшим весом λ . $\square$

Роль полиномиальной функции c_λ , которая была введена выше, можно несколько уточнить. Если $\lambda \in X(T)$ — доминантный вес, рассматриваемый как функция на B или на B^- , то определим $F_\lambda = \{f \in K[G] \mid f(xy) = \lambda(x)f(y) \text{ при } x \in B^-, y \in G\}$. Очевидно, что F_λ — подпространство в $K[G]$, инвариантное относительно правых сдвигов. Кроме того, уравнение $(*)$ показывает, что $c_\lambda \in F_\lambda$. Предположим, что F — неприводимый G -подмодуль в F_λ (обязательно конечномерный) с максимальным вектором f^+ веса μ . Мы утверждаем, что $\mu = \lambda$ и что вектор f^+ про-

порционален c_λ . Так как f^+ — максимальный вектор, то $f^+(xy) = \mu(y)f^+(x)$ при $x \in G$, $y \in B$. В частности, для всех $t \in T$ мы имеем $f^+(e) = f^+(tet^{-1}) = \mu(t^{-1})f^+(te) = \mu(t^{-1})\lambda(t)f^+(e)$ (в последнем равенстве следует принять во внимание, что $f^+ \in F_\lambda$). Чтобы заключить, что $\lambda = \mu$, мы должны убедиться, что $f^+(e) \neq 0$. Так как $\lambda(U^-) = e$, то $f^+(xy) = f^+(y)$ при $x \in U^-$, $y \in G$; выбирая $y \in B$, мы получаем (***) $f^+(xy) = f^+(e)\mu(y)$. Если $f^+(e) = 0$, то, следовательно, функция f^+ обращается в 0 на $\Omega = U^-B$ и, следовательно, на G , что противоречит соотношению $f^+ \neq 0$. Отсюда следует, что $\lambda = \mu$. Сравнение с (***) показывает, что $f^+ = f^+(e)c_\lambda$ на Ω ; ввиду плотности множества Ω функция f^+ пропорциональна c_λ , что и утверждалось.

Это рассуждение показывает, что неприводимые G -модули со старшим весом λ можно канонически построить в $K[G]$ как подмодули, порожденные c_λ . Если $\text{char } K = 0$, то из полной приводимости следует, что этот подмодуль есть в точности F_λ . Если K имеет простую характеристику, то это обычно не имеет места (но можно доказать, что F_λ имеет конечную размерность).

31.5. Кратности и минимальные старшие веса. Пусть $\lambda \in X(T)$ — доминантный вес. Теоремы 31.3 и 31.4 показывают, что существует один и (с точностью до изоморфизма) только один неприводимый G -модуль со старшим весом λ ; обозначим его через $V(\lambda)$. Веса модуля $V(\lambda)$ имеют вид $\sigma(\mu)$, где σ пробегает W , а μ пробегает набор доминантных характеров, удовлетворяющих условию $\mu < \lambda$, причем все веса $\sigma(\mu)$ ($\sigma \in W$) имеют одинаковую кратность. Кроме того, вес λ и его W -сопряженные появляются с кратностью 1. Удовлетворительное описание модуля $V(\lambda)$ (например, определение его размерности) потребовало бы, конечно, точной информации о кратностях его весов. В случае, если $\text{char } K = 0$, теория алгебр Ли дает об этом довольно много сведений (формулы Вейля, Фрейдентала, Костанта). К сожалению, в случае простой характеристики известно гораздо меньше.

Один случай, когда строение модуля $V(\lambda)$ довольно ясно, возникает, если λ — **минимальный** вес, т.е. если никакой вес $\mu < \lambda$, отличный от λ , не является доминантным. В этом случае веса модуля $V(\lambda)$ все W -сопряжены с λ , и $\dim V(\lambda)$ совпадает с числом элементов

$\mathcal{W}$ -орбиты веса λ . Для каждой системы корней Φ нетрудно определить, какой именно вес $\lambda \in \Lambda$ минимален. Конечно, вес 0 всегда минимален (и приводит к тривиальному одномерному представлению группы G). Для группы $SL(l+1, K)$ остальные минимальные веса — это в точности фундаментальные доминантные веса $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ (например, λ_1 — старший вес естественного $(l+1)$ -мерного представления). Для систем корней, отличных от A_l , ненулевых минимальных весов меньше, и все они снова находятся среди фундаментальных весов *).

31.6. Контрагredientные представления и инвариантные билинейные формы. Пусть $V = V(\lambda)$, где $\lambda \in X(T)$ — доминантный вес. Напомним, что в двойственном пространстве V^* имеется естественное рациональное представление группы G . А именно, действие группы G в V^* задается правилом: $(x \cdot f)(v) = f(x^{-1} \cdot v)$ ($x \in G$, $f \in V^*$, $v \in V$) (см. (8.2)). Ясно, что G -подмодули в V^* находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с G -подмодулями в V с обращением знаков включения. Следовательно, V^* также неприводим, так что он должен быть изоморфен некоторому модулю $V(\mu)$ ($\mu \in X(T)$).

Нетрудно найти максимальный вектор в V^* и, следовательно, определить вес μ . Как и в (31.4), запишем $V = Kv^+ \oplus V'$ (где v^+ — максимальный вектор) и выберем $r^+ \in V^*$ так, что $r^+(V^+) = 1$, $r^+(V') = 0$. Тогда при $x \in B^-$ мы имеем $(x \cdot r^+)v^+ = r^+(x^{-1} \cdot v^+) = \lambda(x^{-1})$, а при $v \in V'$ мы имеем $(x \cdot r^+)(v) = 0$, так как группа B^- оставляет пространство V' инвариантным. Другими словами, $x \cdot r^+ = \lambda(x^{-1})r^+$. Это означает, что r^+ — максимальный вектор веса $-\lambda$ относительно *противоположной* борелевской подгруппы B^- . Поскольку в $\mathcal{W}$ имеется единственный элемент σ_0 , преобразующий B в B^- , то V^* имеет старший вес $-\sigma_0(\lambda)$ по отношению к B .

Известно, что $\sigma_0 = -1$ в точности для следующих систем корней: A_l , B_l , C_l , D_l (l четно), E_7 , E_8 , F_4 , G_2 . Следовательно, в этих случаях модуль V^* всегда изоморфен V . Даже при $\sigma_0 \neq -1$ может, конечно, случиться, что $-\sigma_0(\lambda) = \lambda$ для некоторого λ .

Предположим, что G -модуль V и в самом деле изоморфен V^* . Это позволяет следующим образом задать

*) См. Бурбаки, [1], гл. VIII, § 7, п. 3. — *Прим. перев.*

G -инвариантную билинейную форму на V . Поскольку модуль V неприводим, легко видеть, что $\text{Hom}_G(V, V)$ — одномерное пространство (по лемме Шура). Но при стандартном отождествлении (8.2) пространства $\text{Hom}(V, V)$ с $V^* \otimes V$ подпространство $\text{Hom}_G(V, V)$ переходит в пространство G -неподвижных точек. В свою очередь $V^* \otimes V \cong V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$ можно рассматривать как пространство билинейных форм на V . Таким образом, мы получаем G -инвариантную билинейную форму (единственную с точностью до скалярного множителя).

Предположим в качестве примера, что G — односвязная группа типа C_2 . Из (31.5) мы получаем неприводимое представление $\rho: G \rightarrow GL(4, K)$, старший вес которого является минимальным. Можно показать, что G -инвариантная билинейная форма на пространстве $V = K^4$ является «знакопеременной», откуда следует, что образ группы G содержится в $Sp(4, K)$. Сравнение размерностей показывает, что этот образ должен совпасть с $Sp(4, K)$, тогда как $\text{Ker } \rho = e$. Небольшого дополнительного рассуждения достаточно, чтобы убедиться, что группа G изоморфна $Sp(4, K)$ как алгебраическая группа. В этом рассуждении требуется, чтобы группа G была односвязна: в противном случае соответствующий старший вес не принадлежал бы $X(T)$. Однако если бы мы ввели «проективные» представления, как это сделано Шевалле [8], то смогли бы воспользоваться этим методом для классификации всех групп типа C_2 .

Упражнения

1. Пусть $\text{char } K = 2$. Доказать, что $SL(2, K)$ и $PGL(2, K)$ — изоморфные абстрактные группы, обладающие различными фундаментальными группами.

2. Показать, что Ad — неприводимое представление группы $SL(3, K)$, если характеристика поля K отлична от 3.

3. Пусть V — неприводимый G -модуль старшего веса λ ; определим v^+, r^+, c_λ , как в (31.4). При $v \in V, r \in V^*$ положим $c_{r, v}(x) = r(x \cdot v)$ для всех $x \in G$. Заметим, что $\rho_x c_{r, v} = c_{r, x \cdot v}$ и что $c_\lambda = c_{r^+, v^+}$. Показать, что отображение $v \mapsto c_{r^+, v}$ определяет изоморфизм G -модуля V с G -подмодулем в $K[G]$, порожденным c_λ .

4. Сохраняя обозначения упражнения 3, положим $I = \{\alpha \in \Delta \mid \sigma_\alpha(\lambda) = \lambda\}$; пусть W_I — соответствующая подгруппа группы W и $P_I = BW_I B$. Проверить, что P_I — стабилизатор прямой

Kv^+ в G . Используя разложение Брюа, показать, что $c_\lambda(x\pi(\sigma)y) = \lambda(y)$ при $x \in U^-$, $y \in B$, $\sigma \in W_l$, а на других двойных смежных классах значение c_λ равно 0.

Б. Пусть G — простая односвязная алгебраическая группа типа A_2 . Доказать, что G изоморфна (по крайней мере как абстрактная группа) группе $SL(3, K)$. (Показать, что G обладает неприводимым трехмерным представлением.)

Замечания. Мы следовали Борелю [6], [8], Стейнбергу [10, § 12], [13, 3.3—3.4]. Проективные представления изучаются у Шевалле [8, exposés 15, 16]. В простой характеристике имеется несколько нерешенных вопросов, см. Картер и Лустиг [1], Хамфри [5], Янтцен [1], [2], Верма [1].

§ 32. Теорема об изоморфизме

В этом и следующем параграфах мы докажем, что простая алгебраическая группа G определяется с точностью до изоморфизма своей системой корней и своей фундаментальной группой (за исключением случая группы типа D_l при четном $l \geq 6$ с фундаментальной группой порядка 2, когда имеется две такие группы). Мы рассмотрим даже более общий случай, когда группа G полупроста. Пусть T — максимальный тор группы G , B — содержащая T борелевская подгруппа, Δ — соответствующая база системы корней Φ , $N = N(T)$, $W = N/T$. Напомним, что $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$, где $T_\alpha = (\text{Ker}(\alpha))^0$, для каждого корня α является редуктивной группой полупростого ранга 1 с содержащими T борелевскими подгруппами TU_α и $TU_{-\alpha}$ и группой Вейля $W_\alpha \subset W$, порожденной «отражением» σ_α .

Помимо групп Z_α , нам необходимо будет рассматривать некоторые другие редуктивные подгруппы в G полупростого ранга 2. Для каждой пары различных простых корней α, β мы положим $Z_{\alpha\beta} = C_G((T_\alpha \cap T_\beta)^0)$. Будучи централизатором тора, группа $Z_{\alpha\beta}$ редуктивна (следствие 26.2A). Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}(Z_{\alpha\beta}) = \mathfrak{t} \oplus \coprod \mathfrak{g}_\gamma$, где суммирование ведется по всем γ из подсистемы корней $\Phi_{\alpha\beta}$ ранга 2 с базой $\{\alpha, \beta\}$. (Используйте, например, тот факт, что глобальные и инфинитезимальные централизаторы торов соответствуют друг другу). Читатель, изучивший (30.2), узнает в $Z_{\alpha\beta}$ фактор Леви стандартной параболической подгруппы $P_{\{\alpha, \beta\}}$. Мы положим еще $Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha$ при $\alpha = \beta$.

32.1. Проблема классификации. Предположим, что группа G проста, т. е. система корней Φ группы G неприводима (27.5). Согласно теореме 27.1 Φ — абстрактная система корней в смысле Добавления; классификация абстрактных систем корней известна, так что Φ — удобный инвариант, который может быть нам полезен при классификации простых групп. Другим инвариантом группы G является фундаментальная группа $\pi(G) = \Lambda/X(T)$, где Λ — полная решетка абстрактных весов (31.1). Наши усилия в §§ 32 и 33 направлены на доказательство следующего результата.

Теорема. *Если G, G' — простые алгебраические группы с изоморфными системами корней и изоморфными фундаментальными группами, то группы G и G' изоморфны (как алгебраические группы), за исключением случая, когда система корней имеет тип D_l с четным $l \geq 6$, а фундаментальная группа имеет порядок 2. (В этом случае существуют две различные неизоморфные группы.)*

Читатель, знакомый с теоремой об изоморфизме для полупростых алгебр Ли над полем комплексных чисел, поймет, что эта теорема — наилучший возможный теоретико-групповой аналог результата об алгебрах Ли. В действительности наше доказательство здесь представляется некоторым усовершенствованием доказательства теоремы об алгебрах Ли; однако построение изоморфизма соответствующих групп — дело гораздо более трудное, чем построение изоморфизма алгебр Ли. В настоящем пункте мы постараемся изложить в общих чертах метод доказательства этой теоремы, а затем перейдем к его реализации в деталях с последующей редукцией к группам ранга 2, которые будут отдельно рассмотрены в § 33.

Эта теорема была впервые доказана Шевалле [8] с более полным обсуждением вопроса об изогениях. По определению **изогения** $\varphi: G \rightarrow G'$ есть эпиморфизм алгебраических групп с конечным ядром (например, присоединенное представление $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Ad } G$ в случае, если группа G полупроста). Шевалле классифицировал все возможные изогении, в том числе и изоморфизмы, которые существуют между полупростыми группами. Почти все они такие, как и следовало ожидать, например пере-

ход от $SL(n, K)$ к факторгруппе по ее центральной подгруппе. Однако имеются и некоторые неожиданные изогении между группами типов B_l и C_l в характеристике 2 или изогении группы F_4 (соответственно G_2) с нею же самой в характеристике 2 (соответственно 3). Здесь мы не будем входить в рассмотрение этих конструкций.

Каким образом использовать предположения теоремы, чтобы надеяться прийти к изоморфизму $\varphi: G \rightarrow G'$? Пусть T', B', Φ' (и т. д.) имеют очевидное значение в отношении группы G' . Положим $E = \mathbb{R} \otimes X(T)$, $E' = \mathbb{R} \otimes X(T')$. По предположению существует изоморфизм векторных пространств $f: E \rightarrow E'$, отображающий Φ в Φ' и сохраняющий числа Картана $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha, \beta \in \Delta$). Если Λ и Λ' — соответствующие решетки абстрактных весов, то f автоматически отображает Λ на Λ' .

Далее, $\Lambda \supset X(T) \supset \Lambda_l$ (= подгруппа, порожденная Φ) ввиду (31.1). Аналогично $\Lambda' \supset X(T') \supset \Lambda'_l$. Вторая часть предположения теоремы показывает, что группа $\Lambda/X(T)$ изоморфна $\Lambda'/X(T')$. Во всех случаях, кроме D_l (l четно), группа Λ/Λ_l является *циклической* (Д.9) и, следовательно, обладает единственной подгруппой каждого возможного порядка; поэтому f должно отображать $X(T)$ на $X(T')$. Если Φ — система корней типа D_l (l четно) и группа $\pi(G)$ — порядка 2, то это не всегда автоматически имеет место. Если $l=4$, легко видеть, что группа автоморфизмов графа оставляет Λ и Φ инвариантными и переставляет между собой любые две подгруппы индекса 2 в Λ ; поэтому выбор f можно изменить таким образом, чтобы отобразить $X(T)$ на $X(T')$. При $l \geq 6$ автоморфизм графа переставляет между собой только две из трех промежуточных подгрупп (упражнение 2); поэтому мы вынуждены дополнительно предполагать, что f отображает $X(T)$ в $X(T')$. (В противном случае группы G и G' могут и не быть изоморфными.)

Изучение торов и характеров (16.2) показывает, что изоморфизм групп $X(T)$ и $X(T')$ однозначно определяет изоморфизм торов T и T' (как алгебраических групп). Строго говоря, это соответствие контравариантно: отображению $f^{-1}: X(T') \rightarrow X(T)$ соответствует морфизм $\varphi_T: T \rightarrow T'$. Остается *расширить* φ_T до изоморфизма алгебраических групп $\varphi: G \rightarrow G'$. В этой формулировке problemu можно ставить для полупростой (не обязательно

простой) группы G . Требуется доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть G, G' — полупростые группы с максимальными торами T, T' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Если $\varphi_T: T \rightarrow T'$ — изоморфизм, для которого ассоциированное отображение $X(T') \rightarrow X(T)$ индуцирует изоморфизм Φ' и Φ , то φ_T расширяется до изоморфизма групп G и G' .

Теоретико-множественное определение φ будет основано на нормальной форме Брюа (28.4). Чтобы избежать трудностей с обозначениями, мы будем писать H вместо G' и откажемся от символов T', Φ' и т. д. Вместо явного указания подгрупп группы H , мы будем ссылаться на них как на подгруппы, «соответствующие» $T, B, U, U^-, U_\alpha, Z_\alpha$ и т. д. Это соответствие основано, конечно, на заданном изоморфизме φ_T и индуцированном им изоморфизме систем корней. Заметим, что все существенные манипуляции будут происходить внутри группы G .

В (32.2) мы покажем, как расширить φ_T до изоморфизма $\varphi_N: N \rightarrow N$ при условии, что аналогичное расширение существует для некоторых из подгрупп $Z_{\alpha\beta}$ в G полупростого ранга 1 или 2. В (32.3) мы покажем, как расширить φ_T до изоморфизма φ_{Z_α} (алгебраических групп) Z_α ($\alpha \in \Delta$) на соответствующую подгруппу группы H . Затем в (32.4), (32.5) мы покажем, как расширить φ_T до изоморфизма φ_B группы B на соответствующую подгруппу группы H с таким расчетом, чтобы он был согласован с изоморфизмами $\varphi_{Z_\alpha}|_{U_\alpha}$ опять при условии, что аналогичное расширение можно сделать для подгрупп полупростого ранга 2. Проверка выполнения упомянутых условий для групп ранга 2 будет отложена до § 33, поскольку она требует довольно скрупулезных вычислений с системами корней ранга 2.

Предположим на момент, что отображения φ_N и φ_B уже определены. В соответствии с (28.4) каждый элемент $x \in G$ имеет единственное представление вида $x = u'n(\sigma)tu$ ($\sigma \in W, t \in T, u \in U, u' \in U'_\sigma$). Оно зависит от априорного выбора представителя $n(\sigma) \in N$ смежного класса элемента $\sigma \in W$; но независимо от того, какой выбор сделан, N -компонента $n = n(\sigma)t$ определяется

элементом x однозначно. Следовательно, мы можем определить отображение $\varphi: G \rightarrow H$ по правилу $\varphi(x) = \varphi_B(u')\varphi_N(n)\varphi_B(u)$. Никоем образом не очевидно, что φ — гомоморфизм групп или что φ — морфизм многообразий. Решение первого из этих вопросов более сложно. Используя условия о группах ранга 2, проверку которых мы отложили до § 33, мы установим в (32.6) мультипликативность отображения φ . Коль скоро это будет сделано, мы сможем применить следующий общий критерий, чтобы заключить, что φ — морфизм.

Лемма. Пусть G — полупростая группа, B — ее борелевская подгруппа и H — другая алгебраическая группа. Если $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм абстрактных групп, ограничение которого на B — морфизм, то и φ — морфизм.

Доказательство. Напомним (28.5), что имеет место изоморфизм (многообразий) $U^- \times B \rightarrow \Omega = U \cdot B$. Здесь $U^- = \sigma_0(U)$, где $\sigma_0 \in W$ заменяет положительные корни на отрицательные и наоборот. Поскольку φ — гомоморфизм групп и группа U^- сопряжена в G с U , то из предположений леммы следует, что $\varphi|U^-$ — морфизм. Но следующая диаграмма коммутативна (смысл стрелок очевиден):

$$\begin{array}{ccc} U^- \times B & \rightarrow & \varphi(U^-) \times \varphi(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega & \rightarrow & \varphi(\Omega) \end{array}$$

Отсюда следует, что $\varphi|_{\Omega}$ — морфизм (это верно и для сдвигов множества Ω). Так как Ω открыто в G (28.5), то φ задается рациональными функциями на G , которые всюду определены, т. е. принадлежат $K[G]$ (предложение 2.1). Следовательно, φ — морфизм. $\square$

32.2. Продолжение φ_T на $N(T)$. В соответствии с теоремой 29.4 W порождается элементами σ_α ($\alpha \in \Delta$) с определяющими соотношениями $(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = e$, где через $m(\alpha, \beta)$ обозначается порядок элемента $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ в W (в частности, $m(\alpha, \alpha) = 1$). Наша задача здесь — превратить это абстрактное задание группы W образующими и определяющими соотношениями в соответствующее задание группы N , в котором определяющие соотношения получаются из соотношений для группы T и соотношений, возникающих из пар простых корней,

Рассмотрим точную последовательность

$$e \rightarrow T \rightarrow N \rightarrow W \rightarrow e.$$

Если бы эта последовательность расщеплялась (что обычно не имеет места), то наша задача была бы проста. В общем случае мы можем выбрать произвольные представители $n_\alpha \in N$ элементов σ_α ($\alpha \in \Delta$) и утверждать, что эти элементы вместе с группой T порождают N . Положим, далее, $t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^{m(\alpha, \beta)} \in T$. Мы утверждаем, что эти соотношения вместе с определяющими соотношениями для группы T однозначно определяют группу N . Иными словами:

Предложение. Пусть $\psi: T \rightarrow H$ — гомоморфизм абстрактных групп, и пусть $h_\alpha \in H$ ($\alpha \in \Delta$). Тогда ψ можно расширить до гомоморфизма $N \rightarrow H$, отображающего n_α в h_α ($\alpha \in \Delta$) в том и только в том случае, когда $(h_\alpha h_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = \psi(t_{\alpha\beta})$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$.

Доказательство. Часть «только тогда» очевидна. Предположим, что условие предложения выполнено, и введем свободную группу W^* от l образующих n_α^* ($\alpha \in \Delta$). Сопоставим элементу n_α^* автоморфизм $t \mapsto n_\alpha t n_\alpha^{-1}$ группы T , получая таким образом канонический гомоморфизм $W^* \rightarrow \text{Aut } T$. Обозначим через N^* возникающее таким образом полупрямое произведение $W^* \ltimes T$ (где T отождествляется с подгруппой группы N^*). Профакторизуем теперь группу N^* по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей элементы $t_{\alpha\beta}^{-1} (n_\alpha^* n_\beta^*)^{m(\alpha, \beta)}$ ($\alpha, \beta \in \Delta$), и обозначим полученную в результате этой факторизации группу через $\tilde{N}$. Очевидно, что $\tilde{N}$ — гомоморфный образ группы N^* , причем подгруппа T (в N^*) изоморфно отображается на подгруппу группы $\tilde{N}$ (которую мы также обозначим через T), а затем на группу T (в N). Ясно также, что гомоморфизм $\psi: T \rightarrow H$ продолжается (однозначно) до гомоморфизма $\tilde{N} \rightarrow H$, отображающего $\tilde{n}_\alpha$ в h_α ($\alpha \in \Delta$), где $\tilde{n}_\alpha$ — образ элемента n_α^* .

Остается показать, что каноническое отображение $\tilde{N} \rightarrow N$ — изоморфизм. Для этого достаточно показать, что эпиморфизм $\tilde{N}/T \rightarrow N/T = W$ является изоморфизмом; для этого достаточно убедиться, что обе рассматриваемые группы имеют равное (конечное) число эле-

ментов. Но группа $\tilde{N}/T$ порождается элементами (образами $\tilde{n}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$), которые удовлетворяют определяющим соотношениям группы W (теорема 29.4), так что эта группа — некоторый гомоморфный образ группы W . Следовательно, она не может быть больше W $\square$

Возвратимся теперь к ситуации (32.1), где нам дано отображение $\varphi_T: T \rightarrow H$. Для того чтобы продолжить его до изоморфизма $\varphi_N: N \rightarrow H$, выберем элементы $n_\alpha \in N$ ($\alpha \in \Delta$), определим по ним элементы $t_{\alpha\beta} \in T$ ($\alpha, \beta \in \Delta$), а затем выберем образы h_α в H , для которых $(h_\alpha h_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = \varphi_T(t_{\alpha\beta})$. Все они зависят только от того, что происходит в группах $Z_{\alpha\beta}$ полупростого ранга 1 или 2. Случай ранга 1 будет рассмотрен в (32.3), а случай групп ранга 2 — в § 33. Заметим, что так как группы G и H обладают изоморфными группами Вейля, то φ_N — автоматически изоморфизм групп. Он также будет морфизмом многообразий, ибо φ_T — изоморфизм многообразий и $[N: T] < \infty$.

32.3. Продолжение φ_T на Z_α . Напомним, что нам известно о редуктивных группах полупростого ранга 1. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем обозначать рассматриваемую группу через Z_α , где $\pm\alpha$ — корни относительно некоторого максимального тора T (и корень α положителен по отношению к борелевской подгруппе $B_\alpha \supset T$). Пусть U_α , $U_{-\alpha}$ — соответствующие корневые подгруппы в группе B_α и ее противоположной группе $B_{-\alpha}$, и пусть σ_α — нетривиальный элемент группы Вейля.

Согласно (25.3) фактормногообразие Z_α/B_α изоморфно $\mathbf{P}^1$, и естественное действие группы Z_α на этом однородном пространстве индуцирует эпиморфизм алгебраических групп $\pi: Z_\alpha \rightarrow PGL(2, K)$. Его связное ядро имеет вид $R(Z_\alpha) = Z(Z_\alpha)^0$. Более точно, $\text{Кер } \pi = Z(Z_\alpha) \subset T$ (следствие 25.3).

Действие группы U_α на Z_α/B_α можно описать явно (28.2), если выбрать представители смежных классов $U_\alpha \sigma_\alpha$ в виде копии многообразия A^1 в $\mathbf{P}^1$ (остающаяся точка в $\mathbf{P}^1$ соответствует смежному классу B_α). В самом деле, группа G_α действует на G_α при помощи сдвигов, оставляя неподвижной точку на бесконечности. Отсюда следует, что ограничение морфизма π на U_α *сепарабельно*, а также биективно и G_α -эквивариантно (группа

G_a действует очевидным образом). Таким образом, $\pi|U_a$ — изоморфизм алгебраических групп (12.4). По симметрии $\pi|U_{-a}$ — также изоморфизм. Для большей конкретности мы даже можем выбрать допустимые изоморфизмы $e_a: G_a \rightarrow U_a$, $e_{-a}: G_a \rightarrow U_{-a}$ таким образом, что $\pi(e_a(x)) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\pi(e_{-a}(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ (в обозначениях (6.4)). При таком выборе $\pi(T)$ — «диагональная» подгруппа группы $PGL(2, K)$. Мы можем сделать следующий шаг, зафиксировав представитель n_a элемента σ_a в $N_{Z_a}(T)$: положим $n_a = e_a(1)e_{-a}(-1)e_a(1)$, так что $\pi(n_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда элемент $t_a = n_a^2$ отображается в $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Выбрав таким образом элементы в группе Z_a , мы будем обозначать при помощи штрихов соответствующие объекты в Z'_a — другой редуктивной группе полупростого ранга 1.

Предложение. *Используем введенные выше обозначения. Пусть $\varphi_T: T \rightarrow T'$ — изоморфизм торов, для которого ассоциированный изоморфизм групп характеров $X(T') \rightarrow X(T)$ отображает α' в α . Тогда φ_T можно продолжить одним и только одним способом до изоморфизма алгебраических групп $\varphi: Z_a \rightarrow Z'_a$ таким образом, что $\varphi(e_a(x)) = e'_{\alpha'}(x)$ ($x \in G_a$) и $\varphi(n_a) = n'_{\alpha'}$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассматривать группы, совпадающие со своими коммутантами. Поэтому мы можем предполагать, что Z_a, Z'_a — полупростые группы (ранга 1). Единственность изоморфизма φ (если он существует) очевидна, так как T, n_a, U_a порождают Z_a . Ясно также, как задать изоморфизм многообразий соответствующих больших клеток $\Omega_a, \Omega'_{\alpha'}: \varphi(e_{-a}(x)t_{\alpha}(y)) = e'_{-\alpha'}(x)\varphi_T(t)e'_{\alpha'}(y)$. Затем при помощи эпиморфизмов π, π' на $PGL(2, K)$ мы построим общее «накрытие» S , как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & & \\
 & \swarrow \rho & & \searrow \rho' & \\
 Z_a & & & & Z'_{\alpha'} \\
 & \swarrow \pi & \dashrightarrow \varphi & \nwarrow \pi' & \\
 & & PGL(2, K) & &
 \end{array}$$

Начнем с замкнутой подгруппы $R = \{(z, z') \in Z_\alpha \times Z'_\alpha \mid \pi(z) = \pi'(z')\}$ (почему она замкнута?); затем положим $S = R^0$, и пусть ρ, ρ' — соответствующие проекции. Очевидно, $\pi\rho = \pi'\rho'$. Так как эпиморфизмы π, π' сюръективны, то сюръективны и проекции группы R на оба сомножителя произведения. Но группа S имеет конечный индекс в R ; сравнение размерностей показывает теперь, что проекции ρ, ρ' сюръективны. Каждая из них имеет конечное ядро, ибо ядра эпиморфизмов π, π' конечны. В частности, S — полупростая группа ранга 1. Морфизм $t \mapsto (t, \varphi(t)) \in R$ ($t \in T$) отображает изоморфно T на максимальный тор группы S , откуда следует, что ограничения ρ, ρ' на соответствующую большую клетку группы S являются изоморфизмами на $\Omega_\alpha, \Omega'_\alpha$, причем отображение $\varphi\rho = \rho'$ всюду определено.

На этой стадии φ задается рациональными функциями на Z_α (ибо Ω_α — открытое множество). Мы утверждаем, что φ всюду определено и является гомоморфизмом групп. Пусть $x \in S, z = \rho(x), z' = \rho'(x)$. Обозначим через $\lambda_0, \lambda, \lambda'$ соответствующие левые сдвиги в S, Z_α, Z'_α , индуцированные этими элементами. Следующие равенства имеют место всякий раз, когда их обе части определены. Прежде всего, равенство $\varphi\rho = \rho'$ влечет $\lambda'\varphi\rho = \lambda'\rho'$, что в свою очередь равно $\rho'\lambda_0$ (ибо ρ' — гомоморфизм). Но $\rho'\lambda_0 = \varphi\rho\lambda_0 = \varphi\lambda\rho$ (ибо ρ — гомоморфизм). Поскольку он сюръективен, то (*) $\lambda'\varphi = \varphi\lambda$. Таким образом, если отображение φ определено в точке $y \in Z_\alpha$, то оно также определено в точке $\lambda(y) = zy$ по правилу $\varphi(zy) = \lambda'\varphi(y) = \varphi\lambda(y)$. Так как элемент z произволен, то отображение φ всюду определено. Из (*) и соотношения $\varphi\rho = \rho'$ тогда следует, что φ — гомоморфизм.

Из построения φ следует, что $\varphi(n_\alpha) = n'_\alpha$. Чтобы убедиться в том, что φ — изоморфизм, следует только повторить это рассуждение в обратном направлении (это даст обратный морфизм). $\square$

Из предложения сразу вытекает полная классификация полупростых групп ранга 1.

Следствие. Полупростая группа ранга 1 изоморфна $SL(2, K)$ или $PGL(2, K)$.

Доказательство. Как было отмечено в (31.1), группа с системой корней типа A_1 должна быть либо односвяз-

ной, либо присоединенного типа. В этих случаях группа характеров максимального тора в $SL(2, K)$ или $PGL(2, K)$ естественным образом изоморфна группе $X(T) \cong X(G_m) \cong \mathbb{Z}$ с положительным корнем α , соответствующим 2 или 1 (соответственно). Таким образом, применимо предложение. $\square$

32.4. Продолжение φ_T на TU_α . В (32.3) мы видели, как расширить φ_T до изоморфизма группы Z_α на соответствующую подгруппу группы H для любого корня α (скажем $\alpha \in \Phi^+$). Выбор вложения $\varepsilon_\alpha: G_\alpha \rightarrow U_\alpha$ был там в некоторой степени произволен, так что у нас нет причины ожидать, что все отображения φ_{Z_α} будут согласованы, т. е. допускают какое-либо общее продолжение на группу G . Поэтому мы начнем с построения расширений φ_{Z_α} только для *простых* корней α ; выборы здесь «независимые». Обозначим через φ_α ограничение отображения φ_{Z_α} на U_α и через n_α — различные представители элементов σ_α , определенных в (32.3): $n_\alpha = \varepsilon_\alpha(1) \varepsilon_{-\alpha}(-1) \varepsilon_\alpha(1)$ и $t_\alpha = n_\alpha^2 (= t_{\alpha\alpha})$. Положим $h_\alpha = \varphi_{Z_\alpha}(n_\alpha)$.

Согласно (32.2) морфизм φ_T продолжается до гомоморфизма $\varphi_N: N \rightarrow H$, отображающего n_α в h_α ($\alpha \in \Delta$), если выполняются следующие условия:

(А) $\varphi_T(t_{\alpha\beta}) = (h_\alpha h_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, где $t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$ и $m(\alpha, \beta)$ — порядок элемента $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ в W .

Это условие будет проверено в § 33, но пока что мы будем считать его выполненным и использовать существование φ_N . По построению φ_N и φ_{Z_α} согласованы на $N_{Z_\alpha}(T)$.

Как расширить φ_T на B ? Разумеется, такое расширение должно быть согласовано с φ_α ($\alpha \in \Delta$) и должно отображать каждую группу U_α ($\alpha > 0$) в соответствующую подгруппу группы H . В частности, если пересечение $U \cap Z_{\alpha\beta}$ обозначить через $U_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \Delta$), то мы должны требовать выполнения следующего условия:

(Б) Для каждой пары $\alpha, \beta \in \Delta$ существует изоморфизм $\varphi_{\alpha\beta}$ (алгебраических групп), отображающий $U_{\alpha\beta}$ на соответствующую подгруппу группы H , такой, что $\varphi_{\alpha\beta}$ является расширением как φ_α , так и φ_β .

Как и условие (А), это условие относится к группам ранга 2 и будет проверено в § 33. В оставшейся части § 32 мы будем предполагать его выполненным.

Если желать продолжить φ_T не только на B , но и на G , то необходимо потребовать еще больше. Пусть, скажем, β — положительный корень, который отображается элементом $\sigma \in W$ в простой корень α , и пусть $n \in N$ — представитель элемента σ . (Для краткости мы будем писать $\bar{n} = \sigma$). Тогда $nU_\beta n^{-1} = U_\alpha$, или $U_\beta = n^{-1}U_\alpha n$. Если существует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$, являющийся продолжением как φ_N , так и φ_α , то это равенство показывает, как гомоморфизм φ должен быть определен на U_β . Обратим внимание на то, что β можно отобразить в α при помощи некоторого другого элемента группы W и β можно отобразить в некоторый другой простой корень. Мы должны быть уверены, что сделанные нами выборы не влияют на определение отображения $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow H$. Эта проблема возникает уже для групп ранга 2, где ключевое условие, которое нам нужно проверить, состоит в следующем ($\varphi_{\alpha\beta}$ обозначает то же, что в (Б)):

(В) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$. Если $\gamma \in \Phi_{\alpha\beta}^+$ и $\gamma \neq \alpha$, то $\text{Int } h_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}$ согласуется на U_γ с $\varphi_{\alpha\beta} \circ \text{Int } n_\alpha$.

Так же как (А) и (Б), это условие будет установлено в § 33; пока мы примем его и перейдем к доказательству того, что отображение φ_α можно определить последовательно для всех корней (положительных или отрицательных).

Предложение. Предположим, что имеют место условия (А), (Б), (В), сформулированные выше, так что определены отображения φ_N и φ_α , $\varphi_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \Delta$). Тогда для каждого корня $\alpha \in \Phi$ существует изоморфизм φ_α группы U_α на соответствующую подгруппу группы H , удовлетворяющий условиям:

(а) если $\alpha \in \Delta$, то отображение φ_α согласовано с данным морфизмом и $\varphi_{-\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}|_{U_{-\alpha}}$;

(б) если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $\gamma \in \Phi_{\alpha\beta}^+$, то $\varphi_\gamma = \varphi_{\alpha\beta}|_{U_\gamma}$;

(в) если $n \in N$ и $\bar{n}(\alpha) = \beta$ ($\alpha, \beta \in \Phi$), то $\text{Int } \varphi_N(n) \circ \varphi_\alpha$ согласуется на U_α с $\varphi_\beta \circ \text{Int } n$.

Доказательство разобьем на несколько шагов. Положим $N_{\alpha\beta} = N_{Z_{\alpha\beta}}(T)$.

(1) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$. Если $n \in N_{\alpha\beta}$ и $\bar{n}(\alpha) = \alpha$ (соответственно $\bar{n}(\alpha) = \beta$), то отображение $\text{Int } \varphi_N(n) \circ \varphi_\alpha$ согласовано на U_α с $\varphi_\alpha \circ \text{Int } n$ (соответственно с $\varphi_\beta \circ \text{Int } n$).

Запишем $n = n_{\gamma_k} \dots n_{\gamma_1} t$ для некоторого $t \in T$ и $\gamma_i \in \{\alpha, \beta\}$. Если $n = t$ (так что $\bar{n}(\alpha) = \alpha$), то утверждение следует из построения φ_{Z_α} . Поэтому мы можем пред-

полагать, что $n = n_{\gamma_k} \dots n_{\gamma_1}$ и использовать индукцию по k . При $k = 1$ n равно n_α или n_β . В самом деле, так как σ_α переставляет элементы множества $\Phi_{\alpha\beta}^+ - \{\alpha\}$ (Д.5), ясно, что $n \neq n_\alpha$ (и в этом случае $\bar{n}(\alpha) = \alpha$). Тогда можно применить условие (В) (ввиду условия (Б)).

Для шага индукции рассмотрим последовательность корней $\alpha_i = \sigma_{\gamma_{i-1}} \dots \sigma_{\gamma_1}(\alpha) \in \Phi_{\alpha\beta}$. Если все α_i принадлежат $\Phi_{\alpha\beta}^+$, повторное применение условия (В) завершает доказательство так же, как и в случае $k = 1$. В противном случае найдется номер $i < k$ такой, что корень α_i положителен, а корень α_{i+1} отрицателен. Единственным положительным корнем, который отображается элементом σ_{γ_i} в отрицательный корень, является γ_i , и мы получаем $\alpha_i = \alpha$ или $\alpha_i = \beta$. Запишем теперь $n = n''n'$, где $n' = \sigma_{\gamma_{i-1}} \dots \sigma_{\gamma_1}$, $n'' = \sigma_{\gamma_k} \dots \sigma_{\gamma_i}$. Заметим, что каждый из элементов n' , n'' удовлетворяет первоначальному предположению относительно n (причем для n'' роли α и β могут поменяться). Остается воспользоваться индукцией.

(2) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$, и предположим, что $\bar{n}(\alpha) = \beta$, $n \in N$. Тогда отображение $\text{Int } \varphi_N(n) \circ \varphi_\alpha$ согласовано на U_α с $\varphi_\beta \circ \text{Int } n$.

Заметим, что это сразу следовало бы из шага (1), если бы мы имели $\alpha \neq \beta$ и $n \in N_{\alpha\beta}$ или даже если $\alpha = \beta$ и $n \in N_{\alpha\gamma}$ для некоторого другого простого корня γ . Чтобы редуцировать дело к одной из этих ситуаций, мы обратимся к лемме Титса (Д.12), которая дает последовательность простых корней $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k = \beta$, и последовательность $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$ элементов группы W такие, что $\bar{n} = \sigma_{k-1} \dots \sigma_0$, $\sigma_i(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$ ($0 \leq i \leq k-1$). Лемма Титса также утверждает, что для каждого i существует корень $\delta_i \in \Delta$, для которого $\sigma_i \in W_{\gamma_i \delta_i}$ и $\gamma_{i+1} = \gamma_i$

или δ_i . Таким образом, мы можем опять воспользоваться шагом (1).

(3) Пусть $\alpha \in \Phi$, $n, n' \in N$. Предположим, что $\bar{n}(\alpha) = \beta \in \Delta$ и $\bar{n}'(\alpha) = \beta' \in \Delta$. Тогда отображение $\text{Int } \varphi_N(n)^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \text{Int } n$ согласуется на U_α с $\text{Int } \varphi_N(n')^{-1} \circ \varphi_{\beta'} \circ \text{Int } n'$.

Нужно доказать, что отображение $\text{Int } \varphi_N(n'n^{-1}) \circ \varphi_\beta$ согласуется на U_β с $\varphi_{\beta'} \circ \text{Int } n'n^{-1}$. Но это следует из шага (2).

(4) Теперь мы в состоянии определить φ_α для всех $\alpha \in \Phi$. Существует простой корень β и элемент $n \in N$, для которых $\bar{n}(\alpha) = \beta$ (Д.4). При $x \in U_\alpha$ мы определим $\varphi_\alpha(x)$ равным $\text{Int } \varphi_N(n)^{-1} \varphi_\beta \text{Int } n(x)$. Согласно шагу (3) это правило не зависит от того, какие выбраны элементы β и n . В частности, отсюда следуют утверждения (а) и (б) предложения. Кроме того, ясно, что φ_α — изоморфизм группы U_α на соответствующую подгруппу группы H (так как φ_β — изоморфизм). Наконец, построение с учетом шага (3) дает (в). $\square$

32.5. Продолжение φ_T на B . Предполагаем по прежнему справедливость предположений (А), (Б), (В) в (32.4). Построенные в предложении 32.4 морфизмы φ_α ($\alpha \in \Phi^+$) можно теперь скомбинировать с φ_T , чтобы получить изоморфизм (многообразий) из B на соответствующую борелевскую подгруппу группы H . В самом деле, группа B изоморфна (как многообразие) произведению $T \times U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_m}$, где положительные корни $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ упорядочены любым способом (28.5). Поэтому $\varphi_T \times \varphi_{\alpha_1} \times \dots \times \varphi_{\alpha_m}$ индуцирует искомый изоморфизм φ_B . Конечно, это могло бы быть достигнуто в результате произвольного определения φ_α (каждая одномерная унитарная группа изоморфна G_a). Но мы хотим, чтобы φ_B был групповым изоморфизмом. Здесь основной момент заключается в рассмотрении коммутирования в группе U . Согласно предложению 28.1 каждая инвариантная относительно T замкнутая подгруппа (U_α, U_β) (где $\alpha, \beta \in \Phi^+$) есть произведение содержащихся в ней подгрупп U_γ . Используя технику предложения 27.2, мы можем определить, какие γ могут появиться

ся и в то же время получить довольно точную коммутаторную формулу.

Лемма. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi^+$, и пусть Ψ — множество всех корней вида $r\alpha + s\beta$ (r, s — целые положительные числа). Зафиксируем любой допустимый изоморфизм $e_\delta: G_\alpha \rightarrow U_\delta$. Тогда $(e_\alpha(x), e_\beta(y)) = \prod e_\gamma(c_{\alpha, \beta, \gamma} x^r y^s)$, где произведение взято по всем $\gamma = r\alpha + s\beta \in \Psi$ (в некотором фиксированном порядке) и где элемент $c_{\alpha, \beta, \gamma} \in K$ не зависит от x, y . В частности, $(U_\alpha, U_\beta) = e$, если $\Psi = \emptyset$ (например, если $\alpha + \beta \notin \Phi$ (Д.4)).

Доказательство. Упорядочим положительные корни $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ некоторым способом, согласованным с избранным порядком в Ψ ; как и выше, отображение произведения $U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_m} \rightarrow U$ есть изоморфизм многообразий. Определим, далее, морфизм $\psi: G_\alpha \times G_\beta \rightarrow U$ правилом $\psi(x, y) = (e_\alpha(x), e_\beta(y)) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_\alpha(-x) e_\beta(-y)$. Его образ имеет «нормальную форму» $e_{\alpha_1}(p_1(x, y))$

$e_{\alpha_m}(p_m(x, y))$, где p_i — полиномы от двух переменных:

$$p_i(X, Y) = \sum_{r, s \geq 0} a_{i, r, s} X^r Y^s.$$

По определению ψ мы имеем $\psi(x, 0) = e = \psi(0, y)$, так что в действительности XY делит полиномы $p_i(X, Y)$ (т. е. $r, s > 0$ всякий раз, когда $a_{i, r, s} \neq 0$).

Чтобы определить образ морфизма ψ , мы сопрягаем $\psi(x, y)$ некоторым элементом $t \in T$ и запишем результат двумя различными способами. С одной стороны, $(e_\alpha(\alpha(t)x), e_\beta(\beta(t)y)) = \prod_i e_{\alpha_i}(p_i(\alpha(t)x, \beta(t)y))$. Но правая часть здесь равна $\prod_i e_{\alpha_i}(\alpha_i(t)p_i(x, y))$. Сравнение показывает, что $a_{i, r, s} = 0$, если $\alpha_i \neq r\alpha + s\beta$ ($r, s > 0$); если же $\alpha_i = r\alpha + s\beta$, то r и s однозначно определяются по i (можно считать, что α и β линейно независимы). Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Как показывает лемма, групповое умножение в U определяется групповым умножением в некоторых подгруппах «ранга 2». Если α, β — простые корни, то рассматриваемая подгруппа совпадает с $U_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta | U_{\alpha\beta}$ — изоморфизм групп ввиду условия (Б) в (32.4). В общем случае, пусть α, β — положитель-

ные корни, которые мы можем предполагать различными (поскольку φ_α — уже изоморфизм групп). Согласно (Д.4), существуют элементы $\sigma \in W$ и $\gamma, \delta \in \Delta$ такие, что $\sigma(\alpha) = \gamma$ и $\sigma(\beta) \in \Phi_{\gamma\delta}^+$. Пусть, скажем, $\sigma = \bar{n}$ ($n \in N$). Тогда предложение 32.4(в) с учетом того факта, что $\varphi_{\gamma\delta}$ — групповой изоморфизм, позволяет нам заключить, что φ_β сохраняет формулу для коммутаторов элементов α, β , найденную в лемме. Отсюда легко следует, что $\varphi_\beta|U$ — изоморфизм алгебраических групп. В свою очередь, φ_β сохраняет действие тора T (при помощи сопряжения) на каждой группе U_α , опять ввиду предложения 32.4(в). Таким образом, φ_β — изоморфизм групп.

Заметим, что доказательство предположения (Б), которое будет дано в § 33, даст нам весьма точное описание констант, появляющихся в найденной выше формуле коммутатора для пар положительных корней.

32.6. Мультипликативность φ . Мы все еще предполагаем, что условия (А), (Б), (В) в (32.4) имеют место. Как в (32.1) мы можем определить теоретико-множественную биекцию $\varphi: G \rightarrow H$, продолжаящую оба отображения φ_N и φ_β , ограничение которой на большую клетку Ω есть изоморфизм многообразий. Доказательство теоремы 32.1 будет закончено (по модулю (А), (Б), (В)), если мы сможем показать, что φ — гомоморфизм групп, поскольку отсюда будет в свою очередь следовать, что φ — изоморфизм многообразий. Ограничения отображения φ на N, U, U^-, Z_α , как мы уже знаем, являются морфизмами алгебраических групп.

Для упрощения дела покажем, что достаточно установить мультипликативность отображения φ «в общем случае», т. е. что $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, когда элементы x, y, xy принадлежат Ω . В самом деле, из следующей леммы вытекает, что если отображение $\varphi|_\Omega$ обладает этим свойством, то оно допускает продолжение (единственное ввиду предложения 2.5(б)) до морфизма $\varphi': G \rightarrow H$, который является мультипликативным. Поскольку множество $\Omega \cap Z_\alpha$ плотно в Z_α ($\alpha \in \Delta$), то морфизм φ' согласуется с φ на Z_α . Но группы Z_α порождают G , так что φ' должен совпадать с φ .

Лемма. Пусть G_1, G_2 — связные алгебраические группы, U — открытое (непустое) подмножество группы G_1 , $\psi: U \rightarrow G_2$ — морфизм такой, что $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ вся-

кий раз, когда $x, y, xy \in U$. Тогда морфизм ψ продолжается (однозначно) до морфизма алгебраических групп $\psi': G_1 \rightarrow G_2$.

Доказательство. В силу леммы 7.4 $G_1 = U \cdot U$. Это подсказывает (в действительности диктует) нам правило для определения ψ' . Если элемент $x \in G_1$ записан в виде $x = yz$ ($y, z \in U$), то мы должны положить $\psi'(x) = \psi(y)\psi(z)$. Для того чтобы это определяло функцию, необходимо выполнение соотношения $(*)$ $\psi(y)\psi(z) = \psi(y')\psi(z')$, когда $y', z' \in U$ и $yz = y'z'$. Коль скоро это будет установлено, ψ' автоматически будет морфизмом, поскольку его ограничение на каждый сдвиг xU ($x \in U$) — морфизм. В свою очередь морфизм ψ' будет автоматически мультипликативным. Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что подмножество V множества $U \times U$, состоящее из тех пар (x, y) , для которых $xy \in U$, является плотным в $G_1 \times G_1$; дело в том, что V — пересечение открытых множеств $U \times U$ и $\mu^{-1}(U)$, где $\mu: G_1 \times G_1 \rightarrow G_1$ — морфизм произведения. Далее, морфизм $G_1 \times G_1 \rightarrow G_2$, определенный правилом $(x, y) \mapsto \psi'(xy)\psi'(y)^{-1}\psi'(x)^{-1}$ согласуется с постоянным морфизмом $(x, y) \mapsto e$ на V и, следовательно, всюду (предложение 2.5(б)).

Остается доказать соотношение $(*)$. Обозначим через D_1 (соответственно через D_2) диагональ в $G_1 \times G_1$ (соответственно в $G_2 \times G_2$); таким образом, D_1 и D_2 — замкнутые множества (2.5). Пусть X — прообраз D_1 относительно морфизма $(U \times U) \times (U \times U) \xrightarrow{\mu \times \mu} G_1 \times G_1$, и пусть Y — прообраз множества D_2 относительно композиции морфизмов $(U \times U) \times (U \times U) \xrightarrow{\psi \times \psi \times \psi \times \psi} (G_2 \times G_2) \times (G_2 \times G_2) \xrightarrow{u \times u} G_2 \times G_2$. Тогда оба множества X и Y замкнуты в $U \times U \times U \times U$. Легко видеть, что множество X неприводимо (упражнение 7.12), так как отображение $(\omega, x, y, z) \mapsto (\omega, x, y)$ индуцирует изоморфизм многообразий из прообраза множества D_1 в $(G_1 \times G_1) \times (G_1 \times G_1)$ на $G_1 \times G_1 \times G_1$, и X — открытое подмножество первого из них.

Если V — определенное выше открытое подмножество множества $U \times U$, то из исходных предположений относительно ψ следует, что множество $X' = (V \times V) \cap X$

содержится в Y . Но множество X' открыто (и, следовательно, плотно) в неприводимом замкнутом множестве X , и из замкнутости Y следует, что $X \subset Y$. $\square$

Остается доказать, что отображение $\varphi|_{\Omega}$ «обобщенно» *) мультипликативно.

Предложение. *Предположим, что выполнены условия (А), (Б), (В) в (32.4) и определен морфизм $\varphi: G \rightarrow H$, как указано выше. Если $x, y, xy \in \Omega$, то $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.*

Доказательство. Необходимо установить несколько предварительных утверждений, относящихся к φ , а не только к $\varphi|_{\Omega}$. Мы будем существенно использовать тот факт, что ограничения φ на Z_a, N, U, U^- , как уже установлено, — гомоморфизмы групп.

(1) Пусть $n \in N$ — представитель того элемента группы W , который переставляет положительные и отрицательные корни, так что $nUn^{-1} = U^-$, $nU^{-}n^{-1} = U$. Тогда для всех $u \in U$ (соответственно $u \in U^-$) мы имеем $\varphi(nun^{-1}) = \varphi(n)\varphi(u)\varphi(n^{-1})$.

Поскольку $\varphi|_U$ и $\varphi|_{U^-}$ — гомоморфизмы групп, то это сразу следует из предложения 32.4(в).

(2) Пусть $u \in B, v \in B^-, x \in \Omega$. Тогда $\varphi(vxu) = \varphi(v)\varphi(x)\varphi(u)$.

Запишем $v = v_1t_1, x = v_2t_2u_2, u = t_3u_3$ ($v_i \in U^-, t_i \in T, u_i \in U$). Тогда, по определению, $\varphi(v)\varphi(x)\varphi(u) = \varphi(v_1)\varphi(t_1)\varphi(v_2)\varphi(t_2)\varphi(u_2)\varphi(t_3)\varphi(u_3)$. Подобным образом $\varphi(vxu) = \varphi(v_1t_1v_2t_1^{-1}t_1t_2t_3t_3^{-1}u_2t_3u_3) = \varphi(v_1t_1v_2t_1^{-1})\varphi(t_1t_2t_3)$

$\varphi(t_3^{-1}u_2t_3u_3)$, причем последнее равенство имеет место ввиду того, что $t_1v_2t_1^{-1} \in U^-$ и $t_3^{-1}u_2t_3 \in U$. Так как $\varphi|_U$ и $\varphi|_{U^-}$ — гомоморфизмы, то левые и правые части допускают дальнейшее разложение. Сравнение с первым равенством показывает, что мы должны проверить следующие равенства:

$$\varphi(t_1v_2t_1^{-1}) = \varphi(t_1)\varphi(v_2)\varphi(t_1^{-1}),$$

$$\varphi(t_3^{-1}u_2t_3) = \varphi(t_3^{-1})\varphi(u_2)\varphi(t_3).$$

Но они легко следуют из предложения 32.4(в), если принять во внимание, как φ определено на U и на U^- .

*) В оригинале «generically». — Прим. перев.

(3) Пусть $\alpha \in \Delta$, $x \in \Omega$. Если элемент $\text{Int } n_\alpha(x)$ принадлежит Ω , то $\varphi(n_\alpha x n_\alpha^{-1}) = \varphi(n_\alpha) \varphi(x) \varphi(n_\alpha^{-1})$.

Запишем $x = vx_{-\alpha}tx_\alpha u$, где $t \in T$, $x_{-\alpha} \in U_{-\alpha}$, $x_\alpha \in U_\alpha$, v принадлежит произведению всех $U_{-\beta}$ и u принадлежит произведению всех U_β ($\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$). Эти последние произведения нормализуются автоморфизмом $\text{Int } n_\alpha$, так как σ_α переставляет элементы множества $\Phi^+ - \{\alpha\}$ (Д.5). Если $x = u$ или $x = v$, то искомая формула следует из предложения 32.4(в). Ввиду шага (2) достаточно проверить эту формулу при $x = x_{-\alpha}tx_\alpha \in Z_\alpha$. Но мы уже знаем (32.3), что $\varphi|_{Z_\alpha}$ — гомоморфизм и $n_\alpha \in Z_\alpha$.

(4) Пусть $n \in N$, $x \in \Omega$. Если $\text{Int } n(x) \in \Omega$, то $\varphi(nxn^{-1}) = \varphi(n)\varphi(x)\varphi(n)^{-1}$.

Это верно при $n \in T$ ввиду предложения 32.4(в) и определения φ . Это верно также при $n = n_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) ввиду шага (3). Произвольный элемент n можно построить из элементов тора T и последовательности таких элементов n_α , но мы не можем гарантировать, что последовательные образы элемента x принадлежат Ω , так что общий случай не является тривиальным следствием этих частных случаев. Заметим, что обе части желаемой формулы определяют морфизмы множества $\Omega \cap \text{Int } n^{-1}(\Omega)$ в H . Для того чтобы убедиться, что эти морфизмы совпадают, достаточно проверить, что (*) существует открытое подмножество V_n множества Ω (зависящее от n) такое, что $\text{Int } n(V_n) \subset \Omega$ и такое, что морфизм $\varphi \circ \text{Int}(n)$ согласуется с $\text{Int } \varphi(n) \circ \varphi$ на V_n . В свою очередь достаточно доказать, что если утверждение (*) имеет место при $n' \in N$, то оно имеет место при $n = n'n_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$). Пусть множество $V_{n'}$ задано; мы положим $V_n = \Omega \cap \text{Int}(n_\alpha)^{-1} V_{n'}$, так что $\text{Int } n(V_n) \subset \text{Int } n'(V_{n'}) \subset \Omega$. Если $x \in V_n$, то $\text{Int } n(x) = \text{Int } n' \circ \text{Int } n_\alpha(x)$. Так как $\text{Int } n_\alpha(x) \in V_{n'}$, то $\varphi(\text{Int } n(x)) = \varphi(\text{Int } n' \circ \text{Int } n_\alpha(x)) = \text{Int } \varphi(n') \varphi(\text{Int } n_\alpha(x))$ по предположению. Ввиду шага (3) мы имеем $\varphi(\text{Int } n_\alpha(x)) = \text{Int } \varphi(n_\alpha) (\varphi(x))$, откуда следует (*).

(5) Теперь мы в состоянии закончить доказательство предложения. При $x, x' \in \Omega$ запишем $x = vtu$, $x' = v't'u'$ ($v, v' \in U^-$; $t, t' \in T$; $u, u' \in U$), так что $xx' = vtuv't'u'$. Ввиду шага (2) и того факта, что $U^- \Omega U = \Omega$, достаточно показать, что из $uv' \in \Omega$ следует $\varphi(uv') =$

$= \varphi(u)\varphi(v')$. Как и в шаге (1), пусть $n \in N$ отображает U в U^- , так что

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi(n)^{-1} \varphi(nun^{-1}) \varphi(n), \\ \varphi(v') &= \varphi(n)^{-1} \varphi(nv'n^{-1}) \varphi(n).\end{aligned}$$

Тогда $\varphi(u)\varphi(v') = \varphi(n)^{-1} \varphi(nun^{-1}) \varphi(nv'n^{-1}) \varphi(n)$. Так как $nun^{-1} \in U^-$, $nv'n^{-1} \in U$, то два внутренних члена можно скомбинировать (по определению φ). Предположение о том, что $uv' \in \Omega$ позволяет нам теперь закончить доказательство ссылкой на шаг (4). $\square$

Упражнения

1. Предположим, что все полупростые алгебраические группы известны (с точностью до изоморфизма). В какой мере вы могли бы классифицировать все редуктивные группы?

2. Для системы корней Φ типа D_l (l четно) существует автоморфизм графа этой системы, оставляющий Λ и Φ инвариантными и переставляющий две из трех подгрупп индекса 2 в Λ ; однако если $l \neq 4$, то никакой автоморфизм группы Λ , оставляющий систему Φ инвариантной, не переставляет какую-нибудь из этих двух подгрупп с третьей.

3. Вывести из теоремы 32.1, что если G — группа односвязного или присоединенного типа, то каждый автоморфизм графа системы корней Φ индуцирует автоморфизм группы G (ср. с теоремой 27.4). В какой мере это верно для произвольной полупростой группы G ?

4. Вывести из теоремы 32.1, что все полупростые группы типа E_8 (соответственно F_4 , соответственно G_2) изоморфны.

5. Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно три различные редуктивные группы над K размерности 4 и полупростого ранга 1 (ср. с упражнением 25.5).

6. Согласно (32.3) группа (Z_α, Z_α) изоморфна либо $SL(2, K)$, либо $PGL(2, K)$. Доказать, что первый случай имеет место, если группа G односвязна, тогда как последний может не иметь места, если группа G — присоединенного типа. (Пусть λ_α — фундаментальный доминантный вес относительно корня $\alpha \in \Delta$. Его ограничение на максимальный тор группы (Z_α, Z_α) есть вес λ , для которого одновременно $\sigma_\alpha \lambda = \lambda - \alpha$ и $\sigma_\alpha \lambda = -\lambda$.)

Замечания. Теорема 32.1 (или ее более общий вариант, рассматривающий вопрос об изогениях, а не только об изоморфизмах) принадлежит Шевалле [8, exposé 23, 24]. Однако метод доказательства этой теоремы, которому мы следуем здесь, близок к методу в СГ, exposé XXIII, за исключением предложения 32.3, которое основано на идее Шевалле [8, exposé 18]. Лемма 32.6 заимствована из СГ, exposé XVIII.

§ 33. Системы корней ранга 2

Мы сохраняем обозначения § 32.

33.1. Другая формулировка условий (А), (Б), (В). Расширение морфизма $\varphi_T: T \rightarrow H$ до изоморфизма $\varphi: G \rightarrow H$ было выполнено при некоторых предположениях, относящихся к каноническим подсистемам $\Phi_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \Delta$) ранга 1 или 2 системы корней Φ . В (32.4) они были сформулированы следующим образом:

(А) $\varphi_T(t_{\alpha\beta}) = (h_\alpha h_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, где $t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$ и $m(\alpha, \beta)$ — порядок элемента $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ в W .

(Б) Для каждой пары $\alpha, \beta \in \Delta$ существует изоморфизм $\varphi_{\alpha\beta}$ (алгебраических групп) группы $U_{\alpha\beta}$ на соответствующую подгруппу группы H такой, что $\varphi_{\alpha\beta}$ является расширением как φ_α , так и φ_β .

(В) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$. Если $\gamma \in \Phi_{\alpha\beta}^+$ и $\gamma \neq \alpha$, то морфизм $\text{Int } h_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}$ согласуется на U_γ с морфизмом $\varphi_{\alpha\beta} \circ \text{Int } n_\alpha$.

Заметим, что если $\alpha = \beta$, то предположения (Б) и (В) пропадают, тогда как выполнение (А) следует из классификации групп ранга 1 в (32.3).

На первый взгляд эти три утверждения относятся к паре групп G и H . Но их проверка в действительности требует работы только внутри группы G . Дело в том, что нам требуется лишь показать, что сделанный выбор (вложений $e_\alpha, e_{-\alpha}$, и, следовательно, n_α при $\alpha \in \Delta$) полностью определяет элементы $t_{\alpha\beta}$, коммутирование в $U_{\alpha\beta}$ и действие морфизма $\text{Int } n_\alpha$ на соответствующие корневые подгруппы. Тогда соответствующий выбор в группе H обязан привести к нужным результатам. (Этот подход ведет к нахождению системы образующих и соотношений для группы G .) Имея все это в виду, мы дадим новую формулировку утверждений (А), (Б), (В).

Для доказательства утверждения (А) достаточно выразить $t_{\alpha\beta}$ через t_α и t_β способом, зависящим только от содержащей эти элементы системы корней ранга 2, поскольку мы уже знаем, что t_α и t_β полностью определяются этим набором данных.

Для доказательства утверждения (Б) для каждого корня $\gamma \in \Phi_{\alpha\beta}^+$ мы зададим морфизм $e_\gamma: G_\alpha \rightarrow U_\gamma$ способом, зависящим только от системы корней, а затем покажем, что константы, которые появляются в формуле

для коммутатора (лемма 32.5) для всех пар корней в $\Phi_{\alpha\beta}^+$, полностью определены. Таким образом, теоретико-групповое строение группы $U_{\alpha\beta}$ будет зависеть только от системы корней. С другой стороны, легко построить изоморфизм многообразия $U_{\alpha\beta}$ на соответствующую подгруппу группы H (см. 32.5); использование вложения e_γ и соответствующего вложения e'_γ гарантирует нам, что этот изоморфизм многообразий будет гомоморфизмом групп. В качестве примера того, как следует ввести отображение e_γ , рассмотрим тип A_2 ; в этом случае положительные корни — это $\alpha, \beta, \alpha + \beta$. Нам уже даны e_α и n_β , так что мы положим $e_{\alpha+\beta}(x) = \text{Int } n_\beta(e_\alpha(x))$. (Конечно, возникает еще вопрос, как это связано с другим естественным выбором, когда α и β переставлены местами.) В этом случае групповое умножение в $U_{\alpha\beta}$ будет описано, если мы покажем, что $(e_\beta(y), e_\alpha(x)) = e_{\alpha+\beta}(xy)$ и что элемент $e_{\alpha+\beta}(z)$ перестановочен со всеми остальными.

Рассмотрим теперь (B). Требование $\gamma \neq \alpha$ влечет положительность корня $\delta = \sigma_\alpha(\gamma)$, так что e_γ и e_δ заданы (ср. с предыдущим рассуждением для (B)). Композиция автоморфизма $\text{Int } n_\alpha$ с e_γ приводит к другому допустимому изоморфизму $G_\alpha \rightarrow U_\delta$, который мы сопоставим e_δ способом, зависящим только от системы корней. Это обеспечит выполнение того же соотношения для группы H , откуда будет следовать (B). Например, в рассуждении выше для групп типа A_2 мы оставили открытым вопрос, как $\text{Int } n_\alpha \circ e_\beta$ связан с $e_{\alpha+\beta}$; будет показано, что $n_\alpha e_\beta(x) n_\alpha^{-1} = e_{\alpha+\beta}(-x)$ ($x \in G_\alpha$). Этот вывод можно получить несколько более эффективно, если воспользоваться алгеброй Ли. Выбор допустимого изоморфизма $e_\gamma: G_\alpha \rightarrow U_\gamma$ приводит к выбору базисного вектора $x_\gamma = de_\gamma(1)$ в $\mathfrak{g}_\gamma$ см. (26.3). Этот выбор можно изменить только на скалярный множитель, т. е. на автоморфизм группы G_α . Равенство, указанное выше, эквивалентно соотношению $\text{Ad } n_\alpha(x_\beta) = -x_{\alpha+\beta}$, где выбор $x_{\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\beta(x_\alpha)$ был уже сделан ранее.

Коль скоро мы определяем x_γ для непростого положительного корня γ при помощи правила $x_\gamma = \text{Ad } n_\beta(x_\alpha)$ ($\alpha, \beta \in \Delta$), мы тем самым предписываем элементу $x_{-\gamma}$ быть равным $\text{Ad } (n_\beta)(x_{-\alpha})$. После того, как мы опреде-

лили ε_γ и $\varepsilon_{-\gamma}$, мы можем положить $n_\gamma = \varepsilon_\gamma(1)\varepsilon_{-\gamma}(-1)\varepsilon_\gamma(1)$. Тогда $\text{Int}(n_\beta)$ преобразует канонический выбор, сделанный в группе Z_α , в соответствующий выбор в Z_γ . В результате мы можем вычислить $n_\beta n_\alpha n_\beta^{-1} = (n_\beta \varepsilon_\alpha(1) n_\beta^{-1})$

$$(n_\beta \varepsilon_{-\alpha}(-1) n_\beta^{-1}) (n_\beta \varepsilon_\alpha(1) n_\beta^{-1}) = \varepsilon_\gamma(1) \varepsilon_{-\gamma}(-1) \varepsilon_\gamma(1) = n_\gamma.$$

Имеется только четыре системы корней ранга 2 (Д.7): $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 ($= C_2$), G_2 . Только в случае G_2 вычисления оказываются длинными. Быть может, стоит указать, что G_2 не может играть роль $\Phi_{\alpha\beta}$ в неприводимой системе корней, отличной от себя самой; таким образом, теорема об изоморфизме для типов $A-F$ не зависит от этих вычислений.

Заметим еще, что фундаментальная группа группы G влияет только на природу элементов t_α (т. е. $t_\alpha = e$ или нет). Другие соотношения, входящие в (А) (Б) (В), определяются только системой корней.

33.2. Предварительные соображения. Прежде чем заняться непосредственно системами корней A_2 , B_2 , G_2 , сделаем несколько предварительных замечаний.

Коммутаторная формула (лемма 32.5) установлена для пар положительных корней, но она, разумеется, применима всякий раз, когда два корня можно сделать положительными подходящим выбором базы. Мы будем очень часто пользоваться тем фактом, что $(U_\alpha, U_\beta) = e$, если $\alpha + \beta \notin \Phi$, для того, чтобы преобразовывать формулы. В частности, если ни $\alpha + \beta$, ни $\alpha - \beta$ не являются корнями, то определение n_α показывает, что $\text{Ad } n_\alpha(x_\beta) = x_\beta$, а также, что $n_\alpha n_\beta = n_\beta n_\alpha$. Эти рассуждения уже решают вопрос в случае $A_1 \times A_1$.

Предложение. Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — система корней типа $A_1 \times A_1$ с положительными корнями α, β . Тогда:

(а) $t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^2 = t_\alpha t_\beta = (n_\beta n_\alpha)^2 = t_{\beta\alpha}$;

(б) $(U_\alpha, U_\beta) = e$;

(в) $\text{Ad } n_\alpha(x_\beta) = x_\beta$, $\text{Ad } n_\beta(x_\alpha) = x_\alpha$. $\square$

Нам необходима дополнительная информация об элементах t_α : что можно сказать о $\beta(t_\alpha)$ или о $n_\beta t_\alpha n_\beta^{-1}$, если $\beta \in \Delta$?

Напомним (Д.11) понятие **дуальной системы корней** Φ^* . Это — множество векторов $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ в евклидовом пространстве E , в котором задана система Φ ,

В случаях A_2, B_2, G_2 Φ^* — система корней того же самого типа; но длинный корень α переходит в короткий корень α^* , если имеется два значения длин корней. Группа Вейля системы Φ^* канонически изоморфна W , причем $\sigma_\alpha(\beta^*) = \beta^* - \langle \beta^*, \alpha^* \rangle \alpha^* = \beta^* - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha^*$, где $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$.

Наша цель — построить экземпляр системы корней Φ^* непосредственно в $Y(T)$ таким образом, чтобы при естественном спаривании $X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ число $\langle \beta, \alpha^* \rangle$ было равно числу Картана $\langle \beta, \alpha \rangle$. Для каждого корня $\alpha \in \Delta$ группа (Z_α, Z_α) изоморфна $SL(2, K)$ или $PGL(2, K)$

(32.3). В любом случае соответствие $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ при-

водит к однопараметрической подгруппе $\gamma: G_m \rightarrow T \cap (Z_\alpha, Z_\alpha)$, для которой $t_\alpha = \gamma(-1)$ и $\langle \alpha, \gamma \rangle = 2$ (т. е. $\alpha(\gamma(x)) = x^2$). Это — наш кандидат на роль α^* .

Группа (Z_α, Z_α) содержится в каждой максимальной параболической подгруппе $P_{\Delta - \{\beta\}}$ ($\beta \neq \alpha$) и, следовательно, оставляет неподвижным некоторый вектор (в некотором рациональном представлении группы G), вес которого равен умноженному на положительное число фундаментальному доминантному весу λ_β , соответствующему корню β (см. первые три абзаца в (31.4)). Отсюда следует, что для некоторого положительного числа c мы имеем $\lambda_\beta^c(\gamma(x)) = 1$ для всех $x \in G_m$ или $\langle c\lambda_\beta, \gamma \rangle = 0$. Векторные пространства $\mathbb{R} \otimes Y(T)$ и $E = \mathbb{R} \otimes X(T)$ двойственны относительно спаривания, и, следовательно, корень γ соответствует единственной линейной функции на E , значение которой на α равно 2, и равно 0 на всех λ_β ($\beta \neq \alpha$). Но при естественном спаривании пространства E с самим собой при помощи () эту роль играет в точности α^* (Д.11). В результате мы получаем базу $\{\alpha^* | \alpha \in \Delta\}$ для системы корней в $\mathbb{R} \otimes Y(T)$, изоморфной Φ^* , причем $\langle \beta, \alpha^* \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ ($\alpha, \beta \in \Delta$) см. (Д.11). Действие группы W описано в упражнении 24.8.

Следующие основные формулы теперь вполне очевидны:

$$(a) \beta(t_\alpha) = \beta(\alpha^*(-1)) = (-1)^{\langle \beta, \alpha \rangle};$$

$$(b) n_\beta t_\alpha n_\beta^{-1} = (\sigma_\beta \alpha^*)(-1) = (\alpha^* - \langle \beta, \alpha \rangle \beta^*)(-1) = \\ = \alpha^*(-1) \beta^*(-1)^{-\langle \beta, \alpha \rangle} = t_\alpha t_\beta^{-\langle \beta, \alpha \rangle} (\alpha, \beta \in \Delta).$$

33.3. Тип A_2 . Предложение. Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — система корней типа A_2 с положительными корнями $\alpha, \beta, \alpha + \beta$. Положим $x_{\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\beta(x_\alpha)$. Тогда:

$$(a) \quad t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^3 = e = (n_\beta n_\alpha)^3 = t_{\beta\alpha}$$

$$(б) \quad e_\beta(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_{\alpha+\beta}(xy)$$

для всех $x, y \in G_\alpha$.

$$(в) \quad \text{Ad } n_\alpha(x_\beta) = -x_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{\alpha+\beta}) = x_\beta, \quad \text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = -x_\alpha.$$

Доказательство. Так как $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -1$ (Д.7), то мы имеем $\alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = -1$ (33.2(a)). Из определения $x_{\alpha+\beta}$ следует, что $\text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = \alpha(t_\beta)x_\alpha = -x_\alpha$, как и утверждается в (в). С другой стороны, $\text{Ad } n_\alpha(x_\beta) = b x_{\alpha+\beta}$ для некоторого $b \in K$, откуда $\text{Ad } n_\alpha(x_{\alpha+\beta}) = \beta(t_\alpha) b^{-1} x_\beta = -b^{-1} x_\beta$. Таким образом, второе утверждение в (б) требует, чтобы b равнялось -1 .

Лемма 32.5 показывает, что для некоторого элемента $a \in K$, не зависящего от x и y , имеет место равенство

$$(1) \quad e_\beta(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_{\alpha+\beta}(axy).$$

Чтобы доказать (б), требуется проверить, что $a = 1$.

Применяя $\text{Int } n_\beta$ к обеим частям равенства (1), получим

$$(2) \quad e_{-\beta}(-y) e_{\alpha+\beta}(x) = e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(-y) e_\alpha(-axy).$$

По определению $n_\beta e_\alpha(x) n_\beta^{-1} = e_{\alpha+\beta}(x)$, или

$$(3) \quad e_\beta(1) e_{-\beta}(-1) e_\beta(1) e_\alpha(x) e_\beta(-1) e_{-\beta}(1) e_\beta(-1) = e_{\alpha+\beta}(x).$$

Так как $\alpha + 2\beta \notin \Phi$, то это можно переписать в виде

$$(4) \quad e_\beta(1) e_\alpha(x) e_\beta(-1) = e_{-\beta}(1) e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(-1).$$

После применения (1) к левой части (при $y = 1$) и применения (2) к правой части этого равенства (при $y = -1$), мы получаем

$$(5) \quad e_\alpha(x) e_\beta(1) e_{\alpha+\beta}(ax) e_\beta(-1) = e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(1) e_\alpha(ax) e_{-\beta}(-1).$$

Поскольку $\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \beta \notin \Phi$, то (5) можно переписать в виде

$$(6) \quad e_\alpha(x) e_{\alpha+\beta}(ax) = e_\alpha(ax) e_{\alpha+\beta}(x).$$

Отсюда следует, что $a = 1$, что доказывает (б). Применим теперь $\text{Int } n_\alpha$ к обеим частям равенства (1):

$$(7) \quad \varepsilon_{\alpha+\beta}(by) \varepsilon_{-\alpha}(-x) = \varepsilon_{-\alpha}(-x) \varepsilon_{\alpha+\beta}(by) \varepsilon_{\beta}(-b^{-1}xy).$$

Из соотношения $n_\alpha \varepsilon_{\beta}(y) n_\alpha^{-1} = \varepsilon_{\alpha+\beta}(by)$ мы выводим (при помощи рассуждения такого же сорта, которое привело нас к (4)):

$$(8) \quad \varepsilon_{\alpha}(1) \varepsilon_{\beta}(y) \varepsilon_{\alpha}(-1) = \varepsilon_{-\alpha}(1) \varepsilon_{\alpha+\beta}(by) \varepsilon_{-\alpha}(-1).$$

Применим теперь (1) к левой части и (7) — к правой части (8):

$$(9) \quad \varepsilon_{\beta}(y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(-y) = \varepsilon_{\beta}(-b^{-1}y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(by).$$

Отсюда следует, что $b = -1$, что доказывает (в). Остается доказать (а). Начнем с равенства

$$(10) \quad n_\alpha n_\beta n_\alpha = n_\alpha n_\beta n_\alpha^{-1} n_\alpha^2 = n_{\alpha+\beta}^{-1} t_\alpha,$$

где $n_\alpha n_\beta n_\alpha^{-1}$ вычислено с использованием равенства $n_\beta = \varepsilon_{\beta}(1) \varepsilon_{-\beta}(-1) \varepsilon_{\beta}(1)$, как указано в (33.1). Из (10) и (33.2) (формула (б)) мы получаем

$$(11) \quad n_\beta n_\alpha n_\beta n_\alpha = n_\beta n_{\alpha+\beta}^{-1} t_\alpha n_\beta = \\ = n_\beta n_{\alpha+\beta}^{-1} n_\beta^{-1} t_\alpha t_\beta^{-\langle \beta, \alpha \rangle} t_\beta = n_\alpha t_\alpha = n_\alpha^{-1}.$$

Отсюда следует (а). $\square$

33.4. Тип B_2 . Предложение. Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — система корней типа B_2 с положительными корнями $\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta$. Положим $x_{\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\beta(x_\alpha)$, $x_{2\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\alpha(x_\beta)$. Тогда:

$$(а) \quad t_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta)^4 = t_\alpha = (n_\beta n_\alpha)^4 = t_{\beta\alpha}.$$

$$(б) \quad \text{при } x, y \in G_a \text{ мы имеем } \varepsilon_{\beta}(y) \varepsilon_{\alpha}(x) = \varepsilon_{\alpha}(x) \varepsilon_{\beta}(y).$$

$$\cdot \varepsilon_{\alpha+\beta}(xy) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(x^2y) \text{ и } \varepsilon_{\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{\alpha}(x) = \\ = \varepsilon_{\alpha}(x) \varepsilon_{\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(2xy).$$

$$(в) \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{\alpha+\beta}) = -x_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{2\alpha+\beta}) = x_\beta,$$

$$\text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = -x_\alpha, \quad \text{Ad } n_\beta(x_{2\alpha+\beta}) = x_{2\alpha+\beta}.$$

Доказательство. Так как $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$, $\langle \beta, \alpha \rangle = -2$, то $\alpha(t_\beta) = -1$, $\beta(t_\alpha) = 1$ (33.2). Из определения $x_{\alpha+\beta}$ и $x_{2\alpha+\beta}$ мы выводим, что $\text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = \alpha(t_\beta) x_\alpha = -x_\alpha$ и

что $\text{Ad } n_\alpha(x_{2\alpha+\beta}) = \beta(t_\alpha) x_\beta = x_\beta$, как и утверждалось в (в). Кроме того, $\text{Ad } n_\beta(x_{2\alpha+\beta}) = x_{2\alpha+\beta}$, ибо $2\alpha + 2\beta$, $2\alpha \notin \Phi$ (33.2). Чтобы завершить доказательство утверждения (в), мы должны доказать, что $d = -1$, где $\text{Ad } n_\alpha(x_{\alpha+\beta}) = dx_{\alpha+\beta}$.

Согласно лемме 32.5 для подходящих элементов $a, b, c \in K$ (не зависящих от $x, y \in G_a$) имеют место соотношения:

$$(1) \quad e_\beta(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_{\alpha+\beta}(axy) e_{2\alpha+\beta}(bx^2y),$$

$$(2) \quad e_{\alpha+\beta}(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_{\alpha+\beta}(y) e_{2\alpha+\beta}(cxy).$$

Для доказательства (б) необходимо убедиться в том, что $a = b = 1$, $c = 2$. Применяя $\text{Int } n_\alpha$ к обеим частям (1) (соответственно (2)), получаем

$$(3) \quad e_{2\alpha+\beta}(y) e_{-\alpha}(-x) = \\ = e_{-\alpha}(-x) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{\alpha+\beta}(adx y) e_\beta(bx^2y),$$

$$(4) \quad e_{\alpha+\beta}(dy) e_{-\alpha}(-x) = e_{-\alpha}(-x) e_{\alpha+\beta}(dy) e_\beta(cxy).$$

Подобным образом, применяя $\text{Int } n_\beta$ к обеим частям (1), получим

$$(5) \quad e_{-\beta}(-y) e_{\alpha+\beta}(x) = \\ = e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(-y) e_\alpha(-axy) e_{2\alpha+\beta}(bx^2y).$$

Из соотношения $n_\beta e_\alpha(x) n_\beta^{-1} = e_{\alpha+\beta}(x)$ и того факта, что $\alpha + 2\beta \notin \Phi$ следует

$$(6) \quad e_\beta(1) e_\alpha(x) e_\beta(-1) = e_{-\beta}(1) e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(-1).$$

Применяя (1) к левой части (при $y = 1$) и (5) к правой части (при $y = -1$), получим:

$$(7) \quad e_\alpha(x) e_\beta(1) e_{\alpha+\beta}(ax) e_{2\alpha+\beta}(bx^2) e_\beta(-1) = \\ = e_{\alpha+\beta}(x) e_{-\beta}(1) e_\alpha(ax) e_{2\alpha+\beta}(-bx^2) e_{-\beta}(-1).$$

Поскольку $\alpha + 2\beta$, $2\alpha + 2\beta$, $\alpha - \beta$, $2\alpha \notin \Phi$, то это можно переписать в виде

$$(8) \quad e_\alpha(x) e_{\alpha+\beta}(ax) e_{2\alpha+\beta}(bx^2) = e_{\alpha+\beta}(x) e_\alpha(ax) e_{2\alpha+\beta}(-bx^2).$$

В свою очередь мы можем применить (2) к правой части (8):

$$(9) \quad \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_{\alpha+\beta}(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(bx^2) = \\ = \varepsilon_\alpha(ax) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{2\alpha+\beta}((ac-b)x^2),$$

откуда $a=1$ и $c=2b$. Из соотношения $n_\alpha \varepsilon_\beta(y) n_\alpha^{-1} = \varepsilon_{2\alpha+\beta}(y)$ и того, что $3\alpha + \beta \notin \Phi$, мы, далее, получаем:

$$(10) \quad \varepsilon_\alpha(1) \varepsilon_\beta(y) \varepsilon_\alpha(-1) = \varepsilon_{-\alpha}(1) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{-\alpha}(-1).$$

После применения (1) к левой части и (3) к правой части, (10) примет вид:

$$(11) \quad \varepsilon_\beta(y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(-ay) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(by) = \varepsilon_{2\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(ady) \varepsilon_\beta(by).$$

Так как группы $U_{\alpha+\beta}$, $U_{2\alpha+\beta}$, U_β все поэлементно перестановочны, то мы заключаем, что $b=1$, $-a=ad$, откуда $a=b=1$, $c=2$, $d=-1$. Это завершает доказательство утверждений (б) и (в). Остается доказать (а). Начнем с соотношения

$$(12) \quad n_\alpha n_\beta n_\alpha = n_\alpha n_\beta n_\alpha^{-1} t_\alpha = n_{2\alpha+\beta} t_\alpha.$$

В свою очередь

$$(13) \quad n_\beta n_\alpha n_\beta n_\alpha n_\beta = n_\beta n_{2\alpha+\beta} n_\beta^{-1} t_\alpha t_\beta^{-\langle \beta, \alpha \rangle} t_\beta = n_{2\alpha+\beta} t_\alpha t_\beta,$$

ибо $\langle \beta, \alpha \rangle = -2$ и $t_\beta^2 = e$. Тогда

$$(14) \quad (n_\alpha n_\beta)^3 n_\alpha = (n_\alpha n_{2\alpha+\beta} n_\alpha^{-1}) (n_\alpha t_\alpha t_\beta n_\alpha^{-1}) t_\alpha = \\ = n_\beta t_\alpha t_\beta t_\alpha^{-\langle \alpha, \beta \rangle} t_\alpha = n_\beta t_\alpha t_\beta.$$

Наконец, из (14) следует, что $(n_\beta n_\alpha)^4 = t_\alpha = (n_\alpha n_\beta)^4$. $\square$

33.5. Тип G_2 . Предложение. Пусть $\Phi_{\alpha\beta}$ — система корней типа G_2 с положительными корнями α , β , $\alpha + \beta$, $2\alpha + \beta$, $3\alpha + \beta$, $3\alpha + 2\beta$. Положим $x_{\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\beta(x_\alpha)$,

$$x_{2\alpha+\beta} = \text{Ad } n_\alpha(x_{\alpha+\beta}), \quad x_{3\alpha+\beta} = -\text{Ad } n_\alpha(x_\beta),$$

$$x_{3\alpha+2\beta} = \text{Ad } n_\beta(x_{3\alpha+\beta}).$$

Тогда:

$$(a) \quad t_{\alpha\beta} = (\sigma_\alpha \sigma_\beta)^6 = e = (\sigma_\beta \sigma_\alpha)^6 = t_{\beta\alpha};$$

(б) для всех $x, y \in G_a$ мы имеем:

$$e_\beta(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_{\alpha+\beta}(xy) e_{2\alpha+\beta}(x^2y) e_{3\alpha+\beta}(x^3y) \cdot \\ \cdot e_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2),$$

$$e_{\alpha+\beta}(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_{\alpha+\beta}(y) e_{2\alpha+\beta}(2xy) e_{3\alpha+\beta}(3x^2y) \cdot \\ \cdot e_{3\alpha+2\beta}(3xy^2),$$

$$e_{2\alpha+\beta}(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+\beta}(3xy),$$

$$e_{3\alpha+\beta}(y) e_\beta(x) = e_\beta(x) e_{3\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+2\beta}(-xy),$$

$$e_{2\alpha+\beta}(y) e_{\alpha+\beta}(x) = e_{\alpha+\beta}(x) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+2\beta}(3xy);$$

$$(в) \text{ Ad } n_\alpha(x_{2\alpha+\beta}) = -x_{\alpha+\beta}, \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{3\alpha+\beta}) = x_\beta,$$

$$\text{Ad } n_\alpha(x_{3\alpha+2\beta}) = x_{3\alpha+2\beta}, \quad \text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = -x_\alpha,$$

$$\text{Ad } n_\beta(x_{2\alpha+\beta}) = x_{2\alpha+\beta}, \quad \text{Ad } n_\beta(x_{3\alpha+2\beta}) = -x_{3\alpha+\beta}.$$

Доказательство. Так как $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$, $\langle \beta, \alpha \rangle = -3$, то $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\beta) = -1$. Из определений следует, что:

$$(1) \quad \text{Ad } n_\beta(x_{\alpha+\beta}) = \alpha(t_\beta) x_\alpha = -x_\alpha,$$

$$(2) \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{2\alpha+\beta}) = \alpha(t_\alpha) \beta(t_\alpha) x_{\alpha+\beta} = -x_{\alpha+\beta},$$

$$(3) \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{3\alpha+\beta}) = -\beta(t_\alpha) x_\beta = x_\beta,$$

$$(4) \quad \text{Ad } n_\beta(x_{3\alpha+2\beta}) = \alpha(t_\beta)^3 \beta(t_\beta) x_{3\alpha+\beta} = -x_{3\alpha+\beta}.$$

Так как $(3\alpha + 2\beta) \pm \alpha$, $(2\alpha + \beta) \pm \beta \notin \Phi$, то мы также получаем:

$$(5) \quad \text{Ad } n_\alpha(x_{3\alpha+2\beta}) = x_{3\alpha+2\beta},$$

$$(6) \quad \text{Ad } n_\beta(x_{2\alpha+\beta}) = x_{2\alpha+\beta}.$$

Соотношения (1) — (6) доказывают (в).

Обратимся к (б); воспользуемся леммой 32.5, чтобы найти элементы $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ из поля K (независимые от x, y) такие, что имеют место следующие формулы:

$$(7) \quad e_\beta(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_\beta(y) e_{\alpha+\beta}(axy) \cdot \\ \cdot e_{2\alpha+\beta}(bx^2y) e_{3\alpha+\beta}(cx^3y) e_{3\alpha+2\beta}(dx^3y^2),$$

$$(8) \quad e_{\alpha+\beta}(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_{\alpha+\beta}(y) e_{2\alpha+\beta}(exy) \cdot \\ \cdot e_{3\alpha+\beta}(fx^2y) e_{3\alpha+2\beta}(gxy^2),$$

$$(9) \quad e_{2\alpha+\beta}(y) e_\alpha(x) = e_\alpha(x) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+\beta}(hxy),$$

$$(10) \quad e_{3\alpha+\beta}(y) e_\beta(x) = e_\beta(x) e_{3\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+2\beta}(ixy),$$

Применяя $\text{Int } n_\beta$ к обеим частям равенств (7), (9), (10), мы получим соответственно:

$$(11) \quad \varepsilon_{-\beta}(-y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) = \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{-\beta}(-y) \varepsilon_{\alpha}(-axy) \cdot \\ \cdot \varepsilon_{2\alpha+\beta}(bx^2y) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(cx^3y) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-dx^3y^2),$$

$$(12) \quad \varepsilon_{2\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) = \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(y) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(hxy),$$

$$(13) \quad \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(y) \varepsilon_{-\beta}(-x) = \varepsilon_{-\beta}(-x) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(y) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-ixy).$$

Аналогично, действуя $\text{Int } n_\alpha$ на обе части (7), мы имеем:

$$(14) \quad \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y) \varepsilon_{-\alpha}(-x) = \\ = \varepsilon_{-\alpha}(-x) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(axy) \varepsilon_{\alpha+\beta}(-bx^2y) \varepsilon_{\beta}(cx^3y) \\ \varepsilon_{3\alpha+\beta}(dx^3y^2).$$

Поскольку $\alpha + 2\beta \notin \Phi$, то равенство $n_\beta \varepsilon_\alpha(x) n_\beta^{-1} = \varepsilon_{\alpha+\beta}(x)$ упрощается до соотношения

$$(15) \quad \varepsilon_\beta(1) \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_\beta(-1) = \varepsilon_{-\beta}(1) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{-\beta}(-1).$$

Используя сначала (7), а затем (10), перепишем левую часть равенства (15) в виде

$$(16) \quad \varepsilon_\beta(1) \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_\beta(-1) = \\ = \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_\beta(1) \varepsilon_{\alpha+\beta}(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(bx^2) \cdot \\ \varepsilon_{3\alpha+\beta}(cx^3) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(dx^3) \varepsilon_\beta(-1) = \\ = \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_\beta(1) \varepsilon_{\alpha+\beta}(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(bx^2) \\ \varepsilon_\beta(-1) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(cx^3) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}((d-ci)x^3) = \\ = \varepsilon_\alpha(x) \varepsilon_{\alpha+\beta}(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(bx^2) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(cx^3) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}((d-ci)x^3).$$

Используя сначала (11), а затем (13), правую часть (15) перепишем в виде:

$$(17) \quad \varepsilon_{-\beta}(1) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{-\beta}(-1) = \\ = \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{-\beta}(1) \varepsilon_\alpha(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(-bx^2) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(-cx^3) \cdot \\ \cdot \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-dx^3) \varepsilon_{-\beta}(-1) = \\ = \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_\alpha(ax) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(-bx^2) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(-cx^3) \varepsilon_{3\alpha+\beta}((ci-d)x^3).$$

В свою очередь, при помощи (8) правую часть (17) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \varepsilon_{\alpha}(ax) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{2\alpha+\beta}(aex^2) \varepsilon_{3\alpha+\beta}(a^2fx^3) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(agx^3) \\
 & \cdot \varepsilon_{2\alpha+\beta}(-bx^2) \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(-cx^3) \varepsilon_{3\alpha+\beta}((ci-d)x^3) = \\
 & = \varepsilon_{\alpha}(ax) \varepsilon_{\alpha+\beta}(x) \varepsilon_{2\alpha+\beta}((ae-b)x^2) \varepsilon_{3\alpha+\beta}((a^2f+ci-d)x^3) \\
 & \quad \varepsilon_{3\alpha+2\beta}((ag-c)x^3).
 \end{aligned}$$

Сравнение (16) и (18) дает

$$(19) \quad a=1, \quad e=2b, \quad c+d=f+ci, \quad f=g.$$

Поскольку $4\alpha + \beta \notin \Phi$, равенство $n_{\alpha}\varepsilon_{\beta}(y)n_{\alpha}^{-1} = \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)$ можно упростить следующим образом:

$$(20) \quad \varepsilon_{\alpha}(1)\varepsilon_{\beta}(y)\varepsilon_{\alpha}(-1) = \varepsilon_{-\alpha}(1)\varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)\varepsilon_{-\alpha}(-1).$$

Применяя (7) к левой части (20), получим

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \varepsilon_{\alpha}(1)\varepsilon_{\beta}(y)\varepsilon_{\alpha}(-1) = \\
 & = \varepsilon_{\beta}(y)\varepsilon_{\alpha+\beta}(-ay)\varepsilon_{2\alpha+\beta}(by)\varepsilon_{3\alpha+\beta}(-cy)\varepsilon_{3\alpha+2\beta}(-dy^2).
 \end{aligned}$$

Применяя (14), (12), (10) последовательно к правой части (20), получим

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \varepsilon_{-\alpha}(1)\varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)\varepsilon_{-\alpha}(-1) = \\
 & = \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)\varepsilon_{2\alpha+\beta}(ay)\varepsilon_{\alpha+\beta}(-by)\varepsilon_{\beta}(cy)\varepsilon_{3\alpha+2\beta}(dy^2) = \\
 & = \varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)\varepsilon_{\alpha+\beta}(-by)\varepsilon_{2\alpha+\beta}(ay) \\
 & \quad \varepsilon_{3\alpha+2\beta}(-abhy^2)\varepsilon_{\beta}(cy)\varepsilon_{3\alpha+2\beta}(dy^2) = \\
 & = \varepsilon_{\beta}(cy)\varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y)\varepsilon_{\alpha+\beta}(-by) \\
 & \quad \varepsilon_{2\alpha+\beta}(ay)\varepsilon_{3\alpha+2\beta}((d-ci-abh)y^2) = \\
 & = \varepsilon_{\beta}(cy)\varepsilon_{\alpha+\beta}(-by)\varepsilon_{2\alpha+\beta}(ay)\varepsilon_{3\alpha+\beta}(-y) \\
 & \quad \varepsilon_{3\alpha+2\beta}((d-ci-abh)y^2).
 \end{aligned}$$

Сравнение равенств (21) и (22) дает

$$(23) \quad c=1, \quad a=b, \quad d-ci-abh=-d.$$

Вместе с (19) это влечет

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & a=b=c=1, \quad e=2, \quad f=g, \quad d+1=f+i, \\
 & \quad \quad \quad 2d=h+i,
 \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь равенством $n_{\beta} e_{3\alpha+\beta}(x) n_{\beta}^{-1} = e_{3\alpha+2\beta}(x)$, которое принимает вид

$$(25) \quad e_{\beta}(1) e_{3\alpha+\beta}(x) e_{\beta}(-1) = e_{-\beta}(1) e_{3\alpha+2\beta}(x) e_{-\beta}(-1).$$

Преобразуем здесь левую часть при помощи (10) и правую часть — при помощи (13); получим

$$(26) \quad e_{3\alpha+\beta}(x) e_{3\alpha+2\beta}(-ix) = e_{3\alpha+2\beta}(x) e_{3\alpha+\beta}(-ix),$$

откуда $i = -1$. Наконец, воспользуемся равенством

$$n_{\alpha} e_{\alpha+\beta}(y) n_{\alpha}^{-1} = e_{2\alpha+\beta}(y)$$

в виде

$$(27) \quad e_{\alpha}(1) e_{\alpha+\beta}(y) e_{\alpha}(-1) = \\ = e_{-\alpha}(1) e_{\alpha}(-1) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{\alpha}(1) e_{-\alpha}(-1).$$

Преобразуя левую часть при помощи (8) и правую часть при помощи (9), получим

$$(28) \quad e_{\alpha+\beta}(y) e_{2\alpha+\beta}(-ey) e_{3\alpha+\beta}(fy) e_{3\alpha+2\beta}(-gy^2) = \\ = e_{-\alpha}(1) e_{2\alpha+\beta}(y) e_{3\alpha+\beta}(hy) e_{-\alpha}(-1).$$

Передвижение $e_{-\alpha}(-1)$ влево сначала через $e_{3\alpha+\beta}(hy)$ и затем через $e_{2\alpha+\beta}(y)$ не вводит никаких новых $e_{3\alpha+\beta}$ членов в правую часть (28). В соответствии с этим правая часть (28) имеет вид

$$(29) \quad e_{\alpha+\beta}(\) e_{2\alpha+\beta}(\) e_{\beta}(\) e_{3\alpha+\beta}(hy) e_{3\alpha+2\beta}(\);$$

здесь отсутствующие параметры ни на что не влияют. Сравнение с левой частью (28) показывает, что $f = h$. Комбинируя это с (24) и тем фактом, что $i = -1$, мы заключаем, что

$$(30) \quad a = b = c = d = 1, \quad e = 2, \quad f = g = h = 3, \quad i = -1,$$

что доказывает первые четыре формулы из (б). Пятая формула в (б) следует из (12), так как $h = 3$.

Остается доказать (а). Мы будем действовать, как и раньше:

$$(31) \quad n_\alpha n_\beta n_\alpha = n_\alpha n_\beta n_\alpha^{-1} t_\alpha = n_{3\alpha+\beta}^{-1} t_\alpha,$$

$$(32) \quad n_\beta (n_\alpha n_\beta)^2 = n_\beta n_{3\alpha+\beta}^{-1} n_\beta^{-1} (n_\beta t_\alpha n_\beta^{-1}) t_\beta = \\ = n_{3\alpha+2\beta}^{-1} t_\alpha t_\beta t_\beta = n_{3\alpha+2\beta}^{-1} t_\alpha,$$

$$(33) \quad n_\alpha (n_\beta n_\alpha)^3 = n_\alpha n_{3\alpha+2\beta}^{-1} n_\alpha^{-1} = n_{3\alpha+2\beta}^{-1},$$

$$(34) \quad n_\beta (n_\alpha n_\beta)^4 = n_\beta n_{3\alpha+2\beta}^{-1} n_\beta^{-1} t_\beta = n_{3\alpha+\beta} t_\beta,$$

$$(35) \quad n_\alpha (n_\beta n_\alpha)^5 = n_\alpha n_{3\alpha+\beta} n_\alpha^{-1} (n_\alpha t_\beta n_\alpha^{-1}) t_\beta = n_\beta t_\beta t_\alpha t_\alpha = n_\beta^{-1}.$$

Наконец, $(n_\alpha n_\beta)^6 = (n_\beta n_\alpha)^6 = e$. $\square$

33.6. Проблема существования. Вместе с рассуждением в (33.1) предложения 33.2—33.5 устанавливают справедливость предположений (А), (Б), (В), тем самым завершая доказательство теоремы 32.1.

Естественно спросить, существуют ли полупростые группы всех возможных типов. Ответ оказывается утвердительным; мы, однако, не будем делать попытки дать полное доказательство, ограничившись кратким изложением метода. Рассмотрим сначала простые типы $A - G$.

Некоторые группы типов A_l , B_l , C_l , D_l уже известны (см. упражнение 27.1). Нетрудно проверить, что группы $SL(l+1, K)$ и $Sp(2l, K)$ односвязны и имеют, соответственно тип A_l , C_l . Образ группы $SL(l+1, K)$ (соответственно $Sp(2l, K)$) в $PGL(l+1, K)$ (соответственно в $PGL(2l, K)$) есть присоединенная группа того же самого типа, обозначаемая через $PSL(l+1, K)$ (соответственно $PSp(2l, K)$). (Так как поле K алгебраически замкнуто, группа $PSL(l+1, K)$ совпадает с $PGL(l+1, K)$, но над произвольным полем эти группы могут быть различны.) Для системы корней типа C_l мы имеем $[\Lambda : \Lambda_r] = 2$; поэтому никаких других групп этого типа не существует. Для системы корней типа A_l мы имеем $[\Lambda : \Lambda_r] = l+1$ и каждому делителю числа $l+1$ соответствует некоторая промежуточная группа $X(T)$. Если поле K имеет $(l+1)$ различных корней из единицы степени $l+1$, т. е. в случае, если p не делит $l+1$, где $p = \text{char } K$, то соответствующие скалярные матрицы образуют центр группы $SL(l+1, K)$, и мы получим различные группы всех желаемых типов путем факториза-

ции по различным подгруппам этого центра. Этот подход не вполне удовлетворителен, если p делит $l+1$, поскольку в этом случае мы получим несколько меньше различных групп. Дело в том, что изоморфные абстрактные группы не обязаны быть изоморфными как алгебраические группы. Чтобы дать систематическое изложение построения групп типа A_l , лучше, вероятно, использовать внешние степени естественного $(l+1)$ -мерного представления группы $SL(l+1, K)$, см. Шевалле [8], exposé 20.

Обратимся к типам B_l, D_l ; можно показать, что $SO(2l+1, K) = PSO(2l+1, K)$ — присоединенная группа типа B_l , а $SO(2l, K)$ — группа типа D_l с фундаментальной группой порядка 2, — соответствующая присоединенная группа есть $PSO(2l, K)$. Единственными недостающими группами являются односвязные группы, которые оказываются «спинорными» группами, ассоциированными с алгебрами Клиффорда, и «полуспинорные» группы при четном $l \geq 6$.

Группа типа G_2 (соответственно F_4) может быть построена в явной форме как группа автоморфизмов 8-мерной алгебры Кэли (соответственно, 27-мерной йордановой алгебры). В этих случаях существует только одна группа каждого типа, поскольку корни порождают полную решетку абстрактных весов. Группы типа E_6, E_7, E_8 можно описать подобным (хотя и более трудоемким) способом.

Шевалле [7] дал единообразную конструкцию групп присоединенного типа (которая также ведет к соответствующим группам над произвольным полем). Сначала он показал, как выбрать специальный базис в полупростой алгебре Ли над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, имеющей систему корней Φ ; в частности, все структурные константы в этом базисе являются целыми числами. (Это, конечно, использует теорему существования для таких алгебр Ли.) Затем он рассмотрел группу автоморфизмов алгебры Ли, порожденную автоморфизмами вида « $\exp \operatorname{ad} x_\alpha$ », которые оставляют инвариантной $\mathbb{Z}$ -оболочку базиса Шевалле. Эту группу можно рассматривать как матричную группу «над $\mathbb{Z}$ », матричные элементы которой можно затем определить над произвольным полем.

Построение групп Шевалле описано также у Картера [1], Хамфри [6], Стейнберга [10]. Чтобы показать, что построенные таким образом группы над K являются простыми алгебраическими группами типов $A - G$, необходимо развить технику, ведущую к разложению Брюа. В действительности требуется только доказать, что эти группы просты как абстрактные группы (см. теорему 29.5). Задача эта главным образом теоретико-групповая, поскольку группы Шевалле над K являются, по построению, связными алгебраическими группами, ибо они порождены одномерными унитарными подгруппами.

Остается теперь перейти от существования *присоединенных* групп к общей теореме существования. У Шевалле [8, exposé 23] имеется построение односвязных групп любого данного типа при условии, что какие-либо группы этого типа уже существуют. Это построение основано на существовании «проективных представлений», которые мы здесь не обсуждаем. После этого существование полупростых групп со всеми возможными фундаментальными группами можно доказать рассуждением, подобным уже проводившемуся выше.

Существует и другой метод, основанный на использовании линейных представлений, который также приводит к построению всех возможных типов. Имитируя первоначальное построение Шевалле с заменой присоединенного представления алгебры Ли другими представлениями, мы можем построить матричную группу над K , для которой $X(T)$ занимает любое место между Λ и Λ_r . Этот метод описан у Хамфри [6] и Стейнберга [10]. Он опирается на $\mathbb{Z}$ -формы Костанта универсальных обертывающих алгебр.

Упражнения

1. В предположении, что простые алгебраические группы всех возможных типов существуют, разобрать вопрос о том, как доказать, что полупростые группы всех типов существуют.
2. Выписать в явной форме образующие и соотношения для полупростой группы G (рассматриваемой как абстрактная группа).

Замечания. Вычисления в (33.3) — (33.5) воспроизведены по СГ, exposé XXIII. Метод Шевалле [8] принципиально иной: он дает явную классификацию групп ранга 2 при помощи их проективных и линейных представлений.

ОБЗОР СВОЙСТВ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

В этой главе приведены с примерами, но без доказательств многие из известных свойств алгебраических групп, связанных с полями определения. Как и ранее, через K обозначается алгебраически замкнутое поле. Если k — произвольное подполе поля K , то нас будут интересовать замкнутые подгруппы группы $GL(n, K)$, которые определены полиномами с коэффициентами в k . В § 34 будет развита некоторая общая теория, а в § 35 будут рассмотрены специальные поля (конечные, вещественные, p -адические).

§ 34. Поля определения

34.1. Основные понятия. Замкнутое множество X в $\mathbf{A}^n$ называется k -замкнутым, если X — множество нулей системы полиномов с коэффициентами из k .

Легко проверить, что все k -замкнутые множества образуют систему замкнутых множеств некоторой топологии на $\mathbf{A}^n$, называемой k -топологией Зарисского. С этим понятием связано одно затруднение. Сказать, что $X = \mathcal{V}(I)$ для некоторого идеала I , порожденного своим пересечением с $k(T_1, \dots, T_n)$, не то же самое, что сказать, что идеал $\mathcal{I}(X)$ обладает этим свойством. (Напомним из (1.1), что $\mathcal{I}(X)$ — радикал идеала I , который может быть больше, чем I .) В том случае, если $\mathcal{I}(X)$ все же порождается k -полиномами, мы говорим, что множество X определено над k .

Свойство быть определенным над k является более важным, чем свойство быть k -замкнутым. Его также (как правило) труднее проверить. Например, матрицы в $M(n, K)$, перестановочные с данной матрицей из $M(n, k)$, образуют, очевидно, k -замкнутое множество, но полный идеал функций, обращающихся в нуль на этом множестве, описать нелегко, и вопрос о порождении этого идеа-

ла k -полиномами остается неясным. Следующая лемма проясняет, в чем сосредоточена трудность.

Лемма. Если X есть k -замкнутое множество в A^n , то X определено над конечным чисто несепарабельным расширением поля k .

Если поле k совершенно (например, имеет характеристику 0), то два указанных понятия совпадают. Многие факты теории, изложенной ниже, заметно упрощаются в случае совершенного поля, когда часто можно убедиться в том, что группа или другое многообразие определено над k , проверив, что оно инвариантно относительно группы Галуа расширения K/k . Однако большая часть интересных результатов остается справедливой для произвольного поля k , так что было бы неразумно ограничиваться совершенным полем, тем более, что несовершенные поля естественным образом возникают в арифметических приложениях алгебраических групп.

Данные выше определения имеют смысл, пока мы рассматриваем замкнутые подмножества аффинных пространств. Чтобы придать смысл понятию «быть определенным над k » для произвольного многообразия, необходимо сначала ввести это понятие внутренним образом в аффинном случае, т. е. его следует определить непосредственно в самой аффинной алгебре $K[X]$. Если многообразие X определено над k , то идеал $\mathcal{I}(X)$ порождается $\mathcal{I}_k(X) = \mathcal{I}(X) \cap k[T_1, \dots, T_n]$, так что мы получаем k -алгебру $k[X] = k[T]/\mathcal{I}_k(X)$, для которой $K[X] = K \otimes_k k[X]$. При помощи этой k -структуры на $K[X]$

можно перейти к общей идее «многообразия, определенного над k » через аффинные открытые покрытия. Мы не будем входить здесь в детали, но будем предполагать, что это понятие обосновано.

Если X — замкнутое подмножество в A^n , определенное над k , то мы обозначим через $X(k) = X \cap k^n$ его множество k -рациональных точек (оно может оказаться пустым). Это подмножество множества X в действительности можно определить внутренним образом и можно ввести его для любого многообразия, определенного над k . В аффинном случае, если множества $X \subset A^n$ и $Y \subset A^m$ определены над k , мы называем морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ определенным над k (или k -морфизмом), если

все координатные функции лежат в $k[T_1, \dots, T_n]$. Это понятие также можно ввести внутренним образом и затем распространить на произвольные многообразия.

Коль скоро эти основополагающие факты установлены, довольно легко проследить «относительные» аспекты в предыдущих главах (т. е. аспекты, относящиеся к полям определения). Было бы, однако, неразумно излагать их в основном тексте, поскольку доказательства рациональности обычно никак не связаны с теоретико-групповыми рассуждениями.

34.2. Обзор предыдущих глав. Здесь мы укажем некоторые из утверждений о рациональности, которые могли бы быть установлены в главах II—IV, VI.

(7.1) Пусть G — алгебраическая группа. Если группа G и морфизмы $\mu: G \times G \rightarrow G$ и $\iota: G \rightarrow G$ определены над k , то мы говорим, что группа G **определена над k** или что G является k -группой. Примеры: G_a , G_m , $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $T(n, K)$ — группы, определенные над простым подполем поля K . Прямое произведение k -групп есть k -группа. Если G есть k -группа, то множество $G(k)$ ее k -рациональных точек образует подгруппу. Например, $GL(n, K)(k) = GL(n, k)$.

(7.3) Если G есть k -группа, то и G^0 есть k -группа.

(7.4) Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ — определенный над k морфизм k -групп. Тогда его образ есть k -подгруппа группы G' (однако его ядро не всегда определено над k).

(7.5) В предложении (7.5) пусть G есть k -группа, и пусть f_i есть k -морфизмы многообразий X_i , определенных над k . Тогда группа $\mathcal{A}(M)$ определена над k . В следствии (7.5), группа G определена над k , если все подгруппы Y_i определены над k .

(8.2) Пусть $\varphi: G \times X \rightarrow X$; будем говорить, что G **действует на X регулярно над k^***), если φ , G , X все определены над k . В предложении (8.2) пусть G действует на X регулярно над k . Если множества $Y \subseteq X(k)$ и Z являются k -замкнутыми, то и множество $\text{Tra}_G(Y, Z)$ является k -замкнутым, и это верно и для $C_G(Y)$. Кроме того, множество X^G является k -замкнутым.

(8.3) Если k -группа G действует на X регулярно над k , то ее орбиты являются многообразиями, определен-

*) В оригинале « k -morphically». — Прим. перев.

ными над k , и орбитные отображения являются k -морфизмами.

(8.6) В предложении (8.6) пусть G — k -группа, действующая на X регулярно над k . Для любого пространства F пространство E в утверждении (а) можно выбрать определенным над k (относительно k -структуры, определенной на $K[X]$). В теореме (8.6), если G есть k -группа, то существует k -изоморфизм группы G на k -подгруппу группы $GL(n, K)$.

(9.1) Если G есть k -группа, то ее алгебра Ли обладает естественной k -структурой с $\mathfrak{g} \cong K \otimes_k \mathfrak{g}(k)$.

(10.3) Если G есть k -группа, то Ad есть k -морфизм.

(11.2) В теореме (11.2) пусть G и H определены над k . Тогда пространство V можно выбрать обладающим k -структурой, такой, что пространство L определено над k и ϕ есть k -морфизм.

(11.5) В теореме (11.5) пусть группы G и N определены над k . Тогда на $GL(W)$ можно так определить структуру k -группы, что ψ есть k -морфизм.

(12.1) Если группы G и H определены над k , то многообразие Y и морфизм $\pi: G \rightarrow Y$ можно выбрать определенными над k .

(15.1) В лемме Б пусть $GL(V)$ есть k -группа, так что на V и, следовательно, на $\text{End } V$ задана k -структура. Если $x \in GL(V)(k)$ (или $GL(n, k)$ в матричной форме) и поле k совершенно, то x_s, x_u — также k -рациональные точки группы G ; в общем случае, они рациональны над некоторым чисто несепарабельным расширением поля k .

(15.3) Если G есть k -группа и $x \in G(k)$, то $x_s, x_u \in G(k)$ при условии, что поле k совершенно. Подобное же утверждение имеет место и для элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}(k)$. Множество G_u является k -замкнутым, если G есть k -группа.

34.3. Торы. Если тор T определен над k , то мы называем его коротко k -тором. Пусть $X(T)_k$ — подгруппа группы $X(T)$, состоящая из характеров $T \rightarrow \mathbf{G}_m$, являющихся k -морфизмами. Мы называем тор T k -разложимым, если пространство $k[T]$ натянуто на $X(T)_k$. Это равносильно тому, что тор T k -изоморфен группе $\mathbf{G}_m \times$

$\times \mathbf{G}_m$ (d экземпляров, где $d = \dim T$); в этом случае $T(k) \cong k^* \times \dots \times k^*$. В противоположном край-

нем случае тор T называется k -анизотропным, если $X(T)_k = 0$.

Теорема. Пусть T — некоторый k -тор.

(а) Существует конечное расширение Галуа поля k , над которым тор T становится разложимым.

(б) Существуют единственные подторы T' , T'' тора T , определенные над k такие, что $T = T'T''$, тор T' k -разложим и тор T'' k -анизотропен. Здесь T' — наибольший k -разложимый подтор тора T , а T'' — наибольший k -анизотропный подтор. Подтор T'' есть компонента единицы пересечения ядер всех характеров тора T , определенных над k .

Что представляют собой k -анизотропные торы? В случае $k = \mathbb{R}$ ответ будет получен в (35.3).

34.4. Некоторые основные теоремы. Основная тема этой книги — строение редуктивных групп. Для того чтобы связать с полями определения результаты о системах корней, разложении Брюа и т. д., мы должны выяснить, какие из подгрупп k -определенной группы G сами определены над k . Назовем группу G k -разложимой, если G обладает максимальным тором T , разложимым над k (34.3), и если, кроме того, ассоциированные допустимые изоморфизмы $\varepsilon_\alpha: G_\alpha \rightarrow U_\alpha$ можно выбрать k -изоморфизмами (требуется, чтобы группа U_α была определена над k). В этом случае теория внутреннего строения группы G вполне удовлетворительно приспособляется для изучения группы $G(k)$. Например, $GL(n, K)$ разложима над любым подполем поля K , так что группа $GL(n, K)$ обладает своим «разложением Брюа». Группу G назовем k -анизотропной, если она не содержит k -разложимых торов положительной размерности.

Первые глубокие результаты о полях определения суммированы в следующей теореме.

Теорема. Пусть G — связная k -группа.

(а) Группа G обладает максимальным тором, определенным над k .

(б) Редуктивная группа G k -разложима тогда и только тогда, когда k -разложим некоторый максимальный тор группы G . В частности (см. (34.3)), группа G разложима над конечным расширением Галуа поля k .

(в) Если G — редуктивная группа и S — k -тор группы G , то группа $C_G(S)$ редуктивна и определена над

к. Кроме того, S содержится в некотором максимальном торе, определенном над k .

(г) Если группа G редуکتивна и поле k бесконечно, то группа $G(k)$ плотна в G относительно топологии Зарисского. (Это верно для произвольной группы G , если поле k совершенно; в случае несовершенного поля это не всегда верно.)

Эти результаты, доказательство которых получается без особого труда, уже наводят на мысль, что торы и их централизаторы должны играть важную роль в структурной теории редуکتивных групп над k . Однако группа G не обязана иметь борелевские подгруппы, определенные над k (см. (35.1)).

34.5. Структурная теория Бореля — Титса. Через G мы обозначаем редуکتивную группу, определенную над k . Выберем в G максимальный k -разложимый тор S . Его размерность — инвариант группы G (ввиду нижеследующей теоремы), называемый k -**рангом** этой группы. Ясно, что k -ранг равен 0 тогда и только тогда, когда группа G анизотропна над k . Определим k -**корни** ${}_k\Phi$ группы G как ненулевые веса представления $\text{Ad } S$. (Если S — максимальный тор, то это обычные корни.) Пусть $Z = C_G(S)$, $N = N_G(S)$; конечная группа ${}_k W = N/Z$ называется k -**группой Вейля**.

Теорема А. (а) Максимальные k -разложимые торы группы G все сопряжены относительно группы $G(k)$.

(б) Z — редуکتивная k -группа и ее коммутант есть k -анизотропная группа.

(в) ${}_k\Phi$ (быть может, неприведенная) абстрактная система корней в подходящем евклидовом пространстве, группа Вейля которой изоморфна ${}_k W$.

Поясним, что, опуская аксиому (R2) в (Д.1), мы получим несколько более общее понятие абстрактной системы корней, в которой оба вектора α , 2α могут быть корнями. Если это имеет место, то такая система корней называется **неприведенной**. Оказывается, что единственной неприводимой системой корней такого типа является система, полученная в результате объединения систем типов B_l и C_l , причем длинные корни в B_l отождествляются с короткими корнями в C_l . (Эта система называется системой корней типа BC_l .) Таким образом, никаких «новых» групп Вейля не возникает.

Доказательство теоремы А тесно связано с изучением параболических подгрупп группы G , определенных над k , среди которых борелевских подгрупп может и не быть.

Теорема Б. Пусть P — минимальная среди параболических k -подгрупп группы G .

(а) Все остальные минимальные k -параболические подгруппы сопряжены с P относительно группы $G(k)$.

(б) Группа P содержит максимальный k -разложимый тор S и $Z = C_G(S)$ есть фактор Леви группы P (30.2). Кроме того, группа $R_u(P)$ определена над k и k -корни, появляющиеся в $R_u(P)$, образуют положительную подсистему в ${}_k\Phi$.

Эта теорема показывает, что минимальные k -параболические подгруппы играют роль борелевских подгрупп в структурной теории над k , тогда как максимальные k -разложимые торы играют роль максимальных торов.

Теорема В. Пусть P — минимальная k -параболическая подгруппа группы G , и пусть $S \subset P$ — максимальный k -разложимый тор группы G , $U = R_u(P)$, $N = N_G(S)$, $Z = C_G(S)$. Тогда:

(а) $N = N(k) \cdot Z$, так что $G(k)$ содержит полное множество представителей группы ${}_k W$.

(б) Группа $G(k)$ — объединение попарно непересекающихся двойных смежных классов $U(k)N(k)U(k)$, параметризованное элементами группы ${}_k W$ (разложение Брюа над k). Группа $G(k)$ обладает системой Титса (29.1), определенной группами $P(k)$ и $N(k)$ вместе с каноническими образующими группы ${}_k W$.

Имеется также нормальная форма элементов группы $G(k)$, аналогичная описанной в (28.4). Следует, однако, указать, что «корневые группы» более не обязаны быть одномерными (или даже коммутативными), так что внутреннее строение группы $U(k)$ уже не столь ясно. Следует также отметить, что эта теорема ничего не говорит о строении группы $G(k)$, если группа G является k -анизотропной. Как показывают примеры, строение группы $G(k)$ в этом случае может быть весьма разнообразно в зависимости от природы поля k . Однако если поле k совершенно, то группа $G(k)$ состоит только из полупростых элементов.

Если группа G не является k -анизотропной, то обозначим через G^+ подгруппу группы $G(k)$, порожденную

всеми подгруппами $U(k)$, когда U пробегает унитарные радикалы минимальных k -параболических подгрупп группы G . Если группа G полупроста и односвязна, и поле k произвольно, Кнезер и Титс высказали гипотезу, что $G(k) = G^+$. Это предположение во многих случаях справедливо *), например, если группа G разложима над k .

34.6. Пример: ортогональные группы. Некоторые из сформулированных выше теорем можно эффективно проиллюстрировать на примере. Пусть $\text{char } K \neq 2$, и пусть $G = SO(q)$ — специальная ортогональная группа, определенная невырожденной квадратичной формой q над k . Если форма q определена на n -мерном векторном пространстве и если ее «индекс Витта» (= размерность максимального вполне изотропного подпространства) равен r , то матрица ассоциированной с q билинейной формы в подходящем базисе приводится к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & J \\ 0 & Q_0 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & 1 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь Q_0 — матрица «анизотропной» квадратичной формы q_0 на пространстве размерности $n - 2r$ (т. е. формы, принимающей ненулевые значения на всех ненулевых векторах).

Максимальный k -разложимый тор S группы G состоит из блочно диагональных матриц $\text{diag}(A, B, C)$, где $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_r)$, $C = \text{diag}(a_r^{-1}, \dots, a_1^{-1})$ и B — единичная матрица. В свою очередь группа $Z = C_G(S)$ есть прямое произведение S и $SO(q_0)$, причем последняя группа k -анизотропна. В качестве минимальной k -параболической подгруппы P , содержащей S , мы можем

*) Уже после выхода в свет настоящей книги В. П. Платонов [13] показал, что в общем случае гипотеза Кнезера — Титса имеет отрицательный ответ, — Прим. автора к русскому изданию.

взять следующую группу матриц:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & P_4 & P_5 \\ 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix},$$

где P_1, P_6 — верхние треугольные матрицы размера $r \times r$, $P_4 \in SO(q_0)$ и $\det P_1 \cdot \det P_6 = 1$. (Здесь P_6 зависит от P_1 и P_3 , в то время как P_5 зависит от P_1, P_2, P_4 .) Унипотентный радикал U группы P состоит тогда из матриц вида

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & I & U_5 \\ 0 & 0 & U_6 \end{bmatrix},$$

где U_1, U_6 — унипотентные матрицы, причем выполнены аналогичные требования взаимозависимости матриц U_i ($i = 1, \dots, 6$).

Более подробное изучение позволяет получить точное описание соответствующих положительных k -корней; например, рассмотрим отображение типичной матрицы группы S (описанной выше) в $a_i a_{i+1}^{-1}$ ($1 \leq i < r$). Если $n - 2r = 0$ или 1, группа G является k -разложимой (соответственно типа D_r или B_r). Если же $n - 2r = 2$, то группа Z является в действительности максимальным тором (определенным над k , но не k -разложимым), а P — борелевской подгруппой. Это — так называемый «квазиразложимый» случай, который будет обсуждаться в (35.1).

Замечания. Основы общей теории аффинных алгебраических групп над произвольными полями заложены Розенлихтом [1], [2], [4], [6], Вейлем [2], [3] (см. также Борель [1]) с использованием старого языка алгебраической геометрии. Схемный подход использован в СГ и у Демаюра, Габриэля [1]. Борель [4, АГ] делает попытку изложить аппарат, необходимый для построения теории, намеченной в этом параграфе, не развивая в полной общности технику схем. По поводу алгебраических групп над совершенными полями см. Годеман [1], Сатаке [1], [5]. Теоремы из (34.4) и (34.5) можно найти у Бореля [4, гл. V], Бореля и Титса [1]; см. также Борель, Титс [2], [3], [4], Борель, Спрингер [1] и предшествовавшую этой статье статью в АГДП. Пример в (34.6) более подробно рассматривается Борелем [3].

§ 35. Частные случаи

В этом параграфе G — полупростая группа, определенная над k . Мы хотим дать некоторое представление о том, как меняется строение группы $G(k)$ в зависимости от конкретного выбора поля k , а затем обсудить проблему классификации.

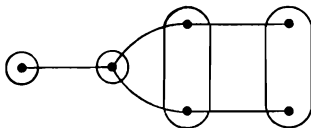
35.1. Разложимые и квазиразложимые группы. В соответствии с (34.4) группа G называется k -разложимой, если некоторый максимальный тор T группы G разложим над k . Для k -разложимых групп структурная теория в (34.5) не отличается от структурной теории из главы X с ${}_k\Phi = \Phi$, ${}_kW = W$ и т. д. В главе XI дана классификация всех таких групп (по модулю теоремы существования). Конструкцию Шевалле [7] для произвольного поля k можно рассматривать как способ получить модель группы $G(k)$, если G есть k -разложимая группа присоединенного типа. Однако в построении Шевалле рассматривается не $G(k)$, а ее собственная подгруппа, порожденная унитарными элементами, поскольку эта последняя группа почти всегда проста. Например, для группы типа A_l мы имеем $G(k) = PGL(l+1, k)$, тогда как «группа Шевалле» этого типа есть $PSL(l+1, k)$. В настоящее время под **группой Шевалле** обычно понимают любую из групп, канонически ассоциированных с k -разложимой группой G (не обязательно присоединенного типа): группу $G(k)$, ее коммутант, ее факторгруппу по центру и т. д.

Группу G назовем **k -квазиразложимой**, если G обладает определенной над k борелевской подгруппой. Пример в (34.6) показывает, что это может случиться, даже если группа G не является k -разложимой. Мы в состоянии дать более точное описание строения таких групп. Пусть G — k -квазиразложимая, но не k -разложимая группа простого типа. Тогда максимальный k -разложимый тор S имеет своим централизатором некоторый больший k -тор T , который максимален в G и принадлежит некоторой борелевской k -подгруппе B . Некоторые из корней относительно T становятся «зависимыми», если их ограничить на S , так как k -ранг меньше абсолютного ранга. Известно, что это может произойти, только если Φ обладает нетривиальным автоморфизмом графа (Д.8)

и, следовательно, только если Φ — типа A_l ($l \geq 2$), D_l , E_6 .

Рассмотрим, например, группу G типа A_3 с простыми корнями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и остальными положительными корнями $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. При ограничении на S корни α_1 и α_3 оказываются идентичными (обозначим их общее значение через β_1), тогда как α_2 становится характером β_2 . Оказывается, что β_1 и β_2 образуют базу для ${}_k\Phi$, а остальные положительные корни имеют вид $\beta_1 + \beta_2$ (этот корень появляется с кратностью 2) и $2\beta_1 + \beta_2$. Таким образом, ${}_k\Phi$ — типа C_2 . В этом случае группа $G(k)$ есть некоторая специальная унитарная группа.

Если задано поле k и система корней типа A_l ($l \geq 2$), D_l или E_6 , то существует k -квазиразложимая (но не k -разложимая) группа этого типа. Относительная система корней ${}_k\Phi$ имеет тип C_r (соответственно BC_r), если Φ — типа A_{2r-1} (соответственно A_{2r}), тип F_4 , если Φ — типа E_6 , тип B_r , если Φ — типа D_{r+1} (с еще одной дополнительной возможностью в случае, если Φ — типа D_4 , а именно, G_2). Например, шесть простых корней E_6 приводят к четырем простым корням группы типа F_4 , как это указано на следующей диаграмме Дынкина:



Над конечным полем k эти квазиразложимые группы дают новые семейства конечных простых групп (часто называемых «скрученными», чтобы отличить их от первоначальных групп Шевалле). Это было впервые замечено Херцигсом, Стейнбергом и Титсом, которые независимо с разных сторон подошли к таким группам. В случае характеристик 2, 3 некоторые новые скрученные группы были найдены Ри и Судзуки с использованием систем корней типов B_2 , G_2 , F_4 , где автоморфизмы графов могли бы существовать, если бы мы игнорировали длины корней. Весьма полное изложение всех этих конструкций можно найти у Картера [1] и Стейнберга [10].

35.2. Конечные поля. Мы уже указывали на важность k -разложимых и k -квазиразложимых групп в теории ко-

нечных простых групп. В действительности конечные простые группы «типа Ли» вместе со знакопеременными группами дают, за исключением небольшого числа, все известные простые группы. Естественно спросить, можно ли использовать подобным образом другие группы $G(k)$, отличные от уже рассмотренных. Ответ оказывается отрицательным.

Теорема. Если поле k конечно, то группа G автоматически квазиразложима над k .

Доказательство опирается на теорему Ленга [1], которая утверждает, что морфизм $G \rightarrow G$, определенный формулой $x \mapsto x^{-1}x^{[q]}$, является сюръективным. Здесь $q = \text{card } k$, и $[q]$ обозначает в случае, если мы рассматриваем G как матричную группу, операцию возведения в q -ю степень всех матричных элементов. (Эту операцию можно описать внутренним образом, не привлекая матричных представлений. Заметим, что она отображает группу $G(k)$ в $G(k)$, если G определена над k). Критерий того, что подгруппа H группы G определена над k , состоит в том, что $H = H^{[q]}$. Используя этот факт, мы можем доказать теорему о квазиразложимости группы G над k следующим образом. Пусть B — произвольная борелевская подгруппа группы G . Тогда $B^{[q]}$ — также борелевская подгруппа; поэтому существует элемент $x \in G$ такой, что $xB^{[q]}x^{-1} = B$. Используя результат Ленга, мы заключаем, что $x = y^{-1}y^{[q]}$ для некоторого $y \in G$, или $yBy^{-1} = yxB^{[q]}x^{-1}y^{-1} = y^{[q]}B^{[q]}(y^{[q]})^{-1} = (yBy^{-1})^{[q]}$. Следовательно, группа yBy^{-1} определена над k .

Это же рассуждение доказывает утверждение (а) теоремы 34.4, если поле k конечно, и ведет также к некоторым результатам о сопряженности.

35.3. Вещественное поле. В случае $k = \mathbb{R}$ теория полупростых k -групп тесно связана с теорией полупростых групп Ли. Действительно, $G(\mathbb{R})$ — группа Ли того же типа, хотя она не обязательно связана в вещественной топологии (или в «обычной топологии»), под которой мы понимаем евклидову топологию на $\mathbb{R}^{n^2}$, индуцированную на $G(\mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Однако не каждая полупростая группа Ли реализуется в виде линейной группы (например, универсальная накрывающая группы $SL(n, \mathbb{R})$ не имеет такой реализации).

Мы суммируем некоторые из основных фактов в следующей теореме.

Теорема. (а) Если G — замкнутая подгруппа некоторой группы $GL(n, K)$, то $G(\mathbb{R})$ — замкнутая подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$ в обычной топологии и, следовательно, является группой Ли. Если H — замкнутая подгруппа группы G , то $H(\mathbb{R})$ — также группа Ли.

(б) Связная компонента единицы группы $G(\mathbb{R})$ в обычной топологии имеет конечный индекс в $G(\mathbb{R})$.

(в) Если G — группа односвязного типа, то группа $G(\mathbb{R})$ связна в обычной топологии (но не всегда односвязна в топологическом смысле).

(г) Если G' — редуктивная группа, $\mathbb{R}$ -анизотропная в смысле (34.4), то группа $G'(\mathbb{R})$ связна и компактна в обычной топологии.

(д) Если H — компактная подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$, то $H = G'(\mathbb{R})$ для некоторой редуктивной $\mathbb{R}$ -подгруппы G' группы $GL(n, K)$, т. е. все компактные линейные группы Ли «алгебраичны».

Стоит упомянуть также о поведении торов, определенных над $\mathbb{R}$. В одном крайнем случае, когда T есть $\mathbb{R}$ -разложимый тор размерности d , имеет место изоморфизм $T(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^* \times \prod \mathbb{R}^*$ (в частности, компонента единицы группы $T(\mathbb{R})$ в обычной топологии имеет индекс 2^d). В другом крайнем случае, когда тор T является $\mathbb{R}$ -анизотропным, группа $T(\mathbb{R})$ компактна и связна согласно утверждению (г) теоремы. Если $\dim T = 1$, то можно показать, что тор T $\mathbb{R}$ -изоморфен группе $SO(2, K)$ и, следовательно, что $T(\mathbb{R}) = SO(2, \mathbb{R})$, т. е. топологически $T(\mathbb{R})$ — в точности 1-тор. В высших размерностях группа $T(\mathbb{R})$ является тогда d -тором. Это в известной мере объясняет терминологию, введенную в (16.2).

35.4. Локальные поля. Под локальным полем мы понимаем пополнение некоторого поля относительно дискретного неархимедова нормирования. (Случается, что этот термин используется в несколько ином смысле; например, к локальным полям иногда относят поля вещественных $\mathbb{R}$ и комплексных $\mathbb{C}$ чисел). В последние годы разработана далеко идущая теория простых алгебраических групп над локальными полями, начало которой положено работой Ивахори и Мацумото [1] и достигшая своей высшей точки в работах Брюа и Титса [1]—[6]

Поскольку эта теория отличается значительной сложностью, мы попытаемся ознакомить с ней читателя на простейшем примере группы SL_2 .

Пусть v — заданное нормирование поля k , R — соответствующее кольцо целых элементов, $P = \pi R$ — его единственный максимальный идеал, $\bar{k} = R/P$ — поле классов вычетов. Например, в качестве k может выступать поле $\mathbb{Q}_p$ — p -адическое пополнение поля $\mathbb{Q}$ (где p — некоторое простое натуральное число); тогда R совпадает с $\mathbb{Z}_p$, кольцом целых p -адических чисел; в качестве π можно принять p и $\bar{k}$ — поле из p элементов.

Пусть $\mathcal{G} = SL(2, k)$. Это — простая алгебраическая группа, разложимая над простым подполем поля K ; поэтому группа $SL(2, K)$ обладает системой Титса (§ 29), связанной с любым подполем поля K . В частности, группа $\mathcal{G}$ уже обладает системой Титса ранга 1, с группой Вейля порядка 2 и т. д. Но группа $\mathcal{G}$ обладает также и другой системой Титса (с бесконечной группой Вейля), которая лучше отражает особые свойства поля k . Введем различные составляющие $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{W}$ этой системы.

В качестве $\mathcal{N}$ мы возьмем «обычную» группу, т. е. группу всех мономиальных матриц в $\mathcal{G}$. Однако в качестве $\mathcal{B}$ мы примем группу всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, d \in R - P$, $b \in R$, $c \in P$. Заметим, что $\mathcal{B}$ — образ верхней треугольной группы в $SL(2, \bar{k})$ относительно естественного гомоморфизма $SL(2, R) \rightarrow SL(2, \bar{k})$. Далее, группа $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cap \mathcal{N}$ состоит из матриц вида $\text{diag}(a, a^{-1})$, $a \in R - P$ и, как легко видеть, является нормальной подгруппой группы $\mathcal{N}$. Факторгруппа $\mathcal{W}$ порождается множеством $\mathcal{P}$ из двух элементов s_0, s_1 , каждый — порядка 2, где s_0 отвечает смежному классу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и s_1 — смежному классу $\begin{pmatrix} 0 & \pi^{-1} \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что $s_0^2 = e = s_1^2$ есть полное множество определяющих соотношений для группы $\mathcal{W}$, так что $\mathcal{W}$ — бесконечная диэдральная группа.

Теорема. $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{N}, \mathcal{P})$ — система Титса в $\mathcal{G}$.

Некоторых усилий требует проверка только аксиомы (T1). Идея доказательства заключается в том, чтобы использовать обычное разложение Брюа в группе $SL(2, \bar{k})$.

«подняв» его в $SL(2, R)$. Следует использовать также индукцию по длине элементов в $\mathcal{W}$

Так как множество $\mathcal{P}$ состоит из двух элементов, то из (29.3) следует, что существует четыре «параболических» подгруппы, содержащих $\mathcal{B}$. Очевидным кандидатом, помимо $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$, является группа $\mathcal{P}_0 = SL(2, R)$. Четвертая подгруппа менее очевидна. В качестве $\mathcal{P}_1$ возьмем группу всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, d \in R$, $b \in \pi^{-1}R$, $c \in \pi R = P$. Заметим, что $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \mathcal{B}$.

Если k — локально компактное поле, то группа $\mathcal{G}$ через свое вложение в k^4 наследует структуру локально компактной топологической группы. Тогда $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ представляют два типа максимальных компактных подгрупп группы $\mathcal{G}$; исходя из этого, можно прийти к некоторому гармоническому анализу. Можно также привлечь «билдинг» (здесь — дерево), сопоставляемый системе Титса, для доказательства того факта, что любая дискретная подгруппа группы $\mathcal{G}$, не имеющая элементов конечного порядка (отличных от e), должна быть свободной.

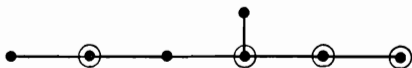
35.5. Классификация. Если задано произвольное поле k , то каким образом можно надеяться классифицировать всевозможные полупростые k -группы? Над K группа G является «известной» (и даже ввиду (34.4) она известна над конечным расширением Галуа поля k). Чтобы сравнить поведение над k и над K , полезно «упорядочить» системы корней. Как и в (34.5) выберем максимальный k -разложимый тор S , содержащийся в минимальной k -параболической подгруппе P . Затем найдем максимальный тор T , содержащий S , содержащийся в P и определенный над k (см. 34.4). Если все это сделать должным образом, то определенная группой P база ${}_k\Delta$ системы корней ${}_k\Phi$ будет состоять из всех нетривиальных ограничений на S корней некоторой базы Δ системы корней Φ относительно T .

Если группа G анизотропна над k , то на этом пути мы не можем надеяться получить содержательную информацию (если поле k произвольно), так что классификация возможна только по модулю описания всех анизотропных групп. (Как упоминалось ранее, это последнее решающим образом зависит от свойств поля k .) В общем случае структурная теория (34.5) позволяет

найти максимальную редуктивную k -анизотропную подгруппу M группы G : в качестве M следует взять произведение коммутанта группы $Z = C_G(S)$ и максимального анизотропного k -тора центра группы Z (последний является дополнением к S). Мы называем M **анизотропным ядром** группы G ; оно однозначно (с точностью до k -изоморфизма) определяется группой G .

Классификационная теорема Титса утверждает (грубо говоря), что группа G определяется (с точностью до k -изоморфизма) своим анизотропным ядром (или только его коммутантом), своим классом K -изоморфизма и своим «индексом». Не пытаясь дать более точные формулировки, поясним, что такое индекс. Некоторые из корней $\alpha \in \Delta$ имеют тривиальные ограничения на S . Если Δ_0 — множество таких корней, то Δ_0 образует базу системы корней коммутанта группы Z . Задание Δ и Δ_0 (на диаграмме Дынкина системы Φ) составляет некоторую часть понятия индекса. Остальная информация относится к действию на Δ (или на диаграмме Дынкина) некоторой группы Галуа, орбиты которой выделяются заключением соответствующих точек диаграммы в кружок. Простые корни одной и той же орбиты имеют одинаковые ограничения на S , и, следовательно, определяют единственный элемент базы ${}_k\Delta$.

Полезно рассмотреть несколько примеров. Если G квазиразложима над k (35.1), то $\Delta_0 = \emptyset$ и все точки заключены в кружки; в этом случае группа G разложима над k тогда и только тогда, когда каждая орбита Галуа в Δ состоит из одной точки. (См. рисунок системы типа E_6 в (35.1).) Для системы корней типа E_7 диаграмма, указанная ниже, показывает, что Δ_0 состоит из трех элементов (не заключенных в кружки), тогда как ${}_k\Delta$ состоит из четырех элементов; при этом оказывается, что система корней ${}_k\Phi$ — простого типа F_4 .



Титс определил все «допустимые» диаграммы такого рода, т. е. диаграммы, которым действительно соответствует некоторая группа G над некоторым полем k . Например, только что рассмотренная диаграмма появляет-

ся при $k = \mathbb{R}$ или если k — p -адическое поле, но, разумеется, не появляется в случае конечного поля k (35.2).

Замечания. Квазиразложимые группы над конечными полями рассматривались Хертцигом [2], Стейнбергом [22], [6], Титсом [2], [6]. Теорема 35.2, принадлежащая Ленгу, была обобщена Стейнбергом [11]. Относительно конечных групп лиева типа см. Картер [1], Кэртис [3], Стейнберг [10]. Результаты, суммированные в (35.3), разбросаны по литературе, см. например, Борель [3], Борель и Титс [1, § 14], [3, § 4], Шевалле [2,], [4], [5, VI § 5, п. 2], Мацумото [1], а также статьи Хохшильда и Мостова. Относительно простых групп над локальными полями см. Ивахори и Мацумото [1], Брюа и Титс [1]—[6]. Пример SL_2 более подробно рассмотрен Хамфри [4, § 15]; см. также Ихара [1]. Проблема классификации над совершенным полем рассматривалась Сатаке [1], [5] и в большей общности Титсом в его статье в АГДП (см. также Титс [1]).

СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

Здесь мы перечислим без доказательств некоторые основные свойства систем корней. Более полную информацию можно получить например у Бурбаки [1, гл. VI], Хамфриза [6, гл. III], Серра [2, гл. V], Стейнберга [10, добавление], СГ, exposé XXI.

(Д.1) Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Определим **отражение** относительно ненулевого вектора $\alpha \in E$ как линейное преобразование, которое отображает α в $-\alpha$ и оставляет неподвижным поэлементно некоторое подпространство коразмерности 1. Такое преобразование (которое точнее было бы назвать «предотражением»), очевидно, совпадает со своим обратным, но *не* определяется однозначно вектором α . Тем не менее, если Ψ — конечное множество ненулевых векторов, порождающих E , и если отражение τ относительно вектора $\alpha \in \Psi$ отображает Ψ в себя, то отражение τ однозначно определено вектором α .

(Д.2) (Абстрактной) **системой корней** в вещественном пространстве E называется подмножество $\Psi \subset E$, которое удовлетворяет следующим условиям:

(R1) Множество Ψ конечно, порождает E и не содержит нулевого вектора. (Элементы множества Ψ называются **корнями**.)

(R2) Если $\alpha \in \Psi$, то единственными векторами, из Ψ , кратными α , являются векторы $\pm\alpha$.

(R3) Если $\alpha \in \Psi$, то существует отражение τ_α относительно α , которое оставляет множество Ψ инвариантным.

(R4) Если $\alpha, \beta \in \Psi$, то вектор $\tau_\alpha(\beta) - \beta$ целочисленно кратен α .

Если Ψ' — абстрактная система корней в пространстве E' , то система Ψ' называется **изоморфной** Ψ , если существует изоморфизм векторных пространств $E' \rightarrow E$,

который отображает Ψ' на Ψ и сохраняет целые числа, возникающие в (R4).

В силу (Д.1) отражение τ_α в (R3) однозначно определяется вектором α , так что условие (R4) имеет точный смысл. Назовем число $l = \dim E$ **рангом** системы корней Ψ .

(Д.3) Пусть Ψ — система корней в E . Так как множество Ψ конечно и порождает E , то группа $W(\Psi) \subset GL(E)$, порожденная отражениями τ_α , также конечна; она называется **группой Вейля** системы корней Ψ и обозначается через W . На E имеется скалярное произведение (α, β) , относительно которого преобразования из группы W ортогональны. Формула для τ_α может быть записана в виде $\tau_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$, где $\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha) / (\alpha, \alpha)$.

(Д.4) Подмножество Δ системы корней Ψ называется **базой**, если $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — базис пространства E , относительно которого каждый вектор $\alpha \in \Psi$ обладает (единственным) представлением $\alpha = \sum c_i \alpha_i$, где c_i — целые числа одного и того же знака. Базы существуют; группа W перемещает множество баз однотранзитивно, и каждый корень принадлежит по крайней мере одной базе. Базы взаимно однозначно соответствуют **камерам Вейля** в E , которые определяются как связные компоненты дополнения к объединению гиперплоскостей, ортогональных к корням. Элементы базы Δ называются **простыми корнями**. Корни, которые представимы в виде линейных комбинаций простых корней с неотрицательными (соответственно неположительными) коэффициентами образуют множество Ψ^+ (соответственно Ψ^-) **положительных** (соответственно **отрицательных**) корней. Если корни α, β линейно независимы, то существуют простые корни γ, δ и элемент $\sigma \in W$ такие, что $\sigma(\alpha) = \gamma$, $\sigma(\beta)$ есть $\mathbb{Z}^+$ -линейная комбинация корней γ, δ . Если $\alpha, \beta \in \Psi^+$ и $\alpha + \beta \notin \Psi$, то $r\alpha + s\beta \notin \Psi$ ($r, s \geq 1$).

(Д.5) Пусть Δ — база системы корней Ψ . Тогда W порождается отражениями $\{\tau_\alpha | \alpha \in \Delta\}$. **Длина** $l(\tau)$ элемента $\tau \in W$ (относительно Δ) определяется как наименьшее число t , для которого $\tau = \tau_1 \dots \tau_t$ (где τ_i — отражение относительно некоторого простого корня). Длина $l(\tau)$ равна числу положительных корней α , для которых ко-

лена к более короткому из двух корней, если они имеют неравную длину. Порядок $m(\alpha, \beta)$ элемента $\tau_{\alpha}\tau_{\beta}$ в W равен 2, 3, 4 или 6 в зависимости от того, имеют ли точки α и β 0, 1, 2 или 3 связи ($\alpha \neq \beta$). Задание диаграммы Дынкина эквивалентно заданию матрицы чисел Картана $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha, \beta \in \Delta$).

Имеется только четыре различные системы корней ранга 2 с указанными ниже числами Картана:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \quad B_2: \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \text{длинный,} \\ \beta - \text{короткий} \end{pmatrix} \\ A_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \quad G_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \text{короткий,} \\ \beta - \text{длинный} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Д.8) Группа автоморфизмов системы корней Ψ есть полупрямое произведение группы W (которая является нормальной подгруппой) и группы Γ **автоморфизмов графа** (или **диаграммы**). Если система Ψ неприводима, то группа Γ тривиальна во всех случаях, за исключением A_l ($l \geq 2$), D_l , E_6 .

(Д.9) Вектор $\lambda \in E$ называется **абстрактным весом**, если все числа $\langle \lambda, \alpha \rangle$ — целые ($\alpha \in \Psi$). Такие векторы образуют решетку Λ , в которой решетка Λ_r , натянутая на Ψ , является подгруппой конечного индекса. Если $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — база системы Ψ , то Λ обладает соответствующим базисом, состоящим из **фундаментальных доминантных весов** $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, для которых $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ (дельта Кронекера). **Фундаментальная группа** Λ/Λ_r имеет следующее строение для неприводимых типов:

$$\begin{aligned} A_l: & \mathbb{Z}/(l+1)\mathbb{Z}, \\ B_l, C_l, E_7: & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ D_l \text{ (} l \text{ четно)}: & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ D_l \text{ (} l \text{ нечетно)}: & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ E_6: & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\ E_8, F_4, G_2: & 0. \end{aligned}$$

(Д.10) Если $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — как и в (Д.9), то назовем вес $\lambda = \sum c_i \lambda_i$ **доминантным**, если $c_i \in \mathbb{Z}^+$ для всех i . Каждый вес $\lambda \in \Lambda$ сопряжен при помощи некоторого элемента из W с одним и только

одним доминантным весом. Пространство E допускает частичное упорядочение: $\lambda > \mu$, если $\lambda - \mu$ — сумма положительных корней (или 0). (Это упорядочение зависит от Δ .) Если $\lambda \in \Lambda$ — доминантный вес, то $\lambda \geq \sigma(\lambda)$ для всех $\sigma \in W$.

(Д.11) Векторы $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ ($\alpha \in \Psi$) образуют систему корней в E , называемую *дуальной к Ψ* . Число Картана $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ равно $\langle \beta, \alpha \rangle$. Группа Вейля системы Ψ^* канонически изоморфна группе W (относительно изоморфизма $\sigma_\alpha \mapsto \sigma_\alpha$). Если пространство E отождествить с его двойственным пространством при помощи скалярного произведения, то α^* ($\alpha \in \Delta$) отождествляется с (единственной) линейной функцией на E , принимающей значение 2 в точке α и значение 0 на всех фундаментальных доминантных весах λ_β (Д.9), соответствующих простым корням $\beta \neq \alpha$. (Единственность этой линейной функции следует из того факта, что вектор α вместе с этими векторами λ_β образует базис пространства E .)

(Д.12) Следующая лемма, принадлежащая Титсу, необходима в (32.4). Поскольку она не так хорошо известна, как предыдущие результаты, мы воспроизведем здесь доказательство, данное в СГ, exposé XXI, 5.6.

Лемма. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$ и предположим, что $\sigma(\alpha) = \beta$ ($\sigma \in W$). Тогда существуют корни $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k = \beta$ в Δ и элементы $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \in W$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(a) \sigma = \sigma_{k-1} \sigma_0.$$

$$(b) \sigma_i(\gamma_i) = \gamma_{i+1} \quad (0 \leq i \leq k-1).$$

(в) Пусть $0 \leq i \leq k-1$. Если $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$, то $\sigma_i \in W_{\gamma_i \gamma_{i+1}}$, а если $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, то существует корень $\delta_i \in \Delta$, для которого $\sigma_i \in W_{\gamma_i \delta_i}$.

Доказательство. Пусть $n(\sigma) = \text{card}(\Psi^+ \cap -\sigma^{-1}(\Psi^+))$. Согласно (Д.5) $n(\sigma)$ равно числу положительных корней γ , для которых корень $\sigma^{-1}(\gamma)$ отрицателен, и равно $l(\sigma^{-1}) = l(\sigma)$. В частности, $n(\sigma) = 0$ влечет $\sigma = e$, и в этом случае доказывать нечего. Воспользуемся индукцией по $n(\sigma)$.

Если $n(\sigma) > 0$, то существует корень $\gamma \in \Delta$ с $\sigma(\gamma) < 0$ (в противном случае $\sigma = e$). Положим $\gamma_0 = \alpha$ и рассмотрим подсистему $\Psi_{\gamma, \gamma}$, одно из возможных множеств положительных корней которой есть $\sigma^{-1}(\Psi^+) \cap \Psi_{\gamma, \gamma}$; обоз-

начим его через Θ . В силу (Д. 4), (Д. 6) существует элемент $\sigma_0 \in \mathbb{W}_{\gamma_0\gamma}$, такой, что $\sigma_0(\Theta) = \Psi_{\gamma_0\gamma}^+$. Положим $\tau = \sigma\sigma_0^{-1}$. Каждый элемент σ_{γ_0} , σ_γ оставляет инвариантным множество $\Theta' = \Psi^+ - \Psi_{\gamma_0\gamma}^+$ (Д. 5), так что и элемент $\sigma_0 \in \mathbb{W}_{\gamma_0\gamma}$ оставляет инвариантным это множество. Отсюда следует, что $\Theta' \cap -\sigma^{-1}(\Psi^+) = \Theta' \cap -\tau^{-1}(\Psi^+)$. С другой стороны $\Psi_{\gamma_0\gamma}^+ \cap -\tau^{-1}(\Psi^+) = \Psi_{\gamma_0\gamma}^+ \cap -\sigma_0(\Theta) = \Psi_{\gamma_0\gamma}^+ \cap -\Psi_{\gamma\gamma}^+ = \emptyset$, в то время как $\gamma \in \Psi_{\gamma\gamma}^+ \cap -\sigma^{-1}(\Psi^+)$. Это показывает, что $n(\tau) < n(\sigma)$.

Положим $\gamma_1 = \sigma_0(\gamma_0)$ ($= \sigma_0(\alpha)$). По предположению, $\gamma_0 \in \sigma^{-1}(\Delta)$, так что γ_0 принадлежит базе $\sigma^{-1}(\Delta) \cap \Psi_{\gamma_0\gamma}$ системы $\Psi_{\gamma\gamma}$, которая содержится в $\Theta = \sigma_0^{-1}(\Psi_{\gamma_0\gamma}^+)$. Следовательно, $\gamma_0 \in \sigma_0^{-1}(\Delta \cap \Psi_{\gamma_0\gamma}^+) \subset \sigma_0^{-1}(\Delta)$. Поэтому корень γ_1 является *простым* и содержится в $\Psi_{\gamma\gamma}^+$. Если $\gamma_1 \neq \gamma_0$, то это влечет $\gamma_1 = \gamma$, так что $\beta = \tau(\gamma_1)$. Доказательство леммы можно теперь завершить по индукции. $\square$

БИБЛИОГРАФИЯ

Ниже следующий список статей и книг содержит как основные работы по линейным алгебраическим группам, так и значительное число публикаций по близким вопросам. Эти последние отобраны в известной мере произвольно; мы оставляли в стороне те статьи, главное содержание которых относится к группам Ли, арифметическим группам, конечным группам и т. д. Несмотря на это ограничение, наша библиография может быть полезна тем, что поможет читателю ориентироваться в довольно обширной литературе за два последних десятилетия.

Статьи в книге «Алгебраические группы и дискретные подгруппы», сокращенно АГДП, под редакцией А. Бореля и Дж. Д. Мостова, не приводятся здесь индивидуально. Они дают хорошее представление о состоянии предмета к 1965 г., хотя по многим освещенным там аспектам имеются более новые обзоры.

А б е, К а н н о (Abe E., Kanno T.)

1. Some remarks on algebraic groups. — *Tôhoku Math. J.*, 1959, **11**, p. 376—384.

АГДП-Borel A., Mostow G. D. [1]

Б а л а, К а р т е р (Bala P., Carter R. W.)

1. The classification of unipotent and nilpotent elements. — *Indag. Math.*, 1974, **36**, p. 94—97.

Б е р (Behr H.)

1. Zur starken Approximation in algebraischen Gruppen über globalen Körpern. — *J. reine angew. Math.*, 1968, **229**, S. 107—116.
2. Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern. — *Invent. Math.*, 1969, **7**, S. 1—32.
3. Explizite Präsentation von Chevalleygruppen über $\mathbb{Z}$. — *Math. Z.*, 1975, **141**, S. 235—241.

Б и р к с (Birkes D.)

1. Orbits of linear algebraic groups. — *Ann. Math.*, 1971, **93**, p. 459—475.

Б о р е л ь (Borel A.)

1. Groupes linéaires algébriques. — *Ann. Math.*, 1956, **64**, p. 20—80.
2. Some finiteness properties of adèle groups over number fields. — *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 1963, **16**, p. 101—126.
3. Introduction aux groupes arithmétiques. — Paris: Hermann, 1969.
4. Linear Algebraic Groups, notes by H. Bass. — N. Y.: Benjamin W. A., 1969. Русский перевод: Борель А. Линейные алгебраические группы. — М.: Мир, 1972.
5. On the automorphism of certain subgroups of semi-simple Lie groups. — В кн.: *Algebraic Geometry*, ed. S. Abhyankar. — London: Oxford Univ. Press, 1969, p. 43—74.

6. Properties and linear representations of Chevalley groups. — В кн.: Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. — Lect. Notes in Math., Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1970, 131, p. 1—55. Русский перевод: Борель А. Свойства и линейные представления групп Шевалле. — В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973, с. 9—59.
 7. Cohomologie réelle stable de groupes S -arithmétiques classiques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1972, 274, p. 1700—1702.
 8. Linear representations of semi-simple algebraic groups. — Proc. A. M. S. Summer Inst. (Arcata). — В кн.: Proc. Symp. Pure Math. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1975, 29, p. 421—440.
- Борель, Мостов (Borel A., Mostow G. D.)
1. Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups. — Proc. Symp. Pure Math. IX. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1966.
- Борель, Серр (Borel A., Serre J. P.)
1. Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne. — Comm. Math. Helv., 1964, 39, p. 111—164.
 2. Adjonction de coins aux espaces symétriques. Applications à la cohomologie des groupes arithmétiques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1970, 271, p. 1156—1158.
 3. Cohomologie à supports compacts des immeubles de Bruhat — Tits. Applications à la cohomologie des groupes S -arithmétiques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1971, 272, p. 110—113.
 4. Corners and arithmetic groups. — Comm. Math. Helv., 1973, 48, p. 436—491.
- Борель, Спрингер (Borel A., Springer T. A.)
1. Rationality properties of linear algebraic groups II. — Tôhoku Math. J., 1968, 20, p. 443—497.
- Борель, Титс (Borel A., Tits J.)
1. Groupes réductifs. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1965, 27, p. 55—150. Русский перевод: Борель А., Титс Ж. Редуктивные группы. — Сб. Математика, 1967, 11, № 1, с. 43—111; 11, № 2, с. 3—31.
 2. Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs I. — Invent. Math., 1971, 12, p. 95—104. Русский перевод: Борель А., Титс Ж. Унипотентные элементы и параболические подгруппы редуктивных групп, I. — Сб. Математика, 1972, 16, № 3, с. 3—12.
 3. Compléments à l'article «Groupes réductifs». — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1972, 41, p. 253—276.
 4. Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples. — Ann. Math., 1973, 97, p. 499—571.
- Борель, Хариш-Чандра (Borel A., Harish-Chandra)
1. Arithmetic subgroups of algebraic groups. — Ann. Math., 1962, 75, p. 485—535. Русский перевод: Борель А., Хариш-Чандра. Арифметические подгруппы алгебраических групп. — Сб. Математика, 1964, 8, № 2, с. 19—71
- Брискорн (Brieskorn E.)
1. Singular elements of semi-simple algebraic groups. — В кн.: Actes Congrès Intern. Math., 1970, t. 2, p. 279—284, Paris Gauthier-Villars, 1971.

2. Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. — *Invent. Math.*, 1971, 12, S. 57—61.
- Брюа, Титс (Bruhat F., Tits J.)
1. Groupes algébriques simples sur un corps local. — В кн.: *Proceedings of a Conference on local Fields*, Berlin; Heidelberg, N. Y.; Springer, 1967, p. 23—36.
 2. BN-paires de type affine et données radicielles. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, 263, p. 598—601.
 3. Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, 263, p. 766—768.
 4. Groupes algébriques simples sur un corps local. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, 263, p. 822—825.
 5. Groupes algébriques simples sur un corps local; cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, 263, p. 867—869. Русский перевод статей 2—5: Брюа Ф., Титс Ж. Строение полупростых алгебраических групп над локальными полями. — *Сб. Математика*, 1968, 12, № 5, с. 19—33.
 6. Groupes réductifs sur un corps local. — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1972, 41, p. 5—252.
- Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Groupes et algèbres de Lie. — Paris: Hermann, 1971, Ch. 1 (2nd ed.); 1972, Ch. 2—3; 1975, Ch. 7—8. Русский перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. I—III. — М.: Мир, 1976. Гл. VII—VIII. — М.: Мир, 1978.
- Бялыницки-Бируля (Białynicki-Birula A.)
1. On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups. — *Amer. J. Math.*, 1963, 85, p. 577—582.
 2. Some theorems on actions of algebraic groups. — *Ann. Math.* 1973, 98, p. 480—497.
- Вейль А. (Weil A.)
1. Variétés abéliennes et courbes algébriques. — Paris: Hermann, 1948.
 2. On algebraic groups of transformations. — *Amer. J. Math.*, 1955, 77, p. 355—391.
 3. On algebraic groups and homogeneous spaces. — *Amer. J. Math.*, 1955, 77, p. 493—512.
 4. Algebras with involutions and the classical groups. — *J. Indian Math. Soc.*, 1961, 24, p. 589—623. Русский перевод: Вейль А. Алгебры с инволюцией и классические группы. — *Сб. Математика*, 1963, 7, № 4, 31—56.
 5. Adeles and algebraic groups. — Princeton: Inst. Advanced Study, 1961. Русский перевод: Вейль А. Адели и алгебраические группы. — *Сб. Математика*, 1964, 8, № 4, с. 3—74.
- Вейль Г. (Weyl H.)
1. The Classical Groups. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1946. Русский перевод: Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
- Вейсфейлер Б. Ю.
1. Об одном свойстве полупростых алгебраических групп. — *Функциональный анализ и его прилож.*, 1968, 2, № 3, с. 84—85.

2. Некоторые свойства особых полупростых алгебраических групп над незамкнутыми полями. — Труды Московского матем. общества, 1969, 20, с. 111—136.
 3. Замечание о некоторых алгебраических группах. — Функциональный анализ и его приложения, 1970, 4, № 1, с. 91.
 4. Полупростые алгебраические группы, разложимые над квадратичным расширением. — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 56—71.
 5. Принцип Хассе для алгебраических групп, разложимых над квадратичным расширением. — Функциональный анализ и его приложения, 1972, 6, № 2, с. 21—23.
- Вейсфейлер Б. Ю., Кац В. Г.
1. Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p . — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 762—788.
- Верма (Verma D.-N.)
1. Role of affine Weyl groups in the representation theory of algebraic Chevalley groups and their Lie algebras. — В кн.: Lie Groups and their Representations, ed. I. M. Gelfand. — N. Y.: Halsted, 1975.
- Верфриц (Wehrfritz B. A. F.)
1. Infinite Linear Groups. — Berlin, Heidelberg; N. Y.: Springer, 1973.
- Винтер (Winter D. J.)
1. On automorphisms of algebraic groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72, p. 706—708.
 2. Algebraic group automorphisms having finite fixed point sets. — Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, p. 371—377.
 3. Fixed points and stable subgroups of algebraic group automorphisms. — Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, p. 1107—1113.
 4. On groups of automorphisms of Lie algebras. — J. Algebra, 1968, 8, p. 131—142.
- Воскресенский В. Е.
1. О двумерных алгебраических торах. — ИАН СССР, сер. матем., 1965, 29, с. 239—244.
 2. О двумерных алгебраических торах II. — ИАН СССР, сер. матем., 1967, 31, с. 711—716.
 3. Группа Пикара линейных алгебраических групп. — В кн.: Исслед. по теории чисел. Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 1969, 3, с. 7—16.
 4. О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп. — ДАН СССР, 1969, 188, с. 978—981.
 5. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп. — ИАН СССР, сер. матем., 1970, 34, с. 3—19.
 6. Рациональность некоторых алгебраических торов. — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 762—768.
- Гарланд (Garland H.)
1. p -adic curvature and a conjecture of Serre. — Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, p. 259—261.
 2. p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic groups. — Ann. Math., 1973, 97, p. 375—423.
- Годеман (Godement R.)
1. Groupes linéaires algébriques sur un corps parfait. — Sémin. Bourbaki (1960—61), Exp. 206. N. Y.: W. A. Benjamin, 1966.

Гроссханс (Grosshans F.)

1. Orthogonal representations of algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **137**, p. 519—531.
2. Representations of algebraic groups preserving quaternion skew-hermitian forms. — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **24**, p. 497—501.
3. Semi-simple algebraic groups defined over a real closed field. — Amer. J. Math., 1972, **94**, p. 473—485.
4. Observable groups and Hilbert's fourteenth problem. — Amer. J. Math., 1973, **95**, p. 229—253.
5. Open sets of points with good stabilizers. — Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, p. 518—521.

Демазюр (Demazure M.)

1. Schémas en groupes réductifs. — Bull. Soc. Math. France, 1965, **93**, p. 369—413.
2. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1971, (4) **3**, p. 507—588.
3. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1974 (4) **7**, p. 53—88.

Демазюр, Габриэль (Demazure M., Gabriel P.)

1. Groupes Algébriques. — Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs. — Paris: Masson; Amsterdam: North-Holland, 1970.

Демазюр, Гротендик (Demazure M., Grothendieck A.)

1. Schémas en Groupes. — Lect. Notes in Math., **151**, **152**, **153**. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1970.

Деодхар (Deodhar V. V.)

1. On central extensions of rational points of algebraic groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1975, **81**, p. 573—575; Amer. J. Math., 1978, **100**, p. 303—386.

Джекобсон (Jacobson N.)

1. Lie Algebras. — N. Y.: Interscience, 1962. Русский перевод: Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

Дьедонне (Dieudonné J.)

1. Sur les groupes de Lie algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1952, **1**, p. 380—402.
2. Sur quelques groupes de Lie abéliens sur un corps de caractéristique $p > 0$. — Arch. Math., 1954, **5**, p. 274—281; correction, ibid., 1955, **6**, p. 88.
3. Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$. — Comm. Math. Helv., 1954, **28**, p. 87—118.
4. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$, II. — Amer. J. Math., 1955, **77**, p. 218—244.
5. Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$, III. — Math. Z., 1955, **63**, p. 53—75.
6. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$, IV. — Amer. J. Math., 1955, **77**, p. 429—452.
7. Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$, V — Bull. Soc. Math. France, 1956, **84**, p. 207—239.
8. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$, VI. — Amer. J. Math., 1957, **79**, p. 331—388.

9. Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$, VII. — *Math. Ann.*, 1957, **134**, p. 114—133.
 10. Les algèbres de Lie simples associées aux groupes simples algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$. — *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1957, **6**, p. 198—204.
 11. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$, VIII. — *Amer. J. Math.*, 1958, **80**, p. 740—772.
 12. Remarques sur la réduction mod. p des groupes linéaires algébriques. — *Osaka J. Math.*, 1958, **10**, p. 75—82.
 13. La géométrie des groupes classiques. — 3rd ed. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. Русский перевод: Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. — М.: Мир, 1974.
- Дьедонне, Керрол (Dieudonné J., Carrel J. B.)
1. Invariant theory, old and new. — *Advances in Math.*, 1970, **4**, p. 1—80. — Русский перевод в кн.: Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. — М.: Мир, 1974, с. 9—124.
- Залесский А. Е.
1. Замечание о треугольной группе. — *Весті АН БССР, сер. фіз.-матем. наук*, 1968, № 2, с. 139—141.
- Ивахори (Iwahori N.)
1. On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. — *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1964, **10**, p. 215—235.
- Ивахори, Мацумото (Iwahori N., Matsumoto H.)
1. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups. — *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 1965, **25**, p. 5—48.
- Иверсен (Iversen B.)
1. A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties. — *Invent. Math.*, 1972, **16**, p. 229—236.
- Игуса (Igusa J.)
1. On certain representations of semi-simple algebraic groups and the arithmetic of the corresponding invariants, I. — *Invent. Math.*, 1971, **12**, p. 62—94.
- Ихара (Ihara Y.)
1. On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p -adic fields. — *J. Math. Soc. Japan*, 1966, **18**, p. 219—235.
- Иянага (Iyanaga K.)
1. On certain double coset spaces of algebraic groups. — *J. Math. Soc. Japan*, 1971, **23**, p. 103—122.
- Каллен (van der Kallen W. L. J.)
1. Infinitesimally Central Extensions of Chevalley Groups. — *Lect. Notes in Math.*, **356**. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1977.
- Камбаяши (Kambayashi T.)
1. Projective representations of algebraic linear groups of transformations. — *Amer. J. Math.*, 1966, **88**, p. 199—205.
- Капланский (Kaplansky I.)
1. An Introduction to Differential Algebra. — Paris: Hermann, 1957. Русский перевод: Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959.
- Картер (Carter R. W.)
1. Simple Groups of Lie Type. — London; N. Y.: Wiley, 1972.

Картер, Лустиг (Carter R. W., Lusztig G.)

1. On the modular representations of the general linear and symmetric groups. — *Math. Z.*, 1974, **136**, p. 193—242.

Картер, Элкингтон (Carter R. W., Elkington G. B.)

1. A note on the parametrization of conjugacy classes. — *J. Algebra*, 1972, **20**, p. 350—354.

Картье (Cartier P.)

1. Groupes algébriques et groupes formels. — В кн.: *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques* (Bruxelles, 1962). Paris: Gauthier-Villars, 1962, p. 87—111.

Кассиди (Cassidy P. J.)

1. Differential algebraic groups. — *Amer. J. Math.*, 1972, **94**, p. 891—954.

Кимура (Kimura H.)

1. Relative cohomology of algebraic linear groups, II. — *Nagoya Math. J.*, 1966, **26**, p. 89—99.

Кнезер (Kneser M.)

1. Starke Approximation in algebraischen Gruppen, I. — *J. Reine Angew. Math.*, 1965, **218**, S. 190—203.
2. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p -adischen Körpern, I. — *Math. Z.*, 1965, **88**, S. 40—47; II. *ibid.*, 1965, **89**, S. 250—272.
3. Semi-simple algebraic groups. — В кн.: *Algebraic Number Theory*, ed. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich. London; N. Y.: Academic Press, 1967, p. 250—265. Русский перевод: Кнезер М. Полупростые алгебраические группы. — В кн.: *Алгебраическая Math.*, **108**. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1969.
4. Normal subgroups of integral orthogonal groups. — В кн.: *Algebraic K-Theory and its Geometric Applications*, Lect. Notes in Math., **108**. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1969.
5. Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups. — Bombay: Tata Inst. of Fundamental Research, 1969.

Ковачич (Kovacic J.)

1. Pro-algebraic groups and the Galois theory of differential fields. — *Amer. J. Math.*, 1973, **95**, p. 507—536.

Колчин (Kolchin E. R.)

1. Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. — *Ann. Math.*, 1948, **49**, p. 1—42.
2. On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups. — *Ann. Math.*, 1948, **49**, p. 774—789.
3. *Differential Algebra and Algebraic Groups*. — N. Y.: London: Academic Press, 1973.

Кэртис (Curtis C. W.)

1. Representations of Lie algebras of classical type with applications to linear groups. — *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, p. 307—326.
2. The classical groups as a source of algebraic problems. — *Amer. Math. Monthly*, 1967, **4**, Part II of No. 1, p. 80—91.
3. Chevalley groups and related topics. — В кн.: *Finite Simple Groups*, ed. Powell M., B., Higman G., London; N. Y.: Academic Press, 1971, p. 135—189.

Л а з а р (Lazard M.)

1. Sur le nilpotence de certains groupes algébriques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1955, **241**, p. 1687—1689.
2. Groupes analytiques p -adiques. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1965, **26**, p. 1—219.

Л а к ш м и Б а и, М у з и л и, С е ш а д р и (Lakshmi Bai, Musili C., Seshadri C. S.)

1. Cohomology of line bundles on G/B . — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1974, (4) **7**, p. 89—138.

Л е н г (Lang S.)

1. Algebraic groups over finite fields. — Amer. J. Math., 1956, **78**, p. 555—563.
2. Abelian Varieties. — N. Y.: Interscience, 1959.

Л у (Lou B.)

1. The centralizer of a regular unipotent element in a semi-simple algebraic group. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, p. 1144—1147.

Л у н а (Luna D.)

1. Sur les orbites fermées des groupes algébriques réductifs. — Invent. Math., 1972, **16**, p. 1—5.

Л у н а, В у с т (Luna D., Vust T.)

1. Un théorème sur les orbites affines des groupes algébriques semi-simples. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1973, (3) **27**, p. 527—535.

Л е н г л е н д с (Langlands R. P.)

1. Euler Products. — Yale Math. Monographs, New Haven; London: Yale Univ. Press, 1971. Русский перевод: Л е н г л е н д с Р. П. Эйлеровы произведения. — Сб. Математика, 1971, **15**, № 1, с. 14—43.

М а к д о н а л ь д (Macdonald I. G.)

1. Spherical functions on p -adic Chevalley group. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, p. 520—525.
2. Spherical Functions on a Group of p -adic Type. — Madras: Ramaniujan Inst., 1971.

М а м ф о р д (Mumford D.)

1. Geometric Invariant Theory. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1965. Русский перевод в кн.: Дьедонне Ж., Кёррол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. — М.: Мир, 1974, с. 126—258.
2. Abelian Varieties. — London: Oxford Univ. Press, 1970.
3. Introduction to Algebraic Geometry, preliminary version of Chapters I—III. — Cambridge: Harvard Univ. Math. Dept., 1970.

М а р к у с (Marcus L.)

1. Exponentials in algebraic matrix groups. — Advances in Math., 1973, **11**, p. 351—367.

М а р л и н (Marlin R.)

1. Anneaux de Chow des groupes algébriques $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 , F_4 . — C. R. Acad. Sci., Paris, 1974, **279**, p. 119—122.

М а р с (Mars J. G. M.)

1. Les nombres de Tamawaga de certains groupes exceptionnels. — Bull. Soc. Math. France, 1966, **94**, p. 97—140.

2. Solution d'un problème posé par A. Weil — C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, **266**, p. 484—486.
3. The Tamagawa number of ${}^2A_n$. — Ann. Math., 1969, **89**, p. 557—574.
4. Les nombres de Tamagawa de groupes semi-simples. — Sémin. Bourbaki (1968—69). Exp. 351, Lect. Notes in Math., Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971, **179**.

Мацумото (Matsumoto H.)

1. Quelques remarques sur les groupes de Lie algébriques réels. — J. Math. Soc. Japan, 1964, **16**, p. 419—446.
2. Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, **258**, p. 3419—3422.
3. Un théorème de Sylow pour les groupes semi-simples p -adiques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1966, **262**, p. 425—427.
4. Sur les groupes semi-simples déployés sur un anneau principal. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1966, **262**, p. 1040—1042.
5. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1969, (4) **2**, p. 1—62.
6. Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p -adique. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1969, **269**, p. 829—832.

Мацусима (Matsushima Y.)

1. Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes. — Nagoya Math. J., 1960, **16**, p. 205—218.

Минбашьян (Minbashian F.)

1. Pro-affine algebraic groups. — Amer. J. Math., 1973, **95**, p. 174—192.

Мияниши (Miyanishi M.)

1. On the algebraic fundamental group of an algebraic group. — J. Math. Kyoto Univ., 1972, **12**, p. 351—367.

Мостов (Mostow G. D.)

1. Self-adjoint groups. — Ann. Math., 1955, **62**, p. 44—55.
2. Fully reducible subgroups of algebraic groups. — Amer. J. Math., 1956, **78**, p. 200—221.

Мур (Moore C.)

1. Group extensions of p -adic and adelic linear groups. — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1968, **35**, p. 5—70.

Нагата (Nagata M.)

1. Complete reducibility of rational representations of a matrix group. — J. Math. Kyoto Univ., 1961, **1**, p. 87—99.
2. Invariants of a group in an affine ring. — J. Math. Kyoto Univ., 1964, **3**, p. 369—377.
3. Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert. — Bombay: Tata Inst. of Fundamental Research, 1965.

Накамуро (Nakamura T.)

1. A remark on unipotent groups of characteristic $p > 0$. — Kodai Math. Sem. Rep. Japan, 1972, **23**, p. 377—383.
2. On commutative unipotent groups defined by Seligman. — J. Math. Soc. Japan, 1972, **23**, p. 377—383.

Оно (Ono T.)

1. Arithmetic of orthogonal groups. — J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, p. 79—91.
2. Sur les groupes de Chevalley. — J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, p. 307—313.

3. Sur la reduction modulo p des groupes linéaires algébriques. — Osaka J. Math., 1958, 10, p. 57—73.
4. Arithmetic of algebraic tori. — Ann. Math., 1961, 74, p. 101—139.
5. On the field of definition of Borel subgroups of semi-simple algebraic groups. — J. Math. Soc. Japan, 1963, 15, p. 392—395.
6. On the Tamagawa number of algebraic tori. — Ann. Math., 1963, 78, p. 47—73.
7. On the relative theory of Tamagawa numbers. — Ann. Math., 1965, 82, p. 88—111.
8. On algebraic groups and discontinuous groups. — Nagoya Math. J. 1966, 27, p. 279—322.
9. A remarks on Gaussian sums and algebraic groups. — J. Math. Kyoto Univ., 1973, 13, p. 139—142.

Оорт (Oort F.)

1. Commutative Group Schemes. — Lect. Notes in Math. — Berlin; Heidelberg: N. Y., Springer, 1966, 15.
2. Algebraic group schemes in characteristic zero are reduced. — Invent. Math., 1966, 2, p. 79—80.

Паршал (Parshall B.)

1. Regular elements in algebraic groups of prime characteristic. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, p. 57—62.

Платонов В. П.

1. Автоморфизмы алгебраических групп. — ДАН СССР, 1966, 168, с. 1257—1260.
2. Теория алгебраических линейных групп и периодические группы. — ИАН СССР, сер. матем., 1966, 30, с. 573—620.
3. Алгебраические группы с почти-регулярным автоморфизмом и теоремы инвариантности. — ИАН СССР, сер. матем., 1967, 31, № 3, с. 687—696.
4. Доказательство гипотезы конечности для разрешимых подгрупп алгебраических групп. — Сибирск. матем. ж., 1969, 10, № 5, с. 1084—1090.
5. Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп. — ИАН СССР, сер. матем., 1969, 33, № 6, с. 1211—1219.
6. Дополнение к работе «Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп». — ИАН СССР, сер. матем., 1970, 34, № 4, с. 775—777.
7. О конгруэнц-проблеме для разрешимых целочисленных групп. — ДАН БССР, 1971, 15, с. 869—872.

Платонов В. П., Милованов М. В.

1. Определяемость алгебраических групп арифметическими подгруппами. — ДАН СССР, 1973, 209, № 1, с. 43—46.

Платонов В. П., Янчевский В. И.

1. Структура унитарных групп и коммутант простой алгебры над глобальными полями. — ДАН СССР, 1973, 208, № 3, с. 541—544.

Попов В. Л.

1. Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии. — ИАН СССР, сер. матем., 1970, 34, № 3, с. 523—531.

2. О стабильности действия алгебраической группы на алгебраическом многообразии. — ИАН СССР, сер. матем., 1972, **86**, № 2, с. 371—385.

П р а с а д, Р а г у н а т а н (Prasad G., Raghunathan M. S.)

1. Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups. — Ann. Math., 1972, **96**, p. 296—317.

Р а г у н а т а н (Raghunathan M. S.)

1. Cohomology of arithmetic subgroups of algebraic groups, I. — Ann. Math., 1967, **86**, p. 409—424. II. *ibid.*, 1968, **87**, p. 279—304.
2. A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups. — Invent. Math., 1968, **4**, p. 318—335.
3. Discrete Subgroups of Lie Groups. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972. Русский перевод: Р а г у н а т а н М. — Дискретные подгруппы групп Ли. — М.: Мир, 1977.
4. On the congruence subgroup problem. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1976, **46**, p. 107—161.

Р и (Ree R.)

1. On some simple groups defined by C. Chevalley. — Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, p. 392—400.
2. Construction of certain semi-simple groups. — Canad. J. Math., 1964, **16**, p. 490—508.
3. Commutators in semi-simple algebraic groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, p. 457—460.

Р и м (Riehm C.)

1. The congruence subgroup problem over local fields. — Amer. J. Math., 1970, **92**, p. 771—778.

Р и ч а р д с о н (Richardson R. W.)

1. Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups. — Ann. Math., 1967, **86**, p. 1—15.
2. Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero. — Invent. Math., 1972, **16**, p. 6—14.
3. Conjugacy classes in parabolic subgroups of semi-simple algebraic groups. — Bull. London Math. Soc., 1974, **6**, p. 21—24.

Р о з е н л и х т (Rosenlicht M.)

1. Some basic theorems on algebraic groups. — Amer. J. Math., 1956, **78**, p. 401—443.
2. Some rationality questions on algebraic groups. — Ann. Mat. Pura Appl., 1957, **43**, p. 25—50.
3. Toroidal algebraic groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, p. 984—988.
4. On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces. — Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **101**, p. 211—223.
5. On a result of Baer. — Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, p. 99—101.
6. Questions of rationality for solvable algebraic groups over non-perfect fields. — Annali di Mat., 1963 (IV) **61**, p. 97—120.

С а т а к е (Satake I.)

1. On the theory of reductive algebraic groups over a perfect field. — J. Math. Soc. Japan, 1963, **15**, p. 210—235. Русский перевод: С а т а к е И. Теория полупростых алгебраических

групп над совершенным полем. — Сб. Математика, 1965, 9, № 2, с. 19—44.

2. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1963, 18, p. 5—69.
3. Symplectic representations of algebraic groups satisfying a certain analyticity condition. — Acta. Math., 1967, 117, p. 215—279.
4. On a certain invariant of the groups of type E_6 and E_7 . — J. Math. Soc. — Japan, 1968, 20, p. 322—335.
5. Classification Theory of Semi-Simple Algebraic Groups. — N. Y.: Marcel Dekker, 1971.

Свидлер (Sweedler M. E.)

1. Conjugacy of Borel subgroups, an easy proof. — Advances in Math., 1976, 20, p. 86—100.

СГ = Demazure M., Grothendieck A. [1]

Селигман (Seligman G. B.)

1. Algebraic Groups, mimeographed lecture notes. — New Haven: Yale Univ. Math., Dept., 1964.
2. Modular Lie Algebras. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1967.
3. Algebraic Lie algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, 74, p. 1051—1065.
4. On some commutative unipotent groups. — Invent. Math., 1968, 5, p. 129—137.
5. On two-dimensional algebraic groups. — Scripta Math., 1973, 29, p. 453—465.

Серр (Serre J. — P.)

1. Groupes algébriques et corps de classes. — Paris: Hermann, 1959. Русский перевод: Серр Ж. Алгебраические группы и поля классов. — М.: Мир, 1968.
2. Algebres de Lie semi-simples complexes. — N. Y.: W. A. Benjamin, 1966. Русский перевод в кн.: Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, с. 273—368.
3. Groupes de congruence. — Sémin. Bourbaki (1966—67), Exp. 330. — N. Y.: W. A. Benjamin, 1968.
4. Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1968, 34, p. 37—52.
5. Le problème des groupes de congruence pour SL_2 . — Ann. Math., 1970, 92, p. 489—527.
6. Cohomologie des groupes discrets. — В кн.: Prospects in Mathematics, Ann. of Math. Studies. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 7, p. 77—169. Русский перевод: Серр Ж.-П. Когомологии дискретных групп. — Сб. Математика, 1974, 18, № 3, с. 123—144, № 4, с. 3—33.

Сешадри (Seshadri C. S.)

1. Mumford's conjecture for $GL(2)$ and applications. — В кн.: Algebraic Geometry, ed. Abhyankar S. — London: Oxford Univ. Press, 1969, p. 347—371.
2. Quotient spaces modulo reductive algebraic groups. — Ann. Math., 1972, 95, p. 511—556.

3. Theory of moduli. — Proc. A. M. S. Summer Inst. (Arcata). В кн.: Proc. Symp. Pure Math. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1975, 29, p. 263—304.

Симон (Simon A.-M.)

1. Structure des groupes unipotents commutatifs. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1973, 276, p. 347—349.

Спрингер (Springer T. A.)

1. Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1966, 30, p. 115—141.
2. A note on centralizers in semi-simple groups. — Indag. Math., 1966, 28, p. 75—77.
3. Weyl's character formula for algebraic groups. Invent. Math., 1968, 5, p. 85—105.
4. The unipotent variety of a semisimple group. — В кн.: Algebraic Geometry, ed. Abhyankar S. — London: Oxford Univ. Press, 1969, p. 373—391.
5. Jordan Algebras and Algebraic Groups. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1973.

Спрингер, Штейнберг (Springer T. A., Steinberg R.)

1. Conjugacy classes. — В кн.: Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1970, 131, p. 167—266. Русский перевод: Спрингер Т. А., Штейнберг Р. Классы сопряженных элементов. — В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973, с. 162—262.

Штейнберг (Steinberg R.)

1. Prime power representations of finite linear groups. — I. Canad. J. Math., 1956, 8, p. 580—591. II. ibid., 1957, 9, p. 347—351.
2. Variations on a theme of Chevalley. — Pacific J. Math., 1959, 9, p. 875—891.
3. The simplicity of certain groups. — Pacific J. Math., 1960, 10, p. 1039—1041.
4. Automorphisms of finite linear groups. — Canad. J. Math., 1960, 12, p. 606—615.
5. Automorphisms of classical Lie algebras. — Pacific J. Math., 1961, 11, p. 1119—1129.
6. Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques. — В кн.: Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962). Paris: Gauthier-Villars, 1962, p. 113—127.
7. Representations of algebraic groups. — Nagoya Math. J., 1963, 22, p. 33—56.
8. Regular elements of semisimple algebraic groups. — Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1965, 25, p. 49—80.
9. Classes of elements of semisimple algebraic groups. — В кн.: Труды Международного конгресса математиков, Москва, 1966. М.: Мир, 1968, с. 277—284.
10. Lectures on Chevalley Groups, mimeographed lecture notes. — New Haven: Yale Univ. Math. Dept., 1968. Русский перевод: Штейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.
11. Endomorphisms of linear algebraic groups. — Mem. Amer. Math. Soc., 1968, 80.

12. Algebraic groups and finite groups. — Illinois J. Math., 1969, 13, p. 81—86.
13. Conjugacy Classes in Algebraic Groups. — Lect. Notes in Math. — Berlin, Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, 366.
14. Abstract homomorphisms of simple algebraic groups. — Sém. Bourbaki (1972—73), Exp. 435, Lect. Notes in Math. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, 383.

Сулливан (Sullivan J. B.)

1. Automorphisms of affine unipotent groups in positive characteristic. — J. Algebra, 1973, 26, p. 140—151.
2. A decomposition theorem for pro-affine solvable algebraic groups over algebraically closed fields. — Amer. J. Math., 1973, 94, p. 221—228.

Такеучи (Takeuchi M.)

1. A note on geometrically reductive groups. — J. Fac. Sci Univ. Tokyo, 1973, 20, p. 387—396.

Тасака (Tasaka T.)

1. On the quasi-split simple algebraic groups defined over an algebraic number field. — J. Fac. Sci Univ. Tokyo, 1968, 15, p. 147—168.
2. On the second cohomology groups of the fundamental groups of simple algebraic groups over perfect fields. — J. Math. Soc. Japan, 1969, 21, p. 244—258.

Титс (Tits J.)

1. Sur la classification des groupes algébriques semisimple. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1959, 249, p. 1438—1440.
2. Sur la trinité et certains groupes qui s'en déduisent. — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1959, 2, p. 13—60.
3. Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1962, 254, p. 2910—2912.
4. Groupes semi-simple isotropes. — В кн.: Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962). — Paris: Gauthier-Villars, 1962, p. 137—147.
5. Groupes simples et géométries associées. — В кн.: Proc. Int. Congress of Mathematicians. Stockholm, 1962, p. 197—221.
6. Algebraic and abstract simple groups. — Ann. Math., 1964, 80, p. 313—329.
7. Structures et groupes de Weyl. — Sém. Bourbaki (1964—65), Exp. 288. — N. Y.: W. A. Benjamin, 1966.
8. Normalisateurs de tores, I. Groupes de Coxeter étendus. — J. Algebra, 1966, 4, p. 96—116.
9. Lectures on Algebraic Groups, mimeographed lecture notes. — New Haven: Yale Univ. Math. Dept., 1967.
10. Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque. — J. reine angew. Math., 1971, 247, p. 196—220.
11. Free subgroups in linear groups. — J. Algebra, 1972, 20, p. 250—270. Русский перевод: Титс Ж. Свободные подгруппы линейных групп. — Математика, 1972, 16, № 3, с. 47—66.
12. Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs. — Lect. Notes in Math. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, 386.

Фельдкамп (Veldkamp F. D.)

1. Representations of algebraic groups of type F_4 in characteristic 2. — J. Algebra, 1970, **16**, p. 326—339.
2. The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p . — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1972, (4) **5**, p. 217—240.
3. Roots and maximal tori in finite forms of semisimple algebraic groups. — Math. Ann., 1974, **207**, p. 301—314.

Фогарти (Fogarty J.)

1. Invariant Theory. — N. Y.: W. A. Benjamin, 1969.

Фрейденталь, Де Фриз (Freudenthal H., de Vries H.)

1. Linear Lie Groups. — N. Y.; London: Academic Press, 1969.

Хабоуш (Haboush W. J.)

1. Deformation theoretic methods in the theory of algebraic transformation spaces. — J. Math. Kyoto Univ., 1974, **14**, p. 341—370.

Хамфри (Humphreys J. E.)

1. Algebraic groups and modular Lie algebras. — Mem Amer. Math. Soc., 1967, **71**.
2. Existence of Levi factors in certain algebraic groups. — Pacific J. Math., 1967, **23**, p. 543—546.
3. On the automorphisms of infinite Chevalley groups. — Canad. J. Math., 1969, **21**, p. 908—911.
4. Arithmetic Groups, mimeographed lecture notes. — N. Y.: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1971.
5. Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups. — J. Algebra, 1971, **19**, p. 51—79.
6. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972.

Хамфри, Верма (Humphreys J. E., Verma D.-N.)

1. Projective modules for finite Chevalley groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, p. 467—468.

Хардер (Harder G.)

1. Über einen Satz von E. Cartan. — Abh. Math. Sem. Univ. — Hamburg, 1965, **28**, S. 208—214.
2. Über die Galois Kohomologie halbeinfacher Matrizengruppen. — I. Math. Z., 1965, **90**, S. 404—428. II. ibid., 1966, **92**, S. 396—415.
3. Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. — Invent. Math., 1967, **4**, S. 165—191.
4. Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven. — Invent. Math., 1968, **6**, S. 107—149.
5. Bericht über neuere Resultate der Galois Kohomologie halbeinfacher Gruppen. — Jahresber. Deutsch. Math. — Verein, 1968, **70**, S. 182—216.
6. Eine Bemerkung zum schwachen Approximationssatz. — Arch. Math., 1968, **19**, S. 465—471.
7. Minkowskische Reduktionstheorie über Functionenkörpern. — Invent. Math., 1969, **7**, S. 33—54.
8. A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1971, (4) **4**, p. 409—455.
9. Chevalley groups over function fields and automorphic forms. — Ann. Math., 1974, **100**, p. 249—306.

Харис (Haris S. J.)

1. Some irreducible representations of exceptional algebraic groups. — Amer. J. Math., 1971, 93, p. 75—106.

Хертиг (Hertzig D.)

1. The structure of Frobenius algebraic groups. — Amer. J. Math., 1961, 83, p. 421—431.
2. Forms of algebraic groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, 12, p. 657—660.
3. Cohomology of algebraic groups. — J. Algebra, 1967, 6, p. 317—334.
4. Fixed-point-free automorphisms of algebraic tori. — Amer. J. Math., 1968, 90, p. 1041—1047.
5. Cohomology of certain Steinberg groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1969, 75, p. 35—36.

Хииката (Hijikata H.)

1. A note on the groups of type G_2 and F_4 — J. Math. Soc. Japan, 1963, 15, p. 159—164.

Хохшильд (Hochschild G.)

1. Algebraic Lie algebras and representative functions. — Illinois J. Math., 1959, 3, p. 499—523; supplement, ibid., 1960, 4, p. 609—618.
2. On the algebraic hull of a Lie algebra. — Proc. Amer. Math. Soc., 1960, 11, p. 195—199.
3. Cohomology of algebraic linear groups. — Illinois J. Math., 1961, 5, p. 492—519.
4. Cohomology of affine algebraic homogeneous spaces. — Illinois J. Math., 1967, 11, p. 635—643.
5. Coverings of pro-affine algebraic groups. — Pacific J. Math., 1970, 35, p. 399—415.
6. Algebraic groups and Hopf algebras. — Illinois J. Math., 1970, 14, p. 52—65.
7. Note on algebraic Lie algebras. — Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 29, p. 10—16.
8. Introduction to Affine Algebraic Groups. — San Francisco: Holden-Day, 1971.
9. Automorphism towers of affine algebraic groups. — J. Algebra, 1972, 22, p. 365—373.
10. Lie algebra cohomology and affine algebraic groups. — Illinois J. Math., 1974, 18, p. 170—176.

Хохшильд, Мостов (Hochschild G., Mostow G. D.)

1. Pro-affine algebraic groups. — Amer. J. Math., 1969, 91, p. 1127—1140.
2. Automorphisms of affine algebraic groups. — J. Algebra, 1969, 13, p. 535—543.
3. Analytic and rational automorphisms of complex algebraic groups. — J. Algebra, 1973, 25, p. 146—151.
4. Unipotent groups in invariant theory. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1973, 70, p. 646—648.

Хук (Hooke R.)

1. Linear p -adic groups and their Lie algebras. — Ann. Math., 1942, 43, p. 641—655.

Шаттшнайдер (Schattschneider D.)

1. On restricted roots of semi-simple algebraic groups. — J. Math. Soc. Japan, 1969, 21, p. 94—115.

Шафаревич И. Р.

1. Основы алгебраической геометрии. — УМН, 1969, 24, № 6, p. 1—184.
2. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.

Шевалле (Chevalley C.)

1. A new relationship between matrices. — Amer. J. Math., 1943, 65, p. 521—531.
2. Theory of Lie Groups. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1946. Русский перевод: Шевалле К. Теория групп Ли, т. 1. — М.: Мир, 1946.
3. Algebraic Lie algebras. — Ann. of Math., 1947, 48, p. 91—100.
4. Théorie des groupes de Lie. — Groupes algébriques. — Paris: Hermann, 1951, 2. Русский перевод: Шевалле К. Теория групп Ли, т. 2. Алгебраические группы. — М.: ИЛ, 1958.
5. Théorie des groupes de Lie. — Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie. — Paris: Hermann, 1955, 3. Русский перевод: Шевалле К. Теория групп Ли, т. 3. Общие теоремы об алгебрах Ли. — М.: ИЛ, 1958.
6. On algebraic group varieties. — J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, p. 303—324.
7. Sur certains groupes simples. — Tôhoku Math. J., 1955, 7, p. 14—66. Русский перевод: Шевалле К. О некоторых простых группах. — Сб. Математика, 1958, 2, № 1, с. 3—58.
8. Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques. — Paris: Ecole Norm. Sup., 1956—1958.
9. La théorie des groupes algébriques. В кн.: Proc. Int. Congress Mathematicians (Edinburgh 1958), Cambridge Univ. Press, 1960, p. 53—68. Русский перевод: Шевалле К. Теория алгебраических групп. В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958. — М.: Физматгиз, 1962, с. 74—92.
10. Fondements de la géométrie algébrique. — Paris: Secrétariat Mathématique, 1958.
11. Certains schémas de groupes semisimples. — Sém. Bourbaki (1960—61), Exp. 219. — N. Y.: W. A. Benjamin, 1966.

Шеллер (Schoeller C.)

1. Groupes affines, commutatifs, unipotents sur un corps non parfait. — Bull. Soc. Math. France, 1972, 100, p. 241—300.

Штулер (Stuhler U.)

1. Unipotente und nilpotente Klassen in einfachen Gruppen und Liealgebren vom Typ G_2 . — Indag. Math., 1971, 33, S. 365—378.

Элкингтон (Elkington G. B.)

1. Centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups. — J. Algebra, 1972, 23, p. 137—163.

Янтцен (Jantzen J. C.)

1. Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen. — Bonner Math. Schriften. Bonn: Math. Inst. der Universität, 1973, 67.
2. Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren. — Math. Z., 1974, 140, S. 127—149.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ *)

(март 1979 г.)

Андерсен (Andersen H. H.)

1. Cohomology of line bundles on G/B. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1979, 12, № 1, p. 85—100.
2. The strong linkage principle. — Preprint.
3. The first cohomology group of a line bundle on G/B Invent. Math., 1979, 51, № 3, p. 287—296.

Андре (Andre P. P.)

1. k -regular elements in semisimple algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 201, p. 105—124.

Бала, Картер (Bala P., Carter R. W.)

2. Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. — Math. Proc. Camb. Phil. Soc., I. 1976, 79, p. 401—425; II. 1976, 80, p. 1—18.

Баллард (Ballard J. W.)

1. Injective modules for restricted enveloping algebras. — Math. Z., 1978, 163, p. 57—63.
2. Projective modules for finite Chevalley groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 245, p. 221—249.

Берман, Муди (Berman S., Moody R. V.)

1. Extensions of Chevalley groups. — Israel J. Math., 1975, 22, p. 42—51.

Борель (Borel A.)

9. Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. — Invent. Math., 1976, 35, p. 233—259.

10. Stable real cohomology of arithmetic groups. — Ann. Sci. École Norm. Sup., 1974, (4)7, p. 235—272.

Борель, Серр (Borel A., Serre J. — P.)

5. Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques. — Topology, 1976, 15, p. 211—232.

Борель, Титс (Borel A., Tits J.)

5. Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1978, 287, p. 55.

Борель, Хардер (Borel A., Harder G.)

1. Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields. — J. Reine Angew. Math., 1978, 298, p. 53—64.

Боро, Крафт (Borho W., Kraft H.)

1. Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen. — Comment. Math. Helv., 1979, 54, s. 61—104.

Бургонь, Вильямсон (Burgoyne N., Williamson C.)

1. On a theorem of Borel and Tits for finite Chevalley groups. — Arch. Math. (Basel), 1976, 27, p. 489—491.

*) Дополнительная библиография прислана автором для русского издания и содержит в основном работы, опубликованные после 1974 г. (см. также библиографический указатель: Алгебраические группы. — Минск: Институт математики АН БССР, 1980.) — Прим. ред.

Бялыницки-Бируля (Bialynicki-Birula A.)

3. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n . — Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., I. 1966, 14, p. 177—181; II. 1967, 15, p. 123—125.
4. On fixed points of torus actions on projective varieties. — Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 1974, 22, p. 1097—1101.
5. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. — Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 1976, 24, p. 667—674.
6. On algebraic actions of $SL(2)$. — Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 1978, 26, p. 293—294.

Бялыницки-Бируля, Хохшильд, Мостов (Bialynicki-Birula A., Hochschild G., Mostow G. D.)

1. Extensions of representations of algebraic linear groups. — Amer. J. Math., 1963, 85, p. 131—144.

Вейсфейлер Б. Ю.

6. Об одном классе унипотентных подгрупп полупростых алгебраических групп. — УМН, 1966, 21, № 2, с. 222—223.

Вейсфейлер Б. Ю., Долгачев И. В.

1. Унипотентные схемы групп над целостными кольцами. — ИАН СССР, сер. матем., 1974, 38, № 4, с. 757—799.

Вильсон (Wilson E. N.)

1. Extensions of homomorphisms of parabolic subgroups. — Canad. J. Math., 1972, 24, p. 947—956.

Винберг Э. Б.

1. Кольца определения плотных подгрупп полупростых линейных групп. — ИАН СССР, 1971, 35, с. 45—55.
2. О линейных группах, связанных с периодическими автоморфизмами полупростых алгебраических групп. — ДАН СССР, 1975, 221, № 4, с. 767—770.

Винтер (Winter D. J.)

5. Solvable subgroups and their Lie algebras in characteristic p . — Canad. J. Math., 1979, 31, p. 308—311.

Винтер (Winter P. W.)

1. On the modular representation theory of the two-dimensional special linear group over an algebraically closed field. — J. London Math. Soc., 1977, (2) 16, p. 237—252.

Воскресенский В. Е.

7. Стабильная эквивалентность алгебраических торов. — ИАН СССР, сер. матем., 1974, 38, № 1, с. 3—10.
8. О бирациональных инвариантах алгебраических торов. — УМН, 1975, 30, № 2, с. 207—208.

Вуст (Vust T.)

1. Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel. — Comment. Math. Helv., 1974, 49, p. 408—416.

Гатти, Винниберги (Gatti V., Viniberghi E.)

1. Spinors of 13-dimensional space. — Advances in Math., 1978, 30, p. 137—155.

Готтлиб (Gottlieb S. J.)

1. Algebraic automorphisms of algebraic groups with stable maximal tori. — Pacific. J. Math., 1972, 72, p. 461—470.

Гото (Goto M.)

1. Products of two semi-algebraic groups. — J. Math. Soc. Japan, 1973, 25, p. 71—74.
2. On an integer associated with an algebraic group. — J. Math. Soc. Japan, 1977, 29, p. 161—163.
3. Index of exponential map of a semi-algebraic group. — Amer. J. Math., 1978, 100, p. 837—849.

Грин (Green J. A.)

1. Locally finite representations. — J. Algebra, 1976, 41, p. 137—171.

Делинь, Лустиг (Deligne P., Lusztig G.)

1. Representations of reductive groups over finite fields. — Ann. of Math., 1976, 103, p. 103—161.

Демазюр (Demazure M.)

4. Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott. — Invent. Math., 1968, 5, p. 349—356.
5. A very simple proof of Bott's theorem. — Invent. Math., 1976, 33, p. 271—272.
6. Automorphismes et déformations des variétés de Borel. — Invent. Math., 1977, 39, p. 179—186.

Донкин (Donkin S.)

1. Hopf complements and injective comodules. — Proc. London Math. Soc., 1980, 40, № 2, p. 298—319.

Дуаи (Douai J.-C.)

1. Sur la 2-cohomologie galoisienne des groupes algébriques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1973, 276, p. 989—991.
2. 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, 280, p. 321—323.
3. Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps globaux. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, 281, p. 1077—1080.

Иверсен (Iversen B.)

2. The geometry of algebraic groups. — Advances in Math., 1976, 20, p. 57—85.
3. Brauer group of a linear algebraic group. — J. Algebra, 1976, 42, p. 295—301.

Камбаяши, Маргрейв (Kambayashi T., Margrave G.)

1. On homomorphisms from algebraic groups to $GL_n(\mathbb{Z})$. — Proc. Amer. Math. Soc., 1979, 74, p. 223—226.

Кантор И. Л.

1. Инварианты однородных пространств с параболической стационарной подгруппой. — ДАН СССР, 1974, 215, с. 249—252.

Карайоль (Carayol H.)

1. Le degré de symétrie d'une variété algébrique. — Bull. Sci. Math., 1975, (2) 99, p. 135—143.

Картер (Carter R. W.)

2. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. — Proc. London Math. Soc., 1978, 37, p. 491—507.

Картер, Клайн (Carter R. W., Cline E.)

1. The submodule structure of Weyl modules for groups of type A_4 . — В кн.: Proc. Conf. on Finite Groups, N. Y.: Academic Press, 1976, p. 303—311.

Кассиди (Cassidy P. J.)

2. Unipotent differential algebraic groups. — В кн.: Contributions to Algebra, N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1977, p. 83—115.

Кегель (Kegel O. H.)

1. Über algebraische Gruppen mit nicht-trivialer Partition. — J. Reine Angew. Math., 1965, 220, S. 68—73.

Кемпф (Kempf G. R.)

1. Linear systems on homogeneous spaces. — Ann. of Math., 1976, 103, p. 557—591.
2. Instability in invariant theory. — Ann. of Math., 1978, 108, p. 299—316.
3. The Grothendieck—Cousin complex of an induced representation. — Advances in Math., 1978, 29, p. 310—396.

Клайн (Cline E.)

1. Ext^1 for SL_2 . — Comm. Algebra, 1979, 7, p. 107—111.

Клайн, Паршалл, Скотт (Cline E., Parshall B., Scott L.)

1. Induced modules and affine quotients. — Math. Ann., 1977, 230, p. 1—14.
2. Induced modules and extensions of representations. — Invent. Math., 1978, 47, p. 41—51.
3. Cohomology, hyperalgebras, and representations. — Preprint.

Клайн, Паршалл, Скотт, ван дер Каллен (Cline E., Parshall B., Scott L., van der Kallen W.)

1. Rational and generic cohomology. — Invent. Math., 1977, 39, p. 143—163.

Крафт (Kraft H.)

1. Kommutative Algebraische Gruppen und Ringe. — Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, 455.
2. Parametrisierung von Konjugationsklassen in SL_n . — Math. Ann., 1978, 234, S. 209—220.

Кутц (Kutz R. E.)

1. Cohen-Macaulay rings and ideal theory in rings of invariants of algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 194, p. 115—129.

Лай (Lai K. F.)

1. On the Tamagawa number of quasi-split groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1976, 82, p. 300—302.

Ли (Lee D. H.)

1. On the group of automorphisms of affine algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 237, p. 145—152.

Луна (Luna D.)

2. Slices étales. — Bull. Soc. Math. France. Mémoire, 1973, 33, p. 81—105.
3. Adhérences d'orbite et invariants. — Invent. Math., 1975, 29, p. 231—238.

Лустиг (Lusztig G.)

1. A note on counting nilpotent matrices of fixed rank. — Bull. London Math. Soc., 1976, 8, p. 77—80.
2. On the finiteness of the number of unipotent classes. — Invent. Math., 1976, 34, p. 201—213.

3. Representations of Finite Chevalley Groups. — C. B. M. S. Regional Conf. Series in Math. Providence F. I.: Amer. Math. Soc., 1978, No. 39.
- Лустиг, Спалтенштейн (Lusztig G., Spaltenstein N.)
1. Induced unipotent classes. — J. London Math. Soc., 1979, 19, p. 41—52.
- Магид (Magid A. R.)
1. Left algebraic groups. — J. Algebra, 1975, 35, p. 253—272.
 2. Covering spaces of algebraic groups. — Amer. Math. Monthly, 1976, 83, p. 614—621.
 3. Analytic subgroups of affine algebraic groups. — Duke Math. J., 1977, 44, p. 875—882.
 4. Analytic left algebraic groups. — Amer. J. Math., 1977, 99, p. 1045—1059.
 5. Analytic left algebraic groups II. — Trans. Amer. Math. Soc., 1978, 238, p. 165—177.
 6. Brauer groups of linear algebraic groups with characters. — Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 71, p. 164—168.
- Маргулис Г. А.
1. Арифметические свойства дискретных подгрупп. — УМН, 1974, 29, № 1, с. 49—98.
 2. Коограниченные подгруппы в алгебраических группах над локальными полями. — Функциональный анализ и его приложения, 1977, 11, № 2, с. 45—57.
- Мейер, Оберст (Meyer H.-M., Oberst U.)
1. Fixpunkt- und Struktursätze für affine, algebraische Gruppenschemata in Charakteristik p. — Math. Ann., 1977, 227, S. 67—96.
- Милованов М. В.
1. Определяемость разрешимых алгебраических групп плотными целочисленными подгруппами. — Матем. заметки, 1975, 18, № 5 с. 719—730.
- Минбашьян (Minbashian F.)
2. The automorphism groups of algebraic groups. — J. Algebra, 1976, 43, p. 122—128.
- Мияниши (Miyanishi M.)
2. Une caractérisation d'un groupe algébrique simplement connexe. — Illinois J. Math., 1972, 16, p. 639—650.
 3. Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles. — В кн.: Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Akizuki Y. Tokyo: Kinokuniya, 1973, p. 71—93.
- Нисневич Е. А.
1. Аффинные однородные пространства и конечные подгруппы арифметических групп над функциональными полями. — Функциональный анализ и его приложения, 1977, 11, № 1, с. 73—74.
- Норман (Norman P.)
1. A fixed point criterion for linear reductivity. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 50, p. 95—96.
- Оберст (Oberst U.)
1. Affine Quotientenschemata nach affinen algebraischen Gruppen und induzierte Darstellungen. — J. Algebra, 1977, 44, S. 503—538.

- Оберст, Шнайдер (Oberst U., Schneider H.-J.)
1. Über Untergruppen endlicher algebraischer Gruppen, Manuscripta Math., 1973, 8, S. 217—241.
- Паршалл (Parshall B.)
2. A class of unipotent elements in a simple algebraic group. — J. Algebra, 1975, 36, p. 26—37.
- Паршалл, Скотт (Parshall B., Scott L.)
1. An imprimitivity theorem for algebraic groups. — Indag. math., 1980, 42, № 1, p. 39—47.
- Платонов В. П.
8. О проблеме рода в арифметических группах. — ДАН СССР, 1971, 200, с. 793—796.
 9. К проблеме максимальности арифметических групп. — ДАН СССР, 1971, 200, с. 530—533.
 10. Арифметическая теория линейных алгебраических групп и теория чисел. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1973, 132, с. 162—168.
 11. Арифметические и структурные проблемы в линейных алгебраических группах. — Proc. Int. Congress Math., Vancouver, 1974, vol. 1, s. 1, 1975, p. 471—476.
 12. Гипотеза Дьедонне и несюръективность накрытий алгебраических групп на k -точках. — ДАН СССР, 1974, 216, № 5, с. 986—989.
 13. Проблема Таннака — Артина и приведенная K -теория. — Известия АН СССР, сер. матем., 1976, 40, № 2, с. 227—261.
 14. Приведенная K -теория и аппроксимация в алгебраических группах. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1976, 142, с. 198—207.
 15. Algebraic groups and reduced K -theory. — Proc. Internat. Congress Math. (Helsinki, 1978), 1980, 1, p. 311—317.
 16. Бирациональные свойства приведенной группы Уайтхеда. — ДАН БССР, 1977, 21, № 3, с. 197—198.
- Платонов В. П., Янчевский В. И.
1. О гипотезе Хардера. — ДАН СССР, 1975, 221, № 4, с. 784—787.
- Поммеренинг (Pommerening K.)
1. Über die unipotenten Klassen reductiver Gruppen. — J. Algebra, 1977, 49, S. 525—536.
- Попов В. Л.
3. Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения. — ИАН СССР, сер. матем., 1974, 38, № 2, с. 294—322.
 4. Классификация трехмерных аффинных алгебраических многообразий, квазиродных относительно алгебраической группы. — ИАН СССР, сер. матем., 1975, 39, № 3, с. 566—609.
 5. Представления со свободным модулем ковариантов. — Функциональный анализ и его приложения, 1976, 10, № 3, с. 91—92.
- Прасад (Prasad G.)
1. Triviality of certain automorphisms of semi-simple groups over local fields. — Math. Ann., 1975, 218, p. 219—227.

2. Strong approximation for semi-simple groups over function fields. — *Ann. of Math.*, 1977, **105**, p. 553—572.
- Рагунатан (Raghunathan M. S.)
5. A note on orbits of reductive groups. — *J. Indian Math. Soc.*, 1974, **38**, p. 65—70.
- Ричардсон (Richardson R. W.)
4. The conjugating representation of a semisimple algebraic group. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1976, **82**, p. 933—935.
 5. Affine coset spaces of reductive algebraic groups. — *Bull. London Math. Soc.*, 1977, **9**, p. 38—41.
 6. Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups. — *Compositio Math.*, 1979, **38**, p. 311—327.
- Руссо (Rousseau G.)
1. Immeubles sphériques et théorie des invariants. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1978, **286**, p. 247—250.
- Сато, Кимура (Sato M., Kimura T.)
1. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. — *Nagoya Math. J.*, 1977, **65**, p. 1—155.
- Селбах (Selbach M.)
1. Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen. — *Bonner Math. Schriften*. Bonn: Math. Inst. der Universität, 1976, **83**.
- Серведио (Servedio F. J.)
1. Prehomogeneous vector spaces and varieties. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, **176**, p. 421—444.
- Серр (Serre J.-P.)
7. Arbres, amalgames, SL_2 , *Astérisque*. — *Soc. Math. France*, 1977, No 46.
- Сит (Sit K.-Y. C.)
1. On bounded elements of linear algebraic groups. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **209**, p. 185—198.
- Слодовы (Slodowy P.)
1. Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen. — *Regensburg Math. Schriften*. Regensburg: Fachbereich Math. der Universität, 1978, **2**.
- Спалтенстейн (Spaltenstein N.)
1. The fixed point set of an unipotent transformation on the flag manifold. — *Indag. Math.*, 1976, **38**, p. 452—456.
 2. On the fixed point set of an unipotent element on the variety of Borel subgroups. — *Topology*, 1977, **16**, p. 203—204.
- Спрингер (Springer T.-A.)
6. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. — *Invent. Math.*, 1976, **36**, p. 173—207.
 7. *Invariant Theory*. — *Lect. Notes in Math.* Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1977, **585**.
- Стейн (Stein M. R.)
1. Generators, relations and covering of Chevalley groups over commutative rings. — *Amer. J. Math.*, 1971, **93**, p. 965—1004.
 2. The Schur multiplier of $Sp_n(\mathbb{Z})$, $Spin_n(\mathbb{Z})$, $Spin_7(\mathbb{Z})$, and $F_4(\mathbb{Z})$. — *Math. Ann.*, 1975, **215**, p. 165—172.

3. Stability theorems for K_1 , K_2 and related functions modeled on Chevalley groups. — Japan. J. Math., 1978, 4, p. 77—108.
- Стейнбергер (Steinberg R.)
15. Torsion in reductive groups. — Advances in Math., 1975, 15, p. 63—92.
 16. On a theorem of Pittie. — Topology, 1975, 14, p. 173—177.
 17. On the desingularization of the unipotent variety. — Invent. Math., 1976, 36, p. 209—224.
 18. On theorems of Lie — Kolchin, Borel and Lang. — В кн.: Contributions to Algebra, N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1977, p. 349—354.
- Стерлинг (Sterling D. J.)
1. Coverings of algebraic groups and Lie algebras of classical type. — Pacific J. Math., 1964, 14, p. 1449—1462.
- Сулэ (Soulé C.)
1. The cohomologie of $SL_3(\mathbb{Z})$. — Topology, 1978, 17, p. 1—22.
- Судзуки (Suzuki K.)
1. On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings. — Tôhoku Math. J., 1976, 28, p. 57—66.
- Сулливан (Sullivan J. B.)
3. A proof of the finite generation of invariants of a normal subgroup. — Pacific J. Math., 1974, 51, p. 571—572.
 4. Completely reducible actions of connected algebraic groups on finite-dimensional associative algebras. — Illinois J. Math., 1976, 20, p. 425—433.
 5. Some representation theory for the modular general linear groups. — J. Algebra, 1977, 45, p. 516—535.
 6. Representations of the hyperalgebra of an algebraic group. — Amer. J. Math., 1978, 100, p. 643—652.
 7. Relations between the cohomology of an algebraic group and its infinitesimal subgroups. — Amer. J. Math., 1978, 100, p. 995—1014.
 8. Simply connected groups, the hyperalgebra and Verma's conjecture. — Amer. J. Math., 1978, 100, p. 1015—1019.
- Такеучи (Takeuchi M.)
2. Tangent coalgebras and hyperalgebras I. — Japan. J. Math., 1974, 42, p. 1—143.
 3. On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 211, p. 249—275.
 4. On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups II. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1976, 23, no. 2, p. 419—434.
- Тасака (Tasaka T.)
3. Sur les groupes algébriques semi-simples déployés. — J. Math. Soc. Japan, 1968, 20, p. 390—399.
- Тафт (Taft E. J.)
1. Cohomology of algebraic groups and invariant splitting of algebras. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, p. 106—108.
- Титс (Tits J.)
13. Homomorphismes «abstraits» de groupes de Lie. — Symposia Math. (INDAM) London; N. Y.: Academic Press, 1974, 13, p. 479—499.

14. On buildings and their applications. — В кн.: Proc. Internat. Congress Math. (Vancouver, 1974), Montreal: Canad. Math. Congress, 1975, 1, p. 209—220.
15. Systèmes générateurs de groupes de congruence. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1976, 283, p. 693—695.
16. Non-existence de certains polygones généralisés I. — Invent. Math., 1976, 36, p. 275—284.
17. Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten. — Invent. Math., 1977, 43, S. 283—295.
18. A «theorem of Lie—Kolchin» for trees. — В кн.: Contributions to Algebra, N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1977, p. 377—388.
19. Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples (d'après Platonov V. P. et al.). — (Séminaire Bourbaki, June, 1977). В кн.: «Lecture notes in Mathematics», 1978, v. 677, p. 218—236.

Ф е л ь д к а м п (Veldkamp F. D.)

4. Regular elements in anisotropic tori. — В кн.: Contributions to Algebra, N. Y.: San Francisco; London: Academic Press, 1977, p. 389—424.
5. Regular characters and regular elements. — Comm. Algebra, 1977, 5, p. 1259—1273.

Ф о н т л е р о й (Fauntleroy A.)

1. Rational points of commutator subgroups of solvable algebraic groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 194, p. 249—275.
2. Defining normal subgroups of unipotent algebraic groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 50, p. 14—19.
3. Automorphism groups of unipotent groups of Chevalley type. — Pacific J. Math., 1976, 66, p. 373—390.

Ф о р м а н е к, П р о ч е з и (Formanek E., Procesi C.)

1. Mumford's conjecture for the general linear group. — Advances in Math., 1976, 19, p. 292—305.

Ф р и н д л а н д е р (Friendlander E. M.)

1. Exceptional isogenies and the classifying spaces of simple Lie groups. — Ann. of Math., 1975, 101, p. 510—520.

Х а б о у ш (Haboush W. J.)

2. Reductive groups are geometrically reductive. — Ann. of Math., 1975, 102, p. 67—84.

Х а м ф р и (Humphreys J. E.)

7. Projective modules for $SL(2, q)$. — J. Algebra, 1973, 25, p. 513—518.
8. Ordinary and Modular Representations of Chevalley Groups. — Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1976, 528.
9. On the hyperalgebra of a semisimple algebraic group. — В кн.: Contributions to Algebra, N. Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1977, p. 203—210.
10. Hilbert's fourteenth problem. — Amer. Math. Monthly, 1978, 85, p. 341—353.
11. Weyl modules and Bott's theorem in characteristic p . — В кн.: Lie Theories and their Applications. — Queen's Papers in Pure and Appl. Math. Kingston, Ont., 1978, No. 48, p. 474—483.

- Хамфри, Янтцен (Humphreys J. E., Jantzen J. C.)
1. Blocks and indecomposable modules for semisimple algebraic groups. — J. Algebra, 1978, 54, p. 494—503.
 2. Endlich präsentierte arithmetische Gruppen im Funktionenkörper-Fall. — Preprint.
- Хардер (Harder G.)
10. Über die Galois Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen, III. — J. Reine Angew. Math., 1975, 274/275, S. 125—138.
 11. Die Kohomologie S-arithmetischer Gruppen Über Funktionenkörpern. — Invent. Math., 1977, 42, S. 135—175.
- Харис (Haris S. J.)
2. Admissible representations for split reductive groups defined over a function field. — Osaka J. Math., 1978, 15, p. 101—116.
- Харрельбринк (Hurrelbrink J.)
1. Endlich präsentierte arithmetische Gruppen und K_2 über Laurent — Polynomringen. — Math. Ann., 1977, 225, S. 123—129.
- Херб, О'Брайен (Herb R. A., O'Brian N. R.)
1. A characterization of unipotent, semisimple and regular elements in a reductive algebraic group. — Bull. London Math. Soc., 1976, 8, p. 233—238.
- Хесселинк (Hesselink W. H.)
1. Singularities in the nilpotent scheme of a classical group. — Trans. Amer. Math. Soc., 1976, 222, p. 1—32.
 2. Cohomology and the resolution of the nilpotent variety. — Math. Ann., 1976, 223, p. 249—252.
 3. Polarizations in the classical groups. — Math. Z., 1978, 160, p. 217—234.
 4. Uniform instability in reductive groups. — J. Reine Angew. Math., 1978, 303/304, p. 74—96.
 5. The normality of closures of orbits in a Lie algebra. — Comment. Math. Helv., 1979, 54, p. 105—110.
- Хииката (Hijikata H.)
2. On the structure of semi-simple algebraic groups over valuation fields I. — Japan. J. Math., 1975, 1, p. 225—300.
- Хохстер, Робертс (Hochster M., Roberts J. L.)
1. Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen—Macaulay. — Advances in Math., 1974, 13, p. 115—175.
- Хохшильд (Hochschild G.)
11. Rational injective modules of algebraic groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, p. 880—883.
 12. Algebraic automorphism groups. — Illinois J. Math. 1975, 19, p. 131—144.
- Хублер (Hübner R. T.)
1. Etale homotopy theory of algebraic groups. — J. Pure Appl. Alg., 1976, 8, p. 119—128.
- Шаромет А. А.
1. Абстрактные изоморфизмы разрешимых алгебраических групп. — ДАН СССР, 1975, 223, № 1, с. 53—55.
- Шварц (Schwarz G. W.)
1. Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants. — Invent. Math., 1978, 49, p. 167—191.

2. Representations of simple Lie groups with a free module of covariants. — *Invent. Math.*, 1978, 50, p. 1—12.
- Штулер (Stuhler U.)
2. Über die endliche Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall. — *Math. Ann.* 1976, 224, S. 217—232.
- Эконг (Ekong S. D.)
1. Sur les automorphismes de certains groupes algébriques affines semi-simples. — *Publ. Dép. Math. (Lyon)*, 1974, 11, fasc. 3, p. 29—38.
 2. Sur les groupes algébriques affines algébriquement complets. — *Publ. Dép. Math. (Lyon)*, 1975, 12, fasc. 2, p. 71—81.
 3. Some results on automorphisms of affine algebraic groups. — *J. Mathem. Phys.*, 1978, 19, p. 2546—2554.
- Эндо, Мията (Endo S., Miyata T.)
1. On a classification of the function fields of algebraic tori. — *Nagoya Math. J.*, 1975, 56, p. 85—104.
- Янчевский В. И.
1. Простые алгебры с инволюциями и унитарные группы. — *Матем. сб.*, 1974, 93, с. 368—380.
- Янтцен (Jantzen J. C.)
3. Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen. — *J. Reine Angew. Math.*, 1977, 290, S. 117—141.
 4. Über das Dekompositionsverhalten gewisser modularer Darstellungen halbeinfacher Gruppen und ihrer Lie-Algebren. — *J. Algebra*, 1977, 49, S. 441—469.
 5. Über Darstellungen höherer Frobenius — Kerne halbeinfacher algebraischer Gruppen. — *Math. Z.*, 1979, 164, S. 271—292.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\text{tr. deg}_K L$	— степень трансцендентности 14
$N_{E/F}$	— норма 15
$S^{-1}R$	— обобщенное кольцо частных 16
A^n	— аффинное n -пространство 18
$\mathcal{V}(I)$	— множество нулей идеала I 19
$\mathcal{I}(X)$	— идеал функций, обращающихся в 0 на X 19
$\sqrt{I}$	— радикал идеала I 19
$GL(n, K)$	— полная линейная группа 23, 94
$K[X]$	— аффинная алгебра многообразия X 28
$K(X)$	— поле функций на X 28
X_f°	— главное открытое множество 28, 45
Φ	— коморфизм 30, 43
P^n	— проективное n -пространство 31
$P(V)$	— проективное пространство, ассоциированное с линейным пространством V 31
$\mathcal{G}_d(V)$	— многообразии Грассмана 36
$\mathcal{F}(V)$	— многообразии флагов 37
$\mathcal{O}_x$	— локальное кольцо точки x 40
$\mathcal{O}_X(U)$	— регулярные функции на U 40
$\mathcal{V}(f)$	— множество нулей функции f 45
$\Delta(X)$	— диагональ множества X 50
Γ_Φ	— график отображения Φ 51
$\dim X$	— размерность многообразия X 52
$\text{codim}_x Y$	— коразмерность Y в X 54
$\text{Tan}(X)_x$	— геометрическое касательное пространство многообразия X в точке x 73
$\mathcal{T}(X)_x$	— касательное пространство многообразия X в точке x 74
$d\Phi_x$	— дифференциал морфизма Φ в точке x 80
G_a	— аддитивная группа 94
G_m	— мультипликативная группа 94
$T(n, K)$	— группа верхних треугольных матриц 94
$D(n, K)$	— группа диагональных матриц 94
$U(n, K)$	— группа верхних треугольных матриц с единичной диагональю 94
$SL(n, K)$	— специальная линейная группа 95
$Sp(n, K)$	— симплектическая группа 95
$SO(n, K)$	— специальная ортогональная группа 96
G^0	— компонента единицы группы G 96
$\mathcal{A}(M)$	— групповое замыкание 100
$Z(G)$	— центр группы G 103, 105

- $\text{Inn } x$ — внутренний автоморфизм 104
 X^G — множество неподвижных точек группы G на множестве X 104
 $C_G(Y)$ — централизатор множества Y в G 105
 $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в G 106
 $\text{Trans}_G(Y, Z)$ — транспортер 105
 $N \rtimes G$ — полупрямое произведение 109
 λ_x — левый сдвиг 110
 ρ_x — правый сдвиг 110
 $\mathcal{L}(G)$ — алгебра Ли алгебраической группы G 114
 $\mathfrak{g}$ — касательное пространство группы G в точке e 115
 $\mathfrak{gl}(n, K)$ — полная линейная алгебра Ли 114
 Ad — присоединенное представление группы 116
 $\bullet x$ — правая конволюция 116
 $t(n, K)$ — алгебра Ли группы $T(n, K)$ 120
 $d(n, K)$ — алгебра Ли группы $D(n, K)$ 120
 $u(n, K)$ — алгебра Ли группы $U(n, K)$ 120
 $\mathfrak{sl}(n, K)$ — алгебра Ли группы $SL(n, K)$ 121
 ad — присоединенное представление алгебры Ли 128
 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 129
 $n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ 129
 $c_{\mathfrak{g}}(x)$ — множество неподвижных точек автоморфизма $\text{Ad}(x)$ в $\mathfrak{g}$ 130
 $c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ 134
 $C_G(n)$ — централизатор подалгебры Ли $\mathfrak{n}$ в G 151
 $X(G)$ — группа характеров группы G 138
 x_s — полупростая часть элемента x 159, 164
 x_u — унитарная часть элемента x 159, 164
 $\exp(n)$ — экспоненциал 160
 $\log(x)$ — логарифм 160
 G_u — множество унитарных элементов группы G 165
 G_s — множество полупростых элементов группы G 165
 $\Upsilon(G)$ — множество однопараметрических мультипликативных подгрупп группы G 171
 (χ, λ) — спаривание $X(D)$ и $\Upsilon(D)$ 171
 $\Phi(G, D)$ — корни группы G относительно D 177
 $\mathcal{D}^i(G)$ — i -й член ряда коммутантов 182
 (G, G) — коммутант группы G 181
 $\mathcal{D}^i(G)$ — i -й член нижнего центрального ряда 183
 $\mathcal{D}^\infty(G)$ — пересечение всех $\mathcal{D}^i(G)$ 183
 $\text{Cl}_G(s)$ — класс сопряженности элемента s в группе G 189
 $R(G)$ — радикал группы G 203
 $R_u(G)$ — унитарный радикал группы G 203
 $\mathfrak{B}$ — многообразие подгрупп Бореля 232
 $W(G, S)$ — группа Вейля группы G относительно S 235
 $I(T)$ — компонента единицы пересечения подгрупп Бореля, содержащих T 239
 T_α — $(\text{Ker}(\alpha))^0$ 239
 Z_α — $C_G(T_\alpha)$ 240

- $\Upsilon(T)_{\text{reg}}$ — множество регулярных однопараметрических мультипликативных подгрупп 240
 $\text{rank}_{ss}(G)$ — полупростой ранг группы G 246
 $\text{rank}_{\text{red}}(G)$ — редуktивный ранг группы G 246
 $B(\lambda)$ — подгруппа Бореля, ассоциированная с λ 249
 $\mathfrak{C}(B)$ — камера Вейля подгруппы Бореля B 250
 B^- — противоположная подгруппа Бореля 256
 U_{α} — корневая подгруппа 256
 s_{α} — допустимый изоморфизм 257
 Δ — база системы корней Φ 361, 263
 Ω — большая клетка 276
 $l(\sigma)$ — длина элемента группы Вейля 281
 $\pi(G)$ — фундаментальная группа группы G 300
 Λ, Λ_r — решетка весов и корней 299
 $V(\lambda)$ — неприводимый модуль старшего веса λ 306
 ${}^k\Phi$ — k -корни 348
 ${}^kW$ — k -группа Вейля 348
 $\langle \alpha, \beta \rangle$ — число Картана 363

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизм алгебраической группы 93
 — внутренний 104
 — графа (диаграммы) 363
 Аксиома Хаусдорфа 50
 Алгебра аффинная 28
 — внешняя 35
 — групповая 174
 — Ли 114
 — — алгебраическая 148
 — — алгебраической группы 114
 — — коммутативная 89
 — — полная линейная 114
 — — полупростая 89
 — — полная линейная 114
 — — простая 91
 — полиномиальных функций 28
 — приведенная 28
 — Хопфа 102
 Аффинное n -пространство 18

 База абстрактной системы корней 263, 361
 Базис трансцендентности 14
 Бирациональная эквивалентность 46
 Большая клетка 276

 Вектор максимальный 300
 — старший 301
 Вес 298
 — абстрактный 363
 — доминантный 299, 363
 — — минимальный 306
 — — фундаментальный 299, 363
 — старший 302
 Весовое пространство 298

 Гиперповерхность 55
 График морфизма 51

 Группа алгебраическая 93
 — — квазиразложимая над k 352
 — — односвязная 300
 — — полупростая 89, 203
 — — полуредуктивная 302
 — — почти простая 153, 268
 — — простая 268
 — — присоединенного типа 300
 — — универсального типа 300
 — — редуктивная 203
 — — связная 97
 — Вейля 235, 361
 — — абстрактная 260
 — — неприводимая 288
 — векторная 206
 — диагонализированная 168
 — Кокстера 285
 — мономиальных матриц 103
 — мультипликативная 94
 — нильпотентная 183
 — полная линейная 94
 — разрешимая 182
 — симплектическая 95
 — специальная линейная 95
 — — ортогональная 96
 — унитарная 184
 — фундаментальная 300, 363
 — характеров 169
 — Шевалле 352
 Групповое замыкание 100

 Двойные числа 104
 Действие группы 104
 — — регулярное 105
 — — — над k 345
 — — транзитивное 104
 Диагональ 50
 Диаграмма Дынкина 362

- Дифференциал морфизма 54
Дифференцирование в точке многообразия 74
— кольца 18
— левоинвариантное 114
Длина в группе Вейля 361
 d -группа 170
 e -группа 206
- Идеал алгебры Ли 129
— однородный 32
— радикальный 21
Изогения 310
Изоморфизм алгебраических групп 93
— систем корней 361
Инвариант 133
- Камера Вейля 361
Касательное пространство 74
— расслоение 122
Класс сопряженности 105
Кольцо локальное 16
— — точки многообразия 39
— нетерово 14
— нормирования 87
— регулярное 17
— целозамкнутое 15
— частных обобщенное 16
Коммутатор 179
Коморфизм 30, 43
Компонента единицы 96
Конволюция 116
— правая 116
Координаты аффинные 33
— однородные 31
Корень 360
— отрицательный 361
— положительный 361
— простой 263, 361
Корни алгебраической группы 177
Кратность веса 298
- Лемма Накаяма 17
Лемма Нетера о нормализации 15
— Шура 187
- Многообразие 50
— абелево 93
- Многообразие аффинное 18
— гладкое (неособое) 76
— Грассмана 37
— квазипроективное 43
— полное 84
— проективное 32
— флагов 37
Множество главное открытое 23, 28
— конструктивное 66
— локально замкнутое 43
— определенное над k 343
Морфизм алгебраических групп 98
— аффинных многообразий 29
— бирациональный 46
— доминантный 60
— канонический 142
— коммутаторный 124
— конечный 62
— предмногообразий 43
— сепарабельный 82
— G -эквивариантный 108
- Неприводимая компонента 25
Норма 14
Нормализатор 106
- Однопараметрическая подгруппа 171
Орбита 104
Отображение орбитное 104
— Фробениуса 52
Отражение 360
- Подгруппа Бореля 217
— — противоположная 256
— Картана 221
— параболическая 219, 283
— — стандартная 291
Подгруппы Бореля далекие 278
Подмногообразие 50
Подпредмногообразие 43
Поле рациональных функций 28
— функций многообразия 43
Полином однородный 31
Полная приводимость 154
Полуинвариант 138
Предмногообразие 42

- Представление дуальное контра-
гredientное 107
— присоединенное 116
— рациональное 99
Проективное n -пространство 31
Произведение алгебраических
групп полупрямое 109
— — — прямое 95
— многообразий 46
— представлений тензорное 107
Пространство квазикompактное
23
— однородное 142
— топологическое неприводимое
23
— — нетерова 24
 p -алгебра Ли 122
Пучок функций 40
- Радикал алгебраической группы**
203
— идеала 19
— унипотентный 203
Разложение Брюа 273
— — над k 349
— Жордана аддитивное 158
— — в алгебраической группе
164
— мультипликативное 159
— Леви 292
Размерность Крулля 17
— многообразия 52
Ранг абстрактной системы кор-
ней 260, 361
— алгебраической группы 218
— — — полупростой 246
— — — редуktивный 246
— системы Титса 280
Рациональный G -модуль 107
Регулярная однопараметрическая
подгруппа 240
- Сдвиг левый** 105
— функций 110
Система корней абстрактная 259,
360
— — двойственная 364
— — неприведенная 348
— — неприводимая 267, 362
— Титса 280
— — насыщенная 290
- Слой морфизма 60
— пучка 41
Стабилизатор 104
- Теорема Бореля о неподвижной
точке 216
— Гильберта о базисе 14
— Ли — Колчина 188
— Люрота 14
Топология Зарисского 22
— произведения Зарисского 27
Тор 172
— регулярный 235
— сингулярный 235
Точка простая 76
Транспортер 105
- Умножение скобочное** 114
Условие замены 285
- Фактор Леви** 292
Флаг 37
— полный 37
Функция полиномиальная 28
— рациональная 28
— регулярная 42
- Характер алгебраической группы**
138, 169
- Центр алгебры Ли** 129
— группы 103
Централизатор 105
— инфинитезимальный 130
- Четырнадцатая проблема Гиль-
берта** 154
- Элемент полупростой регулярный**
228
Эндоморфизм нильпотентный 158
— полупростой 158
— унипотентный 159
- Ядро анизотропное** 358

Джеймс Хамфри

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

М., 1980 г., 400 стр.

Редактор *В. Л. Попов*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *А. Л. Ипатова*

ИБ № 11381

Сдано в набор 31.01.80. Подписано к печати 18.09.80.
Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Услови. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 22,94.
Тираж 8300 экз. Заказ № 536. Цена книги 1 р. 90 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической
литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л 52, Измайловский проспект, 29