С. Г. МИХЛИН

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ФИЗИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1977

517.2
М 69
УДК 517(075)

Михлин С. Г.

М 69 Линейные уравнения в частных производных. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1977.

431 с. с ил.

В книге исследуются три классических типа уравнений математической физики: эллиптический, параболический и гиперболический. Изложение проводится для пространства любого числа измерений с широким привлечением методов функционального анализа и понятия обобщенных решений.
Предназначается для студентов-математиков, а также для аспирантов и научных работников.

М $\frac{20203-038}{001(01)-77}$ 36-77

517.2

Предисловие

Книга написана на основе лекций, читанных автором на протяжении ряда лет для студентов-математиков Ленинградского университета, однако по содержанию книга несколько шире курса лекций.

Основная идея автора, определившая содержание и структуру книги, состоит в том, что университетский курс уравнений в частных производных, с одной стороны, должен быть тесно связан с классическими уравнениями и задачами математической физики, а с другой — в таком курсе должны быть широко использованы идеи и методы функционального анализа. В связи с этим изложение ведется для уравнений с произвольным числом независимых переменных и много внимания уделяется исследованию операторов, порожденных задачами теории дифференциальных уравнений в частных производных. В то же время основным предметом исследования являются три классических типа уравнений математической физики: эллиптический, параболический и гиперболический; при этом особо выделяются важнейшие представители названных типов — уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение.

Книга состоит из введения, 24 глав и небольшого списка рекомендуемой литературы по уравнениям в частных производных и близким вопросам анализа. Во введении формулируются задачи книги и сообщаются некоторые сведения о применяемых в книге понятиях, обозначениях и т. п.

Основной материал книги по существу распадается на четыре раздела. Первый раздел (главы 1—7) содержит необходимые дополнительные сведения из анализа, второй раздел (главы 8—10) — элементы общей теории уравнений в частных производных. Раздел третий (главы 11—19) посвящен эллиптическим уравнениям, раздел четвертый (главы 20—24) — нестационарным уравнениям: уравнениям теплопроводности и волновому. Из этого перечня видно, что автор отступает от традиции, по которой принято начинать с гиперболических уравнений. Дело в том, что параболические и гиперболические уравнения можно рассматривать, по крайней мере, локально, как обыкновенные абстрактные дифференциальные уравнения, содержащие неизвестную функцию также и под знаком эллиптического оператора. Как полагает автор, отсюда следует, что целесообразно начинать с изучения эллиптических уравнений и эллиптических дифференциальных операторов.

Некоторые вопросы включены в университетский курс уравнений в частных производных, по-видимому, впервые. К таким вопросам относятся элементы теории уравнений в банаховых пространствах, элементы теории сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений, связь между слабыми и сильными решениями эллиптических уравнений и некоторые другие. Строго ограниченный объем книги заставил автора отказаться от изложения некоторых вопросов, которые казались ему важными.

При написании настоящей книги автор частично использовал свою предшествующую книгу «Курс математической физики» (М., «Наука», 1968).

Ленинград

С. Михлин

август 1976 г.

Введение

§ 1. ПРЕДМЕТ КУРСА

Теория уравнений в частных производных длительное время развивалась главным образом по пути изучения уравнений и задач математической физики, которая по существу представляет собой часть упомянутой теории. Хотя в последние десятилетия были достигнуты большие успехи в исследовании общих уравнений в частных производных, однако математическая физика занимает в этой дисциплине и, вероятно, еще долгое время будет занимать исключительно важное место. Само название «математическая физика» связано с тем, что эта часть теории дифференциальных уравнений в частных производных возникла из рассмотрения нескольких простых и важных задач физики. Приведем некоторые из них.

1. Задача о колебании струны. Допустим, что начальное положение струны совпадает с осью Ox и что колебания происходят в вертикальной плоскости. Пусть в силу тех или иных причин струна выведена из состояния равновесия. Такой причиной может оказаться, например, удар по струне. Струна при этом изменит свою форму; каждая точка струны испытает некоторое смещение. Допустим для простоты, что смещение перпендикулярно к оси Ox и происходит все время в одной и той же плоскости (x, u). Ордината u дает отклонение струны от положения равновесия. Очевидно, u есть функция двух переменных $u = u(x, t)$. Предполагая, что струна однородна, а толщина ее постоянна и что в моменты времени, следующие за начальным, на струну не действуют никакие внешние силы и, наконец, что струна нерастяжима, но не сопротивляется изгибу, можно доказать, что функция u удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

Здесь a — постоянная величина, зависящая от физических свойств струны.

Уравнение (1) приближенное, оно пригодно в случае так называемых малых колебаний струны. Это уравнение носит название *волнового уравнения* с двумя независимыми переменными или *уравнения колебаний струны*.

Более сложные задачи физики приводят к дифференциальным уравнениям, сходным с уравнением (1), но более сложным. Так, поперечные колебания тонкой мембраны, которая в положении равновесия расположена в плоскости (x, y), описываются при известных условиях дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad a=\text{const}. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *уравнением колебаний мембраны* или *волновым уравнением с тремя независимыми переменными*. Как и уравнение струны, оно достаточно точно описывает только малые колебания мембраны.

Волновое уравнение с четырьмя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Это уравнение определяет, например, поле скоростей колеблющегося газа, если эти скорости малы и имеют потенциал, т. е. если существует такая функция u, что $\mathbf{v}=\operatorname{grad} u$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы газа.

2. Задача о нестационарном температурном поле. Рассмотрим однородное тело, часть поверхности которого подогревается. В таком теле возникает температурное поле, причем температура, очевидно, меняется при переходе от одной точки тела к другой и от одного момента времени к другому. Обозначая температуру через u, видим, что u есть функция независимых переменных x, y, z, t: $u=u(x, y, z, t)$. Можно доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k\frac{\partial u}{\partial t},\quad k=\text{const}. \tag{4}$$

Заметим, что выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ обычно называют *оператором Лапласа* от функции u и обозначают символом Δ:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

уравнение (4) можно, следовательно, переписать в виде $\Delta u=k\frac{\partial u}{\partial t}$. Уравнение (4) называется *уравнением теплопроводности*. Это линейное уравнение в частных производных второго порядка. Оно было известно еще Эйлеру, но чаще его связывают с именем Фурье.

3. Задача о стационарном температурном поле. Рассмотрим температурный процесс, установившийся во времени. Тогда u есть функция пространственных координат и не зависит от времени,

$$u=u(x, y, z).$$

Уравнение (4) переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (5) \quad \text{или} \quad \Delta u=0. \quad (5')$$

Уравнение (5) (или (5')) называется *уравнением Лапласа;* оно представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка.

В приведенных примерах мы каждый раз приходили к линейному уравнению в частных производных второго порядка. Однако такими уравнениями приложения математической физики не исчерпываются.

Рассмотренные уравнения — волновое, теплопроводности и Лапласа — соответствуют различным физическим задачам, но они различны и в плане чисто математическом. Они являются представителями трех важнейших типов уравнений в частных производных: *гиперболического, параболического, эллиптического.*

Представляют интерес для физических приложений многие линейные уравнения более высоких порядков. Задачи геометрии и физики нередко приводят к нелинейным уравнениям в частных производных, а также к системам дифференциальных уравнений. Так, хорошо известны системы дифференциальных уравнений теории упругости, гидродинамики, электродинамики. О других типах уравнений в частных производных будет коротко сказано в гл. 8.

В приведенных выше примерах (1) — (5) число независимых переменных в соответствии с физическим смыслом задачи не превосходило четырех; в последующем мы будем изучать уравнения в частных производных с любым числом независимых переменных.

Укажем еще несколько примеров уравнений и систем уравнений в частных производных.

1) *Бигармоническое уравнение*

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = f(x). \tag{6}$$

Для приложений (например, в теории упругости) особенно важно бигармоническое уравнение с двумя независимыми переменными; в развернутой записи оно имеет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y).$$

Известную роль играет в прикладных вопросах и более общее *полигармоническое уравнение*

$$\Delta^n u = \underbrace{\Delta\Delta \ldots \Delta}_{n\ \text{раз}} u = 0. \tag{7}$$

2) Колебания трехмерного однородного изотропного упругого тела описываются *векторным уравнением динамической теории упругости*

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(x, t). \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор упругих смещений, $\boldsymbol{f}$ — вектор объемных сил, ρ — плотность упругой среды, λ и μ — ее постоянные Ляме. Если через u_j и f_j, $j = 1, 2, 3$, обозначить соответственно составляющие векторов u и f, а через x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты точки x, то векторное уравнение (8) можно записать как систему трех скалярных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + f_j(x, t), \quad j = 1, 2, 3;$$

здесь введено обозначение $\Theta = \operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$.

Если u не зависит от t, то получается *векторное уравнение статической теории упругости*

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + f(x) = 0, \tag{9}$$

равносильное системе трех скалярных уравнений

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} + f_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Все написанные выше уравнения и системы — линейные. Приведем примеры нелинейных уравнений и систем.

3) *Уравнение минимальной поверхности*

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \tag{10}$$

здесь u — аппликата точки поверхности с абсциссой x и ординатой y.

Нелинейное уравнение (10) линейно относительно своих старших производных. Такие уравнения называются *квазилинейными*.

4) *Уравнения Навье — Стокса*

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = f(x, t), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

описывают движение жидкости или газа. Здесь v — вектор скорости частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x(x_1, x_2, x_3)$; v_1, v_2, v_3 — составляющие вектора v; p — давление; ρ — плотность жидкости; ν — коэффициент вязкости; f — вектор массовых сил, действующих на жидкость. Уравнения Навье — Стокса — квазилинейные.

5) *Уравнения плоской задачи идеальной теории пластичности*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4K^2. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — составляющие тензора напряжений, K — постоянная.

Система (12) сводится к квазилинейной системе двух уравнений, если ввести новые неизвестные функции по формулам

$$\sigma_{xx} = K(\sigma - \cos\varphi), \quad \sigma_{yy} = K(\sigma + \cos\varphi), \quad \sigma_{xy} = K \sin\varphi.$$

Тогда третье уравнение (12) удовлетворяется тождественно, а первые два приводятся к следующим:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{13}$$

6) Примером уравнения нелинейного, но не квазилинейного, служит *уравнение Монжа — Ампера*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2=f(x, y), \tag{14}$$

имеющее большое значение во многих вопросах геометрии.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Евклидово пространство m измерений обозначается символом E_m. Если точка этого пространства обозначена, например, буквой x, то декартовы координаты этой точки обозначаются через $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Нам неоднократно придется выполнять интегрирование по множествам различной размерности, расположенным в пространстве E_m; чаще всего придется интегрировать по области или по $(m-1)$-мерной поверхности. Такое интегрирование мы всегда будем обозначать одним знаком интеграла независимо от его кратности. Если переменная точка интегрирования обозначена, например, буквой x, то элемент лебеговой меры («элемент объема») в пространстве E_m будем обозначать через dx. Элемент меры на поверхности («элемент площади поверхности») обозначим через dS, $d\Gamma$, ..., если сама поверхность была обозначена через S, Γ, ... Если M — множество точек пространства E_m, то замыкание этого множества будем обозначать через $\bar{M}$. В частности, если Ω — некоторая область в пространстве E_m, а Γ — ее граница, то $\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$.

Будет широко использована следующая символика: если область обозначена буквой Ω, то объем этой области будет обозначен через $|\Omega|$. Аналогично $|\Gamma|$ будет обозначать площадь поверхности Γ.

Сфера радиуса R в пространстве E_m будет обозначаться через S_R.

Границу точечного множества G будем часто обозначать через ∂G. Таким образом, если Ω — область, то замкнутая область $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. На протяжении всей книги рассматриваются только (даже если это особо не оговорено) области с кусочно гладкой границей.

Расстоянием $\rho(x, G)$ *от точки* $x\in E_m$ *до множества* $G\subset E_m$ называется нижняя грань расстояний между точкой x и точками множества G.

Пограничной полоской области Ω называется совокупность точек этой области, расстояние которых до границы области $\partial\Omega$ не превосходит заданной постоянной δ, называемой *шириной полоски*. Пограничную полоску области Ω, имеющую ширину δ, будем обозначать через Ω_δ. Всюду предполагается, что **область Ω обладает свойством** $\lim\limits_{\delta\to 0}|\Omega_\delta|=0$.

Если Ω и Ω' — области, причем $\Omega'\subset\Omega$, то Ω' называется *подобластью* Ω. Подобласть Ω' называется *внутренней*, если $\overline{\Omega}'\subset\Omega$. Очевидно, $\Omega\diagdown\overline{\Omega}_\delta$ есть внутренняя подобласть Ω; с другой стороны, для всякой внутренней подобласти Ω' можно найти такое δ, что $\Omega\subset\Omega\diagdown\overline{\Omega}_\delta$.

Если Ω — область и $K\subset\Omega$ — замкнутое ограниченное множество, то K называется *компактом* относительно Ω. Компактом является любая ограниченная замкнутая внутренняя подобласть.

Пусть G — множество в пространстве E_m. Множество функций, непрерывных и ограниченных в G, будем обозначать через $C(G)$; множество функций, имеющих в G всевозможные производные до порядка k включительно, причем эти производные непрерывны и ограничены в G, — через $C^{(k)}(G)$. Чаще всего будет встречаться случай $G=\overline{\Omega}$, где Ω — конечная область; в этом случае оговорка об ограниченности функций или их производных не нужна.

Через $C_0^{(k)}(\Omega)$, где Ω — конечная область, будем обозначать множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и обращающихся на $\partial\Omega$ в нуль вместе со всеми своими производными до порядка $k-1$ включительно.

Пусть Ω — некоторая область, и k — целое число, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Через $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ мы будем обозначать множество функций, которые k раз непрерывно дифференцируемы в Ω и обращаются в нуль в пограничной полоске (своей для каждой функции) области Ω; если Ω — бесконечная область, то потребуем дополнительно, чтобы функции из $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ обращались в нуль вне некоторого шара, также своего для каждой функции. Очевидно, $\mathfrak{M}^{(k)}\Omega\subset\subset\mathfrak{M}^{(k-1)}\Omega$.

Функции класса $\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ называются *финитными* в Ω.

Будем говорить, что некоторая функция $u(x)$, определенная на множестве G, **удовлетворяет условию Липшица** с показателем λ (в символах $u\in\mathrm{Lip}_\lambda(G)$), если для любых точек $x, x'\in G$ справедливо неравенство

$$|u(x')-u(x)|\leqslant A|x'-x|^\lambda,$$

в котором A и λ — положительные постоянные. Легко видеть, что если $\lambda>1$, то $u(x)\equiv\mathrm{const}$, поэтому обычно считают, что $0<\lambda\leqslant 1$. Условие Липшица с показателем $\lambda<1$ часто называют *условием Гельдера*.

Функция, определенная почти всюду в некоторой области Ω, называется *локально суммируемой* в Ω, если она суммируема на любом компакте, содержащемся в Ω. Множество таких функций принято обозначать через $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Будем говорить, что $v_n\to v_0$ в L_{loc}, если $v_n, v_0\in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и если для любой внутренней подобласти $\Omega'\subset\Omega$ справедливо соотношение $\|v_n-v_0\|_{L_1(\Omega')}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Пусть $u(x)$ — непрерывная функция. Замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля, называется ее *носителем* и обозначается символом $\operatorname{supp} u$. Очевидно, носитель производной от любой функции содержится в носителе данной функции.

Во всем последующем мы будем отождествлять, если не оговорено противное, эквивалентные функции (функции, различающиеся не более чем на множестве меры нуль).

Пусть в пространстве E_m дана некоторая поверхность Γ, которая в каждой своей точке имеет определенную нормаль. Пусть $x_0 \in \Gamma$. Система декартовых координат $y_1, y_2, \ldots, y_m$, у которой начало совпадает с x_0, а ось y_m направлена по нормали к Γ, проходящей через x_0, называется *местной системой координат*, связанной с точкой x_0. Будем писать $\Gamma \in C^{(k)}$, где k — натуральное число, если существует число $d = \text{const} > 0$, обладающее следующим свойством: сфера радиуса d с центром в произвольной точке $x_0 \in \Gamma$ вырезает из поверхности Γ участок, который в местной системе координат, связанной с точкой x_0, может быть задан уравнением $y_m = f(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$, где функция f имеет все непрерывные производные до порядка k включительно. Если при этом k-е производные от f удовлетворяют условию Липшица с показателем λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, причем ни показатель, ни постоянная Липшица не зависят от x_0, то будем писать $\Gamma \in C^{(k, \lambda)}$. Поверхности класса $C^{(1, \lambda)}$ называются *ляпуновскими*.

Если A — некоторый оператор, то область его определения обозначается через $D(A)$, область значений — через $R(A)$. Если множество $M \subset D(A)$, то через AM обозначается образ множества M при отображении оператором A. В частности, $R(A) = AD(A)$.

Упорядоченная последовательность m целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ называется *мультииндексом порядка m*; число $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ называется *длиной* этого *мультииндекса*. Для мультииндексов обычным способом определяются сложение и умножение на целое неотрицательное число: если n — такое число, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ — мультииндексы одного и того же порядка, то

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_m + \beta_m),$$

$$n\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_m).$$

Если $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ — вектор, то пишут $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_m^{\alpha_m}$. В частности, если x — точка в E_m, то $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$. Пишут также $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!$ Мы часто будем пользоваться обозначением

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Чтобы подчеркнуть, что дифференцирование совершается по координатам точки x, иногда будем писать $D_x^\alpha u$.

В книге принята сквозная нумерация глав, но нумерация параграфов — своя в каждой главе. При ссылке на формулу того же параграфа указывается только ее номер; при ссылке на формулу другого параграфа той же главы сперва ставится в скобках номер параграфа, затем — номер формулы. Если нужно сослаться на формулу из другой главы, то в скобках пишутся номер параграфа и номер формулы, а вне скобок — номер главы. Конец доказательства леммы, теоремы и т. п. отмечается значком ■.

В конце книги приведен краткий список литературы. В этом списке содержится перечень основных учебников и монографий (реже — журнальных статей), относящихся к предмету настоящей книги. В тексте иногда встречаются ссылки на эту литературу. В таких случаях в квадратных скобках ставится номер цитируемого издания по списку литературы.

Глава 1
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть D и G — два измеримых ограниченных множества, причем $D \subset E_m$ и $G \subset E_n$. Будем говорить, что интеграл

$$\int_G f(x, y)\, dy, \qquad x \in D \tag{1}$$

сходится равномерно в D, если выполнены следующие условия: а) при любом фиксированном $x \in D$ функция $f(x, y)$ суммируема по y в G; б) по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если множество $g \subset G$ и лебегова мера этого множества $\mu g < \delta$, то $\left|\int_g f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon$.

Теорема 1.1.1. *Пусть интеграл (1) сходится равномерно в D и пусть его подынтегральная функция удовлетворяет следующему дополнительному условию: по данному числу $\eta > 0$ и данной точке $x_0 \in D$ можно найти такое множество $g(x_0, \eta) \subset G$, что $\mu g(x_0, \eta) < \eta$ и подынтегральная функция непрерывна в точке x_0 равномерно относительно $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$. Тогда интеграл (1) есть функция от x, непрерывная в D.*

Доказательство. Выберем в D произвольную точку x_0 и докажем, что в этой точке интеграл (1) непрерывен. Указанный интеграл сходится равномерно, поэтому можно по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать столь малое число $\eta > 0$, чтобы

$$\left|\int_{g(x_0, \eta)} f(x, y)\, dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Интеграл (1) обозначим через $u(x)$; очевидно, функция $u(x)$ определена всюду на множестве D. Составим разность

$$u(x) - u(x_0) = \int_{G \setminus g(x_0, \eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)]\, dy + \int_{g(x_0, \eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)]\, dy. \tag{2}$$

Зафиксируем η и выберем число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, чтобы при $|x - x_0| < \delta$ было $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu G}$, $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$; тогда $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$. ■

Теорема 1.1.2. *Пусть*

$$U(x) = \int_G F(x, y)\, dy, \qquad x \in D, \tag{3}$$

где D — конечная замкнутая область в E_m, G — ограниченное измеримое множество в E_n и функция $F(x, y)$ суммируема по y в G при любом $x \in D$. Пусть, далее, для некоторого номера j, $1 \leqslant j \leqslant m$, в любой точке $x \in D$ при почти всех $y \in G$ существует частная производная $f(x, y) = \partial F/\partial x_j$ и при достаточно малых h справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_m, y) - \\ - F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m, y) = \\ = \int_0^h f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_m, y)\, dt. \qquad (4)$$

Пусть, наконец, производная $\partial F/\partial x_j$ суммируема в $D \times G$. Тогда почти всюду в D существует производная $\partial U/\partial x_j$ и справедлива формула дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \int_G \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j}\, dy. \qquad (5)$$

Доказательство. Для краткости обозначим

$$x^t = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_m),$$
$$x = (x^0 = x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m).$$

По формуле (4)

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_G \left\{ \int_0^h f(x^t, y)\, dt \right\} dy.$$

В силу условий теоремы, функция $f(x, y)$ суммируема в $D \times G$. По теореме Фубини, эта функция суммируема на множестве $[x, x^h] \times G$ при почти всех $x \in D$. Для таких x, по той же теореме Фубини, можно изменить порядок интегрирования:

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \int_G f(x^t, y)\, dy \right\} dt.$$

По теореме Лебега, почти при всех $x \in D$ существует предел правой части последнего равенства, и этот предел равен

$$\int_G f(x, y)\, dy. \ \blacksquare \qquad (*)$$

Замечание. Утверждение о существовании производной $\partial U/\partial x_j$ и формула (5) во всяком случае верны для тех точек $x \in D$, в которых интеграл (*) непрерывен. В частности, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1, то интеграл (3) имеет всюду в D непрерывную $\partial U/\partial x_j$, которую можно вычислить по формуле (5).

Рассмотрим частный случай. Пусть

$$w(x) = \int_G u(y)\, \omega(x, y)\, dy, \qquad (6)$$

где $u(y)$ суммируема в G, а функция $\omega(x, y)$ и ее всевозможные производные порядка $\leqslant l$ по координатам точки $x \in D$ непрерывны в $D \times G$. В этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.3. *Интеграл (6) l раз непрерывно дифференцируем в D.*

Интеграл (6), а также интегралы вида

$$\int_G u(y) D_x^\alpha \omega(x, y)\, dy, \qquad |\alpha| \leqslant l \tag{7}$$

очевидно, сходятся равномерно. Множество $g(x_0, \eta)$, фигурирующее в теореме 1.1.1, можно выбрать независимо от x_0: достаточно выбрать множество $g(\eta)$ так, чтобы $\mu g(\eta) < \eta$ и чтобы функция $u(y)$ была непрерывна в $G \diagdown g(\eta)$, а затем положить $g(x_0, \eta) = g(\eta)$. По теореме 1.1.1 интегралы (6) и (7) непрерывны в D. Полагая $F(x, y) = u(y)\omega(x, y)$, найдем, что все требования теоремы 1.1.2 выполнены и, следовательно, функция (6) имеет непрерывные в D первые производные, которые можно получить, дифференцируя под знаком интеграла:

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_G u(y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x_j}\, dy, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Аналогично найдем, что при любом мультииндексе α, $|\alpha| \leqslant l$, существуют и непрерывны в D производные $D^\alpha w(x)$, причем

$$D^\alpha w(x) = \int_G u(y) D_x^\alpha \omega(x, y)\, dy. \ \blacksquare \tag{8}$$

§ 2. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Пусть x — фиксированная, а y — переменная точка пространства E_m. Сферические координаты с центром в точке x определяются формулами:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + r\cos\vartheta_1, \\
y_2 &= x_2 + r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{m-1} &= x_{m-1} + r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1}, \\
y_m &= x_m + r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, $r = |y - x|$, углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}$ изменяются в промежутке $[0, \pi]$, а угол ϑ_{m-1} — в промежутке $[0, 2\pi]$.

Найдем выражение элемента объема dy, а также элемента dS_r площади поверхности сферы радиуса r в сферических координатах.

Достаточно просто это можно сделать следующим образом. Вычислим якобиан

$$J_m = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{D(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m-1})} = \tag{2}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\vartheta_1 & -r\sin\vartheta_1 & 0 & \ldots 0 \\ \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 & r\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 & -r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi\cos\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_1\cos\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_2\cos\vartheta_{m-1} & \ldots -r\Phi\sin\vartheta_{m-1} \\ \Phi\sin\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_1\sin\vartheta_{m-1} & r\Phi\operatorname{ctg}\vartheta_2\sin\vartheta_{m-1} & \ldots\ r\Phi\cos\vartheta_{m-1}; \end{vmatrix};$$

в двух последних строках определителя для краткости положено $\Phi = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}$.

Легко проверить, что $\partial J_m/\partial\vartheta_{m-1} = 0$, и для вычисления определителя J_m можно в нем положить $\vartheta_{m-1} = 0$. Это приводит к рекуррентной формуле $J_m = r\sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{m-2} J_{m-1}$. Заменяя здесь последовательно m на $m-1$, $m-2$, ..., получаем

$$J_m = r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}. \tag{3}$$

Теперь можно написать элемент объема в сферических координах:

$$dy = r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\, dr\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{m-1}. \tag{4}$$

Выведем формулу для элемента площади поверхности сферы S_r, радиус которой равен r, а центр совпадает с центром системы сферических координат. Как известно из дифференциальной геометрии, для любой поверхности Γ справедлива формула $d\Gamma = \frac{dy_1\, dy_2 \ldots dy_{m-1}}{|\cos(\nu, y_m)|}$, где ν — нормаль к Γ. Для сферы S_r имеем

$$|\cos(\nu, y_m)| = |\cos(r, y_m)| = \frac{|y_m - x_m|}{r} = \left|\prod_{k=1}^{m-1} \sin\vartheta_k\right|.$$

На этой сфере координата r постоянна, поэтому

$$dy_1\, dy_2 \ldots dy_{m-1} = \left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots y_{m-1})}{D(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})}\right| d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-1}.$$

Якобиан в последней формуле можно получить, вычеркнув в определителе (2) первый столбец и последнюю строку. В оставшемся определителе все элементы правее главной диагонали равны нулю, и этот определитель равен произведению своих диагональных элементов. Отсюда легко вытекает искомая формула

$$dS_r = r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-1}\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-1}. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) вытекают полезные соотношения

$$dS_r = r^{m-1}\, dS_1 \tag{6}$$

и

$$dy = dr\, dS_r = r^{m-1}\, dr\, dS_1. \tag{7}$$

Интегрируя соотношение (6), получим еще одну часто применяемую формулу

$$|S_r| = r^{m-1} |S_1|; \tag{8}$$

в соответствии с принятыми во введении, § 2, обозначениями, S_1 означает сферу единичного радиуса.

Найдем площадь $|S_1|$ поверхности указанной сферы. Имеем

$$|S_1| = \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{m-2} \vartheta_1 \ldots \sin \vartheta_{m-2}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_{m-1} =$$

$$= 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} \int_0^{\pi} \sin^k \vartheta\, d\vartheta = 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \vartheta\, d\vartheta.$$

Замена $\sin^2 \vartheta = t$ дает

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \vartheta\, d\vartheta = \int_0^1 t^{\frac{k-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \mathrm{B}\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)};$$

отсюда легко следует искомая формула

$$|S_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}. \tag{9}$$

Здесь В и Г — эйлеровы интегралы первого и второго рода.

Нетрудно найти объем шара радиуса R. Обозначая этот шар через $Ш_R$, имеем

$$|Ш_R| = \int_{r<R} dy = \int_{S_1} \left\{ \int_0^R r^{m-1}\, dr \right\} ds_1 = \frac{|S_1| R^m}{m}. \tag{10}$$

Ниже для упрощения записи примем, что начало координат совмещено с точкой x, так что $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Нетрудно убедиться, что сферические координаты — ортогональные, т. е., что поверхности, взятые из различных семейств

$$r = c_0, \quad \vartheta_1 = c_1, \quad \ldots, \quad \vartheta_{m-1} = c_{m-1}, \tag{11}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ — постоянные, пересекаются попарно под прямыми углами. Уравнения (11) определяют следующие семейства поверхностей второго порядка:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - c_0^2 = 0, \quad \gamma_1^2 y_1^2 - \sum_{k=2}^{m} y_k^2 = 0,$$

$$\gamma_2^2 y_2^2 - \sum_{k=3}^{m} y_k^2 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_{m-1}^2 y_{m-1}^2 - y_m^2 = 0; \quad \gamma_k = \operatorname{tg} c_k,$$

и их ортогональность сразу вытекает из известной формулы дифференциальной геометрии: направляющие косинусы нормали к поверхности $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)=0$ равны

$$\cos(\nu, y_k) = \pm \frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\frac{\partial F}{\partial y_k}. \tag{12}$$

Из ортогональности поверхностей (11) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k} = 0; \; j = 1, 2, \ldots, m-1; \\ &\frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k} = 0; \; i \neq j; \; i, j = 1, 2, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $u(y)$ — произвольная дифференцируемая функция. Найдем выражение величины $|\operatorname{grad} u|^2$ в сферических координатах. Имеем

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}.$$

Возведем это в квадрат и просуммируем. Используя соотношения (13), получаем

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial r}{\partial y_k}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2 \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2. \tag{14}$$

Имеем $\sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial r}{\partial y_k}\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{r^2} = 1$. Далее, дифференцируя тождество $\cos\vartheta_1 = y_1/r$, легко найдем $\sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y_k}\right)^2 = \frac{1}{r^2}$.

Вычислим остальные коэффициенты в сумме (14). Из формул (1) находим

$$\sum_{k=j}^{m} y_k^2 = r^2 \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \ldots \sin^2\vartheta_{j-1}, \quad j \geqslant 2.$$

Обозначая $\left(\sum\limits_{k=j}^{m} y_k^2\right)^{1/2} = r'$, имеем

$$\cos\vartheta_j = \frac{y_j}{r'}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что ϑ_j, $j \geqslant 2$, не зависит от $y_1, \ldots, y_{j-1}$. Из формулы (15) найдем, как и выше,

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2 = \sum_{k=j}^{m} \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y_k}\right)^2 = \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r^2 q_j},$$

где введено обозначение

$$q_1 = 1; \; q_j = (\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{j-1})^2, \quad j \geqslant 2. \tag{16}$$

Подставив найденные результаты в (14), получим искомое выражение

$$|\operatorname{grad} u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2. \tag{17}$$

Введем еще обозначение

$$|\operatorname{grad}_0 u|^2=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta_j}\right)^2;$$

при $r=1$ величина $|\operatorname{grad}_0 u|$ есть проекция вектора $\operatorname{grad} u$ на касательную плоскость к сфере $r=1$ в точке θ с угловыми координатами $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$. Формулу (17) можно представить в виде

$$|\operatorname{grad} u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}|\operatorname{grad}_\theta u|^2. \tag{18}$$

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Операторы вида

$$(K\rho)(x)=u(x)=\int_G \rho(y)\frac{A(x, y)}{r^\lambda}dy;\ r=|y-x|;\ x\in G, \tag{1}$$

где $G\in E_m$ — измеримое ограниченное множество, $A(x, y)$ — функция, измеримая и ограниченная в $G\times G$ и λ — постоянная, $0\leqslant\lambda<m$, называются *интегральными операторами* со слабой особенностью.

Теорема 1.3.1. *Пусть множество G замкнуто, $\rho\in L_p(G)$, $1<p\leqslant\infty$ и $\lambda p'<m$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$; пусть $A\in C(G\times G)$. Тогда интегральный оператор со слабой особенностью* (1) *вполне непрерывен как оператор из $L_p(G)$ в $C(G)$.*

Прежде всего отметим равенство, которое широко используется в дальнейшем: если $\beta<m$, то

$$\int_{r<a}\frac{dy}{r^\beta}=\frac{|S_1|a^{m-\beta}}{m-\beta}. \tag{2}$$

Для доказательства достаточно ввести сферические координаты с центром в точке x.

Рассмотрим сначала случай $p<\infty$. Если $\rho\in L_p(G)$, то при любой фиксированной точке $x\in G$ функция $A(x, y)r^{-\lambda}\rho(y)$ суммируема в G. Действительно, полагая $N=\max|A(x, y)|$, имеем по неравенству Гельдера (значок p означает норму в $L_p(G)$)

$$\int_G\frac{|A(x, y)|}{r^\lambda}|\rho(y)|\,dy\leqslant N\|\rho\|_p\left\{\int_G\frac{dy}{r^{\lambda p'}}\right\}^{1/p'}.$$

Пусть H — диаметр множества G, т. е. верхняя грань расстояний между точками этого множества. Очевидно, G лежит в шаре $|y-x|<H$, и по формуле (2) имеем

$$\int\limits_G \frac{dy}{r^{\lambda p'}} < \int\limits_{r<H} \frac{dy}{r^{\lambda p'}} = \frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}.$$

Обозначая последнюю постоянную через $Q^{p'}$, получаем

$$\int\limits_G \frac{|A(x, y)|}{r^\lambda} |\rho(y)| \, dy \leqslant NQ \|\rho\|_p < \infty. \tag{3}$$

Таким образом, подынтегральная функция в (1) суммируема, и условие а) § 1 выполнено.

Зададим число $\varepsilon > 0$. Если g — подмножество G, то аналогично

$$\left| \int\limits_g \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \rho(y) \, dy \right| \leqslant NQ \left\{ \int\limits_g |\rho(y)|^p \, dy \right\}^{1/p}.$$

Можно выбрать число $\delta > 0$, так чтобы при $\mu g < \delta$ правая часть последнего неравенства была меньше, чем ε; условие б) § 1 также выполнено, и интеграл (1) сходится равномерно.

Возьмем теперь в G произвольную точку x_0 и определим множество $g(x_0, \eta)$ в соответствии с условием теоремы 1.1.1. Построим открытое множество $g_1(\eta)$ так, чтобы $\mu g_1(\eta) < \eta/2$ и чтобы в $G \setminus g_1(\eta)$ функция $\rho(y)$ была непрерывна. Множество $G \setminus g_1(\eta)$ замкнуто, и функция $\rho(y)$ на нем также и равномерно непрерывна. Обозначим через $g_2(x_0, \eta)$ шар с центром в x_0 и с радиусом $\sigma = m\eta/2|S_1|^{1/m}$; по формуле (2.10) $\mu g_2(x_0, \eta) = \eta/2$. Положим теперь $g(x_0, \eta) = g_1(\eta) \cup g_2(x_0, \eta)$, тогда $\mu g(x_0, \eta) < \eta$. Если y меняется на множестве $G \setminus g(x_0, \eta)$, а точка x достаточно близка к x_0 (например, если $|x - x_0| \leqslant \sigma/2$), то подынтегральная функция в интеграле (1) равномерно непрерывна по совокупности переменных x и y. Отсюда следует, что указанная функция непрерывна в x_0 равномерно относительно $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$. По теореме 1.1.1 функция $u(x)$, определяемая интегралом (1), непрерывна в G.

Из доказанного следует, что оператор K действует из $L_p(G)$ в $C(G)$. Формула (3) показывает, что этот оператор ограничен и что его норма не превосходит величины

$$NQ = N \left[\frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'} \right]^{1/p'}. \tag{4}$$

Докажем теперь, что рассматриваемый оператор вполне непрерывен. Пусть M — множество функций, ограниченное в $L_p(G)$: $\forall \rho \in M$; $\|\rho\|_p \leqslant C = \mathrm{const}$. Из неравенства (3) следует, что множество KM также ограничено: $\forall u \in KM$, $\|u\|_{C(G)} \leqslant CNQ$; докажем, что функции этого множества равностепенно непрерывны.

Для произвольного числа $\eta > 0$ по неравенству Гельдера имеем

$$|u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)| = \left|\int\limits_G \rho(y)\left[\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right]dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\rho\|_p\left[\int\limits_G\left|\frac{A(x+\Delta x_1 y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy\right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\left|\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r<\eta}\left|\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy\right\}^{1/p'}, \qquad r_1=|x+\Delta x-y|.$$

Дважды применив неравенство Минковского, получим

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy\Bigg]^{1/p'}+$$

$$+CN\left\{\left[\int\limits_{r<\eta}\frac{dy}{r_1^{\lambda p'}}\right]^{1/p'}+\left[\int\limits_{r<\eta}\frac{dy}{r^{\lambda p'}}\right]^{1/p'}\right\}. \qquad (6)$$

По формуле (2) последний интеграл в (6) равен $\dfrac{|S_1|\,\eta^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}$. Оценим второй интеграл. Пусть $|\Delta x|<\eta/2$. Тогда $r_1<r+\eta/2$, но $r<\eta$ и потому $r_1<3\eta/2$. Шар $r<\eta$ заключен, следовательно, в шаре $r_1<3\eta/2$, отсюда

$$\int\limits_{r<\eta}\frac{dy}{r_1^{\lambda p'}}<\int\limits_{r_1<\frac{3\eta}{2}}\frac{dy}{r_1^{\lambda p'}}=\frac{|S_1|\left(\frac{3\eta}{2}\right)^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'}.$$

Теперь получаем

$$u(x+\Delta x)-u(x)\leqslant C\left[\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy\Bigg]^{1/p'}+$$

$$+\gamma\eta^{\frac{m-\lambda p'}{p'}};\quad \gamma=\frac{|S_1|\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^{m-\lambda p'}\right]CN}{m-\lambda p'}.$$

Величину η выберем столь малой, чтобы выполнялось неравенство $\gamma\eta^{\frac{m-\lambda p'}{p'}}<\varepsilon/2$, а затем зафиксируем ее. Далее, найдем число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ так, чтобы $\delta<\eta/2$ и чтобы при $|\Delta x|<\delta$ было

$$C\left[\int\limits_{G\setminus(r<\eta)}\left|\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|^{p'}dy\right]^{1/p'}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|u(x+\Delta x)-u(x)|<\varepsilon$ при $|\Delta x|<\delta$. Так как δ не зависит от выбора функции $\rho(y)$, то множество функций KM равностепенно непрерывно. По теореме Арцеля это множество компактно в $C(G)$, и оператор K вполне непрерывен.

Пусть теперь $p=\infty$. Тогда $p'=1$, и условие $\lambda p'<m$ выполнено. В этом случае

$$\|\rho\|_p=\|\rho\|_\infty=\sup_{x\in G}\operatorname{ess}|\rho(x)|$$

(sup ess — существенная верхняя грань); теперь

$$|u(x+\Delta x)-u(x)|\leqslant\|\rho\|_\infty\int\limits_G\left|\frac{A(x+\Delta x,\ y)}{r_1^\lambda}-\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\right|dy.$$

Повторив рассуждения, которые относились к интегралу (5), найдем, что функции множества KM равностепенно непрерывны. ■

Следствие. *Если множество G замкнуто, и $A\in C(G\times G)$, то оператор* (1) *вполне непрерывен в $C(G)$.*

Это следствие непосредственно вытекает из теоремы для случая $p=\infty$ и из того факта, что $C(G)$ есть подпространство пространства $L_\infty(G)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть в интеграле* (1) $\lambda p'\geqslant m$, *и пусть целое число s таково, что $m-(m-\lambda)p<s\leqslant m$. Тогда интеграл* (1) *определяет функцию, которая на любом сечении g_s множества G плоскостью размерности s определена почти всюду в смысле лебеговой меры в E_s. Оператор K, определяемый формулой* (1), *ограничен как оператор из $L_p(G)$ в $L_q(g_s)$, где q — любое число, удовлетворяющее неравенству*

$$1\leqslant q<q_0=\frac{sp}{m-(m-\lambda)p}. \tag{7}$$

Сначала рассмотрим случай $p\leqslant q<q_0$. Положим $\sigma=\frac{s}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right)$; очевидно, $\sigma>0$. Тогда $\lambda=\frac{m}{p'}+\frac{s}{q}-2\sigma$. Оценим интеграл (1):

$$|u(x)|\leqslant N\int\limits_G\frac{|\rho(y)|}{r^\lambda}\,dy=$$

$$=N\int\limits_G|\rho(y)|^{p/q}r^{\sigma-s/q}|\rho(y)|^{1-p/q}r^{\sigma-m/p'}\,dy. \tag{8}$$

Положим $p_1=q$, $p_2=\frac{pq}{q-p}$, $p_3=p'$. Очевидно $1/p_1+1/p_2+1/p_3=1$, и к интегралу (8) можно применить неравенство Гельдера для трех множителей:

$$|u(x)|\leqslant N\left\{\int\limits_G|\rho(y)|^p r^{\sigma q-s}\,dy\right\}^{1/q}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_G|\rho(y)|^p\,dy\right\}^{1/p-1/q}\left\{\int\limits_G r^{p'\sigma-m}\,dy\right\}^{1/p'},$$

Второй множитель справа равен $\|\rho\|_p^{1-p/q}$, третий просто оценивается, если заметить, что $G\subset(r<H)$, и воспользоваться фор-

мулой (2). В результате получаем

$$|u(x)|\leqslant\frac{N|S_1|^{1/p'}H^{\sigma}}{(p'\sigma)^{1/p'}}\|\rho\|_p^{1-p/q}\left\{\int_G|\rho(y)|^p r^{\sigma q-s}\,dy\right\}^{1/q},$$

откуда

$$\int_{g_s}|u(x)|^q\,d_sx\leqslant C\|\rho\|_p^{q-p}\int_G|\rho(y)|^p\left\{\int_{g_s}r^{\sigma q-s}\,d_sx\right\}dy,\qquad C=\mathrm{const}. \tag{9}$$

Здесь через d_sx обозначен элемент лебеговой меры в E_s.

В неравенстве (9) внутренний интеграл легко оценить. Выберем оси координат так, чтобы s-мерная плоскость, в которой расположено сечение g_s, определялась уравнениями $x_{s+1}=x_{s+2}=\ldots x_m=0$. Тогда на g_s

$$r^2=\sum_{k=1}^{s}(x_k-y_k)^2+\sum_{k=s+1}^{m}y_k^2\geqslant\sum_{k=1}^{s}(x_k-y_k)^2.$$

Последнюю сумму обозначим через r_s^2; очевидно, $r\geqslant r_s$. При этом $\sigma q<s$ и, следовательно,

$$\int_{g_s}\frac{d_sx}{r^{s-\sigma q}}\leqslant\int_{g_s}\frac{d_sx}{r_s^{s-\sigma q}}<\int_{r_s<H}\frac{d_sx}{r_s^{s-\sigma q}};$$

используя формулу (2), в которой m заменено на s, получим

$$\int_{g_s}\frac{d_sx}{r^{s-\sigma q}}<\frac{2\pi^{s/2}H^{\sigma q}}{\Gamma(s/2)\,\sigma q}.$$

Теперь из неравенства (8) следует

$$\|u\|_{L_q(g_s)}=\left\{\int_{g_s}|u(x)|^q\,d_sx\right\}^{1/q}\leqslant C'\|\rho\|_{L_p(G)};\qquad C'=\mathrm{const} \tag{10}$$

и для случая $q\geqslant p$ теорема доказана.

Доказательство при $q<p$ легко получить с помощью следующего замечания. Пусть $\Omega\in E_k$ — измеримое ограниченное множество, $1<q<q_1$ и $u\in L_q(\Omega)$. Применяя неравенство Гельдера с показателем q_1/q, получим

$$\|u\|_q^q=\int_\Omega|u(x)|^q\,dx\leqslant\left\{\int_\Omega|u(x)|^{q_1}\,dx\right\}^{q/q_1}\left\{\int 1^{\frac{q_1}{q_1-q}}\,dx\right\}^{\frac{q_1-q}{q_1}},$$

или

$$\|u\|_q\leqslant(\mu\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}\|u\|_{q_1}. \tag{11}$$

Теперь, если $q<p$, то возьмем какое-нибудь число q_1, $p\leqslant q_1<q_0$. По формулам (10) и (11)

$$\|u\|_{L_q(g_s)}\leqslant(\mu g_s)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}C'\|\rho\|_{L_p(G)}. \blacksquare$$

Теорема 1.3.3. *Пусть $\lambda p' \geqslant m$ и целое число s удовлетворяет неравенству $m-(m-\lambda)p < s \leqslant m$. Пусть далее, $g_s \subset G$ — s-мерное кусочно гладкое многообразие. Тогда верны все утверждения теоремы 1.3.2.*

Как это следует из определения, кусочно гладкое многообразие есть объединение конечного числа частей, $g_s = \bigcup\limits_{i=1}^{n} g_s^{(i)}$, каждая из которых описывается параметрическими уравнениями вида

$$x_j = f_{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

где функции f_{ij} непрерывно дифференцируемы в области изменения переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ и нижняя грань суммы

$$A(x) = \sum \left[\frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s})}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)} \right]^2 \tag{13}$$

положительна; суммирование в (13) производится по всевозможным наборам индексов $j_1, j_2, \ldots, j_s$, каждый из которых принимает значения от 1 до m. Очевидно, теорему достаточно доказать для каждого из множеств $g_s^{(i)}$, которые можно считать замкнутыми; в противном случае достаточно заменить каждое из этих множеств его замыканием и для этого замыкания доказывать теорему. В некоторой окрестности каждой точки множества $g_s^{(i)}$ хотя бы один из якобианов (13) отличен от нуля. По лемме Гейне — Бореля указанное множество можно покрыть конечным числом открытых множеств, на каждом из которых один из якобианов (13) отличен от нуля.

Пусть g' — одно из таких открытых множеств и пусть координатные оси занумерованы так, что на множестве g' не обращается в нуль якобиан

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)}.$$

Этот же якобиан не обращается в нуль и в некоторой окрестности многообразия g'. Обозначим через G_1 пересечение этой окрестности с множеством G, и пусть еще $G_2 = G \setminus G_1$. В G_1 введем новые координаты $\xi_1, \ldots, \xi_s, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_m$ так, что при $j \leqslant s$ они определяются из первых s уравнений (12), а при $j > s$ — из уравнений

$$x_j = f_{ij}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) + \xi_j. \tag{14}$$

Легко проверить, что якобиан этого преобразования

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)} = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)},$$

и потому он отличен от нуля в G_1; если диаметр этого множества достаточно мал, что всегда можно предположить, то введенное здесь преобразование однозначно обратимо. Для дальнейшего важно, что при этом преобразовании м н о ж е с т в о g' п е р е х о д и т в м н о ж е с т в о d', лежащее в плоскости $\xi_{s+1} =$

$=\xi_{s+2}=\ldots=\xi_m=0$. Обозначим еще через D_1 образ множества G_1 при указанном преобразовании. Самое преобразование будем записывать так: $x=f(\xi)$, а обратное преобразование — $\xi=F(x)$.

Положим теперь $u(x)=u_1(x)+u_2(x)$, где

$$u_k(x)=\int\limits_{\overset{\bullet}{G}_k}\rho(y)\frac{A(x,\ y)}{r^\lambda}\,dy,\quad k=1,\ 2. \tag{15}$$

Если $x\in g'$ и $y\in G_2$, то ядро $A(x,\ y)\,r^{-\lambda}$ ограничено, отсюда

$$|u_2(x)|\leqslant C\int\limits_{G_2}|\rho(y)|\,dy\leqslant C\int\limits_{G}|\rho(y)|\,dy=C\|\rho\|_1\leqslant C'\|\rho\|_p,$$

здесь C и C' — некоторые постоянные. Возводя в степень q и интегрируя по g', получаем

$$\int\limits_{g'}|u_2(x)|^q\,dx\leqslant C''\|\rho\|_p^q,\quad C''=\mathrm{const}. \tag{16}$$

Перейдем к функции $u_1(x)$. Пусть $y=f(\eta)$. Положим $|\xi-\eta|=R$, тогда

$$R=|F(y)-F(x)|=|J(\bar{x})(y-x)|;$$

здесь J — якобиева матрица преобразования $\xi=F(x)$ и $\bar{x}$ — некоторая точка отрезка, соединяющего x и y. Матрица J ограничена в G_1, а тогда, очевидно, $R\leqslant cr$, $c=\mathrm{const}$.

Функцию $u_1(x)$ можно представить в виде

$$u_1(x)=\int\limits_{D_1}\frac{A(f(\xi),\ f(\eta))\,|J^{-1}(\xi)|\left(\dfrac{R}{r}\right)^\lambda}{R^\lambda}\,\rho(f(\eta))\,d\eta. \tag{17}$$

Числитель дроби под интегралом (17) ограничен, и этот интеграл имеет слабую особенность. Многообразие d' плоское, и по теореме 1.3.2

$$\begin{aligned}\int\limits_{d'}|u_2(f(\xi))|^q\,d\xi_1\ldots d\xi_s&\leqslant B_1^q\left\{\int\limits_{D_1}|\rho(f(\eta))|^p\,d\eta\right\}^{q/p}=\\&=B_1^q\left\{\int\limits_{G_1}|\rho(y)|^p\left|\frac{D(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_m)}{D(y_1\ \ldots,\ y_m)}\right|dy\right\}^{q/p}\leqslant\\&\leqslant B_2^q\left\{\int\limits_{G_1}|\rho(y)|^p\,dy\right\}^{q/p}\leqslant B_2^q\|\rho\|_p^q,\quad B_1,\ B_2=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{L_p(g')}^q=\int\limits_{g'}|u_1(x)|^q\,d_xg'&=\int\limits_{d'}|u_1(x(\xi))|^q\sqrt{A(x)}\,d\xi_1\ldots d\xi_s\leqslant\\&\leqslant B_3^q\int\limits_{d'}|u_1(x(\xi))|^q\,d\xi_1\ldots d\xi_s,\quad B_3=\mathrm{const};\end{aligned} \tag{19}$$

величина $A(x)$ ограничена, потому что производные $\partial x_j/\partial\xi_k$ все непрерывны и, следовательно, ограничены.

Сопоставляя соотношения (18) и (19), находим, что

$$\|u_1\|_{L_q(g')} \leqslant B_4 \|\rho\|_p, \quad B_4 = \text{const}.$$

Отсюда и из (16) вытекает, что $\|u\|_{L_q(g')} \leqslant B_5 \|\rho\|_p$. Суммируя эти неравенства по всем $g' \subset g_s^{(i)}$, а затем по всем i, найдем, что

$$\|u\|_{L_q(g_s)} \leqslant B \|\rho\|_p, \quad B = \text{const}. \blacksquare \tag{20}$$

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Теорема 1.4.1. *Если $\lambda p' > m$, то интегральный оператор со слабой особенностью вполне непрерывен как оператор из $L_p(G)$ в $L_q(G)$, где $1 \leqslant q < q_0^* = \dfrac{mp}{m-(m-\lambda)p}$.*

Замечание. Можно доказать, что при условии $\lambda p' \geqslant m$ интегральный оператор со слабой особенностью вполне непрерывен и как оператор из $L_p(G)$ в $L_q(g_s)$, где $g_s \subset G$ есть s-мерное кусочно гладкое многообразие, $m-(m-\lambda)p < s \leqslant m$ и $1 \leqslant q < q_0$, где q_0 определено формулой (3.7) Доказательство см. в [36], [37].

Пусть ε — произвольное положительное число. Допуская, что $x, y \in G$, полагаем

$$K_1(x, y) = \begin{cases} A(x, y)\, r^{-\lambda}, & r \geqslant \varepsilon, \\ 0, & r < \varepsilon; \end{cases}$$

$$K_2(x, y) = \begin{cases} 0, & r \geqslant \varepsilon, \\ A(x, y)\, r^{-\lambda}, & r < \varepsilon. \end{cases}$$

Обозначим через K_j, $j = 1, 2$, интегральный оператор с ядром $K_j(x, y)$, так что $K_1 + K_2 = K$. Докажем, что $\|K_2\| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Пусть $\rho \in L_p(G)$ и

$$v(x) = \int_G K_2(x, y)\, \rho(y)\, dy = \int_{G \cap (r<\varepsilon)} \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \rho(y)\, dy.$$

Как и в предшествующем параграфе, получим

$$|v(x)| \leqslant N \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} |\rho(y)|^p r^{\sigma q - m}\, dy \right\}^{1/q} \times$$
$$\times \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} |\rho(y)|^p\, dy \right\}^{1/p - 1/q} \left\{ \int_{G \cap (r<\varepsilon)} r^{p'\sigma - m}\, dy \right\}^{1/p'}.$$

Здесь $\sigma = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p'} - \dfrac{\lambda}{m}\right)$. Если в первых двух множителях справа интегрировать по G, а в третьем — по шару $r < \varepsilon$, то правая часть не уменьшится. Используя затем формулу (3.2) и интегрируя по G, получим $\|v\|_q \leqslant C_1 \varepsilon^\sigma \|\rho\|_p$, $C_1 = \text{const}$. Отсюда $\|K_2\| \leqslant C_1 \varepsilon^\sigma$, и наше утверждение доказано.

Пусть теперь некоторое ядро $T(x, y) \in L_\beta(G \times G)$, где $\beta = \max(p', q)$, и пусть оператор T определен формулой

$$(T\rho)(x) = w(x) = \int_G T(x, y)\rho(y)\,dy.$$

Оценим норму T как оператора из $L_p(G)$ в $L_q(G)$. По неравенству Гельдера

$$|w(x)| \leqslant \|\rho\|_p \left[\int_G |T(x, y)|^{p'} dy\right]^{1/p'}.$$

Полагая в формуле (3.11) $q = p'$, $q_1 = \beta$, получим

$$|w(x)| \leqslant (\mu G)^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{\beta}} \|\rho\|_p \left[\int_G |T(x, y)|^\beta dy\right]^{1/\beta}.$$

Обозначим для краткости

$$\varphi(x) = \left[\int_G |T(x, y)|^\beta dy\right]^{1/\beta}; \quad (\mu G)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{\beta}} = c,$$

так что $|w(x)| \leqslant c\|\rho\|_p \varphi(x)$. Возводя в степень q и интегрируя по x, найдем

$$\|w\|_q^q \leqslant c^q \|\rho\|_p^q \|\varphi\|_q^q \leqslant c_1^q \|\rho\|_p^q \|\varphi\|_\beta^q; \quad c_1 = (\mu G)^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} - \frac{2}{\beta}} c.$$

Отсюда уже легко следует искомая оценка

$$\|T\| \leqslant c_1 \left[\int_G \int_G |T(x, y)|^\beta dx\,dy\right]^{1/\beta}. \tag{1}$$

Обратимся к оператору K_1. Его ядро ограничено и, следовательно, суммируемо с любой степенью. В таком случае ядро $K_1(x, y)$ можно аппроксимировать некоторым полиномом $P(x, y)$ так, чтобы величина

$$\int_G \int_G |K_1(x, y) - P(x, y)|^\beta dx\,dy$$

была сколь угодно малой. Обозначая через P интегральный оператор с ядром $P(x, y)$, видим, что оператор $K_1 - P$ имеет при подходящем выборе полинома $P(x, y)$ сколь угодно малую норму.

Докажем теперь, что P вполне непрерывен как оператор из $L_p(G)$ в $L_q(G)$. Пусть M — множество, ограниченное в $L_p(G)$: $\forall \rho \in M$, $\|\rho\|_p \leqslant C = \mathrm{const}$. Достаточно доказать, что множество PM компактно в $L_q(G)$. По неравенству Гельдера

$$|(P\rho)(x)| \leqslant \|\rho\|_p \left\{\int_G |P(x, y)|^{p'} dy\right\}^{1/p'} \leqslant C \left\{\int_G |P(x, y)|^{p'} dy\right\}^{1/p'}.$$

Множество G ограничено, и последний интеграл также ограничен. Отсюда следует, что множество функций PM ограничено по абсолютной величине постоянной, которая не зависит от выбора функции $\rho(y)$ в множестве M. Далее, по тому же неравенству Гельдера,

$$|(P\rho)(x+\Delta x)-(P\rho)(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\rho\|_p\left\{\int_G|P(x+\Delta x,\ y)-P(x,\ y)|^{p'}dy\right\}^{1/p'}\leqslant$$
$$\leqslant C\left\{\int_G|P(x+\Delta x,\ y)-P(x,\ y)|^{p'}dy\right\}^{1/p'}. \qquad (2)$$

На ограниченном множестве G полином $P(x, y)$ равномерно непрерывен, и неравенство (2) показывает, что множество функций PM равностепенно непрерывно. По теореме Арцеля, множество PM компактно в метрике $C(G)$ и тем более в метрике $L_q(G)$. Оператор P вполне непрерывен.

Таким образом, справедливо разложение $K=P+(K_1-P)+K_2$, в котором оператор P вполне непрерывен, а каждый из операторов K_1-P и K_2 имеет сколь угодно малую норму. Но тогда оператор K вполне непрерывен. ■

Теоремы § 3 и 4 без труда распространяются на тот случай, когда в интеграле со слабой особенностью интегрирование совершается по измеримому множеству G, которое принадлежит некоторому m-мерному кусочно гладкому многообразию Γ; относительно этого многообразия мы допустим, что оно погружено в некоторое евклидово пространство более высокой размерности n. В этом случае в формуле (3.1), определяющей интеграл со слабой особенностью, можно под r понимать расстояние между точками x и y, определенное либо в метрике пространства E_n, либо во внутренней метрике многообразия Γ.

Глава 2

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. УСРЕДНЯЮЩЕЕ ЯДРО [1]

Пусть x и y — произвольные точки пространства E_m, $r = |x-y|$ и h — произвольное положительное число. Функцию $\omega_h(r)$ назовем *усредняющим ядром*, если оно обладает следующими свойствами: 1) функция $\omega_h(r)$ бесконечно дифференцируема по декартовым координатам точек x и y. Заметим сразу же, что при $r \neq 0$ для этого необходимо и достаточно, чтобы указанная функция была бесконечно дифференцируема по r; 2) $\omega_h(r) > 0$, $r < h, \omega_h(r) = 0$, $r \geqslant h$; 3) $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dy = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dx = 1$.

Убедимся в существовании, по крайней мере, одного такого ядра. Пусть

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h, \ c_h = \text{const} > 0; \\ 0, & r \geqslant h. \end{cases} \tag{1}$$

Свойство 2) не вызывает сомнений. Свойство 3) справедливо, если положить

$$c_h = \left\{ \int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}\,dy \right\}^{-1}. \tag{2}$$

Установим свойство 1). Не вызывает сомнений бесконечная дифференцируемость функции (1) при $r < h$ и при $r > h$, причем в случае $r > h$ все производные равны нулю. Достаточно установить поэтому, что функция (1) имеет при $r = h$ производные по r любого порядка, равные нулю, и что производные, вычисленные при $r < h$, стремятся к нулю при $r \to h$.

Доказательство проведем для первой производной; для высших производных оно аналогично.

а) Функция $\omega_h(r)$ непрерывна при $r = h$. Действительно, из формулы (1) видно, что $\omega_h(h+0) = 0 = \omega_h(h)$, а

$$\omega_h(h-0) = \lim_{r \to h-0} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0,$$

[1] Понятие усредняющего ядра и тесно связанное с ним понятие средней функции (см. ниже) впервые были введены В. А Стекловым. Дальнейшее развитие эти понятия получили у С. Л. Соболева, идеи которого мы здесь и излагаем. С. Л. Соболев также ввел и исследовал понятие обобщенных производных, о которых будет идти речь в § 3—8 настоящей главы.

так как

$$-\frac{h^2}{h^2-r^2}\xrightarrow[r\to h-0]{}-\infty.$$

б) Производная $\omega_h(h)$ существует и равна нулю. Действительно,

$$\lim_{r\to h+0}\frac{\omega_h(r)-\omega_h(h)}{h-r}=\lim_{r\to h+0}0=0.$$

В то же время

$$\lim_{r\to h-0}\frac{\omega_h(r)-\omega_h(h)}{r-h}=\lim_{r\to h-0}\frac{e^{-\frac{h^2}{r^2-h^2}}}{r-h}=0,$$

в чем можно убедиться хотя бы по правилу Лопиталя. Таким образом, существует и равен нулю предел

$$\lim_{r\to h}\frac{\omega_h(r)-\omega_h(h)}{r-h}=\omega_h'(h).$$

в) Справедливо соотношение

$$\lim_{r\to h-0}\omega_h'(r)=\lim_{r\to h-0}c_h\frac{2rh^2}{(h^2-r^2)^2}e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}=0,$$

которое легко проверяется по тому же правилу Лопиталя.

Таким образом, первая производная $\omega_h'(r)$ существует и непрерывна при любом r. Точно так же доказывается существование и непрерывность следующих производных. Свойство 1) установлено.

§ 2. СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ

Пусть Ω — конечная область пространства E_m и $u(y)$ — функция, суммируемая в Ω. Доопределим эту функцию вне Ω, положив ее там равной нулю. Пусть x — произвольная точка пространства E_m. Положим

$$u_h(x)=\int_\Omega\omega_h(r)\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

где $\omega_h(r)$ — какое-нибудь усредняющее ядро, обладающее свойствами 1—3 § 1. Функция u_h называется *средней функцией* по отношению к u; число h называется *радиусом усреднения*. Среднюю функцию можно представить еще в трех формах:

1) приняв во внимание, что $u(y)=0$, $y\overline{\in}\Omega$, можно интеграл (1) распространить на все пространство, и тогда

$$u_h(x)=\int_{E_m}\omega_h(r)\,u(y)\,dy; \tag{1a}$$

2) в силу свойства 2) усредняющего ядра можно интегрировать не по всему пространству, а только по шару радиуса h

с центром в точке x:

$$u_h(x) = \int\limits_{r<h} \omega_h(r) u(y)\, dy; \tag{1б}$$

3) можно, наконец, интегрировать только по пересечению $\Omega \bigcap (r<h)$, так как вне его либо один, либо другой множитель под интегралом равен нулю. Поэтому справедлива формула

$$u_h(x) = \int\limits_{\Omega \bigcap (r<h)} \omega_h(r) u(y)\, dy. \tag{1в}$$

Простейшие свойства средних функций

1. Средняя функция бесконечно дифференцируема во всем пространстве; ее производные любого порядка можно получить дифференцированием под знаком интеграла в любой из формул (1) — (1в).

Это свойство непосредственно вытекает из теоремы 1.1.3. Производные от средней функции можно, следовательно, вычислять по формуле

$$D^\alpha u_h(x) = \int\limits_\Omega u(y) D_x^\alpha \omega_h(r)\, dy, \tag{2}$$

в которой α — любой мультииндекс порядка m; область Ω в формуле (2) можно заменить любой из областей E_m, $r<h$, $\Omega \bigcap (r<h)$.

2. Средняя функция равна нулю во всех точках, расстояние которых до области Ω не меньше h. Действительно, в этом случае шар $r<h$ целиком лежит вне Ω, и под знаком интеграла (1б) $u(y) \equiv 0$.

Таким образом, средняя функция может быть отлична от тождественного нуля лишь в области, которую мы обозначим $\Omega^{(h)}$ и которую можно построить так: из каждой точки $x \in \Omega$ как из центра опишем шар радиуса h; объединение этих шаров и есть Ω^h. Ясно, что $\Omega^{(h)} \supset \Omega$; если, например, Ω есть шар радиуса R, то $\Omega^{(h)}$ есть концентрический с Ω шар радиуса $R+h$.

Сходимость средних функций

Теорема 2.2.1. *Если $u \in C(\Omega)$, то средняя функция $u_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} u(x)$ равномерна во всякой замкнутой внутренней подобласти области Ω.*

Пусть Ω' — внутренняя подобласть области Ω. Построим область Ω'', которая является внутренней подобластью для Ω и для которой Ω' является внутренней подобластью.

Границы областей Ω' и Ω'' обозначим через Γ' и Γ'' соответственно, и пусть h_0 — наименьшее расстояние между точками границ Γ' и Γ''. Возьмем $h<h_0$. По формуле (1б) и по свойству 3) усредняющего ядра (§ 1) имеем

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{r<h} [u(y) - u(x)] \omega_h(r)\, dy. \tag{3}$$

Если $x \in \overline{\Omega}'$, то в интеграле (3) $y \in \overline{\Omega}''$. В замкнутой области Ω'' непрерывная функция u равномерно непрерывна, поэтому при достаточно малом h и $r \leqslant h$ будет $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. Имея в виду, что $\omega_h(r) \geqslant 0$ (свойство 2), из формулы (3) получаем

$$|u_h(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon \int_{r<h} \omega_h(r)\,dy = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 2.2.2. *Норма в $L_p(\Omega)$ не возрастает при усреднении, каково бы ни было p из промежутка $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Пусть $u \in L_p(\Omega)$ и $1 < p < \infty$. По неравенству Гельдера,

$$|u_h(x)|^p = \left|\int_\Omega u(y)\,\omega_h(r)\,dy\right|^p = \left|\int_\Omega u(y)\,\omega_h^{1/p}(r)\,\omega_h^{1/p'}(r)\,dy\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r)\,dy \left\{\int_\Omega \omega_h(r)\,dy\right\}^{p/p'} \leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \omega_h(r)\,dy, \qquad (4)$$

так как по свойству 2) усредняющего ряда

$$\int_\Omega \omega_h(r)\,dy = \int_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r)\,dy \leqslant \int_{r<h} \omega_h(r)\,dy = 1.$$

Интегрируя неравенство (4) по области Ω, получаем

$$\|u_h\|_p^p = \int_\Omega |u_h(x)|^p dx \leqslant \int_\Omega |u(y)|^p \left\{\int_\Omega \omega_h(r)\,dx\right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |u(y)|^p dy = \|u\|_p^p.$$

Предоставляем читателю рассмотреть оставшиеся более простые случаи $p = 1$ и $p = \infty$.

Теорема 2.2.3. *Если $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, то* $\|u - u_h\|_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Известно[1], что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить полином f так, чтобы $\|u - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$.

Применим неравенство треугольника (значок p у нормы ниже опускаем):

$$\|u - u_h\| \leqslant \|u - f\| + \|f - f_h\| + \|f_h - u_h\|.$$

По теореме 2.2.2 $\|f_h - u_h\| \leqslant \|f - u\|$, поэтому

$$\|u - u_h\| \leqslant 2\|f - u\| + \|f - f_h\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f_h\|.$$

Выберем область Ω_1, для которой Ω будет строго внутренней подобластью. Полином f непрерывен в Ω_1, поэтому $f_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f$ равномерно в любой внутренней замкнутой подобласти Ω_1, в частности в $\overline{\Omega}$. Но из равномерной сходимости в замкнутой области следует сходимость в среднем, и для достаточно малых h $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon$. Отсюда уже легко вытекает наше утверждение. $\blacksquare$

---

[1] См., например, [36].

Теорема 2.2.4. *Множество функций, финитных в области Ω, плотно в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Надо доказать, что любую функцию $u \in L_p(\Omega)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать в метрике $L_p(\Omega)$ финитной функцией.

Число δ выберем так, чтобы мера полоски Ω_δ была достаточно мала, а именно: зададим $\varepsilon > 0$ и выберем δ так, чтобы

$$\int_{\Omega_\delta} |u(x)|^p \, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ 0, & x \in \Omega_\delta. \end{cases}$$

Очевидно, $v \in L_p(\Omega)$; при этом

$$\|u - v\|^p = \int_{\Omega_\delta} |u(x)|^p \, dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

и, следовательно,

$$\|u - v\| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Возьмем $h < \delta/2$ и построим среднюю функцию $v_h(x)$. Она финитна в Ω, так как она бесконечно дифференцируема и равна нулю в пограничной полоске $\Omega_{\delta-h}$ (свойства 1, 2 средней функции, § 2). По теореме 2.2.3. можно выбрать число h_0 так, чтобы при $h < h_0$ было

$$\|v - v_h\| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

Из неравенства треугольника и соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\|u - v_h\| \leqslant \|u - v\| + \|v - v_h\| < \varepsilon, \quad h < h_0. \ \blacksquare$$

Следствие 2.2.1. *Если $M \subset L_p(\Omega)$ — множество, содержащее множество всех финитных в Ω функций, то M плотно в $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

§ 3. ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Предварительно выведем формулу интегрального исчисления, известную под названием *формулы интегрирования по частям.*

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Γ. Напомним формулу Остроградского

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx = \int_\Gamma P \cos(\nu, \ x_k) \, d\Gamma;$$

здесь ν — нормаль к поверхности Γ, внешняя по отношению к Ω. От функции $P(x)$ достаточно потребовать, чтобы она принадлежала классу $C^{(1)}(\Omega)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k}(PQ)\, dx - \int\limits_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx,$$

где $P,\ Q \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$. Заменяя первый интеграл справа по формуле Остроградского, получаем формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = -\int\limits_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx + \int\limits_{\Gamma} PQ \cos(\nu,\ x_k)\, d\Gamma.$$

Отметим некоторые следствия из этой формулы. Если одна из функций P и Q обращается на Γ в нуль, то поверхностный интеграл исчезает и получается более простая формула

$$\int\limits_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = -\int\limits_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx.$$

Рассмотрим интеграл несколько более сложного вида:

$$\int\limits_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx.$$

Если функция P имеет нужные непрерывные производные, то этот интеграл можно взять по частям k раз так, чтобы под знаком объемного интеграла освободить функцию Q от дифференцирования:

$$\int\limits_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} P \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \cos(\nu,\ x_1)\, d\Gamma = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k \int\limits_{\Omega} Q \frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx + \int\limits_{\Gamma} R(P,\ Q)\, d\Gamma;$$

через $R(P,\ Q)$ обозначено выражение, зависящее от функций $P,\ Q$ и их производных до порядка $k-1$ включительно.

Пусть Ω — некоторая область, и пусть функции $u,\ w \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, так что они, в частности, суммируемы в любой внутренней подобласти Ω. Допустим, что для любой функции $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ (обозначения см. Введение, § 2) справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi\, dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} v \varphi\, dx, \quad k = |\alpha|, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)$ — некоторый мультииндекс. Тогда $v(x)$ называется *обобщенной производной* порядка k от функции $u(x)$ в области Ω. Для обозначения обобщенной производной используют обычный символ и пишут

$$v(x) = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}. \tag{2}$$

Теорема 2.3.1. *Обобщенная производная вида* (2) *единственна.*

Докажем, что если функции $u(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x) \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, и при любой функции $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ они удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= (-1)^k \int_\Omega v_1 \varphi \, dx, \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= (-1)^k \int_\Omega v_2 \varphi \, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

в которых α — данный мультииндекс и $k = |\alpha|$, то $v_1 \equiv v_2$. Вычитая второе тождество (3) из первого и полагая $v_1(x) - v_2(x) = w(x)$, получаем тождество

$$\int_\Omega w(x) \varphi(x) \, dx = 0, \tag{4}$$

верное, если $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Докажем, что тождество (4) верно для любой ограниченной измеримой функции $\varphi(x)$, равной нулю в некоторой пограничной полоске. Пусть $\varphi(x)$ — такая функция и пусть она равна нулю в полоске ширины δ. Возьмем $h < \delta/2$ и построим среднюю функцию $\varphi_h(x)$. Она бесконечно дифференцируема и равна нулю в пограничной полоске ширины $\delta - h$. Поэтому $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ и тем более $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Для функции $\varphi_h(x)$ тождество верно:

$$\int_\Omega w(x) \varphi_h(x) \, dx = 0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что при любом h функции $\varphi_h(x)$ ограничены одной и той же постоянной: если $|\varphi(x)| < N = \mathrm{const}$, то

$$|\varphi_h(x)| = \left| \int_{r<h} \varphi(y) \omega_h(r) \, dy \right| \leqslant N \int_{r<h} \omega_h(r) \, dy = N.$$

Ограниченная и измеримая в Ω функция φ во всяком случае суммируема в Ω с квадратом. По теореме 2.2.3 имеем $\|\varphi_h - \varphi\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. По известной теореме о последовательностях функций, сходящихся в среднем[1], можно выбрать такую последовательность чисел $h_n \to 0$, что $\varphi_{h_n}(x) \to \varphi(x)$ почти всюду в Ω.

В тождестве (5) положим $h = h_n$. Под знаком интеграла (5) подынтегральная функция не превосходит суммируемой функции $N|w(x)|$ и при $n \to \infty$ почти всюду стремится к функции $w(x)\varphi(x)$. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получаем $\int_\Omega w(x) \varphi(x) \, dx = 0$, что и требовалось

---

[1] См., например: Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1957, с 184.

доказать. Теперь положим в тождестве (4)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{\delta/2} \\ \operatorname{sign} w(x), & x \in \Omega' = \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}, \end{cases}$$

тогда $\int\limits_{\Omega'} |w(x)|\, dx = 0$ и, следовательно, $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Так как число $\delta > 0$ произвольно, то $w(x) \equiv 0$ в Ω. ■

Если функция $u(x)$ непрерывна в Ω вместе со своими производными до k-го порядка включительно, то ее обобщенные производные k-го порядка существуют и совпадают с обычными. Действительно, интеграл в левой части формулы (1) можно взять по частям k раз; при этом поверхностные интегралы исчезнут, потому что на границе области Ω как функция φ, так и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно равны нулю. В результате получится равенство

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, dx, \tag{6}$$

где справа стоит обычная (непрерывная) производная от u. Равенство (6) показывает, что обобщенная производная в этом случае существует и равна непрерывной производной

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}.$$

Примеры. 1. Пусть Ω — интервал $(-1, 1)$. Функция $u(x) = |x|$ имеет обобщенную производную $u'(x) = \operatorname{sign} x$. Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$, тогда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1, +1]$ и $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Имеем равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} |x|\, \varphi'(x)\, dx = -\int\limits_{-1}^{0} x\varphi'(x)\, dx + \int\limits_{0}^{1} x\varphi'(x)\, dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} |x|\, \varphi'(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{0}^{1} \varphi(x)\, dx = -\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) \operatorname{sign} x\, dx, \tag{7}$$

и утверждение доказано.

2. Функция $\operatorname{sign} x$ в интервале $(-1, 1)$ не имеет обобщенной первой производной (хотя она, как и функция $|x|$, имеет непрерывную производную при $x \neq 0$). Чтобы в этом убедиться, составим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x) \operatorname{sign} x\, dx = -\int\limits_{-1}^{0} \varphi'(x)\, dx + \int\limits_{0}^{1} \varphi'(x)\, dx = -2\varphi(0), \tag{8}$$

где $\varphi \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, 1)$. Не существует функции $v(x)$, локально суммируемой в интервале $(-1, 1)$ и при любой функции $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$ удовлетворяющей тождеству

$$\int\limits_{-1}^{+1} v(x)\, \varphi(x)\, dx = 2\varphi(0). \tag{9}$$

Действительно, пусть такая функция существует. Тогда функция $V(x) = \int\limits_0^x v(y)\,dy$ абсолютно непрерывна на любом сегменте $[a, b] \subset (-1, 1)$ и имеет в нем суммируемую производную $v(x)$ Интеграл (9) можно взять по частям; в силу формулы (8) получим тождество, верное для любой функции $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \varphi'(x)\,[\operatorname{sign} x - V(x)]\,dx = 0.$$

Но тогда[1] $\operatorname{sign} x = V(x) + \mathrm{const}$, $x \in (-1, +1)$, что нелепо, так как в точке $x = 0$ левая часть разрывна, а правая — непрерывна.

3. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на сегменте $[-1, 1]$, но ни в одной его точке не дифференцируемы. Можно доказать, что непрерывная в квадрате $0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1$ функция двух переменных

$$u(x) = u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \tag{10}$$

не имеет обобщенных первых производных. Однако эта функция имеет обобщенную производную второго порядка $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$, и эта производная равна нулю. Чтобы установить это, достаточно доказать, что для любой функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$, где Ω квадрат $-1 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1$, справедливо тождество

$$\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} u(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 = 0.$$

Но это тождество вытекает из цепочки равенств

$$\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} u(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} f(x_1)\left\{\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_2\right\}dx_1 + \int\limits_{-1}^{+1} g(x_2)\left\{\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\right\}dx_2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} f(x_1)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=-1}^{x_2=+1} dx_1 + \int\limits_{-1}^{+1} g(x_2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Bigg|_{x_1=-1}^{x_1=+1} dx_2 = 0$$

Этот пример показывает, что из существования обобщенной производной какого-либо порядка не следует существование предшествующих ей обобщенных производных.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Теорема 2.4.1. *Пусть в области Ω функция $u(x)$ имеет обобщенную производную $u(x)$ вида* (1.2): $v(x) = D^\alpha u(x)$ *и пусть $u_h(x)$ и $v_h(x)$ суть соответствующие средние функции. Тогда в области $\Omega \setminus \Omega_h$ средняя функция от этой производной равна производной того же вида от средней функции.*

Напомним, что Ω_h означает пограничную полоску области Ω ширины h. Множество $\Omega \setminus \Omega_h$ — открытое и, если $x \in \Omega \setminus \Omega_h$, то

[1] См., например, [36], теорема 12.

расстояние от точки x до границы области Ω больше h, поэтому усредняющее ядро $\omega_h(r) \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$. По формуле (1.1)

$$\int\limits_{\Omega} u(y) D_y^{\alpha} \omega_h(r)\, dy = (-1)^k \int\limits_{\Omega} u(y)\, \omega_h(r)\, dy = (-1)^k v_h(x); \tag{1}$$

здесь обозначено $|\alpha| = k$. Усредняющее ядро $\omega_h(r)$ зависит только от разности $x-y$, поэтому $D_y^{\alpha}\omega_h(r) = (-1)^k D_x^{\alpha}\omega_h(r)$. Подставив это в формулу (1), получим $v_h(x) = D^{\alpha}u_h(x)$. ■

Теорема 2.4.2. *Пусть Ω' — подобласть области Ω. Если $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$*

$$v(x) = D^{\alpha}u(x), \quad |\alpha| = k, \tag{2}$$

в области Ω, то $v(x)$ является такой же обобщенной производной от $u(x)$ в области Ω'.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega')$. Доопределим функцию $\varphi(x)$ в $\Omega \setminus \Omega'$, положив ее там равной нулю. Очевидно, тогда $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. К функциям $u(x)$ и $\varphi(x)$ применим формулу (3.1). Отбросив в обеих ее частях интегралы по $\Omega \setminus \Omega'$, равные нулю, получим формулу

$$\int\limits_{\Omega'} u D^{\alpha}\varphi\, dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega'} v\varphi\, dx,$$

которая и означает, что в подобласти Ω' $v = D^{\alpha}u$. ■

Теорема 2.4.3. *Если в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ вида $v(x) = D^{\alpha}u(x)$, а функция $w(x)$ в той же области есть обобщенная производная от $v(x)$ вида $w(x) = D^{\beta}v(x)$, то $w(x) = D^{\alpha+\beta}u(x)$ в Ω.*

Обозначим $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$, и пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k+l)}(\Omega)$. Тогда $D^{\beta}\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ и по формуле (1.1):

$$\int\limits_{\Omega} u D^{\alpha+\beta}\varphi\, dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} v D^{\beta}\varphi\, dx; \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} v D^{\beta}\varphi\, dx = (-1)^l \int\limits_{\Omega} w\varphi\, dx.$$

Подставив последнее равенство в (3), получим формулу

$$\int\limits_{\Omega} u D^{\alpha+\beta}\varphi\, dx = (-1)^{k+l} \int\limits_{\Omega} w\varphi\, dx,$$

равносильную утверждению теоремы. ■

Лемма 2.4.1. *Пусть функция $u(x)$ имеет в области Ω обобщенную производную $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}$, а также все предшествующие обобщенные производные. Если функция $\zeta(x) \in C^{(k)}(\Omega)$,* то существует обобщенная производная $\dfrac{\partial^k(\zeta u)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}$, *которую можно вычислить по обычному правилу дифференцирования произведения.*

Пусть $u_h(x)$ — средняя функция. Если $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$, то верна формула интегрирования по частям

$$\int_\Omega u_h \zeta \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi \frac{\partial^k (u_h \zeta)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} dx =$$

$$= (-1)^k \sum \int_\Omega \varphi \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\mu}} \frac{\partial^\nu u_h}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_\nu}} dx; \quad (4)$$

здесь в соответствии с правилом дифференцирования произведения $(j_1, \ldots, j_\mu)$ и $(l_1, \ldots, l_\nu)$ суть наборы индексов, объединение которых дает всю совокупность $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, и суммирование производится по всем таким наборам. Пусть $\varphi = 0$ в пограничной полоске Ω_δ. В области $\Omega \setminus \Omega_\delta$, по которой фактически совершается интегрирование в формуле (4),

$$u_h \xrightarrow[h \to 0]{} u, \qquad \frac{\partial^\nu u_h}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_\nu}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_\nu}}$$

в метрике L_1; первое соотношение следует из теоремы 2.2.3, второе — из теорем 2.2.3 и 2.4.1. Переходя к пределу под знаком интеграла, что, очевидно, допустимо, получаем формулу

$$\int_\Omega u \zeta \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi \sum \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\mu}} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_\nu}} dx.$$

Из этой формулы, по определению, вытекает, что обобщенная производная

$$\frac{\partial^k (\zeta u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$$

существует и что

$$\frac{\partial^k (\zeta u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = \sum \frac{\partial^\mu \zeta}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\mu}} \frac{\partial^\nu u}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_\mu}}. \ \blacksquare$$

§ 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 2.5.1. *Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют в конечной области $\Omega \in E_m$ обобщенные производные одного и того же вида $v_n(x) = D^\alpha u_n(x)$. Если обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся в метрике $L_1(\Omega)$ к пределам $u(x)$ и $v(x)$ соответственно, то в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ того же вида.*

По определению обобщенной производной,

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^k \int_\Omega v_n \varphi \, dx; \quad k = |\alpha|, \ \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega). \quad (1)$$

Интегралы в (1) суть ограниченные в $L_1(\Omega)$ функционалы над u_n и v_n соответственно, и под знаками этих интегралов можно переходить к пределу, что приводит к формуле (3.1). $\blacksquare$

Теорема 2.5.2. *Пусть $u, v \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ в области Ω, не обязательно конечной, $v(x) = D^\alpha u(x)$. Тогда в любой конечной внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ можно построить последовательность беско-*

нечно дифференцируемых функций $\{u_n(x)\}$ таких, что в метрике пространства $L_p(\Omega')$

$$u_n \to u, \qquad D^\alpha u \to v. \tag{2}$$

Для доказательства можно взять $u_n(x) = u_{h_n}(x)$, где h_n — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда первое соотношение (2) вытекает из теоремы 2.2.3, второе соотношение — из теорем 2.2.3 и 2.4.1. ■

§ 6. СЛУЧАЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этом случае класс функций, имеющих обобщенную первую производную, оказывается тесно связанным с классом абсолютно непрерывных функций. Напомним, что функция $u(x)$ вещественной переменной x абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$, если существует такая суммируемая на этом сегменте функция $v(x)$, что

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt + \text{const}, \quad x \in [a, b].$$

Из известных теорем Лебега вытекает, что функция $u(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ почти всюду обычную производную, равную $v(x)$.

Теорема 2.6.1. *Пусть $u, v \in L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и интервал (a, b) конечен. Пусть, далее, $v(x)$ есть обобщенная первая производная от $u(x)$ на интервале (a, b): $v(x) = du(x)/dx$. Тогда функция $u(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и почти всюду в (a, b) имеет обычную производную, равную $v(x)$.*

Положим

$$w(x) = \int_a^x v(y)\,dy. \tag{1}$$

Функция w абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и почти всюду на этом сегменте имеет обычную производную, равную $v(x)$. Пусть $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(a, b)$. Интегрируя по частям, найдем

$$\int_a^b w(y)\varphi'(y)\,dy = w(y)\varphi(y)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(y)w'(y)\,dy = -\int_a^b \varphi(y)v(y)\,dy.$$

С другой стороны, по определению обобщенной производной,

$$\int_a^b u(y)\varphi'(y)\,dy = -\int_a^b \varphi(y)v(y)\,dy.$$

Вычитая, получим

$$\int_a^b [u(y) - w(y)]\varphi'(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Пусть сегмент $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Повторяя рассуждения теоремы 2. 3. 1, убедимся, что тождество (2) верно для любой функции $\varphi(x)$, такой, что $\varphi \in C[a, b] \cap C^{(1)}[\alpha, \beta]$ и $\varphi(x)=0$ вне $[\alpha, \beta]$. Полагая $\varphi(x)=\sin nt$, $t=\pi(x-\alpha)/(\beta-\alpha)$, $n=1,2, \ldots$, в $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(x)=0$ вне $[\alpha, \beta]$, видим, что на $[\alpha, \beta]$ разность $u(x)-w(x)$ ортогональна к $\cos nt$, $n=1,2, \ldots$. Но тогда эта разность постоянна:

$$u(x)=c+w(x)=c+\int_a^x v(y)\, dy, \quad c=\text{const}. \tag{3}$$

Так как $[\alpha, \beta]$ — произвольный сегмент, лежащий в интервале (a, b), то равенство (3) верно в (a, b). Полагая $u(a)=c$, $u(b)=c+\int_a^b v(y)\, dy$, сделаем равенство (3) верным на сегменте $[a, b]$. ■

Следствие 2.6.1. *Пусть u, $u \in L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и интервал (a, b) конечен. Пусть $v(x)$ есть k-я обобщенная производная от $u(x)$. Тогда функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема $k-1$ раз на сегменте $[a, b]$ и почти всюду на нем имеет обычную k-ю производную $u^k(x)=v(x)$. При этом производная $u^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

В следующем параграфе будет доказана теорема, которую можно рассматривать как обобщение теоремы 2.6.1 на случай многих независимых переменных.

§ 7. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ОБОБЩЕННУЮ ПЕРВУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Теорема 2.7.1. *Пусть функция $u(x)$, суммируемая в некоторой конечной области $\Omega \subset E_m$, имеет обобщенную первую производную $v_j = \partial u/\partial x_j$, также суммируемую в Ω, и пусть λ — пересечение области Ω с прямой, параллельной оси x_j. Тогда почти на любом сечении λ функция $u(x)$ абсолютно непрерывна по x_j, и ее производная по x_j почти всюду (по мере на λ) совпадает с обобщенной производной $v_j(x)$.*

Для упрощения записи перенумеруем оси координат так, чтобы $j=1$. Сечение λ есть одномерное открытое множество и потому является объединением конечного или счетного множества интервалов. Пусть (α, β) один из этих интервалов; ясно, что точки α и β принадлежат $\partial\Omega$. По теореме Фубини, обе функции $u(x)$ и $v_1(x)$ суммируемы почти на любом таком интервале. Обозначим $x'=(x_2, x_3, \ldots, x_m)$; на каждом сечении λ точка x' остается постоянной. Любую функцию от x можно рассматривать как функцию от x_1 и x'; в соответствии с этим будем писать $u(x)=u(x_1, x')$ и т. п.

На выбранном интервале (α, β) рассмотрим функцию

$$w(x)=w(x_1, x')=\int_\alpha^{x_1} v_1(t, x')\, dt;$$

как функция от x_1 она абсолютно непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$ и почти всюду на этом сегменте имеет производную $\partial w/\partial x_1 =$

$=v_1(x_1,\ x')=v_1(x)$. Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$, тогда, в частности, $\varphi(\alpha,\ x')=\varphi(\beta,\ x')=0$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_\alpha^\beta w(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}dx_1=-\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,v_1(x)\,dx_1.$$

Суммируя по всем интервалам, принадлежащим данному сечению λ, получаем

$$\int_\lambda w(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}dx_1=-\int_\lambda\varphi(x)\,v_1(x)\,dx_1.$$

Пусть Σ — проекция Ω на $(m-1)$-мерную плоскость координат $x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m$. Интегрируя последнее тождество по Σ, приходим к новому тождеству

$$\int_\Omega w(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}dx=-\int_\Omega\varphi(x)\,v_1(x)\,dx.$$

В то же время, по определению обобщенной производной,

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}=-\int_\Omega\varphi(x)\,v_1(x)\,dx.$$

В качестве $\varphi(x)$ возьмем усредняющее ядро $\omega_h(r)$, где $h<\delta$ и δ — фиксированное число. Тогда в $\Omega\setminus\Omega_\delta$

$$\frac{\partial w_h(x)}{\partial x_1}=\frac{\partial u_h(x)}{\partial x_1},$$

и следовательно, разность $w_h(x)-u_h(x)$ не зависит от x_1. Переходя к пределу при $h\to 0$, видим, что разность $w(x)-u(x)$ не зависит от x_1. Зафиксируем x' так, чтобы на соответствующем сечении λ функция $w(x)$ была абсолютно непрерывна по x_1. Тогда на любом интервале $(\alpha,\ \beta)\in\lambda$

$$u(x)=\int_\alpha^{x_1}v_1(t,\ x')\,dt+\text{const}.\ \blacksquare$$

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2.7.2. *Пусть функция u суммируема в конечной области $\Omega\subset E_m$ и абсолютно непрерывна почти на каждом пересечении прямой, параллельной оси x_j, и области Ω. Пусть производная $v_j=\partial u/\partial x_j$ суммируема в Ω. Тогда v_j есть обобщенная производная в Ω от u по x_j.*

Сохраняя обозначения предшествующей теоремы, имеем

$$\forall\varphi\in\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega),\qquad\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx=\int_\Sigma\left\{\int_\lambda u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j\right\}dx'\ \ldots$$

Пусть λ — сечение, на котором функция u абсолютно непрерывна. Интегрируя по частям, найдем

$$\int_\lambda u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j=-\int_\lambda v_j\varphi\,dx_j$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_{\Sigma} \left\{\int\limits_{\lambda} v_j \varphi\, dx_j\right\} dx' = -\int\limits_{\Omega} v_j \varphi\, dx. \blacksquare$$

Следствие 2.7.1. *Если функция $u \in \mathrm{Lip}_1(\Omega)$, то она имеет в Ω всевозможные обобщенные первые производные, и эти производные ограничены.*

§ 8. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Теорема 2.8.1. *Пусть Ω — конечная область пространства E_m и пусть*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{A(x, y)}{r^{\lambda}} \rho(y)\, dy, \tag{1}$$

где $\lambda < m-1$ и $\rho \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем функции $A(x, y)$ и $\partial A(x, y)/\partial x_j$ непрерывны в $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Тогда существует обобщенная производная

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^{\lambda}}\right] \rho(y)\, dy, \tag{2}$$

которая принадлежит классу $C(\overline{\Omega})$, если $(\lambda+1)p' < m$, и классу $L_q(\Omega)$, $q < mp/[m-(m-\lambda-1)p]$, если $(\lambda+1)p' \geqslant m$.

Допустим, что $\rho \in C(\overline{\Omega})$. Имеем $(\lambda+1+\varepsilon < m)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^{\lambda}}\right] = \frac{B(x, y)}{r^{\lambda+1+\varepsilon}}; \quad B(x, y) = r^{\varepsilon}\left[r\frac{\partial A}{\partial x_j} + \lambda A \frac{y_j - x_j}{r}\right],$$

и ясно, что $B \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Так как $\lambda+1+\varepsilon < m$, то интеграл (2) сходится равномерно (ср. доказательство теоремы 1.3.1), формальное дифференцирование законно и формула (2) в этом случае справедлива.

Пусть теперь $\rho \in L_p(\Omega)$. Введем в рассмотрение среднюю функцию $\rho_h(y)$ и интеграл

$$u(x, h) = \int\limits_{\Omega} \frac{A(x, y)}{r^{\lambda}} \rho_h(y)\, dy.$$

Функция $\rho_h(y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$; по доказанному существует производная

$$\frac{\partial u(x, h)}{\partial x_j} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^{\lambda}}\right] \rho_h(y)\, dy.$$

Если $h \to 0$, то по теореме 2.2.3 $\rho_h \to \rho$ в метрике $L_p(\Omega)$. Из теоремы 1.3.2 следует теперь, что, по крайней мере, в метрике $L(\Omega)$ выполняются соотношения $u(x, h) \to u(x)$ и

$$\frac{\partial u(x, h)}{\partial x_j} \to \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{A(x, y)}{r^{\lambda}}\right] \rho(y)\, dy.$$

В силу теоремы 2.5.1, обобщенная производная $\partial u/\partial x_j$ существует и выражается формулой (2). Остальные утверждения вытекают из теорем 1.3.1 и 1.3.2. $\blacksquare$

Глава 3

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА W_p^k

Пусть $\Omega \subset E_m$ — конечная область с кусочно гладкой границей; ниже на Ω будут наложены дополнительные ограничения. Рассмотрим множество функций, которые в Ω суммируемы и имеют всевозможные обобщенные производные данного порядка k, суммируемые в Ω с данной степенью p. Это множество, очевидно, линейно. Введем на нем норму по формуле

$$\|u\|_{p,k} = \|u\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p. \tag{1}$$

Тем самым указанное множество превращается в нормированное пространство, которое называется *соболевским* и обозначается символом $W_p^{(k)}(\Omega)$. То, что норма вводится по формуле (1), не очень существенно: в $W_p^k(\Omega)$ можно ввести любую норму, эквивалентную норме (1). Таковы, например, нормы

$$\|u\|'_{p,k} = \|u\|_1 + \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p\, dx\right\}^{1/p} = \|u\|_1 + \left\{\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p^p\right\}^{1/p} \tag{1a}$$

и

$$\|u\|''_{p,k} = \|u\|_1 + \left\{\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p}; \tag{1б}$$

норма (1б) имеет то преимущество, что она инвариантна относительно поворотов осей координат. Символ $\|\cdot\|_{p,k}$ ниже может означать любую норму, эквивалентную норме (1).

Теорема 3.1.1. *Пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ полное.*

Пусть $u_n \in W_p^{(k)}(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\|u_n - u_s\|_{p,k} \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0$; для определенности примем, что норма в $W_p^k(\Omega)$ задана формулой (1). Из данного предельного соотношения следует, что

$$\|u_n - u_s\|_1 \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0, \quad \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_s\|_p \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0.$$

---

[1] Пространства функций с обобщенными производными были впервые введены С. Л. Соболевым в 1936 г. Довольно полное изложение теории этих пространств вместе с важнейшими приложениями к математической физике дано С. Л Соболевым в его книге [37] (см. также [36]). В дальнейшем теория пространств функций с обобщенными производными интенсивно исследовалась и обобщалась.

При любом p пространство $L_p(\Omega)$ полное, поэтому существуют функции $u \in L_1(\Omega)$ и $v_\alpha \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = k$, такие, что $\|u_n - u\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Формула (3.11) гл. 1 показывает, что одновременно $\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. По теореме 2.5.1 существуют обобщенные производные $D^\alpha u = v_\alpha$, $|\alpha| = k$. Как мы видели, $u \in L_1(\Omega)$ и $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$, $|\alpha| = k$. Отсюда вытекает, что $u \in W_p^k(\Omega)$. При этом

$$\|u_n - u\|_{p,k} = \|u_n - u\|_1 + \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare$$

Можно доказать, что соболевские пространства сепарабельны; см., например, [36].

Заметим, что при $k = 0$ пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ переходит в пространство $L_p(\Omega)$.

В ряде случаев представляют интерес пространства $W_p^k(\Omega)$ с нецелыми значками k; они определяются следующим образом. Пусть $k = l + \lambda$, где $l \geqslant 0$ — целое число, и $0 < \lambda < 1$. В этом случае элементы пространства $W_p^{(k)}(\Omega)$ суть функции из пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$, для которых сходится интеграл

$$J(u) = \int_\Omega \int_\Omega \sum_{|\alpha| = l} \frac{|D^\alpha u(y) - D^\alpha u(x)|^p}{|y - x|^{m + \lambda p}} \, dx \, dy; \qquad (2)$$

норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$ задается формулой

$$\|u\|_{W_p^{(k)}} = \|u\|_{W_p^{(l)}} + [J(u)]^{1/p}. \qquad (3)$$

Вместо нормы (3) можно ввести любую эквивалентную ей норму.

Об использовании пространств $W_p^{(k)}$ с нецельными значками k см. гл. 17; в последующих параграфах настоящей главы рассматриваются только целые k.

Понятие пространств $W_p^{(k)}$ можно распространить и на тот случай, когда рассматриваются функции, заданные не в области евклидова пространства, а на некотором достаточно гладком многообразии. Пусть Γ — m-мерное многообразие. Допустим, что его можно представить как объединение конечного числа подмногообразий той же размерности: $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$, $N < \infty$, и каждое из подмногообразий Γ_j можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на область D_j евклидова пространства E_m с помощью преобразования $\xi = \varphi_j(x)$ ($\xi \in \Gamma$, $x \in E_m$), которое $[k]$ раз непрерывно дифференцируемо в $\bar{D}_j$. Будем говорить, что $u \in W_p^{(k)}(\Gamma)$, если $u(\varphi_j) \in W_p^{(k)}(D_j)$; $j = 1, 2, \ldots, N$. Норму в $W_p^{(k)}(\Gamma)$ можно определить, например, формулой

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} \|u(\varphi_j)\|_{W_p^{(k)}(D_j)}.$$

§ 2. СОБОЛЕВСКОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО

Область называется *звездной* относительно некоторой точки, если любой исходящий из этой точки луч имеет одну и только одну общую точку с границей данной области. Область называется звездной относительно некоторого точечного множества, если она звездная относительно каждой точки этого множества.

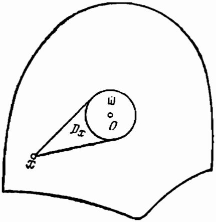

Рис. 1

Рассмотрим область Ω, звездную относительно некоторого шара Ш (рис. 1), радиус которого обозначим через a. Поместим начало координат в центре этого шара и обозначим $v(y)=\omega_a(|y|)$, где ω_a — усредняющее ядро, определяемое формулами (1.1) и (1.2) гл. 2.

Пусть x и y — произвольные точки пространства E_m. Обозначим через Θ орт направления от точки x к точке y, через Θ_j — проекцию этого орта на ось x_j. Как обычно, положим $r=|y-x|$. Всякую функцию от x и y можно рассматривать как функцию от x, r и Θ, и наоборот. В соответствии с этим будем писать, например, $v(y)=v(x,\ r,\ \Theta)$. Введем в рассмотрение функции

$$t(x,\ y)=t(x,\ r,\ \Theta)=-\int_r^\infty v(x,\ \rho,\ \Theta)\,\rho^{m-1}\,d\rho \tag{1}$$

и

$$z(x,\ y)=z(x,\ r,\ \Theta)=\frac{1}{(k-1)!}\,r^{k-1}t(x,\ r,\ \Theta). \tag{2}$$

Функции $t(x,\ y)$ и $z(x,\ y)$ отличны от нуля только тогда, когда точка y лежит в области D_x, ограниченной сферой ∂Ш и касательным к ней конусом с вершиной в x; если $x\in$ Ш, то область D_x совпадает с Ш. Вне и на поверхности области D_x указанные функции равны нулю всюду, кроме точки $y=x$, в которой функция $t(x,\ y)$ становится неопределенной.

Пусть функция $u(x)\in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, $k\geqslant 1$. Построим функцию $U(x,\ r,\ \Theta)$, которую определим так: если $x\in\Omega$, $y\in\overline{\Omega}$, то

$$U(x,\ r,\ \Theta)=u(y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial r^{k-1}}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^{k-2}z}{\partial r^{k-2}}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}u}{\partial r^{k-1}}z; \tag{3}$$

если же $x\in\overline{\Omega}$, $y\,\overline{\in}\,\overline{\Omega}$, то $U(x,\ r,\ \Theta)=0$. Дифференцируя формулу (3), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial r}=u(y)\frac{\partial^k z}{\partial r^k}+(-1)^{k-1}\frac{\partial^k u}{\partial r^k}z. \tag{4}$$

Если в (3) положить $r=0$, то справа исчезнут все слагаемые, кроме первого:

$$U(x,\ 0,\ \Theta)=u(x)\,t(x,\ 0,\ \Theta)=-u(x)\int_0^\infty v(x,\ r,\ \Theta)\,r^{m-1}\,dr. \tag{5}$$

Равенство (4) проинтегрируем по r в пределах $(0, \infty)$. Используя соотношение (5), найдем

$$u(x)\int_0^\infty v(x, r, \Theta)\, r^{m-1}\, dr = \int_0^\infty \left[u(y)\frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right] dr.$$

Умножим последнее равенство на элемент dS_1 меры поверхности единичной сферы с центром в x и проинтегрируем по этой сфере:

$$u(x)\int_{E_m} v(x, r, \Theta)\, dy = \int_{E_m}\left[u\frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right]\frac{dy}{r^{m-1}}. \tag{6}$$

Но по свойству 3 усредняющего ядра (гл. 2, § 1)

$$\int_{E_m} v(x, r, \Theta)\, dy = \int_{E_m} v(y)\, dy = \int_{E_m} \omega_a(\| y \|)\, dy = 1.$$

Справа в (6) достаточно интегрировать не по E_m, а по Ω, и мы приходим к интегральному тождеству С. Л. Соболева:

$$u(x) = \int_\Omega u(y)\frac{\partial^k z}{\partial r^k}\frac{dy}{r^{m-1}} + (-1)^{k-1}\int_\Omega z\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\frac{dy}{r^{m-1}}. \tag{7}$$

Подробнее исследуем тождество (7). Прежде всего докажем, что первый интеграл в этой формуле представляет собой полином относительно x степени не выше $k-1$; коэффициенты этого полинома суть интегралы от произведений функции $u(y)$ на некоторые ограниченные функции от y.

По формуле Лейбница

$$\frac{\partial^k z}{\partial r^k} = \sum_{j=1}^{k} c_j r^{j-1}\frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}}\left[r^{m-1}v(y)\right] = \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=0}^{j-1} c_{js} r^{m+s-1}\frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s}; \tag{8}$$

здесь c_j и c_{js} — некоторые постоянные. Далее,

$$\frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s} = \sum_{|\alpha|=s}\frac{s!}{\alpha!} D_y^\alpha v(y)\, \Theta^\alpha. \tag{9}$$

Но $\Theta_j = (y_j - x_j)/r$; отсюда ясно, что произведение $r^s\Theta^\alpha$ есть полином относительно x и y степени s по координатам каждой из этих точек. Теперь из формулы (8) легко усмотреть, что $\partial^k z/\partial r^k = r^{m-1}P_{k-1}(x, y)$, где $P_{k-1}(x, y)$ есть полином степени не выше $k-1$ по координатам точки x, и коэффициенты этого полинома суть функции от y, непрерывные в $\overline{\Omega}$:

$$P_{k-1}(x, y) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} b_\alpha(y)\, x^\alpha; \quad b_\alpha \in C(\overline{\Omega}).$$

Из формулы (9) видно, что функции $b_\alpha(y)$ линейно зависят от производных функции $v(y)$ и, следовательно, $b_\alpha(y) = 0$, если

$y \overline{\in}$ Ш. Подставив выражение $\partial^k z/\partial r^k$ в первый интеграл формулы (7), видим, что

$$\int\limits_{\Omega} u(y)\, \frac{\partial^k z}{\partial r^k}\, \frac{dy}{r^{m-1}} = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int\limits_{\Omega} b_\alpha(y)\, u(y)\, dy. \blacksquare \tag{10}$$

Рассмотрим второй интеграл в формуле (7). Аналогично формуле (9) имеем

$$\frac{\partial^k u}{\partial r^k} = \sum_{|\alpha|=k} D_y^\alpha u(y)\, \Theta^\alpha;$$

отсюда

$$\int\limits_{\Omega} z\, \frac{\partial^k u}{\partial r^k}\, \frac{dy}{r^{m-1}} = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y)\, dy, \tag{11}$$

где

$$A_\alpha(x, y) = \frac{1}{(k-1)!} t(x, r, \Theta)\, \Theta^\alpha \tag{12}$$

суть ограниченные функции от x и y, равные нулю, если $y \overline{\in} D_x$, и бесконечно дифференцируемые, если $y \neq x$. Отметим еще, что, как функции от x, r и Θ, A_α бесконечно дифференцируемы при всех значениях этих аргументов. Интегральное тождество (7) можно теперь представить в виде

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int\limits_{\Omega} b_\alpha(y)\, u(y)\, dy + \\ + \sum_{|\alpha|=k} \int\limits_{\Omega} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y)\, dy, \tag{13}$$

или, учитывая свойства функций $b_\alpha(y)$ и $A_\alpha(x, y)$, в виде

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x_\alpha \int\limits_{Ш} b_\alpha(y) u(y)\, dy + \sum_{|\alpha|=k} \int\limits_{D_x} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u(y)\, dy. \tag{14}$$

Как видно, тождество С. Л. Соболева позволяет выразить функцию через ее производные данного порядка k и некоторый полином степени не выше $k-1$.

Интегральное тождество С. Л. Соболева получено в предположении, что $u \in C^{(k)}(\Omega)$. Нетрудно, однако, распространить это тождество на функции из пространства $W_p^{(k)}(\Omega)$, где p — любое число из промежутка $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пусть $u(x)$ — такая функция, $u_h(x)$ — соответствующая средняя функция. К функции $u_h(x)$ соболевское тождество применимо, и по формуле (14)

$$u_h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} x^\alpha \int\limits_{Ш} b_\alpha(y)\, u_h(y)\, dy + \\ + \sum_{|\alpha|=k} \int\limits_{D_x} \frac{A_\alpha(x, y)}{r^{m-k}} D_y^\alpha u_h(y)\, dy. \tag{15}$$

По теореме 2.2.3 $u_h(y) \to u(y)$ в метрике $L_1(\Omega)$ и тем более в метрике L_1 (Ш). Интегралы первой суммы в (15) суть функционалы, ограниченные в L_1 (Ш), и в них можно перейти к пределу под знаком интеграла. Далее, в силу теорем 2.2.3 и 2.4.1, $D^\alpha u_h \xrightarrow[h \to 0]{} D^\alpha u$ в метрике $L_p(\Omega')$, где Ω' — любая внутренняя подобласть Ω. Интегралы второй суммы на основании теоремы 1.3.2 суть операторы над $D^\alpha u$, ограниченные в $L_p(\Omega)$ и тем более в $L_p(\Omega')$, и здесь также можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Пусть точка x пробегает некоторую внутреннюю подобласть Ω''. Тогда точка y пробегает множество $\Omega' = \bigcup_{x \in \Omega'} D_x$, которое также является внутренней подобластью области Ω. Переходя к пределу в (15) при $h \to 0$, найдем, что почти всюду в Ω'' тождество (14) справедливо для функций из $W_p^{(k)}(\Omega)$. Но подобласть Ω'' произвольна, поэтому указанное тождество справедливо почти всюду в Ω.

Условимся считать, что во всех точках области Ω, в которых интегралы формулы (14) сходятся, значения функции $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ определяются этой формулой. Такое условие равносильно замене функции $u(x)$ на эквивалентную; в результате такой замены тождество (14) оказывается верным не просто почти всюду, а всюду, где правая часть названного тождества имеет смысл.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Пусть X и Y — два банаховых пространства и пусть все элементы пространства X принадлежат также и пространству Y. Тогда говорят, что пространство X вложено (или вкладывается) в пространство Y. Обозначим через V оператор, который любому элементу $u \in X$ приводит в соответствие тот же элемент u, но рассматриваемый уже как элемент пространства Y. Оператор V называется *оператором вложения* пространства X в пространство Y; очевидно, $D(V) = X$ и $R(V) \subset Y$. «Теоремами вложения» принято называть теоремы об ограниченности или о полной непрерывности оператора вложения.

Говорят, что X вкладывается в Y ограниченно или вполне непрерывно, если ограничен или вполне непрерывен соответствующий оператор вложения.

Ниже в этом параграфе принимается, что Ω — конечная область пространства E_m, звездная относительно некоторого шара.

Теорема 3.3.1. *Если $pk > m$, то $W_p^{(k)}(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $C(\bar{\Omega})$.*

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из $W_p^{(k)}(\Omega)$. Первый и второй члены соболевского тождества (2.7) обозначим через $u_1 = V_1 u$ и $u_2 = V_2 u$ соответственно. Оператор V_1, очевидно, действует из $W_p^{(k)}(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$; он конечномерный, а входящие в него функционалы ограничены, поэтому оператор V_1 вполне непрерывен.

Второй член формулы (2.7) запишем в виде

$$(V_2u)(x) = u_2(x) = \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \frac{r^\varepsilon A_\alpha(x, y)}{r^{m-k+\varepsilon}} D_y^\alpha u(y)\, dy; \tag{1}$$

постоянную ε выберем положительной и столь малой, чтобы было $p(k-\varepsilon) > m$. Если положить $[r^\varepsilon A_\alpha(x, y)]_{y=x} = 0$, то числитель под каждым из интегралов (1) будет непрерывен в $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$. Положив $\lambda = m-k+\varepsilon$, найдем, что $\lambda p' < m$. По теореме 1.3.1 $u_2 \in C(\bar{\Omega})$ и V_2 вполне непрерывен как оператор из $W_p^{(k)}(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$. Теперь $u = (u_1 + u_2) \in C(\bar{\Omega})$ и, по определению, пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ вкладывается в $C(\bar{\Omega})$. Очевидно, оператор вложения $V = V_1 + V_2$; он вполне непрерывен как сумма двух вполне непрерывных операторов.

Из полной непрерывности оператора вложения вытекает его ограниченность: если $pk > m$, то существует такая постоянная B, что

$$\|u\|_C \leqslant B \|u\|_{p,k}; \tag{2}$$

здесь $\|\cdot\|_C$ означает норму в $C(\bar{\Omega})$.

Теорема 3.3.2. *Пусть $pk \leqslant m$ и пусть $g_s \subset \Omega$ — кусочно гладкое многообразие s измерений, где $m - kp < s \leqslant m$. Тогда $W_p^{(k)}(\Omega)$ ограниченно вкладывается в $L_q(g_s)$, где*

$$1 \leqslant q < q_s = \frac{sp}{m-kp}. \tag{3}$$

Эта теорема непосредственно вытекает из интегрального тождества С. Л. Соболева (2.7) и из теоремы 1.3.2: если положить $m - k = \lambda$, то неравенство (3) переходит в неравенство (3.7) гл. 1.

Ограниченность вложения означает существование такой постоянной B_1, что

$$\|u\|_{L_q(g_s)} \leqslant B_1 \|u\|_{p,k}. \tag{4}$$

Из теоремы 1.4.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Если $pk \leqslant m$, то $W_p^{(k)}(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $L_q(\Omega)$, где*

$$1 \leqslant q < q'_m = \frac{mp}{m-kp}. \tag{5}$$

Замечания. 1. Если $pk \leqslant m$ и $1 \leqslant q < q_s$, то $W_p^{(k)}(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $L_q(g_s)$; см. [36], [37].

2. Можно доказать, что пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ вкладывается ограниченно в $L_{q_s}(g_s)$; для $s = m$ доказательство дано ниже, в § 8. Это вложение не вполне непрерывно; см. [1].

Теорема 3.3.4. *Если функция $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, то она имеет в Ω всевозможные обобщенные производные любого порядка $l < k$. Про-*

странство $W_p^{(k)}(\Omega)$ *вполне непрерывно вкладывается в* $C^{(l)}(\Omega)$, *если* $(k-l)p>m$, *и в* $W_q^{(l)}(\Omega)$, *если* $(k-l)p\leqslant m$ *и* $1\leqslant q<q_m$.

Обратимся к соболевскому интегральному тождеству, записанному в форме (2.13). Пусть функция $u\in C^{(k)}(\Omega)$. Покажем, что соотношение (2.13) можно l раз дифференцировать под знаком интеграла, если $l<k$. Напомним, что правая часть формулы (2.12) бесконечно дифференцируема по x, r, Θ. Отметим еще, что

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}=-\frac{y_j-x_j}{r}=-\Theta_j,\qquad \frac{\partial\Theta_i}{\partial x_j}=\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{r^3}.$$

Дифференцируя далее, легко убедиться, что $D_x^\beta r=O(r^{1-|\beta|})$, $D_x^\beta\Theta=O(r^{-|\beta|})$ и что справедливо представление

$$D_x^\beta A_\alpha(x,\ y)=r^{-l}C_{\alpha\beta}(x,\ y),\qquad l=|\beta|,$$

где функции $C_{\alpha\beta}$ ограничены и при $x\neq y$ бесконечно дифференцируемы.

Формально дифференцируя правую часть тождества (2.13), получим выражение

$$\sum_{|\alpha|=0}^{k-1}D^\beta x^\alpha\int_\Omega b_\alpha(y)\,u(y)\,dy+\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega\frac{C_{\alpha\beta}(x,\ y)}{r^{m-k+l}}D_y^\alpha u(y)\,dy. \tag{6}$$

Интегралы во второй сумме представим в виде

$$\int_\Omega\frac{r^\varepsilon C_{\alpha\beta}(x,\ y)}{r^{m-k+l+\varepsilon}}D_y^\alpha u(y)\,dy, \tag{7}$$

где ε — постоянная, $0<\varepsilon<1$. Так как $l<k$, то $m-k+l+\varepsilon<m$. Далее, если положить $[r^\varepsilon C_{\alpha\beta}(x,\ y)]_{x=y}=0$, то функция $r^\varepsilon C_{\alpha\beta}(x,\ y)$ будет непрерывной при всех значениях x и y. А тогда, как было выяснено при доказательстве теоремы 1.3.1, интеграл (7) сходится равномерно, дифференцирование под знаком интеграла законно, и мы приходим к формуле

$$D^\beta u(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{k-1}D^\beta x^\alpha\int_\Omega b_\alpha(y)\,u(y)\,dy+\\ +\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega\frac{C_{\alpha\beta}(x,\ y)}{r^{m-k+l}}D_y^\alpha u(y)\,dy. \tag{8}$$

Формула (8) пока доказана для $u\in C^{(k)}(\bar\Omega)$. Пусть теперь $u\in W_p^{(k)}(\Omega)$. Напишем формулу (8) для средней функции $u_h(x)$ и устремим h к нулю. Как и при выводе интегрального тождества (2.7), можно обосновать предельный переход под знаком интеграла и прийти к выводу, что при любом мультииндексе β, $|\beta|<k$, существует обобщенная производная $D^\beta u(x)$, определяемая формулой (8). При этом, если $(k-l)p>m$, то эта производная непрерывна, если же $(k-l)p\leqslant m$ и $q<q_m$, то $D^\beta u(x)$ суммируема со степенью q по Ω. Оба последних утверждения доказываются точно так же, как теоремы 3.3.1 и 3.3.2.

Таким образом, пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ вкладывается в $W_p^{(l)}(\Omega)$, $l<k$. Утверждение о полной непрерывности вложения доказывается так же, как в только что упомянутых теоремах настоящего параграфа.

§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА БОЛЕЕ ОБЩИЕ ОБЛАСТИ

Пусть Ω — конечная область пространства E_m, которую можно представить в виде объединения $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Omega_j$ конечного числа n областей Ω_j, звездных относительно некоторого шара, своего для каждой области. Покажем, что все теоремы предшествующего параграфа верны для области Ω.

Рассуждения для всех теорем § 3 аналогичны; проведем их, например, для теоремы 3.3.1. Пусть $u\in W_p^{(k)}(\Omega)$. По теореме 2.4.2, $u\in W_p^{(k)}(\Omega_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$. По условию теоремы 3.3.1, $pk>m$, а тогда функция $u(x)$ непрерывна в любой из замкнутых областей $\bar{\Omega}_j$ и, следовательно, в их объединении $\bar{\Omega}$. Этим доказано, что при $pk>m$ пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ вкладывается в $C(\bar{\Omega})$. Докажем, что это вложение вполне непрерывно.

Пусть M — множество функций, ограниченное в норме $W_p^{(k)}(\Omega)$. Тогда оно ограничено и в норме $W_p^{(k)}(\Omega_j)$ при любом j — это сразу вытекает из формулы (1.1). По теореме 3.3.1 вложение $W_p^{(k)}(\Omega_1)$ в $C(\bar{\Omega}_1)$ вполне непрерывно, поэтому из M можно выделить последовательность $\{u_{i1}\}$, равномерно сходящуюся в $\bar{\Omega}_1$. Будучи частью множества M, эта последовательность ограничена в $W_p^{(k)}(\Omega_2)$; в силу той же теоремы 3.3.1 из нее можно выделить подпоследовательность, которую обозначим через $\{u_{i2}\}$ и которая равномерно сходится в $\bar{\Omega}_2$; очевидно, новая последовательность равномерно сходится и в $\bar{\Omega}_1$. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете выделим из M последовательность $\{u_{in}\}$, которая равномерно сходится в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}_j$, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Но тогда эта последовательность равномерно сходится и в $\bar{\Omega}$. Этим доказана полная непрерывность вложения $W_p^{(k)}(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим несколько примеров. Если $u\in W_2^1(\Omega)$ и $m=2$, то $u\in L_p(\Omega)$, и одновременно $u\in L_p(\partial\Omega)$, где p — любое число. Если $u\in W_2^1(\Omega)$ и $m=3$, то $u\in L_{6-\varepsilon}(\Omega)$, и $u\in L_{4-\varepsilon}(\partial\Omega)$, $\forall\varepsilon>0$. Если $m=2$ или $m=3$ и $u\in W_2^2(\Omega)$, то $u\in C(\bar{\Omega})$; при $m=4$ в этом случае нельзя утверждать непрерывности функции u, но можно утверждать, что она суммируема в Ω с любой степенью.

Во всех перечисленных случаях любое множество функций, ограниченное в метрике $W_2^1(\Omega)$ или $W_2^2(\Omega)$, компактно в соответствующей метрике $L_q(\Omega)$, $L_q(\partial\Omega)$ или $C(\bar{\Omega})$. Так, например, при $m=3$ множество, ограниченное в $W_2^1(\Omega)$, компактно в $L_{6-\varepsilon}(\Omega)$

и в $L_{4-\varepsilon}(\partial\Omega)$. При произвольном m величина $(m-1)p/(m-kp)\geqslant p$, так как $kp\geqslant 1$. Если $u\in W_p^{(k)}(\Omega)$, то во всяком случае $u\in L_p(\partial\Omega)$.

Частными случаями теорем вложения являются теорема 2.6.1 и следствие из этой теоремы.

Замечание. Можно доказать, что в рассмотренных выше примерах иногда допустимо отбросить вычитаемое ε. Так, если $m=3$, то из включения $u\in W_2^{(1)}(\Omega)$ вытекает, что $u\in L_6(\Omega)$.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_N$ — независимые переменные, которые могут принимать любые значения, и число N конечно. Будем говорить, что непрерывная функция $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ обладает свойствами нормы, если:

а) $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)\geqslant 0$, причем $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)=0$ тогда и только тогда, когда $t_1=t_2=\ldots=t_N=0$;

б) $f(\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_N)=|\lambda|f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$;

в) $f(t_1+\tau_1, t_2+\tau_2, \ldots, t_N+\tau_N)\leqslant f(t_1, t_2, \ldots, t_N)+f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)$.

Теорема 3.5.1[1]. *Пусть N означает число различных одночленов степени $\leqslant k-1$. Пусть, далее, $l_1, l_2, \ldots, l_N$ — линейные функционалы, ограниченные в метрике $W_p^{(k)}(\Omega)$, которые не обращаются одновременно в нуль ни на одном многочлене степени $\leqslant k-1$, кроме тождественного нуля. Пусть, наконец, $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ — функция, обладающая свойствами нормы. Тогда норма*

$$\|u\|_{p,k}^{*}=f(l_1u, l_2u, \ldots, l_Nu)+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p \tag{1}$$

эквивалентна норме (1.1).

Непрерывная функция f ограничена на N-мерной единичной сфере. Пусть при $\sum_{j=1}^{N} t_j^2=1$ будет $f(t_1, t_2, \ldots, t_N)\leqslant A$. По свойству б), имеем

$$f(l_1u, l_2u, \ldots, l_Nu)\leqslant A\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(l_ju)^2},$$

и так как функционалы l_j ограничены в норме (1.1), то

$$f(l_1u, l_2u, \ldots, l_Nu)\leqslant B_0\|u\|_{p,k}, \quad B_0=\mathrm{const};$$

но тогда

$$\|u\|_{p,k}^{*}\leqslant (B_0+1)\|u\|_{p,k}. \tag{2}$$

Докажем теперь, что справедливо и неравенство обратного характера

$$\|u\|_{p,k}\leqslant C\|u\|_{p,k}^{*}, \quad C=\mathrm{const}. \tag{3}$$

[1] Доказательство этой теоремы мы проводим, следуя книге [36].

Допустим противное. Тогда существует последовательность $u_n \in W_p^{(k)}(\Omega)$, $n=1, 2, \ldots$, для которой $\|u_n\|_{p,k} \geqslant n\|u_n\|^*_{p,k}$. Положим $v_n = u_n/\|u_n\|_{p,k}$, тогда $\|v_n\|_{p,k}=1$ и $\|v_n\|^*_{p,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Последовательность $\{v_n\}$ ограничена в метрике $W_p^{(k)}(\Omega)$; по теореме 3.3.3 она компактна в $L_1(\Omega)$, и можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_i}\}$, сходящуюся в $L_1(\Omega)$. Пусть $v(x)$ — предел этой подпоследовательности: $\|v_{n_i} - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из того факта, что $\|v_n\|^*_{p,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, вытекает, что $\|D^\alpha v_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha|=k$. В силу теоремы 2.5.1 функция $v(x)$ имеет всевозможные обобщенные производные порядка k, и все эти производные равны нулю. На основании формулы (2.13) $v(x)$ есть полином степени $\leqslant k-1$.

Соотношению $\|D^\alpha v_{n_i}\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha|=k$ можно теперь придать вид $\|D^\alpha v_{n_i} - D^\alpha v\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|\alpha|=k$. Вместе с соотношением $\|v_{n_i} - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ оно дает $\|v_{n_i} - v\|_{p,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; отсюда $\|v\|_{p,k}=1$. С другой стороны,

$$\|v_{n_i} - v\|^*_{p,k} \leqslant (B_0+1)\|v_{n_i} - v\|_{p,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

поэтому $\|v\|^*_{p,k} = \lim\limits_{n\to\infty}\|v_{n_i}\|^*_{p,k} = 0$; отсюда $f(l_1 v, l_2 v, \ldots, l_N v)=0$. Но тогда $l_1 v = l_2 v = \ldots = l_N v = 0$. Так как v есть полином степени $\leqslant k-1$, то необходимо $v(x)\equiv 0$. Это противоречит тому, что $\|v\|_{p,k}=1$. ■

Иногда бывает удобно сравнивать не нормы (1) и (1.1), а некоторые другие. Приведем один пример. Как было отмечено в § 1, норма (1.1) эквивалентна норме (1.1б). Далее, из теоремы 3.3.2 вытекает, что $\|u\|_p \leqslant c\|u\|_{p,k}$, $c=\mathrm{const}$; отсюда

$$\|u\|_p + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p} \leqslant (c+1)\|u\|_{p,k}.$$

С другой стороны, по формуле (3.11) гл. 1

$$\|u\|_{p,k} = \|u\|_1 + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant |\Omega|^{1-1/p}\|u\|_p + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{17p} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left[\|u\|_p + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^2 u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p}\right].$$

Из полученных соотношений следует, что норма, равная величине

$$\|u\|_p + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p}, \tag{4}$$

эквивалентна норме (1.1). В то же время норма (1), очевидно, эквивалентна следующей:

$$f(l_1 u, l_2 u, \ldots, l_N u) + \left\{\int\limits_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right|^{p/2} dx\right\}^{1/p}. \tag{5}$$

Из теоремы настоящего параграфа следует, что нормы (4) и (5) эквивалентны.

Если Ω есть объединение областей, каждая из которых — звездная относительно некоторого шара, и $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, то, по теореме 3.3.4, производные $D^\gamma u$, $0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1$, определены почти всюду (по мере $\partial\Omega$) на $\partial\Omega$ и суммируемы там, по крайней мере, со степенью p. Для краткости обозначим $\partial\Omega = \Gamma$. Докажем, что функционалы

$$l_\gamma u = \int_\Gamma D^\gamma u \, d\Gamma; \quad 0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1 \tag{1}$$

ограничены в метрике $W_p^{(k)}(\Omega)$. Для определенности примем, что норма в $W_p^{(k)}(\Omega)$ задана формулой (1.1).

По неравенству Буняковского

$$|l_\gamma u| \leqslant \left\{\int_\Gamma |D^\gamma u|^p \, d\Gamma\right\}^{1/p} \left\{\int_\Gamma d\Gamma\right\}^{1/p'} = |\Gamma|^{1/p'} \|D^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)}.$$

Обозначим $|\gamma| = l$. По условию, $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$, а $l = |\gamma| \leqslant k-1$, поэтому $D^\gamma u \in W_p^{(k-l)}(\Omega)$ и $k - l \geqslant 1$. По теореме 3.3.2 имеем

$$\|D^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant B_1 \|D^\gamma u\|_{k,\,k-l} =$$
$$= B_1 \left\{\|D^\gamma u\|_1 + \sum_{|\beta| = k-l} \|D^{\beta+\gamma} u\|_p\right\}, \quad B_1 = \text{const}. \tag{2}$$

Далее, на основании теоремы 3.3.3, $\|D^\gamma u\|_1 \leqslant B_2 \|u\|_{p,k}$; $B_2 = \text{const}$. Кроме того,

$$\sum_{|\beta| = k-l} \|D^{\beta+\gamma} u\|_p \leqslant \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_p \leqslant \|u\|_{p,k}.$$

Подставив это в формулу (2), найдем, что $\|D^\gamma u\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant B_1(B_2 + 1)\|u\|_{p,k}$ и окончательно

$$|l_\gamma u| \leqslant C\|u\|_{p,k}; \quad C = B_1(B_2+1)|\Gamma|^{1/p'}.$$

Наше утверждение доказано.

Очевидно, также, что число функционалов (1) равно числу различных одночленов степени $\leqslant k-1$ и что эти функционалы не обращаются одновременно в нуль ни на одном полиноме степени $\leqslant k-1$, кроме тождественного нуля. Из теоремы 3.5.1 следует теперь, что норма

$$\|u\|_{p,k}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \left|\int_\Gamma D^\alpha u \, d\Gamma\right| + \left\{\int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p} \tag{3}$$

эквивалентна норме (5.4) и, следовательно, может быть принята за норму в $W_p^{(k)}(\Omega)$.

Введем теперь в рассмотрение множество функций из $W_p^{(k)}(\Omega)$, удовлетворяющих на границе области Ω условиям

$$D^\gamma u|_\Gamma = 0, \quad 0 \leqslant |\gamma| \leqslant k-1. \tag{4}$$

Это множество, как нетрудно видеть, образует в $W_p^{(k)}(\Omega)$ подпространство; обозначим его символом $\overset{\circ}{W}{}_{p,0}^{(k)}(\Omega)$. Формула (3) показывает, что если в $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ ввести норму по формуле

$$\|u\|_{p,k}^{**}=\left\{\int_\Omega\left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}, \tag{5}$$

то в $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ эта норма будет эквивалентна норме (5.4). Отсюда сразу вытекает неравенство

$$\|u\|_p\leqslant C\left\{\int_\Omega\left[\sum_{|\alpha|=k}(D^\alpha u)^2\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p};\ \forall u\in W_{p,0}^{(k)}(\Omega),\ C=\mathrm{const}. \tag{6}$$

При $k=1$, $p=2$ неравенство (6) переходит в так называемое неравенство Фридрихса

$$\|u\|_2^2=\int_\Omega u^2(x)\,dx\leqslant\varkappa^2\int_\Omega\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2dx;$$

$$\forall u\in W_{2,0}^{(1)}(\Omega),\ \varkappa=C^2=\mathrm{const}.\ \blacksquare \tag{7}$$

Рассмотрим пространство $W_2^{(1)}(\Omega)$. В данном случае $k=1$, и существует только один линейно независимый одночлен степени меньшей, чем k; этот одночлен тождественно равен единице Функционал $\int_\Omega u\,dx$ ограничен в метрике $W_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega u\,dx\right|\leqslant\int_\Omega|u|\,dx=\|u\|_1\leqslant\|u\|_{2,1},$$

и отличен от нуля при $u\equiv1$, поэтому величину

$$\left|\int_\Omega u\,dx\right|+\left\{\int_\Omega\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2dx\right\}^{1/2} \tag{8}$$

можно принять за норму в $W_2^{(1)}(\Omega)$, и нормы (8) и $\|\cdot\|_{2,1}$ эквивалентны в $W_2^{(1)}(\Omega)$. По той же теореме 3.3.2

$$\|u\|_2\leqslant C'\left[\left|\int_\Omega u\,dx\right|+\left\{\int_\Omega\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2dx\right\}^{1/2}\right];\quad C'=\mathrm{const}.$$

Последнее неравенство возведем в квадрат. Воспользовавшись элементарным неравенством $(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)$, придем к неравенству Пуанкаре

$$\int_\Omega u^2\,dx\leqslant C\left[\left(\int_\Omega u\,dx\right)^2+\int_\Omega\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2dx\right]; \tag{9}$$

здесь $C=2C'^2$.$\blacksquare$

Неравенства Фридрихса и Пуанкаре выведены здесь в предположении, что область Ω есть объединение конечного числа областей, каждая из которых — звездная относительно некоторого шара. В более общих условиях неравенство Пуанкаре может оказаться неверным (см. [17]). Неравенство Фридрихса верно для любой конечной области; надо только должным образом определить понятие «функция $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ обращается в нуль на границе области». Ниже проводятся соответствующие рассуждения.

Пусть Ω — любая конечная область пространства E_m, и пусть $u(x)$ — функция класса $C^{(1)}(\bar{\Omega})$, которая на $\partial\Omega$ обращается в нуль. Систему координат выберем так, чтобы область Ω оказалась расположенной в той части пространства, где все координаты положительны. Поместим эту область внутрь некоторого параллелепипеда Π (рис. 2), определяемого неравенствами $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$; $k = 1, 2, \ldots, m$. Доопределим функцию $u(x)$, положив ее тождественно равной нулю в области $\Pi \setminus \Omega$. После этого функция $u(x)$ останется непрерывной, так как $u|_\Gamma = 0$. Производные этой функции могут терпеть разрыв при переходе через границу $\partial\Omega$. Для таких функций справедлива формула Ньютона — Лейбница.

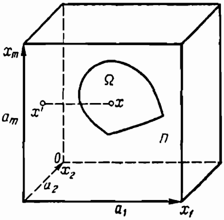

Рис 2

В параллелепипеде Π возьмем точку $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и спроектируем ее на координатную плоскость, ортогональную оси Ox_1. Проекцию обозначим через x'. Можно рассматривать x' как точку $(m-1)$-мерного евклидова пространства с координатами $x_2, \ldots, x_m$. Будем пользоваться обозначением $x = (x_1, x')$ и ему аналогичными. По формуле Ньютона — Лейбница

$$u(x) - u(0, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi.$$

Но точка $(0, x')$ лежит вне области Ω, поэтому $u(0, x') = 0$ и $u(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi$. По неравенству Буняковского

$$u^2(x) \leqslant \int_0^{x_1} d\xi \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi \leqslant a_1 \int_0^{a_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по параллелепипеду Π:

$$\int_\Pi u^2(x)\, dx \leqslant a_1^2 \int_0^{a_1} d\xi \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 dx_m =$$

$$= a_1^2 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(x_1, x')}{\partial x_1}\right)^2 dx_m = a_1^2 \int_\Pi \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 dx.$$

Слева и справа отбросим интегралы по $\Pi \setminus \Omega$, равные нулю; кроме того, к подынтегральной функции справа прибавим неотрицательную сумму $\sum_{k=2}^{m} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2$. Это приведет к неравенству

$$\int_{\Omega} u^2(x)\,dx \leqslant a_1^2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx, \tag{10}$$

которое совпадает с неравенством (7) Фридрихса, если положить $\varkappa = a_1^2$.

Неравенство Фридрихса можно распространить на более широкий класс функций. Рассмотрим множество функций, которое обозначим через $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ и которое определяется следующими требованиями: если $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$, то: 1) $u \in L_2(\Omega)$, 2) существуют обобщенные первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, 3) существует последовательность функций $\{u_n\}$, такая, что

$$u_n \in C^{(1)}(\bar{\Omega}), \quad u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|u - u_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

О функциях множества $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ будем говорить, что они обращаются в нуль на $\partial\Omega$.

Множество $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ превращается в гильбертово пространство [1], если ввести норму по формуле

$$\|u\|^2_{\mathring{W}_2^{(1)}} = \int_{\Omega} \left[u^2(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] dx. \tag{12}$$

Если Ω есть объединение конечного числа звездных областей, то $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ можно рассматривать как подпространство пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Пусть теперь $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ и пусть $\{u_n\}$ — описанная выше последовательность. Для функций u_n неравенство Фридрихса справедливо:

$$\int_{\Omega} u_n^2\,dx \leqslant \varkappa^2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{13}$$

Из предельных соотношений (11) вытекает, что $\|u_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u\|_2$, $\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_2$. Теперь предельный переход в (13) приводит к неравенству Фридрихса для любой функции класса $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

[1] Аналогично можно ввести множество и пространство $\mathring{W}_p^{(k)}(\Omega)$ при любых p и k.

Глава 4

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

В настоящей главе мы будем рассматривать функционалы, области определения которых принадлежат вещественному гильбертову пространству. В некоторых случаях (они будут оговариваться особо) будем считать это пространство сепарабельным. Напомним, что банахово пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит плотное счетное множество. Для гильбертова пространства можно дать другое, равносильное определение: гильбертово пространство называется сепарабельным, если в нем есть полная счетная ортонормированная система. Одно из важнейших сепарабельных гильбертовых пространств — это пространство $L_2(\Omega)$, где Ω — измеримое множество в конечномерном пространстве.

Пусть дано гильбертово пространство H. Рассмотрим в H *билинейный функционал* $\Phi(u, v)$ — так называется функционал, зависящий от двух элементов пространства H и обладающий следующим свойством: при фиксированном v — это линейный функционал от u:

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi(u_1, v) + \alpha_2 \Phi(u_2, v), \tag{1}$$

а при фиксированном u — линейный функционал от v:

$$\Phi(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(u, v_1) + \alpha_2 \Phi(u, v_2). \tag{2}$$

В равенствах (1) и (2) α_1 и α_2 суть вещественные числа.

Мы будем рассматривать только *симметричные билинейные функционалы*, т. е. такие, для которых

$$\Phi(u, v) = \Phi(v, u). \tag{3}$$

Простейший билинейный симметричный функционал — это скалярное произведение (u, v) элементов u и v.

Однородным квадратичным функционалом или *квадратичной формой* называется выражение $\Phi(u, u)$, где $\Phi(u, v)$ — симметричный билинейный функционал. Для краткости будем писать $\Phi(u)$ вместо $\Phi(u, u)$.

Выведем простое и важное соотношение, которому удовлетворяет любая квадратичная форма. Пусть $\Phi(u, v)$ — билинейный функционал, α_1, α_2, β_1, β_2 — числа. Применяя последовательно формулы (1) и (2), получим

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \\ = \alpha_1\beta_1 \Phi(u_1, v_1) + \alpha_1\beta_2 \Phi(u_1, v_2) + \alpha_2\beta_1 \Phi(u_2, v_1) + \alpha_2\beta_2 \Phi(u_2, v_2).$$

Если функционал Φ симметричен, то

$$\Phi(u+v)=\Phi(u)+2\Phi(u, v)+\Phi(v). \tag{4}$$

Это и есть искомое соотношение.

Квадратичным функционалом будем называть выражение

$$F(u)=\Phi(u)-l(u), \tag{5}$$

где $\Phi(u)$ — квадратичная форма, $l(u)$ — линейный функционал.

Примеры. 1. Интеграл Дирихле $\Phi(u)=\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$ — квадратичная форма, которая соответствует симметричному билинейному функционалу

$$\Phi(u, v)=\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx.$$

2. Самое простое гильбертово пространство есть вещественная ось. Скалярное умножение здесь — умножение чисел, а норма — абсолютная величина числа. Многочлен второй степени без свободного члена есть квадратичный функционал.

3. Более важный пример, с которым нам придется иметь дело впоследствии, — это *квадратичный функционал*

$$F(u)=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2-2f(x)u\right\}dx. \tag{6}$$

§ 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Во всем последующем мы часто будем рассматривать операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. Говоря о таком операторе, всегда будем предполагать, что A — линейный (т. е. аддитивный и однородный, но, может быть, неограниченный) оператор и что область его определения плотна в H, т. е. $\overline{D(A)}=H$ (здесь черта сверху обозначает замыкание в метрике пространства H).

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, называется *симметричным*, если $\overline{D(A)}=H$ и если для любых $u, v \in D(A)$ справедливо тождество

$$(Au, v)=(u, Av). \tag{1}$$

Если A — симметричный оператор, то (Au, v), где $u, v \in D(A)$ — симметричный билинейный функционал и (Au, u) — квадратичная форма.

Примеры 1 В пространстве $H=L_2(\Omega)$ рассмотрим интегральный оператор

$$Ku=\int\limits_{\Omega}K(x, y)\,u(y)\,dy \tag{2}$$

Предположим, что интеграл кратности $2m$

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}K^2(x, y)\,dx\,dy$$

конечен. Такой оператор определен на всем пространстве. Если $K(x, y) = K(y, x)$, то оператор (2) симметричен. Докажем это.

Составим скалярное произведение

$$(Ku, v) = \int_\Omega v(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy \right\} dx.$$

По теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования:

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(y) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(x)\, dx \right\} dy.$$

Изменим обозначение x на y, а y на x:

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(y, x)\, v(y)\, dy \right\} dx =$$

$$= \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(y)\, dy \right\} dx = (Kv, u) = (u, Kv),$$

так как в вещественном пространстве порядок множителей скалярного произведения можно менять.

2. В пространстве $H = L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3}$$

Пусть $D(A)$ состоит из функций u, удовлетворяющих следующим двум требованиям:

$$u \in C^{(2)}[0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что определенный таким образом оператор A линейный. Докажем, что он симметричный.

Множество $D(A)$ функций из $C^2[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (4), содержит как свою часть плотное в $L_2(0, 1)$ множество функций, финитных на сегменте $[0, 1]$. По следствию 2.2.1 множество $D(A)$ само плотно в $L_2(0, 1)$.

Остается доказать, что оператор A удовлетворяет условию симметричности (1). Для этого составим скалярное произведение (Au, v), где $u, v \in D(A)$, т. е. $u, v \in C^2[0, 1]$ и $u(0) = u(1) = 0$; $v(0) = v(1) = 0$. Интегрируя по частям и учитывая, что внеинтегральные члены исчезают в силу только что написанных краевых условий, получим

$$(Au, v) = -\int_0^1 v(x)\, u''(x)\, dx = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = -\int_0^1 u(x)\, v''(x)\, dx = (u, Av).$$

Симметричный оператор A называется *положительным*, если квадратичная форма $(Au, u) \geqslant 0$ и $(Au, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Например, оператор (3) — (4) положительный. Чтобы убедиться в этом, составим квадратичную форму $(Au, u) = -\int_0^1 u \frac{d^2u}{dx^2}\, dx$. Интегрируя по частям и принимая во внимание условия (4), найдем

$$(Au, u) = \int_0^1 u'^2(x)\, dx \geqslant 0. \tag{5}$$

Пусть $(Au, u) = 0$ и, следовательно, $\int_0^1 u'^2\, dx = 0$. Тогда $u'(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv \text{const}$. Теперь из условий (4) вытекает, что $u(x) \equiv 0$.

Симметричный оператор A называется *положительно определенным*, если

$$\inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} > 0. \tag{6}$$

Это определение равносильно такому: симметричный оператор A называется положительно определенным, если существует такая постоянная $\gamma^2 > 0$, что

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2. \tag{7}$$

Неравенство (7) будем называть *неравенством положительной определенности*.

Очевидно, что всякий положительно определенный оператор одновременно является и положительным. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Докажем, что оператор (3)—(4) положительно определенный. По неравенству Фридрихса (см. гл. 3, формула (6.10))

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 u'^2(x)\,dx.$$

Сопоставив это с формулой (5), получим неравенство $(Au, u) \geqslant \|u\|^2$, которое доказывает наше утверждение. Постоянную в неравенстве положительной определенности можно в данном случае принять равной единице.

Существуют операторы положительные, но не положительно определенные. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример.

Пусть оператор B определяется формулой

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad 0 < x < \infty. \tag{8}$$

Будем рассматривать B как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty)$. За область определения $D(B)$ этого оператора примем множество функций, удовлетворяющих требованиям 1) $u \in C^{(2)}[0, \infty)$, 2) $u(0) = 0$, 3) для каждой функции $u \in D(B)$ существует свое число a_u такое, что $u(x) \equiv 0$ при $x > a_u$. Очевидно, $D(B) \subset L_2(0, \infty)$.

Докажем, что определенный так оператор B положителен, но не положительно определен. Прежде всего докажем, что $\overline{D(B)} = L_2(0, \infty)$. Достаточно доказать, что для любой функции $\varphi \in L_2(0, \infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $u \in D(B)$ такая, что $\|\varphi - u\| < \varepsilon$. Интеграл $\int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx$ конечен, поэтому можно найти числа $\delta > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\int_0^\delta \varphi^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \int_N^\infty \varphi^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Введем функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\delta,\\ \varphi(x), & \delta<x<N,\\ 0, & x\geqslant N.\end{cases}$$

Ясно, что $\psi\in L_2(0,\infty)$; при этом

$$\|\varphi-\psi\|^2=\int_0^\infty(\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx=\int_0^\delta\varphi^2(x)\,dx+\int_N^\infty\varphi^2(x)\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

и, следовательно, $\|\varphi-\psi\|<\varepsilon/2$.

Усредним теперь функцию ψ, взяв радиус усреднения $h<\delta/2$ и положим $u(x)=\psi_h(x)$. Очевидно, $\psi_h(x)\in D(B)$: функция $\psi_h(x)$ бесконечно дифференцируема, обращается в нуль при $x=0$ (более того, при любом $x<\delta/2$); наконец, число a_u можно взять равным $N+\delta/2$. Далее,

$$\|u-\psi\|^2=\int_0^\infty(u(x)-\psi(x))^2\,dx=\int_0^{N+\delta/2}(u(x)-\psi(x))^2\,dx=$$

$$=\int_0^{N+\delta/2}(\psi_h(x)-\psi(x))^2\,dx.$$

По теореме 2.2.3 при достаточно малом h последний интеграл будет меньше, чем $\varepsilon^2/4$, и, следовательно, $\|u-\psi\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Теперь по неравенству треугольника $\|u-\varphi\|\leqslant\|u-\psi\|+\|\psi-\varphi\|<\varepsilon$, и наше утверждение доказано.

Легко доказать, что оператор B симметричен. В самом деле, пусть $u,\ v\in D(B)$, следовательно, каждая из функций $u,\ v$ удовлетворяет условиям 1) — 3).

Составим билинейный функционал

$$(Bu,\ v)=-\int_0^\infty v\frac{d^2u}{dx^2}\,dx=-\int_0^N v\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

Здесь N — любое число, большее чем a_u и a_v; при $x=N$ обе функции u и v и все их производные обращаются в нуль.

Интегрирование по частям дает

$$(Bu,\ v)=\int_0^N u'(x)\,v'(x)\,dx=\int_0^\infty u'(x)\,v'(x)\,dx. \tag{9}$$

Аналогично

$$(Bv,\ u)=\int_0^\infty u'(x)\,v'(x)\,dx,$$

и, следовательно,

$$(Bu,\ v)=(Bv,\ u)=(u,\ Bv),$$

т. е. B — симметричный оператор.

Докажем теперь, что B — положительный оператор. По формуле (9) имеем $(Bu, u)=\int_0^\infty u'^2(x)\,dx\geqslant 0$. При этом, если $(Bu, u)=0$, то $\int_0^\infty u'^2(x)\,dx=0$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то $u'(x)\equiv 0$ и $u(x)\equiv\text{const}$; но $u(0)=0$ и окончательно $u(x)\equiv 0$.

Оператор B не положительно определен. Чтобы убедиться в этом, докажем, что нижняя грань отношения $(Bu, u)/\|u\|^2$ равна нулю. Возьмем последовательность функций

$$u_n(x)=\begin{cases} x(n-x)^3, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant n, \\ 0, & \text{если } x>n. \end{cases}$$

Легко видеть, что $u_n\in D(B)$. Найдем норму u_n. Имеем

$$\|u_n\|^2=\int_0^\infty u_n^2(x)\,dx=\int_0^n x^2(n-x)^6\,dx;$$

сделав замену $x=nt$, получим

$$\|u_n\|^2=n^9\int_0^1 t^2(1-t)^6\,dt.$$

Последний интеграл есть положительная постоянная, не зависящая от n; обозначим ее через c_1, тогда $\|u_n\|^2=c_1n^9$. Далее,

$$(Bu_n, u_n)=\int_0^\infty u_n'^2(x)\,dx=\int_0^n (n-4x)^2(n-x)^4\,dx.$$

Замена $x=nt$ дает

$$(Bu_n, u_n)=n^7\int_0^1 (1-t)^4(1-4t)^2\,dt=c_2n^7,\quad c_2=\text{const}.$$

Теперь

$$\frac{(Bu_n, u_n)}{\|u_n\|^2}=\frac{c_2}{c_1n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

и, следовательно, $\inf\frac{(Bu, u)}{\|u\|^2}=0$.

§ 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

С каждым положительным оператором можно связать некоторое гильбертово пространство, которое будем называть **энергетическим пространством** данного оператора.

Пусть H — гильбертово пространство и A — оператор, положительный в этом пространстве. Построим новое гильбертово пространство. К числу его элементов отнесем все элементы множе ства $D(A)$ и на них определим новое скалярное произведение

$$[u, v]_A = (Au, v); \quad u, v \in D(A). \tag{1}$$

Как известно, скалярное произведение в вещественном гильбертовом пространстве должно удовлетворять трем аксиомам:

A. Симметричность. Если (u, v) есть скалярное произведение элементов u и v, то $(u, v) = (v, u)$.

B. Линейность. Если λ_1 и λ_2 суть числа, то $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 (u_1, v) + \lambda_2 (u_2, v)$.

C. Положительность. Имеем $(u, u) \geqslant 0$, причем $(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ (т. е. u есть нулевой элемент пространства).

Докажем, что выражение $[u, v]_A$, определенное равенством (1), удовлетворяет аксиомам A—C.

A. Симметричность. Имеем $[u, v]_A = (Au, v) = (u, Av) = (Av, u) = [v, u]_A$. Здесь мы воспользовались симметричностью оператора A и симметричностью скалярного произведения в исходном пространстве H.

B. Линейность. Воспользуемся линейностью оператора A, тогда

$$[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]_A = (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) =$$
$$= (\lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2, v) = \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) =$$
$$= \lambda_1 [u_1, v]_A + \lambda_2 [u_2, v]_A.$$

C. Положительность. Оператор A положителен, поэтому $[u, u]_A = (Au, u) \geqslant 0$. При этом, если $[u, u]_A = 0$, то $(Au, u) = 0$; отсюда вытекает, что $u = 0$. Очевидно, верно и обратное: из того, что $u = 0$, следует $(Au, u) = 0$ и $[u, u]_A = 0$.

Итак, выражение (1) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Приняв $[u, v]_A$ за скалярное произведение, мы превратим множество $D(A)$ в гильбертово пространство. Оно может оказаться неполным — в этом случае обычным способом пополним его. Пополненное пространство назовем *энергетическим* и будем обозначать через H_A.

Новое скалярное произведение порождает новую норму, которую обозначим символом $|\ |_A$:

$$|u|_A = \sqrt{[u, u]_A}. \tag{2}$$

Если $u \in D(A)$, то $|u|_A = \sqrt{(Au, u)}$ и если данный оператор — положительно определенный, то по неравенству положительной определенности

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|_A, \quad u \in D(A). \tag{3}$$

Величины $[u, v]_A$ и $|u|_A$ будем называть соответственно *энергетическим произведением* элементов u и v и *энергетической нормой* элемента u.

В некоторых случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем опускать значок A в обозначениях энергетического произведения и энергетической нормы и будем писать $[u, v]$ и $|u|$.

В энергетическом пространстве H_A будем различать «старые» элементы — элементы множества $D(A)$ и «новые», или идеальные, элементы, полученные при пополнении. Из известных теорем функционального анализа вытекает следующее.

Если u — идеальный элемент пространства H_A, то существует последовательность старых элементов $\{u_n\}$, сходящаяся к u в энергетической норме $|u-u_n| \to 0$, $n \to \infty$. Очевидно, последовательность $\{u_n\}$ при этом сходится в себе в энергетической метрике Множество старых элементов плотно в энергетическом пространстве.

Теорема 4.3.1. *Энергетическое пространство положительно определенного оператора ограниченно вкладывается в исходное пространство.*

Пусть A — положительно определенный оператор. Докажем, что между элементами энергетического пространства H_A и некоторыми элементами исходного пространства H можно установить линейно изоморфное соответствие. Это означает, что: 1) каждому элементу $u \in H_A$ приводится в соответствие один и только один элемент $u' \in H$; 2) если элементам $u, v \in H_A$ приведены в соответствие элементы $u', v' \in H$, то линейной комбинации $\lambda u + \mu v \in \in H_A$ приводится в соответствие элемент $\lambda u' + \mu v' \in H$; 3) разным элементам пространства H_A приводятся в соответствие разные элементы пространства H.

Для любого элемента u энергетического пространства можно построить последовательность $\{u_n\}$ старых элементов, такую, что $|u_n - u| \to \infty$, $n \to \infty$. Действительно, для идеального элемента такая возможность была отмечена выше, если же u — старый элемент, то достаточно положить $u_n = u$ Очевидно, $u_n - u_m \in D(A)$ и $|u_n - u_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$. По соотношению (3) между старой и новой нормой имеем

$$\|u_n - u_m\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n - u_m|,$$

и последовательность $\{u_n\}$ сходится в себе в смысле старой нормы В силу полноты пространства H существует такой элемент $u' \in \in H$, что $\|u' - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Его-то мы и приведем в соответствие элементу $u \in H_A$.

Докажем единственность элемента u'. Допустим, что вместо последовательности $\{u_n\} \in D(A)$ взята другая последовательность $\{v_n\} \in D(A)$, такая, что $|u - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что существует элемент $v' \in H$ такой, что $\|v' - v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Покажем, что $u' = v'$. По неравенству треугольника

$$|u_n - v_n| = |(u_n - u) - (v_n - u)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Так как $(u_n - v_n) \in D(A)$, то $\|u_n - v_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\|u' - v'\| = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть элементам $u_1, u_2 \in H_A$ соответствуют последовательности элементов $u_{1n}, u_{2n} \in D(A)$, таких, что $|u_1 - u_{1n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|u_2 - u_{2n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Пусть, далее, тем же элементам u_1 и u_2 соответствуют элементы u_1' и u_2' пространства H. Элементы u_1', u_2' таковы, что $\|u_1' - u_{1n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|u_2' - u_{2n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но тогда по неравенству треугольника

$$|(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})| = |\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) + \\ + \lambda_2 (u_2 - u_{2n})| \leqslant |\lambda_1| \, |u_1 - u_{1n}| + |\lambda_2| \, |u_2 - u_{2n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\|(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2') - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})\| = \|\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) + \\ + \lambda_2 (u_2 - u_{2n})\| \leqslant |\lambda_1| \, \|u_1' - u_{1n}\| + |\lambda_2| \, \|u_2' - u_{2n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Эти два соотношения и означают, что элементу $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H_A$ соответствует элемент $\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' \in H$; тем самым доказана линейность соответствия.

Докажем теперь, что различным элементам $u_1, u_2 \in H_A$ соответствуют различные же элементы u_1', $u_2' \in H$. Допустим противное: пусть $u_1' = u_2'$. Покажем, что тогда $u_1 = u_2$. Введем разность $u_1 - u_2 = v$. Очевидно, $v \in H_A$ и так как соответствие линейно, то элементу v соответствует нулевой элемент пространства H: существует последовательность $v_n \in D(A)$ такая, что

$$\|v_n - 0\| = \|v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |v - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пусть η — произвольный элемент множества $D(A)$. В силу непрерывности скалярного произведения, $[v_n, \eta] \xrightarrow[n\to\infty]{} [v, \eta]$. С другой стороны, $[v_n, \eta] = (v_n, A\eta)$. Так как $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $(v_n, A\eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0, A\eta) = 0$ и, следовательно, $[v, \eta] = 0$. Последнее равенство означает, что элемент v ортогонален в метрике H_A к множеству $D(A)$, плотному в H_A. Но тогда v — нулевой элемент энергетического пространства и $u_1 = u_2$. Существование линейно изоморфного соответствия, о котором было сказано в начале доказательства, установлено.

Отождествив любой элемент пространства H_A с соответствующим ему элементом пространства H, мы тем самым докажем, что H_A вкладывается в H. Множества $D(A)$, H_A, H связаны соотношением $D(A) \subset H_A \subset H$. Включение $D(A) \subset H_A$ вытекает из того, что H_A получено пополнением $D(A)$, а включение $H_A \subset H$ — из только что доказанного.

Множество $D(A)$ плотно в H. Отсюда и из соотношения (4) вытекает, что множество элементов, образующих энергетическое пространство положительно определенного оператора, плотно в исходном пространстве.

Выше мы получили неравенство (3), устанавливающее соотношение между двумя нормами элемента множества $D(A)$. Докажем, что это неравенство верно для любого элемента энергетического пространства. Пусть $u \in H_A$. Существует последовательность элементов $u_n \in D(A)$ такая, что

$$|u_n - u|_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0, \quad \|u_n - u\|_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0.$$

Для элементов u_n неравенство (3) справедливо: $\|u_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь непрерывностью нормы, получим

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|, \quad u \in H_A, \tag{5}$$

это значит, что H_A ограниченно вкладывается в H. Утверждение доказано. ■

Мы ввели энергетическое произведение с помощью равенства (1): $[u, v] = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$. Докажем справедливость этого равенства в более общем случае $u \in D(A)$, $v \in H_A$. Если $v \in H_A$, то существует последовательность $\{v_n\}$,

$$v_n \in D(A), \quad |v_n - v|_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0, \quad \|v_n - v\|_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0.$$

Для элементов u и v_n равенство (1) справедливо: $[u, v_n] = (Au, v_r)$. По непрерывности скалярного произведения

$$[u, v_n]_{\overrightarrow{n\to\infty}} [u, v], \quad (Au, v_n)_{\overrightarrow{n\to\infty}} (Au, v).$$

Сопоставляя правые части, находим

$$[u, v] = (Au, v); \quad u \in D(A), \quad v \in H_A. \tag{6}$$

Теорема 4.3.2. *Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Для того чтобы элемент $u \in H$ принадлежал энергетическому пространству H_A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $u_n \in D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*

$$|u_n - u_m|_{A\,\overrightarrow{n,\ m\to\infty}} 0, \quad \|u_n - u\|_{\overrightarrow{n\to\infty}} 0. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть $u \in H_A$. Множество $D(A)$ плотно в H_A, поэтому существует последовательность $u_n \in D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $|u_n - u|_{A\,\overrightarrow{n\to\infty}} 0$. Сходящаяся последовательность сходится в себе, и отсюда вытекает первое из соотношений (7). Второе соотношение вытекает из неравенства (3):

$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n - u|_{A\,\overrightarrow{n\to\infty}} 0.$$

Достаточность. Пусть условия (7) выполнены. Пространство H_A полное, поэтому существует такой элемент $\tilde{u} \in H_A$, что $|u_n - \tilde{u}|_{A\,\overrightarrow{n\to\infty}} 0$. А тогда из изоморфного соответствия, установленного в ходе доказательства теоремы 4.3.1, следует, что $u = \tilde{u}$ и, следовательно, $u \in H_A$. ■

В качестве примера найдем энергетическое пространство оператора A § 2. Докажем, что в рассматриваемом случае пространство H_A как множество элементов совпадает с $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(0,1)$; иначе говоря, H_A состоит из тех и только тех функций, которые обладают следующими свойствами: 1) они абсолютно непрерывны на сегменте $[0, 1]$; 2) их первые производные на этом сегменте суммируемы с квадратом; 3) в точках $x=0$ и $x=1$ эти функции обращаются в нуль.

Как мы видели в § 2,

$$[u, v]_A = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx; \quad u, v \in D(A).$$

Полагая здесь $v=u$, получим формулу для нормы

$$\|u\|_A^2 = \int_0^1 u'^2(x)\, dx, \quad u \in D(A). \tag{8}$$

Пусть u — произвольный элемент пространства H_A. По теореме 4.3.2 $u \in L_2(0, 1)$ и существует такая последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, что

$$\|u_n - u_m\|_A \xrightarrow[m,\ n\to\infty]{} 0, \quad \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но $u_n - u_m \in D(A)$ и для этой разности верна формула (8), поэтому

$$\int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2\, dx \xrightarrow[m,\ n\to\infty]{} 0.$$

Последнее соотношение, которому можно придать вид $\|u_n' - u_m'\|^2 \xrightarrow[m,\ n\to\infty]{} 0$, показывает, что последовательность производных $\{u_n'\}$ сходится в себе в метрике $L_2(0, 1)$. Пространство $L_2(0, 1)$ полное, поэтому существует функция $w \in L_2(0, 1)$ такая, что $\|u_n' - w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Соотношения $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|u_n' - w\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ вместе с теоремой 2.5.1. позволяют заключить, что функция $u(x)$ имеет обобщенную первую производную $u'(x) = w(x)$; будучи элементом пространства $L_2(0, 1)$, эта производная суммируема с квадратом на сегменте $[0, 1]$. Из теоремы 2.6.1 вытекает, что функция $u(x)$ на том же сегменте абсолютно непрерывна.

Остается доказать, что $u(0) = u(1) = 0$. По теореме 3.3.1 пространство $W_2^1(0, 1)$ ограниченно вкладывается в $C[0, 1]$, поэтому ($B = \text{const}$)

$$|u(0) - u_n(0)| \leqslant \|u - u_n\|_C \leqslant B\|u - u_n\|_{2,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда $u(0) = 0$. Аналогично доказывается, что $u(1) = 0$.

Пусть теперь $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(0, 1)$. Докажем, что $u \in H_A$. В силу теоремы 4.3.2 достаточно доказать, что существует последовательность $\{u_n\}$ функций из $D(A)$, обладающая свойствами (7). Функция $u(x)$ имеет производную $u'(x) \in L_2(0, 1)$. Разложим производную в ряд Фурье по косинусам. Свободный член в этом ряде отсутствует, так как $a_0=\int_0^1 u'(x)\,dx=u(1)-u(0)=0$, поэтому $u'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x$.

Последнее равенство проинтегрируем в пределах от нуля до x; ряд сходится в среднем, и его можно интегрировать почленно. Приняв во внимание, что $u(0)=0$, получим равенство

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x, \quad \text{где} \quad b_k=a_k/k\pi.$$

Построим последовательность функций

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Очевидно, $u_n \in D(A)$. В силу сходимости ряда Фурье $\|u_n-u\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Надо показать, что $|u_n-u_m|\underset{n,\,m\to\infty}{\longrightarrow}0$. Не умаляя общности, можно считать, что $n>m$, тогда

$$u_n(x)-u_m(x)=\sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Запишем квадрат энергетической нормы разности u_n-u_m:

$$|u_n-u_m|^2=\int_0^1 \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos k\pi x\right)^2 dx=\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{n} a_k^2 \underset{n,\,m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Тем самым доказано, что $u \in H_A$.

§ 4. ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ И ЗАДАЧИ О ЕГО МИНИМУМЕ

Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и f — данный элемент этого пространства. Квадратичный функционал

$$F(u)=(Au,\ u)-2(u,\ f) \tag{1}$$

будем называть *функционалом энергии* оператора A. Очевидно, $D(F)=D(A)$.

Поставим задачу о минимуме функционала энергии на множестве $D(A)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.4.1. *Для того чтобы некоторый элемент $u_0 \in D(A)$ сообщал минимальное значение функционалу энергии, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению*

$$Au_0=f. \tag{2}$$

Такой элемент — единственный.

Необходимость. Пусть элемент u_0 реализует минимум функционала (1). Обозначим через η произвольный элемент из $D(A)$ и через t произвольное вещественное число, тогда

$$F(u_0+t\eta) \geqslant F(u_0). \tag{3}$$

Зафиксируем элемент η. Неравенство (3) показывает, что функция от t, равная $F(u_0+t\eta)$, достигает минимума при $t=0$. В таком случае $dF(u_0+t\eta)/dt\,|_{t=0}=0$, или, если к квадратичной форме (Au, u) применить формулу (1.4),

$$\frac{d}{dt}\{F(u_0)+2t(Au_0-f,\ \eta)+t^2(A\eta,\ \eta)\}\,|_{t=0} =$$
$$=2(Au_0-f,\ \eta)=0, \qquad \forall\eta\in D(A). \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что элемент Au_0-f ортогонален к множеству $D(A)$, плотному в H; тогда этот элемент равен нулю.

Достаточность. Пусть u_0 удовлетворяет уравнению (2). Если u — произвольный элемент из $D(A)$, $u\neq u_0$, то можно положить $u=u_0+\eta$, $\eta\neq 0$. По формуле (1.4) получаем $F(u)=F(u_0)+$ $+2(Au_0-f,\ \eta)+(A\eta,\ \eta)$, что в силу уравнения (2) принимает вид $F(u)=F(u_0)+(A\eta,\ \eta)$. Но A — положительно определенный оператор, а $\eta\neq 0$, поэтому $(A\eta,\ \eta)>0$ и, следовательно, $F(u)>$ $>F(u_0)$. Это означает, что в точке u_0 функционал (1) достигает минимума.

Остается доказать единственность элемента u_0. Пусть минимум F достигается еще и на элементе u_1. По только что доказанному $F(u_1)>F(u_0)$. Но точно так же можно доказать, что $F(u_0)>F(u_1)$. Полученное противоречие доказывает, что минимум функционала (1) может достигаться лишь в одной точке. ■

Заметим, что мы установили равносильность следующих задач: решения уравнения $Au=f$ и отыскания минимума функционала энергии $F(u)=(Au,\ u)-2(u,\ f)$; если одна из этих задач разрешима, то разрешима и другая, и элемент, решающий одну из этих задач, решает и другую. Однако существование решения этих задач теоремой 4.4.1 не доказано. Более того, решение может не существовать, как видно из следующего примера.

Пусть $H=L_2\ (0,\ 1)$ и пусть в уравнении (2) A означает оператор, рассмотренный в § 2. Решить уравнение $Au=f$ означает в нашем примере следующее: $f(x)$ есть функция, суммируемая с квадратом; требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям (2.4) и имеющую непрерывную вторую производную, которая только знаком отличается от $f(x)$. Но это невыполнимо, если функция $f(x)$ разрывна.

Тот же пример показывает, что задача может стать разрешимой, если разумным образом расширить область определения оператора A: в примере достаточно включить в $D(A)$ функции с абсолютно непрерывными первыми производными и квадратично суммируемыми вторыми производными; условия (7), разумеется, следует сохранить.

Если $f\in L_2(0,\ 1)$, то уравнение $Au=f$ теперь имеет решение. Действительно, это уравнение означает, что $u(x)$ удовлетворяет условиям (2.4) и дифференциальному уравнению $-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$. Такая функция существует и равна

$$u(x)=x\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt+(1-x)\int_0^x tf(t)\,dt;$$

легко проверить, что в расширенную область определения нашего оператора эта функция входит.

Проще и удобнее оказывается, однако, расширять область определения не оператора A, а связанного с ним функционала энергии. Об этом будет сказано в следующем параграфе.

§ 5. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть, как и прежде, A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, f — данный элемент этого пространства и F — соответствующий функционал энергии

$$F(u)=(Au,\ u)-2(u,\ f). \tag{1}$$

Формула (1) определяет функционал F на множестве $D(A)$; легко расширить этот функционал на все энергетическое пространство H_A. Для этого достаточно заметить, что $(Au,\ u)=|u|_A^2$ и, следовательно,

$$F(u)=|u|_A^2-2(u,\ f)\cdot \tag{2}$$

В формуле (2) первое слагаемое справа определено на элементах $u\in H_A$. Второе слагаемое определено, если $u\in H$, тем более, если $u\in H_A$. Теперь ясно, что формула (2) позволяет определить функционал F на всем энергетическом пространстве H_A.

Возвращаясь к примеру

$$Au=-\frac{d^2u}{dx^2},\quad u\in C^{(2)}[0,\ 1],\ u(0)=u(1)=0,$$

видим, что функционал F может быть записан в форме

$$F(u)=-\int_0^1 u\frac{d^2u}{dx^2}\,dx-2\int_0^1 fu\,dx$$

и в то же время в виде

$$F(u)=\int_0^1 u'^2\,dx-2\int_0^1 fu\,dx,$$

причем вторая запись функционала пригодна для всех $u\in H_A$. Она-то и позволяет расширять функционал энергии на все энергетическое пространство.

Теперь будем искать минимум функционала F не в $D(A)$, а в H_A. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.5.1. *В энергетическом пространстве существует один и только один элемент, на котором функционал энергии достигает минимума.*

По неравенству Коши,

$$|(u,\ f)| \leqslant \|u\| \|f\|, \tag{3}$$

а по соотношению между старой и новой нормой (неравенство (3.3)) $\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|$. Отсюда

$$|(u,\ f)| \leqslant c\,|u|, \qquad c = \frac{\|f\|}{\gamma}, \tag{4}$$

и функционал $(u,\ f)$ ограничен в H_A. По известной теореме Рисса существует один и только один такой элемент $u_0 \in H_A$, что

$$(u,\ f) = [u,\ u_0], \qquad u \in H_A. \tag{5}$$

Формула (5) позволяет следующим образом преобразовать выражение для функционала F:

$$F(u) = |u|^2 - 2[u,\ u_0] = [u,\ u] - 2[u,\ u_0] + [u_0,\ u_0] - [u_0,\ u_0] = \\ = [u - u_0,\ u - u_0] - [u_0,\ u_0],$$

или, еще проще,

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2, \qquad u \in H_A. \tag{6}$$

Из формулы (6) делается совершенно очевидным, что минимум функционала F в пространстве H_A достигается на элементе $u = u_0$ и только на этом элементе. При этом очевидно, что

$$\min F(u) = -|u_0|^2. \ \blacksquare \tag{7}$$

Элемент $u_0 \in H_A$, реализующий минимум функционала (2), будем называть *обобщенным решением уравнения*

$$Au = f. \tag{8}$$

Может случиться, что $u_0 \in D(A)$; тогда по теореме 4.4.1 u_0 будет обычным решением уравнения (8).

Обобщенное решение можно определить и независимо от задачи о минимуме функционала энергии. Пусть уравнение (8) имеет решение $u \in D(A)$. Умножим обе части этого уравнения скалярно на произвольный элемент $\eta \in H_A$. Воспользовавшись формулой (3.6), найдем, что решение u удовлетворяет тождеству

$$[u,\ \eta]_A = (f,\ \eta); \qquad \forall \eta \in H_A, \tag{5a}$$

которое только обозначениями отличается от тождества (5). Обратно, если элемент $u \in D(A)$ удовлетворяет тождеству (5а), то с помощью той же формулы (3.6) мы приведем его к виду $(Au - f,\ \eta) = 0$, $\forall \eta \in H_A$, откуда $Au = f$. Таким образом, уравнение (8) и тождество (5а) эквивалентны. Теперь можно определить обобщенное решение уравнения (8) как элемент энергетического пространства, удовлетворяющий тождеству (5а); очевидно, данные в настоящем параграфе определения обобщенного решения эквивалентны.

Оценим норму обобщенного решения. Полагая в (5) $u=u_0$ и пользуясь затем неравенством Коши, находим $|u_0|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|u_0\|$. По неравенству (3.3) $\|u_0\| \leqslant \gamma^{-1}|u_0|$; подставив это в написанное выше неравенство, находим оценку для энергетической нормы обобщенного решения:

$$|u_0| \leqslant \frac{1}{\gamma}\|f\|. \tag{9}$$

То же неравенство (3.3) позволяет здесь заменить величину $|u_0|$ меньшей величиной $\gamma\|u_0\|$, и мы приходим к оценке нормы обобщенного решения в исходном пространстве:

$$\|u_0\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}\|f\|. \tag{10}$$

Если энергетическое пространство сепарабельно, то можно указать простой прием, позволяющий построить обобщенное решение уравнения (8). В сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная счетная ортонормированная система $\{\omega_n\}$

$$[\omega_j, \omega_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть u_0 — обобщенное решение уравнения (8). Разложим его в ряд Фурье по системе $\{\omega_k\}$:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [u_0, \omega_k]\,\omega_k.$$

Этот ряд сходится в энергетической норме: если мы положим

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} [u_0, \omega_k]\,\omega_k, \text{ то } |u_0 - \varphi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Коэффициенты Фурье $[u_0, \omega_k]$ легко вычисляются по формуле (5): положив в ней $u=\omega_k$, находим $[u_0, \omega_k] = (f, \omega_k)$, откуда

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)\,\omega_k. \tag{11}$$

Как было отмечено, ряд (11) сходится в норме энергетического пространства H_A; он сходится и в норме исходного пространства H. Действительно, обозначая по-прежнему через φ_n частную сумму ряда (11), имеем по неравенству (3.3)

$$\|u_0 - \varphi_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|u_0 - \varphi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В связи с теоремой 4.5.1 возникает вопрос об условиях сепарабельности энергетического пространства. Этот вопрос будет решен в следующем параграфе.

Как и выше, под A будем понимать положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

Лемма 4.6.1. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *полна в исходном пространстве* H *и если* $\{\varphi_n\}$ — *обобщенное решение уравнения* $A\varphi_n = f_n$, *то последовательность* $\{\varphi_n\}$ полна в энергетическом пространстве H_A.

Пусть $u \in D(A)$. Обозначая $Au = v$, имеем $v \in H$. Введем обозначения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k = s_N, \quad \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k = \sigma_N. \tag{1}$$

Оценим квадрат нормы разности

$$|u-\sigma_N|^2 = [u-\sigma_N,\ u-\sigma_N].$$

Обозначим $u-\sigma_N = \eta$, тогда

$$[u-\sigma_N,\ u-\sigma_N] = [u-\sigma_N,\ \eta] = [u,\ \eta] - [\sigma_N,\ \eta].$$

Так как $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$, то $[u,\ \eta] = (Au,\ \eta) = (v,\ \eta)$. Далее,

$$[\sigma_N,\ \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k [\varphi_k,\ \eta],$$

но по формуле (5.10) $[\varphi_k,\ \eta] = (f_k,\ \eta)$; окончательно $[\sigma_N,\ \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k (f_k,\ \eta) = (s_N,\ \eta)$ и

$$|u-\sigma_N|^2 = (v-s_N,\ \eta). \tag{2}$$

Система $\{f_n\}$ полна в H, поэтому можно так выбрать натуральное число N и коэффициенты a_k, чтобы выполнялось неравенство $\|v-s_N\| < \varepsilon$, где ε — произвольно заданное положительное число. Теперь из формулы (2) получаем

$$|u-\sigma_N|^2 = (v-s_N,\ \eta) \leqslant \|v-s_N\|\,\|\eta\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}|\eta| = \frac{\varepsilon}{\gamma}|u-\sigma_N|.$$

Если $|u-\sigma_N| \neq 0$, то отсюда получаем неравенство

$$|u-\sigma_N| < \frac{\varepsilon}{\gamma}; \tag{3}$$

это неравенство справедливо, очевидно, и тогда, когда $|u-\sigma_N| = 0$. Таким образом, если элемент $u \in D(A)$, то его можно с любой степенью точности аппроксимировать линейными комбинациями элементов системы $\{\varphi_n\}$.

Пусть теперь $u \in H_A$. Множество $D(A)$ плотно в H_A, поэтому существует такой элемент $u' \in D(A)$, что $|u-u'| < \varepsilon/2$. С другой стороны, как было только что доказано, существует номер N

и числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$ такие, что

$$\left\| u' - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда по неравенству треугольника имеем

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 4.6.1. *Для того чтобы энергетическое пространство положительно определенного оператора было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы было сепарабельным исходное пространство.*

Необходимость. Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть энергетическое пространство H_A сепарабельно. Тогда в нем существует счетное плотное множество $\{\psi_n\}$. Докажем, что оно плотно и в исходном пространстве H. Пусть u — некоторый элемент пространства H. Множество элементов энергетического пространства плотно в исходном пространстве, поэтому если задано число $\varepsilon > 0$, то можно выбрать элемент $u' \in H_A$ так, чтобы $\|u - u'\| < \varepsilon/2$. Далее, можно выбрать элемент ψ_ν так, чтобы $|u' - \psi_\nu| < \varepsilon\gamma/2$. Здесь γ — постоянная положительной определенности, входящая в неравенство (2.7). По соотношению между старой и новой нормой (неравенство (3.3)) $\|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon/2$, а по неравенству треугольника $\|u - \psi_\nu\| \leqslant \|u - u'\| + \|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что пространство H содержит плотное счетное множество $\{\psi_n\}$, следовательно, это пространство сепарабельно.

Достаточность. Пусть пространство H сепарабельно и счетная последовательность $\{f_n\}$ полна в H. Построим элементы $\varphi_n \in H_A$ — обобщенные решения уравнений $A\varphi_n = f_n$. По лемме 4.6.1 последовательность $\{\varphi_n\}$ полна в H_A. Построим элементы вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \tag{4}$$

где α_k — рациональные числа. Множество таких элементов счетное. Докажем, что оно плотно в H_A.

Действительно, если даны число $\varepsilon > 0$ и элемент $u \in H_A$, то можно выбрать натуральное число $N > 0$ и вещественные числа a_k так, чтобы

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь рациональные числа α_k столь близкими к соответствующим числам a_k, чтобы

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k - a_k| \, |\varphi_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right| < \varepsilon,$$

и множество (4) плотно в пространстве H_A. ■

§ 7. РАСШИРЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Формула (5.5) приводит в соответствие каждому элементу $f \in H$ один и только один элемент $u_0 \in H_A$, реализующий минимум функционала энергии $F(u)$. Тем самым эта формула определяет некоторый линейный оператор G.

$$u_0 = Gf, \tag{1}$$

действующий в пространстве H. Область определения этого оператора $D(G) = H$, а область значений $R(G)$ есть часть множества элементов, образующих энергетическое пространство H_A: $R(G) \subset H_A$.

Лемма 5.7.1. *Оператор G симметричен и ограничен.*

Запишем формулу (5.5) в виде

$$(u, f) = [u, Gf], \quad u \in H_A. \tag{2}$$

Возьмем произвольный элемент $h \in H$ и положим $u = Gh$, тогда $u \in H_A$. Теперь формула (2) дает $(Gh, f) = [Gh, Gf] = [Gf, Gh]$. Поменяв местами f и h, получим $[Gf, Gh] = (Gf, h) = (h, Gf)$. Окончательно

$$(Gh, f) = (h, Gf), \tag{3}$$

и оператор G симметричен. Далее. полагая в формуле (2) $u = Gf$, получаем $\| Gf \|_A^2 = (Gf, f)$. Применив к правой части неравенство Коши и заменив левую часть меньшей величиной $\gamma^2 \| Gf \|^2$, найдем $\gamma^2 \| Gf \|^2 \leqslant \| Gf \| \| f \|$, откуда $\| Gf \| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \| f \|$. Из этого неравенства следует ограниченность оператора G; при этом

$$\| G \| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}. \tag{4}$$

Лемма 4.7.2. *Существует оператор, обратный оператору G.*

Достаточно доказать, что уравнение $Gf = 0$ имеет единственное решение $f = 0$. Пусть $Gf = 0$. Формула (2) дает тогда $(u, f) = 0$, $u \in H_A$. Элемент f оказывается ортогональным к плотному в H множеству, а именно, к множеству элементов энергетического пространства. Но тогда $f = 0$.

Оператор G^{-1}, обратный оператору G, будем обозначать через $\tilde{A}$. Очевидно, $D(\tilde{A}) = R(G) \subset H_A$ и $R(\tilde{A}) = D(G) = H$.

Теорема 4.7.1. *Оператор $\tilde{A}$ есть положительно определенное расширение оператора A. Нижние грани отношений*

$$\frac{(Au, u)}{\| u \|^2}, \quad \frac{(\tilde{A}u, u)}{\| u \|^2} \tag{5}$$

равны между собой. Уравнение

$$\tilde{A}u = f \tag{6}$$

имеет одно и только одно решение при любом $f \in H$.

Пусть $u_0 \in D(A)$. Положим $Au_0 = f$. По теореме 5.4.1 элемент u_0 реализует минимум функционала $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$. По формуле (1) $u_0 = Gf$ и, следовательно, $\tilde{A}u_0 = f$. Отсюда следует, что: 1) $u_0 \in D(\tilde{A})$, и так как u_0 — произвольный элемент множества $D(A)$, то $D(A) \subset D(\tilde{A})$; 2) если $u_0 \in D(A)$, то $Au_0 = \tilde{A}u_0$. Утверждения 1) и 2) в совокупности и означают, что $\tilde{A}$ есть расширение оператора A.

Докажем теперь, что $\tilde{A}$ — симметричный оператор. Прежде всего его область определения плотна в H, так как $D(\tilde{A}) \supset D(A)$. Далее, возьмем в области $D(\tilde{A})$ два произвольных элемента u и v и положим $\tilde{A}u = f$, $\tilde{A}v = h$. Тогда $u = Gf$, $v = Gh$. Подставив это в формулу (3), получим равенство $(v, \tilde{A}u) = (u, \tilde{A}v)$, означающее симметричность оператора $\tilde{A}$.

Оператор $\tilde{A}$ есть расширение A, поэтому множество значений отношения $\frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2}$ шире, чем то же множество для отношения $\frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$, а в таком случае

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{7}$$

С другой стороны, обозначая

$$\inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2, \quad \gamma_0^2 > 0, \tag{8}$$

имеем $(Au, u) \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2$ и, следовательно, $|u|_A \geqslant \gamma_0 \|u\|$, $u \in H_A$. В тождестве (2) положим $u = Gf$, так что $f = \tilde{A}u$:

$$(u, \tilde{A}u) = (\tilde{A}u, u) = [Gf, Gf]_A = |u|_A^2 \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2.$$

Отсюда $\frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2$ и потому

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2 = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{9}$$

Сравнение соотношений (7) и (9) показывает, что

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{10}$$

Разрешимость уравнения (6) при любом $f \in H$ есть лишь иная формулировка отмеченного выше факта, что $R(\tilde{A}) = H$. Действительно, если $f \in H$, то $f \in R(\tilde{A})$, и, значит, существует такой элемент u_0, что $\tilde{A}u_0 = f$. Единственность решения есть следствие положительной определенности оператора $\tilde{A}$ (см. теоремы 4.4.1 и 4.5.1). ■

Из разрешимости уравнения (6) при любом $f \in H$ вытекает, что для этого уравнения обобщенное решение есть обычное решение. Заметим также, что обобщенное решение уравнения $Au=f$ есть обычное решение уравнения $\tilde{A}u=f$.

Расширение $\tilde{A}$ положительно определенного оператора A, описанное в этом параграфе, было построено К. Фридрихсом. Мы будем ниже называть $\tilde{A}$ *расширением оператора A по Фридрихсу*.

Замечание. Для читателя, знакомого с понятием самосопряженного оператора, укажем, что расширение $\tilde{A}$ положительно определенного оператора A по Фридрихсу есть самосопряженное расширение этого оператора. Доказательство этого утверждения см. [47], а также [28].

Величина γ_0^2 (формула (8)) называется *нижней гранью* положительно определенного оператора A. Мы приходим, таким образом, к теореме К. Фридрихса.

Теорема 4.7.2. *Положительно определенный оператор можно расширить до самосопряженного с той же нижней гранью.*

Теорема 4.7.3. *Энергетические пространства положительно определенного оператора и его расширения по Фридрихсу совпадают.*

Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H и $\tilde{A}$ — расширение оператора A по Фридрихсу. Надо доказать, что пространства H_A и $H_{\tilde{A}}$ состоят из одних и тех же элементов и что

$$|u_0|_{\tilde{A}} = |u_0|_A, \quad u_0 \in H_A. \tag{11}$$

Любой элемент из H_A принадлежит $H_{\tilde{A}}$ и его нормы в обоих пространствах одинаковы. Это утверждение очевидно для элементов из области $D(A)$: если $u_0 \in D(A)$, то $u_0 \in D(\tilde{A}) \subset H_{\tilde{A}}$, при этом $|u_0|_A^2 = (Au_0, u_0) = (\tilde{A}u_0, u_0) = |u_0|_{\tilde{A}}^2$. По теореме 4.3.2 соотношение $u_0 \in H_A$ означает, что существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, со свойствами (3.7). Но если $u_n, u_m \in D(A)$, то $u_n, u_m \in D(\tilde{A})$ и

$$|u_n - u_m|_A^2 = (A(u_n - u_m), u_n - u_m) = \\ = (\tilde{A}(u_n - u_m), u_n - u_m) = |u_n - u_m|_{\tilde{A}}^2. \tag{12}$$

Таким образом, существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$ со свойствами

$$\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |u_n - u_m|_{\tilde{A}} \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0; \tag{13}$$

по той же теореме 5.3.2 отсюда следует, что $u_0 \in H_{\tilde{A}}$. При этом в соответствии с определением идеальных элементов

$$|u_n - u_0|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |u_n - u_0|_{\tilde{A}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда

$$|u_0|_A = \lim_{n\to\infty} |u_n|_A = \lim_{n\to\infty} |u_n|_{\tilde{A}} = |u_0|_{\tilde{A}}.$$

Докажем теперь, что из соотношения $u \in H_{\tilde{A}}$ вытекают соотношение $u \in H_A$ и равенство (11). Если $u \in H_{\tilde{A}}$, то существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$ со свойствами (13). Выше мы видели, что $D(\tilde{A}) \subset H_A$; поэтому $u_n \in H_A$ и по доказанному в п. 1 $|u_n - u_m|_{\tilde{A}} = |u_n - u_m|_A$, свойства (13) переходят в свойства (3.7), а тогда $u \in H_A$. Для элементов $u \in H_A$ равенство (11) установлено в п. 1. ■

Нами была установлена формула (3.6)

$$[u, v]_A = (Au, v), \quad u \in D(A), \quad v \in H_A.$$

Справедлива и следующая, более общая формула:

$$[u, v]_A = (\tilde{A}u, v), \quad u \in D(\tilde{A}), \quad v \in H_A. \tag{14}$$

Действительно, если $u \in D(\tilde{A})$, $v \in H_A = H_{\tilde{A}}$, то по формуле (3.6)

$$[u, v]_{\tilde{A}} = (\tilde{A}u, v). \tag{15}$$

В пространствах H_A и $H_{\tilde{A}}$ совпадают нормы, но тогда в них совпадают и скалярные произведения:

$$[u, v]_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\{|u+v|^2_{\tilde{A}} - |u-v|^2_{\tilde{A}}\} = \\ = \frac{1}{4}\{|u+v|^2_A - |u-v|^2_A\} = [u, v]_A.$$

Заменив в равенстве (15) $[u, v]_{\tilde{A}}$ через $[u, v]_A$, мы и получим формулу (14).

§ 8. ПРОСТЕЙШАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u(x) = f(x) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти интеграл этого уравнения на сегменте $[a, b]$ при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что p, p', $q \in C[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$. Далее допустим, что $p(x) \geqslant p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Так как функции $p(x)$ и $q(x)$ еще и непрерывны на сегменте $[a, b]$, то справедливы неравенства

$$p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1, \quad x \in [a, b],$$

где p_1 и q_1, так же как и p_0 — положительные постоянные. В качестве основного пространства H возьмем $L_2(a, b)$. За область определения оператора

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u(x) \tag{3}$$

примем совокупность функций $u(x)$, удовлетворяющих требованиям $u\in C^{(2)}[a, b]$, $u(a)=u(b)=0$. Докажем положительную определенность оператора A. Сбласть его определения плотна в $L_2(a, b)$ — это вытекает из следствия 2.3.1. Проверим симметричность оператора A. Пусть $u, v\in D(A)$, тогда

$$(Au, v)=-\int_a^b v\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]dx+\int_a^b q(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям. Учитывая, что функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2), получим явно симметричное выражение

$$(Au, v)=\int_a^b\left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+q(x)uv\right]dx, \tag{4}$$

которое и показывает, что $(Au, v)=(u, Av)$, т. е. что оператор A симметричен.

Положив в формуле (4) $v=u$, получим

$$(Au, u)=\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)u^2(x)\right]dx. \tag{5}$$

Учитывая ограничения на коэффициенты, найдем отсюда

$$(Au, u)\geqslant p_0\int_a^b\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx.$$

Далее, по неравенству Фридрихса (формула (6.10) гл. 4) имеем

$$\|u\|^2=\int_a^b u^2(x)\,dx\leqslant(b-a)^2\int_a^b u'^2(t)\,dt. \tag{*}$$

Окончательно

$$(Au, u)\geqslant\frac{p_0}{(b-a)^2}\|u\|^2,$$

что и означает положительную определенность; можно положить $\gamma=\frac{\sqrt{p_0}}{b-a}$. Оператор A оказался положительно определенным, и можно ввести энергетическое пространство H_A.

Докажем, что H_A как множество элементов совпадает с $\overset{0}{W}{}_2^1(a, b)$ и что нормы в обоих пространствах эквивалентны. Допустим, что $u\in H_A$. По теореме 4.3.2 тогда существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n\in D(A)$, обладающая свойствами (3.7).

Если $u\in D(A)$, то

$$|u|^2=(Au, u)=\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)u^2(x)\right]dx.$$

Следовательно,

$$|u_n-u_m|^2=\int_a^b[p(x)(u_n'-u_m')^2+q(x)(u_n-u_m)^2]\,dx\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0,$$

и так как оба слагаемых под интегралом неотрицательны, то

$$\int_a^b p(x)(u_n'-u_m')^2\,dx\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0. \tag{6}$$

Вспоминая ограничения на p, получаем

$$p_0\int_a^b(u_n'-u_m')^2\,dx\leqslant\int_a^b p(x)(u_n'-u_m')^2\,dx\leqslant p_1\int_a^b(u_n'-u_m')^2\,dx,$$

и, значит, соотношение (6) равносильно следующему:

$$\int_a^b(u_n'-u_m')^2\,dx\xrightarrow[n,\,m\to\infty]{}0. \tag{6a}$$

В свою очередь последняя запись означает, что последовательность производных $\{u_n'\}$ сходится в себе в метрике $L_2(a, b)$. Пространство $L_2(a, b)$ полное, и указанная последовательность сходится к некоторой функции $v\in L_2(a, b)$.

В тождестве

$$\int_a^x u_n'(t)\,dt=u_n(x)-u_n(a)=u_n(x)$$

можно перейти к пределу:

$$u(x)=\int_a^x v(t)\,dt.$$

Последнее равенство означает абсолютную непрерывность функции $u(x)$, при этом $u'=v\in L_2(a, b)$. Очевидно также, что $u(a)=0$, и остается показать, что $u(b)=0$. Это можно сделать, например, так: в тождестве

$$\int_x^b u_n'(t)\,dt=u_n(b)-u_n(x)=-u_n(x)$$

перейдем к пределу

$$u(x)=-\int_x^b v(t)\,dt,$$

и ясно, что $u(b)=0$.

Выше мы видели, что для функций $u\in D(A)$ верна формула

$$|u|^2=\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)\,u^2(x)\right]dx. \tag{7}$$

Докажем, что эта формула верна для любой функции из энергетического пространства. Пусть $u \in H_A$. Возьмем последовательность $u_n \in D(A)$ со свойствами (3.7): $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Формула (6a) дает еще одно соотношение: $\|u_n' - u'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Норма предела равна пределу нормы, поэтому

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2, \quad |u_n|^2 \to |u|^2, \quad \|u_n'\|^2 \to \|u'\|^2. \tag{8}$$

Для функций u_n формула (7) верна:

$$|u_n|^2 = \int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2]\, dx.$$

Из соотношений (8) вытекает, что при $n \to \infty$ левая часть последнего равенства имеет пределом $|u|^2$. Докажем, что предел правой части равен

$$\int_a^b [pu'^2 + qu^2]\, dx.$$

Имеем неравенство

$$\left| \int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2]\, dx - \int_a^b [pu'^2 + qu^2]\, dx \right| \leqslant \\ \leqslant p_1 \int_a^b \left| u_n'^2 - u'^2 \right| dx + q_1 \int_a^b | u_n^2 - u^2 |\, dx.$$

По неравенству Буняковского,

$$\int_a^b \left| u_n'^2 - u'^2 \right| dx \leqslant \left\{ \int_a^b (u_n' + u')^2\, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b (u_n' - u')^2\, dx \right\}^{1/2} = \\ = \|u_n' + u'\| \, \|u_n' - u'\|.$$

Но $\|u_n'\| \to \|u'\|$, а тогда $\|u_n' + u'\| \leqslant \|u_n'\| + \|u'\|$ есть величина ограниченная, поэтому

$$\int_a^b \left| u_n'^2 - u'^2 \right| dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b | u_n^2 - u^2 |\, dx \to 0,$$

и формула (7) доказана для любой функции из H_A.

Теперь покажем обратное: если $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(a, b)$, то $u \in H_A$. По теореме 4.3.2 достаточно доказать, что существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$ со свойствами (3.7). Чтобы это показать, разложим производную функции u в ряд Фурье по косинусам

$$u'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi(x-a)}{b-a}.$$

Свободный член отсутствует, потому что

$$a_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx=\frac{1}{b-a}[u(b)-u(a)]=0.$$

Интегрируя почленно, получим

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a},\quad b_k=\frac{a_k(b-a)}{k\pi}.$$

В качестве u_n достаточно взять частную сумму последнего ряда.

Легко показать эквивалентность норм H_A и $\overset{0}{W}{}_2^1(a, b)$. Норму в последнем пространстве можно задать, в соответствии с формулой (6.5) гл. 4, равенством

$$\|u\|_{2,1}^2=\int_a^b [u'(x)]^2\,dx.$$

Теперь из формул (7) и (*) вытекает, что

$$\sqrt{p_0}\,\|u\|_{2,1}\leqslant |u|\leqslant \sqrt{p_1+\frac{q_1}{(b-a)^2}}\,\|u\|_{2,1};\quad q_1=\max q(x), \tag{9}$$

и эквивалентность норм доказана.

Обобщенное решение $u_0(x)$ задачи (1) — (2) существует и единственно: это функция, реализующая минимум функционала энергии $F(u)=|u|^2-2(u, f)$ в энергетическом пространстве. Как показывает формула (7), в нашем случае

$$F(u)=\int_a^b \left[p(x)u'^2+q(x)u^2-2f(x)u\right]dx;$$

будучи элементом энергетического пространства, функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям (2).

Выясним теперь, какие функции образуют область $D(\tilde{A})$, где $\tilde{A}$ — расширение по Фридрихсу оператора A. Отметим прежде всего, что из формулы (7) для энергетической нормы вытекает формула для энергетического произведения:

$$[u, v]=\int_a^b (pu'v'+quv);\qquad u, v\in H_A. \tag{10}$$

Пусть $u\in D(\tilde{A})$, тогда существует такая функция $f\in L_2(a, b)$, которая вместе с функцией u удовлетворяет тождеству (5.5а);

последнее с помощью формулы (10) приводится к виду

$$\int_a^b pu'\eta'\,dx = \int_a^b w\eta\,dx; \qquad w = f - qu, \qquad \forall\eta \in H_A. \tag{11}$$

Очевидно, $w \in L_2(a, b)$. Обозначим $v(x) = -\int_a^x w(t)\,dt$; функция $v(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$, $v'(x) = -w(x)$ и $v(a) = 0$. Теперь

$$\int_a^b w\eta\,dx = -\int_a^b v'\eta\,dx = -v\eta\Big|_a^b + \int_a^b v\eta'\,dx = \int_a^b v\eta'\,dx,$$

так как $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Подставив это в (11), придем к тождеству

$$\int_a^b (pu' - v)\,\eta'\,dx = 0, \qquad \forall\eta \in H_A.$$

Полагая здесь $\eta(x) = \sin\dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}$, $n = 1, 2, \ldots$, мы видим, что функция $pu' - v$ ортогональна к функциям $\cos\dfrac{n\pi(x-a)}{b-a}$, $n = 1, 2, \ldots$, отсюда следует, что $pu' = v + c$, $c = \mathrm{const}$. Функция pu' оказалась абсолютно непрерывной; она почти всюду имеет производную

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) = v'(x) = -w(x) = q(x)\,u(x) - f(x).$$

Последнее соотношение показывает, что если $u \in D(\tilde{A})$ и $f = \tilde{A}u$, то функция u почти всюду удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Интегрированием по частям легко проверить, что

$$u'(x) = u'(a) + \int_a^x \left[\frac{v'(t)}{p(t)} - \frac{v(t)+c}{p^2(t)}\,p'(t)\right] dt.$$

Подынтегральная функция квадратично суммируема, поэтому производная $u'(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и почти всюду существует вторая производная $u''(x) \in L_2(a, b)$. Мы пришли к следующему выводу: если $u \in D(\tilde{A})$, то u' абсолютно непрерывна на $[a, b]$, $u'' \in L_2(a, b)$ и $u(a) = u(b) = 0$. Обратное утверждение также справедливо: если функция $u(x)$ обладает перечисленными свойствами, то $u \in D(\tilde{A})$. Действительно, в этом случае $u(x)$ является обобщенным решением уравнения $Au = f$, в котором

$$f(x) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u(x).$$

§ 9. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ЗАДАЧА О МИНИМУМЕ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В § 4 была поставлена вариационная задача для квадратичного функционала вида $F(u)=(Au, u)-2(u, f)$. Важной его особенностью является то, что его линейная часть $2(u, f)$ ограничена в исходном пространстве; в § 5 эта особенность использована при доказательстве существования обобщенного решения вариационной задачи.

Рассмотрим задачу о минимуме квадратичного функционала более общего вида

$$F(u)=(Au, u)-2l(u), \tag{1}$$

где A — положительно определенный опрератор, действующий в гильбертовом пространстве H, а l — линейный (но не обязательно ограниченный) функционал в том же пространстве; множитель 2 введен для удобства. Введя энергетическое пространство H_A оператора A, можно записать функционал (1) в виде

$$F(u)=|u|^2-2l(u) \tag{2}$$

и рассматривать его как функционал, заданный на элементах (некоторых или всех) энергетического пространства. Интерес представляет тот случай, когда $D(l)$ — область определения функционала l — плотна в H_A; очевидно, $D(F)=D(l)$.

Могут представиться две возможности.

1. Функционал l не ограничен в энергетическом пространстве. В этом случае функционал F не ограничен снизу. Действительно, в этом случае существует последовательность $\{u_n\}$ со свойствами $|u_n|=1$, $|l(u_n)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$. Изменив в случае надобности знаки у элементов u_n, можно добиться того, что $l(u_n)\to+\infty$, а тогда $F(u_n)=1-2l(u_n)\to-\infty$. Задача о минимуме функционала (2) в этом случае лишена смысла.

2. Функционал l ограничен в энергетическом пространстве. Тогда он может быть расширен по непрерывности на все это пространство; тем самым на все пространство H_A будет расширен и функционал (2). По теореме Риса существует один и только один элемент $u_0\in H_A$, удовлетворяющий тождеству $l(u)=[u, u_0]$; теперь $F(u)=|u|^2-2[u, u_0]$. Повторив без изменений рассуждения § 5, мы убедимся, что элемент u_0 реализует минимум функционала (2).

Если пространство H_A сепарабельно, то легко вывести формулу, аналогичную формуле (5.11) и дающую решение задачи о минимуме функционала (2). Пусть ω_n, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность, полная и ортонормированная в энергетическом пространстве, тогда

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}[u_0, \omega_n]\omega_n.$$

В отмеченной выше формуле $l(u)=[u, u_0]$ положим $u=\omega_n$. Тогда $[u_0, \omega_n]=[\omega_n, u_0]=l(\omega_n)$ и, следовательно,

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty} l(\omega_n)\,\omega_n. \tag{3}$$

Пусть A — оператор, рассмотренный в предыдущем параграфе (формулы (3) и (2) § 8); сохраним введенные в этом параграфе предположения о коэффициентах $p(x)$ и $q(x)$ и о функциях, образующих область определения оператора A Подставим задачу о минимуме квадратичного функционала

$$F(u)=|u|^2-2u(c)=\\ =\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)u^2\right]dx-2u(c), \qquad a<c<b, \tag{4}$$

в энергетическом пространстве оператора A. В частности, это означает, что функция u, от которой зависит функционал (4), должна удовлетворять краевым условиям

$$u(a)=u(b)=0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что линейный функционал $l(u)=u(c)$ ограничен в энергетической метрике. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|u(c)|^2=\left|\int_a^c u'(x)\,dx\right|^2\leqslant(c-a)\int_a^c u'^2(x)\,dx\leqslant(c-a)\int_a^b u'^2(x)\,dx.$$

По формуле (8.7)

$$|u|^2=\int_a^b[p(x)\,u'^2(x)+q(x)\,u^2(x)]\,dx\geqslant p_0\int_a^b u'^2(x)\,dx,$$

поэтому

$$|u(c)|\leqslant\sqrt{\frac{c-a}{p_0}}\,|u|. \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что в данном случае функционал l ограничен, причем $|l|\leqslant\sqrt{\frac{c-a}{p_0}}$. Решение нашей вариационной задачи существует; по формуле (3) оно может быть представлено рядом

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(c)\,\omega_n(x), \tag{7}$$

где $\{\omega_n\}$ — система, полная и ортогональная в H_A. Ряд (8) сходится в метрике пространства H_A, а следовательно, и в метрике $L_2(a, b)$.

Пример. Рассмотрим частный случай $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$, так что $Au=-\frac{d^2u}{dx^2}$. В этом случае систему, полную и ортонормированную в энергетическом пространстве, образуют функции

$$\omega_n(x)=\frac{\sqrt{2(b-a)}}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Доказать это мы предоставляем читателю.

Минимум функционала

$$\int_a^b u'^2\,dx - 2u(c), \qquad u(a)=u(b)=0 \tag{8}$$

реализует функция

$$u_0(x) = \frac{2(b-a)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi(c-a)}{b-a}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}.$$

Последний ряд легко просуммировать, если, например, составить и решить уравнение Эйлера для функционала (8). Это мы также предоставляем сделать читателю.

§ 10. СЛУЧАЙ ТОЛЬКО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Положительный, но не положительно определенный оператор, назовем *только положительным*. Для только положительного оператора можно построить энергетическое пространство так же, как это делалось для оператора, положительно определенного. При этом возникает, однако, одно существенное различие: можно доказать, что среди идеальных элементов энергетического пространства обязательно будут такие, которые не принадлежат исходному гильбертову пространству.

Рассмотрим, например, оператор B, исследованный в § 2. Нетрудно доказать, что энергетическое пространство H_B состоит из функций со свойствами: 1) на сегменте $[0, a]$, где a — любое положительное число, функция $u \in H_B$ абсолютно непрерывна; 2) $u(0)=0$; 3) $u' \in L_2(0, \infty)$. Так, функция $u(x) = \ln(1+x)$ принадлежит пространству H_B, но не принадлежит исходному пространству $L_2(0, \infty)$.

Для только положительного оператора остается в силе теорема 4.6.1.

Если A — только положительный оператор, а l — линейный функционал, то задача о минимуме функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2l(u), \quad u \in D(A)$$

решается в точности так же, как в предшествующем параграфе: так как $(Au, u) = |u|^2$, функционал F записывается в виде $F(u) = |u|^2 - 2l(u)$. Если l не ограничен в H_A, то наша вариационная задача не имеет смысла, если же l в H_A ограничен и определен на множестве, плотном в H_A, то $l(u) = [u, u_0]$, где $u_0 \in H_A$ существует и определяется единственным образом; этот элемент и реализует минимум F в энергетическом пространстве.

Глава 5

СОБСТВЕННЫЙ СПЕКТР ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

§ 1. ПОНЯТИЕ О СОБСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА

Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Число λ и элемент u называются соответственно *собственным числом* и *собственным элементом* оператора A, если u не есть нулевой элемент пространства H и

$$Au - \lambda u = 0. \tag{1}$$

Заметим, что если H есть, например, пространство L_2, то требование $u \neq 0$ равносильно тому, что $u(x) \not\equiv 0$.

О собственном элементе u говорят, что он соответствует собственному числу λ. Из уравнения (1) вытекает формула, позволяющая найти собственное число, если известен соответствующий собственный элемент. Именно, умножив скалярно обе части уравнения (1) на u, получим $(Au, u) - \lambda \|u\|^2 = 0$, откуда

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{2}$$

В комплексном пространстве собственные числа, естественно, могут быть как вещественными, так и комплексными. В вещественном пространстве определено умножение элементов только на вещественные числа; в соответствии с этим определением в вещественном пространстве следовало бы рассматривать только вещественные собственные числа. Но уже простейшие примеры показывают, что это было бы нецелесообразно. Так, вещественная квадратная матрица порядка m порождает линейный оператор в m-мерном евклидовом пространстве; собственные числа этого оператора совпадают с собственными числами его матрицы, которые, как хорошо известно, могут быть и комплексными. Поэтому мы несколько расширим определение собственных чисел так, чтобы они могли быть и комплексными.

Исходя из заданного вещественного гильбертова пространства H, построим комплексное гильбертово пространство H^*. Для этого поступим так: за множество элементов нового пространства H^* примем множество всевозможных формальных сумм вида $U = u' + iu''$, где $i = \sqrt{-1}$, а u', $u'' \in H$. На новом множестве введем обычным способом сложение и умножение на комплексные числа; эти два действия не выводят из множества H^*, которое теперь можно считать линейным. Нулевым элементом в нем являются элемент $0 + i0$, где 0 означает нулевой элемент пространства H; вместо $0 + i0$ будем писать просто 0; вообще вместо $u + i0$ и $0 + iv$ будем писать u и iv. В H^* введем скалярное умножение по следующему правилу: если $U = u' + iu''$, $V = v' + iv''$, где u', u'', v', $v'' \in H$, то

$$(U, V)^* = (u', v') + (u'', v'') + i[(u'', v') - (u', v'')]. \tag{3}$$

Легко видеть, что при таком определении удовлетворены все аксиомы скалярного умножения в комплексном пространстве, именно:

А. $(U, V)^* = \overline{(V, U)^*}$.

Б. $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2, V)^* = \alpha_1 (U_1, V)^* + \alpha_2 (U_2, V)^*$.

В. $(U, U)^* \geqslant 0$; при этом $(U, U^*) = 0$ тогда и только тогда, когда $U = 0$.

Оператор A распространим на элементы вида $U = u' + iu''$, где u', $u'' \in D(A) \subset H$, по формуле

$$AU = Au' + iAu''. \tag{4}$$

При таком новом определении может оказаться, что оператор A, который первоначально был определен в вещественном пространстве H, имеет в H^* комплексные собственные числа $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ и соответствующие собственные элементы $u' + iu''$; равенство

$$A(u' + iu'') = (\lambda' + i\lambda'')(u' + iu'')$$

равносильно системе равенств

$$Au' = \lambda' u' - \lambda'' u'', \qquad Au'' = \lambda'' u' + \lambda' u''. \tag{5}$$

Одному и тому же собственному числу может соответствовать несколько собственных элементов; если u_1, u_2, $\ldots$, u_n — такие элементы, то любая отличная от нулевого элемента линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k$ также есть собственный элемент, соответствующий тому же собственному числу. Сказанное позволяет рассматривать только линейно независимые собственные элементы, соответствующие данному собственному числу, каждый же собственный элемент можно считать нормированным.

Число линейно независимых собственных элементов называется *кратностью* (иногда *рангом*) соответствующего собственного числа. В сепарабельном пространстве кратность любого собственного числа — конечная или счетная.

Совокупность собственных чисел оператора называется его *собственным спектром*.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Теорема 5.2.1. *Собственные числа симметричного оператора вещественны.*

Скалярно умножим первое из равенств (1.5) на u'', второе — на u' и из второго вычтем первое:

$$(Au'', u') - (Au', u'') = \lambda''(\|u'\|^2 + \|u''\|^2); \tag{1}$$

в силу симметричности оператора A это равно нулю. Собственный элемент $u'+iu''\neq 0$. Тогда либо u', либо u'' отлично от нуля и скобка в (1) положительна. Отсюда следует, что $\lambda''=0$ и собственные числа вещественны. Система (1.5) принимает вид

$$Au'=\lambda'u', \qquad Au''=\lambda'u'',$$

и каждый из отличных от нуля элементов u', u'' есть собственный элемент, соответствующий собственному числу λ'. ■

Теорема 5.2.2. *Собственные элементы симметричного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.*

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные числа симметричного оператора A и $\lambda_1\neq\lambda_2$. Пусть собственному числу λ_1 соответствует собственный элемент u_1, а собственному числу λ_2 — собственный элемент u_2. Напишем тождества

$$Au_1=\lambda_1u_1, \quad Au_2=\lambda_2u_2.$$

Первое тождество умножим скалярно на u_2, а второе — на u_1 и вычтем второе из первого:

$$(Au_1,\ u_2)-(Au_2,\ u_1)=(\lambda_1-\lambda_2)(u_1,\ u_2).$$

Так как A — симметричный оператор, то левая часть равна нулю и, следовательно, $(\lambda_1-\lambda_2)(u_1,\ u_2)=0$. Но $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, отсюда $(u_1,\ u_2)=0$. ■

Следствие 5.2.1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве симметричный оператор имеет не более чем счетное множество собственных чисел.*

Если одному собственному числу соответствует несколько линейно независимых элементов, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации. Собственные элементы можно также и нормировать, и мы приходим к следующему важному выводу: *всегда можно считать, что собственные элементы симметричного оператора образуют ортонормированную систему.*

§ 3. ОБОБЩЕННЫЙ СОБСТВЕННЫЙ СПЕКТР ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

Всякий положительно определенный оператор симметричен, поэтому все сказанное в предшествующем параграфе справедливо и для положительно определенных операторов. Но для этих операторов оказывается целесообразным ввести еще понятие обобщенного собственного спектра — более определенно, обобщенных собственных чисел и соответствующих им обобщенных собственных элементов; мы введем его по аналогии с понятием обобщенного решения.

Пусть A — положительно определенный оператор, λ — его собственное число и u — собственный элемент, соответствующий собственному числу λ. Это значит, что $u\neq 0$, $u\in D(A)$ и имеет место тождество

$$Au=\lambda u. \tag{1}$$

Возьмем произвольный элемент $\eta \in H_A$. Умножим обе части равенства (1) скалярно на η: $(Au, \eta) = \lambda(u, \eta)$. В этом тождестве $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$. А тогда по формуле (3.6) гл. 5 $(Au, \eta) = [u, \eta]_A$. Мы нашли, таким образом, что собственное число λ и соответствующий собственный элемент u удовлетворяют тождеству

$$[u, \eta]_A = \lambda(u, \eta), \quad \forall \eta \in H_A. \tag{2}$$

Обратно, пусть $u \in D(A)$, $u \neq 0$, вместе с некоторым числом λ удовлетворяет тождеству (2). По формуле (3.6) гл. 5 $[u, \eta]_A = (Au, \eta)$. Подставив это в тождество (2), получим $(Au - \lambda u, \eta) = 0$, $\forall \eta \in H_A$. Итак, вполне определенный элемент $Au - \lambda u$ пространства H ортогонален любому элементу $\eta \in H_A$, но множество элементов пространства H_A плотно в исходном пространстве H, а элемент, ортогональный к плотному множеству, равен нулю. Отсюда следует, что $Au - \lambda u = 0$. Последнее равенство означает, что u есть собственный элемент, а λ — собственное число оператора A.

Элемент $u \in H_A$, $u \neq 0$, и число λ назовем *обобщенным собственным элементом* и *обобщенным собственным числом оператора* A, если они удовлетворяют тождеству (2).

Теорема 5.3.1. *Обобщенные собственные числа и собственные элементы положительно определенного оператора совпадают с обычными собственными числами и собственными элементами расширения этого оператора по Фридрихсу.*

Если λ и u суть обобщенные собственное число и соответствующий ему собственный элемент оператора A, то они удовлетворяют тождеству (2). В правой части этого тождества введем обозначение $\lambda u = f$; этим тождество (2) приводится к виду $[u, \eta]_A = (f, \eta)$; $\forall \eta \in H_A$, что совпадает с тождеством (5.5а) гл. 4. Отсюда следует, что элемент u реализует минимум функционала

$$F(v) = |v|_A^2 - 2(f, v), \quad \forall v \in H_A.$$

Но тогда $u \in D(\tilde{A})$, где $\tilde{A}$ — расширение оператора A по Фридрихсу, и $\tilde{A}u = f = \lambda u$, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть λ и u суть собственное число и собственный элемент оператора $\tilde{A}$, соответствующий числу λ, так что $\tilde{A}u = \lambda u$. Умножая это скалярно на произвольный элемент $\eta \in H_A$, получим тождество

$$[u, \eta]_{\tilde{A}} = \lambda(u, \eta). \tag{3}$$

В § 7 гл. 4 было показано, что пространства H_A и $H_{\tilde{A}}$ состоят из одних и тех же элементов и энергетические произведения в этих пространствах совпадают. В таком случае тождества (3) и (2) равносильны и, следовательно, λ и u суть обобщенные собственное число и соответствующий ему собственный элемент оператора A. ■

Оператор A симметричен, поэтому для обобщенных собственных чисел и собственных элементов верны теоремы 5.2.1 и 5.2.2.

Отметим еще два свойства обобщенных собственных чисел и собственных элементов положительно определенного оператора; слово «обобщенные» ниже для краткости будем опускать.

Теорема 5.3.2. *Если система $\{u_n\}$ собственных элементов положительно определенного оператора A ортонормирована в исходном пространстве H, то она ортогональна и в соответствующем энергетическом пространстве H_A, причем*

$$|u_n|_A = \sqrt{\lambda_n}, \tag{4}$$

где λ_n — собственное число, соответствующее собственному элементу u_n.

Если в тождестве (2) положить $u = u_k$, $\eta = u_n$, $\lambda = \lambda_k$, то

$$[u_k, u_n]_A = \lambda_k (u_k, u_n) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \lambda_n, & k = n. \end{cases} \blacksquare$$

Теорема 5.3.3. *Любое собственное число положительно определенного оператора не меньше нижней грани этого оператора.*

Пусть γ_0^2 — нижняя грань оператора A. По теореме 4.7.1 нижняя грань оператора $\tilde{A}$, полученного расширением оператора A по Фридрихсу, также равна γ_0^2. Если λ и u — собственное число и соответствующий ему собственный элемент оператора A, то по формуле (1.2) и теореме 5.3.1

$$\lambda = \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2. \blacksquare \tag{5}$$

Заметим еще, что по формуле (1.2) в нашем случае можно придать вид

$$\lambda = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2}. \tag{6}$$

Правая часть не изменится, если u умножить на отличную от нуля постоянную. Выберем эту постоянную так, чтобы собственный элемент u был нормирован в метрике исходного пространства: $\|u\| = 1$. Тогда для собственного числа получается формула, в некоторых отношениях более удобная:

$$\lambda = |u|_A^2, \quad \|u\|^2 = 1. \tag{7}$$

§ 4. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННОМ СПЕКТРЕ

Начнем со следующего замечания: если γ_0^2 — нижняя грань положительно определенного оператора A, то

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \gamma_0^2. \tag{1}$$

Докажем это. Так как $D(A) \subset H_A$, то

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2.$$

С другой стороны, $D(A)$ плотно в H_A. Если $u \in H_A$, то можно подобрать элемент $v \in D(A)$ так, чтобы $|v-u|_A < \varepsilon$ и $\|v-u\| < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число. Но тогда $||v|_A - |u|_A| < \varepsilon$, $|\|v\| - \|u\|| < \varepsilon$. Если бы оказалось, что для некоторого элемента $u \in H_A$

$$\frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} < \gamma_0^2,$$

то при достаточно малом ε было бы также

$$\frac{|v|_A^2}{\|v\|^2} = \frac{(Av, v)}{\|v\|^2} < \gamma_0^2,$$

что противоречит определению нижней грани.

Теорема 5.4.1. *Если существует элемент u_1, на котором нижняя грань отношения* (1) *достигается, то γ_0^2 есть наименьшее обобщенное собственное число, а u_1 — соответствующий собственный элемент оператора A.*

При умножении элемента u на постоянную отношение

$$\Psi(u) = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \tag{2}$$

не меняется, поэтому элемент u можно считать нормированным; тогда

$$\Psi(u) = |u|_A^2, \quad \|u\| = 1. \tag{3}$$

Обозначим еще $\gamma_0^2 = \lambda_1$. То, что нижняя грань достигается на элементе u_1, означает, что

$$u_1 \in H_A, \quad \|u_1\|^2 = 1, \quad |u_1|^2 = \lambda_1.$$

Возьмем произвольное $\eta \in H_A$ и произвольное вещественное α и составим отношение

$$\frac{|u_1 + \alpha\eta|^2}{\|u_1 + \alpha\eta\|^2}. \tag{4}$$

Если зафиксировать η, то отношение (4) есть функция от α, которая достигает минимума при $\alpha = 0$. Но тогда ее производная по α должна обратиться в нуль при $\alpha = 0$,

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{[u_1, u_1] + 2\alpha[u_1, \eta] + \alpha^2[\eta, \eta]}{(u_1, u_1) + 2\alpha(u_1, \eta) + \alpha^2(\eta, \eta)}\Bigg|_{\alpha=0} = 0.$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$2(u_1, u_1)[u_1, \eta] - 2(u_1, \eta)[u_1, u_1] = 0. \tag{5}$$

Заметим, что

$$(u_1, u_1) = \|u_1\|^2 = 1, \quad [u_1, u_1] = |u_1|^2 = \lambda_1.$$

Подставив это в выражение (5), придем к равенству $[u_1, \eta]-\lambda_1(u_1, \eta)=0$, которое показывает, что λ_1 и u_1 суть соответственно собственное число и собственный элемент оператора A. То, что λ_1 — наименьшее собственное число, вытекает из теоремы 5.3.3.

Допустим, что уже найдено наименьшее собственное число λ_1 и соответствующий элемент u_1 оператора A. Как найти следующее собственное число λ_2 и собственный элемент u_2? Очевидно, что надо искать λ_2 среди значений отношения (2) на функциях, ортогональных к u_1 в метриках обоих пространств H и H_A.

Обозначим через $H^{(1)}$ подпространство пространства H, ортогональное к элементу u_1, а через $H_A^{(1)}$ — подпространство пространства H_A, ортогональное к u_1 уже в смысле новой метрики: $[u, u_1]=0$, $u\in H_A^{(1)}$. Докажем, что $H_A^{(1)}=H_A\cap H^{(1)}$. Пусть $u\in H_A^{(1)}$. Запишем тождество, определяющее первый собственный элемент, $[u_1, \eta]=\lambda_1(u_1, \eta)$. Положив в нем $\eta=u$, получим $(u_1, u)=\frac{1}{\lambda_1}[u_1, u]=0$. Это означает, что $u\in H^{(1)}$ и, следовательно, $u\in H_A\cap H^{(1)}$.

Обратно, пусть $u\in H_A\cap H^{(1)}$. Тогда $u\in H_A$ и $(u, u_1)=0$. Совершенно аналогично приходим к равенству $[u_1, u]=\lambda_1(u_1, u)=0$, откуда следует, что $u\in H_A^{(1)}$. ■

Если известны попарно ортогональные собственные элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то можно ввести подпространства $H^{(n)}$ и $H_A^{(n)}$ пространств H и H_A, соответственно ортогональные (каждое в своей метрике) к $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Аналогично доказывается, что $H_A^{(n)}=H_A\cap H^{(n)}$.

Теорема 5.4.2. *Допустим, что для положительно определенного оператора A известны n первых собственных чисел $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ и соответствующие им собственные элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые предполагаются попарно ортогональными. Пусть λ_{n+1} есть точная нижняя грань $|u|^2$ на нормированных элементах $u\in H_A^{(n)}$. Если она достигается, то λ_{n+1} — собственное число оператора A, непосредственно следующее за λ_n, а элемент, на котором эта нижняя грань достигается, есть собственный элемент, соответствующий собственному числу λ_{n+1}.*

Рассуждая, как при доказательстве предшествующей теоремы, придем к тождеству

$$[u_{n+1}, \zeta]-\lambda_{n+1}(u_{n+1}, \zeta)=0, \quad \forall\zeta\in H_A^{(n)}. \tag{6}$$

Пусть η — произвольный элемент пространства H_A. Положим

$$\zeta=\eta-\sum_{k=1}^{n}(\eta, u_k)u_k. \tag{7}$$

Тогда $\zeta\in H^{(n)}$ и, следовательно, $\zeta\in H_A^{(n)}$. Для построенного элемента ζ тождество (6) верно. Подставив выражение (7) в это тождество и учитывая, что $[u_{n+1}, u_k]=(u_{n+1}, u_k)=0$, найдем

$$[u_{n+1}, \eta]-\lambda_{n+1}(u_{n+1}, \eta)=0, \quad \forall\eta\in H_A. \blacksquare$$

Теорема 5.4.1 носит условный характер: утверждается, что $\lambda_1 = \gamma_0^2$ — нижняя грань функционала

$$\Psi(u) = |u|_A^2, \quad \|u\| = 1 \tag{1}$$

— есть наименьшее собственное число оператора A, если указанная нижняя грань достигается. Ниже для этого устанавливается некоторое достаточное условие.

Теорема 5.5.1. *Пусть $\{w_n\}$ — минимизирующая последовательность для функционала (1). Если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в метрике исходного пространства H, то $\lambda_1 = \inf \Psi(u)$ есть наименьшее собственное число данного оператора, а предел выделенной подпоследовательности есть соответствующий собственный элемент.*

По условию теоремы из последовательности $\{w_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$. Для краткости обозначим $w_{n_k} = \varphi_k$. Нетрудно видеть, что подпоследовательность $\{\varphi_k\}$ тоже будет минимизирующей. Поэтому будем считать, что нам дана минимизирующая последовательность $\{\varphi_k\}$, сходящаяся в H. Элементы φ_k обладают свойствами: 1) $\varphi_k \in H_A$; 2) $\|\varphi_k\| = 1$; 3) $\lim |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1$; 4) существует такой элемент $u_1 \in H$, что $\|\varphi_k - u_1\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Заметим, что

$$\|\varphi_k - \varphi_m\| \xrightarrow[k,\, m \to \infty]{} 0. \tag{2}$$

Наша цель — доказать, что $u_1 \in H_A$ и что $|u_1|_A^2 = \lambda_1$.

Возьмем произвольный элемент $\eta_k \in H_A$ и пусть t — произвольное вещественное число. Элемент $\varphi_k + t\eta_k$ принадлежит пространству H_A и, вообще говоря, отличен от нуля. Подставив его в отношение (4.2), получим

$$\frac{|\varphi_k + t\eta_k|_A^2}{\|\varphi_k + t\eta_k\|^2} \geqslant \inf \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_1.$$

Освобождаясь от знаменателя, найдем

$$[\varphi_k + t\eta_k,\ \varphi_k + t\eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k + t\eta_k,\ \varphi_k + t\eta_k) \geqslant 0,$$

откуда

$$t^2\{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2\} + 2t\{[\varphi_k,\ \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k,\ \eta_k)\} + \\ + |\varphi_k|_A^2 - \lambda_1\|\varphi_k\|^2 \geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен слева неотрицателен при любых вещественных t, поэтому его дискриминант неположителен и

$$|[\varphi_k,\ \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k,\ \eta_k)| \leqslant \sqrt{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2}\,\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1};$$

здесь учтено, что $\|\varphi_k\| = 1$.

Усилим последнее неравенство, отбросив вычитаемое под первым радикалом:

$$|[\varphi_k,\ \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k,\ \eta_k)| \leqslant |\eta_k|_A \sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1}. \tag{3}$$

Элементы $\eta_k \in H_A$ произвольны. Потребуем, чтобы они были ограничены в совокупности, т. е. чтобы для любого k было

$$|\eta_k|_A \leqslant C, \quad C = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Тогда из неравенства (3) следует

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant C\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1}. \tag{5}$$

В неравенстве (5) правая часть стремится к нулю, а следовательно, стремится к нулю и левая часть, причем это стремление равномерно относительно выбора элементов η_k, удовлетворяющих неравенству (4). Имея это в виду, положим

$$\eta_k = \varphi_k - \varphi_m,$$

где номер m произволен. Такой выбор η_k допустим по следующим соображениям: числовая последовательность $|\varphi_n|_A$ стремится к пределу и потому ограничена: существует такая постоянная C, что $|\varphi_n|_A \leqslant C$, а тогда $|\eta_k|_A \leqslant 2C$.

Теперь из неравенства (5) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1(\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0,$$

причем стремление к нулю равномерно относительно m. Если так, то можно устремить $m \to \infty$, и тогда

$$\lim_{k, m\to\infty}\{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1(\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0. \tag{6}$$

Номера k и m здесь равноправны; поменяем их местами:

$$\lim_{k, m\to\infty}\{[\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k]_A - \lambda_1(\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k)\} = 0. \tag{7}$$

Сложив равенства (6) и (7) получим

$$\lim_{k, m\to\infty}\{|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 - \lambda_1\|\varphi_k - \varphi_m\|^2\} = 0, \tag{8}$$

и в силу соотношения (2)

$$|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 \xrightarrow[k, m\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Итак, минимизирующая последовательность сходится в себе в пространстве H_A. Но это пространство полное, следовательно, последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в H_A, причем к тому же элементу, к которому она сходится и в H. Таким образом, $u_1 \in H_A$ и

$$|\varphi_k - u_1|_A \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Но тогда

$$|u_1|_A^2 = \lim_{k\to\infty}|\varphi_k|_A^2 = \lambda_1;$$

при этом

$$\|u_1\| = \lim_{k\to\infty}\|\varphi_k\| = 1.$$

Итак, существует элемент $u_1 \in H_A$, такой, что $\|u_1\|=1$ и $|u_1|_A^2=\lambda_1$. Это означает, что нижняя грань функционала (1) достигается. По теореме 5.4.1 эта нижняя грань λ_1 есть наименьшее собственное число, а u_1 — соответствующий ему собственный элемент оператора A. ■

§ 6. ТЕОРЕМА О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА

Формулировке и доказательству основной теоремы предпошлем следующее замечание.

Допустим, что построены первые n собственных чисел $\lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и соответствующие им ортонормированные в метрике пространства H собственные элементы оператора A $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Рассмотрим функционал [1]

$$\Psi_n(u)=|u|_A^2, \quad u \in H_A^{(n)}, \quad \|u\|=1. \tag{1}$$

Он отличен от функционала (5.1), так как определен на более узком множестве. Обозначим

$$\lambda_{n+1}=\inf \Psi_n(u)=\inf |u|_A^2,$$

где $u \in H_A^{(n)}$, $\|u\|=1$. Построим для функционала (1) минимизирующую последовательность. Если из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в метрике пространства H, то λ_{n+1} есть $(n+1)$-е собственное число, а предел выделенной последовательности есть $(n+1)$-й собственный элемент оператора A.

Доказательство этого утверждения приводится без изменений по сравнению с доказательством теоремы 6.5.1.

Будем говорить, что симметричный оператор A имеет *дискретный спектр*, если 1) оператор A имеет бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, собственных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности; 2) последовательность $\{u_n\}$ собственных элементов полна в пространстве H.

Существование единственной предельной точки на бесконечности означает, что собственные числа можно расположить в порядке возрастания их абсолютных величин

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$$

и при этом $|\lambda_n| \to \infty$. Если положительно определенный оператор имеет дискретный спектр, то его собственные числа можно расположить просто в порядке их возрастания

$$0<\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Теорема 5.6.1. *Пусть положительно определенный оператор таков, что любое множество, ограниченное в энергетической метрике, компактно в метрике исходного пространства. Тогда обобщенный спектр этого оператора дискретен.*

---

[1] Определение подпространства $H_A^{(n)}$ было дано в § 4.

Условие этой теоремы можно сформулировать еще и так: *энергетическое пространство вкладывается в исходное пространство вполне непрерывно.*

Доказательство. 1. Рассмотрим число

$$\lambda_1 = \inf |u|^2, \quad u \in H_A, \ \|u\| = 1.$$

Построим минимизирующую последовательность $\{\omega_k\}$. Это значит, что

а) $\omega_k \in H_A$; б) $\|\omega_k\| = 1$; в) $\lim\limits_{k\to\infty} |\omega_k|^2 = \lambda_1$.

Числовая последовательность, имеющая предел, ограничена, поэтому существует такая постоянная C, что $|\omega_k| \leqslant C$. Если так, то минимизирующая последовательность ограничена в метрике H_A. По условию теоремы эта последовательность компактна в старой метрике, а тогда в силу теоремы 6.5.1 λ_1 есть наименьшее собственное число оператора; соответствующий собственный элемент обозначим через u_1.

2. Допустим, что уже построены первые n собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и соответствующие им собственные элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Обозначим $\lambda_{n+1} = \inf |u|^2$, $u \in H_A^{(n)}$, $\|u\| = 1$ и построим минимизирующую последовательность $\{\omega_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $|\omega_k^{(n)}|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_{n+1}$, следовательно, существует постоянная C такая, что $|\omega_k^{(n)}| \leqslant C$. Последовательность $\{\omega_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ компактна в старой метрике, а тогда по замечанию, сделанному в начале этого параграфа, λ_{n+1} есть $(n+1)$-е собственное число оператора A и существует соответствующий этому числу собственный элемент u_{n+1}.

Процесс оборвется, если условия $\|u\| = 1$ и $u \in H_A^{(n)}$ станут противоречить друг другу. Это может случиться, когда пространство $H_A^{(n)}$ состоит из одного нуля, а последнее может быть, когда H_A есть конечномерное пространство. Но H_A плотно в H и будет конечномерным тогда и только тогда, когда само пространство H конечномерно. Этот случай из рассмотрения исключим и будем предполагать, что пространство H, а с ним и H_A бесконечномерно. В таком случае процесс не оборвется и получится бесконечная последовательность собственных чисел

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \tag{2}$$

и последовательность соответствующих им собственных элементов

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \tag{3}$$

ортогональных в H и в H_A и нормированных в H.

3. Докажем, что собственные числа стремятся к бесконечности. Допустим противное, и пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена: $\lambda_n \leqslant K = \text{const}$. Тогда $|u_n| = \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{K}$; собственные элементы ограничены в H_A и потому их последовательность компактна в метрике H. Получается, что последовательность,

которая в H ортогональна и нормирована, компактна в H, а это, как известно, невозможно.

4. Докажем, что система собственных элементов полна в H_A. Допустим противное. Рассмотрим подпространство $H_A^{(\infty)}$ пространства H_A, ортогональное ко всем собственным элементам u_n, $n = 1, 2, \ldots$. Это подпространство содержит отличные от нуля, а следовательно, и нормированные элементы. Обозначим $\lambda_\infty = \inf |u|^2$, $u \in H_A^{(\infty)}$, $\|u\| = 1$. Повторяя слово в слово приведенные выше рассуждения, найдем, что λ_∞ есть собственное число оператора. Сравним λ_∞ с λ_n Это нижние грани одной и той же величины $\frac{|u|_A^2}{\|u\|^2}$ на различных множествах $H_A^{(\infty)}$ и $H_A^{(n)}$. Первое множество — более узкое, чем второе, и на нем нижняя грань больше (в крайнем случае, не меньше), чем на втором. Но тогда $\lambda_\infty \geqslant \lambda_n$, что нелепо, потому что числа λ_n в совокупности не ограничены. Из полученного противоречия вытекает, что последовательность $\{u_n\}$ полна в H_A.

5. Докажем, что последовательность собственных элементов полна в H. Возьмем $u \in H_A$. Система (3) полна в H_A: для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число N и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ такие, что

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right|_A < \varepsilon.$$

А тогда по неравенству (3.3) гл. 4

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом, любой элемент энергетического пространства можно аппроксимировать линейной комбинацией элементов (3) в старой метрике.

Пусть теперь $u \in H$. Пространство H_A плотно в H, т. е. для любого положительного числа ε существует $u' \in H_A$, такое, что $\| u - u' \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Подберем номер N и коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, так чтобы выполнялось

$$\left\| u' - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А теперь по неравенству треугольника

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon. \blacksquare$$

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННОМУ СПЕКТРУ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

Пусть в гильбертовом пространстве H действует положительно определенный оператор A, удовлетворяющий условиям теоремы 5.6.1, так что его спектр дискретен. Пусть λ_n и u_n суть (обобщенные) собственные числа и соответствующие им собственные элементы оператора A. Будем считать, что система $\{u_n\}$ ортонормирована в H, тогда система $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ ортонормирована в энергетическом пространстве H_A. Система $\{u_n\}$ полна в H, поэтому для любого элемента $u \in H$ справедливо разложение в ортогональный ряд, сходящийся в метрике пространства H:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u,\ u_n)\, u_n. \tag{1}$$

Если $u \in H_A$, то ряд (1) сходится и в энергетической метрике к тому же элементу u. Действительно, по доказанному в § 6, ортонормированная в H_A система $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ полна в этом пространстве, и справедливо разложение в ряд, сходящийся в метрике H_A,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u,\ \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right] \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[u,\ u_n]}{\lambda_n}\, u_n. \tag{2}$$

Но ряды (1) и (2) тождественны, так как по формуле (3.2) $[u,\ u_n] = \lambda_n (u,\ u_n)$, и наше утверждение доказано.

Пусть теперь $u \in D(A)$, тогда $Au \in H$ и, следовательно,

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au,\ u_n)\, u_n.$$

По формулам (3.6) гл. 4 и (3.2) $(Au,\ u_n) = [u,\ u_n] = \lambda_n (u,\ u_n)$, и получается выражение положительно определенного оператора с дискретным спектром через его собственные числа и собственные элементы:

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u,\ u_n)\, u_n. \tag{3}$$

§ 8. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим оператор

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)\, u \tag{1}$$

на множестве $D(A)$ функций u, непрерывных на сегменте $[a,\ b]$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и суммируемую с квадратом вторую производную, при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

На функции $p(x)$ и $q(x)$ налагаем те же условия, что и в § 8 гл. 4. Отметим еще, что в этом параграфе рассматриваемый здесь оператор A был обозначен через $\tilde{A}$.

Докажем, что оператор A имеет в $L_2(a, b)$ дискретный спектр. Известно, что этот оператор положительно определенный. В § 8 гл. 4 было показано, что нормы в H_A и в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ эквивалентны и что эти пространства состоят из одних и тех же функций. В таком случае, в силу теоремы 3.3.1 H_A вполне непрерывно вкладывается в $L_2(a, b)$; по теореме 5.6.1 спектр оператора дискретен; этот оператор имеет бесконечную последовательность собственных чисел

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots,\quad \lambda_n\to\infty \tag{3}$$

и соответствующие им собственные функции

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots, \tag{4}$$

относительно которых можно считать, что $\|u\|=1$ и $(u_k, u_m)=0$ $(k\neq m)$; система (4) полна в каждом из пространств $L_2(a, b)$ и H_A. В энергетической метрике собственные функции по-прежнему ортогональны: $[u_k, u_m]=0$ $(k\neq m)$, но они там не нормированы, так как $|u_n|=\sqrt{\lambda_n}$.

Напомним, что отыскание спектра оператора A, рассмотренного здесь, равносильно следующей задаче, которая называется задачей Штурма — Лиувилля: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u+\lambda u=0, \tag{5}$$

удовлетворяющие краевым условиям (2).

Система собственных функций $\{u_n(x)\}$ задачи Штурма — Лиувилля полна в $L_2(a, b)$, и любая функция $u\in L_2(a, b)$ разлагается в ряд

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x),\quad c_n=(u, u_n), \tag{6}$$

сходящийся в метрике $L_2(a, b)$. Докажем, что ряд (6) сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, если $u\in H_A$, т. е. если $u(x)$ абсолютно непрерывна на указанном сегменте, $u(a)=u(b)=0$ и производная $u'\in L_2(a, b)$. Действительно, как было доказано в § 7, ряд (6) сходится в метрике H_A: по данному $\varepsilon>0$ можно найти такое натуральное число $N_0(\varepsilon)$, что

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+r}c_nu_n\right|<\varepsilon,\quad N\geqslant N_0(\varepsilon). \tag{7}$$

По неравенству (8.9) гл. 4

$$\int_a^b\left(\sum_{n=N+1}^{N+r}c_nu_n'(x)\right)^2dx<\frac{\varepsilon^2}{p_0}.$$

Далее, $u_n(a)=0$, и по неравенству Буняковского

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n(x)\right| = \left|\int_a^x \sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n'(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}\left\{\int_a^b \left(\sum_{n=N+1}^{N+r} c_n u_n'(t)\right)^2 dt\right\}^{1/2} < \varepsilon\sqrt{\frac{b-a}{p_0}}; \quad (8)$$

последнее неравенство показывает, что ряд (6) равномерно сходится на сегменте $[a, b]$.

Можно поставить более общую задачу. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda r(x)u = 0 \quad (9)$$

с краевыми условиями (2); коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ подчиним прежним условиям и будем еще считать, что $r \in C[a, b]$ и что $r(x) \geqslant r_0 = \text{const} > 0$. Исследование спектра этой задачи подходит под общую схему настоящей главы.

Разделив уравнение (9) на $r(x)$, приведем его к виду

$$\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u\right] + \lambda u = 0. \quad (9a)$$

Введем пространство $L_2(r;\ a,\ b)$ функций, которые на интервале (a, b) квадратично суммируемы с весом $r(x)$; норма и скалярное произведение в этом пространстве определяются формулами

$$\|u\|^2 = \int_a^b r(x)u^2(x)\,dx, \qquad (u, v) = \int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx. \quad (10)$$

В пространстве $L_2(r;\ a,\ b)$ рассмотрим оператор B, который действует по формуле

$$Bu = \frac{1}{r(x)}\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u\right]. \quad (11)$$

Определим этот оператор на том же множестве функций, что и рассмотренный выше оператор A. Таким образом, $D(B)$ есть множество функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (2); первые производные этих функций на том же сегменте абсолютно непрерывны, а вторые суммируемы с квадратом.

Оператор B положительно определен в пространстве $H = L_2(r;\ a,\ b)$. Действительно, он симметричен: если $u, v \in D(B)$, то

$$(Bu, v) = \int_a^b v\left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right]dx =$$

$$= \int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right)dx = (u, Bv)$$

Далее, он положительно определен, что доказывается так. Прежде всего

$$(Bu, u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,dx \geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx. \quad (12)$$

Функция $u(x)$ обращается в нуль на концах сегмента $[a, b]$, поэтому $u(a)=0$

$$\sqrt{r(x)}\,u(x)=\sqrt{r(x)}\int_a^x u'(t)\,dt.$$

Будучи непрерывной на сегменте, функция $r(x)$ ограничена. Пусть $r(x)\leqslant r_1$ тогда

$$r(x)\,u^2(x)\leqslant r_1\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2\leqslant r_1(x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt\leqslant r_1(b-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt.$$

Интегрируя по x в пределах от a до b, находим

$$\int_a^b u'^2(t)\,dt\geqslant\frac{1}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)u^2(x)\,dx=\frac{1}{r_1(b-a)^2}\|u\|^2;$$

в конечном счете

$$(Bu,\ u)\geqslant\frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,dx=\frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\|u\|^2,$$

что и доказывает положительную определенность нашего оператора.

Докажем, наконец, что вложение H_B в $H=L_2(r;\ a,\ b)$ вполне непрерывно Нетрудно убедиться, что пространства H_B и $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a,\ b)$ состоят из одних и тех же функций и что в этих пространствах нормы эквивалентны. Далее, из формулы (10) следует, что такое же заключение справедливо также для пространств H и $L_2(a,\ b)$.

Пусть бесконечное множество $M\subset H_B$ ограничено в норме H_B:

$$\forall u\in M,\quad \|u\|_B\leqslant C=\text{const} \tag{13}$$

Тогда справедливы также соотношения

$$\forall u\in M,\quad \|u\|_{2,1}\leqslant C'=\text{const}. \tag{14}$$

Вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a,\ b)$ в $L_2(a,\ b)$ вполне непрерывно, поэтому можно выделить из M последовательность $\{u_n\}$, фундаментальную в $L_2(a,\ b)$: $\|u_n-u_m\|_2\xrightarrow[m,\ n\to\infty]{}0$ Из эквивалентности норм H и $L_2(a,\ b)$ вытекает, что $\|u_n-u_m\|_H\xrightarrow[m,\ n\to\infty]{}0$ Таким образом, из любого бесконечного множества, ограниченного в H_B, можно выделить последовательность, фундаментальную в H. Это означает, что H_B вкладывается в H вполне непрерывно

По теореме 5.6.1 оператор B имеет дискретный спектр, иначе говоря, существует счетное множество чисел $\lambda_n>0$, $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, при которых задача (9), (2) имеет нетривиальные решения, и совокупность этих решений полна как в $L_2(r;\ a,\ b)$, так и в H_B Если по-прежнему эти решения обозначить через $u_n(x)$ то они ортонормированы в $L_2(r;\ a,\ b)$ и ортогональны в H_B:

$$\int_a^b r(x)\,u_n(x)\,u_m(x)\,dx=\delta_{mn},$$

$$\int_a^b\left[p(x)\,u_n'(x)\,u_m'(x)+q(x)\,u_m(x)\,u_n(x)\right]dx=0,\qquad m\neq n.$$

Кроме того,

$$\int_a^b\left[p(x)\,u_n'^2(x)+q(x)\,u_n^2(x)\right]dx=\lambda_n.$$

Собственные числа λ_n все простые — это следует из того, что дифференциальное уравнение (9) второго порядка Действительно, пусть собственному числу λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции: $u_n(x)$ и $u_m(x)$ Прежде всего $u'_n(0) \neq 0$ — в противном случае функция $u_n(x)$, отличная от тождественного нуля, была бы решением задачи Коши для однородного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - qu + \lambda_n ru = 0 \tag{15}$$

при однородных начальных условиях $u_n(0) = u'_n(0) = 0$, что противоречит теореме единственности для задачи Коши Аналогично $u'_m(0) \neq 0$. Теперь функция

$$u(x) = \frac{u_n(x)}{u'_n(0)} - \frac{u_m(x)}{u'_m(0)},$$

отличная от тождественного нуля, решает ту же однородную задачу Коши, что невозможно

§ 9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛУЧАИ

Фактическое определение собственных чисел и собственных функций на основании теорем § 4—6 наталкивается на большие технические трудности, поэтому представляют интерес те частные случаи, когда спектр оператора можно найти элементарными средствами. Три таких случая приводятся ниже; см. также § 3 гл. 18.

1. Оператор A § 8 рассмотрим в том простейшем частном случае, когда $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Вопрос сводится к отысканию тех значений λ, при которых дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Общий интеграл уравнения (1) можно записать так:

$$u(x) = C\sin\sqrt{\lambda}(x-a) + C_1\cos\sqrt{\lambda}(x-a).$$

Условие $u(a) = 0$ дает $C_1 = 0$ и $u(x) = C\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$. Из условия $u(b) = 0$ находим $C\sin\sqrt{\lambda}(b-a)$. При этом необходимо $C \neq 0$ — в противном случае получится тривиальное решение $u = 0$. Но тогда $\sin\sqrt{\lambda}(b-a) = 0$. Отсюда находим собственные числа

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

и собственные функции

$$u_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{4}$$

Постоянную C_n получим из условия нормировки

$$\|u_n\|^2 = C_n^2 \int_a^b \sin^2 n\pi \frac{x-a}{b-a}\,dx = 1,$$

откуда $C_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$ и

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{4a}$$

2. Найдем нетривиальные решения уравнения (1) при краевых условиях

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{5}$$

По-прежнему общий интеграл

$$u(x) = C \sin\sqrt{\lambda}(x-a) + C_1 \cos\sqrt{\lambda}(x-a).$$

Из условия $u'(a)=0$ вытекает, что $C=0$, а из условия $u'(b)=0$, что $\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0$. Отсюда находим собственные числа

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6}$$

и нормированные собственные функции

$$u_0(x) = u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) дают собственные числа и собственные функции оператора $-d^2/dx^2$ при краевых условиях (5). Этот оператор неположителен, и с этим связано то обстоятельство, что наименьшее собственное число этого оператора оказалось не положительным, а равным нулю. Но оператор $-d^2/dx^2 + I$ при тех же условиях (5) уже положительно определенный; его собственные функции по-прежнему определяются формулой (7), а соответствующие собственные числа равны $1 + n^2\pi^2/(b-a)^2$.

3. В ряде задач математической физики играют важную роль собственные числа и собственные функции дифференциального оператора

$$Bu = -\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) - \frac{\nu^2}{x}u\right]; \quad \nu^2 = \mathrm{const} \geqslant 0,\ 0 < x < 1. \tag{8}$$

Будем рассматривать его как оператор в пространстве $H = L_2(x;\ 0,\ 1)$ функций, квадратично суммируемых с весом x на промежутке $(0,\ 1)$. Область определения оператора B зададим следующим образом: если $u \in D(B)$, то $u(x)$ и $u'(x)$ абсолютно непрерывны на любом сегменте вида $[\varepsilon,\ 1]$, $0 < \varepsilon < 1$; произведение $\sqrt{x}\,u'(x)$ непрерывно на сегменте $[0,\ 1]$ и обращается в нуль при $x=0$; $Bu \in H$ и, наконец,

$$u(1) = 0. \tag{9}$$

Ниже в настоящем пункте символы (,) и $\|\ \|$ будут обозначать скалярное произведение и норму в H.

Докажем, что B — положительно определенный оператор в H. Обозначим через $\sqrt{x}\,D(B)$ множество функций вида $v(x) = \sqrt{x}\,u(x)$, где $u \in D(B)$. Очевидно, $\sqrt{x}\,D(B) \subset L_2(0,\ 1)$; более того, $\sqrt{x}\,D(B)$ содержит множество функций, финитных на сегменте $[0,\ 1]$, поэтому оно плотно в $L_2(0,\ 1)$.

Пусть $\bar{u}(x)$ — произвольная функция из H. Тогда $\bar{v}(x) = \sqrt{x}\,\bar{u}(x) \in L_2(0,\ 1)$, и можно найти такую функцию $u_0 \in D(B)$, что $\|\sqrt{x}\,\bar{u}(x) - \sqrt{x}\,u_0(x)\|_2 < \varepsilon$, где ε — произвольно заданное положительное число. Но

$$\|\sqrt{x}\,\bar{u} - \sqrt{x}\,u_0\|_2 = \int_0^1 x[\bar{u}^2(x) - u_0^2(x)]\,dx = \|\bar{u} - u_0\|^2;$$

значит, $\|\bar{u} - u_0\| < \varepsilon$ и множество $D(B)$ плотно в H.

Составим билинейный функционал $(Bu,\ v)$, $u,\ v \in D(B)$:

$$(Bu,\ v) = -\int_0^1 v\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) - \frac{\nu^2 u}{x}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{\nu^2 uv}{x}\right)dx. \qquad (10)$$

Правая часть равенства (10) оказалась симметричной относительно u и v, поэтому $(Bu,\ v) = (u,\ Bv)$, и определенный на плотном множестве оператор B симметричен.

Из формулы (10) получаем. что

$$(Bu,\ u) = \int_0^1 \left[xu'^2(x) + \frac{\nu^2}{x}u^2(x)\right]dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 xu'^2(x)\,dx = \|u'\|^2. \qquad (11)$$

Условие (10) дает формулу

$$u(x) = -\int_x^1 u'(t)\,dt, \qquad (12)$$

из которой следует:

$$xu^2(x) \leqslant x(1-x)\int_x^1 [u'(t)]^2\,dt \leqslant x\int_x^1 [u'(t)]^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^1 t\,[u'(t)]^2\,dt \leqslant \int_0^1 t\,[u'(t)]^2\,dt = \|u'\|^2.$$

Интегрируя по x в пределах от нуля до единицы, получим $\|u\|^2 \leqslant \|u'\|^2$. Теперь из неравенства (11) следует, что $(Bu,\ u) \geqslant$

$\geqslant \|u\|^2$, этим доказано, что **оператор** B **положительно определенный** в H.

Соответствующие энергетические произведение и норма таковы:

$$[u, v]_B = \int_0^1 \left[x u'(x) v'(x) + \frac{\nu^2}{x} u(x) v(x) \right] dx; \tag{13}$$

$$\|u\|_B^2 = \int_0^1 \left[x u'^2(x) + \frac{\nu^2}{x} u^2(x) \right] dx. \tag{14}$$

Нетрудно доказать, что энергетическое пространство H_B состоит из функций, которые абсолютно непрерывны на любом сегменте вида $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяют краевому условию (9) и сообщают интегралу (14) конечное значение.

Докажем теперь, что оператор B имеет дискретный спектр Тождество (12) запишем в виде

$$v(x) = \int_0^1 K(x, t)\, w(t)\, dt, \tag{15}$$

где введены обозначения

$$v(x) = \sqrt{x}\, u(x), \quad w(t) = \sqrt{t}\, u'(t),$$
$$K(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < x, \\ -\sqrt{x/t}, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Ядро $K(x, t)$ ограничено: $|K(x, t)| \leqslant 1$. Это ядро, следовательно, **фредгольмово**, оператор (15) вполне непрерывен в $L_2(0, 1)$ и переводит любое множество, ограниченное в $L_2(0, 1)$, в множество, компактное в том же пространстве.

Пусть некоторое множество $\mathfrak{M}$ ограничено в H_B: $\|u\| \leqslant C$, $\forall u \in \mathfrak{M}$. Из (14) и (16) следует, что $\|w\|_2 \leqslant C$. Соответствующее множество функций $\{v(x)\}$ компактно в $L_2(0, 1)$: из этого множества можно выделить последовательность $\{v_n(x)\} = \{\sqrt{x} u_n(x)\}$, сходящуюся в $L_2(0, 1)$; отсюда

$$0 = \lim_{n, m \to \infty} \|v_n - v_m\|_2^2 = \lim_{n, m \to \infty} \int_0^1 x [u_n(x) - u_m(x)]^2 dx =$$
$$= \lim_{n, m \to \infty} \|u_n - u_m\|^2.$$

Таким образом, из множества $\mathfrak{M}$, ограниченного в H_B, оказалось возможным выделить последовательность, сходящуюся в H По теореме 5.6.1 оператор B имеет дискретный спектр. ■

Определение собственных чисел и собственных функций оператора B сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dx}\left(x \frac{du}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} u \right] + \lambda u = 0 \tag{17}$$

при условиях $u \not\equiv 0$, $u \in H_B$. Последнее означает, в частности, что $u(x)$ удовлетворяет условию (9) и сообщает конечное значение интегралу (14). Введя новую переменную $\xi = \sqrt{\lambda} x$, преобразуем уравнение (17) в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) u = 0;$$

общий интеграл уравнения (17) имеет вид[1]

$$u = CJ_\nu(\sqrt{\lambda}\, x) + C_1 Y_\nu(\sqrt{\lambda}\, x),$$

где J_ν и Y_ν суть функции Бесселя значка ν, соответственно первого и второго рода. Требование, чтобы интеграл (14) сходился, приводит к тому, что $C_1 = 0$. Теперь $u = CJ_\nu(x)$, $C \neq 0$. Условие (9) дает $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$. Таким образом,

$$\lambda = \lambda_n = j^2_{\nu,\, n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{18}$$

где $j_{\nu,\, n}$ — n-й положительный корень функции Бесселя $J_\nu(x)$; соответствующая собственная функция есть $u_n(x) = CJ_\nu(j_{\nu,\, n}x)$. Если определить C из условия $\|u_n\| = 1$, то

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,\, n})} J_\nu(j_{\nu,\, n}x), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{19}$$

§ 10. МИНИМАКСИМАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП

Пусть A — положительно определенный оператор, удовлетворяющий условию теоремы 5.6.1: любое множество, ограниченное в энергетической метрике, компактно в метрике исходного пространства. Тогда спектр этого оператора дискретен, пусть λ_n и u_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ — собственные числа и соответствующие им собственные элементы оператора A, ортонормированные в исходном пространстве. Поставим следующую задачу: найти минимум функционала

$$\Phi_A(u) = |u|^2_A \tag{1}$$

на множестве элементов энергетического пространства H_A, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\|u\|^2 = 1 \tag{2}$$

и

$$(u,\ v_1) = 0,\ (u,\ v_2) = 0,\ \ldots,\ (u,\ v_{k-1}) = 0, \tag{3}$$

где $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{k-1}$ — фиксированные элементы исходного пространства H. Описанное здесь множество элементов будем рассматривать как область определения функционала Φ_A и обозначать через $D(\Phi_A)$.

Докажем, что на множестве $D(\Phi_A)$ минимум $\Phi_A(u)$ достигается. Заметим прежде всего, что функционалы $(u,\ v_j)$ ограничены

---

[1] Обозначения, связанные с функциями Бесселя, такие же, как в книге [5]

в энергетическом пространстве H_A:

$$|(u, v_j)| \leqslant \|u\| \cdot \|v_j\| \leqslant \frac{\|v_j\|}{\gamma_0} |u|_A,$$

где γ_0 — нижняя грань оператора A. По теореме Риса, существуют такие элементы $w_j \in H_A$, что

$$(u, v_j) = [u, w_j]_A; \quad j = 1, 2, \ldots, k-1; \; u \in H_A.$$

Дополнительные условия (3), которым теперь можно придать вид

$$[u, w_1] = 0, \; [u_1, w_2] = 0, \; \ldots, \; [u, w_{k-1}] = 0,$$

определяют подпространство H_A, ортогональное к $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$; обозначим его через $\mathfrak{H}_k$.

Нашу вариационную задачу можно сформулировать так: найти минимум функционала (1) на множестве элементов подпространства $\mathfrak{H}_k$, удовлетворяющих дополнительному условию (2). Теперь достаточно повторить рассуждения теоремы 5.5.1, и мы убедимся, что в $\mathfrak{H}_k$ существует элемент w, $\|w\| = 1$, реализующий минимум нашего функционала. Этот минимум обозначим через $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

Минимаксимальный принцип состоит в равенстве

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \lambda_k; \tag{4}$$

максимум берется по всевозможным наборам элементов $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_{k-1}$, принадлежащих исходному пространству H. Доказательство минимаксимального принципа сводится к установлению двух фактов: 1) $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqslant v_k$; 2) существуют такие элементы $v_j^{(0)} \in H$, что $\lambda(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{k-1}^{(0)}) = \lambda_k$. Установим эти факты.

Пусть u — произвольный элемент энергетического пространства H_A. Система $\{u_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве H; разложим по этой системе элементы u и v_j:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \tag{5}$$

$$v_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} u_n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Система $\{u_n\}$ ортогональна и полна в H_A; при этом $|u_n|_A^2 = \lambda_n$. Но тогда система $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ в H_A ортонормирована и полна; разложение элемента $u \in H_A$ по этой системе, очевидно, имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a_n \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{6}$$

По уравнению замкнутости

$$\| u \|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \tag{7}$$

Возьмем в качестве $\bar{u}$ конечную сумму

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n, \tag{8}$$

где числа a_n произвольны. Если потребовать, чтобы элемент (8) удовлетворял условиям (3), то получится система $k-1$ линейных однородных уравнений с k неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_k$,

$$\sum_{n=1}^{k} b_{jn} a_n = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{9}$$

Число уравнений меньше числа неизвестных; поэтому система (9) имеет бесконечное множество решений. Из них хотя бы одно можно выбрать так, чтобы $\|\bar{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = 1$. Тогда $\bar{u} \in D(\Phi_A)$. При этом по формуле (7) $\| u \|_A^2 = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2$. Заменив здесь все λ_n наибольшим из них, λ_k, получим

$$\| \bar{u} \|_A^2 \leqslant \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = \lambda_k.$$

Но $\bar{u}$ есть один из элементов множества $D(\Phi_A)$, поэтому тем более,

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \min_{u \in D(\Phi_A)} \Phi_A(u) \leqslant \lambda_k.$$

Что знак равенства достигается, доказывается совсем просто: достаточно взять $v_j^0 = u_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Справедливость минимаксимального принципа доказана.

Из минимаксимального принципа вытекает важная теорема, позволяющая во многих случаях сравнивать собственные числа двух операторов. Прежде чем формулировать эту теорему, введем одно новое понятие.

Пусть A и B — положительно определенные операторы, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что оператор A не меньше оператора B, и записывать это в виде $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$, если 1) любой элемент пространства H_A принадлежит и пространству H_B; 2) для любого элемента $u \in H_A$ справедливо неравенство

$$| u |_A \geqslant | u |_B. \tag{10}$$

Теорема 5.10.1. *Пусть A и B — положительно определенные операторы, удовлетворяющие условию теоремы* 5.6.1 *и пусть*

$A \geqslant B$. Если λ_k и μ_k — расположенные в порядке возрастания собственные числа операторов A и B, то

$$\lambda_k \geqslant \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Обозначим через $\lambda(v_1, v_1, \ldots, v_{k-1})$ и $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ минимумы функционалов $|u|_A^2$ и $|u|_B^2$ при условиях (2) и (3). Обозначим через $\tilde{u}$ тот элемент, на котором достигается первый минимум. По неравенству (10)

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = |\tilde{u}|_A^2 \geqslant |\tilde{u}|_B^2 \geqslant \min |u|_B^2 = \\ = \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}).$$

Но тогда

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqslant \max \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}),$$

что тождественно с неравенством (11). ■

§ 11. О РОСТЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Обозначим через λ_n собственные числа оператора задачи Штурма — Лиувилля

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu, \quad u(a) = u(b) = 0. \tag{1}$$

На коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ наложим те же ограничения, что и выше: $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны, $p(x) \geqslant p_0$, $q(x) \geqslant 0$ на сегменте $[a, b]$. В § 8 гл. 4 мы видели, что множество функций, образующих энергетическое пространство оператора (1), не зависит от коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ и что

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2\right] dx. \tag{2}$$

Непрерывные на сегменте функции $p(x)$ и $q(x)$ ограничены: $p(x) \leqslant p_1$, $q(x) \leqslant q_1$, $x \in [a, b]$. Обозначим

$$A_0u = -p_0\frac{d^2u}{dx^2}, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

$$A_1u = -p_1\frac{d^2u}{dx^2} + q_1u, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Операторы A_0 и A_1 суть частные случаи оператора A, получаемые при $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv 0$ и $p(x) \equiv p_1$, $q(x) \equiv q_1$ соответственно. Из формулы (2) следует

$$|u|_{A_0}^2 = p_0\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \quad |u|_{A_1}^2 = p_1\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + q_1\int_a^b u^2\,dx.$$

Ясно, что $|u|_{A_0}^2 \leqslant |u|_A^2 \leqslant |u|_{A_1}^2$ и, следовательно, $A_0 \leqslant A \leqslant A_1$. Если μ_k и ν_k суть собственные числа операторов A_0 и A_1 соответственно, то по теореме 5.10.1

$$\mu_k \leqslant \lambda_k \leqslant \nu_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{3}$$

Числа μ_k и ν_k легко найти.

Числа μ_k суть собственные числа задачи

$$p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + \mu u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Полагая здесь $\frac{\mu}{p_0} = \lambda$, придем к задаче п. 1 § 9. В таком случае

$$\mu_k = \frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2}. \tag{4}$$

Точно так же числа ν_k суть собственные числа задачи

$$p_1 \frac{d^2u}{dx^2} + (\nu - q_1)\, u = 0, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

и сравнение с результатами § 9 дает

$$\nu_k = \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1. \tag{5}$$

Соотношения (3) — (5) дают неравенство, определяющее порядок роста собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1. \tag{6}$$

Глава 6

УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий из банахова пространства B_0 в банахово же пространство B_1. Как обычно, предполагаем, что область $D(A)$ плотна в B_0. Говорят, что оператор A допускает левую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R_s, действующий из B_1 в B_0, такой, что [1]

$$R_sA = I_0 + T_0, \tag{1}$$

где I_0 — тождественный, а T_0 — вполне непрерывный оператор в пространстве B_0.

Оператор R_s называется *левым регуляризатором оператора* A. Точно так же оператор A допускает правую регуляризацию, если существует такой ограниченный оператор R_d, действующий также из B_1 в B_0 — *правый регуляризатор оператора* A, что

$$AR_d = I_1 + T_1, \tag{2}$$

где I_1 и T_1 — операторы, соответственно тождественный и вполне непрерывный, в B_1. Наконец, говорят, что A допускает двустороннюю регуляризацию, если он одновременно допускает и правую, и левую регуляризацию.

Отметим некоторые простые следствия из данных определений.

а) *Если оператор A допускает левую (правую) регуляризацию, то сопряженный оператор A^* допускает правую (левую) регуляризацию.* Действительно например, из равенства (1) вытекает, что $A^*R_s^* = I_0^* + T_0^*$ (I_0^* — тождественный оператор в пространстве B_0^*, сопряженном с B_0) и, значит, R_s^* есть правый регуляризатор оператора A^*.

б) *Если существуют оба оператора R_s и R_d, то их разность вполне непрерывна.* Действительно, умножая равенство (1) справа на R_d, а равенство (2) слева на R_s и вычитая, находим $R_d - R_s = R_sT_1 - R_dT_0$. Как известно, произведение двух операторов — ограниченного и вполне непрерывного — само вполне непрерывно, поэтому правая часть последнего равенства вполне непрерывна.

в) *Если A — ограниченный оператор, и существует его левый регуляризатор R_s, то $R_s + T$, где T — вполне непрерывный оператор, также является левым регуляризатором для A.* Аналогичное замечание верно и для правого регуляризатора. Отсюда, в част-

[1] Во всей гл. 6 буква T с индексами или без них будет обозначать вполне непрерывный оператор.

ности, следует, что если ограниченный оператор допускает двустороннюю регуляризацию, то можно считать, что $R_s = R_d$.

Напомним некоторые понятия, известные из функционального анализа. Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий из B_0 в B_1. Решения уравнения $Au = 0$ называются *нулями оператора* A; множество этих нулей образует подпространство, называемое *ядром оператора* A и обозначаемое символом $\operatorname{Ker} A$. Размерность ядра оператора A будем обозначать через $\alpha(A)$. Если, как всегда предположить, что область $D(A)$ плотна в B_0, то существует и замкнут сопряженный оператор A^*. Если хотя бы одно из чисел $\alpha(A)$ и $\alpha(A^*)$ — конечное, то их разность называется *индексом оператора* A и обозначается через $\operatorname{Ind} A$,

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*). \tag{3}$$

Очевидно, $\operatorname{Ind} A$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности $\alpha(A)$ и $\alpha(A^*)$ конечны.

Для того чтобы уравнение

$$Au = f, \quad f \in B_1, \tag{4}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член f был ортогонален к $\operatorname{Ker} A^*$ (иначе говоря, чтобы элемент f аннулировался любым функционалом $v \in \operatorname{Ker} A^*$). Действительно, если уравнение (4) имеет решение u, а $v \in \operatorname{Ker} A^*$, то

$$(f, v) = (Au, v) = (u, A^*v) = (u, 0) = 0;$$

круглыми скобками здесь обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (4), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Известна следующая теорема Хаусдорфа: *для того чтобы оператор был нормально разрешим, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.*

Основные результаты теории Фредгольма (точнее, теории Риса—Шаудера) можно следующим образом сформулировать в терминах п. 2: если I — тождественный, а T — вполне непрерывный оператор, действующие в некотором банаховом пространстве, то оператор $I + T$ нормально разрешим и $\operatorname{Ind}(I + T) = 0$.

§ 2. ТЕОРЕМЫ НЕТЕРА

Теорема 6.2.1. *Если оператор допускает двустороннюю регуляризацию, то его индекс конечен.*

Пусть A — данный оператор, R_s и R_d — его регуляризаторы. Любое решение уравнения $Au = 0$ удовлетворяет также уравнению $R_sAu = 0$, поэтому $\alpha(A) \leqslant \alpha(R_sA)$. Но $\alpha(R_sA) = \alpha(I_0 + T_0) < \infty$; тем более $\alpha(A) < \infty$. Таким образом, если оператор допускает левую регуляризацию, то размерность его ядра конечна.

Оператор A^* также допускает левую регуляризацию — его левый регуляризатор есть R_d^*, поэтому также $\alpha(A^*) < \infty$. Но тогда и величина $\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*)$ конечна. ■

Теорема 6.2.2. *Если оператор допускает левую регуляризацию, то он нормально разрешим.*

В силу теоремы Хаусдорфа достаточно доказать, что область значений данного оператора замкнута.

а) Пусть A данный оператор, и $f \in R(A)$. Тогда существует, по крайней мере, один элемент $u_0 \in D(A)$, удовлетворяющий уравнению $Au_0 = f$. Как было выяснено при доказательстве теоремы 6.2.1, ядро $\operatorname{Ker} A$ конечномерно; пусть n — его размерность, $n = \alpha(A)$ и пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — какой-нибудь его базис. Тогда общее решение уравнения $Au = f$ имеет вид

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k, \tag{1}$$

где c_k — произвольные постоянные.

б) Докажем, что среди элементов (1) есть хотя бы один элемент $\tilde{u}$ с наименьшей нормой,

$$\|\tilde{u}\| = \inf \left\| u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\|; \tag{2}$$

нижняя грань берется по всевозможным наборам чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Прежде всего докажем, что если $c^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to \infty$, то и $\|u\| \to \infty$. Допустим противное: существует последовательность

$$u^{(m)} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} u_k, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

такая, что

$$\|u^{(m)}\| \leqslant a = \text{const} \quad \text{и} \quad c^{(m)} = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(c_k^{(m)}\right)^2 \right]^{1/2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty;$$

тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(m)} u_k \right\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0, \quad \gamma_k^{(m)} = \frac{c_k^{(m)}}{c^{(m)}}. \tag{3}$$

Величины $\gamma_k^{(m)}$ ограничены в совокупности: $|\gamma_k^{(m)}| \leqslant 1$. По теореме Больцано — Вейерштрасса можно выделить сходящуюся при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, подпоследовательность $\left\{\gamma_k^{(m_l)}\right\}$. Пусть γ_k — ее предел. Заменяя в (3) m на m_l и переходя к пределу, получим $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k = 0$, и так как элементы базиса линейно независимы, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$. Это противоречит соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 = \lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k^{(m_l)}\right)^2 = 1,$$

и наше утверждение доказано.

Обозначим через δ правую часть формулы (2) и выберем число c_0 столь большим, чтобы при $c > c_0$ было $\|u\| > 2\delta$. В n-мерном шаре $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = c_0^2$ величина $\|u\|$ есть непрерывная функция переменных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и, следовательно, по крайней мере в одной точке шара достигает своей нижней грани δ. Утверждение п. б) доказано.

в) Докажем теперь, что отношение $\|\tilde{u}\|/\|f\|$ ограничено:

$$\forall f \in R(A), \quad \|\tilde{u}\| \leqslant C\|f\|; \quad C = \text{const}. \tag{4}$$

Допустим противное. Тогда существует последовательность $\{\tilde{u}^{(j)}\}$, такая, что $\|\tilde{u}^{(j)}\| = 1$ и $\|f^{(j)}\| = \|A\tilde{u}^{(j)}\| \to 0$. Пусть R_s — левый регуляризатор оператора A. Тогда

$$R_s f^{(j)} = R_s A\tilde{u}^{(j)} = \tilde{u}^{(j)} + T_0\tilde{u}^{(j)} \tag{5}$$

Из ограниченной последовательности $\{\tilde{u}^{(j)}\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\tilde{u}^{(j_m)}\}$, чтобы существовал предел $\lim\limits_{m\to\infty} T\tilde{u}^{(j_m)}$, этот предел обозначим через $-u^{(0)}$. Одновременно $R_s f^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, потому что оператор R_s ограничен. Из соотношения (5) следует теперь, что $\tilde{u}^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} u^{(0)}$. В то же время $A\tilde{u}^{(j_m)} = f^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. В силу замкнутости оператора A, $u^{(0)} \in D(A)$ и $Au^{(0)} = 0$; отсюда $A(\tilde{u}^{(j)} - u^{(0)}) = f^{(j)}$. Из всех решений уравнения $Au = f^{(j)}$ решение $\tilde{u}^{(j)}$ имеет наименьшую норму, поэтому $\|\tilde{u}^{(j)} - u^{(0)}\| \geqslant \|\tilde{u}^{(j)}\| = 1$, что противоречит соотношению $\tilde{u}^{(j_m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} u^{(0)}$. Неравенство (4) доказано.

г) Пусть $f \in \overline{R(A)}$. Существует такая последовательность $\{f_j\}$, что $f_j \in R(A)$ и $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$. Элементу f_j приведем в соответствие элемент $\tilde{u}_j$ с наименьшей нормой, удовлетворяющий уравнению $A\tilde{u}_j = f_j$; отсюда $R_s A\tilde{u}_j = \tilde{u}_j + T_0\tilde{u}_j = R_s f_j$. В силу неравенства (4) и соотношения $f_j \to f$ нормы элементов $\tilde{u}_j$ ограничены в совокупности. Можно выбрать такую подпоследовательность $\{\tilde{u}_{j_m}\}$, чтобы существовал предел $\lim\limits_{m\to\infty} T_0\tilde{u}_{j_m}$ Регуляризатор R_s ограничен, поэтому $R_s f_{j_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} R_s f$ и, следовательно, существует предел

$$u = \lim_{m\to\infty} \tilde{u}_{j_m} = R_s f - \lim_{m\to\infty} T_0\tilde{u}_{j_m}.$$

Теперь $\tilde{u}_{j_m} \to u$, $A\tilde{u}_{j_m} \to f$. Оператор A замкнут, поэтому $u \in D(A)$ и $Au = f$, так что $f \in R(A)$, и область значений $R(A)$ замкнута. ■

Замечание Теоремы настоящего параграфа, а также следующая ниже теорема 6 3 2 были впервые установлены в 1921 г Ф Нетером для случая одномерных сингулярных интегральных уравнений

§ 3. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНДЕКСА

В этом параграфе рассматриваются только ограниченные операторы, определенные на всем пространстве

Теорема 6.3.1 (Ф. Аткинсон). *Если A и B — ограниченные нормально разрешимые операторы с конечными индексами, то*

$$\operatorname{Ind}(BA) = \operatorname{Ind}(AB) = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B. \tag{1}$$

Пусть базисы ядер операторов A, A^*, B, B^* будут соответственно

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \quad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n^*};$$

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m^*};$$

из этих обозначений ясно, что

$$\alpha(A) = n, \quad \alpha(A^*) = n^*, \quad \alpha(B) = m, \quad \alpha(B^*) = m^*.$$

Подсчитаем число $\alpha(BA)$. Если элемент u удовлетворяет уравнению $BAu = 0$, то

$$Au = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_k, \quad c_k = \text{const}. \tag{2}$$

Оператор A нормально разрешим, поэтому для разрешимости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (\chi_k, \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n^*. \tag{3}$$

Пусть s — ранг матрицы чисел

$$(\chi_k, \psi_j); \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n^*.$$

Общее решение системы (3) зависит от $m - s$ произвольных постоянных, поэтому уравнение (2) имеет $n + m - s$ линейно независимых решений: $\alpha(BA) = n + m - s$.

Приняв во внимание, что ранг матрицы чисел

$$(\psi_j, \chi_k); \quad j = 1, 2, \ldots, n^* \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

также равен s, мы тем же путем убедимся, что

$$\alpha((BA)^*) = \alpha(A^* B^*) = n^* + m^* - s$$

и

$$\operatorname{Ind}(BA) = n + m - n^* - m^* = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B. \blacksquare$$

Теорема 6.3.2. *Если ограниченный оператор A допускает двустороннюю регуляризацию, а T — произвольный вполне непрерывный оператор, то*

$$\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A. \tag{4}$$

Пусть R — регуляризатор оператора A, одновременно левый и правый (см. § 1). Равенства $RA = I_0 + T_0$, $AR = I_1 + T_1$ означают, что оператор R также допускает двустороннюю регуляризацию. По теореме 6.2.1 $\operatorname{Ind} R < \infty$, а по теореме 6.2.2 оба оператора A и R нормально разрешимы. Теперь по теореме Аткинсона $\operatorname{Ind}(RA) =$

$= \operatorname{Ind} R + \operatorname{Ind} A$. Но $\operatorname{Ind}(RA) = \operatorname{Ind}(I_0 + T_0) = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} R. \tag{5}$$

Оператор R является двусторонним регуляризатором и для суммы $A+T$, как это видно из соотношений

$$R(A+T) = I_0 + (T_0 + RT); \quad (A+T)R = I_1 + (T_1 + TR);$$

для суммы $A+T$ справедливо равенство (5): $\operatorname{Ind}(A+T) = -\operatorname{Ind} R$, откуда $\operatorname{Ind}(A+T) = \operatorname{Ind} A$. ■

Теорема 6.3.3. *Пусть A и R имеют те же значения, что и в теореме 6.3.2, и пусть оператор C, действующий из B_0 в B_1, таков, что $\|C\| \leqslant \|R\|^{-1}$. Тогда оператор $A+C$ допускает двустороннюю регуляризацию и*

$$\operatorname{Ind}(A+C) = \operatorname{Ind} A. \tag{6}$$

По известной теореме Банаха оператор $(I_0 + RC)^{-1}$ определен на всем пространстве B_0 и ограничен; очевидно также, что $\alpha((I_0 + RC)^{-1}) = 0$. Сказанное верно и для сопряженного оператора $[(I_0 + RC)^*]^{-1} = (I_0^* + C^*R^*)^{-1}$, так как $\|C^*R^*\| \leqslant \|C\| \cdot \|R\| < 1$. Теперь ясно, что оператор $(I_0 + RC)^{-1}$ нормально разрешим и что его индекс равен нулю. Далее,

$$(I_0 + RC)^{-1} R (A + C) = (I_0 + RC)^{-1} (I_0 + RC + T_0) =$$
$$= I_0 + (I_0 + RC)^{-1} T_0.$$

Это соотношение показывает, что оператор $A+C$ допускает левую регуляризацию; регуляризатором служит произведение $(I_0 + RC)^{-1} R$. Аналогично, из соотношения

$$(A+C) R (I_1 + CR)^{-1} = (I_1 + CR + T_1)(I_1 + CR)^{-1} =$$
$$= I_1 + T_1 (I_1 + CR)^{-1}$$

видно, что сумма $A+C$ допускает и правую регуляризацию. Теперь, применяя формулу (5) и теорему Аткинсона, получаем

$$\operatorname{Ind}(A+C) = -\operatorname{Ind}(I_0 + RC)^{-1} R =$$
$$= -\operatorname{Ind}(I_0 + RC)^{-1} - \operatorname{Ind} R = -\operatorname{Ind} R = \operatorname{Ind} A. \ ■$$

Замечание. Теоремы 6.3.2 и 6.3.3 обычно формулируют так: *индекс оператора, допускающего двустороннюю регуляризацию, устойчив относительно произвольного вполне непрерывного возмущения данного оператора, а также относительно любого возмущения, достаточно малого по норме.*

Пусть A_0 и A_1 — два ограниченных оператора, каждый из которых действует из B_0 в B_1. Назовем эти операторы *гомотопными*, если можно построить оператор-функцию $A(t)$, $t \in [0, 1]$, с перечисленными ниже свойствами:

i) Функция $A(t)$ равномерно непрерывна по норме на сегменте $[0, 1]$: по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|t' - t''| < \delta$, то $\|A(t') - A(t'')\| < \varepsilon$.

ii) $A(0) = A_0$, $A(1) = A_1$.

iii) При любом $t \in [0, 1]$ оператор $A(t)$ допускает двустороннюю регуляризацию.

iv) Пусть $R(t)$ — регуляризатор оператора $A(t)$, одновременно левый и правый. Существует такая постоянная M, что $\|R(t)\| \leqslant M$, $\forall t \in [0, 1]$.

Теорема 6.3.4. *Гомотопные операторы имеют равные индексы.*

Зафиксируем точку $t \in [0, 1]$, положим $\varepsilon = 1/2M$ и найдем соответствующее число δ. Далее положим $A = A(t)$, $R = R(t)$, $C = A(t') - A(t)$, где t' таково, что $|t' - t| < \delta$. Тогда мы окажемся в условиях теоремы 6.3.3; отсюда $\operatorname{Ind} A(t') = \operatorname{Ind} A(t)$. Таким образом, каждую точку сегмента $[0, 1]$ можно окружить интервалом, в котором величина $\operatorname{Ind} A(t)$ остается постоянной. По лемме Бореля, сегмент $[0, 1]$ можно покрыть конечным числом таких интервалов. Пусть эти интервалы суть $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}, I_k$, а нумерация такова, что $0 \in I_1$, $1 \in I_k$ и пересечение $I_j \cap I_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, не пусто. Выбрав $t \in I_j \cap I_{j+1}$, убедимся, что на обоих интервалах I_j и I_{j+1} индекс оператора $A(t)$ имеет одно и то же значение. Отсюда следует, что $\operatorname{Ind} A(t) = \text{const}$ и, в частности, $\operatorname{Ind} A(1) = \operatorname{Ind} A(0)$. ■

§ 4. СИМВОЛ

Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо операторов, действующих из B_0 в B_1, а $\mathfrak{r}$ — кольцо функций (скалярных или матричных), зависящих от переменной точки некоторого конечномерного пространства. Допустим, что между элементами колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{r}$ установлено гомоморфное соответствие, так что каждому оператору $A \in \mathfrak{R}$ приведена в соответствие одна и только одна функция $\Phi_A(\tau) \in \mathfrak{r}$ и каждой функции из $\mathfrak{r}$ соответствует хотя бы один оператор из $\mathfrak{R}$, причем сумме или произведению операторов соответствует сумма или произведение функций:

$$\Phi_{A+B}(\tau) = \Phi_A(\tau) + \Phi_B(\tau); \quad \Phi_{AB}(\tau) = \Phi_A(\tau)\,\Phi_B(\tau).$$

Функцию $\Phi_A(\tau)$ будем называть *символом оператора A*.

Функция, тождественно равная нулю, сама образует кольцо; можно поэтому каждому оператору из кольца $\mathfrak{R}$ привести в соответствие символ, тождественно равный нулю. Чтобы исключить такую возможность, примем следующее допущение: в кольце $\mathfrak{R}$ существует оператор, символ которого нигде не обращается в нуль. Если кольцо $\mathfrak{R}$ содержит тождественный оператор (для этого необходимо $B_1 \equiv B_0$), то это допущение эквивалентно следующему: символ тождественного оператора есть функция, тождественно равная единице (единичной матрице, если $\mathfrak{r}$ — кольцо матриц).

Действительно, первое допущение, очевидно, вытекает из второго. Обратно, пусть $A_0 \in \mathfrak{R}$ и $\Phi_{A_0}(\tau)$ не обращается нигде в нуль. Тогда $\Phi_{A_0}(\tau) = \Phi_{A_0}(\tau) = \Phi_{A_0}(\tau)\;\Phi_I(\tau)$, и $\Phi_I(\tau) \equiv 1$.

Примеры 1. Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо обыкновенных линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В качестве $\mathfrak{r}$ можно взять кольцо полиномов, зависящих от вспомогательной переменной k. За символ дифференциального оператора

$$Au = a_0 \frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{du}{dx} + a_n u \tag{1}$$

можно принять его характеристический полином

$$\Phi_A(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n. \tag{2}$$

2. Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо операторов, которые действуют в пространстве $L_p(G)$ по формуле вида

$$(Au)(x) = a(x)\,u(x) + (Tu)(x). \tag{3}$$

Здесь G — измеримое множество в евклидовом пространстве E_m, $a(x)$ — измеримая ограниченная функция, определенная почти всюду в G, T — вполне непрерывный в $L_p(G)$ оператор. В качестве $\mathfrak{r}$ можно взять кольцо функций, определенных почти всюду в G, измеримых и ограниченных; символ оператора (3) можно определить формулой

$$\tau \equiv x, \quad \Phi_A(\tau) = \Phi_A(x) = a(x). \tag{4}$$

Заметим, что при таком определении символ любого вполне непрерывного оператора тождественно равен нулю.

3. Пусть $L_p(\tau)$ — пространство векторных функций с n составляющими, суммируемых в G со степенью p. Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо операторов, по-прежнему определяемых формулой (3), но с той разницей, что $u(x)$ — векторная функция с n составляющими, а $a(x)$ и T — квадратные матрицы порядка n. Символ оператора (3) и в этом случае можно определить формулой (4); в данном случае $\mathfrak{r}$ есть кольцо матричных функций порядка n, элементы которых определены почти всюду в G, измеримы и ограничены.

Подробнее остановимся на более частном случае, который определяется следующими дополнительными допущениями.

1) $B_1 \equiv B_0$, операторы кольца $\mathfrak{R}$ ограничены. Кольцо $\mathfrak{R}$ содержит тождественный оператор, а также все вполне непрерывные операторы, действующие в B_0.

2) Функции кольца $\mathfrak{r}$ заданы на компактном множестве изменения соответствующих независимых переменных и непрерывны на этом множестве.

3) Если символ $\Phi(\tau) \in \mathfrak{r}$ представляет собой матрицу, неособенную при любом τ (в этом случае будем говорить, что символ не вырождается; в скалярном случае это означает, что функция $\Phi(\tau)$ не обращается в нуль ни при каком τ), то $[\Phi(\tau)]^{-1} \in \mathfrak{r}$.

4) Символ оператора тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда этот оператор вполне непрерывен.

Теорема 6.4.1. *При допущениях 1) — 4) оператор $A \in \mathfrak{R}$ допускает двустороннюю регуляризацию оператором из того же кольца тогда и только тогда, когда символ оператора A не вырождается.*

Достаточность. Пусть символ $\Phi_A(\tau)$ не вырождается. По допущению 3) $[\Phi_A(\tau)]^{-1} \in \mathfrak{R}$. Пусть $R \in \mathfrak{R}$ — какой-нибудь оператор с символом $\Phi_R(\tau) = [\Phi_A(\tau)]^{-1}$. Тогда $\Phi_{RA}(\tau) = \Phi_{AR}(\tau) = 1$ и, следовательно,

$$\Phi_{RA-I}(\tau) = \Phi_{AR-I}(\tau) = 0.$$

В силу допущения 4) разности $RA - I$ и $AR - I$ вполне непрерывны и R есть двусторонний регуляризатор для A.

Необходимость. Если $R \in \mathfrak{R}$ есть двусторонний регуляризатор для оператора $A \in \mathfrak{R}$, то, например, $RA = I + T_0$, где T_0 вполне непрерывен. В таком случае

$$\Phi_R(\tau)\,\Phi_A(\tau) = \Phi_{RA}(\tau) = \Phi_I(\tau) + \Phi_{T_0}(\tau) = 1$$

и, так как функции $\Phi_R(\tau)$ и $\Phi_A(\tau)$ непрерывны на компакте, то символ $\Phi_A(\tau)$ необходимо не вырождается. ■

§ 5. СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ КОШИ

В комплексной плоскости рассмотрим замкнутый контур Γ без самопересечений; такой контур может быть и несвязным. Пусть t — произвольная точка на Γ. Опишем круг радиуса ε с центром в t и пусть Γ_ε — часть Γ, лежащая вне этого круга. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta,$$

где $u(\zeta)$ — некоторая функция, заданная на Γ, то этот предел называется сингулярным интегралом Коши и обозначается обычным знаком интеграла:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{1}$$

Легко дать простое достаточное условие существования сингулярного интеграла (1): оно состоит в том, что $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Действительно,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\, d\zeta + u(t) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t}.$$

Первый интеграл справа очевидным образом стремится к интегралу

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\, d\zeta;$$

второй же интеграл вычисляется элементарно:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln(\zeta - t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} = \ln\left|\frac{\zeta_2 - t}{\zeta_1 - t}\right| + i \arg(\zeta - t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon}.$$

Здесь ζ_1 и ζ_2 — начало и конец дуги Γ_ε, а знак $|_{\Gamma_\varepsilon}$ указывает на то, что берется приращение величины, стоящей под этим знаком, при обходе дуги Γ_ε. Имеем $|\zeta_1 - t| = |\zeta_2 - t| = \varepsilon$, поэтому $\ln|(\zeta_2 - t)/(\zeta_1 - t)| = 0$. Далее, допуская, что контур Γ обходится против часовой стрелки, легко усмотреть, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \arg(\zeta - t)\,|_{\Gamma_\varepsilon} = \pi i.$$

Теперь ясно, что существует сингулярный интеграл частного вида

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \pi i, \tag{2}$$

а следовательно, существует и более общий сингулярный интеграл

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t}\, d\zeta + u(t). \tag{3}$$

Таким образом, если $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, то предел (1) существует при любом $t \in \Gamma$ и представляет собой функцию, заданную на Γ; сингулярный интеграл Коши, следовательно, можно рассматривать как оператор, преобразующий функцию $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ в новую функцию

$$v(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta.$$

Этот оператор, называемый *сингулярным оператором Коши*, обычно обозначают буквой S, так что $v(t) = (Su)(t)$. Сингулярный оператор Коши можно рассматривать и в других функциональных пространствах (см., например, ниже, § 6).

Замечание. Справедлива следующая теорема, доказанная И. И. Приваловым: *если $u \in L_1(\Gamma)$, то сингулярный интеграл* (1) *существует почти всюду на* Γ.

Теорема 6.5.0 (И. И. Привалов). *Если $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ и $0 < \alpha < 1$, то и $Su \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.* Мы не станем доказывать эту важную для дальнейшего теорему, потому что она просто вытекает из более общей теоремы Жиро, которая будет доказана ниже, в § 3 гл. 7.

Ниже для определенности примем, что контур Γ является границей конечной области, которую мы обозначим через D_i; дополнение к $\bar{D}_i$ обозначим через D_e.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4}$$

Он голоморфен как в области D_i, так и в каждой из областей, на которые распадается открытое множество D_e. Будем обозначать интеграл (4) через $F_i(z)$ (соответственно через $F_e(z)$), если $z \in D_i$ (соответственно $z \in D_e$). Если $t \in \Gamma$, то через $F_i(t)$ и $F_e(t)$ обозначим пределы (если они существуют) функций $F_i(z)$ и $F_e(z)$, когда точка z стремится к t по пути, некасательному к Γ.

Теорема 6.5.1. *Если $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\alpha > 0$, то пределы $F_i(t)$ и $F_e(t)$ существуют при любом $t \in \Gamma$ и справедливы формулы Сохоцкого — Племеля*

$$F_i(t) = \frac{1}{2}[u(t) + (Su)(t)]; \qquad F_e(t) = \frac{1}{2}[-u(t) + (Su)(t)]. \tag{5}$$

Интеграл (4) представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{u(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta+\begin{cases}u(t), & z\in D_i,\\ 0, & z\in D_e.\end{cases}\qquad(6)$$

Точка z стремится к t по пути, который не касается контура Γ. Это значит, что z остается внутри одного из вертикальных углов, образованных двумя секущими AA и BB, пересекающимися в точке t (рис. 3).

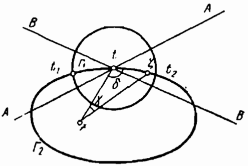

Рис. 3

Докажем, что при $z\to t$ интеграл в (6) справа стремится к пределу, равному

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta.$$

Вокруг точки t опишем окружность достаточно малого радиуса η; пусть t_1 и t_2 — точки ее пересечения с Γ. Обозначим через Γ_1 малую дугу t_2tt_1, через Γ_2 — остальную часть контура Γ. Пусть ζ — произвольная точка на Γ_1. Рассмотрим наименьший из углов, которые хорда $t\zeta$ образует с секущими AA и BB. Радиус η выберем столь малым, чтобы указанный угол был не меньше некоторой постоянной $\lambda>0$; имеем теперь

$$\left|\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|+\left|\int\limits_{\Gamma_1}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{\Gamma_2}\left[\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-z}-\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\right]d\zeta\right|=I_1+I_2+I_3.\qquad(7)$$

Оценим слагаемое I_1. Прежде всего

$$\frac{|\zeta-t|}{|\zeta-z|}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\leqslant\frac{1}{\sin\delta}.$$

Далее, $\lambda\leqslant\delta$ и $\lambda\leqslant\pi-\delta$, поэтому $\sin\delta\geqslant\sin\lambda$ и

$$\frac{1}{|\zeta-z|}\leqslant\frac{1}{|\zeta-t|\sin\lambda};$$

отсюда

$$I_1\leqslant\frac{1}{\sin\lambda}\int\limits_{\Gamma_1}\left|\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\right|\cdot|d\zeta|.$$

Подынтегральная функция имеет оценку $O(|\zeta-t|^{\alpha-1})$ и потому суммируема на Γ. В таком случае при достаточно малом η будет

$I_1 < \varepsilon/3$, где ε — произвольно заданное положительное число. Точно так же при достаточно малом η будет $I_2 < \varepsilon/3$.

Зафиксируем η. В слагаемом I_3 подынтегральная функция непрерывно зависит от z, если z достаточно близко к t, поэтому, если величина $|z-t|$ достаточно мала, то $I_3 < \varepsilon/3$, величина в левой части неравенства (7) меньше ε, и наше утверждение доказано.

Переходя к пределу в (6), получим

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta + u(t),$$

$$F_e(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta.$$

Но по формуле (2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta - \frac{u(t)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta-t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(Su)(t) - u(t)\right].$$

Подставив это в предшествующие равенства, получим формулу (5). ■

Отметим некоторые следствия из формул Сохоцкого — Племеля.

Если функция $u(\zeta)$ аналитически продолжима в D_i, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \begin{cases} u(z), & z\in D_i, \\ 0, & z\in D_e, \end{cases}$$

и из формул (5) вытекает, что $Su = u$.

Если $u(\zeta)$ аналитически продолжима в D_e и на бесконечности обращается в нуль, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \begin{cases} 0, & z\in D_i, \\ -u(z), & z\in D_e, \end{cases}$$

и те же формулы (5) дают $Su \equiv -u$.

Складывая и вычитая формулы (5), получим еще следующие соотношения:

$$F_i(t) + F_e(t) = (Su)(t); \quad F_i(t) - F_e(t) = u(t). \tag{8}$$

Теорема 6.5.2. *Сингулярный оператор Коши удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$S^2 = I, \tag{9}$$

в котором I — тождественный оператор.

Если $u\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, то по теореме 6.5.0 $Su\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, и выражение S^2u имеет смысл. Применяя первую из формул (8), находим $S^2u = SF_i + SF_e$. Но функция F_i

голоморфна в D_i, а функция F_e — в D_e; при этом $F_e(\infty)=0$. В таком случае $SF_i=F_i$ и $S'F_e=-F_e$, отсюда $S^2u=F_i-F_e=u$. ■

Формула (9) впервые была получена Пуанкаре, который, впрочем, допустил ошибку в знаке. Эта ошибка была исправлена французским математиком Г. Бертраном. Формулу (9) обычно называют *формулой Пуанкаре — Бертрана*.

§ 6. ОПЕРАТОР КОШИ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\Gamma)$

Лемма 6.6.1. *Пусть функция* $f(z)=u(z)+iv(z)$, где $z=x+iy=\rho e^{i\theta}$, $u(z)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(z)=\operatorname{Im} f(z)$, *голоморфна в круге* $|z|<1$ *и непрерывна в замкнутом круге* $|z|\leqslant 1$. *Пусть еще* $v(0)=0$. *Тогда*

$$\int_0^{2\pi} |v(e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})|^2\, d\theta. \tag{1}$$

Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n+i\beta_n)\rho^n e^{in\theta}, \quad \beta_0=0.$$

Тогда при $0\leqslant\rho<1$

$$u(z)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta),$$

$$v(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(\beta_n\cos n\theta+\alpha_n\sin n\theta).$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\, d\theta=2\pi\alpha_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}(\alpha_n^2+\beta_n^2),$$

$$\int_0^{2\pi} v^2(\rho e^{i\theta})\, d\theta=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} v^2(\rho e^{i\theta})\, d\theta\leqslant\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad 0\leqslant\rho<1.$$

Обе подынтегральные функции непрерывны при $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\rho\to 1$, и мы получим неравенство (1). ■

Теорема 6.6.1. *Если замкнутый контур* $\Gamma\in C^{(2)}$, *то сингулярный оператор Коши ограничен в* $L_2(\Gamma)$.

Доказательство проведем в предположении, что Γ — связный контур; предоставляем читателю разобрать более общий случай контура конечной связности.

Как и выше, обозначим через D_i конечную область комплексной плоскости, ограниченную контуром Γ; если этот контур связный, то область D_i — односвязная. Пусть $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, и

$$F_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in D_i. \tag{2}$$

Конформно отобразим область D_i на круг $|w| < 1$, и пусть функция $z = \varphi(w)$ реализует это отображение, причем точке $w = 0$ пусть соответствует точка $z_0 \in D_i$. Функция $F_i(\varphi(w)) - F_i(\varphi(0)) = F_i(z) - F_i(z_0)$ удовлетворяет всем условиям леммы 6.6.1, поэтому, полагая $w = \rho e^{i\theta}$, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Im}\,[F_i(\varphi(e^{i\theta})) - F_i(\varphi(0))]|^2\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\,[F_i(\varphi(e^{i\theta})) - F_i(\varphi(0))]|^2\, d\theta.$$

Положим $\varphi(e^{i\theta}) = t$, тогда $t \in \Gamma$ и

$$\int\limits_\Gamma |\mathrm{Im}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 \frac{ds}{|\varphi'(e^{i\theta})|} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Gamma |\mathrm{Re}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2 \frac{ds}{|\varphi'(e^{i\theta})|^2}; \tag{3}$$

здесь $ds = |dt|$ есть элемент длины дуги контура Γ. Контур $\Gamma \in C^{(2)}$, поэтому производная $\varphi'(e^{i\theta})$ положительно ограничена по модулю сверху и снизу.

Пусть $c_1 \leqslant |\varphi'(e^{i\theta})| \leqslant c_2$; $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$, тогда из неравенства (3) следует

$$\int\limits_\Gamma |\mathrm{Im}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2\, ds \leqslant \frac{c_2}{c_1} \int\limits_\Gamma |\mathrm{Re}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]|^2\, ds,$$

или, обозначая через $\|\ \|$ норму в $L_2(\Gamma)$,

$$\|\mathrm{Im}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]\| \leqslant C_1 \|\mathrm{Re}\,[F_i(t) - F_i(z_0)]\|; \quad C_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}};$$

отсюда

$$\|\mathrm{Im}\, F_i(t)\| \leqslant (1 + C_1)\|F_i(z_0)\| + C_1 \|\mathrm{Re}\, F_i(t)\|.$$

По неравенству Буняковского

$$\|F_i(z_0)\| = |\Gamma|^{1/2} |F_i(z_0)| \leqslant \frac{|\Gamma|^{1/2}}{2\pi\delta} \|u\|,$$

где δ — расстояние от z_0 до Γ. Теперь

$$\|\mathrm{Im}\, F_i\| \leqslant C_1 \|\mathrm{Re}\, F_i\| + C_2 \|u\|, \quad C_2 = \mathrm{const},$$

и

$$\|F_i\| \leqslant (1 + C_1)\|\mathrm{Re}\, F_i\| + C_2 \|u\|.$$

По формулам (5.8) находим далее

$$\|Su\|=\|2F_i-u\|\leqslant 2(1+C_1)\|\operatorname{Re}F_i\|+(1+C_2)\|u\|. \tag{4}$$

Оценим величину $\|\operatorname{Re}F_i\|$. Допустим сначала, что функция $u(\zeta)$ вещественная. Имеем равенства

$$\operatorname{Re}F_i(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma u(\zeta)\left[\frac{d\zeta}{\zeta-t}-\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma u(\zeta)\,d\ln\frac{\zeta-t}{\bar\zeta-\bar t}=$$

$$=\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(\zeta)\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{arctg}\frac{\eta-y}{\xi-x}\,d\sigma; \tag{5}$$

здесь использованы обозначения $t=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $|d\zeta|=d\sigma$.

Докажем, что производная под знаком последнего интеграла ограничена. Зададим контур Γ параметрическими уравнениями вида $x=g_1(s)$, $y=g_2(s)$, где s — длина дуги контура Γ от начала отсчета до точки t. Тогда $\xi=g_1(\sigma)$, $\eta=g_2(\sigma)$, где σ — длина дуги кривой Γ между началом отсчета и точкой ζ. При этом $g_1, g_2\in C^{(2)}$, так как $\Gamma\in C^{(2)}$. Теперь

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{arctg}\frac{\eta-y}{\xi-x}=\frac{(\xi-x)g_2'(\sigma)-(\eta-y)g_1'(\sigma)}{|\zeta-t|^2}.$$

Разлагая $x=g_1(s)$ и $y=g_2(s)$ по формуле Тейлора в окрестности точки σ, найдем, что числитель последней дроби имеет порядок $O(|\sigma-s|^2)$. Далее, $|\sigma-s|=O(|\zeta-t|)$, так как длины дуги и соответствующей хорды имеют один и тот же порядок малости. Окончательно, $\partial\beta/\partial\sigma=O(1)$, $\beta=\arg(\zeta-t)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\pi^{-1}|\partial\beta/\partial\sigma|\leqslant c_0=\mathrm{const}$. По формуле (5) $2\|\operatorname{Re}F_i\|\leqslant\leqslant(1+c_0\sqrt{|\Gamma|})\|u\|$. Подставив это в (4), получим

$$\|Su\|\leqslant C_3\|u\|,\quad C_3=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Неравенство (6) выведено для вещественных функций u. Если функция u комплексная, $u=u_1+iu_2$, то

$$\|Su\|\leqslant\|Su_1\|+\|Su_2\|\leqslant C_3(\|u_1\|+\|u_2\|).$$

Но $\|u_1\|\leqslant\|u\|$, $\|u_2\|\leqslant\|u\|$, и мы приходим к искомому результату $\|Su\|\leqslant C\|u\|$, $C=2C_3$.

Следствие 6.6.1. *Сингулярный оператор Коши допускает расширение с сохранением нормы на все пространство $L_2(\Gamma)$. Для расширенного оператора остается в силе формула Пуанкаре — Бертрана.*

Доказательство очевидным образом вытекает из того факта, что класс функций, удовлетворяющих на Γ условию Липшица с положительным показателем, плотен в $L_2(\Gamma)$.

Условимся об обозначении: если $c(t)$ — функция, заданная на Γ, то той же буквой c будем обозначать оператор умножения на $c(t)$.

Теорема 6.6.2. *Если функция $c(t)$ непрерывна на Γ, то оператор $V = Sc - cS$ вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$.*

Рассмотрим сначала случай, когда $c \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. Если еще $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\alpha > 0$, то

$$(Vu)(t) = (S(cu))(t) - c(t)(Su)(t) = \\ = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(\zeta)-c(t)}{\zeta - t}\,u(\zeta)\,d\zeta. \quad (6)$$

Так как $c \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$, то ядро интеграла (6) ограничено, этот интеграл есть оператор, ограниченный в $L_2(\Gamma)$, и можно с помощью предельного перехода распространить формулу (6) на все пространство $L_2(\Gamma)$. По теореме 1.4.1, оператор (6) вполне непрерывен в том же пространстве.

Если функция $c(t)$ только непрерывна, то построим последовательность функций $c_n(t) \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$, которая равномерно сходится к $c(t)$. Это можно сделать, например, так. Единицу длины выберем так, чтобы $|\Gamma| = 2\pi$. Тогда $c(t)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция от s. Разложим эту функцию в ряд Фурье; n-ю фейеровскую сумму этого ряда можно принять за $c_n(t)$.

Положим $V_n = Sc_n - c_nS$. По доказанному, оператор V_n вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$. Оценим норму разности $V - V_n$:

$$\|V - V_n\| = \|S(c - c_n) - (c - c_n)S\| \leqslant \\ \leqslant \|S(c-c_n)\| + \|(c-c_n)S\| \leqslant 2\,\|S\|\max_{t\in\Gamma}|c(t) - c_n(t)|.$$

Но $c_n(t) \to c(t)$ равномерно, поэтому $\max|c(t) - c_n(t)| \to 0$ и $\|V - V_n\| \to 0$. По известной теореме функционального анализа оператор V вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$.

Теорема 6.6.3. *Если функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на Γ, а оператор $aI + bS$ вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$, то $a(t) = b(t) = 0$.*

Вполне непрерывный оператор $aI + bS$ умножим слева на ограниченный оператор $aI - bS$; произведение будет вполне непрерывным. Используя теорему 6.6.2 и формулу Пуанкаре — Бертрана, найдем, что это произведение имеет вид $(a^2 - b^2)I + T$, где T — вполне непрерывный оператор. Отсюда видно, что оператор умножения на $a^2(t) - b^2(t)$ вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$; это возможно лишь, если $a^2(t) - b^2(t) \equiv 0$, или $a(t) = b(t)\,\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) = \pm 1$. Тогда вполне непрерывен оператор $b(\varepsilon I + S)$, и он переводит всякое множество, ограниченное в $L_2(\Gamma)$, в компактное множество.

Пусть функция $w = \omega(z)$ реализует конформное отображение внутренности Γ на круг $|w| < 1$. Последовательность M функций $u_n(t) = \omega^n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена в $L_2(\Gamma)$, действительно,

$$\|u_n\|^2 = \int_\Gamma |\omega^n(t)|^2\,|dt| = \int_{|w|=1} |w|^{2n}\cdot|\omega'(t)|^{-1}\,|dw| = \\ = \int_{|w|=1} |\omega'(t)|^{-1}\cdot|dw| = \mathrm{const}.$$

Покажем, что эта же последовательность некомпактна в $L_2(\Gamma')$, где Γ' — любая дуга на Γ. Допустим противное. Тогда найдутся дуга $\Gamma' \subset \Gamma$ и последовательность значков n_k, такие, что

$$\int\limits_{\Gamma'} |\omega^{n_k}(t) - \omega^{n_l}(t)|^2 |dt| \xrightarrow[k, l \to \infty]{} 0.$$

Пусть при отображении $w = \omega(z)$ дуга Γ' переходит в дугу единичной окружности $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, $\theta = \arg w$, тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} |e^{in_k\theta} - e^{in_l\theta}|^2 |\omega'(t)|^{-1} d\theta \xrightarrow[k, l \to \infty]{} 0.$$

Контур $\Gamma \in C^2$, поэтому величина $|\omega'(t)|^{-1}$ ограничена снизу положительным числом, и из последнего равенства следует, что

$$\lim_{k, l \to \infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin^2 \frac{(n_k - n_l)\theta}{2} d\theta = 0.$$

Однако последний интеграл не стремится к нулю. В этом можно убедиться, например, так. Устремим сначала $k \to \infty$ при фиксированном l, а затем пусть $l \to \infty$. В результате получим

$$\lim_{l \to \infty} \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin^2 \frac{(n_k - n_l)\theta}{2} d\theta =$$
$$= \lim_{l \to \infty} \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{\sin(n_k - n_l)\beta - \sin(n_k - n_l)\alpha}{2(n_k - n_l)} \right) = \frac{\beta - \alpha}{2} \neq 0.$$

Если через $\tilde{\omega}(z)$ обозначить функцию, реализующую конформное отображение внутренности Γ на внешность единичного круга $|w| > 1$, то аналогично можно доказать, что последовательность $\tilde{M}$: $\tilde{\omega}^n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена в $L_2(\Gamma)$, но некомпактна в $L_2(\Gamma')$, какова бы ни была дуга $\Gamma' \in \Gamma$.

Допустим теперь, что существует точка $t_0 \in \Gamma$, в которой $b(t_0) \neq 0$. Тогда на некоторой дуге $\Gamma' \subset \Gamma$ функция $b(t)$ положительно ограничена снизу по модулю. Пусть, например, $\varepsilon(t_0) = 1$. Тогда $\varepsilon(t) = 1$, $\forall t \in \Gamma'$. Рассмотрим последовательность M функций $u_n(t) = \omega^n(t)$. По формулам Сохоцкого — Племеля, $Su_n = u_n$ и если $t \in \Gamma'$, то $(\varepsilon I + S) u_n = 2u_n$. Получается, что умножение на функцию $2b(t)$ преобразует множество M в множество, компактное в $L_2(\Gamma')$. Пусть подпоследовательность $\{2b(t) u_{n_k}(t)\}$ сходится в $L_2(\Gamma')$. Так как на Γ' функция $b(t)$ положительно ограничена снизу по модулю, то в том же пространстве $L_2(\Gamma')$ сходится и последовательность $\{u_{n_k}(t)\}$. Отсюда следует, что последовательность M компактна в $L_2(\Gamma')$, что, как мы видели выше, неверно.

Аналогично исследуется допущение, что $\varepsilon(t_0) = -1$; в этом случае используется последовательность функций $\tilde{M}$. ■

Замечание. Результаты настоящего параграфа распространяются на пространство $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Трудность представляет только доказательство леммы 6.6.1; по этому поводу см., например, [15].

§ 7. СИМВОЛ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА

Оператор вида

$$A = aI + bS + T, \tag{1}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные на Γ непрерывные функции, а вполне непрерывный в $L_2(\Gamma)$ оператор будем называть *общим сингулярным оператором* или, проще, *сингулярным оператором*. Очевидно, такой оператор ограничен в $L_2(\Gamma)$.

Множество $\mathfrak{R}$ сингулярных операторов представляет собой кольцо в $L_2(\Gamma)$. Действительно, пусть $A_k \in \mathfrak{R}$, $k = 1, 2$, так что $A_k = a_k I + b_k S + T_k$, тогда

$$A_1 + A_2 = (a_1 + a_2) I + (b_1 + b_2) S + (T_1 + T_2), \tag{2}$$

и $(A_1 + A_2) \in \mathfrak{R}$. Далее,

$$A_1 A_2 = (a_1 I + b_1 S + T_1)(a_2 I + b_2 S + T_2) =$$
$$= a_1 a_2 I + b_1 S b_2 S + a_1 b_2 S + b_1 S a_2 + \ldots;$$

здесь и ниже в настоящем параграфе многоточие означает вполне непрерывный оператор. Пользуясь теоремой 6.6.2 и формулой Пуанкаре — Бертрана, находим

$$A_1 A_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) I + (a_1 b_2 + a_2 b_1) S + \ldots; \tag{3}$$

отсюда ясно, что $A_1 A_2 \in \mathfrak{R}$.

Из формул (2) и (3) следует, что кольцу операторов $\mathfrak{R}$ можно привести в соответствие кольцо символов. Пусть Θ означает независимую переменную, принимающую только два значения $+1$ и -1, так что $\Theta^2 = 1$. Любому оператору вида (1) приведем в соответствие в качестве символа функцию $\Phi_A(t, \Theta) = a(t) + b(t)\Theta$. Тогда $\Phi_I(t, \Theta) \equiv 1$ и

$$\Phi_{A_1 + A_2}(t, \Theta) = a_1(t) + a_2(t) + [b_1(t) + b_2(t)]\Theta =$$
$$= \Phi_{A_1}(t, \Theta) + \Phi_{A_2}(t, \Theta);$$

$$\Phi_{A_1 A_2}(t, \Theta) = a_1(t) a_2(t) + b_1(t) b_2(t) +$$
$$+ [a_1(t) b_2(t) + a_2(t) b_1(t)]\Theta = \Phi_{A_1}(t, \Theta)\Phi_{A_2}(t, \Theta).$$

Из данного здесь определения и из теоремы 6.6.3 вытекает, что по данному сингулярному оператору его символ определяется единственным образом и что символ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда соответствующий оператор вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$.

Из сказанного здесь ясно, что введенный выше символ удовлетворяет всем требованиям теоремы 6.4.1. Отсюда вытекают следствия, которые мы здесь сформулируем.

Пусть символ $\Phi_A(t, \Theta)$ сингулярного оператора A (формула (1)) не вырождается, т. е. при любом $t \in \Gamma$ и при $\Theta = \pm 1$, $\Phi_A(t, \Theta) \neq 0$. Иначе говоря, допускаем, что при любом $t \in \Gamma$ функция $a^2(t) - b^2(t)$ отлична от нуля. Тогда:

1) оператор A допускает двустороннюю регуляризацию сингулярным же оператором. Символ регуляризатора равен

$$\Phi_R(t, \Theta)=\frac{1}{\Phi_A(t, \Theta)}=\frac{1}{a(t)+b(t)\Theta}=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}-\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}\Theta$$

и, следовательно,

$$R=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}I-\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}S+T',$$

где T' — произвольный оператор, вполне непрерывный в $L_2(\Gamma)$;

2) оператор A нормально разрешим и имеет конечный индекс;

3) индекс оператора A не меняется при произвольных изменениях вполне непрерывного слагаемого T и при произвольных достаточно малых по модулю изменениях коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$.

Для дальнейшего важно следующее замечание: если в операторе (1) $T=0$, так что $A=aI+bS$ (такой сингулярный оператор называется *простейшим*), то $\|A\|\leqslant K\max|\Phi_A(t, \Theta)|$, $K=1+\|S\|$; действительно,

$$\|A\|\leqslant \max|a(t)|+\|S\|\max|b(t)|=$$
$$=\frac{1}{2}\max|\Phi_A(t, +1)+\Phi_A(t, -1)|+\frac{1}{2}\|S\|\max|\Phi_A(t, +1)-$$
$$-\Phi_A(t, -1)|\leqslant(1+\|S\|)\max|\Phi_A(t, \Theta)|.$$

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА

Теорема 6.8.1. *Индекс сингулярного оператора* (7.1), *символ которого не вырождается, равен величине*

$$\operatorname{Ind} A=\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}. \tag{1}$$

Индекс сингулярного оператора (7.1) не зависит от вполне непрерывного слагаемого T и, следовательно, полностью определяется коэффициентами $a(t)$ и $b(t)$. Иначе говоря, индекс сингулярного оператора полностью определяется его символом, и мы будем дальше иногда говорить об индексе символа вместо индекса оператора и писать $\operatorname{Ind}\Phi_A$ вместо $\operatorname{Ind} A$.

Введем в рассмотрение функции

$$\sigma(t)=\Phi_A(t, +1)=a(t)+b(t);\ \delta(t)=\Phi_A(t, -1)=a(t)-b(t). \tag{2}$$

Задание символа $\Phi_A(t, \Theta)$ равносильно заданию пары функций $\sigma(t)$ и $\delta(t)$; будем писать $\Phi_A(t, \Theta)=\{\sigma(t), \delta(t)\}$. Будучи частными значениями символа, функции $\sigma(t)$, соответственно $\delta(t)$, перемножаются при умножении операторов, поэтому если $\Phi_{A_k}(t, \Theta)=\{\sigma_k(t), \delta_k(t)\}$, $k=1, 2$, то $\Phi_{A_1A_2}=\{\sigma_1\sigma_2, \delta_1\delta_2\}$.

Заметим еще, что если $\delta(t)\equiv\sigma(t)$, то $b(t)\equiv 0$, $a(t)=\sigma(t)=\delta(t)$, оператор (7.1) сводится к умножению на непрерывную функцию $a(t)$, которая нигде не обращается в нуль (напомним, что по предположению символ не вырождается). Очевидно, индекс такого оператора равен нулю, $\operatorname{Ind}\{\sigma(t), \sigma(t)\}=0$.

Введем в рассмотрение интегралы

$$\varkappa_+=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln\sigma(t),\quad \varkappa_-=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln\delta(t);$$

это конечные целые числа, причем $\varkappa=\varkappa_- - \varkappa_+$. Поместим начало координат внутри Γ; имея в виду последующее, координатные оси выберем так, чтобы точка $z=1$ не принадлежала контуру Γ. Очевидно,

$$\int_\Gamma d\ln[t^{-\varkappa_+}\sigma(t)]=0,\quad \int_\Gamma d\ln[t^{-\varkappa_-}\delta(t)]=0,$$

так что функции $\tilde\sigma(t)=\ln t^{-\varkappa_+}\sigma(t)$, $\tilde\delta(t)=\ln t^{-\varkappa_-}\delta(t)$ однозначны и, следовательно, непрерывны на Γ. Пусть $\lambda\in[0, 1]$. Введем в рассмотрение простейший сингулярный оператор A_λ с символом $\{t^{\varkappa_+}\exp(\lambda\tilde\sigma(t)),\ t^{\varkappa_-}\exp(\lambda\tilde\delta(t))\}$. Этот оператор удовлетворяет всем условиям теоремы 6.3.4; в частности, в силу замечания в конце § 7, норма регуляризатора будет ограничена независимо от λ, если в качестве регуляризатора взять простейший сингулярный оператор с символом $\{t^{-\varkappa_+}\exp(-\lambda\tilde\sigma(t)),\ t^{-\varkappa_-}\exp(-\lambda\tilde\delta(t))\}$. В таком случае $\operatorname{Ind}A_1=\operatorname{Ind}A_0$. Но операторы A_1 и A различаются лишь вполне непрерывным слагаемым, поэтому $\operatorname{Ind}A=\operatorname{Ind}A_1=\operatorname{Ind}A_0$, и достаточно вычислить величину $\operatorname{Ind}A_0=\operatorname{Ind}\{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_-}\}$. Но $\{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_-}\}=\{t^{\varkappa_+}, t^{\varkappa_+}\}\{1, t^{\varkappa}\}$; индекс первого множителя равен нулю, и по теореме Аткинсона $\operatorname{Ind}A=$ $=\operatorname{Ind}\{1, t^\varkappa\}$. Дальнейшее распадается на три случая.

1. Если $\varkappa=0$, то $\operatorname{Ind}A=\operatorname{Ind}\{1, 1\}=0$; в этом случае теорема уже доказана.

2. Пусть $\varkappa>0$. Тогда $\{1, t^\varkappa\}=\{1, t\}^\varkappa$; по теореме Аткинсона $\operatorname{Ind}A=\varkappa\operatorname{Ind}\{1, t\}$, и задача сведена к вычислению индекса конкретного символа $\{1, t\}$. Соответствующий простейший сингулярный оператор (обозначим его через B) имеет вид

$$(Bu)(t)=\frac{1+t}{2}u(t)+\frac{1-t}{2}(Su)(t). \tag{3}$$

Найдем его нули. На обе части уравнения

$$2(Bu)(t)=(1+t)u(t)+(1-t)(Su)(t)=0 \tag{4}$$

подействуем оператором $(1+t)I-(1-t)S$, который только множителем $2t$ отличается от регуляризатора оператора B. Используя формулу Пуанкаре — Бертрана, получаем уравнение, которому удовлетворяют все решения уравнения (4):

$$u(t)-\frac{1-t}{4\pi i t}\int_\Gamma[u(\zeta)+(Su)(\zeta)]\,d\zeta=0.$$

Отсюда видно, что подпространство нулей оператора B не более чем одномерно: его нулями могут быть только функции вида $u_0(t)=C(1-t)/t$, $C=\text{const}$.

Докажем, что на самом деле $Bu_0=0$. Положим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}F_i(z), & z \text{ внутри } \Gamma,\\ F_e(z), & z \text{ вне } \Gamma.\end{cases}$$

Тогда $F_i(z)=-C$, $F_e(z)=-C/z$. По формулам (5.5) $(Bu_0)(t)= = F_i(t)-tF_e(t)=0$. Таким образом, подпространство нулей оператора B в точности одномерно, и $\alpha(B)=1$.

Вычислим теперь $\alpha(B^*)$. Оператор B^* имеет вид $(B^*v)(t)= = \frac{1+\bar t}{2}v(t)+\left(S^*\left(\frac{1-\bar\zeta}{2}v\right)\right)(t)=\frac{1+\bar t}{2}v(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(1-\bar\zeta)\,v(\zeta)}{\bar t-\bar\zeta}\,d\bar\zeta$,

и нам предстоит исследовать уравнение

$$(1+\bar t)\,v(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(1-\bar\zeta)\,v(\zeta)}{\bar\zeta-\bar t}\,d\bar\zeta=0. \tag{5}$$

Это уравнение упростим следующим образом: все его члены заменим комплексно сопряженными, затем умножим на $1-t$ и введем новую неизвестную $w(t)=(1-t)\overline{v(t)}$; эти операции законны, потому что $t\neq 1$ на Γ. В результате перечисленных операций мы придем к уравнению

$$(1+t)\,w(t)-(1-t)\,(Sw)(t)=0, \tag{6}$$

которое только знаком при втором члене отличается от уравнения (4). Воздействуя на обе части уравнения (6) оператором $(1+t)I+(1-t)S$ найдем, что все решения уравнения (6) удовлетворяют также уравнению

$$w(t)-\frac{1-t}{4\pi i t}\int\limits_{\Gamma}[-w(\zeta)+(Sw)(\zeta)]\,d\zeta=0;$$

отсюда следует, что все эти решения необходимо имеют вид $w_0(t)=c\,(1-t)/t$, $c=\text{const}$. Используя введенные выше функции $F_i(t)$ и $F_e(t)$, найдем, что при подстановке $w=w_0$ левая часть уравнения (6) принимает вид $2[tF_i(t)+F_e(t)]=-2c\,(t+1/t)$, поэтому необходимо $c=0$ и $w_0(t)=0$. Отсюда следует, что $\alpha(B^*)=0$, $\operatorname{Ind}B=\operatorname{Ind}\{1,\ t\}=1$ и, окончательно, $\operatorname{Ind}A=\varkappa$. Теорема доказана и для случая $\varkappa>0$.

3. Пусть $\varkappa<0$. Напишем цепочку равенств

$$\operatorname{Ind}A=\operatorname{Ind}\{1,\ t^{\varkappa}\}=\operatorname{Ind}\{t^{\varkappa},\ t^{\varkappa}\}\{t^{-\varkappa},\ 1\}= \\ =\operatorname{Ind}\{t,\ 1\}^{-\varkappa}=-\varkappa\operatorname{Ind}\{t,\ 1\}.$$

Пусть B_1 — простейший сингулярный оператор с символом $\{t,\ 1\}$:

$$(B_1u)(t)=\frac{1+t}{2}u(t)-\frac{1-t}{2}(Su)(t).$$

Легко убедиться, что отыскание нулей операторов B_1 и B_1^* приводится соответственно к решению уравнений (6) и (4). Отсюда $\alpha(B_1)=0$, $\alpha(B_1^*)=1$, $\operatorname{Ind}B_1=-1$ и $\operatorname{Ind}A=\varkappa$. ■

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Построение сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегралов (и соответствующих интегральных уравнений) требует привлечения довольно сложного аппарата и выходит за рамки настоящей книги; изложение этой теории можно найти в книге автора [27] и в ряде работ, цитированных в этой книге. Здесь мы ограничимся простейшими типами сингулярных интегралов и их исследованием в классах функций Lip_α и L_2. Глава начинается с параграфа, посвященного интегралам Фурье, которые играют большую роль в современной теории уравнений, как интегральных, так и дифференциальных. В частности, большое значение интегралы Фурье имеют для уравнений математической физики.

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Изложим простейшие свойства многомерного преобразования Фурье. Понятие об одномерном преобразовании Фурье и его основные свойства предполагаются известными.

Будем рассматривать функцию $u \in L(E_m)$, так что

$$\int\limits_{E_m} |u(x)|\, dx < \infty.$$

Преобразование Фурье этой функции определим формулой

$$(Fu)(x) = \tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} e^{-i(x,\, y)} u(y)\, dy. \tag{1}$$

Здесь через (x, y) обозначено скалярное произведение в пространстве E_m,

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y k.$$

Функция $\tilde{u}$ определена и непрерывна в каждой точке $x \in E_m$ в силу абсолютной и равномерной сходимости интеграла (1).

Кратное преобразование Фурье можно получить, применяя последовательно одномерное преобразование Фурье: если построить последовательно функции

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) \times$$
$$\times e^{-ix_m y_m} dy_m;$$

$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m) \times$$
$$\times e^{-ix_{m-1}y_{m-1}} dy_{m-1} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) \times$$
$$\times e^{-i(x_{m-1}y_{m-1} + x_m y_m)} dy_{m-1} dy_m;$$

. . . .

$$u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, x_2, \ldots, x_m) \times$$
$$\times e^{-ix_1 y_1} dy_1 = (2\pi)^{-m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1, y_2, \ldots, y_m) \times$$
$$\times e^{-i(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m)} dy_1 dy_2 \ldots dy_m, \qquad (2)$$

то, очевидно, $u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tilde{u}(x)$.

Теорема 7.1.1. *Если k — натуральное число и произведение $(1 + |x|^k) u(x)$ суммируемо в E_m, то преобразование Фурье функции $u(x)$ имеет непрерывные производные порядка, не превосходящего k, всюду в E_m.*

Так как $|u(x)| \leqslant (1 + |x|^k) |u(x)|$, то функция $u \in L(E_m)$ и преобразованная функция $\tilde{u}(x)$ существует и непрерывна в E_m.

Пусть $L = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — мультиндекс, $|\alpha| \leqslant k$. Формально продифференцируем интеграл (1) α_1 раз по $x_1, \ldots, \alpha_m$ раз по x_m; это приведет нас к интегралу

$$(-i)^{\alpha} (2\pi)^{-m/2} \int_{E_m} y^\alpha u(y) e^{-i(x, y)} dy,$$

который сходится абсолютно и равномерно, потому что $|y^\alpha| = \left| y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m} \right| \leqslant |y|^{|\alpha|}$ и, следовательно,

$$|y^\alpha u(y) e^{-i(x, y)}| \leqslant |y|^{|\alpha|} |u(y)| \leqslant (1 + |y|^k) |u(y)|.$$

Мажоранта не зависит от x и суммируема, поэтому дифференцирование под знаком интеграла законно:

$$D^\alpha \tilde{u}(x) = (-i)^{|\alpha|} (2\pi)^{-m/2} \int_{E_m} y^\alpha u(y) e^{-i(x, y)} dy; \quad |\alpha| \leqslant k, \qquad (3)$$

и производные порядка, не превосходящего k, непрерывны. ■

Теорема 7.1.2. *Пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема k раз в любой точке $x \in E_m$. Пусть, далее, сама функция $u(x)$ и все ее производные порядка, не превосходящего k, суммируемы в E_m и обращаются в нуль на бесконечности. Тогда при* *достаточно больших значениях* $|x|$

$$\tilde{u}(x)=(Fu)(x)=O(|x|^{-k}).$$

Рассмотрим некоторую точку $x\in E_m$ и обозначим через j номер ее координаты, наибольшей по модулю. Интеграл (1) возьмем k раз по частям по переменной y_j. При этом внеинтегральные члены обратятся в нуль, и мы получим

$$\tilde{u}(x)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}(ix_j)^{-k}\int\limits_{E_m}\frac{\partial^k u}{\partial y_j^k}e^{-i(x,y)}\,dy.$$

Оценим $\tilde{u}(x)$ по модулю

$$|\tilde{u}(x)|\leqslant(2\pi)^{-\frac{m}{2}}|x_j|^{-k}\int\limits_{E_m}\left|\frac{\partial^k u}{\partial y_j^k}\right|dy.$$

Координата x_j — наибольшая по модулю, поэтому

$$|x|=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_k^2}\leqslant\sqrt{m}\,|x_j|,\quad \frac{1}{|x_j|}\leqslant\frac{\sqrt{m}}{|x|},$$

и окончательно $|\tilde{u}(x)|\leqslant c|x|^{-k}$, где можно положить, например,

$$c=(2\pi)^{-m/2}m^{k/2}\int\limits_{E_m}\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u(y)|\,dy. \blacksquare$$

При некоторых условиях, наложенных на функцию $u(x)$, справедлива *формула обращения преобразования Фурье*,

$$u(x)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{E_m}\tilde{u}(y)e^{i(x,y)}\,dy. \tag{4}$$

Функция $\tilde{u}$, вообще говоря, не суммируема в E_m, поэтому необходимо каждый раз указывать, в каком смысле следует понимать интеграл (4). Разумеется, если $\tilde{u}$ суммируема в E_m, то этот интеграл можно понимать в обычном смысле. Справедлива, например, следующая теорема.

Теорема 7.1.3. *Пусть функция* $u\in\mathfrak{M}^{(1)}(E_m)$. *Тогда справедлива формула обращения (4), в которой интеграл понимается в следующем смысле:*

$$\int\limits_{E_m}\tilde{u}(y)e^{i(x,y)}\,dy=$$

$$=\lim_{N_m\to\infty}\int\limits_{-N_m}^{N_m}\left\{\ldots\lim_{N_2\to\infty}\int\limits_{-N_2}^{N_2}\left\{\lim_{N_1\to\infty}\int\limits_{-N_1}^{N_1}\tilde{u}(y)e^{ix_1y_1}\,dy_1\right\}\times\right.$$

$$\left.\times e^{ix_2y_2}\,dy_2\ldots\right\}e^{ix_my_m}\,dy_m. \tag{5}$$

Конечную область, в которой функция $u(x)$ отлична от нуля, можно поместить внутри некоторого куба. Пусть это будет куб $-a \leqslant x_k \leqslant a$, $k=1, 2 \ldots, m$. Очевидно, функция $u(x)$ суммируема по x_m при фиксированных значениях остальных аргументов и в каждой точке пространства имеет производную по x_m. Применив теорему обращения однократного интеграла Фурье к функции u_1 (формула (2)), получим

$$u(x) = \lim_{N_m \to \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-N_m}^{N_m} u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) e^{ix_m y_m} dy_m.$$

Имеем, далее,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)| \, dx_{m-1} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) e^{-ix_m y_m} dy_m \right| dx_{m-1} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)| \, dx_{m-1} \, dy_m =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-a}^{a} |u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)| \, dx_{m-1} \, dy_m \leqslant \frac{4Ma^2}{\sqrt{2\pi}};$$

через M обозначена верхняя граница значений функции u. Таким образом, функция $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ суммируема по x_{m-1} при всех значениях остальных аргументов.

Докажем теперь, что производная $\frac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}}$ существует в любой точке. Представим u_1 в виде

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-a}^{a} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) e^{-ix_m y_m} dy_m.$$

Справа — интеграл от непрерывно дифференцируемой функции, распространенный по конечному промежутку. Такой интеграл имеет непрерывные производные по всем аргументам, от которых он зависит, в частности, по x_{m-1}. Та же теорема обращения однократного интеграла Фурье дает теперь

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) =$$
$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-a}^{a} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m) e^{-ix_m y_m} dy_m$$

и, следовательно,

$$u(x)=(2\pi)^{-1}\lim_{N_m\to\infty}\int\limits_{-N_m}^{N_m}\left\{\lim_{N_{m-1}\to\infty}\int\limits_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} u_2(x_1, x_2 \dots, y_{m-1}, y_m)\times\right.$$

$$\left.\times e^{ix_{m-1}y_{m-1}}\,dy_{m-1}\right\}e^{-ix_m y_m}\,dy_m.$$

Продолжая этот процесс, в конечном счете придем к формуле (5).

Изложим еще некоторые факты, относящиеся к преобразованию Фурье функций класса $L_2(E_m)$. Такие функции в общем случае не суммируемы в E_m и определение (1) для них непригодно. Пусть функция $u\in L_2(E_m)$. Обозначим через Q_N куб $|x_k|<N$, $k=1, 2 \dots, m$, и определим функцию $u_N(x)$, полагая

$$u_N(x)=\begin{cases} u(x), & x\in Q_N,\\ 0, & x\in Q_N.\end{cases}$$

Очевидно, функция $u_N(x)\in L_1(E_m)$ и существует ее преобразование Фурье

$$F(u_N)(x)=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{E_m} u_N(x)\,e^{-i(x,y)}\,dy=$$

$$=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{Q_N} u(y)\,e^{-i(x,y)}\,dy. \qquad (6)$$

Доказывается, что при $N\to\infty$ функция Fu_N стремится в норме $L_2(E_m)$ к некоторому пределу, который и принимается за преобразование Фурье функции $u(x)$:

$$(Fu)(x)=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{Q_N} u(y)\,e^{-i(x,y)}\,dy. \qquad (7)$$

Из сказанного следует, что оператор F определен на всем пространстве $L_2(E_m)$. Доказывается, что обратный оператор F^{-1} существует и тоже определен на всем пространстве; этот оператор определяется формулой

$$(F^{-1}v)(x)=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{Q_N} v(y)\,e^{i(x,y)}\,dy. \qquad (8)$$

Если $u_1, u_2\in L_2(E_m)$, то справедлива **формула Планшереля**

$$(Fu_1, Fu_2)=(u_1, u_2) \qquad (9)$$

(круглые скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(E_m)$), которая показывает, что оператор F — *унитарный* в $L_2(E_m)$. В частности, это означает, что операторы F и F^{-1} в $L_2(E_m)$ ограничены, причем $\|F\|=\|F^{-1}\|=1$.

Для $m=1$ перечисленные утверждения доказаны, например, в книгах [15] и [39]; для $m>1$ доказательства аналогичны.

Для последующего важно, что преобразование Фурье функции из $L_2(E_m)$ можно определить также и формулой

$$(Fu)(x) = \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{|y|<R} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}\, dy, \tag{9}$$

где предел по-прежнему понимается в смысле сходимости в $L_2(E_m)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что $(\rho = R/\sqrt{m})$

$$\Big\| (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}\, dy \Big\|_{L_2(E_m)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \tag{10}$$

Положим

$$v_R(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (|x|<R)\setminus Q_\rho, \\ 0 & \text{в остальных случаях:} \end{cases}$$

очевидно, $v_R \in L_2(E_m)$. Определяя Fv_R по формуле (7), видим, что

$$(Fv_R)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} u(y)\, e^{-i(x,\,y)}\, dy;$$

соотношение (10) сводится к такому: $\| Fv_R \|_{L_2(E_m)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Но по формуле Планшереля

$$\| Fv_R \|^2_{L_2(E_m)} = \| v_R \|^2_{L_2(E_m)} = \int\limits_{(|y|<R)\setminus Q_\rho} |u(y)|^2\, dy \leqslant \int\limits_{|y|>\rho} |u(y)|^2\, dy,$$

а последний интеграл стремится к нулю, потому что $u \in L_2(E_m)$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА

Здесь и ниже в настоящей главе Ω означает область пространства E_m (конечную или нет — безразлично); мы допускаем и тот случай, когда $\Omega = E_m$. Далее, x и y — точки в E_m, $r = |y - x|$, $\Theta = (y-x)/r$, так что $|\Theta| = 1$; если, скажем, точка x зафиксирована, а точка y пробегает некоторую окрестность точки x, то Θ пробегает единичную сферу S_1.

Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$\int\limits_{\Omega} \frac{f(x,\,\Theta)}{r^m}\, u(y)\, dy, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

по определению,

$$\int\limits_{\Omega} \frac{f(x,\,\Theta)}{r^m}\, u(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)} \frac{f(x,\,\Theta)}{r^m}\, u(y)\, dy, \tag{2}$$

если предел справа существует.

Функция $f(x,\,\Theta)$ называется *характеристикой сингулярного интеграла* (1), функция u — его *плотностью*, точка x — его *полюсом*. Дробь $K(x,\,y) = f(x,\,\Theta)/r^m$ называется *ядром* сингулярного интеграла. Характеристика и плотность предполагаются измеримыми.

Выведем некоторые достаточные условия существования сингулярного интеграла (1). Примем следующие допущения:

1) характеристика $f(x, \Theta)$ ограничена; $|f(x, \Theta)| \leqslant C = \text{const}$;

2) $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, где $0 < \alpha \leqslant 1$; если область Ω бесконечная, то дополнительно потребуем, чтобы $u(x)$ обращалась в нуль вне некоторого шара.

Окружим точку x шаром некоторого фиксированного радиуса δ. Этот радиус возьмем столь малым, чтобы названный шар вместе со своей границей целиком лежал в Ω. Формулу (2) преобразуем к виду

$$\int_\Omega \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy = \int_{\Omega \setminus (r<\delta)} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < r < \delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy + u(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < r < \delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m}\, dy. \quad (3)$$

Первый интеграл в (3) справа, очевидно, сходится. Далее, в шаре $r \leqslant \delta$ плотность $u \in \mathrm{Lip}_\alpha$, и потому $|u(y) - u(x)| \leqslant C_1 r^\alpha$, $C_1 = \text{const}$. Второй интеграл справа можно представить в виде

$$\int_{r<\delta} U(x, y, \varepsilon)\, dy, \quad (4)$$

где $U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & r < \varepsilon; \\ \dfrac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)], & \varepsilon < r < \delta. \end{cases}$

Функция $U(x, y, \varepsilon)$ не превосходит суммируемой функции $CC_1 r^{\alpha - m}$ и в интеграле (4) можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r<\delta} U(x, y, \varepsilon)\, dy = \int_{r<\delta} U(x, y, 0)\, dy =$$

$$= \int_{r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy.$$

Рассмотрим третий интеграл в (3). Введя сферические координаты с центром в точке x, имеем

$$\int_{\varepsilon < r < \delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m}\, dy = \int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1 \int_\varepsilon^\delta \frac{dr}{r} =$$

$$= \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1;$$

ясно, что предел последнего выражения существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{S_1} f(x, \Theta)\, dS_1 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, условие (5) необходимо и достаточно для того, чтобы при допущениях 1) и 2) сингулярный интеграл (1) существовал. Ниже условие (5) всегда предполагается выполненным. В этом случае сингулярный интеграл (1) можно представить в виде

$$\int\limits_{\Omega} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy = \int\limits_{r<\delta} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy + \\ + \int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} \frac{f(x, \Theta)}{r^m} u(y)\, dy, \qquad (6)$$

где δ выбрано так, как указано выше.

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл (4) стремится к своему пределу равномерно по x в любой внутренней замкнутой подобласти. Отсюда вытекает такое следствие: если характеристика непрерывна на $\bar{\Omega} \times S_1$ и выполнено допущение 2), то сингулярный интеграл (1) непрерывен в открытой области Ω.

§ 3. ТЕОРЕМА ЖИРО

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} w(x, y)\, dy, \qquad (1)$$

где Ω — конечная область пространства E_m, $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$, так что шар $r < \delta$ вместе со своей границей лежит в Ω, а функция $w(x, y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области $(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \setminus (r < \delta)$. Найдем производные интеграла (1) по декартовым координатам точки x.

Пусть x имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Обозначим через x' точку с координатами $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_m$; примем, что число h достаточно мало по абсолютной величине. Положим еще $r' = |y - x'|$. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} w(x, y)\, dy = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int\limits_{\Omega \setminus (r'<\delta)} w(x', y)\, dy - \int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} w(x, y)\, dy \right] = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\Omega \setminus (r'<\delta)} [w(x', y) - w(x, y)]\, dy + \\ + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int\limits_{\Omega \setminus (r'<\delta)} w(x, y)\, dy - \int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} w(x, y)\, dy \right].$$

Первый предел справа, как нетрудно видеть, равен интегралу

$$\int\limits_{\Omega \setminus (r<\delta)} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x_j}\, dy.$$

Исследуем второй предел. Выражение под знаком предела можно представить в виде

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_1} w(x,\ y)\,dy-\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,\ y)\,dy,$$

где D_1 и D_2 — луночки, показанные на рис. 4. Рассмотрим, например, выражение $\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,\ y)\,dy$.

Введем в D_2 сферические координаты с центром в точке x. Одна из координат есть r; ее наименьшее значение в D_2 равно δ. На

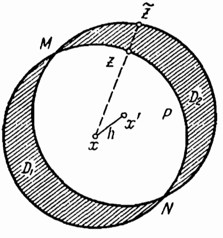

Рис. 4

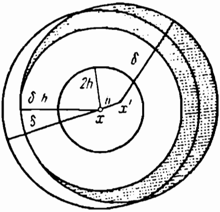

Рис 5

части MPN сферы $r=\delta$ (рис. 4) возьмем какую-нибудь точку z; ее декартовы координаты суть $z_k=x_k+\delta\cos(r,\ x_k)$. Найдем значение величины $r=\tilde{r}$ в точке $\tilde{z}$, лежащей на пересечении сферы $r'=\delta$ и луча $y=x+\lambda(z-x)$, проходящего через точки x и z (рис. 4). Соответствующее значение $\lambda=\tilde{\lambda}$ получится из системы ур внений:

$$\sum_{k\neq l}(y_k-x_k)^2+(y_l-x_l-h)^2=\delta^2,$$

$$y_k=x_k+\lambda(z_k-x_k);\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Приняв во внимание, что $|z-x|=\delta$, находим уравнение для λ:

$$\delta^2\lambda^2+2h\delta\lambda\cos(r,\ x_l)+h^2-\delta^2=0.$$

Точке $\tilde{z}$ соответствует значение $\tilde{\lambda}>1$, поэтому

$$\tilde{\lambda}=\frac{h}{\delta}\cos(r,\ x_l)+\sqrt{\frac{h^2}{\delta^2}\cos(r,\ x_l)+1-\frac{h^2}{\delta^2}}=$$

$$=1+\frac{h}{\delta}\cos(r,\ x_l)+O(h^2).$$

Теперь имеем

$$\tilde{r}=|\tilde{z}-x|=\tilde{\lambda}|z-x|=\lambda\delta=\delta+h\cos(r,\ x_l)+O(h^2).$$

Интегрирование по D_2 сводится к интегрированию по части MPN сферы $r=\delta$ и по r в пределах от δ до $\tilde{\lambda}\delta$:

$$\frac{1}{h}\int_{D_2} w(x,\ y)\,dy=\frac{1}{h}\int_{MPN}\left\{\int_{\delta}^{\tilde{\lambda}\delta} w(x,\ y)\,dr\right\}dS_\delta,$$

или, если к внутреннему интегралу применить теорему о среднем,

$$\frac{1}{h}\int_{D_2} w(x,\ y)\,dy=\int_{MPN} w(x,\ y^*)\,[\cos(r,\ x_l)+O(h)]\,dS_\delta,$$

y^* — некоторая точка интервала $(z,\ \tilde{z})$. Аналогично найдем

$$\frac{1}{h}\int_{D_1} w(x,\ y)\,dy=\int_{MQN} w(x,\ y^{**})\,[\cos(r',\ x_l)+O(h)]\,dS'_\delta.$$

Если $h\to 0$, то MPN и MQN дают в пределе две полусферы, которые вместе образуют сферу $r=\delta$. В результате получаем искомую формулу дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\int_{\Omega\setminus(r<\delta)} w(x,\ y)\,dy=\int_{\Omega\setminus(r<\delta)}\frac{\partial w(x,\ y)}{\partial x_l}\,dy-\int_{r=\delta} w(x,\ y)\cos(r,\ x_l)\,dS_\delta; \qquad (2)$$

во втором интеграле мы заменили обозначение z на y. Из формулы (2), очевидно, следует, что интеграл (1) непрерывно дифференцируем в $\overline{\Omega}$.

Теорема 7.3.1 (Ж. Жиро). *Пусть Ω — конечная область пространства E_m и $u\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, где $0<\alpha<1$. Пусть, далее, сингулярное ядро $K(x,\ y)=r^{-m}f(x,\ \theta)$ таково, что $|f(x,\ \theta)|\leqslant C=$ $=\mathrm{const}$ и*

$$|\mathrm{grad}_x K(x,\ y)|\leqslant\frac{C'}{r^{m+1}},\quad C'=\mathrm{const}. \qquad (3)$$

Тогда $v(x)\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega')$, где

$$v(x)=\int_{\Omega}\frac{f(x,\ \theta)}{r^m}\,u(y)\,dy \qquad (4)$$

и Ω' — произвольная внутренняя подобласть Ω.

Пусть $\delta>0$ — любое число, не большее чем расстояние между $\partial\Omega$ и $\partial\Omega'$. Представим интеграл (4) в форме (2.6). Слагаемые справа в этой формуле обозначим соответственно $v_0(x)$ и $w(x)$. По доказанному выше, $v_0\in C^{(1)}(\overline{\Omega})$; тем более $v_0\in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega}')$, и остается рассмотреть слагаемое

$$w(x)=\int_{r<\delta}[u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,dy. \qquad (5)$$

Пусть x' — произвольная точка в $\overline{\Omega}'$, достаточно близкая к x. Обозначая $|x'-x|=h$, имеем

$$
\begin{aligned}
w(x')-w(x)=&\int\limits_{r'<\delta}[u(y)-u(x')]K(x',y)\,dy-\\
&-\int\limits_{r<\delta}[u(y)-u(x)]K(x,y)\,dy=\\
=&\int\limits_{r<\delta-h}\{[u(y)-u(x')]K(x',y)-[u(y)-u(x)]K(x,y)\}\,dy+\\
&+\int\limits_{(r'<\delta)\cap(r>\delta-h)}[u(y)-u(x')]K(x',y)\,dy-\\
&-\int\limits_{\delta-h<r<\delta}[u(y)-u(x)]K(x,y)\,dy. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Области интегрирования показаны на рис. 5; область интегрирования второго интеграла заштрихована.

В двух последних интегралах справа подынтегральные функции ограничены, а объем области интегрирования имеет порядок $O(h)$ и, тем более, порядок $O(h^\alpha)$, поэтому

$$
\left|\int\limits_{(r'<\delta)\cap(r>\delta-h)}[u(y)-u(x')K(x',y)\,dy-\int\limits_{\delta-h<r<\delta}[u(y)-u(x)]K(x,y)\,dy\right|\leqslant C_1h^\alpha;\quad C_1=\text{const}. \qquad (7)
$$

Первый интеграл в (6) справа разобьем на два: по шару $r<2h$ и по шаровому слою $2h<r<\delta-h$. Имеем

$$
|[u(y)-u(x)]K(x,y)|\leqslant C_0r^{\alpha-m},
$$

$$
|[u(y)-u(x')]K(x,y)|\leqslant C_0r'^{\alpha-m};
$$

здесь $C_0=\text{const}$; отсюда

$$
\left|\int\limits_{r<2h}[u(y)-u(x)]K(x,y)\,dy\right|\leqslant C_0\int\limits_{r<2h}\frac{dy}{r^{m-\alpha}}=C_2h^\alpha; \qquad (8)
$$

C_2 — постоянная, которую нетрудно вычислить, если воспользоваться формулой (3.2) гл. 1. Аналогично имеем

$$
\left|\int\limits_{r<2h}[u(y)-u(x')]K(x',y)\,dy\right|\leqslant C_0\int\limits_{r<2h}\frac{dy}{r'^{m-\alpha}}.
$$

Но если $r<2h$, то $r'=|x'-x+x-y|\leqslant h+r<3h$; это показывает, что шар $r<2h$ лежит внутри шара $r'<3h$ и, следовательно,

$$
C_0\int\limits_{r<2h}\frac{dy}{r'^{m-\alpha}}<C_0\int\limits_{r'<3h}\frac{dy}{r'^{m-\alpha}}=C_3h^\alpha;\quad C_3=\text{const};
$$

здесь использована формула (3.2) гл. 1. Теперь

$$
\left|\int\limits_{r<2h}[u(y)-u(x')]K(x',y)\,dy\right|\leqslant C_3h^\alpha. \qquad (9)
$$

Подынтегральную функцию в интеграле по слою $2h < r < \delta - h$ преобразуем к виду

$$[u(x) - u(x')] K(x, y) + [u(y) - u(x')] [K(x', y) - K(x, y)].$$

Интеграл от первого слагаемого исчезает в силу формулы (2.5). Далее, по формуле Тейлора

$$K(x', y) - K(x, y) = (\operatorname{grad}_x K(\xi, y), x' - x),$$

где ξ — некоторая точка на отрезке, соединяющем точки x и x'. По неравенству (3)

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leqslant C'h |\xi - y|^{-m-1}.$$

Очевидно, что $|\xi - y| > r - h$, но в области интегрирования $h < r/2$, поэтому $|\xi - y| > r/2$ и

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leqslant 2^{m+1} C' h r^{-m-1}.$$

Функция u удовлетворяет условию Липшица, поэтому

$$|u(y) - u(x')| \leqslant C_0 r'^{\alpha} \leqslant C_0 (r + h)^{\alpha} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} C_0 r^{\alpha};$$

теперь

$$\left| \int\limits_{2h < r < \delta - h} [u(y) - u(x')] [K(x', y) - K(x, y)] \, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 h \int\limits_{2h < r < \delta - h} r^{\alpha - m - 1} \, dy = C_4 h \int\limits_{S_1} dS_1 \int\limits_{2h}^{\delta - h} r^{\alpha - 2} \, dr < C_5 h^{\alpha},$$

$$C_4, \ C_5 = \text{const}. \qquad (10)$$

Из неравенств (7)—(10) вытекает, что $|v(x') - v(x)| \leqslant Ch^{\alpha}$, где $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_5$.

Теорема И. И. Привалова 6.5.0 получается из теоремы Жиро при $m = 1$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ СИНГУЛЯРНОГО ЯДРА

Будем рассматривать случай, когда характеристика не зависит от полюса. В этом случае сингулярное ядро

$$K(x, y) = \frac{f(\theta)}{r^m} = |y - x|^{-m} f\left(\frac{y - x}{|y - x|}\right)$$

зависит только от разности аргументов; будем писать $K(x, y) = K(x - y)$.

Рассмотрим преобразование Фурье ядра $K(z)$:

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} K(z) e^{-i(x, z)} \, dz. \qquad (1)$$

Функция $K(z)$ несуммируема в окрестности каждой из точек $z = 0$ и $z = \infty$, интеграл (1) в общем случае расходится, и мы определим преобразование Фурье ядра $K(z)$ формулой

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} \int\limits_{\varepsilon' < |z| < N'} K(z)\, e^{-i(x,\, z)}\, dz. \tag{2}$$

Докажем, что предел (2) существует, если $x \neq 0$ и $f(\Theta)$ ограничена. Соотношению (2) можно придать и другой вид. Положим

$$K_{\varepsilon',\, N'}(x) = \begin{cases} K(x), & \varepsilon' < |x| < N', \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3}$$

тогда

$$(FK)(x) = (2\pi)^{m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} (FK_{\varepsilon',\, N'})(x). \tag{2a}$$

Введем обозначения $|z| = \rho$, $|x| = R$, $\Psi = z/\rho$, $\Lambda = x/R$; очевидно, $|\Psi| = |\Lambda| = 1$ и $K(z) = \rho^{m} f(-\Psi)$. Обозначим еще через γ угол между векторами x и z. Тогда $(x, z) = \rho R \cos\gamma$ и

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ N' \to \infty}} \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon'}^{N'} \frac{e^{-i\rho R \cos\gamma}}{\rho}\, d\rho \right\} dS_1.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $\rho R = t$, положим еще $\varepsilon'/R = \varepsilon$, $N'/R = N$; теперь

$$(FK)(x) = (2\pi)^{-m/2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что преобразование Фурье сингулярного ядра (если это преобразование существует) не зависит от R. Будем поэтому писать $FK(x) = (FK)(\Lambda)$. Соотношение (4) представим в виде

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2} \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 + \right.$$
$$\left. + \lim_{N \to \infty} \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{1}^{N} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 \right]. \tag{5}$$

В силу условия (2.5) имеем

$$\int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\, dt \right\} dS_1 =$$
$$= \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it\cos\gamma} - 1}{t}\, dt + \ln\frac{1}{\varepsilon} \right\} dS_1 =$$
$$= \int\limits_{S_1} f(-\Psi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-it\cos\gamma} - 1}{t}\, dt \right\} dS_1.$$

Отсюда видно, что первое слагаемое справа в (5) имеет предел, равный

$$(2\pi)^{m/2}\int\limits_{S_1} f(-\Psi)\left\{\int\limits_0^1 \frac{e^{-it\cos\gamma}-1}{t}\,dt\right\} dS_1; \tag{6}$$

ясно также, что это слагаемое ограничено независимо от ε.

Обратимся ко второму слагаемому. Выберем декартовы оси координат так, чтобы первая ось прошла через точку Λ, а затем введем соответствующие сферические координаты. Тогда $\gamma=\vartheta_1$. Промежуток $(0, \pi)$ интегрирования по ϑ_1 разобьем на два: $(0, \pi) = (0, \pi/2)\cup(\pi/2, \pi)$. Соответственно сфера S_1 распадется на две части, которые обозначим S' и S'': интеграл во втором слагаемом в (5) распадется на два интеграла. В первом из них $\cos\gamma \geqslant 0$. Во внутреннем интеграле сделаем замену $t\cos\gamma=\tau$, тогда

$$\int\limits_1^N \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt = \int\limits_{\cos\gamma}^{N\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau =$$

$$= \ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int\limits_{\cos\gamma}^{1} \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau + \int\limits_1^{N\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau;$$

соответственно,

$$\int\limits_{S'} f(-\Psi)\left\{\int\limits_1^N \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1 =$$

$$= \int\limits_{S'} f(-\Psi)\left\{\ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int\limits_{\cos\gamma}^{1} \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau\right\} dS_1 +$$

$$+ \int\limits_{S'} f(-\Psi)\left\{\int\limits_1^{N\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\right\} dS_1. \tag{7}$$

Первый интеграл справа в (7) сходится. Во втором внутренний интеграл ограничен, потому что сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \tau^{-1}e^{-i\tau}\,d\tau$; по известной теореме Лебега можно выполнить предельный переход под знаком интеграла. Отсюда следует, что предел интеграла слева в (7) существует и равен

$$\int\limits_{S'} f(-\Psi)\left\{\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1.$$

Отметим еще, что интеграл (7) ограничен независимо от N.

Рассматривая интеграл по S'', где $\cos\gamma \leqslant 0$, во внутреннем интеграле полагаем $-t\cos\gamma=\tau$; дальнейшие рассуждения аналогичны и показывают, что интеграл по S'' ограничен независимо от N и что предел при $N \to \infty$ существует и равен

$$\int\limits_{S'} f(-\Psi)\left\{\int\limits_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1.$$

Окончательно, выражение под знаком предела в (5) ограничено независимо от N; предел существует и равен

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2}\int\limits_S f(-\Psi)\left\{\int\limits_0^1 \frac{e^{-it\cos\gamma}-1}{t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt\right\} dS_1. \quad (8)$$

Ближе исследуем выражение в фигурных скобках: обозначим его через $Q(\cos\gamma)$. Пусть $\cos\gamma > 0$. Подстановка $t\cos\gamma = \tau$ дает

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt = \int\limits_{\cos\gamma}^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau = \ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int\limits_{\cos\gamma}^1 \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau + \int\limits_1^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau;$$

далее,

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{-it\cos\gamma}-1}{t}\,dt = \int\limits_0^{\cos\gamma} \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau.$$

Отсюда

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{\cos\gamma} + \int\limits_0^1 \frac{e^{-i\tau}-1}{\tau}\,d\tau + \int\limits_1^\infty \frac{e^{-i\tau}}{\tau}\,d\tau =$$

$$= \ln\frac{1}{\cos\gamma} - \frac{i\pi}{2} + a;\quad \cos\gamma > 0,$$

где $a = -\int\limits_0^1 \frac{1-\cos\tau}{\tau}\,d\tau + \int\limits_1^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau.$

Если $\cos\gamma < 0$, то положим $\tau = -t\cos\gamma$; аналогично предшествующему получим

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{-\cos\gamma} + \frac{i\pi}{2} + a;\quad \cos\gamma < 0.$$

Формулы для $Q(\cos\gamma)$ можно объединить:

$$Q(\cos\gamma) = \ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma + a.$$

При подстановке в формулу (8) постоянная a исчезнет в силу условия (2.5), и мы получаем окончательную формулу для преобразования Фурье сингулярного ядра:

$$(FK)(\Lambda) = (2\pi)^{-m/2}\int\limits_{S_1}\left(\ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right) f(-\Psi)\,dS_1. \quad (9)$$

Из формулы (9) вытекает, что функция $(FK)(\Lambda)$ ограничена, если $f \in L_p(S_1)$, где p — какое-нибудь число, большее единицы. Действительно, по неравенству Гельдера

$$|(FK)(\Lambda)| \leqslant \left\{ \int\limits_{S_1} |f(-\Psi)|^p \, dS_1 \right\}^{1/p} \times \\ \times \left\{ \int\limits_{S_1} \left| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos\gamma \right|^{p'} dS_1 \right\}^{1/p'}.$$

Выберем систему координат, указанную выше, так, чтобы $\vartheta_1 = \gamma$. Второй интеграл приводится к виду

$$2\pi \int\limits_0^{\pi} \left| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos\gamma \right|^{p'} \sin^{m-2}\gamma \, d\gamma \times \\ \times \int\limits_0^{\pi} \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2} \, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-2},$$

что представляет собой конечную постоянную. Наше утверждение доказано.

§ 5. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В L_2

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$v(x) = \int\limits_{E_m} K(x-y)\, u(y)\, dy = \int\limits_{E_m} \frac{f(\Theta)}{r^m} u(y)\, dy. \qquad (1)$$

Как и в § 3, примем, что характеристика $f(\Theta)$ ограничена на S_1, а плотность $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(E_m)$ и обращается в нуль вне некоторого шара. Найдем преобразование Фурье интеграла (1):

$$(Fv)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} e^{-i(x,z)} \left\{ \int\limits_{E_m} K(z-y)\, u(y)\, dy \right\} dz.$$

Нетрудно видеть, что на бесконечности функция $v(x) = O(|x|^{-m})$ и, следовательно, в общем случае несуммируема в E_m. В то же время очевидно, что $v \in L_2(E_m)$, и ее преобразование Фурье можно определить по формуле

$$(Fv)(x) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{|z|<N} e^{-i(x,z)} v(z)\, dz,$$

где предел понимается в смысле сходимости в $L_2(E_m)$.

Введем ядро $K_{\varepsilon,N}$ по формуле (4.3) и положим

$$v_{\varepsilon,N}(x) = \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon,N}(x-y)\, u(y)\, dy.$$

Из определения сингулярного интеграла следует, что

$$v_{\varepsilon,N}(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\ N\to\infty]{} v(x);$$

имеем далее

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} e^{-i(x, z)} \left\{ \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon, N}(z-y)\, u(y)\, dy \right\} dz =$$
$$= (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E_m} u(y) \left\{ \int\limits_{E_m} K_{\varepsilon, N}(z-y)\, e^{-i(x, z)}\, dz \right\} dy.$$

Выполнив во внутреннем интеграле замену $z-y=\xi$, найдем

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) = (2\pi)^{m/2} (FK_{\varepsilon, N})(x)\,(Fu)(x).$$

Как было доказано в § 4, функция $(FK_{\varepsilon, N})(x) \to (FK)(x) = (FK)(\Lambda)$, оставаясь ограниченной независимо от ε и N. В таком случае, в смысле сходимости в $L_2(E_m)$, справедливо соотношение

$$(Fv_{\varepsilon, N})(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0,\ N \to \infty]{} (2\pi)^{m/2} (FK)(\Lambda)\,(Fu)(x)$$

и, следовательно,

$$(Fv)(x) = (2\pi)^{m/2} (FK)(\Lambda)\,(Fu)(x). \tag{2}$$

Для функций, исчезающих вне некоторого шара, формула (2) дает новое представление сингулярного интеграла:

$$v(x) = \int\limits_{E_m} K(x-y)\, u(y)\, dy = (F^{-1}\Phi Fu)(x), \quad \Phi = (2\pi)^{m/2} FK. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор вида

$$(Au)(x) = au(x) + \int\limits_{E_m} K(x-y)\, u(y)\, dy;$$
$$a = \text{const}, \quad K(x-y) = r^{-m} f(\theta); \tag{4}$$

такие операторы будем называть сингулярными. Оператор (4) можно представить в виде

$$A = F^{-1}\Phi_A F, \tag{5}$$

где

$$\Phi_A(\Lambda) = a + (2\pi)^{m/2} (FK)(\Lambda). \tag{6}$$

Функцию $\Phi_A(\Lambda)$ назовем символом оператора A. Нетрудно видеть, что $\Phi_A(\Lambda)$ обладает свойствами символа, указанным в § 4 гл. 6. Действительно, если

$$(Bu)(x) = bu(x) + \int\limits_{E_m} L(x-y)\, u(y)\, dy; \quad L(x-y) = r^{-m} g(\theta),$$

то

$$(A+B)\, u(x) = (a+b)\, u(x) + \int\limits_{E_m} [K(x-y) + L(x-y)]\, u(y)\, dy$$

и

$$\Phi_{A+B}(\Lambda) = a + b + (2\pi)^{m/2} F(K+L)(\Lambda) = \Phi_A(\Lambda) + \Phi_B(\Lambda).$$

Далее, в соответствии с формулой (5) $B = F^{-1}\Phi_B F$. Но тогда $AB = F^{-1}\Phi_A F F^{-1}\Phi_B F = F^{-1}\Phi_A\Phi_B F$; отсюда видно, что $\Phi_{AB} = \Phi_A\Phi_B$.

Отметим еще, что $BA = F^{-1}\Phi_B\Phi_A F = AB$, так что сингулярные операторы вида (4) коммутируют. Наконец, если $A = I$, то $a = 1$ и $K(x-y) \equiv 0$; в этом случае $\Phi_A = \Phi_I = 1$.

Из представления (5) непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 7.5.1. *Если символ сингулярного оператора ограничен, то самый оператор ограничен в $L_2(E_m)$,* и его *норма не превосходит верхней грани значений символа.*

Действительно, пусть $|\Phi_A(\Lambda)| \leqslant M = \mathrm{const}$. По формуле (5) $Au = F^{-1}\Phi_A Fu$. Вспоминая, что $\|F\| = \|F^{-1}\| = 1$, находим $\|Au\| = \|\Phi Fu\| \leqslant M\|Fu\| = M\|u\|$ и, следовательно, $\|A\| \leqslant M$. ■

Следствие 7.5.1. *Если характеристика сингулярного оператора* (4) $f \in L_p(S_1)$ *при некотором* $p > 1$, *то этот оператор ограничен в* $L_2(E_m)$.

Нелишне отметить, что теорема 7.5.1 и следствие 7.5.1 доказаны только для сингулярных операторов вида (4), у которых как коэффициент a, так и характеристика f не зависят от полюса x.

Теорема 7.5.1 позволяет расширить сингулярный оператор вида (4), символ которого ограничен, на все пространство $L_2(E_m)$, причем норма этого оператора при таком расширении не изменяется. Ниже, говоря о сингулярном операторе с плотностью $u \in L_2(E_m)$, мы будем под сингулярным оператором понимать упомянутое здесь расширение.

Пусть Ω — произвольная область пространства E_m и $u \in L_2(\Omega)$. Сингулярный интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\,dy, \qquad x \in \Omega, \tag{7}$$

определим так: положим

$$u_1(y) = \begin{cases} u(y), & y \in \Omega, \\ 0, & y \in \Omega; \end{cases} \quad v_1(x) = \int\limits_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u_1(y)\,dy, \quad x \in E_m \tag{8}$$

и будем понимать под интегралом (7) сужение функции $v_1(x)$ на область Ω.

Теорема 7.5.2. *Сингулярный оператор*

$$(A_\Omega u)(x) = au(x) + \int\limits_{\Omega} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\,dy, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

ограничен в $L_2(\Omega)$, *если его символ ограничен (в частности, если его характеристика* $f \in L_p(S_1)$, $p > 1$).

Обозначим $\Phi(\Lambda) = a + (FK)(\Lambda)$, где $K(x-y) = r^{-m}f(\theta)$, функцию $\Phi(\Lambda)$ будем называть, хотя это и не совсем точно, символом оператора (9). Используя обозначения (8), получаем в силу теоремы 7.5.1

$$\int\limits_{E_m} |v_1(x)|^2\,dx \leqslant M^2 \int\limits_{E_m} |u_1(x)|^2\,dx = M^2 \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx;$$

тем более

$$\int\limits_{\Omega} |v_1(x)|^2\, dx \leqslant M^2 \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\, dx.$$

Замечание. Можно указать некоторое достаточное условие ограниченности сингулярного оператора в L_2 и в более общем случае. Пусть сингулярный оператор имеет вид

$$(Au)(x) = a_0(x)\, u(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(x,\ \theta)}{r_m}\, u(y)\, dy. \tag{10}$$

Пусть, далее характеристику можно разложить в ряд вида

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, f_n(\theta), \tag{11}$$

причем каждая из функций f_n удовлетворяет условию (2.5), так что $\int\limits_{S_1} f_n(\theta)\, dS_1 = 0$. Рассматривая $f_n(\theta)$ как характеристику некоторого сингулярного интеграла, построим соответствующий символ

$$\Phi_n(\Lambda) = \int\limits_{S_1} \left[\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right] f_n(-\Psi)\, dS_1. \tag{12}$$

Очевидно, оператор (10) ограничен в $L_2(E_m)$, если сходится ряд

$$\sup_{x\in E_m} |a_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E_m} |a_n(x)| \sup_{\Lambda\in S_1} |\Phi_n(\Lambda)|; \tag{13}$$

при этом норма указанного оператора не превосходит суммы ряда (13). Аналогичное утверждение справедливо, если заменить пространство E_m любым его измеримым множеством Ω.

Отметим такой случай. Обозначим через $\tilde{L}_2(S_1)$ подпространство функций из $L_2(S_1)$, ортогональных к единице; любая функция из $\tilde{L}_2(S_1)$ удовлетворяет условию (2.5). Пусть функции f_n, входящие в разложение (11), принадлежат подпространству $\tilde{L}_2(S_1)$ и образуют в нем ортонормированную систему. По доказанному в § 4, $|\Phi_n(\Lambda)| \leqslant C$, где C — постоянная, равная величине

$$\left\{2\pi \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\dots\int\limits_0^{\pi} \left|\ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right|^2 \sin^{m-2}\gamma \times \right.$$
$$\left. \times \sin^{m-3}\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{m-2}\, d\gamma\, d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{m-2}\right\}^{1/2}.$$

В этих условиях оператор (10) ограничен в $L_2(E_m)$, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in E_m} |a_n(x)|; \tag{14}$$

норма оператора (10) при этом не превосходит произведения суммы указанного ряда на постоянную C.

§ 6. О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Пусть Ω — область пространства E_m, которую для простоты предположим конечной. Рассмотрим интеграл со слабой особенностью

$$w(x) = \int_\Omega \frac{\varphi(x, \theta)}{r^\lambda} u(y)\, dy; \quad \theta = \frac{y-x}{r}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $\lambda \leqslant m-1$, а φ как функция независимых переменных x и θ непрерывно дифференцируема по декартовым координатам этих точек на $\bar{\Omega} \times S_1$. Если $\lambda = m-1$, то формальное дифференцирование интеграла (1) дает расходящийся интеграл. Этот случай и рассмотрим.

Теорема 7.6.1. *Пусть $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, а $\varphi(x, \theta)$ обладает свойствами, перечисленными выше. Пусть*

$$w(x) = \int_\Omega \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} u(y)\, dy; \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Тогда существуют и непрерывны в Ω произвольные $\frac{\partial w}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$; их можно вычислять по формуле

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy - u(x) \int_{S_1} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_j)\, dS_1, \tag{3}$$

в которой первый интеграл — сингулярный. Если, кроме того,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right]\right| \leqslant \frac{C}{r^{m+1}}, \quad C = \mathrm{const}, \tag{4}$$

и производные (4) непрерывны при $x \neq y$, то $\frac{\partial w}{\partial x_j} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\bar{\Omega}')$, где Ω' — произвольная внутренняя подобласть Ω.

Имеем $w(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} w_\varepsilon(x)$, где

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\Omega \setminus (r < \varepsilon)} \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} u(y)\, dy. \tag{5}$$

По формуле (3.2)

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_{\Omega \setminus (r < \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy - \int_{r=\varepsilon} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_j)\, \varepsilon^{-(m-1)} u(y)\, dS_\varepsilon.$$

Но $\varepsilon^{-(m-1)} dS_\varepsilon = dS_1$, а во втором члене $y = x + \varepsilon\theta$, $\theta \in S_1$, поэтому последней формуле можно придать вид

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_{\Omega \setminus (r < \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\, dy - \int_{S_1} \varphi(x, \theta)\, u(x + \varepsilon\theta) \cos(r, x_j)\, dS_1. \tag{6}$$

Докажем, что при $\varepsilon \to 0$ выражение (6) равномерно стремится к правой части формулы (3). Это очевидно для поверхностного интеграла в (6), который равномерно стремится к величине

$$u(x)\int\limits_{S_1}\varphi(x,\ \theta)\cos(r,\ x_j)\,dS_1,$$

и остается рассмотреть объемный интеграл.

Введем следующие обозначения. Через $\partial'\varphi/\partial x_j$ обозначим производную от φ, вычисленную в предположении, что r и θ не зависят от x_j, а через $\partial''\varphi/\partial x_j$ — производную, вычисленную в предположении, что φ зависит от x_j только через посредство r и θ. В этих обозначениях

$$\int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x,\ \theta)}{r^{m-1}}\right]u(y)\,dy=\int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)}\frac{\partial'\varphi(x,\ \theta)}{\partial x_j}\frac{1}{r^{m-1}}\,u(y)\,dy+\\+\int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)}\frac{\partial''}{\partial x_j}\left[\frac{\varphi(x,\ \theta)}{r^{m-1}}\right]u(y)\,dy.\qquad(7)$$

Первый интеграл справа равномерно стремится к несобственному интегралу

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial'\varphi(x,\ \theta)}{\partial x_j}\frac{1}{r^{m-1}}\,u(y)\,dy.$$

Ядро второго интеграла можно, очевидно, представить в виде $r^{-m}f(x,\ \theta)$. Докажем, что полученная таким образом функция $f(x,\ \theta)$ удовлетворяет условию (2.5). Нумерацию декартовых осей координат временно выберем так, чтобы $j=1$. Если теперь ввести сферические координаты по формулам (2.1) гл. 1, то от x_1 будут зависеть только r и ϑ_1; остальные угловые координаты от x_1 не зависят. Действительно,

$$\vartheta_{m-1}=\operatorname{arctg}\frac{y_m-x_m}{y_{m-1}-x_{m-1}},\quad \vartheta_{m-2}=\operatorname{arctg}\frac{y_{m-1}-x_{m-1}}{(y_{m-2}-x_{m-2})\cos\vartheta_{m-1}},\ \ldots\\ \ldots,\ \vartheta_2=\operatorname{arctg}\frac{y_3-x_3}{(y_2-x_2)\cos\vartheta_3}.$$

В таком случае

$$f(x,\ \theta)=-(m-1)\,\varphi(x,\ \theta)\frac{\partial r}{\partial x_1}+r\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1}.$$

Далее, $\dfrac{\partial r}{\partial x_1}=\dfrac{x_1-y_1}{r}=-\cos\vartheta_1$; дифференцируя еще раз, получим

$$\sin\vartheta_1\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1}=\frac{1}{r}-\frac{(x_1-y_1)^2}{r^3}=\frac{\sin^2\vartheta_1}{r},$$

отсюда $\partial\vartheta_1/\partial x_1=r^{-1}\sin\vartheta_1$ и, следовательно,

$$f(x,\ \theta)=(m-1)\,\varphi\cos\vartheta_1+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\sin\vartheta_1.$$

Составим интеграл (2.5):

$$\int\limits_{S_1}f(x,\ \theta)\,dS_1=\int\limits_0^{2\pi}d\vartheta_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-2}\ldots\\ \ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{m-3}\vartheta_2\,d\vartheta_2\int\limits_0^{\pi}\left[(m-1)\,\varphi\cos\vartheta_1+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\sin\vartheta_1\right]\sin^{m-2}\vartheta_1\,d\vartheta_1.$$

Внутренний интеграл равен

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} [\sin^{m-1} \vartheta_1 \varphi (x, \theta)]\, d\vartheta_1 = 0,$$

и наше утверждение доказано.

Коль скоро условие (2.5) выполнено, второй интеграл справа в формуле (7) стремится к сингулярному интегралу

$$\int_\Omega \frac{\partial'}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi (x, \theta)}{r^{m-1}} \right] u (y)\, dy$$

и, как было отмечено в § 2, это стремление равномерно в $\overline{\Omega}'$, где Ω' — любая внутренняя подобласть области Ω. Таким образом, в $\overline{\Omega}'$ выражение $\partial w_\varepsilon/\partial x_j$ равномерно стремится к правой части формулы (3). Отсюда следует, что в Ω существует и непрерывна производная $\partial w/\partial x_j$, и эта производная определяется формулой (3). Тем самым доказана первая часть теоремы; ее вторая часть есть простое следствие теоремы Жиро. ■

Теорема 7.6.2. *Пусть функция $\varphi(\theta)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точки θ на S_1, и пусть $u \in L_2(\Omega)$, где Ω — конечная область пространства E_m. Интеграл со слабой особенностью*

$$w (x) = \int_\Omega \frac{\varphi (\theta)}{r^{m-1}} u (y)\, dy \tag{8}$$

имеет обобщенные первые производные $\partial w/\partial x_j \in L_2(\Omega)$, определяемые формулой

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi (\theta)}{r^{m-1}} \right] u (y)\, dy - u (x) \int_{S_1} \varphi (\theta) \cos (r, x_j)\, dS_1. \tag{9}$$

Усредним функцию $u(x)$; пусть $u_h(x)$ — соответствующая средняя функция. Положим

$$w (x, h) = \int_\Omega \frac{\varphi (\theta)}{r^{m-1}} u_h (y)\, dy. \tag{10}$$

По теореме 7.6.1 в Ω существуют и непрерывны производные

$$\frac{\partial w (x, h)}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\varphi (\theta)}{r^{m-1}} \right] u_h (y)\, dy - u_h (x) \int_{S_1} \varphi (\theta) \cos (r, x_j)\, dS_1. \tag{11}$$

Оператор в правой части формулы (9) ограничен в $L_2(\Omega)$, это вытекает из теоремы 7.5.2; по теореме 1.3.2 ограничен в $L_2(\Omega)$ и интегральный оператор (8). С другой стороны, $u_h (x) \xrightarrow[h \to 0]{} u (x)$ в метрике $L_2(\Omega)$ (теорема (2.2.3), поэтому в той же метрике $w(x, h) \to w(x)$, а $\partial w (x, h)/\partial x_j$ стремится к правой части формулы (9). Теперь существование обобщенных производных $\partial w/\partial x_j$, а также формула (9) вытекает из теоремы 2.5.1. ■

Теоремы 7.6.1 и 7.6.2 верны и для одномерных интегралов, если $\frac{1}{r^{m-1}}$ заменить на $\ln \frac{1}{r}$.

Глава 8

УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В самом общем случае дифференциальное уравнение в частных производных с m независимыми переменными можно написать в виде

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0. \qquad (1)$$

Наивысший порядок k производной от неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется его *порядком*. Нетрудно написать также общий вид системы дифференциальных уравнений в частных производных.

В этой книге рассматриваются главным образом *линейные уравнения в частных производных второго порядка*. Как и в предшествующих главах, совокупность значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем рассматривать как точку x m-мерного евклидова пространства E_m с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

В уравнениях, связанных с задачами физики, независимые переменные часто суть время и пространственные координаты; для их обозначения мы иногда будем пользоваться буквами t, x, y, z.

Линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией u и с независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в самом общем случае имеет вид

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x) u = f(x), \qquad (2)$$

где A_{jk}, A_k, A_0, f суть заданные функции от x.

Уравнение (2) на самом деле содержит при $j \neq k$ не отдельные слагаемые $A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ и $A_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$, а их сумму $(A_{jk} + A_{kj}) \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$. Выражение $A_{jk} + A_{kj}$ можно разбить на два слагаемых каким угодно способом, и мы всегда будем считать, что

$$A_{kj}(x) = A_{jk}(x), \qquad (3)$$

так что матрица коэффициентов при вторых производных («матрица старших коэффициентов») оказывается симметричной. Эта матрица в дальнейшем будет играть весьма важную роль.

Левая часть уравнения (2) называется *дифференциальным выражением второго порядка*.

Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения (2), называется его *свободным членом*. Как обычно, различают уравнения *однородные*, когда $f(x)\equiv 0$, и *неоднородные*, когда $f(x)\not\equiv 0$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t). \tag{4}$$

Здесь $m=2$, свободный член $f(x,\ t)$ пропорционален внешней силе, действующей в точке x струны в момент времени t. Матрица старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -a^2\end{pmatrix}. \tag{5}$$

В более сложном случае, когда струна колеблется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, уравнение колебаний струны записывается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\ t),\quad h=\text{const}. \tag{6}$$

Матрица старших коэффициентов по-прежнему имеет вид (5).

2. Уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,\ y,\ t). \tag{7}$$

Матрица его старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\\ 0 & 0 & -a^2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Для уравнения теплопроводности

$$k\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{9}$$

матрица старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Для уравнения Лапласа

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=f(x) \tag{11}$$

матрица старших коэффициентов есть единичная матрица порядка m.

5. Уравнение

$$(1+y)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(1+x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{12}$$

имеет матрицу старших коэффициентов

$$\begin{pmatrix}1+y^2 & -xy\\ -xy & 1+x^2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения второго порядка в частных производных классифицируются в зависимости от свойств характеристических чисел матрицы старших коэффициентов данного уравнения. Напомним, что характеристические числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

суть корни уравнения (I — единичная матрица)

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}A_{11}-\lambda & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \dots & A_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

и что все характеристические числа симметричной матрицы вещественны.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, несколько более общее, чем уравнение (1.2)

$$\sum_{j,\,k=1}^{m}A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\\ +\Phi\left(x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_m,\,u,\,\frac{\partial u}{\partial x_1},\,\frac{\partial u}{\partial x_2},\,\dots,\,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0, \tag{1}$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов. Зафиксируем некоторую точку x, в которой определены коэффициенты уравнения (1), и пусть в этой точке матрица его старших коэффициентов имеет α положительных, β отрицательных и γ нулевых характеристических чисел; очевидно, $\alpha+\beta+\gamma=m$. Будем говорить в этом случае, что в рассматриваемой точке x уравнение (1) принадлежит к типу $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Уравнение (1) принадлежит к типу $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ на некотором точечном множестве, если оно принадлежит к типу $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ в каждой точке данного множества. Очевидно, если старшие коэффициенты A_{jk} в уравнении (1) постоянные, то тип этого уравнения один и тот же во всем пространстве. Если изменить знаки всех членов дифференциального уравнения, то числа α и β поменяются местами, поэтому будем считать тождественными типы (α, β, γ) и (β, α, γ).

Рассмотрим в качестве примеров уравнения пп. 1—5 предшествующего параграфа. В примерах 1—4 матрицы старших коэффициентов - диагональные и их характеристические числа совпадают с элементами главной диагонали. Отсюда сразу видно, что в любой точке пространства уравнение струны имеет тип (1, 1, 0), уравнение мембраны — тип (2, 1, 0), уравнение теплопроводности — тип (3, 0, 1), уравнение Лапласа в m-мерном пространстве — тип $(m, 0, 0)$.

Характеристические числа матрицы (1.13) суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 1+y^2-\lambda & -xy \\ -xy & 1+x^2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

они равны

$$\lambda_1 = 1+x^2+y^2, \quad \lambda_2 = 1.$$

Отсюда видно, что в любой точке (xy) уравнение (1.12) имеет тип (2, 0, 0).

Нетрудно указать уравнения, тип которых в различных точках может оказаться различным. Таково, например, *уравнение Трикоми*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Матрица его старших коэффициентов

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = y$, поэтому названное уравнение имеет при $y > 0$ тип (2, 0, 0), при $y < 0$ — тип (1, 1, 0), а при $y = 0$ — тип (1, 0, 1).

Три из рассмотренных здесь типов уравнений в частных производных играют в математической физике особую роль.

А. Тип $(m, 0, 0) = (0, m, 0)$ называется *эллиптическим*. Уравнение (1), следовательно, принадлежит к эллиптическому типу в данной точке, если в ней все характеристические числа матрицы старших коэффициентов отличны от нуля и имеют один и тот же знак.

Важнейшим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа. Эллиптическим является уравнение (1.12), а также уравнение Трикоми при $y > 0$.

Б. Тип $(m-1, 0, 1) = (0, m-1, 1)$ называется *параболическим*. Таким образом, уравнение (1) принадлежит в данной точке к параболическому типу, если в этой точке матрица старших коэффициентов имеет одно характеристическое число, равное нулю, а все остальные — отличные от нуля и одного знака.

Важнейшим примером параболического уравнения является уравнение теплопроводности, которое мы здесь напишем в виде

$$k \frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x). \tag{3}$$

Частным случаем уравнения (3) является уравнение (1.9). К параболическому типу принадлежит уравнение Трикоми при $y=0$.

В. Тип $(m-1,\ 1,\ 0) = (1,\ m-1,\ 0)$ называется *гиперболическим*. Уравнение (1) будет, следовательно, гиперболическим в данной точке, если в этой точке характеристические числа матрицы его старших коэффициентов все отличны от нуля, причем одно из этих чисел отличается по знаку от всех остальных.

Важнейший пример гиперболического уравнения — это волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x); \tag{4}$$

его частными случаями являются уравнения колебаний струны и мембраны. К гиперболическому типу принадлежит и уравнение Трикоми при $y<0$.

Важность выделенных здесь трех типов уравнений в частных производных — эллиптического, параболического и гиперболического — определяется двумя обстоятельствами. С одной стороны, все до сих пор известные задачи физики приводят, как правило, к уравнениям названных типов; с другой стороны, теория этих уравнений разработана с несравненно большей полнотой, чем теория уравнений в частных производных других типов.

Уравнения типа $(\alpha,\ \beta,\ 0)$, где $\alpha \geqslant 2$ и $\beta \geqslant 2$, часто объединяют под общим названием *ультрагиперболических*. Простейшее ультрагиперболическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0.$$

Эллиптические, параболические и гиперболические уравнения мы будем рассматривать как уравнения математической физики.

Имеется довольно много работ, посвященных уравнениям так называемых «смешанных» типов, т. е. уравнениям, тип которых может меняться от точки к точке. Подробно об этом см. в [35] и [41]. Появился ряд работ, в которых изучаются уравнения типов $(\alpha,\ 0,\ \gamma)$ («эллиптико-параболические уравнения»). Из работ этого направления укажем статью [52].

Если уравнение (1) принадлежит к некоторому типу $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, то будем говорить, что дифференциальное выражение, стоящее в левой части этого уравнения, принадлежит к тому же типу. Можно, в частности, говорить об эллиптических, параболических, гиперболических дифференциальных выражениях.

Классификацию по типам можно распространить и на общие нелинейные дифференциальные выражения второго порядка; как оказывается, в этом случае тип зависит не только от точки пространства, но и от той функции, которая подставлена в дифференциальное выражение.

Пусть $u(x)$ — некоторая функция. Обозначим $p_j = \partial u/\partial x_j$, $p_{jk} = \partial^2 u/\partial x_j\,\partial x_k$. Рассмотрим нелинейное дифференциальное выражение

$$F(x, u, p_1, \ldots, p_m, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{mm}) \tag{5}$$

и составим симметричную матрицу

$$A_{jk}(x, u) = \begin{cases} \partial F/\partial p_{jj}, & k = j, \\ \frac{1}{2}\,\partial F/\partial p_{jk}, & k \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Будем говорить, что в точке x на функции u дифференциальное выражение (5) принадлежит к типу (α, β, γ), если матрица величин (6) имеет α положительных, β отрицательных и γ нулевых собственных чисел. Как и в линейном случае, не различаются типы (α, β, γ) и (β, α, γ). Далее, выражение (5) называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим в точке x на функции u, если соответственно (α, β, γ) совпадает с $(m, 0, 0)$, $(m-1, 0, 1)$ или $(m-1, 1, 0)$.

Понятие типа, естественно, распространяется и на уравнения вида

$$F(x, u, p_1, \ldots, p_m, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{mm}) = 0 \tag{7}$$

с той лишь разницей, что тип уравнения уместно определять не на произвольной функции, а только на решении этого уравнения. В частности, уравнения (7) эллиптично, параболично или гиперболично в точке x на некотором решении u, если дифференциальное выражение F эллиптично, параболично или гиперболично в точке x на функции u.

Для примера рассмотрим играющее важную роль в геометрии дифференциальное *уравнение минимальных поверхностей*

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{8}$$

В данном случае матрица (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + p_2^2, & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2, & 1 + p_1^2 \end{pmatrix}; \quad p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2};$$

ее собственные числа $1 + p_1^2 + p_2^2$ и 1 положительны. Отсюда следует, что в любой точке плоскости E_2 и на любом своем решении уравнение минимальных поверхностей — эллиптическое.

В качестве второго примера рассмотрим на двумерной плоскости *уравнение Монжа — Ампера*

$$rt - s^2 = f(x_1, x_2), \tag{9}$$

где в соответствии с обозначениями, принятыми в дифференциальной геометрии, положено

$$r = p_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad s = p_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t = p_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Матрица (6) для уравнения (9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} t & -s \\ -s & r \end{pmatrix};$$

ее собственные числа суть корни уравнения $\lambda^2 - (r+t)\lambda + rt - s^2 = 0$, или $\lambda^2 - (r+t)\lambda + f(x_1, x_2) = 0$. Отсюда следует, что в любой точке (x_1, x_2) и на любом своем решении уравнение Монжа — Ампера эллиптическое, если $f(x_1, x_2) > 0$, параболическое, если $f(x_1, x_2) = 0$, и, наконец, гиперболическое, если $f(x_1, x_2) < 0$.

§ 3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Желая полностью охарактеризовать физическую задачу, мы не можем ограничиться только дифференциальным уравнением; необходимо добавить некоторые дополнительные соотношения, которые обычно носят характер так называемых *краевых* или *граничных* условий.

Поясним сказанное на простых примерах. Колебания струны описываются уже известным нам дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \qquad (1)$$

Допустим, что струна имеет длину l и в состоянии равновесия она занимала отрезок $[0, l]$ оси x. Далее допустим, что в момент времени $t = 0$ струна была выведена из положения равновесия и начала колебаться. Задача состоит в том, чтобы исследовать отклонение $u(x, t)$ точки струны с произвольной абсциссой $x \in [0, l]$ и в произвольный момент $t > 0$. Иначе говоря, функция $u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (1), должна быть определена на плоскости переменных x и t в области, изображенной на рис. 6. Граница этой области состоит из отрезка $[0, l]$ оси x и из двух лучей $x = 0$, $t > 0$ и $x = l$, $t > 0$.

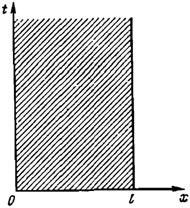

Рис. 6

Единственными данными в дифференциальном уравнении (1) являются величина a^2, которая определенным образом зависит от физических свойств струны (от ее плотности и натяжения), и функция $f(x, t)$, характеризующая внешнюю силу, которая в момент времени t действует на точку x струны. Но уравнение (1) не содержит, например, никакой информации о том, каким образом струна была выведена из положения равновесия, а также о том, каково состояние концов струны; они могут быть жестко закреплены или, наоборот, свободны; может случиться, что концы струны не закреплены, но их перемещения стеснены теми или иными ограничениями. Указанная информация должна быть сообщена особо.

Пусть точке x струны $0 \leqslant x \leqslant l$ сообщены начальное смещение $\varphi_0(x)$ и начальная скорость $\varphi_1(x)$. Тогда искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять соотношениям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2}$$

Пусть еще известны законы колебания концов струны: пусть в момент времени $t \geqslant 0$ смещение левого конца струны равно $\psi_1(t)$, а смещение правого конца — $\psi_2(t)$. Тогда должны выполняться еще соотношения

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t). \tag{3}$$

Условия (3) нет нужды ставить, если струна бесконечная, т. е. если она в состоянии равновесия заполняет всю ось Ox. Дополнительные условия (2) и (3) должны выполняться на линиях $t=0$, $x=0$, $x=l$, т. е. на границе области (см. рис. 6), в которой должна быть определена функция $u(x, t)$. По этой причине указанные условия и называются *граничными* или *краевыми*.

Заметим, что условия (2) и (3) не вполне независимы: если требовать, чтобы искомая функция $u(x, t)$ была непрерывной не только внутри, но и на границе области своего определения, то необходимо, чтобы

$$\varphi_0(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_2(0). \tag{4}$$

Соотношения (4) называются *условиями согласования*. Они вытекают из требования, чтобы смещение концов струны было непрерывным в начальный момент времени.

Если требовать, чтобы на границе области (см. рис. 6) были непрерывны также некоторые из производных функций $u(x, t)$, то могут возникнуть новые условия согласования. Так, если требовать непрерывности первых производных, то необходимо

$$\varphi_1(0) = \psi_1'(0), \quad \varphi_1(l) = \psi_2'(l); \tag{4а}$$

если требовать непрерывности вторых производных, то появляются условия

$$\psi_1''(0) - a^2\varphi_0''(0) = f(0, 0), \quad \psi_2''(0) - a^2\varphi_0''(l) = f(l, 0). \tag{4б}$$

Ниже (гл. 21) будет показано, что при достаточно слабых ограничениях на данные уравнение (1) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее начальным условиям (2) и краевым условиям (3). Это означает, что уравнения (1)—(3) содержат всю информацию, необходимую для исследования явления колебаний струны (решение единственно), и не содержат избыточной, противоречивой информации (решение существует).

Рассмотрим еще один пример. Пусть некоторое однородное изотропное тело занимает в трехмерном пространстве координат x_1, x_2, x_3 область Ω, ограниченную поверхностью Γ. Допустим, что в этом теле распределены источники тепла интенсивности $F(x_1, x_2, x_3)$, не зависящей от времени. Это означает, что в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ за любой промежуток времени длительности δt выделяется количество тепла, равное

$$\delta t \int_{\Omega'} F(x)\,dx.$$

Допустим, что в теле установилось стационарное, т. е. не зависящее от времени, распределение температур. Тогда температура u в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=-f(x), \tag{5}$$

где функция $f(x)$ только постоянным множителем отличается от $F(x)$. Одного дифференциального уравнения (5) недостаточно, чтобы вполне определить распределение температур в теле Ω; это видно хотя бы из того, что уравнение (5) имеет бесконечное множество решений. Необходима дополнительная информация. Ее можно получить, например, так. Поверхность Γ рассматриваемого тела доступна для наблюдений, и в любой ее точке температуру можно измерить. Допустим, что измерена температура во всех точках поверхности Γ, и пусть в точке $x \in \Gamma$ температура u равна $\varphi(x)$. Тогда получаем дополнительное краевое условие

$$u|_\Gamma=\varphi(x), \quad x\in\Gamma. \tag{6}$$

Ниже будет показано, что задача (5)—(6) имеет, в довольно широких условиях, одно и только одно решение.

В неоднородной и неизотропной среде стационарное распределение температур описывается более общим уравнением вида

$$-\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x), \tag{7}$$

которое, так же как уравнение (5), — эллиптическое. Задачу интегрирования уравнения (7) (в частности, уравнения Лапласа (5)) при краевом условии (6) называют *задачей Дирихле*.

Дополнительная информация для уравнения (7) может описываться краевыми условиями, отличными от условия (6). Так, если известно, что в точке $x\in\Gamma$ интенсивность теплового потока равна заданной функции $\psi_1(x)$, то

$$\left[\sum_{j,k=1}^{3} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma=\psi(x), \tag{8}$$

где $\psi(x)$ отличается от $\psi_1(x)$ только некоторым постоянным множителем, а ν — внешняя нормаль к поверхности Γ. Для уравнения

Лапласа $A_{jk}=\delta_{jk}$, и краевое условие (8) принимает вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma}=\psi(x). \tag{9}$$

Задача (7) — (8) (в частности, задача (5), (9)) носит название *задачи Неймана*.

Задачи Дирихле и Неймана можно ставить не только в трехмерном, но и в любом m-мерном пространстве.

Дадим теперь общую формулировку понятий краевых условий и краевой задачи. Пусть дано некоторое дифференциальное уравнение в частных производных

$$Lu=f(x). \tag{10}$$

Будем считать, что решение этого уравнения подлежит определению в некоторой области Ω пространства E_m; границу этой области обозначим через Γ. На всей границе Γ или на некоторой ее части задаются значения одного или нескольких дифференциальных выражений от искомой функции

$$G_k u|_{\Gamma}=\varphi_k(x), \quad k=1, 2, \ldots, l. \tag{11}$$

Уравнения (11) называются краевыми условиями, а задача об интегрировании дифференциального уравнения (10) при краевых условиях (11) называется *краевой задачей.*

§ 4. ЗАДАЧА КОШИ

Для уравнения (1.2) задача Коши ставится следующим образом. В пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ задана некоторая гладкая поверхность Γ. С каждой точкой $x \in \Gamma$ связывается некоторое направление λ, некасательное к Γ. В окрестности (односторонней или двусторонней) поверхности Γ требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее так называемым *условиям Коши*

$$u|_{\Gamma}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_{\Gamma}=\varphi_1(x). \tag{1}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — функции, заданные на Γ; будем считать, что $\varphi_1(x)$ — непрерывная, а $\varphi_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ называются *данными Коши*, а Γ — *поверхностью, несущей данные Коши*, или просто *поверхностью Коши*.

Заметим, что краевые условия (3.2) суть условия Коши для уравнения колебаний струны; роль поверхности Коши играет сегмент $[0, l]$ оси x.

От краевых задач, рассмотренных в § 3, задача Коши отличается тем, что здесь заранее не указывается область, в которой должно быть определено искомое решение. Тем не менее, мы будем рассматривать задачу Коши как одну из краевых задач.

В дальнейшем окажется полезным следующее замечание: зная условия Коши (1), можно найти значения всех первых производных искомой функции на поверхности Коши Г (рис. 7). Для доказательства возьмем на Г произвольную точку x и построим в ней *местную систему координат* $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Так называется система декартовых координат, начало которой находится в точке x, оси $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ расположены в $(m-1)$-мерной

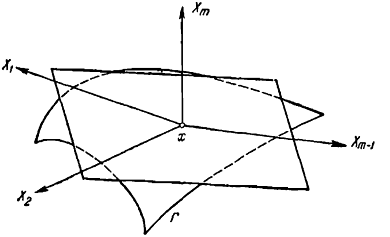

Рис. 7

плоскости, касательной к Г, в точке x, а ось X_m направлена по нормали к Г в той же точке (см. рис. 7). Зная значение функции $u = \varphi_0(x)$ на Г, сразу найдем производные по $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_k}\right|_\Gamma = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1;$$

далее,

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k).$$

Угол (λ, X_m) отличен от прямого, потому что направление λ — некасательное к Г. Но тогда $\cos(\lambda, X_m) \neq 0$, и последнее равенство дает значение недостающей производной:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_m}\right|_\Gamma = \frac{1}{\cos(\lambda, X_m)} \left[\varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k)\right].$$

Зная производные в местной системе координат, мы найдем значения производных в системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_\Gamma = \sum_{l=1}^{m} \left.\frac{\partial u}{\partial X_l}\right|_\Gamma \cos(X_l, x_k).$$

Задачу Коши можно ставить для уравнений, значительно более общих, чем (1.2), а также и для систем уравнений в частных производных.

Изменим несколько обозначения, и пусть общее число независимых переменных равно $m+1$; одну из переменных обозначим через t, остальные — через $x_1, \ldots, x_m$. Совокупность переменных $(x_1, \ldots, x_m)$ будем рассматривать как точку $x \in E_m$. Рассмотрим систему уравнений в частных производных, вообще говоря, нелинейную

$$\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{n_j}} = F_j\left(t, x, u_1, \ldots u_N \ldots, \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial t^{\nu_k}} D_x^{(\alpha^{(k)})} u_k, \ldots\right), \tag{2}$$

подчиненную требованию, чтобы в j-м уравнении было $\nu_k < n_j$ и $\nu_k + |\alpha^{(k)}| \leqslant n_j$. Сразу же отметим, что произвольную систему уравнений в частных производных нельзя привести к виду (2). Задачу Коши для системы (2) можно поставить так: найти функции $u_1(t, x), \ldots, u_N(t, x)$, которые при значениях t, достаточно близких к нулю, удовлетворяют системе (2), а при $t=0$ удовлетворяют начальным условиям

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial t^k} = \varphi_{jk}(x); \quad j = 1, 2, \ldots, N; \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1. \tag{3}$$

Будем говорить, что функция $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ комплексных переменных $y_1, y_2, \ldots, y_s$ аналитична в окрестности значений $y_k = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots, s$, если функция Φ разлагается в степенной ряд

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} A_\gamma (y - y^{(0)})^\gamma, \tag{4}$$

сходящийся, когда разности $y_k - y_k^{(0)}$ достаточно малы по модулю. В формуле (4) γ означает мультииндекс размерности s, а y и $y^{(0)}$ — s-компонентные векторы $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ и $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_s^{(0)})$ соответственно.

Справедлива следующая теорема. *Пусть начальные функции $\varphi_{jk}(x)$ аналитичны в окрестности некоторой точки $x^{(0)} \in E_m$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$, а функции F_j аналитичны в окрестности значений*

$$t = 0, \quad x = x^{(0)}, \quad u_k = \varphi_{0k}(x^{(0)}) \ldots \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial t^{\nu_k}} D_x^{\alpha^{(k)}} u_k = D_x^{\alpha^k} \varphi_{k\nu^{(k)}}(x_0).$$

Тогда задача Коши для системы (2) при начальных значениях (3) имеет одно и только одно решение, аналитическое относительно $t, x_1, \ldots, x_m$ в окрестности значений $t = 0$, $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$.

Утверждения о существовании решения задачи Коши, сформулированной выше, об аналитичности этого решения и о его единственности в классе аналитических функций составляют содержание классической теоремы Коши — Ковалевской. Утверждение о единственности решения задачи (2) — (3) в классе функций, не аналитических, но достаточно гладких, было доказано Хольмгреном. Довольно полные доказательства теоремы Коши — Ковалевской и Хольмгрена приведены в [17]. Для линейных систем вида (12) теорема Коши — Ковалевской доказана в [33].

§ 5. ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И КОРРЕКТНОСТИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть поставлена некоторая краевая задача. Решить ее — значит найти все функции, удовлетворяющие данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям. Обычно искомую функцию подчиняют еще некоторым ограничениям общего характера, которые часто дают возможность рассматривать эту функцию как элемент того или иного функционального пространства; обозначим его через B_1. Так, ставя задачу Дирихле для уравнения Лапласа, можно требовать, чтобы искомая функция была непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; в таком случае искомая функция, если она существует, есть элемент пространства $C(\overline{\Omega})$. Можно искомую функцию подчинить другим ограничениям, например, можно потребовать, чтобы интегралы

$$\int_\Omega u^2\,dx, \quad \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

были конечными. В этом случае искомую функцию можно рассматривать как элемент пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Ограничения, накладываемые на искомую функцию, вынуждают накладывать некоторые ограничения и на заданные функции, входящие в правые части дифференциального уравнения и краевых условий. Обычно в таких случаях оказывается, что совокупность этих правых частей также можно рассматривать как элемент некоторого другого функционального пространства B_2. Во многих интересных случаях пространства B_1 и B_2 банаховы.

Рассмотрим тот случай, когда дифференциальные выражения, входящие как в дифференциальное уравнение, так и в краевые условия, линейны. Совокупность этих дифференциальных выражений порождает некоторый линейный оператор $\mathfrak{A}$, который действует из пространства B_1 в пространство B_2 и преобразует искомую функцию $u(x)$ в упомянутую выше совокупность правых частей дифференциального уравнения и краевых условий. Обозначая эту совокупность через Φ, можно записать нашу краевую задачу в виде уравнения

$$\mathfrak{A}u = \Phi. \tag{1}$$

Оператор $\mathfrak{A}$ будем называть *оператором данной краевой задачи*.

Теперь можно сказать, что решить краевую задачу — значит найти все элементы пространства B_1, которые преобразуются оператором $\mathfrak{A}$ в заданный элемент $\Phi \in B_2$.

Обычно стараются ставить краевые условия так, чтобы краевая задача имела одно и только одно решение. Это требует в каждом случае доказательства теоремы существования и теоремы единственности. Теорема единственности равносильна утверждению, что существует оператор $\mathfrak{A}^{-1}$, обратный оператору $\mathfrak{A}$, а теорема существования — что область значений оператора $\mathfrak{A}$ совпадает с пространством B_2. Если верны обе теоремы — единственности и существования, то оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ существует и определен на всем пространстве B_2.

При решении краевых задач важную роль играет, кроме вопросов существования и единственности решения, еще и вопрос о так называемой корректности краевой задачи. К понятию корректности легко подойти с помощью простых физических соображений. В основе определения физических величин в конечном счете лежит процесс измерения, который всегда связан с некоторой погрешностью. В частности, с погрешностью определяется и элемент Φ в уравнении (1) — совокупность данных краевой задачи. Возникает вопрос: как погрешность в данных краевой задачи отразится на ее решении? В связи с этим вопросом находится следующее определение.

Краевая задача называется *корректной в паре банаховых пространств B_1 и B_2, если решение краевой задачи единственно в B_1 и существует при любых данных из B_2 и если достаточно малому изменению данных в норме B_2 соответствует сколь угодно малое изменение решения в норме B_1.*

Теорема 8.5.1. *Для того чтобы линейная задача* (1) *была корректной в паре банаховых пространств (B_1, B_2), необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $R = A^{-1}$, действующий из B_2 в B_1, причем $D(R) = B_2$* и *R ограничен как оператор из B_2 в B_1.*

Необходимость. Если задача (1) корректна, то прежде всего ее решение существует при любом $\Phi \in B_2$ и единственно. Единственность решения означает существование оператора $R = A^{-1}$, а существование решения при любом $\Phi \in B_2$ — что оператор R определен на всем пространстве B_2.

Заменим, далее, элемент Φ на $\Phi + \varphi$, где $\varphi \in B_2$, и пусть измененное решение задачи (1) будет $U + u$. Тогда $A(U + u) = \Phi + \varphi$, и так как A — линейный оператор, то $Au = \varphi$. Задача (1) корректна, поэтому если задано число $\varepsilon > 0$, то можно найти такое число $\delta > 0$, что при $\|\varphi\| < \varepsilon$ будет $\|u\| = \|R_\varphi\| < \delta$. Зафиксируем как ε, так и соответствующее ему δ. Если $\psi \in B_2$ и $\|\psi\| = 1$, то $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ и, следовательно, $\left\|R\,\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2}\|R\psi\| < \delta$. Отсюда $\|R\psi\| < 2\delta/\varepsilon$, $\|\psi\| = 1$, а это значит, что $\|R\| \leqslant 2\delta/\varepsilon$. Оператор R ограничен.

Достаточность. Если оператор R существует, то задача (1) имеет не более одного решения. Если $D(R) = B_2$, то задача (1) разрешима при любом $\Phi \in B_2$. Наконец, если R — ограниченный оператор, и $\|\varphi\|_{B_2} < \varepsilon$, то $\|u\|_{B_1} = \|R\varphi\|_{B_1} < \delta$, где $\delta = \varepsilon\|R\|$. ■

Важно подчеркнуть, что корректность или некорректность задачи зависят от того, в какие пространства погружаются данные и искомые величины; одна и та же задача может оказаться корректной в одной паре пространств и некорректной в другой.

Одна из простейших некорректных задач — это нахождение решения уравнения

$$Tu=f, \tag{2}$$

в котором T — вполне непрерывный оператор, действующий из бесконечномерного банахова пространства X в такое же пространство Y. Частным случаем уравнения (2) является так называемое *интегральное уравнение Фредгольма первого рода*

$$\int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy=f(x),$$

где $K(x, y)$ — фредгольмовское ядро.

Если бы задача (2) была корректной, то существовал бы ограниченный оператор T^{-1}, а тогда тождественный оператор $I=T^{-1}T$ был бы вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве X. Однако задача (2) может стать корректной, если пару пространств X, Y заменить другой, в которой оператор T уже не будет вполне непрерывным. Поясним это следующим примером.

Пусть x и y — точки измеримого множества $D\subset E_m$ и $K(x, y)$ — вещественное симметричное квадратично суммируемое ядро, для которого нуль не является собственным числом. В интегральном уравнении первого рода

$$K(\varphi)=\int_D K(x, y)\, \varphi(y)\, dy=f(x) \tag{*}$$

оператор K вполне непрерывен в $L_2(D)$. Известно, что уравнение (*) имеет не более одного решения, которое существует тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-2} (f, \varphi_n)^2; \quad (f, \varphi_n)=\int_D f(x)\, \varphi_n(x)\, dx,$$

где σ_n и φ_n — собственные числа и собственные функции оператора K. Если указанный ряд сходится, то решение уравнения (*) имеет вид

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(x)$$

Положим теперь $X_1=L_2(D)$, а за Y_1 примем гильбертово пространство функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{Y_1}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-2} (f, \varphi_n)^2\right\}^{1/2}.$$

Оператор K отображает пространство X_1 на Y_1 взаимно однозначно и изометрично, так что $\|\varphi\|_{X_1}=\|K\varphi\|_{Y_1}$. Отсюда следует, что обратный оператор K^{-1} существует, взаимно однозначно и тоже изометрично отображает пространство Y_1 на X_1 и $\|K^{-1}\|_{Y_1\to X_1}=1$. По теореме 8.5.1 задача (2) корректна в паре пространств X_1, Y_1.

Нетрудно указать простой и важный класс корректных задач. Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим уравнение

$$Au=f. \tag{3}$$

Построим энергетическое пространство H_A оператора A и будем искать обобщенное решение уравнения (3), т. е. элемент пространства H_A, удовлетворяющий тождеству

$$[u, \eta]_A = (f, \eta), \ \forall \eta \in H_A. \tag{4}$$

Это решение существует и единственно; существует, следовательно, оператор $R = A^{-1}$, действующий из H в H_A и определенный на всем пространстве H. Положим $B_1 = H_A$, $B_2 = H$.

Докажем, что оператор R ограничен. Пусть u — обобщенное решение задачи (3). Положив в тождестве (4) $\eta = u$, получим

$$|u|_A^2 = (f, u) \leqslant \|f\| \cdot \|u\|.$$

Пусть γ^2 — нижняя грань оператора A. Тогда $\|u\| \leqslant \gamma^{-1}|u|$. Подставив это в предыдущее неравенство, получим неравенство $|u|_A = |Rf|_A \leqslant 1/\gamma \|f\|$. Это значит, что $\|R\|_{H \to H_A} \leqslant 1/\gamma$, и задача (3) корректна в случае положительно определенного оператора A в паре пространств (H_A, H).

Приведем два примера некорректных краевых задач. Первый пример принадлежит Адамару, который впервые ввел понятие корректности краевой задачи.

1. Рассмотрим уравнение Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

В качестве поверхности Γ возьмем ось x и на ней зададим данные Коши. Окрестностью, в которой будем искать решение, пусть будет полоса $0 < y < \delta$, где δ — произвольное положительное число; эту полосу обозначим через Ω. В качестве некасательного направления λ возьмем y. Условия Коши пусть будут такие:

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty \tag{6}$$

Задание совокупности данных равносильно заданию единственной функции $\varphi(x)$, которую будем считать непрерывной и ограниченной на всей оси. Тогда эту функцию можно рассматривать как элемент пространства $C(-\infty, +\infty)$, которое в данном случае играет роль пространства B_2. За B_1 примем пространство $C(\Omega)$ функций, непрерывных и ограниченных в полосе Ω. За область определения оператора краевой задачи (5)—(6) примем множество функций из $C(\Omega)$, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих условию $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$. Докажем, что в паре пространств B_1, B_2 задача (5)—(6) некорректна.

Можно доказать единственность решения этой задачи. Отсюда легко следует, что функции $\varphi(x) \equiv 0$ соответствует решение $u \equiv 0$. Сообщим теперь функции $\varphi(x) \equiv 0$ малое (в норме пространства B_2) изменение: рассмотрим задачу Коши для уравнения (2) с данными Коши

$$u|_{y=0} = \frac{\cos nx}{n}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{7}$$

где n — достаточно большое натуральное число.

Решение новой задачи есть $u(x, y)=\frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n}$, что легко проверяется подстановкой в уравнения (5) и (7). Очевидно

$$\|\varphi\|_{B_2}=\left\|\frac{\cos nx}{n}\right\|_{B_2}=\max_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

В то же время

$$\|u\|_{B_1}=\max_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\leqslant y\leqslant\delta}}\left|\frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n}\right|=\frac{\operatorname{ch} n\delta}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Таким образом, сколь угодно малые (по норме B_2) изменения данных могут вызвать сколь угодно большие (по норме B_1) изменения решения. Это значит, что задача Коши для уравнения Лапласа в рассмотренной нами паре пространств некорректна.

2. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}=0. \tag{8}$$

Заметим, что уравнение (8) переходит в однородное уравнение колебаний струны, если сделать замену независимых переменных $x_1=x+at$, $x_2=x-at$.

Для уравнения (8) поставим задачу Дирихле в квадрате $\Omega=\{x\colon 0<x_1, x_2<1\}$. Контур квадрата обозначим через Γ. Условия на Γ пусть имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0}&=\varphi_1(x_2), & u|_{x_2=0}&=\psi_1(x_1),\\ u|_{x_1=1}&=\varphi_2(x_2), & u|_{x_2=1}&=\psi_2(x_1). \end{aligned} \tag{9}$$

За B_1 и B_2 примем пространства $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$ соответственно. Чтобы решение могло быть непрерывным, должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} &\varphi_1(0)=\psi_1(0), \quad \varphi_2(0)=\psi_1(1),\\ &\varphi_1(1)=\psi_2(0), \quad \varphi_2(1)=\psi_2(1) \end{aligned} \tag{10}$$

Задача (8)—(9) неразрешима при произвольно заданных непрерывных функциях (9). Чтобы убедиться в этом, найдем общее решение уравнения (8). Представив его в виде $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0$, видим, что $\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x_2)$, где функция f произвольна. Интегрируя далее по x_2, получим

$$u(x_1, x_2)=F_1(x_1)+F_2(x_2),\quad F_2'(x_2)=f(x_2),$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Можно удовлетворить первым двум условиям (9):

$$F_1(0)+F_2(x_2)=\varphi_1(x_2),$$
$$F_1(x_1)+F_2(0)=\psi_1(x_1).$$

Одна из постоянных $F_1(0)$ и $F_2(0)$, очевидно, остается произвольной. Положим $F_2(0)=0$, тогда

$$F_1(x_1)=\psi_1(x_1),\quad F_2(x_2)=\varphi_1(x_2)-\psi_1(0).$$

Решение определено полностью, равенство $F_2(0)=0$ вытекает из первого равенства (10). Ясно, что удовлетворить оставшимся краевым условиям (9) невозможно, если функции φ_2 и ψ_2 произвольны.

Из сказанного следует, что задача (8)—(9) некорректна в паре пространств $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$.

Глава 9

ХАРАКТЕРИСТИКИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД. ФОРМУЛЫ ГРИНА

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть дано уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных,

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\Phi\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0. \tag{1}$$

Допустим, что вместо независимых переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ введены новые независимые переменные

$$\xi_r=\xi_r(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m),\quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{2}$$

Выясним, как при этом изменится наше уравнение.

Для упрощения записи условимся не писать знака суммы, руководствуясь при этом следующим правилом: если в некотором одночленном выражении дважды повторяется переменный индекс, принимающий значения от 1 до m, то по этому индексу производится суммирование от 1 до m. Уравнение (1) можно теперь записать проще:

$$A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\Phi\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0.$$

Допустим, что в некоторой области изменения точки x преобразование (2) взаимно однозначно, а его якобиан отличен от нуля. Такое преобразование независимых переменных будем называть *невырожденным*. Предположим еще, что функции ξ_r имеют непрерывные вторые производные. Вычислим встречающиеся в уравнении (1) производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi_r\,\partial \xi_s}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j\,\partial x_k}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим новое уравнение

$$A_{jk}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r\,\partial \xi_s}+\Phi_1\left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi_1},\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right)=0,$$

$$\Phi_1=\Phi+A_{jk}\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial \xi_r}.$$

Введем обозначение

$$A_{jk}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}=\tilde{A}_{rs}, \tag{3}$$

тогда уравнение (1) принимает вид

$$A_{rs}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r\,\partial \xi_s}+\Phi_1\left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right)=0. \tag{4}$$

Таким образом, при преобразовании независимых переменных уравнение (1) переходит в уравнение того же вида, что и исходное; меняются лишь его коэффициенты. Заметим, что матрица старших коэффициентов уравнения (4) симметрична

$$\tilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}=A_{kj}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}.$$

Меняя в последней сумме обозначения j и k местами, получаем

$$\tilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_j}=\tilde{A}_{sr}.$$

Теорема 9.1.1. *Тип уравнения в частных производных* (1.1) *не меняется при невырожденном преобразовании независимых переменных.*

Из алгебры известен следующий факт. Пусть некоторая матрица приведена невырожденным преобразованием к диагональному виду. Тогда количества положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел данной матрицы соответственно равны количествам положительных, отрицательных и нулевых диагональных элементов преобразованной матрицы.

Обозначим через J якобиеву матрицу преобразования (2). Ее определитель — якобиан этого преобразования — отличен от нуля, поэтому существует обратная матрица J^{-1}. Формула (3) равносильна матричному равенству

$$\tilde{A}=JAJ', \tag{5}$$

в котором штрих означает транспонированную матрицу.

Пусть невырожденное линейное преобразование с матрицей σ преобразует матрицу A в диагональную матрицу D, т. е. $A=\sigma D\sigma'$. Тогда по формуле (5) $\tilde{A}=J\sigma D\sigma' J'=(J\sigma)D(J\sigma)'$, и матрица $\tilde{A}$ сводится невырожденным преобразованием (с матрицей $J\sigma$) к той же диагональной матрице D. В таком случае количества положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел матриц A и $\tilde{A}$ соответственно совпадают. ■

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДАННЫМИ КОШИ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\Phi\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0, \tag{1}$$

линейное относительно старших производных. Составим уравнение первого порядка

$$A_{jk}(x)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}=0. \tag{2}$$

Оно называется *уравнением характеристик* дифференциального уравнения (1). Если функция $\omega(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ удовлетворяет уравнению характеристик, то поверхность (в случае двух измерений — линия), определяемая уравнением

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, называется *характеристической поверхностью* (соответственно *характеристической линией*) или *характеристикой* данного дифференциального уравнения (1).

Формально уравнение характеристик строится так: надо составить квадратичную форму

$$(At, t) = A_{jk}t_jt_k, \tag{4}$$

соответствующую матрице A старших коэффициентов уравнения (1), положить в этой форме $t_k = \frac{\partial\omega}{\partial x_l}$ и полученное выражение приравнять нулю.

Отметим важное свойство характеристик: они инвариантны при преобразовании независимых переменных. Это означает следующее: если $\omega(x_1, x_1, \ldots, x_m)$ есть решение уравнения (2) и если преобразование независимых переменных (1.2) переводит функцию $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в функцию $\tilde{\omega}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, то эта новая функция есть решение уравнения

$$\tilde{A}_{jk}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi_j}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi_k} = 0, \tag{2a}$$

которое является уравнением характеристик для преобразованного дифференциального уравнения (1.4).

Действительно,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi_r}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x_k} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_k}.$$

Подставив это в уравнение (2) и воспользовавшись формулой (1.3) найдем, что $\tilde{\omega}$ удовлетворяет уравнению (2a).

Уравнение эллиптического типа не имеет вещественных характеристик. Действительно, если уравнение (1) — эллиптическое, то квадратичная форма (4) — определенная и обращается в нуль (при вещественных t_k) только тогда, когда $t_1 = t_2 = \ldots = t_m = 0$. В таком случае уравнение характеристик имеет решением только $\omega \equiv \text{const}$, что не определяет никакой поверхности.

Покажем, что на характеристической поверхности данные Коши связаны некоторым соотношением. Отсюда будет следовать, что на характеристической поверхности данные Коши нельзя задавать независимо.

Пусть данные Коши заданы на достаточно гладкой поверхности Γ, определяемой уравнением

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \tag{5}$$

и имеют вид

$$u|_\Gamma = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_\Gamma = \varphi(x), \tag{6}$$

где λ — направление, касательное к Г. Как было выяснено в § 4 гл. 8, зная данные (6), можно найти значения всех первых производных функции u на поверхности Коши Г.

Введем новую систему координат. Координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ введем произвольно, а ξ_m положим равным ξ; выбирая координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, позаботимся только о том, чтобы преобразование было взаимно однозначным с отличным от нуля якобианом и чтобы функции ξ_r имели непрерывные вторые производные. В новых координатах уравнение поверхности Коши Г принимает особо простую форму $\xi_m = 0$.

Допустим теперь, что Г — характеристическая поверхность, т. е. что $A_{jk}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\frac{\partial\xi}{\partial x_k} = 0$. В переменных ξ_r коэффициент при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_m^2}$ тогда обращается в нуль, и наше уравнение по отношению к переменной ξ_m есть уравнение первого порядка.

Покажем, что *на поверхности* Г *можно вычислить все производные, входящие в преобразованное уравнение* (1), *исходя только из данных Коши*. Действительно, величина $u|_\Gamma = \varphi_0(x)$ известна. Первые производные $\left.\frac{\partial u}{\partial\xi_r}\right|_\Gamma$ можно определить так, как об этом сказано выше. Вторые производные, не содержащие двукратно дифференцирования по ξ_m, можно найти, дифференцируя первые производные по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, т. е. по направлениям, касательным к Г. Единственная вторая производная, которую нельзя вычислить, исходя только из данных Коши, — это $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_m^2}$, но как раз она в преобразованном уравнении отсутствует.

Значения всех слагаемых в левой части уравнения (1), преобразованного к переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, могут быть вычислены на поверхности Коши Г. Подставив эти значения в уравнение, получим, что некоторая заданная функция должна тождественно равняться нулю. Это и есть соотношение между данными Коши на характеристике; если оно нарушено, то задача Коши с данными на характеристике решения не имеет.

Для примера рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \tag{7}$$

Его уравнение характеристик есть

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0,$$

откуда $\omega = f(x_m)$, где f — произвольная функция. Уравнение характеристической поверхности имеет вид $f(x_m) = \text{const}$; решая его относительно x_m, получим уравнение вида $x_m = \text{const}$. Таким образом, характеристики уравнения (7) суть плоскости $x_m =$

$=\mathrm{const}$. Пусть поверхность Коши есть плоскость $x_m=0$, а условия Коши имеют вид

$$u|_{x_m=0}=\varphi_0(x_1, \ldots, x_{m-1}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_m}\right|_{x_m=0}=\varphi_1(x_1, \ldots, x_{m-1}). \qquad (8)$$

Полагая в уравнении (7) $x_m=0$, сразу получаем соотношение $\varphi_1=\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_k^2}$. Отсюда видно, что второе из условий (8) задавать нет смысла — достаточно задать только условие

$$u|_{x_m=0}=\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}).$$

§ 3. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Рассмотрим специально случай линейного невырожденного преобразования переменных

$$\xi_r=j_{rk}x_k; \quad k=1, 2, \ldots, m; \quad j_{rk}=\mathrm{const}. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение матрицу J с элементами j_{rk}. Преобразование (1) можно записать в виде $\xi=Jx$. Зафиксируем точку x, тогда матрица A старших коэффициентов уравнения станет постоянной. Матрицу J можно выбрать так, чтобы преобразованная матрица старших коэффициентов (формула (1.5)) $\tilde{A}=JAJ'$ была диагональной: $\tilde{A}_{jk}=0$, $j\neq k$. Тогда в зафиксированной точке уравнение (1.1) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m}\nu_k\frac{\partial^2u}{\partial\xi_k^2}+\Phi_1\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial\xi_1}, \frac{\partial u}{\partial\xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial\xi_m}\right)=0. \qquad (2)$$

Здесь $\nu_k=\tilde{A}_{kk}$. Такой вид уравнения второго порядка, когда отсутствуют смешанные вторые производные, называется *каноническим видом* этого уравнения. Таким образом, *уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных, можно в любой точке пространства привести к каноническому виду с помощью линейного преобразования независимых переменных.*

Очевидно, что уравнение можно привести к каноническому виду сразу во всем пространстве, если старшие коэффициенты A_{jk} постоянные.

Уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое имеют канонический вид.

Канонический вид уравнения тесно связан с его типом. В силу закона инерции квадратичных форм среди чисел ν_k столько же положительных, отрицательных и нулей, сколько их среди чисел λ_k — характеристических чисел матрицы старших коэффициентов. Поэтому тип уравнения в частных производных второго порядка, линейного относительно старших производных, можно определить так: уравнение (1.1) принадлежит к типу (α, β, γ), если в канонической форме (2) этого уравнения среди чисел ν_k есть α положительных, β отрицательных и γ нулей.

§ 4. ФОРМАЛЬНО СОПРЯЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Lu = A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u. \tag{1}$$

В евклидовом пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ зададим конечную область Ω, ограниченную кусочно гладкой поверхностью Γ. Будем предполагать, что в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ коэффициенты $A_{jk} \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, $A_k \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, $A_0 \in C(\overline{\Omega})$.

Построим дифференциальное выражение M, которое называется *формально сопряженным с L*

$$Mu = \frac{\partial^2 (A_{jk}u)}{\partial x_j\,\partial x_k} - \frac{\partial (A_k u)}{\partial x_k} + A_0 u. \tag{2}$$

Удобно преобразовать L к виду

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu, \quad B_k = A_k - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}, \qquad C = A_0. \tag{3}$$

Если L записано в такой форме, то M примет вид

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial (B_k u)}{\partial x_k} + Cu. \tag{4}$$

Формальная сопряженность есть свойство в з а и м н о е: выражение, формально сопряженное с M, есть L. Действительно,

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)u.$$

Пусть N есть дифференциальное выражение, сопряженное с M, тогда

$$Nu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial (B_k u)}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)u = Lu.$$

Если $M \equiv L$, то выражение L называется *формально самосопряженным.*

Как видно из формул (3) и (4), формально сопряженные выражения отличаются только средними членами этих формул. Ясно, что $M \equiv L$ и дифференциальное выражение L будет формально самосопряженным тогда и только тогда, когда $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует, что самосопряженное дифференциальное выражение второго порядка можно привести к виду

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu, \quad A_{jk} = A_{kj}. \tag{5}$$

Оператор Лапласа и волновой оператор формально самосопряжены; оператор теплопроводности не является формально самосопряженным.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных любого порядка s:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x). \tag{1}$$

Левая часть этого уравнения, Lu, называется *линейным дифференциальным выражением порядка* s. Дифференциальное выражение

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha u) \tag{2}$$

называется *формально сопряженным* с выражением L. Если $M \equiv L$, то выражение L называется *формально самосопряженным*.

Дифференциальное уравнение $Lu = f(x)$ можно привести к виду

$$Lu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} D^\beta (B_{\beta\gamma} D^\gamma u) = f(x), \tag{3}$$

где $B_{\beta\gamma}$ — некоторые новые коэффициенты. Тогда формально сопряженное выражение принимает вид

$$Mu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta+\gamma|} D^\gamma (B_{\beta\gamma} D^\beta u). \tag{4}$$

§ 6. ФОРМУЛЫ ГРИНА

Пусть дифференциальное выражение L определено формулой (4.3), коэффициенты которой удовлетворяют условиям § 4. Пусть, далее, функции u, $v \in C^2(\overline{\Omega})$. Составим интеграл

$$\int_\Omega vLu\,dx = \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx + \int_\Omega v\left(B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right) dx. \tag{1}$$

Применив к первому интегралу справа формулу интегрирования по частям (§ 3 гл. 2), получим так называемую *первую формулу Грина*

$$\int_\Omega vLu\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \\ + \int_\Omega v\left(B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right) dx + \int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma. \tag{2}$$

Здесь ν — внешняя (по отношению к области) нормаль к поверхности Γ.

Напишем первую формулу Грина для формально сопряженного дифференциального выражения M, поменяв при этом местами u и v:

$$\int_\Omega uMv\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx + \int_\Omega u\left\{-B_k\frac{\partial v}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)v\right\}dx +$$
$$+ \int_\Gamma uA_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma. \qquad (3)$$

Вычтем формулу (3) из формулы (2). Можно убедиться, что все объемные интегралы справа исчезнут. Действительно, так как $A_{jk} = A_{kj}$, то первые интегралы в правых частях формул (2) и (3) совпадают. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$-\int_\Omega uB_k\frac{\partial v}{\partial x_k}dx = \int_\Omega v\frac{\partial(B_k u)}{\partial x_k}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma =$$
$$= \int_\Omega\left\{vB_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + uv\frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right\}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma.$$

Отсюда ясно, что объемные интегралы в формулах (2) и (3) справа тождественны.

В результате вычитания получаем *вторую формулу Грина*

$$\int_\Omega(vLu - uMv)\,dx =$$
$$= \int_\Gamma\left[A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + B_k uv\right]\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma. \qquad (4)$$

Формулы Грина несколько упрощаются для формально самосопряженных дифференциальных выражений. В этом случае $B_k \equiv 0$, и мы получаем следующие, более простые формулы: первая формула Грина

$$\int_\Omega vLu\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \int_\Omega Cuv\,dx +$$
$$+ \int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma; \qquad (5)$$

вторая формула Грина

$$\int_\Omega(vLu - uLv)\,dx = \int_\Gamma A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma. \qquad (6)$$

Напишем формулы Грина для трех важнейших дифференциальных выражений (их обычно называют операторами) математической физики: Лапласа, теплопроводности и волнового.

1. Оператор Лапласа $\Delta = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — формально самосопряженный; его коэффициенты имеют значения $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$. Подставив эти значения в формулу (5), получим первую формулу Грина для

оператора Лапласа:

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma. \tag{7}$$

Отметим два частных случая формулы (7). При $u = v$ получаем

$$\int_\Omega u\,\Delta u\,dx = -\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + \int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma. \tag{8}$$

Интеграл $\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$ называется *интегралом Дирихле.*

Полагая в (7) $v \equiv 1$, получаем важную для дальнейшего формулу

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = \int_\Omega \Delta u\,dx. \tag{9}$$

Вторая формула Грина для оператора Лапласа имеет вид

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\Gamma. \tag{10}$$

2. Оператор теплопроводности $L = \frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ не является формально самосопряженным. Для этого оператора

$$A_{mm} = 0;\quad A_{kk} = -1,\quad 1 \leqslant k \leqslant m-1;\quad A_{jk} = 0,\quad j \neq k;$$
$$B_m = 1;\quad B_k = 0,\quad 1 \leqslant k \leqslant m-1;\quad C = 0.$$

Оператор M, формально сопряженный с оператором теплопроводности, имеет вид

$$M = -\frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

По формулам (2) и (4) находим

$$\int_\Omega vLu\,dx = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} + v\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)dx - \\ - \int_\Gamma v\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_k)\,d\Gamma; \tag{11}$$

$$\int_\Omega (vLu - uMv)\,dx = \\ = \int_\Gamma \left[-\sum_{k=1}^{m-1}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu, x_k) + uv\cos(\nu, x_m)\right] d\Gamma. \tag{12}$$

3. Волновой оператор часто обозначают символом $\square$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Этот оператор — формально самосопряженный, значения его коэффициентов таковы: $A_{mm}=1$; $A_{kk}=-1$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$; $A_{jk}=0$, $j \neq k$; $C=0$. Формулы (5) и (6) для волнового оператора имеют вид

$$\int_\Omega v \square u\, dx = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial v}{\partial x_m} \right] dx + \\ + \int_\Gamma v \left[\frac{\partial u}{\partial x_m} \cos(\nu, x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma, \quad (13)$$

$$\int_\Omega (v \square u - u \square v)\, dx = \int_\Gamma \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x_m} - u \frac{\partial v}{\partial x_m} \right) \cos(\nu, x_m) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{m-1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma. \quad (14)$$

Перейдем к дифференциальным выражениям высших порядков. По-прежнему пусть Ω — конечная область пространства E_m, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Γ. Будем считать, что $u, v \in C^{(s)}(\bar{\Omega})$, а $B_{\beta\gamma} \in C^{(\varkappa)}(\bar{\Omega})$, $\varkappa = \max(|\beta|, |\gamma|)$. Пусть, далее, L есть дифференциальное выражение (5.1), а M — формально сопряженное с ним выражение (5.2). Справедливы первая формула Грина

$$\int_\Omega vLu\, dx = \int_\Omega \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta|} B_{\beta\gamma} D^\gamma u D^\beta v\, dx + \\ + \int_\Gamma R_1(u, v)\, d\Gamma \quad (15)$$

и вторая формула Грина

$$\int_\Omega (vLu - uMv)\, dx = \int_\Gamma R_2(u, v)\, d\Gamma. \quad (16)$$

В формулах (15) и (16) $R_1(u, v)$ и $R_2(u, v)$ суть билинейные формы относительно u, v и их производных порядка не выше $s-1$.

Если под $u(x)$ и $f(x)$ понимать вектор-функции с некоторым числом k составляющих, а под A_α и $B_{\beta\gamma}$ — квадратные матрицы порядка k, то запись (5.1) или (5.3) означает систему k уравнений в частных производных с k неизвестными функциями. Формулы Грина (15) и (16) остаются для этого случая в силе, если под выражениями vLu, uMv, $D^\gamma u D^\beta v$ понимать обычные (в смысле евклидова пространства E_k) скалярные произведения соответствующих векторов. Формально сопряженное выражение при этом необходимо несколько изменить: вместо формул (5.2) и (5.4) будем иметь соответственно

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (A_{\alpha}^{*} u) \tag{17}$$

и

$$Mu = \sum_{|\beta+\gamma|=0}^{s} (-1)^{|\beta+\gamma|} D^{\gamma} (B_{\beta\gamma}^{*} D^{\beta} u), \tag{18}$$

где звездочка означает транспонированную матрицу.

Формулы Грина, а также формулы (17) и (18), определяющие формально сопряженное дифференциальное выражение, в равной мере пригодны как для случая квадратных, так и для случая прямоугольных матриц A_{α} и $B_{\beta\gamma}$. Для примера рассмотрим дифференциальное выражение $Lu = \operatorname{div} u$, где u — вектор с m составляющими: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Единственная в этом случае матрица A имеет вид $A = (1, 1, \ldots, 1)$, она содержит одну строку и m столбцов; транспонированная матрица имеет вид $A^{*} = (1, 1, \ldots, 1)'$; штрих означает здесь, что строку следует заменить столбцом. Формально сопряженное выражение зависит от скалярной функции; если эту функцию обозначить через v, то формально сопряженное выражение

$$Mv = \left(-\frac{\partial v}{\partial x_1}, -\frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial v}{\partial x_m}\right) = -\operatorname{grad} v.$$

Глава 10

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $L = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x) D^\alpha$ — линейное дифференциальное выражение некоторого порядка s и Ω — область в пространстве E_m, конечная или нет — безразлично. Будем считать, что коэффициенты $A_\alpha \in C^{(k+|\alpha|)}(\Omega)$, $k = \text{const} > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = f(x) \tag{1}$$

и допустим, что оно имеет решение $u \in C^{(s)}(\Omega)$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega)$ и пусть M — дифференциальное выражение, формально сопряженное с L. Обозначим через Ω' область, вне которой $\varphi(x) \equiv 0$. Очевидно, u, $\varphi \in C^{(s)}(\Omega')$ и на $\partial\Omega'$ функция φ и ее производные порядка $\leqslant s$ равны нулю: можно считать, что граница $\partial\Omega'$ достаточно гладкая. По формуле (6.16) гл. 9

$$\int_{\Omega'} (\varphi Lu - uM\varphi)\, dx = 0, \tag{2}$$

или

$$\int_{\Omega'} uM\varphi\, dx = \int_{\Omega'} f\varphi\, dx. \tag{3}$$

На множестве $\Omega \setminus \Omega'$ функция $\varphi \equiv 0$, поэтому в последнем тождестве можно интегрировать не по Ω', а по Ω, и мы приходим к следующему заключению: решение дифференциального уравнения (1), принадлежащее классу $C^{(s)}(\Omega)$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} uM\varphi\, dx = \int_{\Omega} f\varphi\, dx; \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega). \tag{4}$$

Введем следующее определение. Пусть в уравнении (1) $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ (см. Введение, § 2). Функция $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ называется *обобщенным решением уравнения* (1) в области Ω, если она удовлетворяет интегральному тождеству (4). Как мы только что видели, всякое обычное решение уравнения (1), принадлежащее классу $C^{(s)}(\Omega)$, является также обобщенным решением этого уравнения. Верно и обратное: если обобщенное решение уравнения (1) принадлежит классу $C^{(s)}(\Omega)$, то оно удовлетворяет названному уравнению и в обычном смысле. Действительно, пусть для функции $u \in C^{(s)}(\Omega)$ верно тождество (4). Положим в этом тождестве $\varphi = \omega_h(r)$, где ω_h — усредняющее ядро, $r =$

$= |x-x_0|$, $x_0 \in \Omega$ и h меньше, чем расстояние от x_0 до $\partial\Omega$. Тогда получим $(Lu)_h(x_0) = f_h(x_0)$. Функция $(Lu)(x)$, очевидно, непрерывна в Ω. По теореме 2.3.1 $(Lu)_h(x_0) \to (Lu)(x_0)$ равномерно в любой замкнутой подобласти. В таком случае и функция $f_h(x_0)$ равномерно стремится к тому же пределу. Но по теореме 2.3.3 $f_h \to f$ в метрике $L(\Omega)$, а тогда и равномерный предел $\lim\limits_{h\to 0} f_h(x_0) = f(x_0)$. Окончательно, $(Lu)(x_0) = f(x_0)$ и наше утверждение доказано.

Теорема 10.1.1. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность обобщенных решений уравнения* (1) *в области Ω и пусть $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$ в $L_{\text{loc}}(\Omega)$. Тогда u_0 есть обобщенное решение уравнения* (1) *в Ω.*

Пусть $\varphi = \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega)$. Напишем тождество (3) для функций u_n:

$$\int_{\Omega'} u_n M\varphi\, dx = \int_{\Omega'} f\varphi\, dx. \tag{5}$$

Но $\|u_n - u_0\|_{L(\Omega')} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; переход к пределу при $n \to \infty$ в тождестве (5) доказывает теорему. ■

Следствие 10.1.1. *Пусть B — банахово пространство функций, определенных почти всюду в Ω, и пусть из сходимости в B вытекает сходимость в $L_{\text{loc}}(\Omega)$. Тогда обобщенные решения однородного уравнения* (1) *в Ω, принадлежащие пространству B, образуют в B подпространство.*

В частности, в качестве B можно взять любое из пространств $L_p(\Omega)$, $W_p^{(k)}(\Omega)$, $C^{(k)}(\bar{\Omega})$.

З а м е ч а н и е. С понятием обобщенных решений дифференциального уравнения тесно связано понятие обобщенных производных, введенное в гл. 2. Пусть дифференциальное выражение L имеет вид $L = D^\alpha$, тогда формально сопряженное выражение $M = (-1)^k D^\alpha$, $k = |\alpha|$. Пусть u, $v \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ и u есть обобщенное решение уравнения $D^\alpha u = v$. По определению, функции u и v удовлетворяют тождеству (4), которое в данном случае совпадает с формулой (3.1) гл. 2. Это означает, в соответствии с определением, данным в гл. 2, что функция u имеет Ω обобщенную производную $D^\alpha u = v$.

Теорема 10.1.2. *Пусть $u(x)$ — локально суммируемое обобщенное решение уравнения* (1) *в некоторой области Ω. Если функция $u(x)$ имеет обобщенные производные, входящие в уравнение* (1), *то эта функция почти всюду в Ω удовлетворяет указанному уравнению.*

По определению обобщенного решения

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha (A_\alpha \varphi)\, dx = \int_{\Omega} f\varphi\, dx. \tag{6}$$

Из предположения о коэффициентах, сформулированного в начале параграфа, вытекает, что $A_\alpha\varphi \in \mathfrak{M}^{(|\alpha|)}(\Omega)$; теперь, по определению обобщенной производной, имеем равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha (A_\alpha \varphi)\, dx = \int_{\Omega} A_\alpha \varphi D^\alpha u\, dx,$$

и тождество (6) приводится к виду

$$\int\limits_{\Omega} \varphi (Lu - f)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(s)}(\Omega). \tag{7}$$

Повторяя без изменений рассуждения § 3 гл. 2, использованные при доказательстве единственности обобщенной производной (теорема 3.1.1), найдем, что тождество (7) верно для любой функции φ, измеримой, ограниченной и равной нулю в какой-нибудь пограничной полоске. Теперь зададим произвольное число $\delta > 0$, затем положим $\varphi(x) = 0$ в Ω_δ и $\varphi(x) = \operatorname{sign}[Lu - f(x)]$ в $\Omega \setminus \Omega_\delta$; тогда получим равенство $\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\delta} |Lu - f|\, dx = 0$. Отсюда $Lu - f = 0$ почти всюду в $\Omega \setminus \Omega_\delta$; в силу произвольности δ последнее равенство справедливо почти всюду в Ω. ■

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное линейное множество и пусть для его элементов установлено понятие предела, обладающее обычными свойствами. Будем называть $\mathfrak{M}$ *пространством основных элементов* или, короче, *основным пространством*. Пусть f — линейный и непрерывный функционал над основным пространством; это значит, что если a и b — постоянные числа, а φ, ψ, φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ — элементы множества $\mathfrak{M}$, то $(f, a\varphi + b\psi) = a(f, \varphi) + b(f, \psi)$ и если $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$ существует, то $\lim\limits_{n \to \infty} (f, \varphi_n) = \left(f, \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n\right)$; круглые скобки здесь обозначают значение функционала на основном элементе.

Линейные непрерывные функционалы над основным пространством $\mathfrak{M}$ называются *распределениями* над этим пространством; множество распределений (оно, очевидно, линейное) над пространством $\mathfrak{M}$ обозначается через $\mathfrak{M}'$. В $\mathfrak{M}'$ естественным образом вводится понятие предела: пусть f, $f_n \in \mathfrak{M}'$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$, если

$$(f_n, \varphi) \xrightarrow[n \to \infty]{} (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}. \tag{1}$$

Множество распределений $\mathfrak{M}'$ называется также *пространством распределений*.

Рассмотрим один из наиболее важных примеров. В качестве основного пространства введем множество $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\Omega) = \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ вещественных функций, финитных в некоторой области $\Omega \subset E_m$; эта область может быть как конечной, так и бесконечной, причем случай $\Omega = E_m$ не исключается. Предельный переход в $\mathscr{D}(\Omega)$ определяется таким образом: пусть φ, $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$, $n = 1, 2 \ldots$. Будем говорить, что $\varphi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi$ в смысле сходимости в $\mathscr{D}(\Omega)$ и записывать это в виде $\varphi_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathscr{D}} \varphi$, если носители (см. Введение, § 2) всех функций φ_n заключены в одном и том же компакте относительно области Ω и на этом компакте при любом мультииндексе α

$$D^\alpha \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha \varphi \tag{2}$$

равномерно.

В пространстве $\mathscr{D}$ оператор дифференцирования непрерывен: если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \varphi$, и α — произвольный мультииндекс, то $D^\alpha\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} D^\alpha\varphi$. Действительно, $\operatorname{supp} D^\alpha\varphi_n \subset \operatorname{supp}\varphi_n$, и носители всех функций $D^\alpha\varphi_n$ лежат в одном и том же компакте. Далее, в силу соотношения (2) равномерно на этом компакте $D^{\alpha+\beta}\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^{\alpha+\beta} G$, каков бы ни был мультииндекс β. По определению предела в $\mathscr{D}$, $D^\alpha\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} D^\alpha\varphi$.

Коль скоро построен класс $\mathscr{D}(\Omega)$ основных элементов (в данном случае — функций), то автоматически определяется и соответствующий класс распределений. Распределения над основным пространством $\mathscr{D}$ называются также *обобщенными функциями* (о. ф.). В соответствии с общим обозначением, принятым выше, пространство о. ф. обозначается через $\mathscr{D}'(\Omega)$ или, короче, через $\mathscr{D}'$.

Пусть $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$. Функционал f, определяемый формулой

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega), \tag{3}$$

очевидно, линеен и непрерывен в $\mathscr{D}$; иначе говоря, f есть о. ф. Отождествим ее с локально суммируемой функцией $f(x)$. Таким образом, любую локально суммируемую функцию можно рассматривать как о. ф. Говорят, что о. ф. f равна нулю в области $G \subset \Omega$, если $(f, \varphi) = 0$ для любой основной функции φ, носитель которой содержится в G. Замыкание множества точек, в которых о. ф. f не равна нулю, называется *носителем* этой о. ф. и обозначается через $\operatorname{supp} f$. Говорят, что обобщенная функция (как, впрочем, и «обычная» функция) с о с р е д о т о ч е н а в своем носителе.

Обобщенные функции f и g называются *равными в области* $G \subset \Omega$, если в этой области $f - g = 0$.

Рассмотрим вопрос о действиях над о. ф. Множество $\mathscr{D}'$ линейно, поэтому о. ф. можно складывать и умножать на постоянные. В общем случае о. ф. нельзя перемножать, однако о. ф. можно умножать на любую функцию класса $C^{(\infty)}(\Omega)$; если $f \in \mathscr{D}'$ и $\psi \in C^{(\infty)}\Omega$, то произведение $f\psi$ определяется формулой

$$(f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi), \ \forall\varphi \in D. \tag{4}$$

Правая часть формулы (4) имеет смысл, так как, очевидно, $\psi\varphi \in \mathscr{D}$ и умножение на ψ есть оператор, линейный и непрерывный в $\mathscr{D}$.

Для о. ф. определяется понятие дифференцирования: если $f \in \mathscr{D}'$ и α — произвольный мультииндекс, то производная $D^\alpha f$ определяется соотношением

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha\varphi); \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}. \tag{5}$$

Функционал $D^\alpha f$, очевидно, линеен. Нетрудно видеть, что он и непрерывен: если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, то и $D^\alpha\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} D^\alpha\varphi$, а тогда

$$(D^\alpha f,\ \varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}(f,\ D^\alpha\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|}(f,\ D^\alpha\varphi) = (D^\alpha f,\ \varphi).$$

Отсюда следует, что если $f \in \mathcal{D}'$, то и $D^\alpha f \in \mathcal{D}'$; любая о. ф. имеет производные всех порядков, и эти производные также суть о. ф. Нетрудно видеть, что если f есть локально суммируемая функция, имеющая какую-нибудь обобщенную производную $D^\alpha f$, то эта последняя совпадает с производной, определенной в смысле о. ф.

Локально суммируемые о. ф. называются *регулярными*, все остальные о. ф. — *сингулярными*. Одна из важнейших сингулярных о. ф. это так называемая *«функция Дирака»*, или *«δ-функция»*, определяемая формулой

$$(\delta(x-y),\ \varphi(y)) = (\delta(y-x),\ \varphi(y)) = \varphi(x),\quad \forall\varphi \subset \mathcal{D},\ \forall x \in \Omega. \tag{6}$$

В частности, если Ω содержит начало координат, то $(\delta(x),\ \varphi(x)) = \varphi(0)$. Очевидно, δ-функция равна нулю всюду, кроме начала координат: носитель δ-функции состоит из одной точки $x=0$. Производные δ-функции определяются формулой

$$\left(D_y^\alpha\delta(x-y),\ \varphi(y)\right) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(x). \tag{7}$$

§ 3. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Будем говорить, что о. ф. f имеет порядок сингулярности, или просто порядок, $\leqslant j$, если ее можно представить в виде

$$f = \sum_{|\alpha|\leqslant j} D^\alpha g_\alpha,\quad g_\alpha \in L_{\text{loc}}(\Omega). \tag{1}$$

В этом случае будем писать $s(f) \leqslant j$. Если число j в формуле (1) невозможно уменьшить, то говорят, что порядок о. ф. f равен j, и пишут $s(f) = j$. Очевидно, что порядок любой локально суммируемой функции равен нулю; ниже мы увидим, что порядок δ-функции равен единице.

Очевидны следующие утверждения:

a) $s(f_1+f_2) = \max(s(f_1),\ s(f_2))$, в) если $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$, то $s(f\psi) = s(f)$; c) $s(D^\alpha f) = |\alpha| + s(f)$

Пусть f есть о. ф. порядка j, и φ — произвольная основная функция. По определению производной от обобщенной функции,

$$(f,\ \varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant j}(D^\alpha g_\alpha,\ \varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant j}(-1)^{|\alpha|}(g_\alpha,\ D^\alpha\varphi) =$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant j}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha(x)\,D^\alpha\varphi(x)\,dx;\quad \forall\varphi \in \mathfrak{M}^{(\infty)}\Omega. \tag{2}$$

О. ф. f есть функционал, определенный на множестве функций, финитных в Ω. Но правая часть формулы (2) сохраняет смысл для любой функции $\varphi \in \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$. Пользуясь этой формулой, расширим функционал f на класс $\mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$. После такого расширения этот функционал остается линейным. На множестве $\mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$ установим понятие предельного перехода, аналогично тому, как это было сделано в § 2 для множества $\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$. Именно, скажем, что последовательность $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в смысле сходимости в $\mathfrak{M}^{(j)}$ $\left(\text{в символах } \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{j} \varphi\right)$ если 1) $\varphi,\ \varphi_n \in \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$, $j=1, 2, \ldots$; 2) в Ω существует такой компакт K, что $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ при любом n; 3) равномерно в Ω

$$D^\alpha\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} D^\alpha\varphi(x), \quad |\alpha| \leqslant j.$$

Очевидно, что функционал f, расширенный так, как об этом сказано выше, непрерывен в $\mathfrak{M}^{(j)}$:

$$\text{если } \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{j} G, \text{ то } (f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi).$$

Из сказанного следует, что о. ф. конечного порядка $\leqslant j$ можно трактовать как распределения над пространством основных функций $\mathscr{D}_j(\Omega) = \mathfrak{M}^{(j)}(\Omega)$; класс этих распределений уместно обозначить через $\mathscr{D}'_j(\Omega)$. Очевидно также, что если $f \in \mathscr{D}'_j(\Omega)$, то сужение функционала f на множество $\mathscr{D} = \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ есть о. ф. класса $\mathscr{D}'$.

Класс $\mathscr{D}'_j$ очевидно линеен; о. ф. класса $\mathscr{D}'_j$ можно умножать на любую функцию $\psi \in C^{(j)}(\Omega)$. Произведение $f\psi$ определяется формулой

$$(f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi); \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}_j. \tag{3}$$

Легко проверить, что такое умножение не выводит из класса $\mathscr{D}'_j(\Omega)$: если $f \in \mathscr{D}'_j(\Omega)$ и $\psi \in C^{(j)}(\Omega)$, то $f\psi \in \mathscr{D}_j(\Omega)$. Дифференцирование выводит из класса $\mathscr{D}'_j$: нетрудно видеть, что если $f \in \mathscr{D}'_j$, то существуют (в смысле обобщенных функций) производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant j$, и $D^\alpha f \in \mathscr{D}'_{j-|\alpha|}$.

§ 4. РЕШЕНИЯ ИЗ КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В некоторой области $\Omega \subset E_m$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x); \tag{1}$$

может случиться, что $\Omega = E_m$. Будем считать, что коэффициенты $A_\alpha \in C^{(j+|\alpha|)}\Omega$, где j — целое число, $0 \leqslant j \leqslant \infty$. Будем искать решения уравнения (1), принадлежащие классу $\mathscr{D}'_j(\Omega)$; если u такое решение, то $s(u) \leqslant j$, $s(A_\alpha D^\alpha u) \leqslant j + |\alpha|$, и левая часть уравнения (1) есть о. ф. класса $\mathscr{D}'_{j+s}(\Omega)$; будем считать поэтому, что свободный член уравнения $f \subset \mathscr{D}'_{j+s}(\Omega)$. Если решение u класса $\mathscr{D}'_j(\Omega)$ существует, то можно u рассматривать как обобщенное решение данного дифференциального уравнения, принадлежащее классу распределений; это решение определяется тождеством

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{s} A_\alpha D^\alpha u,\ \varphi\right)=(f,\ \varphi);\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}_{l+s}(\Omega). \tag{2}$$

Формула дифференцирования о. ф. и правило умножения о. ф. на функцию соответствующего класса $C^{(l)}(\Omega)$, $l\leqslant\infty$, позволяет заменить соотношение (2) эквивалентным соотношением

$$\left(u,\ \sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_\alpha\varphi)\right)=(f,\ \varphi),$$

или, короче,

$$(u,\ M\varphi)=(f,\ \varphi);\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}_{l+s}(\Omega), \tag{3}$$

где M — дифференциальное выражение, формально сопряженное с L.

Сравнив соотношения (3) и (1.4), легко убедиться в следующем: локально суммируемое обобщенное решение уравнения (1) можно трактовать как регулярную о. ф., которая является обобщенным решением того же уравнения в смысле настоящего параграфа.

Особо важную роль играют решения уравнения

$$(Lv)(y)=\sum_{|\alpha|=0}^{s}A_\alpha(y)D_y^\alpha v=\delta(x-y); \tag{4}$$

они называются *сингулярными решениями* дифференциального выражения L или уравнения $Lu=0$. Очевидно, сингулярное решение есть функция двух точек $x,\ y\in\Omega$: $v=v(x,\ y)$. В соответствии с формулой (3), сингулярное решение удовлетворяет соотношению

$$(v(x-y),\ (M\varphi)(y))=(\delta(x-y),\ \varphi(y))=\varphi(x);\ \forall\varphi\in\mathscr{D}_{l+s}(\Omega). \tag{5}$$

Таким образом, если формально сопряженное уравнение $M\varphi=g(x)$ имеет решение $\varphi\in\mathscr{D}_{l+s}(\Omega)$ и известно какое-нибудь сингулярное решение v дифференциального выражения L, то функцию φ можно вычислить по формуле (5). Если выражение L формально самосопряженное, то соотношение (5) приводится к следующему:

$$(v(x-y),\ (L\varphi)(y))=\varphi(x);\quad \forall\,\varphi\in\mathscr{D}_{l+s}(\Omega). \tag{6}$$

§ 5. СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Сингулярное решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ будем искать как о. ф. класса $\mathscr{D}'(E_m)$. Оно удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v=\delta(x-y). \tag{1}$$

Достаточно решить уравнение

$$-\Delta_x v=\delta(x); \tag{2}$$

если $v(x)$ — решение этого уравнения, то $v(x-y)$ есть решение уравнения (1).

Очевидно, функция Дирака $\delta(x)$ зависит только от $\rho=|x|$, иначе говоря, она инвариантна относительно поворотов осей координат. Тем же свойством обладает и оператор Лапласа. Действительно, пусть в E_m выполнено ортогональное преобразование координат

$$x_j=\alpha_{jk}\xi_k; \quad \alpha_{jk}\alpha_{ik}=\delta_{ij}; \quad \alpha_{jk}\ \alpha_{jl}=\delta_{kl}.$$

Тогда $\xi_k=\alpha_{jk}x_j$, отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}=\alpha_{jk}\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=\alpha_{jk}\alpha_{il}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}.$$

Полагая $i=j$ и суммируя, находим

$$\Delta_x u=\alpha_{jk}\alpha_{jl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}=\delta_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}=\Delta_\xi u.$$

Таким образом, уравнение (2) инвариантно относительно поворотов координатных осей. Будем искать решения этого уравнения, обладающие тем же свойством, т. е. зависящие только от ρ. Пусть $u=u(\rho)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=u'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x_k}=\frac{x_k}{\rho}u'(\rho)$$

и далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=\frac{x_k^2}{\rho^2}u''(\rho)+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{x_k^2}{\rho^3}\right)u'(\rho).$$

Суммируя по k, получаем

$$\Delta u=u''(\rho)+\frac{m-1}{\rho}u'(\rho). \tag{*}$$

Если $\rho\neq 0$, то $\delta(x)=0$, и получается уравнение

$$u''(\rho)+\frac{m-1}{\rho}u'(\rho)=0, \quad \rho\neq 0. \tag{3}$$

Если $m>2$, то общий интеграл уравнения (3) есть $u(\rho)=c\rho^{2-m}+c_1$, c, $c_1=\text{const}$. Слагаемое c_1, которое всюду удовлетворяет однородному уравнению Лапласа, можно отбросить: заменяя теперь x на $x-y$ и, следовательно, ρ на $r=|x-y|$, получаем $v(x, y)=$ $=cr^{2-m}$, где постоянная c еще должна быть определена. Докажем, что эту постоянную можно на самом деле подобрать так, чтобы функция $v(x, y)$ удовлетворяла уравнению (1). Рассмотрим, в соответствии с формулой (4.6), выражение (φ — функция, финитная в Ω)

$$J=(v(x, y), (L\varphi)(y))=-(v(x, y), \Delta\varphi(y)). \tag{4}$$

Обобщенная функция v регулярна, потому что функция r^{2-m} локально суммируема по y при любом фиксированном x; поэтому выражению (4) можно придать вид

$$J=-c\int_\Omega r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy. \tag{5}$$

Пусть Ω' — внутренняя конечная подобласть Ω, такая, что $x\in\Omega'$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega'$. Тогда вне Ω' и на ее границе функция φ обращается в нуль вместе со всеми своими производными; отсюда

$$J=-c\int_{\Omega'} r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy=-c\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} r^{2-m}\Delta\varphi(y)\,dy.$$

В конечной замкнутой области $\overline{\Omega}'\setminus(r<\varepsilon)$ (рис. 8) обе функции r^{2-m} и $\varphi(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы, и можно применить формулу Грина (6.7) гл. 9:

$$\int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} \frac{1}{r^{m-2}}\Delta\varphi(y)\,dy=\int_{\Omega'\setminus(r<\varepsilon)} \varphi(y)\,\Delta_y\frac{1}{r^{m-2}}\,dy+$$
$$+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}-\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d\Gamma+$$
$$+\int_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}-\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS_\varepsilon; \qquad (6)$$

здесь через Γ обозначена граница области Ω'. Первый интеграл справа исчезает, потому что, как было выяснено выше, $\Delta_y r^{2-m}=0$

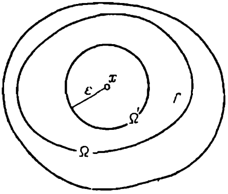

Рис. 8

при $r\neq 0$. Исчезает и второй интеграл, потому что функция φ и ее производные равны нулю на Γ; теперь

$$J=-c\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}-\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS_\varepsilon. \qquad (7)$$

Положим $y=x+\varepsilon\theta$, тогда $|\theta|=1$, и точка θ пробегает единичную сферу S_1. По формуле (2.6) гл. 1, $dS_\varepsilon=\varepsilon^{m-1}dS_1$. Далее, на сфере S_ε $r=\varepsilon$, нормаль ν, внешняя по отношению к области $\Omega'\setminus(r<\varepsilon)$, направлена против радиуса, и

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=-\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}};$$

формула (7) принимает вид

$$J=c\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varepsilon\int_{S_1}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}\,dS_1+(m-2)\int_{S_1}\varphi(x+\varepsilon\theta)\,dS_1\right].$$

Первые производные функции φ ограничены, поэтому первый предел справа равен нулю. Второй предел равен $c(m-2)|S_1|\varphi(x)$. Если положить $c=1/(m-2)|S_1|$, то получим $J=\varphi(x)$. Этим доказано, что функция

$$v(x, y)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\frac{1}{r^{m-2}} \tag{8}$$

есть сингулярное решение уравнения Лапласа, если $m>2$.

Пусть теперь $m=2$. В этом случае общий интеграл уравнения (3) имеет вид $c\ln\frac{1}{r}+c_1$. Повторяя предшествующие рассуждения, нетрудно установить, что в случае двух измерений сингулярное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$v(x, y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}.$$

Замечание. Подставив выражение (8) в уравнение (1), видим, что δ-функция удовлетворяет тождеству

$$\delta(x-y)=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(m-r)|S_1|}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{1}{r^{m-2}},$$

или, если выполнить одно дифференцирование и положить $y=0$,

$$\delta(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{(m-2)|S_1|}\frac{x_j}{\rho^m}. \tag{9}$$

Функции под знаком дифференцирования в (9) локально суммируемы в любой области, и из определения § 3 следует, что порядок сингулярности δ-функции не превосходит единицы: $s(\delta)\leqslant 1$. Докажем, что $s(\delta)=1$. В противном случае было бы $s(\delta)=0$, и δ-функция была бы локально суммируемой. Будучи сосредоточенной в одной точке — в начале координат, эта функция была бы эквивалентна нулю, а это противоречит тождеству $(\delta, \varphi)=\varphi(0)$, определяющему функцию Дирака.

§ 6. СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Несколько изменим применявшиеся ранее обозначения и будем записывать уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0. \tag{1}$$

Будем строить сингулярное решение $v(x-y, t-\tau)$ оператора, сопряженного с оператором (1); оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}+\Delta_y v=-\delta(x-y, t-\tau); \tag{2}$$

через $\delta(x, t)$ обозначена функция Дирака для пространства $m+1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$. Как и в предшествующем параграфе, достаточно решить уравнение

$$-\frac{\partial v}{\partial t}+\Delta_x v=-\delta(x, t) \tag{3}$$

и в полученном уравнении заменить x на $x-y$ и t на $t-\tau$.

Уравнение (3) инвариантно относительно поворотов осей x_1, $x_2, \ldots, x_m$, поэтому будем искать решение этого уравнения, зависящее только от t и $\rho=|x|$; оно удовлетворяет более простому уравнению (см. § 5)

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}-\frac{(m-1)}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}=\delta(x, t). \tag{4}$$

Задачу можно далее упростить, исходя из следующих соображений. Выясним, как изменится δ-функция, если заменить x на kx и t на k^2t, где $k=\text{const}>0$. Обозначим через $\delta_n(x, t)$ функцию, обладающую свойствами

$$\delta_n(x, t)\geqslant 0;\quad \delta_n(x, t)=0,\quad \rho^2+t^2>\frac{1}{n^2};\quad \int\limits_{E_{m+1}}\delta_n(x, t)\,dx\,dt=1.$$

Если φ — основная функция, то $\int\limits_{E_{m+1}}\delta_n(x, t)\,\varphi(x, t)\,dx\,dt=$ $=\varphi(x^*, t^*)\int\limits_{E_{m+1}}\delta_n(x, t)\,dx\,dt=\varphi(x^*, t^*)$, где (x^*, t^*) — некоторая точка шара $\rho^2+t^2<n^{-2}$. Отсюда следует, что $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}'}\delta$. Теперь имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
(\delta(kx, k^2t),\ \varphi(x, t))&=\lim_{n\to\infty}\delta_n((kx, k^2t),\ \varphi(x, t))=\\
&=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_{m+1}}(\delta_n(kx, k^2t)\,\varphi(x, t)\,dx\,dt=\\
&=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_{m+1}}k^{-m-2}\delta_n(x, t)\,\varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)dx\,dt=\\
&=k^{-m-2}\lim_{n\to\infty}\left(\delta_n(x, t),\ \varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)\right)=\\
&=k^{-m-2}\left(\delta(x, t),\ \varphi\left(\frac{x}{k}, \frac{t}{k^2}\right)\right)=k^{-m-2}\varphi(0, 0)=\\
&=k^{-m-2}(\delta(x, t),\ \varphi(x, t)).
\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что

$$\delta(kx, k^2t)=k^{-m-2}\delta(x, t). \tag{5}$$

Если в уравнении (4) произвести замену x на kx и t на k^2t, то получится, что тому же уравнению удовлетворяет также функция $k^m v(k\rho, k^2t)$. Будем искать решение, для которого

$$k^m v(k\rho, k^2t)=v(\rho, t) \tag{6}$$

при любом $k>0$.

Пусть $t>0$. Полагая в (6) $k=t^{-1/2}$ и вводя обозначения $\rho^2t^{-1}=z$, $v(\rho t^{-1/2}, 1)=w(z)$, видим, что искомое решение должно иметь вид

$v(\rho, t) = t^{-m/2} w(z)$. Подставим это в (4), положив одновременно $t > 0, \rho > 0$. Тогда $\delta(x, t) = 0$ и уравнение становится однородным. Для функции $w(z)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$4z\frac{d^2w}{dz^2} + (2m+z)\frac{dw}{dz} + \frac{m}{2}w = 0. \tag{7}$$

Одно из решений уравнения (7) есть $w = ce^{-z/4}$; второе решение приводит к функции v, которая и при $t = 0$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности и потому не представляет для нас интереса. Мы пришли, таким образом, к функции $v(x, t) = ct^{-m/2}e^{-\rho^2/4t}$, которая при $t > 0$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности. Можно доказать, что сингулярное решение сопряженного уравнения теплопроводности имеет вид

$$v(x-y, t-\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}, & \tau < t, \\ 0, & \tau \geq t, \end{cases} \tag{8}$$

такое доказательство будет дано ниже, в § 1 гл. 23.

§ 7. СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Волновое уравнение напишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \tag{1}$$

Сингулярное решение $v(x-y, t-\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \Delta_y v = \delta(x-y, t-\tau). \tag{2}$$

Задачу отыскания сингулярного решения упростим (как и в случае уравнения теплопроводности) в двух направлениях. Прежде всего будем искать решение, зависящее только от $t-\tau$ и $r = |x-y|$, что приведет к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{m-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \delta(x-y, t-\tau). \tag{3}$$

Далее, рассуждая, как в предшествующем параграфе, найдем, что

$$\delta(kx, kt) = k^{-m-1}\delta(x, t), \tag{4}$$

поэтому, если в уравнении (3) заменить $x-y$ и $t-\tau$ на $k(x-y)$ и $k(t-\tau)$, то, как легко убедиться, тому же уравнению удовлетворяет функция $k^{m-1}v(kr, k(t-\tau))$. Будем искать решение уравнения (3), которое при любом k удовлетворяет тождеству

$$k^{m-1}v(kr, k(t-\tau)) = v(r, t-\tau). \tag{5}$$

Полагая $k = r^{-1}$ и введя обозначения $(t-\tau)/r = \lambda$; $v(1, (t-\tau)/r) = w(\lambda)$, находим, что искомое решение должно иметь вид $v(r, t-\tau) =$

$= r^{-m+1} w(\lambda)$. Такое решение будем строить следующим образом. Положим $r \neq 0$, $t \neq \tau$, тогда $\delta(x-y,\ t-\tau)=0$, и уравнение (3) делается однородным:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{m-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{3a}$$

Найдем его решения, которые суть однородные функции нулевой степени относительно r и $t-\tau$, т. е. решения вида $q(\lambda)$. Тогда

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q(\lambda) = \frac{1}{r^{m-1}} q^{(m-1)}(\lambda); \tag{6}$$

можно, следовательно, положить

$$v(r,\ t-\tau) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q(\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q\left(\frac{t-\tau}{r}\right). \tag{7}$$

Подставив в уравнение (3a) $q(\lambda)$ вместо v, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\lambda^2-1)\, q''(\lambda) - (m-3)\,\lambda q'(\lambda) = 0; \tag{8}$$

его общий интеграл можно записать в виде $q(\lambda) = Cq_0(\lambda) + C_1$, где

$$q_0(\lambda) = \int_1^{\lambda} (z^2-1)^{\frac{m-3}{2}}\, dz. \tag{9}$$

Заметим, что уравнение $\lambda = 1$, т. е. $t-\tau = r$, определяет нижнюю полость конуса с вершиной $(x,\ t)$ и осью, параллельной оси t; легко убедиться, что этот конус — характеристический для волнового уравнения. Подробнее об этом см. § 3 гл. 21.

Постоянную C_1, которая удовлетворяет однородному волновому уравнению при всех значениях τ и y, можно отбросить.

Функцию $q_0(\lambda)$ будем определять формулой (9) только при $\lambda > 1$, или $t-\tau > r$, т. е. в нижней полости характеристического конуса с вершиной $(x,\ t)$; при $\lambda \leqslant 1$ или $t-\tau \leqslant r$ положим

$$q_0(\lambda) = 0. \tag{10}$$

Можно доказать (подробно об этом сказано в гл. 24, § 2), что сингулярное решение волнового уравнения получится, если принять $C = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}$, так что сингулярным решением в данном случае является функция, вообще говоря, обобщенная,

$$v(x-y,\ t-\tau) = \frac{1}{(m-2)!\,|S_1|}\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right). \tag{11}$$

Остановимся на случаях $m=2$ и $m=3$. Если $m=2$, то

$$q_0(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}\right),\ \lambda > 1.$$

Это приводит нас к известному решению Вольтерра, которое мы обозначим через $v_0(x-y,\ t-\tau)$,

$$v_0(x-y,\ t-\tau)=\begin{cases}\ln\left(\frac{t-\tau}{r}+\sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{r^2}-1}\right), & t-\tau>r,\\ 0 & , t-\tau\leqslant r;\end{cases} \tag{12}$$

сингулярное решение определяется формулой

$$v(x-y,\ t-\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}, & t-\tau>r,\\ 0 & , t-\tau\leqslant r.\end{cases} \tag{13}$$

Если $m=3$, то формула (11) дает следующее выражение сингулярного решения:

$$v(x-y,\ t-\tau)=\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial q_1(\lambda)}{\partial t},\quad \lambda=\frac{t-\tau}{r},$$

где $q_1(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda>1,\\ 0, & \lambda\leqslant 1;\end{cases}$ отсюда $\frac{\partial q_1}{\partial t}=\frac{1}{r}\delta\left(\frac{t-\tau}{r}-1\right)$. Как показывает равенство (4), в $(m-1)$-мерном пространстве δ-функция — однородная степени $-(m-1)$; в таком случае одномерная δ-функция будет однородной степени -1 и

$$\delta\left(\frac{t-\tau}{r}-1\right)=r\delta(t-\tau-r),$$

и для сингулярного решения волнового уравнения в трехмерном пространстве получаем окончательно

$$v(x-y,\ t-\tau)=\frac{1}{4\pi r}\delta(t-\tau-r). \tag{14}$$

Аналогично получается сингулярное решение для любого нечетного m:

$$v(x-y,\ t-\tau)=\frac{1}{(m-2)\ S_1\ r^{m-2}}\delta(t-\tau-r). \tag{15}$$

Нетрудно найти выражение v и для четного m.

Глава 11

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Самое простое и важное из эллиптических уравнений — уравнение Лапласа — имеет вид

$$-\Delta u = f(x). \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — заданная функция. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным* уравнением Лапласа. При $f(x) \equiv 0$ имеем *однородное* уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{2}$$

Неоднородное уравнение Лапласа часто называют *уравнением Пуассона*.

В более подробной записи уравнения Лапласа — неоднородное и однородное — выглядят так:

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность Γ, не обязательно связную, и пусть Γ ограничивает область Ω, конечную

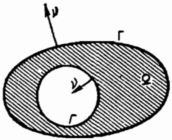

Рис. 9

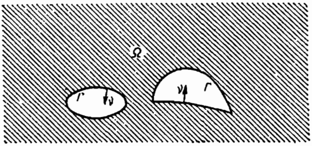

Рис. 10

(рис. 9) или бесконечную (рис. 10). В обоих случаях предполагается, что сама поверхность Γ конечна. Будем изучать поведение решений однородного уравнения Лапласа в подобных областях.

Большой интерес представляет также исследование решений эллиптических уравнений и, в частности, уравнения Лапласа, в областях, ограниченных бесконечными поверхностями. Мы не будем заниматься в этой книге такими исследованиями; только в одном месте (гл. 14) будет рассмотрен случай полупространства.

Функция $u(x)$ называется *гармонической в конечной области* Ω, если она в этой области дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. Будем говорить, что функция $u(x)$ *гармоническая в бесконечной области* Ω, если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии от начала, $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет однородному уравнению Лапласа и для достаточно больших $|x|$ справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \tag{3}$$

где m — размерность пространства, а C — некоторая постоянная. В случае двумерной области ($m=2$) условие (3) означает, что гармоническая в бесконечной области функция ограничена на бесконечности.

Подчеркнем, что определение гармонической функции относится только к случаю открытой области, (т. е. открытого связного множества); если говорят о функции, гармонической в замкнутой области, то под этим понимают, что данная функция гармонична в более широкой открытой области.

Заметим еще, что определение гармонической функции не накладывает никаких ограничений на поведение функции на границе области.

Примеры. 1. Если Ω — бесконечная область, то функция $u(x) \equiv 1$ гармоническая только при $m=2$. Если $m>2$, то в бесконечной области эта функция негармонична. Однако она гармонична в любой конечной области при любом m.

2. В двумерной плоскости функция $u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, где $z=x+iy$ гармонична в любой области, которая не содержит начала координат.

3. Функция $\operatorname{Re}\sqrt{z}$, $z=x+iy$ гармонична в круге $|z|<R$ (R — любое положительное число), разрезанном вдоль какого-либо из его радиусов.

4. Функция двух переменных $u=x^2+y^2$ не является гармонической ни в какой области, так как она не удовлетворяет однородному уравнению Лапласа: $\Delta(x^2+y^2)=4\neq 0$.

5. Функция $u=x^2-y^2$ гармонична в любой конечной области.

6. Сингулярное решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\,\frac{1}{r^{m-2}}, \quad r=|x-\xi|, \quad m>2,$$

гармонично в любой области (конечной или бесконечной) изменения точки x, если эта область не содержит точки ξ. При $m=2$ сингулярное решение $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ гармонично в любой конечной области не содержащей точки ξ.

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ОПЕРАТОРЕ ЛАПЛАСА

Пусть Ω — конечная область пространства E_m и пусть $u \in C^{(2)}(\Omega)$. Обозначим

$$\Delta_x u = -f(x). \tag{1}$$

Равенство (1) умножим на произвольную финитную в Ω функцию η и проинтегрируем по Ω. Применив формулу (6.7) гл. 9 и приняв во внимание, что $\eta|_{\partial\Omega}=0$, получим интегральное тождество

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - f\eta\right) dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega). \tag{2}$$

Покажем, что уравнение (1) вытекает из соотношения (2) и, следовательно, соотношения (1) и (2) равносильны. Заменим в (2) обозначение x на ξ и положим $\eta=\omega_h(r)$, где $r=|\xi-x|$ и x — точка, расстояние которой до $\partial\Omega$ не меньше h. Тождество (2) тогда переходит в $\Delta_x u_h(x) = -f_h(x)$. Положив $h\to 0$ и воспользовавшись теоремами 2.3.1 и 3.2.1, получим, что $\Delta_x u(x) = -f(x)$.

Введем в Ω новые переменные

$$z_k = z_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad k=1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Допустим, что преобразование (3) взаимно однозначно и дважды непрерывно дифференцируемо и что якобиан

$$J=\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_m)}$$

отличен от нуля. Обозначим еще

$$g_{jk}=\frac{\partial z_j}{\partial x_l}\frac{\partial z_k}{\partial x_l},$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}=g_{jk}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial v}{\partial z_k}; \quad \forall u, v,$$

и, в частности, при $v=u$,

$$g_{jk}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial u}{\partial z_k}=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2=(\operatorname{grad} u)^2.$$

Таким образом, g_{jk} суть коэффициенты в выражении $(\operatorname{grad} u)^2$, преобразованном к новым переменным $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

В переменных z тождество (2) принимает вид

$$\int_\Omega \left[g_{jk}\frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial \eta}{\partial z_j} - f\eta\right] J\, dz = 0.$$

Первый член слева проинтегрируем по частям. Поверхностный интеграл при этом исчезнет, потому что $\eta|_{\partial\Omega}=0$, и получается

$$\int_\Omega \eta\left[\frac{\partial}{\partial z_j}\left(g_{jk}J\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)+J\right] dx = 0. \tag{4}$$

Множитель при η под знаком интеграла (4) обозначим через $\Phi(x)$, так что

$$\int_\Omega \eta(x)\Phi(x)\,dx=0,$$

и заменим обозначение x на ξ:

$$\int_\Omega \eta(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Положим теперь $\eta=\omega_h(r)$, $r=|x-\xi|$; $x,\ \xi\in\Omega$; радиус усреднения h возьмем меньшим, чем расстояние от x до $\partial\Omega$. В результате получим тождество $\Phi_h(x)=0$. В точке x и в некоторой ее окрестности функция Φ непрерывна, и по теореме 2.2.1 $\Phi(x)=0$. Вспоминая, что $f=-\Delta_x u$, находим отсюда выражение $\Delta_x u$ в новых переменных:

$$\Delta_x u=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(g_{jk}J\frac{\partial u}{\partial z_k}\right). \tag{5}$$

В случае, когда новые координаты ортогональны, $g_{jk}=0$, $j\neq k$. Введя обозначение $g_{jj}=H_j^2$ (слева суммирование по j, конечно, не производится), получаем

$$\Delta_x u=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{J}{H_j^2}\frac{\partial u}{\partial z_j}\right). \tag{6}$$

В дифференциальной геометрии доказывается, что

$$J=H_1H_2\ldots H_m.$$

Для примера выведем выражение оператора Лапласа в сферических координатах. Из формул (2.3) и (2.17) гл. I находим выражения H_j и J. Если считать, что $z_1=r$, $z_2=\vartheta_1,\ \ldots,\ z_m=\vartheta_{m-1}$, то $H_1=1$; $H_j=r\sqrt{q_{j-1}}$, $2\leqslant j\leqslant m$;

$$J=r^{m-1}\sin^{m-2}\vartheta_1\sin^{m-3}\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2},$$

и формула (6) дает искомое выражение

$$\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{m-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\,\delta; \tag{7}$$

здесь введено обозначение

$$\delta=-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j\sin^{m-j-1}\vartheta_j}\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\left(\sin^{m-j-1}\vartheta_j\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\right). \tag{8}$$

Представляют интерес те случаи замены переменных, которые не меняют вида уравнения Лапласа. Два таких важных случая указаны ниже.

1. На двумерной плоскости конформное преобразование не нарушает гармоничности функции. Именно, пусть Ω — область комплексной плоскости $z=x+iy$, а D — область комплексной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, и пусть голоморфная функция

$$z=z(\zeta)=x(\xi,\ \eta)+iy(\xi,\ \eta)$$

конформно преобразует область D в область Ω. Пусть, далее, $u(x,\ y)$ — функция, гармоническая в Ω. Тогда функция $\tilde u(\xi,\ \eta)=u(x(\xi,\ \eta),\ y(\xi,\ \eta))$ гармонична в D.

Для доказательства вычислим величину

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

и

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2};$$

аналогично,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}.$$

Последние равенства сложим. Учтем при этом, что $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ суть соответственно вещественная и мнимая части голоморфной функции $z(\zeta)$; поэтому x и y суть гармонические функции от ξ и η, связанные уравнениями Коши — Римана. Справедливы, следовательно, соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta}.$$

Теперь имеем

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\Delta_z u = |z'(\zeta)|^2 \Delta_z u; \tag{9}$$

здесь

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Если $\Delta_z u = 0$, то, очевидно, $\Delta_\zeta \tilde{u} = 0$. ■

Коротко можно сказать, что конформное преобразование переводит гармоническую функцию в гармоническую.

2. Если размерность пространства $m > 2$, то существует некоторое преобразование, которое переводит любую гармоническую функцию в гармоническую же. Это *преобразование Кельвина*, которое переводит точку $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точку $x'(x'_1, x'_2, \ldots \ldots, x'_m)$, симметричную с x относительно сферы данного радиуса R и с центром в начале координат, а данную функцию $u(x)$ переводит в функцию

$$w(x') = \frac{R^{m-2}}{|x'|^{m-2}}u(x). \tag{10}$$

Напомним, что точки x и x' называются *симметричными* относительно указанной выше сферы, если они лежат на одном луче, исходящем из начала, и если $|x| \cdot |x'| = R^2$. Декартовы координаты симметричных точек связаны соотношением

$$x_k = x'_k \frac{R^2}{|x'|^2}. \tag{11}$$

Найдем выражение оператора Лапласа $\Delta_x u$ в координатах $z_k = x'_k$, $k=1, 2, \ldots, m$. Для этого вычислим величины g_{jk} и J. Обозначим $\sum_{k=1}^{m} x_k^2 = \rho^2$, $\sum_{k=1}^{m} x_k'^2 = \rho'^2$, тогда $x_k = \frac{R^2}{\rho'^2} x'_k$, $x'_k = \frac{R^2}{\rho^2} x_k$. Отсюда

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} = \frac{R^2}{\rho^2}\delta_{kl} - \frac{2R^2 x_k x_l}{\rho^4}$$

и, следовательно,

$$g_{jk} = \left(\frac{R^2}{\rho^2}\delta_{jl} - \frac{2R^2 x_j x_l}{\rho^4}\right)\left(\frac{R^2}{\rho^2}\delta_{kl} - \frac{2R^2 x_k x_l}{\rho^4}\right) =$$
$$= \frac{R^4}{\rho^4}\delta_{jk} - \frac{2R^4}{\rho^6}\delta_{jl}\, x_k x_l - \frac{2R^4}{\rho^6}\delta_{kl} x_j x_l + \frac{4R^4}{\rho^8} x_j x_k x_l x_l.$$

Как нетрудно видеть, второй и третий члены справа равны между собой и равны величине $-2R^4\rho^{-6}x_k x_l$. В четвертом члене $x_l x_l = \rho^2$, и последние три члена дают в сумме нуль. Окончательно, $g_{jk} = R^4\rho^{-4}\delta_{jk}$, или $g_{jk} = 0$, $j \neq k$, и $H_j = \rho^2 R^{-2} = R^2(\rho')^{-2}$. Координаты x'_k оказались ортогональными, что, впрочем, очевидно и непосредственно. Теперь $J = R^{2m}(\rho')^{-2m}$, и по формуле (8) имеем

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{2m}}{R^{2m}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{R^{2m-4}}{\rho'^{2m-4}}\frac{\partial u}{\partial x'_j}\right).$$

Выполнив замену (10), имеем далее

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{2m}}{R^{2m}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{R^{2m-4}}{\rho'^{2m-4}}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{\rho'^{m-2}}{R^{m-2}}w\right)\right) =$$
$$= \frac{\rho'^{m+2}}{R^{m+2}}\Delta_{x'} w + \frac{\rho'^{2m}}{R^{m+2}} w \frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{(m-2)\,x'_j}{\rho'^m}\right).$$

Второе слагаемое справа равно нулю, потому что

$$\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{(m-2)\,x'_j}{\rho'^m}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{1}{\rho'^{m-2}}\right) = -\Delta_{x'}\left(\frac{1}{\rho'^{m-2}}\right) = 0,$$

и окончательно

$$\Delta_x u = \frac{\rho'^{m+2}}{R^{m+2}}\Delta_{x'} w. \tag{12}$$

Теперь, если $\Delta_x u = 0$, то $\Delta_{x'} w = 0$, и преобразование Кельвина действительно сохраняет однородное уравнение Лапласа. ■

Замечание. Пусть функция $u(x)$ гармонична в бесконечной области Ω, $0 \overline{\in} \Omega$. Преобразование (11) переводит ее в некоторую конечную область Ω', содержащую начало координат. В этом случае пока нельзя утверждать, что соответствующая функция w гармонична в Ω' — можно только сказать, что эта функция гармонична в $\Omega' \setminus \{0\}$ и ограничена в окрестности начала. То обстоятельство, что w гармонична и в начале координат, следует из теоремы, которая будет доказана ниже, в гл. 12, § 7. Аналогичное замечание справедливо и для конформного преобразования на двумерной плоскости.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C^{(2)}$ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В § 5 гл. 10 было построено сингулярное решение уравнения Лапласа. По определению, сингулярное решение есть о. ф., т. е. функционал, определенный на финитных функциях. Однако в данном случае, как это видно из формулы (5.8) гл. 10, сингулярное решение локально суммируемо; это существенно расширяет область его применения и позволяет получить много важных результатов.

В последующем, рассматривая две точки в пространстве E_m, будем обозначать их не через x и y, как ранее, а через x и ξ.

Рассмотрим конечную область Ω, ограниченную кусочно гладкой поверхностью Γ, и пусть функция $u(\xi) \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$. Выберем в Ω произвольную точку x, которую вырежем шаром $r = |\xi - x| < \varepsilon$; радиус ε возьмем столь малым, чтобы упомянутый шар целиком лежал внутри Ω. Обозначим $\Omega^{(\varepsilon)} = \Omega \diagdown (r < \varepsilon)$. Обе функции $u(\xi)$ и сингулярное решение уравнения Лапласа (формула (5.8) гл. 10) принадлежат классу $C^{(2)}(\overline{\Omega^{(\varepsilon)}})$, и к ним можно применить формулу Грина (6.10) гл. 9:

$$\int\limits_{\Omega\diagdown(r<\varepsilon)} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\xi = \int\limits_{\Gamma} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_{\xi}\Gamma + \int\limits_{S_{\varepsilon}} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_{\xi}S_{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Формула (1) по существу тождественна с формулой (6.5) гл. 10: если в последней заменить обозначения Ω' на Ω, φ на u и y на ξ, то упомянутые формулы совпадут. Единственное важное отличие состоит в том, что функция $u(\xi)$ не финитна и первый интеграл справа не исчезает; заметим еще, что этот интеграл не зависит от ε.

Пусть $\varepsilon \to 0$. Повторяя без всяких изменений рассуждения § 5 гл. 10, найдем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\diagdown(r<\varepsilon)} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\xi = \int\limits_{\Omega} v(x, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{\varepsilon}} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_{\xi}S_{\varepsilon} = -u(x),$$

и мы приходим к *интегральному представлению функций класса* $C^{(2)}$:

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_{\xi}\Gamma - \int\limits_{\Omega} v\,\Delta u\,d\xi; \qquad (2)$$

здесь ν — нормаль к Γ в точке ξ, внешняя по отношению к Ω. Если $m > 2$, то

$$v(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\,\frac{1}{r^{m-2}}; \qquad r = |\xi - x|,$$

и интегральное представление функции класса $C^{(2)}$ имеет вид

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi\Gamma-$$

$$-\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^{m-2}}\Delta u(\xi)\,d\xi; \quad (3)$$

если же $m=2$, то $v(x,\ \xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$, и получаем

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right)d_\xi\Gamma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\ln\frac{1}{r}\Delta u(\xi)\,d\xi \quad (4)$$

Пусть теперь функция $u(\xi)$ гармонична в Ω; по-прежнему считаем, что $u\in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Тогда в формулах (3) и (4) интегралы по Ω пропадают, и получается *интегральное представление гармонической функции* класса $C^{(2)}(\bar{\Omega})$

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-\right.$$

$$\left.-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi\Gamma,\quad m>2, \quad (5)$$

и

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u\xi\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right]d_\xi\Gamma,\quad m=2. \quad (6)$$

В последующем будем считать, что $m>2$; для случая $m=2$ рассуждения и результаты аналогичны.

Теорема 11.3.1. *Функция, гармоническая в некоторой области, имеет в этой области производные всех порядков.*

Пусть функция u гармонична в области Ω и пусть x_0 — произвольная точка этой области. Построим конечную область Ω_1, которая содержит точку x_0 и которая сама вместе со своей границей Γ_1 содержится в Ω. Очевидно, $u\in C^{(2)}(\bar{\Omega}_1)$ и к области Ω_1 можно применить интегральное представление (5):

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi\Gamma;\quad x\in\Omega_1. \quad (7)$$

В окрестности точки x_0 подынтегральная функция интеграла (7) непрерывна по x и ξ и имеет всевозможные производные по координатам $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ точки x, также непрерывные по x и ξ. По известной теореме о дифференцировании интегралов по параметру, функция u имеет в точке x_0 всевозможные производные по $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$; эти производные можно получить дифференцированием под знаком интеграла в формуле (7). ■

Интегральные представления (3.3) и (3.4) дают повод ввести три интегральных оператора специального вида. Для определенности ограничимся случаем $m>2$ и представлением (3.3).

Пусть Γ — ограниченная кусочно гладкая поверхность. В интегралах представления (3.3) заменим функции $\Delta u(\xi)$, $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}$, $u(\xi)$ соответственно произвольными функциями $\rho(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$. Получаются три интеграла, зависящих от x как от параметра,

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{r^{m-2}}\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma,\qquad \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\sigma(\xi)\,d_\xi\Gamma,\qquad \int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^{m-2}}\rho(\xi)\,d\xi,$$

которые называются соответственно *потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя и объемным потенциалом*. Функции $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $\rho(\xi)$ называются *плотностями* этих потенциалов.

Исследуем простейшие свойства потенциалов простого и двойного слоев. В отличие от формулы (3.5), в которой обязательно требуется, чтобы точка x лежала внутри Γ, здесь будем предполагать, что x может находиться как внутри, так и вне Γ. Случай $x\in\Gamma$ требует особого рассмотрения, которое будет проведено в гл. 14.

Теорема 11.4.1. *Если плотности суммируемы на* Γ, *то потенциалы простого и двойного слоя гармоничны в любой области, конечной или бесконечной, замыкание которой не имеет общих точек с поверхностью* Γ.

В любой точке $x\overline{\in}\Gamma$ потенциалы простого и двойного слоев имеют производные всех порядков — в этом можно убедиться, повторив дословно соответствующие рассуждения теоремы 11.3.1. Если D — область, о которой сказано в условии настоящей теоремы, то оба потенциала имеют в D производные всех порядков и, тем более вторые производные.

Далее, потенциал простого или двойного слоя удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. Действительно, если $x\overline{\in}\Gamma$, то дифференцировать можно под знаком интеграла. Обозначая

$$v(x)=\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{r^{m-2}}\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma,\qquad w(x)=\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\sigma(\xi)\,d_\xi\Gamma,$$

имеем

$$\Delta_x v(x)=\int\limits_{\Gamma}\Delta_x\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma=0;$$

индекс x у буквы Δ означает, что дифференцирование совершается по координатам точки x. Далее, имеем

$$\Delta_x w(x)=\int\limits_{\Gamma}\Delta_x\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)\sigma(\xi)\,d_\xi\Gamma=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\sigma(\xi)\,\Delta_x\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\ x_k)\right)d_\xi\Gamma.$$

Так как ν — нормаль, проведенная в точке ξ, то $\cos(\nu, x_k)$ не зависит от x, и его можно вынести за знак операции Δ_x:

$$\Delta_x w(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma = 0.$$

В случае конечной области D доказательство теоремы на этом заканчивается. Если же область D бесконечная, то надо еще доказать, что $v(x)$ и $w(x)$ имеют на бесконечности оценку (1.3).

Поместим начало координат внутри Γ. Обозначим через H наибольшее расстояние между точками поверхности Γ; имеем $r = |x - \xi| \geqslant |x| - |\xi| \geqslant |x| - H$. Нас интересует поведение функции при достаточно больших $|x|$, поэтому можно считать, что $|x| > 2H$. Тогда $H < \frac{1}{2}|x|$, $r > \frac{1}{2}|x|$ и, следовательно,

$$|v(x)| \leqslant \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma |\mu(\xi)| \, d_\xi \Gamma.$$

Последний интеграл конечен, потому что функция $\mu(\xi)$ суммируема на Γ. Для функции $v(x)$ оценка (1.3) установлена со значением постоянной C, равным $C = 2^{m-2} \int_\Gamma |\mu(\xi)| \, d_\xi \Gamma$.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя $w(x)$. Имеем

$$|w(x)| \leqslant \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqslant$$

$$\leqslant (m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left| \frac{\xi_k - x_k}{r^m} \right| \cdot |\cos(\nu, x_k)| \, d_\xi \Gamma,$$

и так как $|\xi_k - x_k| \leqslant r$ и $|\cos(\nu, x_k)| \leqslant 1$, то

$$|w(x)| \leqslant m(m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \frac{d_\xi \Gamma}{r^{m-1}}.$$

Если $|x| > 2H$, то $r > \frac{1}{2}|x|$, и окончательно

$$|w(x)| \leqslant \frac{2^{m-1} m (m-2)}{|x|^{m-1}} \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \, d_\xi \Gamma.$$

Функция $\sigma(\xi)$ суммируема на Γ, и интеграл справа — конечный.

Таким образом, для потенциала двойного слоя верна оценка, даже более сильная, чем оценка (1.3): потенциал двойного слоя убывает на бесконечности, как $|x|^{-(m-1)}$. ■

Свойства потенциалов простого и двойного слоя будут полнее изучены в гл. 14.

Если поверхность Г делит пространство на две области — внутреннюю и внешнюю, то как потенциал простого слоя, так и потенциал двойного слоя определяет две гармонические функции: одна гармонична во внутренней области, другая — во внешней.

§ 5. СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Будем считать, что Ω — конечная область пространства E_m, $m > 2$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью. Объемный потенциал

$$w(x) = \int_\Omega \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

есть интеграл со слабой особенностью, у которого $\lambda = m - 2$. Поэтому ряд свойств объемного потенциала почти непосредственно вытекает из общих теорем о таких интегралах. Сформулируем эти свойства.

Теорема 11.5.1. *Если плотность* $\rho \in L_1(\Omega)$, *то объемный потенциал* (1) *гармоничен в каждой из областей, дополнительных к* Ω.

В общем случае существует конечное или счетное множество областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, дополнительных к Ω (рис. 11). Пусть Ω_j —

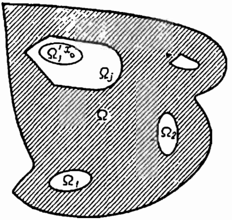

Рис 11

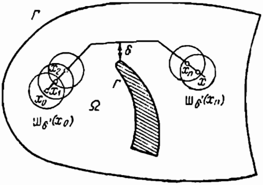

Рис 12

одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к Ω_j подобласть Ω_j' и пусть $x \in \Omega_j'$. Тогда в интеграле (1) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ, равным наименьшему расстоянию между точками границ областей Ω_j и Ω_j' (рис. 11). Интеграл (1) удовлетворяет условиям теоремы 1.1.3, если положить $G = \Omega$, $D = \Omega_j'$, $u(\xi) = \rho(\xi)$, $\omega = r^{2-m}$. Отсюда следует, что $w \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega}_j')$; так как Ω_j' — произвольная внутренняя подобласть Ω_j, то $w \in C^{(\infty)}(\Omega_j)$ и для любого мультииндекса α

$$D^\alpha w(x) = \int_\Omega \rho(\xi) D_x^\alpha \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi;$$

в частности, $\Delta w(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)\,\Delta_x \frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi = 0$. Если область Ω конечная, то гармоничность функции (1) доказана; если же область Ω бесконечная, то надо еще установить оценку (1.3) на бесконечности. Это делается так же, как в теореме 11.4.1: если H — диаметр области Ω, и в этой области лежит начало координат, то при $|x| > 2H$ будет $r > |x|/2$ и $|w(x)| \leqslant 2^{m-2}C\,|\Omega|\cdot|x|^{2-m}$. ■

Теорема 11.5.2. *Пусть* $\rho \in L_p(\Omega)$, *тогда*

1) *если* $1 \leqslant p \leqslant \frac{m}{2}$, *то* $w \in L_q(E_m)$, $1 < q < \frac{mp}{m-2p}$;

2) *если* $p > \frac{m}{2}$, *то* $w \in C(E_m)$;

3) *если* $1 \leqslant p \leqslant m$, *то* $w \in W_q^{(1)}(E_m)$, $1 < q < \frac{mp}{m-p}$;

4) *если* $p > m$, *то* $w \in C^{(1)}(E_m)$.

Поместим область Ω внутрь шара $Ш = \{\xi : |\xi| < R\}$, радиус R которого достаточно велик, и доопределим плотность $\rho(\xi)$, положив ее равной нулю вне Ω. Очевидно, $\rho \in L_p(Ш)$ и

$$w(x) = \int\limits_{Ш} \frac{1}{r^{m-2}}\,\rho(\xi)\,d\xi.$$

Из теоремы 1.3.2 вытекает, что в условиях п. 1) настоящей теоремы $w \in L_q(Ш)$. Вне Ш, как видно из доказательства теоремы 12.4.1, выполняется неравенство (1.3), поэтому также $w \in L_q(E_m \setminus Ш)$ и, как следствие, $w \in L_q(E_m)$. Аналогично, со ссылкой на теорему 1.3.1 доказывается утверждение п. 2), а ссылка на теорему 2.8.1 доказывает утверждения п. 3) и 4). ■

Теорема 11.5.3. *Если* $\rho \in L_2(\Omega)$, *то существуют обобщенные вторые производные объемного потенциала* (1), *также принадлежащие классу* $L_2(\Omega)$; *они выражаются формулами*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j} = -\frac{(m-2)\,|S_1|}{m}\,\delta_{ij}\rho(x) + \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi,$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad (2)$$

Если $\rho \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, *то* $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega}')$, *где* Ω' — *любая внутренняя подобласть* Ω.

Интеграл в формуле (2) — сингулярный.

Теорема 11.5.3 является непосредственным следствием теорем 7.6.2 (первое утверждение) и 7.6.1 (второе утверждение). Единственное место, на котором следует остановиться, это вычисление коэффициента при внеинтегральном члене в формуле (2). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)(\xi_i - x_i)}{r}\,\frac{1}{r^{m-2}};$$

таким образом, в обозначениях теоремы 7.6.1, $\varphi(x,\theta) = (m-2) \times (\xi_i - x_i)/r = (m-2)(\xi_i - x_i)$, потому что $r = 1$ на единичной сфере с центром x. Для упомянутого выше внеинтегрального коэффициента получаем выражение

$$-\int_{S_1}\varphi(x,\ 0)\cos(r,\ x_i)\,dS_1=-(m-2)\int_{S_1}(\xi_i-x_i)\cos(r,\ x_j)\,dS_1.$$

Обозначим через $Ш_1$ шар единичного радиуса с центром в x. На сфере S_1, ограничивающей этот шар, направление r совпадает с направлением внешней нормали. Преобразуя последний поверхностный интеграл в объемный по формуле интегрирования по частям, находим выражение искомого коэффициента:

$$-(m-2)\int_{Ш_1}\frac{\partial(\xi_i-x_i)}{\partial\xi_j}\,d\xi=-\frac{(m-2)\,|S_1|}{m}\,\delta_{ij};$$

мы воспользовались здесь формулой (2.10) гл. 1. ■

Замечание. Теорему 11.5.3 можно усилить следующим образом: если $\rho\in L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, то существуют обобщенные производные $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\in$ $\in L_p(\Omega)$; формула (2) остается в силе.

Теорема 11.5.4. *Если $\rho\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, то объемный потенциал* (1) *есть обобщенное решение неоднородного уравнения Лапласа* (*уравнения Пуассона*)

$$-\Delta w(x)=(m-2)\,|S_1|\,\rho(x). \tag{3}$$

Объемный потенциал (1) при $p\geqslant 1$ во всяком случае суммируем (тем более, локально суммируем) в Ω. Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$; имеем

$$-\int_{\Omega}w(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx=-\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\rho(\xi)\,\Delta\varphi(x)}{r^{m-2}}\,d\xi\,dx=$$

$$=-\int_{\Omega}\rho(\xi)\left\{\int_{\Omega}\frac{\Delta_x\varphi(x)}{r^{m-2}}\,dx\right\}d\xi=-\int_{\Omega}\rho(x)\left\{\int_{\Omega}\frac{\Delta_\xi\varphi(\xi)}{r^{m-2}}\,d\xi\right\}dx.$$

На $\partial\Omega$ выполняются соотношения $\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0$, и интегральное представление функций класса $C^{(2)}$ (формула 2.3) дает

$$\int_{\Omega}\frac{\Delta_\xi\varphi(\xi)}{r^{m-2}}\,d\xi=-(m-2)\,|S_1|\,\varphi(x).$$

Отсюда

$$-\int_{\Omega}w(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx=(m-2)\,|S_1|\int_{\Omega}\rho(x)\,\varphi(x)\,dx,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{M}^{(2)}(\Omega);$$

по определению, $w(x)$ есть обобщенное решение уравнения (3). ■

Замечание. Если $\rho\in L_2(\Omega)$, то уравнение (3) сразу вытекает из формулы (2): достаточно положить в ней $i=j$, просуммировать по j и воспользоваться тем, что $\Delta r^{2-m}=0$, если $x\neq\xi$.

Уравнение (3) позволяет строить частное решение неоднородного уравнения Лапласа и тем самым свести последнее к однородному уравнению. Пусть дано неоднородное уравнение Лапласа

$$-\Delta u = f(x), \tag{4}$$

и пусть функцию $u(x)$ требуется определить в некоторой конечной области Ω, в которой свободный член f суммируем. Частное решение уравнения (4) можно получить по формуле

$$u_0(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{f(\xi)}{r^{m-2}}\, d\xi.$$

Сделав замену неизвестной функции $u = u_0 + w$, получим однородное уравнение Лапласа $\Delta w = 0$.

§ 6. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

В этом параграфе будут доказаны две теоремы, известные под названием прямой и обратной теорем о среднем для гармонических функций.

Теорема 11.6.1. *Пусть функция и гармонична в некотором шаре и непрерывна в соответствующем замкнутом шаре. Тогда значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере, ограничивающей данный шар.*

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим одну формулу, которая будет играть важную роль и в последующем. Пусть в формуле (6.9) гл. 9 $u(x)$ — функция класса $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, гармоническая в Ω. Тогда $\Delta u = 0$, правая часть упомянутой формулы обращается в нуль, и получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0. \tag{1}$$

Переходим к доказательству теоремы. Обозначим через $Ш_R$ шар, о котором идет речь в формулировке теоремы, через x_0 — его центр и через R — радиус. Сферу, ограничивающую шар $Ш_R$, обозначим через S_R. Пусть еще $Ш_{R'}$ — концентрический с $Ш_R$ шар радиуса $R' < R$ и $S_{R'}$ — сфера, ограничивающая $Ш_{R'}$. Очевидно, $u \in C^{(2)}(\bar{Ш}_{R'})$. По фомуле (3.5)

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{S_{R'}} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_{R'}; \quad x \in Ш_{R'}. \tag{2}$$

Положим в формуле (2) $x = x_0$, тогда $r = R'$. Далее, нормаль ν — внешняя по отношению к шару и, следовательно, направлена по радиусу, поэтому

$$\left. \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right|_{r=R'} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \right|_{r=R'} = -\frac{m-2}{R'^{m-1}}.$$

Формула (2) принимает вид

$$u(x_0) = \frac{1}{(m-2)|S_1|R'^{m-2}} \int\limits_{S_{R'}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_{R'} + \frac{1}{|S_1|R'^{m-1}} \int\limits_{S_{R'}} u\, dS_{R'}.$$

Первый интеграл исчезает в силу формулы (1), и в результате

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R'^{m-1}} \int\limits_{S_{R'}} u\, dS_{R'}.$$

Положим $R' \to R$. В $Ш_R$ функция u непрерывна, и можно перейти к пределу под знаком интеграла. Окончательно,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R^{m-1}} \int\limits_{S_R} u\, dS_R. \tag{3}$$

Правая часть формулы (3) и есть то, что называется средним арифметическим значений функции u по сфере S_R — это частное от деления интеграла названной функции по сфере S_R на площадь поверхности этой сферы. ■

Прежде чем переходить к обратной теореме о среднем, выведем выражение среднего в виде объемного интеграла. Зададим малое число a и примем, что $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$. Окружим точку x шаром $Ш_r$ радиуса $r < a$. По доказанному в п. 1, для гармонической в $Ш_r$ функции u верна теорема о среднем:

$$u(x) = \frac{1}{r^{m-1} |S_1|} \int\limits_{S_r} u(\xi)\, dS_r. \tag{4}$$

Пусть $\omega_a(|\xi - x|) = \omega_a(r)$ — усредняющее ядро с радиусом усреднения a. Обе части равенства (4) умножим на $r^{m-1}\omega_a(r)\, dr$ и проинтегрируем по r в пределах от нуля до a. Слева получится выражение $cu(x)$, где $c = \int\limits_0^a r^{m-1}\omega_a(r)\, dr$. По свойству (3) усредняющего ядра (§ 1 гл. 2) $c = |S_1|^{-1}$, и мы получаем равенство

$$u(x) = \int\limits_0^a \int\limits_{S_r} u(\xi)\, \omega_a(r)\, dr\, dS_r = \int\limits_{Ш_a} u(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi. \tag{5}$$

Вне шара $Ш_a$ усредняющее ядро $\omega_a(r) = 0$, поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} u(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}. \tag{6}$$

Новая форма имеет то преимущество, что область интегрирования Ω не зависит от выбора точки x. Формула (6) означает также следующее. Пусть Ω — любая конечная область и u — функция, гармоническая в Ω. Тогда при любом $\delta > 0$ функция $u(x)$ совпадает в $\Omega \setminus \Omega_\delta$ со своей средней $u_h(x)$, если только радиус усреднения $h < \delta$.

Теорема 11.6.2. *Пусть Ω — конечная область пространства E_m и $u \in C(\Omega)$. Если для любого шара, который целиком вместе со своей границей принадлежит области Ω, функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству (3), то эта функция гармонична в Ω.*

Пусть a — достаточно малое положительное число и пусть $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$. Если $r \leqslant a$, то по условию теоремы верна также формула (6). По теореме 1.1.3, $u \in C^{(\infty)}(\Omega \setminus \Omega_{2a})$, и так как a произвольно мало, то $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$.

Докажем, что $\Delta u = 0$. В шаре $Ш_a$ радиуса a и с центром в точке $x \in \Omega \setminus \Omega_{2a}$ напишем интегральное представление (3.3):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\left\{\int\limits_{S_a} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} d_\xi S_a - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{S_a} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_a - \int\limits_{Ш_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi)\, d\xi \right\}. \qquad (7)$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=a} = -\frac{m-2}{a^{m-1}},$$

и второй поверхностный интеграл равен

$$-\frac{(m-2)}{a^{m-1}} \int\limits_{S_a} u(\xi)\, d_\xi S_a = -(m-2)\,|S_1|\, u(x).$$

Далее, по формуле (6.9) гл. 9

$$\int\limits_{S_a} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} d_\xi S_a = \int\limits_{Ш_a} \Delta u(\xi)\, d\xi.$$

Теперь тождество (7) сводится к следующему:

$$\int\limits_{Ш_a} \left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{1}{a^{m-2}}\right) \Delta u(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (8)$$

В $Ш_a$ $r < a$, поэтому $r^{-m+2} - a^{-m+2} > 0$. В то же время интеграл (8) равен нулю. Для этого необходимо, чтобы функция $\Delta u(\xi)$ в указанном шаре меняла знак; так как она еще и непрерывна, то существует точка $x' \in Ш_a$, в которой $\Delta u(x') = 0$. Пусть $a \to 0$, тогда $x' \to x$ и, по непрерывности вторых производных, $\Delta u(x) = 0$. ■

§ 7. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Теорема 11.7.1 (принцип максимума). *Пусть $\Omega \in E_m$ — конечная область, $u \in C^{(2)}(\Omega)$ и $\Delta u \geq 0$. Если $u(x)$ принимает максимальное значение во внутренней точке области Ω, то $u(x) =$* $= \mathrm{const}$. *Аналогично, если $\Delta u \leq 0$ и $u(x)$ принимает во внутренней точке области Ω наименьшее значение, то по-прежнему $u(x) = \mathrm{const}$.*

Достаточно доказать первое утверждение теоремы — второе сводится к нему заменой u на $-u$.

Пусть x_0 — точка области Ω, в которой $u(x)$ достигает максимума. Докажем, что $u(x) \equiv u(x_0)$. Построим шар $Ш_a(x_0)$ радиуса a и с центром в x_0; радиус a возьмем достаточно малым, так, чтобы упомянутый шар вместе со своей границей $S_a(x_0)$ лежал в Ω. Тогда $u \in C^{(2)}(\overline{Ш}_a(x_0))$, и можно воспользоваться интегральным представлением (3.3), которое напишем для точки x_0,

$$u(x_0)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\left\{\int\limits_{S_a(x_0)}\frac{1}{a^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}\,d_\xi S_a-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{S_a(x_0)}u(\xi)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r_0^{m-2}}\,d_\xi S_a-\int\limits_{Ш_a(x_0)}\frac{1}{r_0^{m-2}}\,\Delta u(\xi)\,d\xi\right\};\quad(1)$$

здесь $r_0=|\xi-x_0|$. По формуле (6.9) гл. 9

$$\int\limits_{S_a(x_0)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}\,d_\xi S_a=\int\limits_{Ш_a(x_0)}\Delta u(\xi)\,d\xi.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r_0^{m-2}}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{1}{r_0^{m-2}}\bigg|_{r_0=a}=-\frac{m-2}{a^{m-1}}.$$

Подставив это в формулу (1), получим

$$u(x_0)=\frac{1}{a^{m-1}\,|S_1|}\int\limits_{S_a(x_0)}u(\xi)\,d_\xi S_a-$$

$$-\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{Ш_a(x_0)}\left(\frac{1}{r_0^{m-2}}-\frac{1}{a^{m-2}}\right)\Delta u(\xi)\,d\xi.\quad(2)$$

Первый член справа есть среднее арифметическое значений функции $u(x)$ на сфере $S_a(x_0)$. В точке x_0 эта функция достигает максимума, поэтому

$$\frac{1}{a^{m-1}\,|S_1|}\int\limits_{S_a}u(\xi)\,d_\xi S_a\leqslant u(x_0),$$

причем равенство возможно лишь в том случае, когда $u(\xi)\equiv\equiv u(x_0)$, $\xi\in S_a(x_0)$. Вычитаемое справа в (2) неотрицательно, потому что $\Delta u\geqslant 0$; оно обращается в нуль только, если $\Delta u(x)\equiv 0$, $x\in Ш_a(x_0)$. Из сказанного следует, что равенство (2) имеет место тогда и только тогда, когда $u(x)\equiv u(x_0)$, $x\in S_a(x_0)$, и $\Delta u(x)\equiv\equiv 0$, $x\in Ш_a(x_0)$. Заменяя в (2) радиус a произвольным меньшим, найдем, что

$$u(\xi)\equiv u(x_0),\quad \xi\in Ш_a(x_0).\quad(3)$$

Теперь докажем, что тождество (3) верно во всей области Ω. Возьмем произвольную точку $x\in\Omega$ и соединим точки x_0 и x ломаной, целиком лежащей в Ω (рис. 12, с. 209). Пусть δ — наименьшее расстояние от точек ломаной до точек границы Γ области Ω, и $\delta'=\frac{1}{2}\delta$. Любой шар радиуса δ' с центром на ломаной лежит целиком вместе со своей границей в области Ω.

Пусть $Ш_{\delta'}(y)$ означает шар радиуса δ' с центром в y. Внутри шара $Ш_{\delta'}(x_0)$ возьмем на ломаной точку x_1 так, чтобы было

$|x_1 - x_0| > \frac{1}{2}\delta'$, и построим шар $Ш_{\delta'}(x_1)$. Внутри нового шара возьмем на ломаной точку x_2 так, чтобы было $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}\delta'$ и чтобы точка x_1 лежала между точками x_0 и x_2. Продолжая этот процесс, легко убедиться, что конечным числом таких шаров можно покрыть всю ломаную. Пусть это будут шары $Ш_{\delta'}(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. По построению, $x_j \in Ш_{\delta'}(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Как показывает тождество (3), в шаре $Ш_{\delta'}(x_0)$ функция $u(x)$ имеет постоянное значение, равное максимальному, а тогда эта функция принимает максимальное значение и в точке x_1, так что $u(x_1) = u(x_0)$. По тому же тождеству (3) $u(\xi) = u(x_1) = u(x_0)$, $\xi \in Ш_{\delta'}(x_1)$. Продолжая эти рассуждения, в конечном счете придем к тождеству

$$u(\xi) = u(x_0), \quad \forall \xi \in Ш_{\delta'}(x_n).$$

Но $x \in Ш_{\delta'}(x_n)$, поэтому $u(x) = u(x_0)$. ■

Следствие 11.7.1. *Если функция, гармоническая в конечной области, достигает максимума или минимума во внутренней точке этой области, то эта функция — постоянная.*

Следствие 11.7.2. *Если функция гармонична в конечной области и непрерывна в соответствующей замкнутой области, то эта функция принимает как максимальное, так и минимальное значение на границе области.*

§ 8. ПОДПРОСТРАНСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 11.8.1 (теорема Харнака). *Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность функций, гармонических в конечной области Ω. Пусть еще функции $u_n(x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Если последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится на Γ, то: 1) последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в замкнутой области $\bar{\Omega}$; 2) предельная функция гармонична в Ω; 3) в любой замкнутой подобласти $\bar{\Omega}'$ области Ω производные любого порядка от функции $u_n(x)$ равномерно сходятся к соответствующим производным предельной функции.*

Последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится на Γ равномерно. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n \geq N$ и любом натуральном p справедливо неравенство

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Gamma. \tag{1}$$

Под знаком абсолютной величины написана разность двух гармонических функций; следовательно, она сама гармонична. Более того, она непрерывна в $\bar{\Omega}$. Но такая функция принимает как наименьшее, так и наибольшее значение на границе области.

Из неравенства (1) следует, что

$$-\varepsilon < \min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leq \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] < \varepsilon,$$

а из принципа максимума для любого $x \in \Omega$ вытекает неравенство

$$\min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)].$$

Но тогда

$$-\varepsilon < u_{n+p}(x) - u_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

или

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Последнее неравенство означает, что последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Существует, следовательно, предельная функция

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x), \tag{2}$$

определенная и непрерывная в $\bar{\Omega}$.

Пусть $x \in \Omega$. Построим шар $Ш_R(x)$ с центром в точке x и радиусом R столь малым, чтобы $Ш_R$ вместе со своей границей — сферой S_R — целиком лежал внутри Ω. По прямой теореме о среднем

$$u_n(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u_n(\xi)\, dS_R. \tag{3}$$

Пусть $n \to \infty$. Так как последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в $\bar{\Omega}$ равномерно, то можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R. \tag{4}$$

В силу обратной теоремы о среднем функция $u(x)$ гармонична в Ω.

Остается доказать равномерную сходимость производных. Рассмотрим произвольную внутреннюю подобласть Ω' области Ω и обозначим наименьшее расстояние между границами областей Ω и Ω' через $2a$. Воспользуемся формулой (6.6); применим ее к функции $u_n(x)$, предполагая, что $x \in \overline{\Omega'}$:

$$u_n(x) = \int_{\Omega} u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi. \tag{5}$$

Дифференцируя это выражение по координатам точки x, получаем для любого мультииндекса α

$$D^{\alpha} u_n(x) = \int_{\Omega} u_n(\xi)\, D_x^{\alpha} \omega_a(r)\, d\xi; \tag{6}$$

аналогично

$$D^{\alpha} u(x) = \int_{\Omega} u(\xi)\, D_x^{\alpha} \omega_a(r)\, d\xi. \tag{7}$$

Последовательность $\{u_n(\xi)\}$ равномерно сходится в $\bar{\Omega}$ к функции $u(\xi)$, а функция $D_x^\alpha \omega_a(r)$ непрерывна при любых x и ξ. В таком случае интеграл в (6) равномерно сходится к интегралу в (7) и, следовательно, $D^\alpha u_n(x) \to D^\alpha u(x)$ равномерно в $\bar{\Omega}'$. ■

Теорема 11.8.2. (теорема о сходимости в среднем). *Пусть Ω — конечная область. Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность гармонических в Ω функций, сходящаяся в метрике $L_p(\Omega)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда* 1) *предельная функция гармонична в Ω;* 2) *в любой внутренней подобласти как данная последовательность, так и последовательности, полученные из нее дифференцированием, сходятся равномерно.*

По условию теоремы, существует предел $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ в смысле сходимости в среднем с показателем p. Это значит, что $u \in L_p(\Omega)$ и

$$\int_\Omega |u(\xi) - u_n(\xi)|^p \, d\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Воспользуемся формулой (5):

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= \int_\Omega u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi, \\ u_k(x) &= \int_\Omega u_k(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi, \end{aligned}\right\} \forall x \in \bar{\Omega}';$$

отсюда

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant \int_\Omega |u_n(\xi) - u_k(\xi)|\, \omega_a(r)\, d\xi.$$

При фиксированном радиусе усреднения a функция $\omega_a(r)$ ограничена. Пусть $\omega_a(r) \leqslant K$, тогда

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant K \|u_n - u_k\|_1 \leqslant K_1 \|u_n - u_k\|_p, \tag{8}$$

где K_1 — некоторая новая постоянная. По условию теоремы, $\|u_n - u_k\|_p \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0$. А тогда из неравенства (8) следует, что последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в $\bar{\Omega}'$. Отсюда следует, что в $\bar{\Omega}'$ функция $u(x)$ непрерывна; так как Ω' — произвольная внутренняя подобласть, то $u(x)$ непрерывна в открытой области Ω.

В формуле (3) положим $n \to \infty$, что приведет к формуле (4); как и выше, отсюда можно заключить, что функция $u(x)$ гармонична в Ω. Утверждение о сходимости произвольных последовательности $\{u_n(x)\}$ доказывается так же, как в теореме 11.8.1. ■

Из теорем настоящего параграфа вытекают такие следствия.

Следствие 11.8.1. *Пусть Ω — конечная область. В пространстве $C(\bar{\Omega})$ гармонические функции образуют подпространство. Из сходимости в этом подпространстве вытекает равномерная сходимость производных любого порядка в любой внутренней замкнутой подобласти.*

Следствие 11.8.2. *Пусть Ω — конечная область и постоянная p заключена в пределах $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\Omega)$ гармонические функции образуют подпространство. Из сходимости в этом подпространстве вытекает равномерная сходимость как самих функций, так и их производных любого порядка в любой внутренней замкнутой подобласти.*

Теорема 11.8.3. *Локально суммируемое обобщенное решение однородного уравнения Лапласа есть функция, гармоническая в этой области.*

Пусть Ω — конечная область пространства E_m и пусть $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ есть обобщенное решение однородного уравнения Лапласа в Ω. По определению,

$$\int_{\Omega} u(\xi)\, \Delta_\xi \varphi(\xi)\, d\xi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega). \tag{9}$$

Пусть $h > 0$ — достаточно малое число, и $x \in \Omega \setminus \Omega_{2h}$. Положим в тождестве (9) $\varphi(\xi) = \omega_h(r)$, $r = |\xi - x|$. Заметим, что r зависит только от разности векторов ξ и x и потому $\Delta_\xi \omega_h(r) = \Delta_x \omega_h(r)$. Теперь формула (9) дает $\Delta u_h(x) = 0$. Таким образом, средняя функция $u_h(x)$ гармонична в области $\Omega \setminus \Omega_{2h}$; если зафиксировать число $\delta > 0$ и выбрать $h < \delta/2$, то $u_h(x)$ гармонична в $\Omega \setminus \Omega_\delta$. В этой области функция $u(x)$ суммируема. По теореме 2.2.3 $u_h(x) \to u(x)$ в метрике $L_1(\Omega \setminus \Omega_\delta)$. По теореме 11.8.2 $u(x)$ гармонична в $\Omega \setminus \Omega_\delta$; так как δ произвольно, то $u(x)$ гармонична в Ω. ■

Замечание. Справедлива более общая теорема: если некоторая о. ф. удовлетворяет однородному уравнению *Лапласа* в конечной области, то в этой области данная о. ф. есть обычная гармоническая функция.

Глава 12
ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Основные задачи теории эллиптических уравнений — так называемые задачи Дирихле и Неймана — будут сформулированы для общего эллиптического уравнения второго порядка; начиная с § 2 мы опять будем заниматься только уравнением Лапласа.

Будем рассматривать области двух типов: конечные и бесконечные. В обоих случаях граница области оказывается конечной; как обычно, будем предполагать, что граница состоит из конечного числа кусочно гладких поверхностей (см. рис. 9 и 10).

Краевая задача для эллиптического уравнения называется *внутренней*, если искомая функция должна быть определена в конечной области, и *внешней*, если эта функция должна быть определена в бесконечной области. Важнейшими краевыми задачами для эллиптического уравнения второго порядка являются задача Дирихле (первая краевая задача) и задача Неймана (вторая краевая задача).

Рассмотрим эллиптическое уравнение общего вида

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_0 u=F(x). \tag{1}$$

Внутреннюю задачу Дирихле для этого уравнения сформулируем следующим образом. Пусть Ω — конечная область с кусочно гладкой границей Γ и $\varphi(x)$ — функция, заданная и непрерывная на границе Γ. Требуется найти решение уравнения (1), которое *принадлежало бы классу* $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ *и совпадало бы на границе с заданной функцией* $\varphi(x)$:

$$u(x)=\varphi(x),\quad x\in\Gamma. \tag{2}$$

Внутреннюю задачу Неймана для того же уравнения (1) сформулируем таким образом. Найти решение $u(x)$ уравнения (1), обладающее свойствами: $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$; на множестве тех точек $x\in\Gamma$, в которых существует нормаль ν к поверхности Γ, выполняется равенство

$$\lim_{x'\to x} A_{jk}(x')\frac{\partial u(x')}{\partial x'_j}\cos(\nu,\ x_k)=\psi(x). \tag{3}$$

Здесь x' — точка, лежащая внутри Ω на нормали ν, x'_k — декартовы координаты этой точки, а $\psi(x)$ — функция, заданная на упомянутом множестве точек поверхности Γ.

Краевое условие задачи Неймана мы будем ниже записывать короче в виде

$$A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,\ x_k)|_\Gamma=\psi(x). \tag{3_1}$$

Запись (3_1) можно понимать буквально, если $u\in C^{(1)}(\bar\Omega)$.

Если $A_{jk}=\delta_{jk}$, то старшие члены уравнения (1) образуют оператор Лапласа; само уравнение принимает вид

$$-\Delta u+A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_0u=F(x). \tag{4}$$

Краевое условие (3_1) принимает в этом случае особенно простую форму:

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right|_\Gamma=\psi(x). \tag{5}$$

Замечание. Приведенные формулировки краевых задач Дирихле и Неймана не являются совершенно общими. Так, например, можно рассматривать случай, когда в краевом условии (2) задачи Дирихле функция $\varphi(x)$ разрывна на Γ. В этом случае нельзя требовать, чтобы $u\in C(\bar\Omega)$, — это условие надо заменить некоторым другим, краевое условие (2) должно выполняться только в точках непрерывности функции $\varphi(x)$. Можно также отказаться от требования кусочной гладкости границы.

Внешние задачи отличаются от соответствующих внутренних только тем, что на неизвестную функцию накладывается добавочное требование

$$u(x)=O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right),\quad x\to\infty. \tag{6}$$

§ 2. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Теорема 12.2.1. *Как внутренняя, так и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет не более одного решения.*

Допустим, что задача Дирихле имеет два решения: $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда справедливы следующие две системы тождеств:

$$-\Delta u_1=F(x),\quad u_1|_\Gamma=\varphi(x); \tag{1}$$

$$-\Delta u_2=F(x),\quad u_2|_\Gamma=\varphi(x). \tag{2}$$

Введем обозначение $u_1(x)-u_2(x)=v(x)$. Вычтем тождество (1) из (2):

$$\Delta v=0,\quad v|_\Gamma=0. \tag{3}$$

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле. Дело сводится к отысканию гармонической в Ω функции $v(x)$, непрерывной в $\bar\Omega$. По принципу максимума ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе, но тогда они равны между собой и равны нулю. Отсюда следует, что $v\equiv0$ и $u_1(x)\equiv u_2(x)$.

Перейдем к внешней задаче Дирихле. Если $m=2$, то конформным преобразованием (например, дробно-линейным) можно перевести бесконечную область в конечную. Уравнение Лапласа при этом переходит опять в уравнение Лапласа, функция v, гармоническая в бесконечной области, переходит в функцию, гармоническую в конечной области, и эта функция по-прежнему равна нулю на границе области. Дело сводится, таким образом, к уже доказанной единственности задачи Дирихле в конечной области. Поэтому достаточно рассмотреть случай $m>2$. В силу условия (1.6) разность решений $v=u_1-u_2$ гармонична в Ω. Окружим границу Γ шаром радиуса R с поверхностью S_R и рассмотрим функцию $v(x)$ в кольцевой области Ω_R, заключенной между Γ и S_R. Нам известно, что $v|_\Gamma=0$, кроме того, на достаточно большом расстоянии от начала координат, которое мы поместим в центре сферы S_R,

$$|v(x)|\leqslant C/|x|^{m-2}, \quad C=\text{const}.$$

Следовательно, на поверхности шара S_R, если только радиус R достаточно велик, $|v(x)|\leqslant C/R^{m-2}$. Зададим произвольное число $\varepsilon>0$ и выберем R настолько большим, чтобы $CR^{2-m}<\varepsilon$. В кольцевой области Ω_R наибольшее и наименьшее значения функция $v(x)$ принимает либо на Γ, либо на S_R; эти значения, следовательно, по модулю не превосходят ε.

Пусть x — произвольная точка области Ω. При достаточно большом R эта точка попадет в область Ω_R и потому $|v(x)|<\varepsilon$. Но ε — произвольное положительное число, поэтому $v(x)=0$ и $u_1(x)\equiv u_2(x)$. ■

Замечание. Об условиях единственности решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка (1.1) см. [23]. Если матрица старших коэффициентов, положительно определенная в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и $A_0(x)>0$, то единственность решения задачи Дирихле вытекает из принципа максимума (§ 9 гл. II).

Обратимся к задаче Неймана и начнем с рассмотрения внутренней задачи. Пусть в конечной области Ω с границей Γ поставлена задача Неймана

$$-\Delta u=F(x),\ x\in\Omega;\ u\in C^{(2)}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega});$$

$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial u(x')}{\partial \nu}=\psi(x), \quad x\in\Gamma. \tag{4}$$

Очевидно, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (если оно существует) не единственно: если функция $u(x)$ решает задачу (4), то, как легко видеть, функция $u(x)+C$, где C — произвольная постоянная, решает ту же задачу. Теоремой единственности в данном случае является утверждение, по которому выражение $u(x)+C$ исчерпывает все решения этой задачи.

Теорема 12.2.2. *Два решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа могут отличаться только на постоянное слагаемое.*

Мы докажем эту теорему, предполагая поверхность Γ ляпуновской: $\Gamma \in C^{(1,\alpha)}$, $0<\alpha\leqslant 1$ (см. Введение, § 2). Пусть задача (4) имеет два решения. Их разность $v(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta v = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

причем $v \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Допустим, что $v(x) \not\equiv \text{const}$. В силу принципа максимума функция $v(x)$ принимает наименьшее значение на Γ; пусть это значение принимается в точке $x_0 \in \Gamma$. Разность $v(x)-v(x_0)$ также удовлетворяет уравнениям (5); заменяя $v(x)$ на $v(x)-v(x_0)$, можно считать, что $v(x)$ удовлетворяет еще соотношениям

$$v(x)|_{\Gamma} \geqslant 0, \quad v(x_0) = 0. \tag{6}$$

Введем местные координаты $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с началом в точке x_0; ось y_m направим по внутренней нормали к Γ. Обозначим еще $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ и $y = (y', y_m)$. В некоторой окрестности точки x_0 можно представить поверхность Γ уравнением вида

$$y_m = f(y'). \tag{7}$$

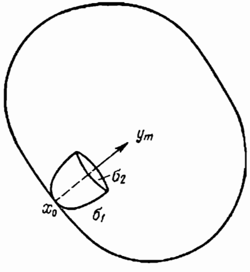

Рис. 13

Ниже (гл. 14, § 1) будет показано, что если $\Gamma \in C^{(1,\alpha)}$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $|f(y')| \leqslant c|y'|^{1+\alpha}$. Отсюда следует, что $|f(y')| \leqslant c|y|^{1+\alpha}$, так как $|y'| \leqslant |y|$.

Пусть b — достаточно малое число. Введем в рассмотрение область $G = \{y : 2c|y|^{1+\alpha} < y_m < b\}$. При b достаточно малом G есть подобласть Ω; она ограничена поверхностями σ_1 и σ_2, на которых соответственно $y_m = 2c|y|^{1+\alpha}$ и $y_m = b$ (рис. 13) Введем в рассмотрение функцию $\varphi \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$, обычно называемую *барьером* и удовлетворяющую условиям

$$a)\ \varphi(x_0) = 0; \qquad b)\ \varphi(x) \leqslant 0, \quad x \in \sigma_1; \qquad c)\ \Delta\varphi \geqslant 0, \quad x \in G;$$
$$d)\ \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial y_m} > 0. \tag{8}$$

В качестве барьера можно взять, например, функцию

$$\varphi(x) = \gamma\left[y_m + \frac{4\tilde{m}c}{\alpha}\, y_m^{1+\alpha} - 4c|y|^{1+\alpha}\right];$$
$$\tilde{m} = m - 1 + \alpha, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Действительно, условия (8; a, d) выполнены. Далее, если $x \in \sigma_1$, то $y_m = 2c|y|^{1+\alpha}$ и $\varphi(x) = \gamma\left[-y_m + 4\tilde{m}c\alpha^{-1}y_m^{1+\alpha}\right]$, что неположительно, если величина y_m достаточно мала; условие (8; b) также выполнено. Наконец, используя формулу (*) § 5 гл. 10 и неравенство $y_m \leq |y|$, найдем

$$\Delta\varphi = 4\tilde{m}c(1+\alpha)\gamma\left(y_m^{\alpha-1} - |y|^{\alpha-1}\right) \geq 0,$$

и условие (8; c) также выполнено.

Из принципа максимума (§ 7 гл. 11) вытекает существование такой постоянной $c_1 > 0$, что $v(x) \geq c_1$, $x \in \sigma_2$. Выбрав постоянную γ достаточно малой, можно добиться того, чтобы было $\varphi(x) \leq$ $\leq c_1$, $x \in \sigma_2$. Отсюда и из (8; b) следует, что $v(x) - \varphi(x) \geq 0$ на ∂G. Одновременно $\Delta[v(x) - \varphi(x)] \leq 0$ в области G; по тому же принципу максимума $v(x) \geq \varphi(x)$ в $\bar{G}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n} = \lim_{y_m \to 0} \frac{v(0, y_m)}{y_m} \geq \lim_{y_m \to 0} \frac{\varphi(0, y_m)}{y_m} = \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial y_m} > 0.$$

В первоначальных координатах $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно последнее неравенство записать так: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|} > 0$, где x — точка на нормали к Γ, проходящей через x_0. По формуле Лагранжа

$$v(x) - v(x_0) = \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n} |x - x_0|, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$\text{отсюда} \lim_{x \to x_0} \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n} > 0.$$

Это противоречит второму неравенству (5), из которого вытекает, что существует и равен нулю предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial v(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial n} = 0. \ \blacksquare$$

Замечание. Если предположить, что искомое решение имеет в $\bar{\Omega}$ непрерывные вторые производные, то теорему 12.2.2 нетрудно доказать, предполагая поверхность Γ только кусочно гладкой

В заключение отметим, что внутренняя задача Неймана (4) в общем случае неразрешима, и выведем необходимое условие ее разрешимости, предполагая для простоты, что решение $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. В этом случае можно применить формулу (6.10) гл. 9, которая в данном случае дает

$$\int_{\Omega} F(x)\,dx + \int_{\Gamma} \psi(x)\,d\Gamma = 0; \tag{9}$$

это и есть искомое необходимое условие.

В частных случаях однородного краевого условия или однородного дифференциального уравнения должно выполняться соответственно одно из двух равенств:

$$\int_{\Omega} \Delta u\,dx = \int_{\Omega} F(x)\,dx = 0, \tag{10}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi(x)\,d\Gamma = 0. \tag{11}$$

Для внешней задачи Неймана справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 12.2.3. *Если размерность пространства $m>2$, то внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа имеет не более одного решения.*

Как и в случае внутренней задачи, проведем доказательство, предполагая, что граница рассматриваемой области — ляпуновская. Пусть бесконечная область Ω ограничена ляпуновской поверхностью Γ и пусть в этой области задача Неймана имеет два решения. Их разность $v(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$v \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ и } \Delta v = 0, \quad x \in \Omega; \quad |v(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \quad x \to \infty;$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0. \qquad (12)$$

Допустим, что $v(x) \not\equiv 0$. Тогда $v(x) \not\equiv 0$ при $x \in \Gamma$ — в противном случае, по теореме единственности внешней задачи Дирихле, было бы $v(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Обозначим $a = \min\limits_{x \in \Gamma} v(x)$, и пусть этот минимум достигается в точке $x \in \Gamma$. Докажем, что можно считать $a<0$. Действительно, если $a \geqslant 0$, то $a_1 = \max\limits_{x \in \Gamma} v(x) > 0$. Функция $-v(x)$ удовлетворяет соотношениям (12) и $\min\limits_{x \in \Gamma}[-v(x)] = -a_1 < 0$. Из начала координат как из центра опишем сферу S_R столь большого радиуса R, чтобы поверхность Γ лежала внутри этой сферы (см. рис. 21) и чтобы одновременно $C/R^{m-2} < |a|$, где C — постоянная из оценки (12). Тогда в конечной области Ω_R, ограниченной поверхностями Γ и S_R, гармоническая функция $v(x)$ достигает минимума в точке $x_0 \in \Gamma$. Как и в случае внутренней задачи, введем в рассмотрение разность $v(x) - v(x_0)$, область G и барьер $\varphi(x)$, обладающий свойствами (8). Так же как в предшествующей теореме, докажем, что $\frac{\partial v(x_0)}{\partial n} > 0$, где n — нормаль к Γ в точке x_0, внутренняя по отношению к Ω_R. Полученное неравенство противоречит краевому условию (12). ■

Если размерность пространства $m=2$, то для внешней задачи Неймана верна теорема 12.2.2 — та же, что и для внутренней задачи.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА

Здесь и ниже в этой главе мы будем рассматривать только однородное уравнение Лапласа — неоднородное сводится к нему приемом, указанным в § 5 гл. 11; напомним, что этот прием основан на построении частного решения неоднородного уравнения Лапласа в виде объемного потенциала.

Итак, пусть дан шар $Ш_R$ радиуса R с центром в начале координат. Поставим задачу об отыскании функции $u \in C(\bar{Ш}_R)$, гармонической в шаре и удовлетворяющей краевому условию

$$u|_{S_R} = \varphi(x), \qquad (1)$$

где S_R — граница шара и $\varphi(x)$ функция, заданная и непрерывная на сфере S_R.

Решать задачу будем следующим образом. Предполагая, что решение существует и удовлетворяет некоторым более жестким требованиям, построим формулу, определяющую решение по данным задачи. После этого докажем, что построенная формула на самом деле дает решение задачи.

Пусть поставленная задача имеет решение $u(x)$, принадлежащее классу $C^{(2)}(\bar{Ш}_R)$. Напишем интегральное представление этого решения (формула (3.5) гл. 11)

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{S_R}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi S_R. \tag{2}$$

Возьмем точку x внутри шара, и пусть x' — точка, симметричная с точкой x относительно сферы S_R (рис. 14). Это значит, что точки x и x' лежат на одном луче, проходящем через центр шара, и что

$$|x|\cdot|x'|=R^2. \tag{3}$$

Обозначим $r=|x-\xi|$, $r'=|x'-\xi|$. Заметим, что $r'\neq 0$, когда точка ξ движется внутри сферы или по ее поверхности. Введем функцию

$$v(\xi)=\frac{1}{r'^{m-2}}; \tag{4}$$

она гармонична в любой области, не содержащей точки x'. В частности, функция (4) гармонична в шаре $Ш_R$

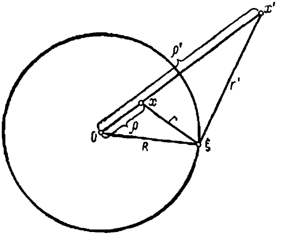

Рис 14

К паре функций u и v применим формулу Грина (6.10) гл. 9. Обе функции гармоничны, поэтому объемный интеграл исчезает, и получаем

$$\int\limits_{S_R}\left(\frac{1}{r'^{m-2}}\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r'^{m-2}}\right)\times d_\xi S_R=0. \tag{5}$$

Для дальнейшего важно то обстоятельство, что первые члены под интегралами (2) и (5) отличаются только множителем, не зависящим от ξ. Это можно доказать на основании того простого соображения, что треугольники $Ox\xi$ и $Ox'\xi$ (см рис. 14) подобны. Действительно, у этих треугольников угол в точке O общий, а заключающие этот угол стороны пропорциональны в силу соотношения (3). Из подобия треугольников следует, что $r/r'=|x|/R$.

Отсюда $1/r = R/|x|r'$ и, следовательно,

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}},$$

так что $1/r^{m-2}$ и $1/r'^{m-2}$ отличаются множителем $(R/|x|)^{m-2}$, не зависящим от ξ.

Будем далее обозначать $|x| = \rho$, $|x'| = \rho'$. Умножим формулу (5) на $\frac{1}{(m-2)|S_1|}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}$ и вычтем из формулы (2):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi) \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi S_R.$$

Замечая, что в силу краевого условия задачи Дирихле $u(\xi)|_{S_R} = \varphi(\xi)$, получаем формулу для решения (в предположении, что оно существует и принадлежит классу $C^{(2)}(\overline{Ш}_R)$):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi) \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi S_R. \qquad (6)$$

Формулу (6) можно упростить. Прежде всего для шара направления внешней нормали и радиуса совпадают, поэтому $\cos(\nu, x_k) = \frac{\xi_k}{R}$ и $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\xi_k}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$. Отметим еще формулы

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r}, \quad \frac{\partial r'}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k'}{r'};$$

здесь x_k и x_k' — координаты точек x и x' соответственно.

Легко вычислить второй член под знаком интеграла (6):

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -(m-2) \frac{\xi_k}{R} \frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = -\frac{m-2}{r^m R} \xi_k (\xi_k - x_k) = -\frac{m-2}{r^m R} \times$$
$$\times (R^2 - \xi_k x_k). \qquad (7)$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r'^m R} (R^2 - \xi_k x_k').$$

Умножим это выражение на $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}$; учитывая ранее полученное соотношение $R/\rho r' = 1/r$, получаем

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} \left(\rho^2 - \xi_k x_k' \frac{\rho^2}{R^2}\right).$$

Точки x и x' лежат на одном луче, проходящем через начало, поэтому $x_k = x_k' \frac{|x|}{x'} = x_k' \frac{\rho^2}{\rho\rho'} = x_k' \frac{\rho^2}{R^2}$ и, следовательно,

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} (\rho^2 - \xi_k x_k). \qquad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в интеграл (6), получим окончательно

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi) \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R. \tag{9}$$

Формула (9) называется *формулой Пуассона*, а выражение $\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}$, $\rho \leqslant R$, — *ядром Пуассона*. Из наших рассуждений следует, что формула Пуассона во всяком случае справедлива для любой гармонической функции класса $C^{(2)}(\bar{Ш}_R)$.

Отметим некоторые свойства ядра Пуассона.

1. Ядро Пуассона неотрицательно. При $\rho = R$ оно всюду равно нулю, кроме точки $x = \xi$, вблизи которой оно неограничено.

2. Если точка x меняется внутри шара, то ядро Пуассона есть гармоническая функция от x.

Докажем это. Если точка x лежит внутри шара, то $r \neq 0$ и ядро Пуассона имеет непрерывные производные всех порядков. Остается доказать, что оно удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. По формуле Лейбница,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{R^2-\rho^2}{r^m} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial^2 (R^2-\rho^2)}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial (R^2-\rho^2)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r^m}\right) + (R^2-\rho^2) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{1}{r^m}\right).$$

Замечая, что $\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\rho}$, $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - \xi_k}{r}$, и суммируя по k, получим

$$\Delta \frac{R^2-\rho^2}{r^m} = \frac{2m}{r^m}\left[-1 + \frac{1}{r^2}(R^2+\rho^2-2x_k\xi_k)\right],$$

что равно нулю, так как

$$r^2 = (\xi - x, \ \xi - x) = R^2 + \rho^2 - 2(\xi, \ x) = R^2 + \rho^2 - 2x_k\xi_k.$$

3. Справедлива формула

$$\frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R \equiv 1, \quad \rho < R. \tag{10}$$

В самом деле, рассмотрим функцию, тождественно равную единице. Она гармонична в шаре $Ш_R$ и принадлежит классу $C^{(2)}(\bar{Ш}_R)$; по доказанному, для нее справедлива формула Пуассона, которая в данном случае совпадает с формулой (10).

Докажем теперь, что *если функция $\varphi(x)$ непрерывна на сфере S_R, то формула Пуассона дает гармоническую в $Ш_R$ функцию, которая имеет в любой точке x_0 сферы S_R предельное значение $\varphi(x_0)$.*

Пусть $u(x)$ — функция точки x, определенная внутри шара $Ш_R$ формулой Пуассона (9). Очевидно, что эта функция непрерывна, и имеет производные всех порядков внутри шара. Легко видеть, что она гармоническая:

$$\Delta u = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi) \, \Delta_x \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} \, d_\xi S_R = 0.$$

Пусть точка x стремится изнутри сферы S_R к точке x_0, лежащей на этой сфере. Из формулы (9) вычтем формулу (10), предварительно умноженную на $\varphi(x_0)$:

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R. \tag{11}$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на сфере S_R; выберем на S_R сферическую окрестность σ точки x_0, столь малую, чтобы $|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon$, $\forall\xi\in\sigma$, где ε — произвольно выбранное положительное число. Заметим, что в $S_R\setminus\sigma$ справедливо неравенство $|\xi-x_0|\geqslant\delta$, где δ — радиус окрестности σ.

Оценим разность $u(x)-\varphi(x_0)$, для чего интеграл (11) разобьем на два: по σ и по $S_R\setminus\sigma$:

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d_\xi S_R+$$
$$+\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R\setminus\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d_\xi S_R.$$

Для первого интеграла имеем

$$\frac{1}{|S_1|}\left|\int\limits_{\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d_\xi S_R\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2|S_1|}\int\limits_{\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R<\frac{\varepsilon}{2|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценка для первого интеграла получена независимо от положения точки x. Второй интеграл можно сделать малым за счет близости точек x и x_0. Возьмем эти точки столь близкими, чтобы выполнялось неравенство $|x-x_0|<\delta/2$. Тогда

$$r=|\xi-x|=|(\xi-x_0)+(x_0-x)|\geqslant|\xi-x_0|-|x_0-x|\geqslant\frac{\delta}{2},$$

откуда $1/r<2/\delta$; теперь

$$\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}=\frac{(R+\rho)(R-\rho)}{Rr^m}<\frac{2^{m+1}(R-\rho)}{\delta^m}.$$

Функция φ непрерывна на компактном множестве и потому ограничена. Пусть $|\varphi(\xi)|\leqslant M=\text{const}$, тогда $|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\leqslant 2M$. Теперь имеем

$$|u(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2^{m+2}M(R-\rho)}{\delta^m}\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R\setminus\sigma}dS_R<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2^{m+2}MR^{m-1}(R-\rho)}{\delta^m}.$$

Возьмем число $h>0$ столь малым, чтобы $\frac{2^{m+2}MR^{m-1}h}{\delta^m}<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда если $|x_0-x|<h$, то $R-\rho=|x_0|-|x|\leqslant|x_0-x|<h$ и $|u(x)-$

$-\varphi(x_0)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad \forall x_0 \in S_R. \tag{12}$$

Функцию $u(x)$, определенную в открытом шаре формулой Пуассона (9), доопределим на сфере S_R, положив $u(x) = \varphi(x)$, $x \in S_R$. Доопределенная таким образом функция гармонична внутри шара, непрерывна в силу формулы (12) в замкнутом шаре и удовлетворяет краевому условию (1). Задача Дирихле для шара решена. ■

Формула (2), а с ней и все доказательство, требует, чтобы $m > 2$. Однако формула Пуассона верна и для $m = 2$. В этом случае формулу можно получить, исходя из интегрального представления (3.6) гл. 11.

§ 4. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Из формулы Пуассона как следствие вытекает теорема, доказанная Лиувиллем.

Теорема 12.4.1. *Функция, гармоническая в любой конечной области и ограниченная сверху или снизу, есть постоянная.*

Если функция $u(x)$ гармоническая и $u(x) \leqslant M$, $M = \mathrm{const}$, то $-u(x)$ также гармоническая и $-u(x) \geqslant -M$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда гармоническая функция ограничена снизу: $u(x) \geqslant \mu = \mathrm{const}$. Можно считать, что $\mu > 0$, — если это не так, то можно прибавить к $u(x)$ достаточно большую положительную постоянную.

Зафиксируем произвольную точку x и опишем вокруг начала шар Ш$_R$ столь большого радиуса R, чтобы точка x оказалась внутри шара. Данная функция $u(x)$, гармоническая в любой конечной области, гармонична и в шаре, и для нее верна формула Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} u(\xi)\, d_\xi S_R,$$

где S_R — граница шара. Легко видеть, что $R - \rho \leqslant r \leqslant R + \rho$, и так как функция $u(x)$ положительна, то получается оценка

$$\frac{R-\rho}{R(R+\rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R \leqslant u(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R+\rho}{R(R-\rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R. \tag{1}$$

По теореме о среднем $u(0) = \frac{1}{|S_1| R^{m-1}} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R$, и неравенство (1) принимает вид

$$\frac{(R-\rho) R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{(R+\rho) R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}} u(0).$$

Устремляя R к бесконечности, приходим к неравенству $u(0) \leqslant \leqslant u(x) \leqslant u(0)$. Отсюда $u(x) = u(0)$. ■

§ 5. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ СФЕРЫ

Пусть Ω — внешность шара радиуса R с границей S_R и пусть требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую в Ω и удовлетворяющую краевому условию $u|_{S_R} = \varphi(x)$.

Докажем, что решение этой задачи дается *формулой Пуассона*

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{R r^m} \varphi(\xi)\, d_\xi S_R, \quad \rho > R, \tag{1}$$

где, как и в § 3, $r = |\xi - x|$ и $\rho = |x|$. Как и в § 3, доказывается, что функция $u(x)$, определяемая формулой (1), имеет вне сферы S_R непрерывные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Исследуем поведение этой функции на бесконечности. Очевидно, $r \geqslant \rho - R$. Отсюда

$$|u(x)| \leqslant c \frac{\rho + R}{(\rho - R)^{m-1}}; \quad c = \frac{1}{|S_1| R} \int\limits_{S_R} |\varphi(\xi)|\, dS_R.$$

Нас интересуют большие значения ρ. Будем поэтому считать, что $\rho > 2R$. Тогда $\rho - R > \frac{1}{2}\rho$. Теперь $|u(x)| < \frac{2^m c}{\rho^{m-2}}$, и функция $u(x)$ гармонична вне шара.

Остается доказать предельное равенство

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in S_R. \tag{2}$$

Для этого вычислим интеграл (1) при значении $\varphi(\xi) \equiv 1$. Введем в рассмотрение точку x', симметричную с точкой x относительно сферы S_R. Имеем ($\rho = |x|$, $\rho' = |x'|$, $r' = |\xi - x'|$)

$$\rho^2 = R^4/\rho'^2, \quad 1/r = 1/r' \cdot R/\rho,$$

и ядро Пуассона можно преобразовать к виду

$$\frac{\rho^2 - R^2}{R r^m} = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \frac{R^2 - \rho'^2}{R r'^m}. \tag{3}$$

Точка x' лежит внутри сферы S_R, и по формуле (3.10)

$$\frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{R r^m} dS_R = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \rho'^2}{R r'^m} dS_R = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}. \tag{4}$$

Умножим равенство (4) на $\varphi(x_0)$ и вычтем из формулы Пуассона (1):

$$u(x) - \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\rho^2 - m^2}{R r^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, dS_R.$$

Повторив рассуждения § 3, получим

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\varphi(x_0)\right]=0.$$

Отсюда

$$|u(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\left|u(x)-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\varphi(x_0)\right|+|\varphi(x_0)|\left(1-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\right)\xrightarrow[x\to x_0]{}0,$$

и равенство (2) доказано.

§ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Теорема 12.6.1. *Пусть $u(x)$ — функция, гармоническая в бесконечной области Ω с конечной границей Γ. Тогда для достаточно больших $|x|$ и для любого мультииндекса α справедливо неравенство*

$$|D^\alpha u(x)|\leqslant\frac{C_\alpha}{|x|^{m+k-2}},\quad k=|\alpha|,\tag{1}$$

где C_α не зависит от x.

Граница Γ конечна, поэтому можно построить сферу S_R столь большого радиуса R, чтобы Γ целиком лежала внутри этой сферы. Для функции $u(x)$ во внешности сферы S_R справедлива формула Пуассона:

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}u(\xi)\,d_\xi S_R,\quad \rho=|x|.$$

В этой формуле можно дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$D^\alpha u=\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}u(\xi)\,D_x^\alpha\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^m}\right)d_\xi S_R.\tag{2}$$

Докажем, что справедливо представление

$$D^\alpha\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^m}\right)=\frac{p_{k+2}(x)}{r^{m+2k}},\tag{3}$$

где $p_{k+2}(x)$ — полином, степень которого не превосходит $k+2$, а коэффициенты полиномиально зависят от ξ. На самом деле полином $p_{k+2}(x)$ зависит не только от $k=|\alpha|$, но и от всех составляющих мультииндекса α; мы этого не подчеркиваем в нашем обозначении.

Формула (3) очевидно верна при $k=0$. Покажем, что если эта формула верна при некотором k, то она верна и при $k+1$. Пусть β — мультииндекс длины $k+1$ и $D^\beta=\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}$. Обозначим $D^\alpha=\dfrac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}$; ясно, что $|\alpha|=k$; теперь

$$D^\beta\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^m}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}D^\alpha\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^m}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{p_{k+2}(x)}{r^{m+2k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^{m+2k+2}}\left[r^2\frac{\partial p_{k+2}}{\partial x_{i_{k+1}}}-(m+2k)(x_{i_{k+1}}-\xi_{i_{k+1}})\,p_{k+2}(x)\right].$$

Выражение в квадратных скобках есть полином степени, не большей, чем $k+3$, и коэффициенты этого полинома сами суть полиномы от ξ. Представление (3) установлено.

Пусть ρ достаточно велико, например, пусть $\rho > 2R$. Тогда $r > \rho - R > \rho/2$, и мы получаем оценку производной от ядра Пуассона

$$D^\alpha\left(\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\right) \leqslant \frac{2^{m+2k}\,|\,P_{k+3}(x)\,|}{R\,|\,x\,|^{m+2k}} \leqslant \frac{C'_\alpha}{|\,x\,|^{m+k-2}}, \quad C'_\alpha = \text{const}.$$

Теперь

$$|\,D^\alpha u(x)\,| \leqslant \frac{C_\alpha}{|\,x\,|^{m+k-2}}, \quad C_\alpha = \frac{C'_\alpha}{|\,S_1\,|}\int\limits_{S_R} |\,u(\xi)\,|\,dS_R. \ \blacksquare$$

Заметим, что при $m=2$ можно получить оценку производных гармонической функции с порядком убывания на единицу большим, чем в формуле (1).

§ 7. УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть x_0 — точка некоторой области Ω. Рассмотрим функцию $u(x)$, гармоническую в области $\Omega \setminus \{x_0\}$. Пусть при $x \to x_0$ эта функция растет медленнее, чем сингулярное решение уравнения Лапласа с особенностью в x_0. Более определенно, пусть существует функция $\mu(\delta)$, определенная при $\delta > 0$, такая, что $\mu(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и при $|\,x - x_0\,| < \delta$ справедливо неравенство

$$\left.\begin{aligned} |\,u(x)\,| &\leqslant \mu(\delta)\,|\,x - x_0\,|^{2-m}, \quad m > 2;\\ |\,u(x)\,| &\leqslant \mu(\delta)\ln\frac{1}{|\,x-x_0\,|}, \quad m = 2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Тогда говорят, что в точке x_0 функция $u(x)$ имеет устранимую особенность.

Теорема 12.7.1. *Если функция $u(x)$ гармонична в $\Omega \setminus \{x_0\}$ и имеет в x_0 устранимую особенность, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$; если доопределить функцию u в x_0, положив $u(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} u(x)$, то эта функция станет гармонической в области Ω.*

Доказательство проведем, предполагая, что $m > 2$; случай $m = 2$ рассматривается аналогично. Поместим начало координат в точке x_0, тогда $x_0 = 0$. Построим шар с центром в начале и с радиусом R, столь малым, что указанный шар вместе со своей границей S_R лежит в Ω. Построим функцию $u_1(x)$, гармоническую в шаре $|\,x\,| < R$ и совпадающую с $u(x)$ на сфере S_R:

$$u_1(x) = \frac{1}{(m-2)\,|\,S_1\,|}\int\limits_{S_R} u(\xi)\,\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R.$$

Разность $w(x) = u(x) - u_1(x)$ гармонична в области $0 < |\,x\,| < R$ (шаре с выколотым центром), равна нулю на сфере S_R и при достаточно малых δ удовлетворяет (в силу ограниченности функции $u_1(x)$) неравенству

$$|x| \leqslant \delta, \quad |w(x)| \leqslant 2\mu(\delta)|x|^{2-m}. \tag{2}$$

Пусть δ столь мало, что $\delta^{2-m} > 4R^{2-m}$. Введем вспомогательную функцию

$$w_\delta(x) = 4\mu(\delta)[|x|^{2-m} - R^{2-m}]. \tag{3}$$

В шаровом слое $\delta < |x| < R$ функции $w_\delta(x) + w(x)$ и $w_\delta(x) - w(x)$ гармоничны, а на границе этого слоя они неотрицательны: эти функции равны нулю при $|x| = R$ и превосходят величину $\mu(\delta)\delta^{2-m}$ при $|x| = \delta$. В силу принципа максимума (§ 7 гл. II) имеем

$$|w(x)| \leqslant w_\delta(x), \quad \delta \leqslant |x| \leqslant R. \tag{4}$$

Зафиксируем x, $0 < |x| < R$, и положим $\delta \to 0$. Из формул (3) и (4) вытекает, что $w(x) = 0$. Таким образом, в шаре с выколотым центром $0 < |x| < R$ функция $u(x)$ совпадает с функцией $u_1(x)$, гармонической в шаре $|x| < R$. Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \frac{1}{R^{m-1}|S_1|} \int_{S_R} u(\xi)\, d_\xi S_R. \tag{5}$$

Если принять, что $u(0)$ равно величине (5), то функция $u(x)$ будет представлена интегралом Пуассона во всем шаре $|x| < R$ и будет гармонична в этом шаре, а следовательно, и во всей области Ω. ■

Следствие из теоремы 12.7.1. *Пусть Ω' — m-мерная бесконечная область, $m > 2$, и функция $u'(x')$ гармонична в области Ω' с выключенной бесконечно удаленной точкой. Пусть, далее,*

$$|u'(x')| \leqslant \mu(\delta), \quad |x'| \geqslant \frac{1}{\delta}, \tag{6}$$

где функция $\mu(\delta)$ определена при $\delta > 0$ и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Тогда $u'(x') = O(|x'|^{2-m})$ при $|x'|$ достаточно большом и, следовательно, функция $u'(x')$ гармонична в Ω'.

Поместим начало координат в области, дополнительной к Ω', и выполним преобразование Кельвина. При этом Ω' перейдет в некоторую конечную область Ω, бесконечно удаленная точка — в начало координат, а функция $u(x)$, соответствующая функции $u'(x')$ по преобразованию Кельвина, будет гармонической в $\Omega \setminus \{0\}$ и будет удовлетворять неравенству (1). По доказанному, $u(x)$ ограничена в окрестности начала, а тогда функция $u'(x') = O(|x'|^{2-m})$ и, следовательно, гармонична в Ω'.

При $m = 2$ сформулированное здесь следствие верно, если вместо неравенства (6) выполнено неравенство

$$|u'(x')| \leqslant \mu(\delta) \ln |x'|, \quad |x'| > \frac{1}{\delta}.$$

Глава 13

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Настоящая глава содержит элементы теории сферических функций в многомерном пространстве. Более полно теория сферических функций излагается в ряде книг, из которых отметим здесь книги [7], [12], [36], (т. III), а также в старой, но во многих отношениях далеко не устаревшей статье [50]; в [12] и [36] рассматриваются сферические функции в трехмерном пространстве. Некоторые вопросы теории сферических функций рассмотрены в книге [27].

Теория сферических функций имеет важные приложения в математической физике, в теоретической физике и в теории сингулярных интегральных уравнений.

§ 1. ПОНЯТИЕ О СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Рассмотрим m-мерное евклидово пространство координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и однородные полиномы от этих координат, удовлетворяющие однородному уравнению Лапласа. Такие полиномы, очевидно, гармоничны в любой конечной области. Гармонические однородные полиномы данной степени n нетрудно построить: для этого достаточно взять однородный полином степени n с произвольными коэффициентами, составить его оператор Лапласа и последний приравнять нулю. Это даст некоторые соотношения между коэффициентами; полиномы, коэффициенты которых удовлетворяют этим соотношениям, и будут гармоническими.

Для примера рассмотрим случай трех независимых переменных x_1, x_2, x_3. Очевидно, любой полином нулевой или первой степени — гармонический. Однородный полином второй степени в общем случае имеет вид

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk}x_jx_k, \quad a_{jk}=a_{kj}.$$

Его оператор Лапласа равен $2(a_{11}+a_{22}+a_{33})$. Приравняв его нулю, получим $a_{33}=-(a_{11}+a_{22})$. Это дает общую форму гармонического полинома второй степени с тремя независимыми переменными

$$a_{11}(x_1^2-x_3^2)+a_{22}(x_2^2-x_3^2)+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

Последняя формула, между прочим, показывает, что среди упомянутых полиномов имеется пять линейно независимых. Это, например, полиномы

$$x_1^2-x_3^2,\quad x_1^2-x_2^2,\quad x_1x_2,\quad x_1x_3,\quad x_2x_3.$$

Существует $2n+1$ линейно независимых однородных гармонических полиномов степени n с тремя независимыми переменными. В общем случае m независимых переменных число линейно независимых однородных гармонических полиномов степени n равно

$$(2n+m-2)\frac{(m+n-3)!}{(m-2)!\,n!} \tag{1}$$

Величину (1) будем далее обозначать через $k_{n,m}$.

Докажем формулу (1). Прежде всего подсчитаем число $K_{n,m}$ всех линейно независимых однородных полиномов данной степени n в m-мерном пространстве. Очевидно, $K_{n,m}$ равно числу различных одночленов вида $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m}$, $|\alpha|=n$. Такой одночлен можно символически изобразить следующим образом. Отметим на прямой $n+m-1$ точек. В первых α_1 точках восставим палочки, следующую точку превратим в запятую, затем восставим α_2 палочек, которые отделим запятой, и т. д. Получим фигуру, содержащую n палочек и $m-1$ запятых; последние разбивают палочки на m совокупностей численности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Так, рис. 15 соответствует одночлену 9-й степени $x_1^2x_2^4x_5^3$ в 6-мерном пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Мы получим всевозможные одночлены степени n с m независимыми переменными, если всевозможными способами превратим $m-1$ точек в запятые. Число этих способов равно числу сочетаний из $n+m-1$ элементов по $m-1$; отсюда

Рис. 15

$$K_{n,m}=\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!\,n!}. \tag{2}$$

Чтобы выделить однородные гармонические полиномы степени n, надо потребовать, чтобы их лапласианы (т. е. операторы Лапласа) обратились в нуль. Ясно, что такой лапласиан будет однородным полиномом степени $n-2$. Докажем, что и, наоборот, любой однородный полином степени $n-2$ можно рассматривать как лапласиан некоторого однородного полинома степени n.

Пусть дан полином степени $n-2$, вообще говоря, неоднородный, $f(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{n-2} a_\alpha x^\alpha$. Напишем уравнение $\Delta g=f(x)$ и будем искать его решение в виде произведения

$$g(x)=\left(1-\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)\sum_{|\alpha|=0}^{n-2} b_\alpha x^\alpha;$$

очевидно, число коэффициентов b_α, так же как и число коэффициентов a_α, равно $N=\sum_{j=0}^{n-2} K_{j,m}$. Выражение Δg представляет собой полином степени $n-2$; приравняв его полиному $f(x)$, придем к системе N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными b_α. Эта система однозначно разрешима — в противном случае, положив $f(x)\equiv 0$, мы нашли бы гармонический полином $g(x)\neq 0$, который обращается в нуль на сфере $\sum_{k=1}^{m} x_k^2=1$, а это противоречило бы теореме о единственности решения внутренней задачи Дирихле.

Пусть теперь $f(x)$ — однородный полином степени $n-2$. Полином $g(x)$ представим в виде суммы однородных полиномов:

$$g(x)=g_n(x)+g_{n-1}(x)+\ldots+g_0(x),$$

значок внизу указывает степень полинома; отсюда

$$f(x)=\Delta g_n(x)+\Delta g_{n-1}(x)+\ldots+\Delta g_0(x). \tag{3}$$

Слагаемые справа в (3) суть полиномы степеней $n-2, n-3, \ldots, 0$ соответственно, и формула (3) дает разложение полинома $f(x)$ в сумму однородных полиномов. Но такое разложение единственно, а полином $f(x)$ — однородный степени $n-2$; отсюда следует, что $\Delta g_{n-1}(x)=\ldots\Delta g_0(x)\equiv 0$, а $\Delta g_n(x)=f(x)$. В результате мы получили однородный полином $g_n(x)$ степени n, лапласиан которого совпадает с заданным однородным полиномом $f(x)$ степени $n-2$.

Таким образом, оператор Лапласа осуществляет отображение пространства Π_n однородных полиномов степени n на пространство Π_{n-2} однородных же полиномов степени $n-2$. Гармонические однородные полиномы степени n образуют ядро указанного отображения. Размерность этого ядра (выше она была обозначена через $k_{n,m}$) равна разности размерностей пространств Π_n и Π_{n-2}:

$$k_{n,m}=K_{n,m}-K_{n-2,m}=\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!\,n!}-\frac{(n+m-3)!}{(m-1)!\,(n-2)!}=$$
$$=(2n+m-2)\frac{(n+m-3)!}{(m-2)!\,n!}.$$

Формула (1) доказана. Величина (1) допускает простую оценку, которая будет использована в дальнейшем, именно

$$k_{n,m}=\frac{(2n+m-2)(n+m-3)(n+m-4)\ldots(n+1)}{(m-2)!}=O(n^{m-2}). \tag{4}$$

В случае $m=2$, $n>0$ существует только два линейно независимых однородных гармонических полинома степени n, а именно полиномы $\operatorname{Re}(z^n)$ и $\operatorname{Im}(z^n)$, где $z=x_1+ix_2$.

От декартовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ перейдем к сферическим координатам $\rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}, \vartheta_{m-1}$ по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\vartheta_1, \\ x_2 &= \rho\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1}, \\ x_m &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $P_{n,m}(x)$ — однородный гармонический полином степени n от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Заменим последние по формулам (5). Так как данный полином — однородный степени n, то он примет вид

$$P_{n,m}(x) = \rho^n Y_{n,m}(\Theta). \tag{6}$$

Здесь через Θ обозначена точка единичной сферы с угловыми координатами $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$.

Функция $Y_{n,m}(\Theta)$ называется *m-мерной сферической функцией порядка n*. В дальнейшем размерность m пространства будет оставаться фиксированной, и мы будем опускать слово «m-мерная» в названии сферической функции.

Из определения сразу вытекает, что сферическая функция порядка n есть полином степени n относительно синусов и косинусов угловых координат; в частности, $Y_{0,m}(\Theta) = \text{const}$. Очевидно также, что существует $k_{n,m}$ линейно независимых сферических функций порядка n; будем обозначать их через $Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)$, $k = 1, 2, \ldots, k_{n,m}$.

Если $m = 2$, то существуют две линейно независимые сферические функции порядка $n > 0$. За такие функции можно принять $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$, где ϑ — полярный угол в двумерной плоскости. По этой причине случай $m = 2$ не представляет особого интереса для теории сферических функций, и ниже в этой главе всюду предполагается, что $m > 2$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Будем исходить из выражения оператора Лапласа в сферических функциях (формулы (2.7) и (2.8) гл. 11)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{m-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\delta, \tag{1}$$

где

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{q_j \sin^{m-j-1}\vartheta_j}\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\left(\sin^{m-j-1}\vartheta_j\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\right). \tag{2}$$

Оператор Лапласа инвариантен относительно поворотов декартовых осей координат; формула (1) показывает, что тем же свойством обладает и оператор δ. Подставим в однородное уравнение Лапласа, $\Delta u = 0$, вместо u выражение $\rho^n Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)$; сократив на ρ^{n-2}, получим дифференциальное уравнение сферических функций

$$\delta Y^{(k)}_{n,m}(\Theta) - n(n+m-2)\, Y^{(k)}_{n,m}(\Theta) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) показывает, в частности, что значения $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 1, 2, \ldots$, суть собственные числа оператора δ кратности (по крайней мере) $k_{n,m}$; сферические функции $Y^{(k)}_{n,m}(\Theta)$, $1 \leqslant k \leqslant k_{n,m}$ являются собственными функциями оператора δ, соответствующими собственному числу $n(n+m-2)$. Ниже (§ 7) будет показано, что других собственных функций оператор δ не имеет и, следовательно, кратность собственного числа $n(n+m-2)$ в точности равна $k_{n,m}$.

Как было сказано выше, произведение $\rho^n Y_{n,m}(\Theta)$ удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. Выясним вообще, при каких значениях множителя $\varphi(\rho)$ произведение $\varphi(\rho)\, Y_{n,m}(\Theta)$ удовлетворяет тому же уравнению. Приравняем нулю лапласиан указанного произведения:

$$\left[\varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho)\right] Y_{n,m}(\Theta) - \frac{1}{\rho^2}\varphi(\rho)\, \delta Y_{n,m}(\Theta) = 0.$$

Исключая $\delta Y_{n,m}(\Theta)$ с помощью уравнения (3), получаем

$$\varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho) - \frac{n(n+m-2)}{\rho^2}\varphi(\rho) = 0. \tag{4}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, типа Эйлера. Его линейно независимые интегралы суть ρ^n и ρ^{-n-m+2}. Первый из них нам уже известен, второй же дает функции $Y_{n,m}(\Theta)/\rho^{n+m-2}$, гармонические в областях, не содержащих начала координат.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Класс $C^{(k)}(S_1)$. Выделим класс функций, заданных на единичной сфере S_1; этот класс, который обозначим через $C^{(k)}(S_1)$, определяется следующим образом. На сфере S_1 возьмем произвольную точку Θ_0 и окружим ее достаточно малой окрестностью $\sigma(\Theta_0) \subset S_1$. В точке Θ_0 проведем касательную плоскость к сфере; ортогонально спроектируем окрестность $\sigma(\Theta_0)$ на эту плоскость, и пусть $G(\Theta_0)$ — полученная проекция. Очевидно, $G(\Theta_0) \subset E_{m-1}$. Обозначим через y точку области $G(\Theta_0)$, полученную проектированием переменной точки $\Theta \in \sigma(\Theta_0)$. Пусть $f(\Theta)$ — функция, заданная на сфере S_1. Положим $F(y) = f(\Theta)$, $\Theta \in \sigma(\Theta_0)$. Будем говорить, что $f \in C^{(k)}(S_1)$, если $F \in C^{(k)}(G(\Theta_0))$ для любой точки $\Theta_0 \in S_1$.

Классу $C^{(k)}(S_1)$ можно дать другое, равносильное определение. Пусть $f(\Theta)$ — функция, заданная на S_1. Построим шаровой слой $\Sigma = \{x\colon \rho_1 \leqslant |x| \leqslant \rho_2\}$, где ρ_1 и ρ_2 — произвольные, но фиксированные положительные числа. Можно считать, что $\rho_1 < 1 < \rho_2$, так что $S_1 \subset \Sigma$. Функцию $f(\Theta)$ продолжим на слой Σ по формуле $f^*(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$; здесь f^* — продолженная функция. Ясно, что $f^*(x)$ постоянна на любом луче, проходящем через начало, и, следовательно, не зависит от $\rho = |x|$.

Класс $C^{(k)}(S_1)$ можно теперь определить так: $f \in C^{(k)}(S_1)$, если $f^* \in C^{(k)}(\Sigma)$.

Усреднение на сфере. Для функций, заданных на сфере S_1, можно разработать аппарат усреднения подобно тому, как это было сделано в гл. 2. При этом по сравнению со случаем евклидова пространства здесь будут иметь место некоторые упрощения, потому что сфера — это компактное многообразие без края.

Пусть Θ и Θ' — точки на сфере S_1, а также соответствующие им векторы в евклидовом пространстве E_m, и пусть $\delta = |\Theta - \Theta'| = \|\Theta - \Theta'\|_{E_m}$. *Усредняющим ядром* назовем функцию $\omega_h(\delta)$, удовлетворяющую условиям 1 и 2 § 1 гл. 2 и условию

$$\int_{S_1} \omega_h(\delta)\, d_{\Theta'} S_1 = \int_{\delta \leqslant h} \omega_h(\delta)\, d_{\Theta'} S_1 = 1, \tag{1}$$

заменяющему условие 3 § 1 гл. 2. В качестве $\omega_h(\delta)$ можно взять функцию

$$\omega_h(\delta) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - \delta^2}}, & \delta < h, \\ 0, & \delta \geqslant h, \end{cases} \tag{2}$$

где c_h определяется из соотношения (1).

Если функция $f(\Theta)$ суммируема на S_1, то ее средняя определяется формулой

$$f_h(\Theta) = \int_{S_1} \omega_h(\delta) f(\Theta')\, d_{\Theta'} S_1. \tag{3}$$

Отметим следующие свойства средних функций на сфере, они доказываются так же, как в гл. 2:

а) $f_h \in C^{(\infty)}(S_1)$; б) если $1 \leqslant p < \infty$ и $f \in L_p(S_1)$, то $\|f_h - f\|_{L_p(S_1)} \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$; в) если $f \in C(S_1)$, то $f_h(\Theta) \to f(\Theta)$ равномерно на S_1.

Из свойств а) и б) вытекает, что множество $C^{(\infty)}(S_1)$ плотно в $L_p(S_1)$ при любом p, $1 \leqslant p < \infty$.

Неравенство Маркова. Пусть t — вещественная переменная, $f(t)$ — полином степени n и $M = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$. Тогда справедливо неравенство Маркова [1]

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f'(t)| \leqslant \frac{2M}{b-a} n^2. \tag{4}$$

---

[1] Доказательство см., например, в книге: Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, 1949, с. 174.

Из неравенства (4) вытекает и сходная оценка для старших производных:

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |f^{(s)}(t)| \leqslant \frac{2^s M}{(b-a)^s} n^{2s}. \tag{5}$$

§ 4. ОПЕРАТОР δ И ЕГО СТЕПЕНИ. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Оператор δ зададим на множестве $C^{(2)}(S_1)$. Докажем, что в пространстве $L_2(S_1)$ этот оператор симметричен. Действительно, его область определения плотна в $L_2(S_1)$, потому что она содержит плотное (см. § 3) множество $C^{(\infty)}(S_1)$. Далее, если $f, g \in C^{(2)}(S_1)$, то

$$(\delta f, g) = (\delta f, g)_{L_2(S_1)} = \int_{S_1} g\delta f dS_1 = \int_{S_1} g^*\delta f dS_1;$$

звездочка здесь и ниже означает продолжение функции на шаровой слой Σ (§ 3).

Из формулы (2.1) легко вытекает, что

$$\delta f = -[\rho^2\Delta f^*]_{\rho=1} = -[\Delta f^*]_{\rho=1};$$

отсюда

$$(\delta f, g) - (f, \delta g) = \int_{S_1} (f^*\Delta g^* - g^*\Delta f^*)\, dS_1.$$

Умножив это на $\rho^{m-1}d\rho$ и интегрируя в пределах $\rho_1 < \rho < \rho_2$, получим

$$(\delta f, g) - (f, \delta g) = \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \int_{\Sigma} (f^*\Delta g^* - g^*\Delta f^*)\, dx. \tag{1}$$

Далее, по формуле Грина (6.10) гл. 9

$$\int_{\Sigma} (f^*\Delta g^* - g^*\Delta f^*)\, dx = \int_{S_{\rho_1}\cup S_{\rho_2}} \left(f^*\frac{\partial g^*}{\partial \nu} - g^*\frac{\partial f^*}{\partial \nu}\right) dS.$$

Нормаль ν, внешняя по отношению к Σ, направлена по радиусу на S_{ρ_2} и против радиуса на S_{ρ_1}. Поэтому, например,

$$\left.\frac{\partial g^*}{\partial \nu}\right|_{S_{\rho_1}} = -\left.\frac{\partial g^*}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_1}, \qquad \left.\frac{\partial g^*}{\partial \nu}\right|_{S_{\rho_2}} = \left.\frac{\partial g^*}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_2};$$

в обоих случаях эта производная равна нулю, потому что g^* не зависит от ρ. Теперь из формулы (1) вытекает, что $(\delta f, g) = (f, \delta g)$, и наше утверждение доказано.

Нетрудно доказать также, что оператор δ неотрицателен, т. е. удовлетворяет неравенству $(\delta f, f) \geqslant 0$. Действительно, повторив предшествующие рассуждения, получим равенство

$$(\delta f, f) = -\frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m} \int_{\Sigma} f^*\Delta f^*\, dx$$

и далее по формуле Грина (6.7) гл 9

$$(\delta f, f) = \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m}\left[\int_\Sigma (\operatorname{grad} f^*)^2\,dx - \int_{S_{\rho_1}\cup S_{\rho_2}} f^* \frac{\partial f^*}{\partial \nu}\,dS\right] =$$

$$= \frac{m}{\rho_2^m - \rho_1^m}\int_\Sigma (\operatorname{grad} f^*)^2\,dx \geqslant 0.$$

Из доказанного, между прочим, следует, что все собственные числа оператора δ неотрицательны.

На множестве $C^{(2l)}(S_1)$ определен оператор δ^l; из уравнения (2.3) ясно, что сферические функции суть собственные функции этого оператора, отвечающие собственному числу $n^l(n+m-2)^l$; отсюда следует, что при любом натуральном l сферические функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\delta^l Y_{n,m}(\Theta) - n^l(n+m-2)^l\,Y_{n,m}(\Theta) = 0. \tag{2}$$

Будучи собственными функциями симметричного оператора δ, сферические функции различных порядков ортогональны в $L_2(S)$. Линейно независимые сферические функции одного и того же порядка сделаем ортогональными, применив к ним процесс ортогонализации Шмидта, таким образом,

$$\int_{S_1} Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,Y_{n',m}^{(k')}(\Theta)\,dS_1 = \begin{cases} 0, & n\neq n' \text{ или } k\neq k', \\ 1, & n = n' \text{ и } k = k'. \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда, как обычно, следует, что любой функции $f\in L_2(S_1)$ можно сопоставить ее ортогональный ряд по сферическим функциям

$$f(\Theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\Theta), \tag{4}$$

где

$$a_n^{(k)} = \int_{S_1} f(\Theta)\,Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,dS_1. \tag{5}$$

Ряд (4) сходится в метрике $L_2(S_1)$. Ниже (§ 7) будет показано, что система сферических функций полна в $L_2(S_1)$ и, следовательно, знак соответствия в соотношении (4) можно заменить знаком равенства.

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ В РЯД ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим функцию r^{2-m}, $r = |\xi - x|$, которая только постоянным множителем отличается от сингулярного решения уравнения Лапласа. Обозначим $|\xi| = R$, $|x| = \rho$, и пусть $\rho < R$. Имеем $r^2 = R^2 - 2\rho R\cos\gamma + \rho^2$, где γ — угол между векторами x и ξ. Обозначая $\cos\gamma = t$, имеем далее

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(R^2 - 2\rho R t + \rho^2)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Мы предположили, что $\rho < R$, поэтому справедливо разложение вида

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{R^{m-2}} \frac{1}{\left(1 - 2\frac{\rho}{R}t + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}} = \frac{1}{R^{m-2}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m}(t) \frac{\rho^n}{R^n}; \qquad (1)$$

оно сходится при $\rho < R$, потому что особые точки функции $(1-2zt+z^2)^{-\frac{m-2}{2}}$ суть $e^{\pm i\gamma}$, и они расположены на единичной окружности. Обозначая $\rho/R = \sigma$ и непосредственно вычисляя коэффициенты Тейлора, легко убедиться, что произведение $I_{n,m}(t)\rho^n = I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n$ есть однородный полином степени n относительно декартовых координат точки x.

Выясним подробнее характер разложения (1). Примем, что $R=1$ и, следовательно $\rho<1$. Ряд (1) при этом несколько упрощается:

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m}(t)\rho^n. \qquad (1a)$$

Сначала рассмотрим случай, когда число m нечетное, $m=2s+3$; тогда

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(1-2\rho t+\rho^2)^{s+\frac{1}{2}}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \frac{d^s}{dt^s} \frac{1}{(1-2\rho t+\rho^2)^{1/2}}. \qquad (2)$$

Из теории полиномов Лежандра известно разложение

$$\frac{1}{(1-2\rho t+\rho^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\rho^n, \qquad (3)$$

где P_n — полином Лежандра n-й степени. В случае $m=3$, особо важном для приложений, формула (3) сразу дает искомое разложение сингулярного решения. В общем случае подставим ряд (3) в тождество (2):

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \frac{d^s}{dt^s} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\rho^n.$$

Докажем, что дифференцирование можно произвести под знаком суммы. Достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s}\rho^n, \qquad (4)$$

полученный после дифференцирования, равномерно сходится в прямоугольнике $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho'$, где ρ' — любое число между нулем и единицей. Известно, что $|P_n(t)| \leqslant 1$, если $-1 \leqslant t \leqslant 1$; по неравенству Маркова (§ 3), $\left|\frac{d^s P_n(t)}{dt^s}\right| \leqslant n^{2s}$, ряд (4) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{2s}\rho'^n$ и, следовательно, сходится равномерно. Теперь

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s}\rho^n =$$

$$= \frac{2^s s!}{(2s)!\,\rho^s} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{d^s P_n(t)}{dt^s}\rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{s+\frac{1}{2}}(t)\,\rho^n, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$C_n^{s+\frac{1}{2}}(t) = \frac{2^s s!}{(2s)!}\frac{d^s P_{n+s}(t)}{dt^s}. \quad (6)$$

Пусть теперь m — четное, $m=2s+2$. В этом случае

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{(1-2\rho t+\rho^2)^s} = \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!\,\rho^{s-1}}\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}\frac{1}{1-2\rho t+\rho^2}. \quad (7)$$

Имеем $t=\cos\gamma=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$, $\zeta=e^{i\gamma}$; отсюда

$$\frac{1}{1-2t\rho+\rho^2} = \left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\zeta}-\rho}-\frac{1}{\zeta-\rho}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin\gamma}\rho^n. \quad (8)$$

Далее,

$$\frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin\gamma} = \frac{1}{n+1}\frac{d\cos(n+1)\gamma}{d\cos\gamma} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{d}{dt}\cos[(n+1)\arccos t] = \frac{1}{n+1}\frac{dT_{n+1}(t)}{dt},$$

где T_k — полином Чебышева степени k. Используя опять неравенство Маркова, а также очевидное неравенство $|T_k(t)| = |\cos k\arccos t| \leqslant 1$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, найдем, что после подстановки ряда (8) в тождество (7) можно производить дифференцирование почленно. Это приведет к разложению

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^s(t)\,\rho^n, \quad m=2s+2, \quad (9)$$

где

$$C_n^s(t) = \frac{1}{2^{s-1}(s-1)!\,(n+s)}\frac{d^s T_{n+s}(t)}{dt^s}. \quad (10)$$

Полиномы $C_n^{s+\frac{1}{2}}(t)$ и $C_n^s(t)$ суть частные случаи так называемых *полиномов Гегенбауэра*; ряды (5) и (9) были получены Э. Гейне [50]. Из полученных нами выражений следует, что

$$I_{n,m}(t) = \begin{cases} C_n^{s+\frac{1}{2}}(t), & m=2s+3, \\ C_n^s(t), & m=2s+2. \end{cases} \quad (11)$$

Как показывают формулы (6) и (10), $I_{n,m}(t)$ есть полином степени n относительно t. Выведем оценки для этого полинома и его производных. Пусть сначала m — нечетное, $m=2s+3$, тогда по формуле (6)

$$I_{n,m}(t)=C_n^{s+\frac{1}{2}}(t)=\frac{2^s s!}{(2s)!}\frac{d^s P_{n+s}(t)}{dt^s},$$

и далее, по неравенству Маркова,

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|I_{n,m}(t)|\leqslant c'(n+s)^{2s}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|P_{n+s}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant cn^{2s}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|P_{n+s}(t)|.$$

Как уже было отмечено, $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|P_{n+s}(t)|=1$, и окончательно

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|I_{n,m}(t)|\leqslant cn^{m-3}. \tag{12}$$

Если m — четное, $m=2s+2$, то по формуле (10)

$$I_{n,m}(t)=C_n^s(t)=\frac{1}{2^{s-1}(s-1)!(n+s)}\frac{d^s T_{n+s}(t)}{dt^s}.$$

Отсюда по неравенству Маркова имеем

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|I_{n,m}(t)|\leqslant c''n^{2s-1}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|T_{n+s}(t)|=$$
$$=c''n^{m-3}\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|T_{n+s}(t)|.$$

Но $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|T_{n+s}(t)|=1$, и мы опять приходим к неравенству (12), которое оказывается верным и для четных, и для нечетных m.

Неравенство Маркова вместе с неравенством (12) позволяет сразу написать оценку для производных

$$\left|\frac{d^k I_{n,m}(t)}{dt^k}\right|\leqslant c_k n^{m+2k-3};\quad -1\leqslant t\leqslant 1,\ c_k=\text{const}. \tag{13}$$

Докажем теперь, что ряд (1а) можно сколько угодно раз дифференцировать почленно по сферическим координатам точки x. Это очевидно, если речь идет о координате ρ, и мы рассмотрим только дифференцирование по угловым координатам. Пусть угловые координаты точки x суть $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$. Ряд (1а) формально продифференцируем по ϑ_j, что приведет к новому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n I'_{n,m}(t)\frac{\partial t}{\partial\vartheta_j}. \tag{14}$$

Если $|\xi|=R=1$, то

$$\frac{\partial t}{\partial\vartheta_j}=\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\vartheta_j}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\xi_k x_k}{\partial\vartheta_j}=\frac{1}{\rho}\xi_k\frac{\partial x_k}{\partial\vartheta_j}.$$

Из формул (2.1) гл. 1 очевидно вытекает, что величина $\partial t/\partial\vartheta_j$ ограничена. Неравенство (13) показывает, что при $0\leqslant\rho\leqslant\rho'$, где $\rho' = \text{const} < 1$ ряд (14) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-1}\rho'^n$ и ряд (14) сходится равномерно. Этим доказано, что ряд (1а) можно один раз почленно дифференцировать по угловым координатам. Аналогично доказывается возможность почленного дифференцирования любого более высокого порядка.

Из доказанного, в частности, вытекает равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_x [I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n] = \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}} = 0.$$

Замечая, что γ не зависит от ρ, и пользуясь выражением оператора Лапласа в сферических координатах (формула (2.1)), получаем

$$\Delta[I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n] = -\rho^{n-2}[\delta I_{n,m}(\cos\gamma) - n(n+m-2) I_{n,m}(\cos\gamma)]$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\delta I_{n,m}(\cos\gamma) - n(n+m-2) I_{n,m}(\cos\gamma)]\rho^{n-2} = 0.$$

Отсюда следует, что выражение в квадратной скобке равно нулю, однородный полином n-й степени $I_{n,m}(\cos\gamma)\rho^n$ — гармонический и при фиксированной точке ξ функция $I_{n,m}(\cos\gamma)$ — сферическая порядка n. Положив $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$, убеждаемся, что $I_{n,m}(\cos\vartheta_1)$ есть сферическая функция порядка n.

§ 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $Y_{n,m}(\Theta)$ — какая-нибудь сферическая функция порядка n. Для гармонической функции $u_n(x) = \rho^n Y_{n,m}(\Theta)$ напишем интегральное представление (3.5) гл. 11 в шаре радиуса R с центром в начале координат:

$$u_n(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{S_R} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial\nu} - u_n(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right) dS_R. \tag{1}$$

Обозначим $\xi/R = \xi/|\xi| = \Theta'$, тогда $u_n(\xi) = R^n Y_{n,m}(\Theta')$ и $\partial u_n(\xi)/\partial\nu = nR^{n-1}Y_{n,m}(\Theta')$. Далее, по формуле (5.1)

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} I_{k,m}(\cos\gamma)\frac{\rho^k}{R^{k+m-2}} \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+m-2) I_{k,m}(\cos\gamma)\frac{\rho^k}{R^{k+m-1}}. \tag{3}$$

Если $\rho < \rho'$, где $\rho' < R$ и $\rho' = \text{const}$, то, по неравенству (4.10), общие члены рядов (2) и (3) имеют соответственно оценки

$c_1 n^{m-3}(\rho'/R)^n$ и $c_2 n^{m-2}(\rho'/R)^n$, где c_1 и c_2 — некоторые постоянные. Отсюда следует, что упомянутые ряды сходятся равномерно по ρ и t при $\rho \leqslant \rho'$, $|t| \leqslant 1$. Подставив эти ряды в формулу (1), изменив порядок суммирования и интегрирования и положив затем $R=1$, получим

$$\rho^n Y_{n,m}(\Theta) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \sum_{k=0}^{\infty} (k+n+m-2)\rho^k \times$$
$$\times \int_{S_1} I_{n,m}(\cos\gamma)\, Y_{k,m}(\Theta')\, d_{\Theta'}S_1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ρ, придем к соотношениям:

$$Y_{n,m}(\Theta) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|} \int_{S_1} I_{n,m}(\cos\gamma)\, Y_{n,m}(\Theta')\, d_{\Theta'}S_1; \tag{4}$$

$$\int_{S_1} I_{k,m}(\cos\gamma)\, Y_{n,m}(\Theta')\, d_{\Theta'}S_1 = 0, \quad k \neq n. \tag{5}$$

Уравнение (4) и есть интегральное уравнение сферических функций. Уравнение (5) не дает ничего нового: оно вытекает из ортогональности сферических функций. В самом деле, $\cos\gamma = \Theta\cdot\Theta'$, где точка означает скалярное умножение в E_m. Функция $I_{k,m}(\cos\gamma) = I_{k,m}(\Theta\cdot\Theta')$ симметрична относительно Θ и Θ' и потому является, при фиксированной точке Θ, сферической функцией порядка k от Θ' и при $k \neq n$ она ортогональна к $Y_{n,m}(\Theta')$.

Интегральное уравнение (3) позволяет получить важные для дальнейшего оценки модулей сферических функций. Пусть $Y_{n,m}(\Theta)$ — произвольная сферическая функция порядка n. По неравенству Буняковского,

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|} \|Y_{n,m}\|_{L_2(S_1)} \left\{ \int_{S_1} I^2_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')\, d_{\Theta'}S_1 \right\}^{1/2}.$$

Если Θ фиксированная, а Θ_1 — переменная точка на S_1, то $I_{n,m}(\Theta\cdot\Theta_1)$ есть сферическая функция порядка n относительно точки Θ_1, и по тому же уравнению (3)

$$I_{n,m}(\Theta\cdot\Theta_1) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|} \int_{S_1} I_{n,m}(\Theta_1\cdot\Theta')\, I_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')\, d_{\Theta'}S_1.$$

Положив здесь $\Theta_1 = \Theta$, получим

$$I_{n,m}(1) = \frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|} \int_{S_1} I^2_{n,m}(\Theta\cdot\Theta')\, d_{\Theta'}S_1 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+m-2}{(m-2)|S_1|}}\, \|Y_{n,m}\| \sqrt{I_{n,m}(1)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \|Y_{n,m}\| \sqrt{I_{n,m}(1)}\, \sqrt{n}; \quad c_1 = \text{const}. \tag{7}$$

По формуле (4.10) $I_{n,m}(1) \leqslant cn^{m-3}$; подставив это в (7), получим искомую оценку:

$$|Y_{n,m}(\Theta)| \leqslant C \| Y_{n,m} \| n^{\frac{m}{2}-1}; \quad C = \mathrm{const}. \tag{8}$$

В частности, если $\{Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\}$ — ортонормированная последовательность сферических функций, введенная в § 3, то

$$|Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)| \leqslant Cn^{\frac{m}{2}-1}. \tag{9}$$

Заметим, что постоянная C зависит от m.

§ 7. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 13.7.1. *Система сферических функций полна в $L_p(S_1)$ при любом p, $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство разобьем на четыре части.

1°. Пусть $\varphi \in C^{(2l)}(S_1)$, где l — достаточно большое число. В шаре $\rho = |x| < 1$ построим гармоническую функцию $u(x)$, которая на сфере S_1 (при $x = \Theta$) совпадает с $\varphi(\Theta)$. По формуле Пуассона (формула (9.4) гл. 12)

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_1} \varphi(\Theta') \frac{1-\rho^2}{r^m} d_{\Theta'}S_1; \quad |x| = \rho < 1; \tag{1}$$

мы заменили здесь обозначение ξ на Θ'.

Ядро Пуассона $(1-\rho^2)/r^m$ можно разложить в ряд по степеням ρ. Для этого разложим r^{-m} в ряд, аналогично тому, как это было сделано в § 5: $\frac{1}{r^m} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_{n,m+2}(t)\rho^n$, где $t = \cos\gamma = \Theta \cdot \Theta'$, $\Theta = x/\rho$. Теперь

$$\frac{1-\rho^2}{r^m} = \sum_{n=0}^{\infty} J_{n,m}(t)\rho^n; \tag{2}$$

здесь $J_{0,m}(t) = I_{0,m+2}(t)$, $J_{1,m}(t) = I_{1,m+2}(t)$ и $J_{n,m}(t) = I_{n,m+2}(t) - I_{n-2,m+2}(t)$, $n \geqslant 2$. Как и в § 5, можно убедиться, что произведение $\rho^n J_{n,m}(t)$ есть однородный гармонический полином степени n и, следовательно, $J_{n,m}(\Theta \cdot \Theta')$ есть сферическая функция порядка n от точки Θ при фиксированной точке Θ'. Отсюда следует, что справедливо представление вида

$$J_{n,m}(\Theta\Theta') = \sum_{k=1}^{k_{n,m}} \alpha_n^{(k)}(\Theta') Y_{n,m}^{(k)}(\Theta).$$

Повторив рассуждения § 5, убедимся, что ряд (2) сходится равномерно. Подставим его в формулу (1) и изменим порядок суммирования и интегрирования:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\varphi(\Theta')\,J_{n,m}(\Theta\Theta')\,d_{\Theta'}S_1. \tag{3}$$

Множитель при ρ^n в последней формуле есть сферическая функция порядка n:

$$\frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\varphi(\Theta')\,J_{n,m}(\Theta\Theta')\,d_{\Theta'}S_1=\sum_{k=1}^{k_{n,m}}a_n^{(k)}Y_{n,m}^{(k)}(\Theta),$$

где

$$a_n^{(k)}=\frac{1}{|S_1|}\int_{S_1}\alpha_n^{(k)}(\Theta')\,\varphi(\Theta')\,dS_1; \tag{4}$$

теперь

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\sum_{k=1}^{k_{n,m}}a_n^{(k)}Y_{n,m}^{(k)}(\Theta). \tag{5}$$

2°. Оценим коэффициенты $a_n^{(k)}$. Из формулы (5) видно, что величины $\rho^n a_n^k$ суть коэффициенты Фурье функции $u(x)$, $x=\rho\Theta$, по ортонормированной системе сферических функций $Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)$; отсюда

$$\rho^n a_n^{(k)}=\int_{S_1}u(\rho\Theta)\,Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,dS_1. \tag{6}$$

Пусть $\rho\to 1$. Как было показано в § 4 гл. 12, $u(\rho\Theta)\underset{\rho\to 1}{\longrightarrow}\varphi(\Theta)$ равномерно по Θ; в формуле (6) можно перейти к пределу под знаком интеграла, и получается равенство

$$a_n^{(k)}=\int_{S_1}\varphi(\Theta)\,Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,dS_1. \tag{7}$$

Функция $\varphi\in C^{(2l)}(S_1)$ и, следовательно, $\varphi\in D(\delta^l)$. Оператор δ, а с ним и его степени, симметричны, и по формуле (4.2)

$$a_n^{(k)}=\frac{1}{n^l(n+m-2)^l}\int_{S_1}\varphi(\Theta)\,\delta^l Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,dS_1=$$

$$=\frac{1}{n^l(n+m-2)^l}\int_{S_1}\delta^l\varphi(\Theta)\,Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)\,dS_1. \tag{8}$$

Интеграл в формуле (8) есть коэффициент Фурье непрерывной функции $\delta^l\varphi(\Theta)$ по ортонормированной системе сферических функций: ряд из квадратов этих коэффициентов сходится, значит, они во всяком случае ограничены, и из формулы (8) следует, что

$$|a_n^{(k)}|\leqslant\frac{c}{n^{2l}},\quad c=\mathrm{const}. \tag{9}$$

Отсюда вытекает и оценка для коэффициента при ρ^n в формуле (5). По неравенствам (6.9) и (1.4)

$$\sum_{k=1}^{k_{n,m}} |a_n^{(k)}| |Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)| \leqslant \frac{c'}{n^{2l+3-\frac{3m}{2}}}, \quad c' = \text{const}.$$

3°. Пусть l столь велико, что $2l+3-\frac{3m}{2}>1$. Рассматривая ряд (5) как ряд по степеням ρ, видим, что он удовлетворяет условиям теоремы Таубера[1]: коэффициенты ряда убывают быстрее, чем n^{-1}, и сумма ряда имеет предел (равный $\varphi(\Theta)$) при $\rho \to 1$. Из теоремы Таубера вытекает, что ряд (5) сходится при $\rho=1$ и что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^k Y_{n,m}^{(k)}(\Theta) = \varphi(\Theta). \tag{10}$$

Отметим, что при том же условии $2l+3-\frac{3m}{2}>1$ ряд (10) сходится абсолютно и равномерно; тем более он сходится в метрике $L_p(S_1)$.

4°. Пусть теперь $f \in L_p(S_1)$, $1 \leqslant p < \infty$. Множество $C^{(\infty)}(S_1)$ плотно в $L_p(S_1)$, поэтому найдется такая функция $\varphi \in C^{(\infty)}(S_1)$, что $\|f-\varphi\|_{L_p(S_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольно заданное положительное число. По доказанному в п. 3°, функцию $\varphi(\Theta)$ можно разложить в ряд (10), сходящийся в метрике $L_p(S_1)$; можно, следовательно, найти такое число N, что

$$\left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^k \right\|_{L_p(S_1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь по неравенству треугольника имеем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)} \right\|_{L_p(S_1)} < \varepsilon. \ \blacksquare$$

Отметим два свойства, очевидным образом вытекающие из полноты системы сферических функций.

1. Сферические функции образуют полную систему собственных функций оператора δ.

2. Если некоторая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.7), то она сферическая, порядка n.

[1] См., например, Маркушевич А. И. Теория аналитических функций Гостехиздат, 1950, с 266.

Глава 14

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. ПОВЕРХНОСТИ ЛЯПУНОВА

По определению (см. Введение, § 2) поверхности Ляпунова суть поверхности класса $C^{(1,\alpha)}$, $0<\alpha\leqslant 1$. Напомним, что это означает следующее. Если Γ — ляпуновская поверхность, то прежде всего она имеет в каждой своей точке определенную нормаль. Далее, существуют такие постоянные d, a, α, где $d>0$, $a>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, что если x — произвольная точка на Γ, то сфера $S_d(x)$ радиуса d с центром в x вырезает из Γ участок $\Gamma(x)$, который в местной системе координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, связанной с точкой x, может быть задан уравнением вида

$$\xi_m = f(\xi'); \tag{1}$$

штрих здесь и ниже обозначает проекцию данной точки на касательную плоскость к Γ в точке x, т. е. на плоскость $\xi_m=0$. Можно рассматривать ξ' как точку $(m-1)$-мерного пространства с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$. Наконец, если ξ и ζ — две точки участка $\Gamma(x)$ и l — любое направление в плоскости $\xi_m=0$, то

$$\left|\frac{\partial f(\xi')}{\partial l} - \frac{\partial f(\zeta')}{\partial l}\right| \leqslant a\left[\sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k-\zeta_k)^2\right]^{\alpha/2}. \tag{2}$$

Сферу $S_d(x)$ будем называть *сферой Ляпунова*. Заметим еще, что радиус d можно заменить любым меньшим.

Плоскость $\xi_m=0$ касается поверхности Γ в точке x — начале местных координат; отсюда $f(0, 0, \ldots, 0)=0$; $\frac{\partial}{\partial l} f(0, 0, \ldots, 0)=0$.

Введем следующие обозначения. Пусть ξ — точка участка $\Gamma(x)$. Расстояние между x и ξ обозначим через r; буквой ρ будем обозначать расстояние между x и ξ', очевидно,

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2,\quad r^2 = \sum_{k=1}^{m}\xi_k^2 = \rho^2+\xi_m^2.$$

Полагая в (2) $\zeta=x$, находим оценку для частных производных функции f:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| \leqslant a\rho^\alpha \tag{3}$$

и тем более

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| \leqslant ar^\alpha, \quad k=1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Оценим еще величину $\xi_m = f(\xi')$, $\xi \in \Gamma(x)$. Проведем отрезок, соединяющий точки x и ξ', и обозначим через $\zeta' = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m-1})$ переменную точку этого отрезка. Пусть ρ' — расстояние между точками x и ζ'. По неравенству (3)

$$|f(\xi')| = \left| \int_0^\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} d\rho' \right| \leqslant \int_0^\rho \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho' \leqslant$$

$$\leqslant a \int_0^\rho \rho'^\alpha d\rho' = c\rho^{\alpha+1}; \quad c = \frac{a}{\alpha+1} \tag{5}$$

и, следовательно,

$$|f(\xi')| \leqslant cr^{\alpha+1}. \tag{6}$$

Неравенство (5) позволяет оценить r через ρ; именно

$$r^2 = \rho^2 + \xi_m^2 \leqslant \rho^2 + c^2\rho^{2\alpha+2} \leqslant (1 + c^2 d^{2\alpha})\rho^2.$$

Как было отмечено выше, радиус d можно взять сколь угодно малым; пусть он таков, что

$$ad^\alpha \leqslant 1. \tag{7}$$

Тогда тем более $cd^\alpha = \frac{a}{1+\alpha} d^\alpha < 1$ и окончательно

$$r \leqslant \sqrt{2}\rho \leqslant 2\rho. \tag{8}$$

Обозначим через n и ν нормали к Γ в точках x и ξ соответственно. Допустим, что $\xi \in \Gamma(x)$, и выведем оценку для величины $|\cos(n, r)|$; r здесь обозначает вектор с началом x и концом ξ. Имеем $\cos(n, r) = \cos(\xi_m, r) = \xi_m/r$, и по неравенству (6)

$$|\cos(n, r)| \leqslant cr^\alpha. \tag{9}$$

Поменяв местами точки x и ξ (это, очевидно, допустимо), получим еще одно важное неравенство:

$$|\cos(\nu, r)| \leqslant cr^\alpha. \tag{10}$$

Для дальнейшего будут полезны также оценки направляющих косинусов нормали ν. По известной формуле дифференциальной геометрии

$$\cos(\nu, \xi_m) = \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2\right]^{-1/2},$$

где τ — направление градиента функции f. По неравенствам (3) и (7)

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqslant (1 + a^2\rho^{2\alpha})^{-1/2} \geqslant (1 + a^2 d^{2\alpha})^{-1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Если $k=1, 2, \ldots, m-1$, то по той же формуле дифференциальной геометрии

$$\cos(\nu, \xi_k) = \pm \frac{\partial f}{\partial \xi_k}\left[1 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2}$$

и по неравенству (3)

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha, \quad k=1, 2, \ldots, m-1. \tag{12}$$

§ 2. ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ

Рассмотрим кусочно гладкую поверхность Σ, вообще говоря, незамкнутую, на которой определено положительное направление нормали. Обозначим через ξ произвольную точку поверхности Σ и через ν — нормаль к Σ, проведенную в точке ξ. Пусть точка $x \in E_m$ расположена так, что в любой точке $\xi \in \Sigma$ радиус-вектор r, идущий от точки x к точке ξ, образует с нормалью ν острый или в крайнем случае прямой угол, так что $\cos(r, \nu) \geqslant 0$. Из точки x проведем радиус-векторы ко всем точкам поверхности Σ. Эти радиус-векторы заполняют область, ограниченную поверхностью Σ и конической поверхностью K, которую образуют радиус-векторы, оканчивающиеся в точках края поверхности Σ (рис. 16). Из точки x как из центра опишем сферу произвольного радиуса R. Обозначим через σ_R часть этой сферы, заключенную в упомянутом выше конусе. Отношение

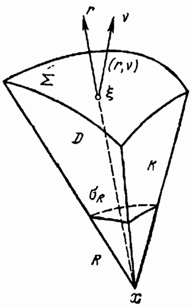

Рис. 16

$$\omega_x(\Sigma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} \tag{1}$$

не зависит от R. Оно называется *телесным углом, под которым поверхность Σ видна из точки x*.

Описанное построение можно выполнить и тогда, когда на поверхности Σ $\cos(r, \nu) \leqslant 0$. В этом случае телесным углом $\omega_x(\Sigma)$, под которым поверхность Σ видна из точки x, называется отношение (1), взятое со знаком минус.

В общем случае, когда $\cos(r, \nu)$ может менять знак, будем предполагать, что поверхность Σ можно разбить на части Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$, на каждой из которых $\cos(r, \nu)$ сохраняет знак. Для такой поверхности телесный угол определяется формулой

$$\omega_x(\Sigma) = \sum \omega_x(\Sigma_k), \tag{2}$$

если только ряд (2) абсолютно сходится (например, если частей Σ_k конечное число).

Докажем, что во всех перечисленных случаях телесный угол $\omega_x(\Sigma)$ определяется при $m>2$ формулой

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{m-2}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma. \tag{3}$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\cos(r,\nu)$ сохраняет знак на поверхности Σ. Выведем предварительно одну вспомогательную формулу, которая окажется полезной и в дальнейшем. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}\cos(\nu,\xi_k);\ \text{но}\ \frac{\partial r}{\partial\xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r} = \cos(r,\xi_k);$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r,\xi_k)\cos(\nu,\xi_k),$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r,\nu). \tag{4}$$

Пусть $x\in\Gamma$ и $\cos(r,\nu)\geqslant 0$. Радиус R возьмем достаточно малым, так чтобы поверхности σ_R и Σ не имели общих точек (см. рис. 16). Рассмотрим область D, ограниченную поверхностями Σ, σ_R и заключенной между ними частью конуса K. В этой области $1/r^{m-2}$ есть гармоническая функция точки ξ, поэтому (формула (6.9) гл. 9)

$$\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma + \int\limits_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\sigma_R + \int\limits_{K}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi K = 0.$$

Через ν^* здесь обозначена нормаль к поверхности, внешняя по отношению к области D; так как $\cos(r,\nu)\geqslant 0$ на Σ, то на этой поверхности $\nu^*=\nu$. На поверхности K $\cos(r,\nu^*)=0$, так как r направлено по образующей, а ν^* к ней перпендикулярно. В силу формулы (4) интеграл по K исчезает и

$$\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma = -\int\limits_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\sigma_R.$$

На σ_R нормаль ν^* направлена против радиуса, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=R} = \frac{m-2}{R^{m-1}}.$$

Теперь имеем

$$\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma = -\frac{m-2}{R^{m-1}}\int\limits_{\sigma_R}d_\xi\sigma_R = -(m-2)\frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} =$$

$$= -(m-2)\,\omega_x(\Sigma). \blacksquare$$

Если $\cos(r, \nu) \leqslant 0$, то $\nu^* = -\nu$ на Σ; рассуждая по-прежнему, получим в этом случае

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi} \Sigma = \frac{m-2}{R^{m-1}} \int\limits_{\sigma_R} d_{\xi} \sigma_R = (m-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} = -(m-2)\, \omega_x(\Sigma).$$

Если поверхность Σ разбита на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, на каждой из которых $\cos(r, \nu)$ сохраняет знак, то, очевидно

$$\sum |\omega_x(\Sigma_k)| = \int\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Sigma. \tag{5}$$

Теорема 14.2.1. *Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, то существует такая постоянная C, что*

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Gamma \leqslant C, \quad \forall\, x \in E_m. \tag{6}$$

Пусть d — радиус ляпуновской сферы для поверхности Γ. Может случиться, что расстояние от точки x до поверхности Γ не меньше, чем $\frac{d}{2}$. Тогда $r = |x - \xi| \geqslant \frac{d}{2}$, по формуле (4)

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| = (m-2) \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}};$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Gamma \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}} |\Gamma|. \tag{7}$$

Пусть теперь расстояние от точки x до поверхности Γ меньше, чем $d/2$. Существует точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что

$$|x - x_0| = \min_{\xi \in \Gamma} |x - \xi| < \frac{d}{2}. \tag{8}$$

Как известно, точка x лежит на нормали n_0 к Γ, проведенной через точку x_0.

Построим ляпуновскую сферу $S(x_0)$. Обозначим соответственно через $\Gamma'(x_0)$ и $\Gamma''(x_0)$ части поверхности Γ, лежащие внутри и вне сферы $S(x_0)$ (рис. 17). Если $\xi \in \Gamma''(x_0)$, то $|\xi - x_0| \geqslant d$ и $|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| > d/2$, отсюда

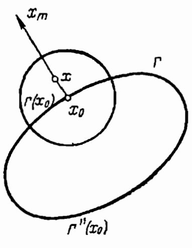

Рис 17

$$\int\limits_{\Gamma''(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Gamma \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)\, |\Gamma''(x_0)|}{d^{m-1}} < \frac{2^{m-1}(m-2)\, |\Gamma|}{d^{m-1}}. \tag{9}$$

Остается рассмотреть интеграл

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Gamma = (m-2) \int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_{\xi} \Gamma.$$

Построим местную систему координат с началом в точке x_0; ось x_m направим по нормали к Γ в x_0. Положим $|x-x_0|=\delta$, $\delta<d/2$. Местные координаты точки x суть $(0, 0, \ldots, 0, \pm\delta)$. Обозначим через $G'(x_0)$ проекцию поверхности $\Gamma(x_0)$ на касательную плоскость в точке x_0, тогда

$$\int\limits_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d_\xi\Gamma = \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}\cos(\nu, \xi_m)} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}; \qquad (10)$$

здесь применена оценка (1.11).

Положим $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{m-1}^2$. Из формулы

$$r^2=\sum_{k=1}^{m}(\xi_k-x_k)^2=\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+(\xi_m-x_m)^2=\rho^2+(\xi_m\pm\delta)^2$$

вытекает, что $r\geqslant\rho$. С другой стороны, область $G'(x_0)$ определяется неравенством $r<d$. Но $r\geqslant\rho$, поэтому и $\rho<d$. Это значит, что область $G'(x_0)$ лежит в $(m-1)$-мерном шаре $\rho\leqslant d$ и из формулы (10) получаем неравенство

$$\int\limits_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d_\xi\Gamma \leqslant 2 \int\limits_{\rho<d} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \qquad (11)$$

Если $\delta=0$ (т. е. $x=x_0\in\Gamma$), то по неравенству (1.10)

$$\frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{c}{r^{m-1-\alpha}} \leqslant \frac{c}{\rho^{m-1-\alpha}}, \qquad (12)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d_\xi\Gamma \leqslant 2c \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}. \qquad (13)$$

Попутно доказано, что интеграл (6) существует при любом $x\in\Gamma$.

Пусть теперь $\delta>0$. Имеем цепочку неравенств

$$|\cos(r, \nu)| = |\cos(r, \xi_k)\cos(\nu, \xi_k)| \leqslant$$
$$\leqslant a(m-1)\, r_0^\alpha + \frac{|\xi_m\pm\delta|}{r} \leqslant a(m-1)\, r_0^\alpha +$$
$$+ c\frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r} \leqslant a(m-1)\, r_0^\alpha + a\frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r}.$$

Здесь $r_0=|\xi-x_0|$; мы воспользовались оценками (1.6) и (1.12). Далее, справедливы соотношения

$$2\int\limits_{\rho<d} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2a(m-1)\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^\alpha}{r^{m-1}}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} +$$
$$+ 2a\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}}{r^m}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} +$$
$$+ 2\delta\int\limits_{\rho<d} \frac{1}{r^m}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \qquad (14)$$

Оценим величины r_0 и r через ρ. Величина r_0 оценивается по формуле (1.8), так как в последней r есть расстояние от точки ξ до начала местной системы координат. Таким образом, $r_0 \leqslant 2\rho$. Чтобы оценить r, поступим так. Имеем равенство $r^2 = \rho^2 + \xi_m^2 + \delta^2 \pm 2\xi_m\delta$. Далее $|2\xi_m\delta| \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + 2\xi_m^2$. Отсюда получаем $r^2 \geqslant \rho^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \xi_m^2$. По формуле (1.5) $|\xi_m| \leqslant c\rho^{\alpha+1} \leqslant cd^\alpha\rho$. Радиус d можно взять сколь угодно малым. Пусть он таков, что $cd^\alpha \leqslant 1/\sqrt{2}$; тогда $r^2 \geqslant (\rho^2+\delta^2)/2$.

Теперь нетрудно оценить интегралы в (14) справа. Первые два оцениваются совсем просто:

$$\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^\alpha\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}} \leqslant \int\limits_{\rho<d} \frac{2^{m-1+\alpha}\rho^\alpha\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{(m-1)/2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m-1+\alpha} \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}$$

и аналогично

$$\int\limits_{\rho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqslant 2^{m-1+\alpha} \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}.$$

Перейдем к оценке последнего интеграла. Используя оценку для r, находим

$$\delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqslant 2^{\frac{m}{2}}\delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}} <$$

$$< 2^{\frac{m}{2}}\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}}.$$

В последнем интеграле положим

$$\xi_k = \delta\eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1; \quad \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^2 = \rho_1^2,$$

тогда

$$\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{m/2}} = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{m-1}}{(\rho_1^2+1)^{m/2}}.$$

Последний интеграл сходится и равен некоторой постоянной.

Теперь ясно, что при $0<\delta<d/2$ интеграл (14) не превосходит некоторой постоянной. Но это утверждение верно и при $\delta=0$ (формула (13)). В таком случае существует такая постоянная C', что

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^m}\, d_\xi\Gamma \leqslant C', \quad 0 \leqslant \delta < d/2.$$

Приняв во внимание неравенство (9), видим, что теорема 14.2.1 верна и при $\delta > \frac{d}{2}$; при этом можно положить

$$C = \frac{2^{m-1}(m-2)\,|\Gamma|}{d^{m-1}} + C'. \blacksquare$$

§ 3. ПРЯМОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

В § 4 гл. 11 был определен потенциал двойного слоя как интеграл вида

$$W(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma, \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности Γ в точке ξ. Было доказано, что $W(x)$ — функция, гармоническая как внутри, так и вне Γ; на самой поверхности Γ потенциал (1) не был определен.

Будем считать теперь, что Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и что плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна на этой поверхности. При таких условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 14.3.1. *Потенциал двойного слоя* (1) *имеет вполне определенное значение при любом x, лежащем на поверхности Γ. Это значение непрерывно меняется, когда x пробегает поверхность Γ.*

То, что интеграл (1) существует, если $x \in \Gamma$, доказывается просто. Плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна на компактном множестве Γ и потому ограничена. Пусть $|\sigma(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, тогда

$$\left|\sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| \leqslant M \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right|. \tag{2}$$

В предыдущем параграфе было доказано, что интеграл (2.6) существует при $x \in \Gamma$, иначе говоря, что при $x \in \Gamma$ функция $\left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right|$ суммируема на Γ. Но тогда суммируема на Γ и левая часть неравенства (2) и, следовательно, для указанных x интеграл (1) существует.

Докажем теперь, что при $x \in \Gamma$ интеграл (1) непрерывен. Оценка (1.10) показывает, что потенциал (1) есть интегральный оператор со слабой особенностью над функцией $\sigma(\xi)$; ядро этого оператора $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)\cos(r, \nu)}{r^{m-1}}$ представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)\, r^{-\frac{\alpha}{2}} \cos(r, \nu)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Обозначая числитель через $A(x, \xi)$, видим, что при $x \neq \xi$ функция $A(x, \xi)$ непрерывна на Γ. Если $x \in \Gamma$ и $x \to \xi$, то в силу неравенства (1.17) $A(x, \xi) \to 0$. Положим $A(x, x) = 0$, тогда $A(x, \xi)$ непрерывна на Γ при любом положении точек x и ξ.

По теореме 1.3.1 оператор (1) переводит любую функцию класса $L_p(\Gamma)$ в непрерывную, если p достаточно велико. Непрерывная на компактном множестве Γ функция ограничена и, следовательно, суммируема с любой степенью, поэтому оператор (1) переводит непрерывную функцию в непрерывную. Но $\sigma(\xi)$ по предположению непрерывна, а тогда и потенциал двойного слоя непрерывно меняется, когда точка x движется по поверхности Γ. ■

Значение потенциала двойного слоя при $x \in \Gamma$ называется *прямым значением* этого потенциала. Теорему 14.3.1 можно, очевидно, сформулировать так:

Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна на Γ, то прямое значение потенциала двойного слоя (1) существует и непрерывно на Γ.

§ 4. ИНТЕГРАЛ ГАУССА

Так называется потенциал двойного слоя, плотность которого тождественно равна единице:

$$W_0(x) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Здесь Γ — замкнутая поверхность и ν — внешняя к ней нормаль в точке ξ.

Теорема 14.4.1. *Если поверхность Γ — замкнутая ляпуновская, то значения интеграла Гаусса определяются формулой*

$$W_0(x) = \begin{cases} -(m-2)|S_1| = -\dfrac{2(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{для } x \text{ внутри } \Gamma, \\ 0 & \text{для } x \text{ вне } \Gamma, \\ -\dfrac{m-2}{2}|S_1| = -\dfrac{(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{для } x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Сразу же заметим, что первые два равенства (2) верны для любой замкнутой кусочно гладкой поверхности Γ, — это и будем доказывать.

Пусть Γ — кусочно гладкая замкнутая поверхность и пусть точка x лежит внутри Γ. Опишем вокруг этой точки сферу S_ε радиуса ε; последний возьмем достаточно малым, так чтобы сфера S_ε лежала внутри Γ. В области, ограниченной поверхностями Γ и S_ε, функция $1/r^{m-2}$ гармонична, поэтому в силу формулы (6.9) гл. 9

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d\Gamma + \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, dS_\varepsilon = 0. \tag{3}$$

На S_ε нормаль ν направлена против радиуса, отсюда

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,dS_\varepsilon = \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\,dS_\varepsilon = (m-2)\frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}} = (m-2)\,|S_1|, \quad (4)$$

и первое равенство (2) доказано. Еще проще доказывается второе равенство (2); если точка x лежит вне Γ, то функция $1/r^{m-2}$ гармонична внутри Γ и

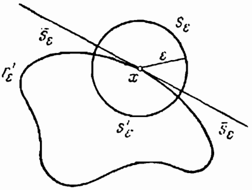

Рис 18

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\Gamma = 0.$$

Займемся третьим равенством (2). Пусть Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и $x \in \Gamma$. Речь идет о прямом значении интеграла Гаусса, существование которого вытекает из теоремы предшествующего параграфа. Остается это значение вычислить. Возьмем число ε, $0 < \varepsilon < d$, и опишем вокруг точки $x \in \Gamma$ сферу S_ε радиуса ε. Часть поверхности Γ, лежащую вне сферы, обозначим через Γ_ε', а часть сферы, лежащую внутри Γ, — через S_ε' (рис. 18). Так как интеграл Гаусса сходится при $x \in \Gamma$, то

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon'} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \quad (5)$$

Точка x лежит вне области, ограниченной поверхностями Γ_ε' и S_ε'; в этой области функция $1/r^{m-2}$ гармонична и, следовательно, $\int\limits_{\Gamma_\varepsilon'} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma + \int\limits_{S_\varepsilon'} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon = 0$. Но тогда

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon'} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon. \quad (6)$$

В интеграле (6) нормаль ν направлена против радиуса, поэтому

$$\int\limits_{S_\varepsilon'} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \int\limits_{S_\varepsilon'} d_\xi S_\varepsilon = (m-2)\frac{|S_\varepsilon'|}{\varepsilon^{m-1}}. \quad (7)$$

При ε, достаточно малом, поверхность S_ε' близка к полусфере, опирающейся на касательную плоскость (см. рис. 18); величина $|S_\varepsilon'|$ отличается от площади поверхности полусферы $\frac{\pi^{m/2}\varepsilon^{m-1}}{\Gamma(m/2)}$ на площадь (взятую с тем или иным знаком) поверхности пояска, $\bar{S}_\varepsilon$, заключенного между Γ и касательной плоскостью. Высота пояска равна максимальному значению $|\xi_m|$ в точках пересечения поверхности Γ и сферы S_ε. Так как $\varepsilon < d$, то эти точки лежат внутри ляпуновской сферы и для них верна оценка (1.6): $|\xi_m| \leqslant cr^{\alpha+1} = c\varepsilon^{\alpha+1}$.

Обозначим через h упомянутое выше наибольшее значение $|\xi_m|$, тогда $h \leqslant c\varepsilon^{\alpha+1}$. Площадь поверхности пояска $\tilde{S}_\varepsilon$ не превосходит площади поверхности сферического пояска Σ высоты $2h$, симметричного относительно диаметральной плоскости. Изменяя нумерацию осей, как показано на рис. 19, и введя соответствующие сферические координаты, найдем, что площадь $|\Sigma|$ поверхности пояска Σ равна интегралу

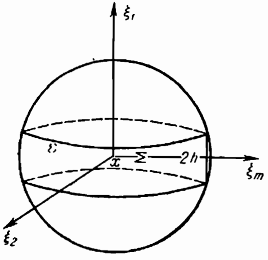

Рис 19

$$\int_\Sigma dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1} \int\limits_{\pi/2 - \arcsin h/\varepsilon}^{\pi/2 + \arcsin h/\varepsilon} \sin^{m-2}\vartheta_1\, d\vartheta_1 \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{m-1} \right\}.$$

Правая часть имеет очевидную оценку $O\left(\varepsilon^{m-1}\arcsin\frac{h}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{m-1+\alpha})$. Отсюда ясно, что

$$\int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi S_\varepsilon = \frac{(m-2)\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} + O(\varepsilon^\alpha)$$

и, следовательно,

$$W_0(x) = -\frac{(m-2)\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}, \quad x \in \Gamma. \blacksquare$$

§ 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

На примере интеграла Гаусса ясно, что, вообще говоря, потенциал двойного слоя терпит разрыв, когда точка x пересекает поверхность Γ. Вместе с тем, как мы сейчас увидим, при довольно широких условиях существуют пределы значений потенциала двойного слоя, когда точка x стремится к произвольной точке $x_0 \in \Gamma$ либо изнутри, либо извне Γ. Будем обозначать через $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ соответственно предельные значения потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$, когда $x \to x_0$ изнутри, соответственно извне Γ. Прямое значение этого потенциала в точке x_0 обозначим через $\overline{W(x_0)}$.

Теорема 14.5.1. *Пусть Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и $\sigma(\xi)$ — плотность, непрерывная на Γ. Тогда для потенциала двойного слоя (3.1) справедливы предельные соотношения*

$$\left.\begin{aligned} W_i(x_0) &= -\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \\ W_e(x_0) &= \frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \end{aligned}\right\} \quad x_0 \in \Gamma. \tag{1}$$

Формулу (3.1) перепишем так:

$$W(x) = W_1(x) + \sigma(x_0)\,W_0(x). \tag{2}$$

Здесь W_0 — интеграл Гаусса, а

$$W_1(x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma; \tag{3}$$

$W_1(x)$ есть потенциал двойного слоя, плотность которого $\sigma(\xi) - \sigma(x_0)$ обращается в нуль при $\xi = x_0$. Докажем, что этот потенциал непрерывен в точке x_0.

Из точки x_0 как из центра опишем сферу некоторого радиуса η; тем самым поверхность Γ разобьется на две части: $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, из которых Γ' лежит внутри сферы, а Γ'' — вне ее. Соответственно потенциал $W_1(x)$ тоже распадается на два: $W_1(x) = W_1'(x) + W_1''(x)$, где

$$W_1'(x) = \int_{\Gamma'} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma,$$

$$W_1''(x) = \int_{\Gamma''} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma.$$

Напишем очевидное неравенство

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| \leqslant |W_1'(x)| + |\overline{W_1'(x_0)}| + \\ + |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}|; \tag{4}$$

черта сверху означает прямое значение соответствующего потенциала.

Оценим правую часть неравенства (4). Выберем η так, чтобы при $|\xi - x_0| < \eta$ выполнялось неравенство $|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \varepsilon/3C$, где ε — произвольно заданное положительное число, а C — постоянная, входящая в неравенство (2.6). Такой выбор η возможен, потому что плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна. Тогда при любом $x \in E_m$ имеем

$$|W_1'(x)| \leqslant \int_{\Gamma'} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)|\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma < \\ < \frac{\varepsilon}{3C}\int_{\Gamma'}\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}\int\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

В частности,

$$\left|\overline{W_1'(x_0)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Зафиксируем радиус η и будем считать, что $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta$. Тогда на поверхности Γ''

$$r = |\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta;$$

подынтегральная функция в интеграле $W_1''(x)$ непрерывна и сам интеграл непрерывен. В этом случае существует такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ необходимо

$$|W_1''(x) - W_1''(x_0)| = |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Из соотношений (4) — (7) следует, что

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| < \varepsilon, \text{ если } |x - x_0| < \delta, \tag{8}$$

т. е. что потенциал $W_1(x)$ непрерывен в точке x_0. Если это так, то в указанной точке совпадают предельные значения потенциала $W_1(x)$ и его прямое значение

$$W_{1i}(x_0) = W_{1e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}. \tag{9}$$

Формула (4.2) показывает, что предельные значения интеграла Гаусса $W_0(x)$ существуют и равны соответственно $W_{0i}(x_0) = -(m-2)|S_1|$, $W_{0e}(x_0) = 0$, а прямое значение $\overline{W_0(x_0)} = -\frac{m-2}{2}|S_1|$.

Теперь из формул (2) и (9) следует, что предельные значения $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ существуют, причем

$$\begin{aligned} W_i(x_0) &= \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0i}(x_0) = \\ &= \overline{W_1(x_0)} - (m-2)|S_1|\,\sigma(x_0), \end{aligned} \tag{10}$$

$$W_e(x_0) = \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overline{W_1(x_0)} &= \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r_0^{m-2}} d_\xi\Gamma = \\ &= \overline{W(x_0)} + \frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0), \quad r_0 = |\xi - x_0|, \end{aligned} \tag{11}$$

и формулы (1) сразу вытекают из соотношений (10) и (11). ■

Из формул (1) вытекает простое соотношение, связывающее плотность потенциала двойного слоя с его предельными значениями

$$W_i(x_0) - W_e(x_0) = -(m-2)|S_1|\,\sigma(x_0). \tag{12}$$

Замечания 1. Если плотность $\sigma(\xi)$ на Γ не непрерывна, а лишь суммируема, то, как оказывается, предельные значения потенциала двойного слоя существуют почти всюду на Γ и выражаются по тем же формулам (1).

2. Для нормальной производной потенциала двойного слоя верна следующая теорема Ляпунова. Пусть Γ — ляпуновская поверхность и плотность $\sigma(\xi)$ на Γ непрерывна. Если нормальная производная потенциала двойного слоя имеет предел, когда $x \to x_0 \in \Gamma$ изнутри (извне), то существует равный ему предел той же производной извне (изнутри).

Теорема 14.5.2. *Если поверхность замкнутая ляпуновская, а плотность на этой поверхности непрерывна, то потенциал двойного слоя равномерно стремится к своим предельным значениям как изнутри, так и извне поверхности.*

Сохраним обозначения, использованные при доказательстве теоремы 14.5.1. Плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна, а потому и равномерно непрерывна на Γ. В таком случае радиус η можно выбрать независимо от положения точки x_0 на поверхности Γ. Далее, потенциал $W_1^*(x)$ на самом деле есть функция двух точек: точки $x \in E_m$ и точки $x_0 \in \Gamma$. Если радиус η фиксирован, то на ограниченном замкнутом множестве, определяемом соотношениями $x_0 \in \Gamma$, $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}\eta$, упомянутая функция непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна, поэтому число δ, фигурирующее в неравенстве (8), можно выбрать зависящим только от ε. То же соотношение (8) показывает тогда, что $W_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} W_1(x_0)$ равномерно относительно $x_0 \in \Gamma$.

Наконец, потенциал $W_0(x)$ постоянен как внутри, так и вне Γ, поэтому если $x \to x_0$ либо изнутри, либо извне Γ, то $W_0(x)$ стремится к своему предельному значению равномерно.

Теперь из формулы (2) видно, что тем же свойством обладает и потенциал $W(x)$. ■

§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

Теорема 14.6.1. *Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена, то потенциал простого слоя*

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma \tag{1}$$

непрерывен во всем пространстве E_m.

Непрерывность потенциала (1) при $x \overline{\in} \Gamma$ очевидна; остается рассмотреть случай $x \in \Gamma$.

Докажем прежде всего, что при $x \in \Gamma$ интеграл (1) сходится и, следовательно, потенциал простого слоя $V(x)$ на поверхности Γ определен. Построим ляпуновскую сферу $S(x)$ и пусть $\Gamma'(x)$ — часть Γ, заключенная внутри сферы $S(x)$; имеем

$$V(x) = \int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma.$$

Во втором интеграле подынтегральная функция непрерывна, и достаточно рассмотреть первый интеграл. Введем местную систему координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ с центром в точке x и с осью ξ_m, направленной по нормали к Γ в этой точке. Положим $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{m-1}^2$. Обозначая через $G'(x)$ проекцию поверхности $\Gamma'(x)$ на плоскость $\xi=0$, касательную к Γ в точке x, имеем равенство

$$\int\limits_{\Gamma'(x)} \mu(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi=\int\limits_{G'(x)} \mu(\xi)\frac{d\xi_1\,d\xi^2\ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-2}\cos(\nu,\xi_m)}; \tag{2}$$

если $|\mu(\xi)|\leqslant M=\mathrm{const}$, то подынтегральная функция не превосходит величины $2M/\rho^{m-2}$, и интеграл (2) сходится.

Докажем теперь, что в любой точке $x\in\Gamma$ потенциал (1) непрерывен. Пусть y — произвольная точка пространства E_m. Вокруг точки x опишем сферу радиуса $\eta<d$. Обозначим через Γ_η' и Γ_η'' части поверхности Γ, заключенные соответственно внутри и вне сферы. Интеграл (1) разобьем на два, взятые по Γ_η' и Γ_η''; эти интегралы обозначим через V' и V''. Тогда очевидно неравенство

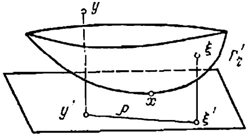

Рис 20

$$|V(y)-V(x)|\leqslant|V'(y)|+|V'(x)|+|V''(y)-V''(x)|. \tag{3}$$

Оценим первое слагаемое в (3). Так как $\eta<d$, то $\Gamma_\eta'\subset\Gamma'(x)$, и на Γ_η' можно ввести местные координаты с началом в x. Обозначим через y' проекцию точки y на плоскость, касательную в x (рис. 20). Местные координаты точки y' пусть будут $(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{m-1}, 0)$. Положим $\rho^2=\sum\limits_{k=1}^{m-1}(\xi_k-y_k)^2$; ρ есть длина проекции отрезка, соединяющего точки ξ и y, на плоскость, касательную в x. Ясно, что $\rho\leqslant|\xi-y|$. Далее,

$$|V'(y)|=\left|\int\limits_{\Gamma_\eta'}\mu(\xi)\frac{d_\xi\Gamma}{|\xi-y|^{m-2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{G_\eta'}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}\cos(\nu,\xi_m)}\leqslant 2M\int\limits_{G_\eta''}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}};$$

здесь G_η' — проекция поверхности Γ_η' на касательную плоскость в точке x.

Возьмем точку y столь близкой к x, чтобы $|y-x|<\frac{1}{2}\eta$. Тогда, если $\xi\in\Gamma_\eta'$, то

$$\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant|\xi-x|+|x-y|<\frac{3}{2}\eta.$$

Это значит, что область G'_η целиком лежит в $(m-1)$-мерном шаре $\rho < \frac{3}{2}\eta$ и, следовательно,

$$|V'(y)| \leqslant 2M \int\limits_{\rho<\frac{3}{2}\eta} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}}. \tag{4}$$

В $(m-1)$-мерном пространстве введем сферические координаты с центром в точке y'. Тогда $d\xi_1 \dots d\xi_{m-1} = \rho^{m-2} d\rho\, d\sigma_1$; здесь и ниже в настоящей главе через σ_1 обозначена единичная сфера в $(m-1)$-мерном пространстве, а через $d\sigma_1$ — элемент площади ее поверхности. Формула (4) принимает вид

$$|V'(y)| \leqslant 2M \int\limits_{\sigma_1} d\sigma_1 \int\limits_0^{\frac{3}{2}\eta} d\rho = 3M|\sigma_1|\eta.$$

Пусть ε — произвольно заданное положительное число. Возьмем $\eta = \frac{\varepsilon}{9M|\sigma_1|}$. Тогда, если $|y-x| < \frac{\varepsilon}{18M|\sigma_1|}$, то $|V'(y)| \leqslant \varepsilon/3$. Последнее неравенство, очевидно, верно и для $y=x$: $|V'(x)| \leqslant \varepsilon/3$. Теперь неравенство (3) дает следующее:

$$|V(y)-V(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + |V''(y) - V''(x)|.$$

Выберем число $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon}{18M|\sigma_1|}$ и чтобы при $|y-x| < \delta$ было $|V''(y) - V''(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $|V(y)-V(x)| < \varepsilon$. ■

§ 7. НОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

По-прежнему будем рассматривать потенциал простого слоя (6.1), предполагая Γ замкнутой ляпуновской поверхностью.

Пусть x — произвольная точка пространства E_m и n — внешняя нормаль к поверхности Γ, проходящая через точку x. Если $x \in \Gamma$, то можно вычислить производную потенциала (6.1) по направлению нормали n, просто дифференцируя под знаком интеграла:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Выкладка, аналогичная той, которая была проделана в § 2, приводит к формуле

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, n); \tag{2}$$

отсюда

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2) \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} d_{\xi}\Gamma. \tag{3}$$

Пусть $x \in \Gamma$. Если плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена, $|\mu(\xi)| \leqslant M = \mathrm{const}$, то интеграл (3) сходится. Докажем это. Выделим часть $\Gamma'(x)$ поверхности Γ, лежащую внутри ляпуновской сферы $S(x)$. Достаточно доказать, что сходится интеграл $\int\limits_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} d_{\xi}\Gamma$. Введя местные координаты с началом в точке x, приведем последний интеграл к виду

$$\int\limits_{G'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\cos(\nu, \xi_m)}; \tag{4}$$

здесь $G'(x)$ — проекция $\Gamma'(x)$ на касательную плоскость в точке x. Подынтегральная функция в (4) ограничена величиной

$$\frac{2M}{\rho^{m-1}} |\cos(r, n)|, \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2.$$

Но по неравенствам (1.9) и (1.8) имеем

$$|\cos(n, r)| \leqslant cr^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha} c\rho^{\alpha}, \tag{5}$$

и для подынтегральной функции в (4) окончательно получаем оценку $2^{\alpha}Mc/\rho^{m-1-\alpha}$, которая показывает, что интеграл (3) сходится.

Как мы увидим несколько ниже, значение интеграла (3) при $x \in \Gamma$ нельзя рассматривать как нормальную производную потенциала (6.1). Значение интеграла (3) при $x \in \Gamma$ называется *прямым значением* нормальной производной потенциала простого слоя и обозначается символом $\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}$. Будем обозначать через $\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}$ и $\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}$ предельные значения (если они существуют) нормальной производной $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$, когда $x \to x_0 \in \Gamma$ изнутри, соответственно извне Γ.

Теорема 14.7.1. *Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а плотность $\mu(\xi)$ непрерывна на Γ, то на поверхности Γ существуют равномерные пределы нормальных производных потенциала простого слоя (6.1) как изнутри, так и извне Γ. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя выражаются формулами:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \frac{(m-2)|S_1|}{2} \mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}, \\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} &= -\frac{(m-2)|S_1|}{2} \mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение потенциал двойного слоя с плотностью μ

$$W(x)=\int_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_{\xi}\Gamma \tag{7}$$

и составим сумму

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n}+W(x)=\int_{\Gamma}\mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_{\xi}\Gamma.$$

Докажем, что эта сумма меняется непрерывно, когда точка x пересекает поверхность Γ, двигаясь по нормали к ней.

Пусть x_0 — точка на поверхности Γ, n — нормаль к Γ в этой точке и x — произвольная точка на нормали n, лежащая внутри или вне Γ. Вокруг точки x_0 опишем сферу радиуса $\eta<d$ и обозначим через Γ'_{η} часть поверхности Γ, расположенную внутри упомянутой сферы. Рассуждения предшествующего параграфа показывают, что достаточно установить такой факт: при достаточно малом η справедливо неравенство

$$A=\left|\int_{\Gamma'_{\eta}}\mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_{\xi}\Gamma\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

где ε — произвольно заданное положительное число. Имеем очевидные тождества

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(n,\ \xi_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=-\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(\nu,\ \xi_k).$$

Введем местную систему координат с центром в точке x_0. В этой системе $x_k=0$, $\cos(n,\ \xi_k)=0$ при $1\leqslant k\leqslant m-1$ и $\cos(n,\xi_m)=1$. Но тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=$$
$$=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_m-x_m}{r}[1-\cos(\nu,\ \xi_m)]-\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\xi_k}{r}\cos(\nu,\ \xi_k).$$

Далее, по неравенству (1.12)

$$|\cos(\nu,\ \xi_k)|\leqslant ar_0^{\alpha},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

где $r_0=|\xi-x_0|$, а из (1.1) находим

$$1-\cos(\nu,\ \xi_m)\leqslant\frac{a^2\rho^{2\alpha}}{\sqrt{1+a^2\rho^{2\alpha}}\,(1+\sqrt{1+a^2\rho^{2\alpha}})}\leqslant\frac{a^2r_0^{2\alpha}}{2}\leqslant\frac{ad^{\alpha}ar_0^{\alpha}}{2}$$

и по соотношению (1.7)

$$1-\cos(\nu,\ \xi_m)\leqslant a_1r_0^{\alpha},\quad a_1=a/2.$$

Теперь легко видеть, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\leqslant\frac{c_1r_0^{\alpha}}{r^{m-1}},\quad c_1=\mathrm{const}. \tag{8}$$

Положим $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{m-1}^2$ и обозначим через G'_η проекцию поверхности Γ'_η на касательную плоскость в точке x_0. По формуле (1.8) $r_0\leqslant 2\rho$. С другой стороны,

$$r^2=\sum_{k=1}^{m}(\xi_k-x_k)^2=\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+(\xi_m-x_m)^2\geqslant\rho^2;$$

отсюда $r\geqslant\rho$. Теперь из формулы (8) следует неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\leqslant\frac{2^\alpha c_1}{\rho^{m-1-\alpha}}. \tag{9}$$

Пусть $|\mu(\xi)|\leqslant M$, тогда

$$A\leqslant 2^\alpha c_1 M\int\limits_{\Gamma_\eta}\frac{d_\xi\Gamma}{\rho^{m-1-\alpha}}=2^\alpha c_1 M\int\limits_{G'_\eta}\frac{d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}\cos(\nu,\,\xi_m)}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha+1}c_1 M\int\limits_{G'_\eta}\frac{d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}.$$

В области G'_η верно неравенство $\rho\leqslant r\leqslant\eta$, поэтому G'_η целиком лежит в шаре $\rho\leqslant\eta$ и, следовательно,

$$A\leqslant 2^{\alpha+1}c_1 M\int\limits_{\rho<\eta}\frac{d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}=2^{\alpha+1}c_1 M\int\limits_{\sigma_1}d\sigma_1\int\limits_0^\eta\rho^{\alpha-1}d\rho=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}c_1 M\,|\sigma_1|}{\alpha}\,\eta^\alpha.$$

Очевидно, достаточно взять $\eta<\left[\dfrac{\alpha\varepsilon}{3\cdot 2^{\alpha+1}c_1 M\,|\sigma_1|}\right]^{1/\alpha}$ и мы получим, что

$$A<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Повторяя рассуждения § 3 и 6, на основании оценки (10) убедимся, что сумма $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}+W(x)$ непрерывна при переходе точки x через поверхность Γ. Но тогда для этой суммы предельные значения и прямое значение совпадают:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}+W_i(x_0)=\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}+W_e(x_0)=\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}+\overline{W(x_0)}.$$

Отсюда следуют искомые равенства:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}=\overline{W(x_0)}-W_i(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}=\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0)+$$

$$+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}=\overline{W(x_0)}-W_e(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}=$$

$$=-\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}.$$

Вычитая равенства (6), получим формулу, связывающую плотность потенциала простого слоя с предельными значениями его нормальной производной

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = (m-2)\,|S_1|\,\mu(x_0). \tag{11}$$

Остается доказать, что пределы $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n_i}$ и $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n_e}$ — равномерные. Имеем равенство

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x)\right] - W(x). \tag{12}$$

По доказанному выражение в квадратных скобках непрерывно и потому равномерно стремится к своему предельному значению; на этот раз безразлично, стремится точка x к точке $x_0 \in \Gamma$ изнутри или извне Γ. Далее, если $x \to x_0$ либо изнутри, либо извне Γ, то по теореме 14.5.2 потенциал двойного слоя $W(x)$ стремится к своему предельному значению равномерно. В силу формулы (12) этим же свойством обладает и $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}$. ■

З а м е ч а н и е. Пусть замкнутая поверхность Γ не ляпуновская, но состоит из конечного числа кусков ляпуновских поверхностей. Предельные формулы (5.1) и (7.6) для потенциалов простого и двойного слоя остаются в силе для тех точек поверхности Γ, в окрестности которых эта поверхность — ляпуновская; надо только потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\forall x \in E_m, \quad \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqslant C = \text{const}.$$

Глава 15

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Рассмотрим замкнутую ляпуновскую поверхность Γ, ограничивающую две области: Ω — внутреннюю и Ω' — внешнюю. Поставим одновременно четыре краевые задачи для однородного уравнения Лапласа: найти функцию $u(x)$, гармоническую в области Ω или Ω' и удовлетворяющую либо условию задачи Дирихле

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \tag{1}$$

либо условию задачи Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x). \tag{2}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будем считать непрерывными на Γ.

Внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле будем обозначать через D_i и D_e, а внутреннюю и внешнюю задачи Неймана — через N_i и N_e соответственно. Задачи эти будем решать, отыскивая решение в виде некоторого потенциала. Точнее, решение задачи Дирихле будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu_\xi} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma, \tag{3}$$

решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma; \tag{4}$$

потребуем при этом, чтобы искомые плотности $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ были непрерывны на Γ. При таком представлении решения мы автоматически получаем функции, гармонические в соответствующей области, и остается позаботиться лишь о краевых условиях. Заметим, однако, что в случае D_e нас ожидают некоторые трудности: решение на бесконечности может иметь порядок $O(|x|^{2-m})$, а потенциал (3) убывает быстрее — он имеет порядок $O(|x|^{1-m})$ и, следовательно, не всякую гармоническую в Ω' функцию можно представить в виде (3).

Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле D_i. Краевое условие (1) следует понимать так: если $x \in \Omega$ и $x \to x_0 \in \Gamma$, то

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0). \tag{5}$$

Но $u(x)$ есть потенциал двойного слоя, плотность которого, по предположению, непрерывна. В таком случае по формуле (5.1)

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|\xi - x_0|^{m-2}}\, d_\xi\Gamma.$$

Подставив это в формулу (5), заменив обозначение x_0 на x и разделив на $-\frac{(m-2)|S_1|}{2}$, получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\sigma(x)$

$$\sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Используя формулы (5.1) и (7.6) гл. 14 для предельных значений, а также краевые условия (1) и (2), получим интегральные уравнения для трех остальных задач. Для удобства выпишем все интегральные уравнения вместе:

$$(D_i)\ \sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \tag{6}$$

$$(D_e)\ \sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \tag{7}$$

$$(N_i)\ \mu(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x), \tag{8}$$

$$(N_e)\ \mu(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x). \tag{9}$$

В уравнениях (6) — (9) $x \in \Gamma$. Отметим следующие свойства этих уравнений:

1. Формулы (1.10), (7.2), (7.5) гл. 14 показывают, что уравнения (6) — (9) суть интегральные уравнения со слабой особенностью.

2. Ядра $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$, $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$ получаются одно из другого перестановкой точек x и ξ. Так как эти ядра еще и вещественные, то они сопряженные. Отсюда следует, что уравнения (6) и (9), а также уравнения (7) и (8) — попарно сопряженные.

3. Любое суммируемое с квадратом решение каждого из уравнений (6) — (9) непрерывно на Γ. Доказательство этого утверждения основано на следующей теореме теории интегральных уравнений (см. [26], § 14).

Пусть D — компактное многообразие размерности m и пусть в интегральном уравнении со слабой особенностью

$$u(x) - \int\limits_D \frac{A(x, y)}{r^{m-\lambda}} u(y)\, dy = f(x); \quad x \in D, \ r = |x - y|, \tag{10}$$

где dy означает элемент меры на D, функции $A(x, y)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно в $D \times D$ и в D. Тогда любое решение уравнения (10), суммируемое с квадратом на D, непрерывно в D.

Достаточно проверить, что уравнения (6) — (9) удовлетворяют условиям последней теоремы, если в этих условиях заменить m на $m-1$. Прежде всего $D = \Gamma$ есть компактное многообразие размерности $m-1$, и свободные члены уравнений (6) — (9) непрерывны на Γ. Далее, как показано в § 3 гл. 14,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(x, \xi)}{r^{m-1-\alpha/2}}, \quad \alpha > 0,$$

где функция $A(x, \xi)$ непрерывна на Γ. Переставив аргументы x и ξ, получим $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(\xi, x)}{r^{m-1-\alpha/2}}$, и функция $A(\xi, x)$ также непрерывна на Γ.

Уравнения (6) — (9) обычно называются *интегральными уравнениями* теории потенциала.

§ 2. ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

До сих пор мы не давали определения функции, гармонической в полупространстве или, вообще, в области с бесконечной границей. Распространим на этот случай определение, данное для конечной области и назовем функцию гармонической в бесконечной области, если в этой области данная функция имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Интегральные уравнения, полученные в предшествующем параграфе, позволяют решить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве; надо только потребовать, чтобы заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с определенной скоростью убывали на бесконечности. Точнее мы скажем об этом несколько ниже.

При некоторых естественных ограничениях теоремы о потенциалах, доказанные в гл. 14, распространяются и на бесконечные поверхности. Так, если поверхность Γ есть плоскость $\xi_m = 0$, то достаточно потребовать, чтобы плотность $\sigma(\xi)$ потенциала двойного слоя имела на бесконечности оценку

$$\sigma(\xi) = O(\rho^{-\beta}), \quad \rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \tag{1}$$

а плотность $\mu(\xi)$ потенциала простого слоя — оценку

$$\mu(\xi) = O(\rho^{-\beta-1}); \tag{2}$$

при этих оценках интегралы (3.1) и (6.1) гл. 14 сходятся.

В случае полупространства достаточно говорить только о внутренней задаче и рассматривать только интегральные уравнения (1.6) и (1.8). По формуле (2.4) гл. 14 ядро уравнения (6) имеет вид $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=-\frac{(m-2)}{r^{m-1}}\cos(r,\nu)$. В данном случае нормаль ν, внешняя к полупространству $\xi_m>0$, направлена против оси ξ_m; если обе точки x и ξ лежат на плоскости $\xi_m=0$, то на той же плоскости лежит и вектор r. Но тогда $\cos(r,\nu)\equiv 0$ и ядро уравнения (1.6) есть тождественный нуль. Таково же и сопряженное с ним ядро в уравнении (1.8). Теперь эти уравнения сразу дают равенства

$$\sigma(x)=-\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x),\quad \mu(x)=\frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x).$$

Решение задачи Дирихле для полупространства $x_m>0$ дается формулой

$$u(x)=\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi_1\dots d\xi_{m-1},\tag{3}$$

а решение задачи Неймана — формулой

$$u(x)=\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}d\xi_1\dots d\xi_{m-1},\tag{4}$$

формулы (3) и (4) пригодны, если на бесконечности

$$\varphi(\xi)=O(\rho^{-\beta}),\quad \psi(\xi)=O(\rho^{-\beta-1}),\quad \beta=\text{const}>0.$$

Выполнив дифференцирование в формуле (3), мы приведем ее к виду

$$u(x)=\frac{2x_m}{|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{r^m}d\xi_1\dots d\xi_{m-1},\tag{3_1}$$

$$r^2=\sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k-x_k)^2+x_m^2.$$

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОЙ ПАРЫ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Докажем, что интегральные уравнения (1.6) и (1.9), соответствующие внутренней задаче Дирихле D_i и внешней задаче Неймана N_e, разрешимы, и притом единственным образом, при любых непрерывных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение внешней задачи Неймана; неизвестную в этом уравнении обозначим через $\mu_0(x)$

$$\mu_0(x)-\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma\mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi=0.\tag{1}$$

Пусть $\mu_0 \in L_2(\Gamma)$ — какое-нибудь решение этого уравнения. Как было доказано в § 1, функция μ_0 непрерывна на Γ. Построим потенциал простого слоя с плотностью μ_0,

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma. \tag{2}$$

Уравнение (1) означает, что предельное значение извне нормальной производной потенциала (2) равно нулю,

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} = 0. \tag{3}$$

По теореме единственности для внешней задачи Неймана

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega'. \tag{4}$$

Но потенциал простого слоя — функция, непрерывная во всем пространстве, поэтому

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь потенциал $V_0(x)$ в области Ω, расположенной внутри Γ. В этой области функция $V_0(x)$ гармонична и, как показывает соотношение (5), обращается в нуль на границе области. По теореме единственности для внутренней задачи Дирихле

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Но тогда в Ω и $\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0$. Сопоставляя это с формулой (3) и воспользовавшись формулой (7.11) гл. 14, найдем, что $\mu_0(x) = 0$.

Итак, однородное интегральное уравнение (1) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение внешней задачи Неймана (уравнение (1.9)) разрешимо, и притом единственным образом, для любой функции $\psi \in L_2(\Gamma)$ и тем более для любой непрерывной функции $\psi(x)$. Таким образом, значение параметра $\lambda = \frac{2}{(m-2)\,S_1}$ — правильное для ядра $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$; по известной теореме Фредгольма оно правильное и для сопряженного ядра $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}$. Отсюда следует, что интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле разрешимо (и притом единственным образом) для любой функции $\varphi \in L_2(\Gamma)$ и тем более для любой непрерывной функции $\varphi(x)$.

Если интегральные уравнения задач D_i и N_e разрешимы, то разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим утверждениям:

1. Если Γ — ляпуновская поверхность, то внутренняя задача Дирихле для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.

2. Если Γ — ляпуновская поверхность, то внешняя задача Неймана для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ ПАРЫ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Значение параметра

$$\lambda = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}, \tag{1}$$

входящее в интегральные уравнения задач D_e и N_i (уравнения (1.7) и (1.8)), — характеристическое для каждого из ядер $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$, $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$. Действительно, третье равенство (4.2) гл. 14 показывает, что однородное интегральное уравнение задачи D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение $\sigma_0(x) \equiv 1$, а это означает, что число (1) — характеристическое для ядра $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$. На основании известной теоремы Фредгольма это же число — характеристическое и для сопряженного ядра $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$. В таком случае однородное интегральное уравнение задачи N_i

$$\mu_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{3}$$

имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение; обозначим его через $\mu_0(x)$.

Докажем, что *уравнения (2) и (3) не имеют решений, линейно независимых с указанными выше решениями* $\sigma_0(x)$ *и* $\mu_0(x)$. В силу теорем Фредгольма достаточно показать, что этим свойством обладает уравнение (3). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(\xi)$

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \tag{4}$$

Из уравнения (3) следует, что

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_i} \equiv 0. \tag{5}$$

Так как $V_0(x)$ — гармоническая функция в области Ω, лежащей внутри Γ, то по теореме единственности задачи N_i

$$V_0(x) \equiv c_0 = \text{const}, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

При этом $c_0 \neq 0$. В самом деле, если $c_0 = 0$, то $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. В силу непрерывности потенциала простого слоя $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$; по теореме единственности внешней задачи Дирихле $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Но тогда имеем

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0. \tag{7}$$

Из соотношений (5) и (7) и из формулы (7.11) гл. 14 вытекает, что $\mu_0(x) \equiv 0$, а это противоречит тому, что решение $\mu_0(x)$ нетривиальное.

Попутно доказано следующее утверждение: если внутри Γ потенциал простого слоя тождественно равен нулю, то его плотность также тождественно равна нулю.

Допустим теперь, что уравнение (3) имеет еще одно решение $\mu_1(x)$. Построим потенциал $V_1(x) = \int\limits_\Gamma \mu_1(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi$. Повторяя предшествующие рассуждения, докажем, что если $x \in \Omega$, то потенциал $V_1(x) \equiv c_1 \equiv \text{const}$. Положим

$$\mu_2(x) = c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x). \tag{8}$$

Очевидно, $\mu_2(x)$ есть решение того же уравнения (3). Построим потенциал

$$V_2(x) = \int\limits_\Gamma \mu_2(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma = c_1V_0(x) - c_0V_1(x).$$

Если $x \in \Omega$, то $V_2(x) = c_1c_0 - c_0c_1 = 0$. По доказанному выше $\mu_2(x) \equiv 0$; отсюда

$$\mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0}\mu_0(x). \tag{9}$$

Таким образом, любое решение уравнения (3) только постоянным множителем отличается от $\mu_0(x)$. ■

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение задачи N_i (уравнение (1.8)). В силу теорем Фредгольма это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда функция $\psi(x)$ ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.7). Но это последнее уравнение имеет только одно линейно независимое решение $\sigma_0(x) \equiv 1$. Таким образом, для разрешимости уравнения (1.8) необходимо и достаточно, чтобы $(\psi, 1) = 0$ или, в более подробной записи,

$$\int\limits_\Gamma \psi(x)\, d_x\Gamma = 0. \tag{10}$$

Если уравнение (1.8) имеет решение, то, очевидно, разрешима и задача N_i. Таким образом, условие (10) достаточно для того, чтобы задача N_i была разрешима, и мы приходим к следующему выводу: если поверхность Γ ляпуновская, функция $\psi \in C(\Gamma)$ и выполнено условие (10), то решение внутренней задачи Неймана существует и может быть представлено в виде потенциала простого слоя с непрерывной плотностью. Напомним (см. гл. 12, § 2), что условие (10) необходимо для того, чтобы существовало достаточно гладкое решение внутренней задачи Неймана.

Осталось рассмотреть интегральное уравнение внешней задачи Дирихле (уравнение (1.7)). Нетрудно записать необходимое и достаточное условие его разрешимости

$$(\varphi,\ \mu_0)=\int_\Gamma \varphi(x)\,\mu_0(x)\,d_x\Gamma=0. \tag{11}$$

Если условие (11) выполнено, то интегральное уравнение (1.7) разрешимо. В этом случае существует решение внешней задачи Дирихле, представимое в виде потенциала двойного слоя и, следовательно, убывающее на бесконечности как $|x|^{1-m}$.

Если условие (11) нарушено, то не существует решения уравнения (1.7). Это не означает, однако, что внешняя задача Дирихле неразрешима; можно только утверждать, что эта задача не имеет такого решения, которое можно представить в виде потенциала двойного слоя.

§ 5. РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Поместим начало координат внутри поверхности Γ. Функция $\frac{1}{|x|^{m-2}}$ гармонична в любой области, не содержащей начала координат. В частности, эта функция гармонична в Ω'. Решение задачи D_e будем искать в виде

$$u(x)=\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma+\frac{1}{|x|^{m-2}}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,d_\xi\Gamma \tag{1}$$

Какова бы ни была непрерывная функция $\sigma(\xi)$, правая часть формулы (1) гармонична в Ω'; остается подобрать $\sigma(\xi)$ так, чтобы выполнялось краевое условие (1.1).

Повторив рассуждения § 1, получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\sigma(x)$

$$\sigma(x)+\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{1}{|x|^{m-2}}\right]\sigma(\xi)\,d_\xi\Gamma=$$
$$=\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x),\qquad x\in\Gamma. \tag{2}$$

Ядро уравнения (2) $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{1}{|x|^{m-2}}$, так же как и ядро $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$, имеет слабую особенность, и к названному уравнению можно применить теорию Фредгольма.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, получающееся из уравнения (2) при $\varphi(x)\equiv 0$

$$\sigma_0(x)+\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{1}{|x|^{m-2}}\right]\sigma_0(\xi)\,d_\xi\Gamma=0. \tag{3}$$

Пусть $\sigma_0 \in L_2(\Gamma)$ — какое-либо решение уравнения (3). Как и в § 1, можно доказать, что это решение непрерывно. Построим функцию

$$u_0(x) = \int_\Gamma \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi \Gamma, \tag{4}$$

гармоническую в Ω'.

Из уравнения (3) следует, что $u_0(x)|_\Gamma \equiv 0$; по теореме единственности для внешней задачи Дирихле $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Имея это в виду, умножим выражение (4) на $|x|^{m-2}$ и положим $|x| \to \infty$. На бесконечности потенциал двойного слоя убывает как $|x|^{1-m}$, поэтому в пределе первое слагаемое исчезнет, и

$$\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0. \tag{5}$$

Итак, любое решение уравнения (3) удовлетворяет соотношению (5). Но тогда уравнение (3) упрощается и принимает вид

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0, \tag{6}$$

что совпадает с уравнением (5.2). Как было доказано в § 5, уравнение (6) имеет только одно линейно независимое решение — единицу, в таком случае его общее решение есть $\sigma_0(\xi) \equiv C = \text{const}$. Подставив это в (5), получим $C|\Gamma| = 0$, или $C = 0$. Теперь $\sigma_0(\xi) \equiv 0$, и уравнение (3) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (2) разрешимо при любой непрерывной функции $\varphi(x)$. Вместе с тем для любой непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ разрешима и внешняя задача Дирихле; ее решение может быть представлено в форме (1).

Замечания. 1. Исследование интегральных уравнений теории потенциала несколько усложняется, когда область Ω (или Ω') ограничена не одной, а несколькими замкнутыми ляпуновскими поверхностями. Результаты оказываются несколько иными, чем в случае одной граничной поверхности. Подробно эти вопросы изложены в [14]

2. Метод потенциалов можно применить и к некоторым другим краевым задачам. Пусть, например, требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую либо внутри, либо вне замкнутой регулярной поверхности Γ и удовлетворяющей краевому условию вида

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)\, u\right]_\Gamma = \omega(x), \tag{7}$$

где $\beta(x)$ и $\omega(x)$ — функции, непрерывные на Γ, n — внешняя нормаль к Γ в точке $x \in \Gamma$. Такого рода задачу называют часто *третьей краевой задачей*. Будем искать ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma. \tag{8}$$

Воспользовавшись теоремой о предельных значениях нормальной производной потенциала (8), получим для $\mu(\xi)$ интегральное уравнение со слабой особенностью

$$\mu(x) \pm \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\beta(x)}{r^{m-2}}\right]\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma = \pm\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\omega(x) \qquad x \in \Gamma \tag{9}$$

Знак плюс соответствует внутренней задаче, знак минус — внешней.

Если задача (7) для гармонической функции имеет не более одного решения, то уравнение (9) разрешимо при любой $\omega(x)$, и наша задача имеет решение. Если решение неединственно (именно, если однородная задача (7) имеет k линейно независимых собственных функций), то оно существует тогда и только тогда, когда $\omega(x)$ удовлетворяет k условиям ортогональности. По теореме Фредгольма число k конечно. Внутренняя (внешняя) задача (7) для гармонической функции имеет единственное решение, если $\beta(x) \geqslant 0$ и $\beta(x) > 0$ на множестве положительной меры на Γ (соответственно $\beta(x) \leqslant 0$ и $\beta(x) < 0$ на множестве положительной меры на Γ). Докажите!

§ 6. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если $m=2$, то сингулярным решением уравнения Лапласа является (с точностью до постоянного множителя) функция $\ln\frac{1}{r}$, $r=|\xi-x|$. В соответствии с этим потенциалы простого и двойного слоя на двумерной плоскости определяются формулами

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma, \tag{1}$$

$$W(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma; \tag{2}$$

Γ — кривая, о которой мы предположим, что она замкнутая ляпуновская. Неравенство (2.6) заменяется таким:

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right| d_\xi\Gamma \leqslant C = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Плотности $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ будем считать непрерывными.

Потенциалы (1) и (2) принято называть *логарифмическими*. Логарифмический потенциал двойного слоя гармоничен как внутри, так и вне Γ, на бесконечности он имеет оценку $O(|x|^{-1})$. Логарифмический потенциал простого слоя гармоничен внутри Γ; вне Γ он (в отличие от случая $m>2$), вообще говоря, негармоничен: функция, гармоническая в бесконечной области на двумерной плоскости, должна быть ограниченной на бесконечности, а потенциал простого слоя в общем случае растет на бесконечности как $\ln|x|$.

Для потенциалов (1) и (2) справедливы теоремы, аналогичные (но не всегда тождественные) теоремам, доказанным для случая $m>2$: потенциал простого слоя непрерывен на всей плоскости, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки; имеют место предельные соотношения для потенциала двойного слоя

$$W_i(x) = -\pi\sigma(x) + \overline{W(x)}, \quad W_e(x) = \pi\sigma(x) + \overline{W(x)} \tag{4}$$

и для нормальной производной потенциала простого слоя

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n_i} = \pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}, \quad \frac{\partial V(x)}{\partial n_e} = -\pi\mu(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial n}. \tag{5}$$

Интеграл Гаусса вычисляется по формуле

$$\int \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma = \begin{cases} -2\pi, & x \text{ внутри } \Gamma, \\ 0, & x \text{ вне } \Gamma, \\ -\pi, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Задачи Дирихле и Неймана ставятся как обычно: мы сохраняем также обозначения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для функций, заданных в этих задачах. Важно отметить, что при $m=2$ внешняя задача Неймана N_e отличается некоторыми особенностями. Теорема единственности для задачи N_e в данном случае формулируется так же, как и для задачи N_i: два решения этой задачи могут отличаться только на постоянное слагаемое. Верно и обратное: две функции, гармонические вне Γ и различающиеся только постоянным слагаемым, решают одну и ту же задачу N_e.

Другая особенность задачи N_e на двумерной плоскости определяется следующей леммой.

Лемма 15.6.1. *Для того чтобы при $m=2$ задача N_e имела решение, необходимо, чтобы*

$$\int_\Gamma \psi(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

Допустим, что решение $u(x)$ задачи N_e существует. Вокруг начала координат опишем окружность S_R столь большого радиуса R, чтобы кривая Γ лежала внутри S_R. Функция $u(x)$ гармонична вне S_R и непрерывна в соответствующей замкнутой области, поэтому справедлива формула Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega-\theta) + R^2}\, u(R, \omega)\, d\omega. \tag{8}$$

Эта формула получается из формулы (3.9) гл. 12 при $m=2$, здесь R, ω — полярные координаты точки ξ, $u(R, \omega) = u(\xi)$, ρ, θ — полярные координаты точки x и $\rho > R$.

Продифференцируем формулу (8) по декартовым координатам точки x. Это проще всего проделать так. Положим $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, где x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 — декартовы координаты точек x и ξ. Тогда $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\omega}$ и, как легко проверить,

$$\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega-\theta) + R^2} = \operatorname{Re} \frac{z+\zeta}{z-\zeta};$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega-\theta) + R^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} \frac{z+\zeta}{z-\zeta} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z+\zeta}{z-\zeta} = -\operatorname{Re} \frac{2\zeta}{(z-\zeta)^2};$$

теперь

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi} u(R,\ \omega)\,\mathrm{Re}\,\frac{\zeta}{(z-\zeta)^2}\,d\omega = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Аналогично найдем, что и $\frac{\partial u}{\partial x_2} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Последние оценки верны при достаточно больших $|x|$.

Напишем теперь формулу (2.7) гл. 12 для области $\Omega'_{\bar R}$, ограниченной кривыми Γ и $S_{\bar R}$, где $\bar R > R$:

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0;$$

здесь n — внешняя нормаль к Γ, соответственно к $S_{\bar R}$ в точке x; перед первым интегралом поставлен знак минус, потому что нормаль n на Γ — внутренняя для области $\Omega'_{\bar R}$. Последней формуле можно придать вид

$$-\int_\Gamma \psi(x)\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0. \tag{9}$$

Из полученных выше оценок следует, что при $\bar R$ достаточно большом на окружности $S_{\bar R}$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n,\ x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n,\ x_2)\right| \leqslant \frac{c}{\bar R^2},\quad c = \mathrm{const}.$$

Но тогда

$$\left|\int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R}\right| \leqslant \frac{c}{\bar R^2}\,2\pi\bar R = \frac{2\pi c}{\bar R} \xrightarrow[\bar R\to\infty]{} 0;$$

положив в формуле (9) $\bar R \to \infty$, придем к соотношению (7). ■

Как и в общем случае, будем искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (2), а решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя (1). Это приведет к интегральным уравнениям

$$\sigma(x) \mp \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \mp\frac{1}{\pi}\varphi(x) \tag{D}$$

для задачи Дирихле и

$$\mu(x) \pm \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \pm\frac{1}{\pi}\psi(x) \tag{N}$$

для задачи Неймана. Ядра этих уравнений имеют слабую особенность. В данном случае легко показать, что они ограничены, если показатель Ляпунова $\alpha = 1$, и непрерывны, если кривая Γ имеет непрерывную кривизну. По-прежнему уравнения задач D_i

и N_e, а также задач D_e и N_i образуют сопряженные пары. Ниже предполагаем, что кривая Γ — ляпуновская.

Исследование интегральных уравнений (D) и (N) проведем, опираясь на следующую лемму.

Лемма 15.6.2. *Если интегральное уравнение задачи* N_e

$$\mu(x)-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma=-\frac{1}{\pi}\psi(x) \tag{10}$$

разрешимо, а $\psi(x)$ *удовлетворяет равенству* (7), *то потенциал простого слоя* (1) *решает задачу* N_e.

Пусть уравнение (10) разрешимо. Взяв его решение за плотность потенциала (1), получим функцию, удовлетворяющую краевому условию задачи N_e и гармоническую вне Γ всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, где эта функция может оказаться неограниченной. Остается доказать, что если условие (7) выполнено, то потенциал (1) на бесконечности ограничен. Обе части уравнения (10) умножим на $d_x\Gamma$ и проинтегрируем по Γ. Учитывая условие (7), получим

$$\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma=0. \tag{11}$$

В двойном интеграле переставим обозначения x и ξ; при этом n заменится на ν. Используя третье из равенств (6), найдем

$$\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(x)\left\{\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\right\}d_x\Gamma=-\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma.$$

Теперь из равенства (11) следует

$$\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma=0. \tag{12}$$

В равенстве (12) заменим обозначение x на ξ, затем умножим это равенство на $\ln|x|$ и сложим с равенством (1). В результате получим новое выражение для потенциала (1)

$$V(x)=\int_\Gamma \mu(\xi)\ln\frac{|x|}{r}\,d_\xi\Gamma. \tag{13}$$

При $|x|\to\infty$ интеграл (13) ограничен (он стремится к нулю). ■

Анализ интегральных уравнений (D) и (N) проводится, по существу, так же, как и в § 3—5; вкратце наметим этот анализ. Прежде всего докажем, что уравнение (10) задачи N_e разрешимо при любой непрерывной функции $\psi(x)$. В соответствии с альтернативой Фредгольма рассмотрим однородное уравнение

$$\mu_0(x)-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma=0. \tag{14}$$

Пусть $\mu_0(x)$ — какое-либо его решение. Свободный член уравнения (14), равный нулю, очевидно, удовлетворяет условию (7), и в силу леммы 15.6.2 потенциал $V_0(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \ln \frac{1}{r} \, d_\xi\Gamma$ решает однородную задачу N_e. По теореме единственности задачи N_e $V_0(x) \equiv C = \text{const}$ вне Г. Будучи непрерывным на всей плоскости, потенциал $V_0(x) \equiv C$ и на Г. Наконец, из теоремы единственности задачи D_i вытекает, что $V_0(x) \equiv C$ и внутри Г. Но тогда $\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} = \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0$ и из формул (5) следует, что

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\right] \equiv 0.$$

Из леммы 15.6.2 вытекает теперь, что условие (7) не только необходимо, но и **достаточно** для разрешимости задачи N_e на двумерной плоскости.

Вместе с уравнением (10) всегда разрешимо и сопряженное с ним интегральное уравнение задачи D_i. Отсюда следует, что и на двумерной плоскости задача D_i всегда разрешима.

Исследование интегральных уравнений задач D_e и N_i проводится так же, как в общем случае, и приводит к тем же результатам: условие (7) необходимо и достаточно для разрешимости задачи N_i; однородное интегральное уравнение задачи D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\zeta\Gamma = 0 \tag{15}$$

имеет решением только постоянную.

Решение задачи D_e на двумерной плоскости можно построить, отыскивая его в виде суммы

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\zeta\Gamma + \int\limits_{\Gamma} \sigma(\zeta) \, d_\zeta\Gamma. \tag{16}$$

Это приводит к интегральному уравнению

$$\sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} + 1\right]\sigma(\zeta) \, d_\zeta\Gamma = \frac{1}{\pi}\varphi(x). \tag{17}$$

Как и в § 5, доказывается, что уравнение (17) всегда разрешимо.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ КРУГА

Пусть Г — окружность $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Вычислим ядро потенциала двойного слоя в предположении, что обе точки $x(x_1, x_2)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2)$ лежат на этой окружности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \xi_1}\cos(\nu, \xi_1) - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \xi_2}\cos(\nu, \xi_2) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r}.$$

На окружности направление ν совпадает с направлением радиуса, проведенного в точку ξ. Из рис. 21 ясно, что (мы обозначили угол $(\nu,\ r)=\beta$)

$$r=2R\sin\frac{\pi-2\beta}{2}=2R\cos\beta,$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{2R};\quad x,\ \zeta\in\Gamma. \tag{1}$$

Поменяв местами x и ζ, получим

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{2R};\quad x,\ \zeta\in\Gamma. \tag{2}$$

Ядра уравнений (D) и (N) оказались вырожденными, и эти уравнения решаются элементарно.

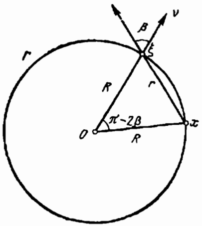

Рис 21

Разберем здесь уравнения внутренних задач; решить интегральные уравнения внешних задач предоставляем читателю. Обозначим через θ и ω углы, которые радиус-векторы Ox и $O\xi$ образуют с осью x_1. Тогда $d_\xi\Gamma=R\,d\omega$. Далее, функцию точки $x\in\Gamma$ можно рассматривать как функцию от θ. Соответственно с этим будем писать $\sigma(\theta)$ вместо $\sigma(x)$ и т. п.

Уравнение внутренней задачи Дирихле принимает вид

$$\sigma(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)\,d\omega=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta). \tag{3}$$

Положим $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)\,d\omega=c$, тогда $\sigma(\theta)+c=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta)$, интегрируя, получаем $c=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,d\omega$. Теперь $\sigma(\theta)=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta)-c$ и

$$u(x)=-\int_\Gamma\left[\frac{1}{\pi}\varphi(\omega)+c\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\zeta\Gamma=$$

$$=-\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d\omega-c\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma.$$

Точка x теперь лежит внутри круга, по формуле (6.6) имеем

$$u(x)=-\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d\omega+2\pi c=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2R\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}-1\right]\varphi(\omega)\,d\omega.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\left[(\xi_1 - x_1)\cos(\nu, \xi_1) + (\xi_2 - x_2)\cos(\nu, \xi_2)\right] =$$
$$= -\frac{1}{r^2 R}\left[(\xi_1 - x_1)\xi_1 + (\xi_2 - x_2)\xi_2\right] = -\frac{R^2 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}{r^2 R}.$$

Имея в виду, что

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = R^2 + \rho^2 - 2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2), \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

получаем $-\left[2R \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - 1\right] = \frac{R^2 - \rho^2}{r^2}$ и, следовательно,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\omega) \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} d\omega. \tag{4}$$

Это уже известная нам формула Пуассона для круга.

Уравнение задачи N_i для круга имеет вид

$$\mu(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi} \psi(\theta). \tag{5}$$

Полагая $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\omega)\, d\omega = c_1$, имеем $\mu(\theta) - c_1 = \frac{1}{\pi} \psi(\theta)$. Интегрирование этого равенства приводит к уже известному необходимому условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0; \tag{6}$$

постоянная c_1 остается произвольной. Если условие (6) выполнено, то решение уравнения (5) имеет вид $\mu(\theta) = \frac{1}{\pi} \psi(\theta) + c_1$; решение задачи N_i дается формулой

$$u(x) = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\omega) \ln \frac{1}{r}\, d\omega + c_1 R \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{r}\, d\omega.$$

Нетрудно доказать, что второй интеграл есть постоянная, и мы приходим к *формуле Дини*

$$u(x) = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\omega) \ln \frac{1}{r}\, d\omega + C, \quad C = \text{const}.$$

Глава 16
ЗАДАЧА О КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Краевые задачи, рассмотренные в предшествующей главе, обладали «фредгольмовскими» свойствами: либо эти задачи допускали одно и только одно решение (задачи D_i и D_e, задача N_e при $m > 2$), либо нарушалась теорема единственности, и однородная задача имела линейно независимые решения — тогда число таких решений оказывалось конечным, а неоднородная задача была разрешима тогда и только тогда, когда заданная краевая функция удовлетворяла такому же числу условий ортогональности (задача N_i, задача N_e при $m = 2$). В настоящей главе будет рассмотрена новая краевая задача, которая в общем случае не является фредгольмовской, — это задача о косой (иногда пишут «наклонной») производной.

В m-мерном евклидовом пространстве E_m рассмотрим область Ω. Для определенности допустим, что эта область конечная и что ее граница Γ есть ляпуновская поверхность. Рассмотрим некоторую окрестность поверхности Γ. С каждой точкой x' этой окрестности свяжем некоторое направление $\lambda = \lambda(x')$; будем считать, что $\lambda(x')$ есть непрерывная функция от x'. Подставим задачу: в области Ω найти решение эллиптического уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu = f(x) \tag{1}$$

при краевом условии

$$\lim_{x' \to x}\frac{\partial u(x')}{\partial \lambda} + \sigma(x)\,u(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\sigma(x)$ — функция, заданная на Γ.

Задача (1) — (2) и называется *задачей о косой производной*. Если на поверхности Γ направляющие косинусы $\cos(\lambda, x_k)$ пропорциональны величинам $A_{jk}\cos(\nu, x_j)$, где ν — нормаль к Γ, то задача о косой производной переходит в задачу Неймана.

Задачу о косой производной будем решать в следующих, существенно более частных предположениях. Примем, что Ω есть односвязная конечная область двумерной плоскости (в дальнейшем будем писать просто «плоскость») координат x_1, x_2, а уравнение (1) есть однородное уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{3}$$

Допустим еще, что граница Γ области Ω есть простая замкнутая кривая с непрерывной кривизной. Область Ω можно конформно отобразить на единичный круг. Конформное преобразование не меняет уравнения (3) (см. § 2 гл. 11); нетрудно понять, что вид краевого условия (2) при этом также не меняется. Имея это в виду, будем в последующем считать, что Ω есть круг

$$x_1^2+x_2^2<1. \qquad (4)$$

Будем пользоваться обозначениями $x_1+ix_2=z=\rho e^{i\vartheta}$, $i=\sqrt{-1}$, $e^{i\vartheta}=t$; если $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ — точка на окружности Γ круга (4), то будем также писать $\xi_1+i\xi_2=\zeta=e^{i\omega}$. Далее, если $g(x)$ — какая-либо функция точки $x=(x_1, x_2)\in\Gamma$ и $t=x_1+ix_2$, то будем писать $g(t)$ вместо $g(x)$.

Краевое условие (2) можно записать в виде (знак предела отбрасываем)

$$\cos\lambda(t)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sin\lambda(t)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma(t)u=\psi(t). \qquad (5)$$

Здесь $\lambda(t)$ означает угол между направлением λ в краевом условии (2) и осью x_1. По смыслу задачи функции $e^{i\lambda(t)}$, $\sigma(t)$, $\psi(t)$ 2π-периодичны по ϑ. Примем дополнительно, что $\sigma(t)$, $\psi(t)\in\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, а $e^{i\lambda(t)}\in C^{(2)}(\Gamma)$.

§ 2. СЛУЧАЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНДЕКС ЗАДАЧИ

Рассматривая задачу о косой производной, будем искать ее решение, принадлежащее классу $C^{(1)}(\bar\Omega)$. Если такое решение существует, то оно имеет непрерывную на $\Gamma=\partial\Omega$ нормальную производную; из результатов § 6 гл. 15 следует, что искомое решение допускает представление в виде потенциала простого слоя. Пусть

$$u(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d_\zeta\Gamma=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega,$$

$$r=|\zeta-z|,\quad z\in\Omega; \qquad (1)$$

мы пишем здесь $\frac{1}{\pi}\mu(\zeta)$ вместо принятого в гл. 14 и 15 $\mu(\xi)$. Функция u есть вещественная часть голоморфной в Ω функции

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\mu(\zeta)\ln\frac{1}{\zeta-z}\,d\omega. \qquad (2)$$

Положим $f(z)=u(x_1, x_2)+iv(x_1, x_2)$ и продифференцируем равенство (2) по x_1. Приняв во внимание уравнение Коши — Римана $\frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial x_2}$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-i\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\mu(\zeta)\frac{d\omega}{\zeta-z}=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in\Omega. \qquad (3)$$

В формуле (3) устремим z к некоторой точке t на окружности Γ. По формулам Сохоцкого — Племеля (формулы (5.5) гл. 6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-i\,\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\mu(t)}{t}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\,\frac{d\omega}{\zeta-t},\quad t\in\Gamma. \tag{4}$$

Отделим вещественные и мнимые части, для чего положим $\zeta-t=re^{i\gamma}$; напомним еще, что $\zeta=e^{i\omega}$, $t=e^{i\vartheta}$ и что функция $\mu(\zeta)$ по самому определению — вещественная. Совсем простые выкладки дают равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\mu(t)\cos\vartheta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\frac{\cos\gamma}{r}\,d\omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\mu(t)\sin\vartheta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\frac{\sin\gamma}{r}\,d\omega.$$

Далее,

$$\frac{\cos\gamma}{r}=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\zeta-t}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta-t}+\frac{1}{\bar\zeta-\bar t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta-t}+\frac{1}{\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{t}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\zeta t}{\zeta-t}$$

и, следовательно,

$$\frac{\cos\gamma}{r}\,d\omega=\frac{1}{2i}\,\frac{1-\zeta t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}=-\frac{\sin\vartheta}{\zeta-t}\,d\zeta-\frac{d\zeta}{2i\zeta t};$$

отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\mu(t)\cos\vartheta-\frac{\sin\vartheta}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-t}-\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \tag{5}$$

и аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\mu(t)\sin\vartheta+\frac{\cos\vartheta}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-t}-\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в краевое условие (1.5), получим одномерное сингулярное интегральное уравнение для неизвестной плотности μ:

$$\cos(\lambda-\vartheta)\,\mu(t)+i\sin(\lambda-\vartheta)\,(S\mu)(t)-$$

$$-\frac{e^{i(\lambda-\vartheta)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+\frac{\sigma(t)}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega=\psi(t); \tag{7}$$

здесь S — сингулярный оператор Коши:

$$(S\mu)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\mu(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-t}.$$

Символ (см. гл. 6, § 4 и 7) уравнения (7)

$$\cos(\lambda-\vartheta)+i\theta\sin(\lambda-\vartheta)=\begin{cases}e^{i(\lambda-\vartheta)}, & \theta=+1,\\ e^{-i(\lambda-\vartheta)}, & \theta=-1\end{cases}$$

нигде не обращается в нуль. Отсюда следует, что в пространстве $L_2(\Gamma)$ уравнение (7) нормально разрешимо и имеет конечный индекс. Обозначая этот индекс через $\varkappa$, имеем по формуле (8.1) гл. 6

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d\ln e^{-2i(\lambda(t)-\vartheta)} = 2 - \frac{1}{\pi}[\lambda(t)]_{\Gamma}; \tag{8}$$

через $[\quad]_{\Gamma}$ обозначено приращение величины, записанной в скобках, при обходе контура Γ в положительном направлении. Заметим, что индекс (8) — четный.

§ 3. О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ

Теория сингулярных интегральных уравнений, развитая в гл. 6, позволяет делать заключения о решениях этих уравнений, принадлежащих к классу $L_2(\Gamma)$. Между тем соображения теории потенциала, которыми мы воспользовались в начале § 2, требуют, чтобы плотность $\mu(t)$ была непрерывной. Докажем, что при предположениях, сделанных в конце § 1, любое решение уравнения (2.7), принадлежащее к классу $L_2(\Gamma)$, удовлетворяет условию Липшица с показателем $\beta = \min\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$; в частности, этому условию удовлетворяют решения однородного уравнения, которое получается при замене функции $\psi(t)$ нулем.

На обе части уравнения (2.7) воздействуем регуляризатором (см. § 7 гл. 6), который в данном случае имеет вид

$$R = \cos(\lambda - \vartheta) I - i\sin(\lambda - \vartheta) S; \tag{1}$$

здесь I — тождественный оператор. Тогда получим фредгольмовское уравнение, которому удовлетворяют все решения уравнения (2.7),

$$\mu(t) = \frac{b(t)}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{a(\zeta)-a(t)}{\zeta - t}\mu(\zeta)\,d\zeta - \\ - \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b(\zeta)-b(t)}{\zeta - t}(S\mu)(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \times \\ \times R\left(e^{i(\lambda-\vartheta)}\right)(t) - R\left(\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega\right)(t) + R(\psi)(t); \tag{2}$$

для краткости здесь обозначено $\cos(\lambda - \vartheta) = a(t)$, $\sin(\lambda - \vartheta) = b(t)$.

По теореме Привалова (см. § 5 гл. 6) функции $R(\psi)(t)$ и $R\left(e^{i(\lambda-\vartheta)}\right)(t)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α. Далее, из теоремы 7.6.2, которая при естественных изменениях верна и для однократных интегралов, вытекает, что функция

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\mu(\zeta)\ln\frac{1}{r}\,d\omega \tag{3}$$

имеет обобщенную производную

$$\frac{d\chi}{d\vartheta}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial\vartheta}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\operatorname{ctg}\frac{\omega-\vartheta}{2}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\,d\omega; \quad (4)$$

мы здесь воспользовались тем, что Γ — единичная окружность и, следовательно, $r=2\left|\sin\frac{\omega-\vartheta}{2}\right|$.

Сингулярный оператор Коши ограниченно действует в $L_2(\Gamma)$, и формула (4) показывает, что $d\chi/d\vartheta\in L_2(\Gamma)$. Отсюда следует, что $\chi\in\mathrm{Lip}_{1/2}(\Gamma)$. Действительно, пусть, например, $\vartheta_1>\vartheta_2$ и $t_1=e^{i\vartheta_1}$, $t_2=e^{i\vartheta_2}$, тогда

$$|\chi(t_1)-\chi(t_2)|=\left|\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\frac{d\chi}{d\vartheta}\,d\vartheta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\vartheta_1-\vartheta_2}\sqrt{\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}\left|\frac{d\chi}{d\vartheta}\right|^2d\vartheta}\leqslant\left\|\frac{d\chi}{d\vartheta}\right\|\sqrt{\vartheta_1-\vartheta_2}. \quad (5)$$

Теперь, очевидно, $\sigma\chi\in\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$; по теореме Привалова $R(\sigma\chi)\in\in\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$. Из условия $e^{i\lambda(t)}\in C^{(2)}(\Gamma)$ вытекает, что ядро $\frac{a(\zeta)-a(t)}{\zeta-t}$ имеет непрерывные первые производные по t и ζ. Отсюда вытекает, что произведение $b(t)\int_\Gamma\frac{a(\zeta)-a(t)}{\zeta-t}\mu(\zeta)\,d\zeta$ непрерывно дифференцируемо по t и, следовательно, принадлежит к классу $\mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. Аналогично исследуется и второй интеграл в (2).

Итак, каждое слагаемое справа в (2) принадлежит к классу Липшица с одним из показателей 1, α, β. В таком случае сумма $\mu(t)$ принадлежит к классу Липшица с наименьшим из этих показателей, т. е. к классу $\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$.

Замечание. Утверждение настоящего параграфа можно несколько усилить: любое решение уравниния (2.7) принадлежит к классу $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$. В самом деле, раз установлено, что $\mu\in\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$, то, по теореме 7.6.1, производная $d\chi/d\vartheta\in\mathrm{Lip}_\beta(\Gamma)$ и тем более ограничена, а тогда $\chi\in\mathrm{Lip}_1(\Gamma)$. Слагаемые справа в (2) теперь принадлежат к классам Липшица с показателями 1 и α, а тогда $\mu\in\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

§ 4. БОЛЕЕ ПРОСТОЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ О КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Если в краевом условии (1.5) $\sigma(t)\equiv 0$, то задачу о косой производной можно решить до конца. Вместо уравнения (2.7) получается несколько более простое уравнение

$$\cos(\lambda-\vartheta)\,\mu(t)+i\sin(\lambda-\vartheta)\,(S\mu)(t)-$$

$$-\frac{e^{i(\lambda-\vartheta)}}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=\psi(t). \quad (1)$$

Метод, которым мы воспользуемся для его решения, был впервые предложен Карлеманом в 1922 г. и в последующем был широко использован в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений

Введем в рассмотрение функцию комплексной переменной $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$; точка z может находиться как внутри, так и вне Γ. Как и в гл. 6, будем обозначать функцию $F(z)$ через $F_i(z)$ (соответственно $F_e(z)$), если точка z лежит внутри (соответственно вне) Γ; предельные значения функций $F_i(z)$ и $F_e(z)$ при $z\to t\in\Gamma$ будем обозначать через $F_i(t)$ и $F_e(t)$. Из формул (5.8) гл. 6 следует $\mu(t)=F_i(t)-F_e(t)$, $(S\mu)(t)=F_i(t)+F_e(t)$. Подставив это в (1), придем к новому уравнению

$$F_i(t)-e^{-2i(\lambda-\vartheta)}F_e(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}d\zeta=e^{-i(\lambda-\vartheta)}\psi(t). \tag{2}$$

Введем новые аналитические функции

$$G_i(z)=F_i(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta}d\zeta;\quad G_e(z)=F_e(z). \tag{3}$$

Очевидно, $G_i(z)$ голоморфна внутри Γ, а $G_e(z)$ — вне Γ, и

$$G_i(0)=0. \tag{4}$$

Уравнение (2) принимает более простой вид

$$G_i(t)-e^{-2i(\lambda-\vartheta)}G_e(t)=e^{-i(\lambda-\vartheta)}\psi(t). \tag{5}$$

Формула (2.8), определяющая индекс задачи, означает, в частности, что

$$-2i(\lambda-\vartheta)=i\varkappa\vartheta+\lambda_0(t), \tag{6}$$

где функция $\lambda_0(t)$ однозначна и непрерывна на Γ. Из допущения (см. § 1) $e^{i\lambda(t)}\in C^{(2)}(\Gamma)$ вытекает, что и $\lambda_0\in C^{(2)}(\Gamma)$. Обозначим

$$\beta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta;\quad z\,\bar{\in}\,\Gamma.$$

По формулам Сохоцкого — Племеля $\beta_i(t)-\beta_e(t)=\lambda_0(t)$.

Положим теперь

$$\Phi_i(z)=G_i(z)e^{-\beta_i(z)},\qquad \Phi_e(z)=G_e(z)e^{-\beta_e(z)}. \tag{7}$$

Подставив это в (5), получим равенство

$$\Phi_i(t)-t^{\varkappa}\Phi_e(t)=\psi_1(t), \tag{8}$$

где для краткости положено

$$\psi_1(t)=e^{-i(\lambda-\vartheta)+\beta_i(t)}\psi(t). \tag{9}$$

Прежде всего исследуем однородное уравнение

$$\Phi_i^{(0)}(t)-t^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(t)=0; \tag{10}$$

нуликом будем обозначать вообще величины, относящиеся к однородной задаче.

Уравнение (10) показывает, что функция $z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ является аналитическим продолжением функции $\Phi_i^{(0)}(z)$ в область $|z|>1$. Дальнейшее зависит от значения $\varkappa$; отметим еще, что $\Phi_e^{(0)}(\infty)=$ $=G_e^{(0)}(\infty)=F_e^{(0)}(\infty)=0$.

a) Если $\varkappa\leqslant 0$, то функция $\Phi_i^{(0)}(z)=z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ на бесконечности обращается в нуль. Но тогда эта функция голоморфна на всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля, $\Phi_i^{(0)}(z)=$ $=\mathrm{const}$, но $\Phi_i^{(0)}(\infty)=0$ и, следовательно, $\Phi_i^{(0)}(z)\equiv 0$. Одновременно $\Phi_e^{(0)}(z)\equiv 0$ и, следовательно, $G_i^{(0)}(z)\equiv 0$, $G_e^{(0)}(z)\equiv 0$, или

$$F_i^{(0)}(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad F_e^{(0)}(z)\equiv 0;$$

отсюда

$$\mu_0(t)=F_i^{(0)}(t)-F_e^{(0)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta. \tag{11}$$

Уравнению (11) удовлетворяет функция $\mu_0(t)=\mathrm{const}$; других решений это уравнение не имеет. Таким образом, если $\varkappa\leqslant 0$, то однородная задача о косой производной имеет только одно линейно независимое решение; нетрудно видеть, что это решение есть $u(x_1,\ x_2)\equiv\mathrm{const}$ Размерность подпространства решений сопряженной задачи или, что то же, число условий разрешимости неоднородной задачи о косой производной, равно $1-\varkappa$.

b) Пусть теперь $\varkappa>0$. Функция $\Phi_i^{(0)}(z)=z^{\varkappa}\Phi_e^{(0)}(z)$ голоморфна на всей конечной плоскости и на бесконечности растет не быстрее, чем полином степени $\varkappa-1$. По другой теореме Лиувилля $\Phi_i^{(0)}(z)$ есть полином степени $\leqslant\varkappa-1$; подпространство этих полиномов имеет размерность $\varkappa$. Условие (4) дает $\Phi_i^{(0)}(0)=0$; это означает, что в упомянутом полиноме не должно быть свободного члена, и размерность подпространства функций $\Phi^{(0)}(z)$ уменьшается до $\varkappa-1$. Такова же размерность и подпространства функций $G^{(0)}(z)$. Если эти последние функции уже построены, то

$$F_i^{(0)}(z)=G_i^{(0)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta;\quad F_e^{(0)}(z)=G_e^{(0)}(z),$$

и по формулам Сохоцкого — Племеля

$$\mu_0(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=G_i^{(0)}(t)-G_e^{(0)}(t). \tag{12}$$

Умножив это на dt/t и проинтегрировав по Γ, получим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (12):

$$\int_{\Gamma}\frac{G_i^{(0)}(t)-G_e^{(0)}(t)}{t}\,dt=0. \tag{13}$$

В силу условия (4) $G_i^{(0)}(t)=0$, кроме того, $G_e^{(0)}(\infty)=0$. Отсюда следует, что условие (13) выполняется тождественно, и уравнение (12) разрешимо. Размерность подпространства функций μ_0, очевидно, на единицу больше размерности подпространства функций $G_i^{(0)}$ и равна $\varkappa$. Иначе говоря, в случае $\varkappa>0$ однородная задача о косой производной имеет $\varkappa$ линейно независимых решений; условия разрешимости отсутствуют.

Вернемся к уравнению (8). Здесь нам придется рассмотреть три случая: $\varkappa=0$, $\varkappa<0$ и $\varkappa>0$.

1) Если $\varkappa=0$, то уравнение (8) принимает вид $\Phi_i(t)-\Phi_e(t)=\psi_1(t)$; как показывают формулы Сохоцкого — Племеля, решением последнего уравнения является функция

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{14}$$

Однородное уравнение (10) имеет в этом случае (см. п. a) только тривиальное решение, и формула (14) дает в рассматриваемом случае единственное решение уравнения (8). Зная $\Phi(z)$, восстанавливаем $G(z)$ по формулам (7). Соотношения (4) и (7) дают необходимое условие разрешимости задачи: $\Phi_i(0)=0$, или

$$\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=0. \tag{15}$$

Пусть это условие выполнено. По формулам (3) найдем

$$F_i(z)=G_i(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad F_e(z)=G_e(z).$$

Формула $\mu(t)=F_i(t)-F_e(t)$ приводит к интегральному уравнению для μ

$$\mu(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=G_i(t)-G_e(t). \tag{16}$$

Как и в п. b), докажем, что это уравнение разрешимо. Таким образом, при $\varkappa=0$ условие (15) необходимо и достаточно для разрешимости задачи о косой производной.

2) Пусть теперь $\varkappa<0$. Введем функции $\tilde\Phi_i(z)$ и $\tilde\Phi_e(z)$, полагая $\tilde\Phi_i(z)=\Phi_i(z)$, $\tilde\Phi_e(z)=z^{\varkappa}\Phi_e(z)$. Очевидно, $\tilde\Phi_i(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, а $\tilde\Phi_e(z)$ — во внешности круга, $|z|>1$, причем $\tilde\Phi_e(\infty)=0$. Уравнение (8) приводится к уравнению

$$\tilde\Phi_i(t)-\tilde\Phi_e(t)=\psi_1(t),$$

единственным решением которого, как мы видели, является функция

$$\tilde\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad |z|\neq 1;$$

отсюда

$$\Phi_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \quad |z|<1,$$
$$\Phi_e(z)=\frac{1}{2\pi i z^\varkappa}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \quad |z|>1. \tag{17}$$

На бесконечности $\Phi_e(z)$ должна иметь нуль, по крайней мере, первого порядка, и это дает $-\varkappa$ необходимых условий:

$$\int_\Gamma \psi_1(\zeta)\,\zeta^k\,d\zeta=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1. \tag{18}$$

Если эти условия выполнены, то можно построить функции $\Phi_i(z)$, $\Phi_e(z)$, и затем по формулам (7) — функции $G_i(z)$ и $G_e(z)$. Условие (4) по-прежнему ведет к необходимости условия (15); будем предполагать, что оно выполнено. Далее строятся функции $F_i(z)$ и $F_e(z)$, и для μ опять получаем разрешимое уравнение (16).

Таким образом, в случае $\varkappa<0$ условия (15) и (18) не только необходимы, но и достаточны для разрешимости задачи о косой производной. Число этих условий равно $-\varkappa+1$, а число решений однородной задачи о косой производной равно единице.

3) Остается рассмотреть случай $\varkappa>0$. В этом случае будем искать частное решение $\Phi^{(1)}(z)$ уравнения (8), имеющее на бесконечности оценку $\Phi^{(1)}(z)=O(|z|^{-\varkappa-1})$. Положим $\hat{\Phi}_i(z)=\Phi_i^{(1)}(z)$, $\hat{\Phi}_e(z)=z^\varkappa\Phi_e^{(1)}(z)$, тогда $\hat{\Phi}_e(z)$ имеет на бесконечности нуль порядка не ниже первого, и $\hat{\Phi}_i(t)-\hat{\Phi}_e(t)=\psi_1(t)$. Решение последнего уравнения есть $\hat{\Phi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$, что приводит к частному решению уравнения (8):

$$\Phi_i^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$
$$\Phi_e^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i z^\varkappa}\int_\Gamma \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta; \tag{19}$$

общее решение получим, прибавив к функции (19) общее решение уравнения (10) (см. п. b)), подчиненное вытекающему из (4) условию $\Phi_i(0)=0$. В этом случае, как было уже выяснено в п. b), условия разрешимости отсутствуют, так что задача о косой производной разрешима при любой функции $\psi(t)$, а однородная задача имеет $\varkappa$ линейно независимых решений.

§ 5. СЛУЧАЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Коротко скажем о случае, когда размерность пространства $m>2$. При достаточно широких условиях (см. [23]) существует сингулярное решение дифференциального оператора в левой части уравнения (1.1). Это решение при $m>2$ имеет вид

$$H(x, \xi)=\psi(x, \xi)+\psi_1(x, \xi), \tag{1}$$

где

$$\psi(x, \xi)=\frac{1}{(m-2)|S_1|\sqrt{A(x)}}\left[C_{jk}(x)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)\right]^{-\frac{m-2}{2}}, \tag{2}$$

$A(x)$ — определитель матрицы коэффициентов $A_{jk}(x)$, а $C_{jk}(x)$ суть элементы соответствующей обратной матрицы. Функция ψ_1 имеет при $x=\xi$ особенность более слабую, чем функция ψ. Примем, что граница Γ — достаточно гладкая, свободный член в уравнении (1.1) равен нулю и что любое решение задачи, принадлежащее классу $C^{(1)}(\overline{\Omega})$, можно представить в виде «потенциала простого слоя»

$$u(x)=\int_\Gamma H(x, \xi)\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma. \tag{3}$$

В таком случае задача о косой производной сводится к равносильному сингулярному интегральному уравнению

$$-\frac{\mu(x)}{2a^{(\lambda)}(x)}+\int_\Gamma \frac{\partial H}{\partial\lambda}\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma+\sigma(x)\int_\Gamma H(x, \xi)\mu(\xi)\,d_\xi\Gamma=$$
$$=\psi(x),\ x\in\Gamma; \tag{4}$$

здесь для краткости обозначено $a^{(\lambda)}(x)=\frac{1}{\cos(\nu, \lambda)}A_{jk}(x)$ $\cos(\nu, x_j)\cos(\nu, x_k)$, ν — внешняя нормаль к Γ.

Сравнительно легко удалось изучить тот случай, когда направление λ нигде не касается границы Γ. Этот случай был впервые исследован Ж. Жиро в 1934 г., его исследование было несколько упрощено автором настоящей книги (см. [27]). Как оказалось, в этом случае задача о косой производной имеет фредгольмовский характер в $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$, а также в пространствах липшицевых функций: в указанных пространствах эта задача нормально разрешима и ее индекс равен нулю.

Если направление дифференцирования хотя бы в одной точке касается границы области, то в упомянутых выше пространствах задача о косой производной перестает быть не только фредгольмовской, но даже нетеровской: она либо не разрешима нормально, либо ее индекс бесконечен, либо и то, и другое вместе.

Глава 17

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ОДНОРОДНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим первую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка, которое на протяжении настоящей главы считается формально самосопряженным:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)u=f(x),\ x\in\Omega;\quad u|_{\partial\Omega}=\varphi(x).$$

Эта задача естественным образом распадается на две: можно положить $u=u_1+u_2$, где u_1 и u_2 суть решения более простых задач

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)+C(x)u_1=f(x),\ x\in\Omega;\quad u_1|_{\partial\Omega}=0,$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)+C(x)u_2=0,\ x\in\Omega;\quad u_2|_{\partial\Omega}=\varphi(x).$$

В данном параграфе мы рассмотрим первую из этих задач — с однородным краевым условием; второй задаче посвящен § 3.

Сформулируем условия, которые мы накладываем на данные задачи; эти условия будут играть важную роль на протяжении ближайших трех глав. Пусть

$$Lu=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)u \tag{1}$$

— дифференциальное выражение, коэффициенты которого определены в некоторой конечной области Ω евклидова m-мерного пространства E_m. Границу Γ области Ω будем считать кусочно гладкой. Примем еще, что $A_{jk}\in C^1(\overline{\Omega})$, $C\in C(\overline{\Omega})$.

Дифференциальное выражение (1) будем считать эллиптическим в замкнутой области $\overline{\Omega}$. В этом случае все собственные числа $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ матрицы старших коэффициентов $A_{jk}(x)$ имеют в $\overline{\Omega}$ один и тот же знак. Изменив, если это нужно, знак выражения L, можно всегда считать, что $\lambda_k(x)>0$, $x\in\overline{\Omega}$.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

имеет старший коэффициент $(-1)^m$, постоянный и отличный от нуля; прочие коэффициенты этого уравнения непрерывны в $\overline{\Omega}$.

Отсюда следует, что корни $\lambda_k(x)$ этого уравнения суть непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции от x. Будучи положительными на компактном множестве $\overline{\Omega}$, они ограничены снизу некоторой положительной постоянной, которую мы обозначим через μ_0,

$$\lambda_k(x) \geqslant \mu_0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}; \quad \mu_0 = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Эллиптическое дифференциальное уравнение, удовлетворяющее неравенству (2), называется *невырождающимся*[1] в Ω.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — произвольные вещественные числа. Если $\lambda_1(x)$ — наименьшее из собственных чисел матрицы $\|A_{jk}\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$, то, как известно, $A_{jk}(x)\,t_j t_k \geqslant \lambda_1(x) \sum\limits_{k=1}^{m} t_k^2$. Воспользовавшись неравенством (2), получим неравенство

$$A_{jk}(x)\,t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2, \tag{3}$$

которое и характеризует невырожденное эллиптическое выражение. Это неравенство будет играть важную роль в последующем.

От дифференциального выражения (1) потребуем еще, чтобы

$$C(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь задачу Дирихле с однородным краевым условием

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu = f(x), \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Будем считать, что $f \in L_2(\Omega)$, и будем искать решение задачи (5)—(6), также принадлежащее пространству $L_2(\Omega)$. Задача (5)—(6), как и всякая краевая задача, порождает некоторый оператор, который обозначим через $\mathfrak{A}$. Он действует по формуле

$$\mathfrak{A}u = Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu;$$

за его область определения $D(\mathfrak{A})$ можно принять множество тех функций из $C^{(2)}(\Omega)$, которые удовлетворяют краевому условию (6). Ясно, что $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как оператор, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$.

Докажем, что оператор $\mathfrak{A}$ в $L_2(\Omega)$ — положительно определенный. В соответствии с определением (§ 2 гл. 4) достаточно установить три факта: 1) множество $D(\mathfrak{A})$ плотно в $L_2(\Omega)$; 2) оператор $\mathfrak{A}$ симметричен

$$(\mathfrak{A}u, v) = (u, \mathfrak{A}v); \quad u, v \in D(\mathfrak{A}); \tag{7}$$

---

[1] Невырождающиеся эллиптические уравнения называются также *равномерно эллиптическими*.

3) оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет неравенству положительной определенности

$$(\mathfrak{A}u,\ u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2;\quad \gamma^2 = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Множество $D(\mathfrak{A})$ плотно в $L_2(\Omega)$ — это сразу вытекает из следствия 2.2.1, так как $D(\mathfrak{A})$, очевидно, содержит множество всех финитных в Ω функций.

Докажем симметричность оператора $\mathfrak{A}$. Пусть $u,\ v \in D(\mathfrak{A})$. Это значит, что $u,\ v \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ и

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Составим разность

$$(\mathfrak{A}u,\ v) - (u,\ \mathfrak{A}v) = (Lu,\ v) - (u,\ Lv) = \int_\Omega (vLu - uLv)\, dx.$$

Применив к последнему интегралу вторую формулу Грина (формула (6.6) гл. 9), получим

$$(\mathfrak{A}u,\ v) - (u,\ \mathfrak{A}v) = -\int_\Gamma A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_j)\, d\Gamma.$$

В силу равенств (9) интеграл справа равен нулю.

Остается доказать неравенство (8). Имеем

$$(\mathfrak{A}u,\ u) = (Lu,\ u) = -\int_\Omega u\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Omega Cu^2\, dx.$$

К первому интегралу применим первую формулу Грина (формула (6.5) гл. 10). В силу краевого условия (6) интеграл по поверхности исчезнет, и мы получим

$$(\mathfrak{A}u,\ u) = \int_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]dx. \tag{10}$$

Интеграл (10) оценим снизу. Прежде всего отбросим неотрицательное слагаемое Cu^2. Далее, воспользуемся неравенством (3), положив в нем $t_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$,

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2;$$

теперь

$$(\mathfrak{A}u,\ u) \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{11}$$

Для функции $u \in D(\mathfrak{A})$ очевидным образом справедливо неравенство Фридрихса (см. § 6 гл. 3)

$$\int_\Omega u^2\, dx \leqslant \varkappa \int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx,\quad \varkappa = \text{const} > 0,$$

и окончательно

$$(\mathfrak{A}u,\ u) \geqslant \frac{\mu_0}{\varkappa} \int\limits_{\Omega} u^2\,dx = \frac{\mu_0}{\varkappa} \|u\|^2. \tag{12}$$

Неравенство (8) установлено $\left(\text{со значением постоянной } \gamma^2 = \frac{\mu_0}{\varkappa}\right)$. ■

Замечание. Оператор $\mathfrak{A}$ положительно определен и тогда, когда $C(x) \equiv 0$. Это позволяет несколько ослабить условие (4). Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ тот оператор, в который превращается оператор $\mathfrak{A}$ при $C(x) \equiv 0$, и пусть $\gamma_0^2 > 0$ — нижняя грань оператора $\mathfrak{A}_0$; тогда

$$(\mathfrak{A}_0 u,\ u) \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2. \tag{13}$$

Очевидно, $\mathfrak{A}u = \mathfrak{A}_0 u + C(x)\,u$. Отсюда

$$(\mathfrak{A}u,\ u) = (\mathfrak{A}_0 u,\ u) + (Cu,\ u) \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2 + (Cu,\ u). \tag{14}$$

Допустим, что $C(x)$ удовлетворяет неравенству

$$C(x) \geqslant \varepsilon - \gamma_0^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{15}$$

где ε — положительная постоянная, тогда

$$(Cu,\ u) = \int\limits_{\Omega} C(x)\,u^2(x)\,dx \geqslant (\varepsilon - \gamma_0^2) \int\limits_{\Omega} u^2(x)\,dx = (\varepsilon - \gamma_0^2)\|u\|^2.$$

Подставив это в (14), найдем, что

$$(\mathfrak{A}u,\ u) \geqslant \varepsilon \|u\|^2,$$

и оператор $\mathfrak{A}$ положительно определенный. Таким образом, условие (4) можно заменить более слабым условием (15).

Итак, в указанных условиях оператор $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле (5)—(6) положительно определенный в $L_2(\Omega)$. Задачу (5)—(6) можно записать в виде одного операторного уравнения

$$\mathfrak{A}u = f; \tag{*}$$

поскольку мы рассматриваем $\mathfrak{A}$ как оператор в $L_2(\Omega)$, естественно принять, что $f \in L_2(\Omega)$. Легко понять, что при этом уравнение (*), вообще говоря, неразрешимо: если $u \in D(\mathfrak{A})$, то необходимо $f \in C(\Omega)$. Но $\mathfrak{A}$ — положительно определенный оператор, и по доказанному в § 5 гл. 4, задача (5)—(6) имеет при любой функции $f \in L_2(\Omega)$ одно и только одно обобщенное решение $u_0 \in H_{\mathfrak{A}}$, где $H_{\mathfrak{A}}$ — энергетическое пространство оператора $\mathfrak{A}$. Это обобщенное решение реализует минимум функционала

$$F(u) = |u|_{\mathfrak{A}}^2 - 2(u,\ f) = \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 - 2fu\right] dx \tag{16}$$

при краевом условии (6). Применив к данному случаю общее соотношение (5.5а; гл. 4), мы убедимся, что обобщенное решение $u_0(x)$ задачи Дирихле можно определить как функцию из пространства $H_{\mathfrak{A}}$, удовлетворяющую тождеству

$$[u_0,\ \eta]_{\mathfrak{A}} = (f,\ \eta); \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}. \tag{17}$$

Обобщенное решение задачи Дирихле, удовлетворяющее тождеству (17), будем называть также *слабым решением* этой задачи. Аналогичной терминологией будем пользоваться и для других краевых задач (например, для задачи Неймана; см. ниже, § 7—9). Если в рассматриваемой области слабое решение имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и само уравнение, то это решение называется *сильным*.

Слабое решение $u_0(x)$ задачи Дирихле можно представить (см. § 5 гл. 4) в виде ряда

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \int_{\Omega} f(\xi)\, \omega_n(\xi)\, d\xi, \tag{18}$$

сходящегося в метрике $H_{\mathfrak{A}}$; здесь $\{\omega_n(x)\}$ — любая полная и ортонормированная в $H_{\mathfrak{A}}$ последовательность.

Рассмотрим пример, который ниже (см. гл. 19) будет играть важную роль. Пусть требуется решить задачу Дирихле для неоднородного уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial\Pi} = 0 \tag{19}$$

в параллелепипеде П, заданном неравенствами

$$0 \leqslant x_k \leqslant a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

Для функций класса $D(\mathfrak{A})$ легко интегрированием по частям установить формулу

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}u, v) = \int_{\Pi} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx$$

и, следовательно,

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = (\mathfrak{A}u, u) = \int_{\Pi} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Легко проверить, что в рассматриваемом случае система функций

$$\frac{2^{m/2}}{\pi \sqrt{|\Pi|}} \left\{\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2}\right\}^{-1/2} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \quad n_k = 1, 2, 3, \ldots$$

ортонормирована и полна в $H_{\mathfrak{A}}$; здесь $|\Pi| = a_1 a_2 \ldots a_m$ есть объем параллелепипеда (20). По формуле (18) находим слабое решение задачи (19):

$$u_0(x) = \frac{2m}{\pi^2 |\Pi|} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2}\right)^{-1} a_{n_1 n_2 \ldots n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \tag{21}$$

$$a_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \int_{\Pi} f(x) \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}\, dx.$$

Легко убедиться, что решение (21) — сильное, именно, что $u_0 \in W_2^{(2)}(\Pi)$. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 19.

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Теорема 17.2.1. *Энергетическое пространство $H_{\mathfrak{A}}$ оператора задачи Дирихле состоит из тех и только тех элементов пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, которые обладают следующим свойством: существует такая последовательность $u_n \in D(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \ldots$, что*

$$\int_\Omega (u_n - u)^2\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

В пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ энергетические произведение и норма определяются формулами

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + Cuv\right) dx, \tag{2}$$

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right) dx. \tag{3}$$

Нормы в пространствах $H_{\mathfrak{A}}$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ эквивалентны.

Для упрощения выкладок проведем доказательство, предполагая, что $C(x) \geqslant 0$.

Пусть $u \in H_{\mathfrak{A}}$. Функция $u \in L_2(\Omega)$ — это следует из теоремы 4.3.1, в силу которой энергетическое пространство положительно определенного оператора вкладывается в исходное пространство.

Как и всякое пространство, полученное пополнением, энергетическое пространство $H_{\mathfrak{A}}$ состоит из старых элементов — в данном случае это функции, входящие в область $D(\mathfrak{A})$ — и из идеальных элементов. Если u — старый элемент, то, очевидно, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, и для этого случая первое утверждение теоремы доказано. Пусть u и v — старые элементы. Применяя первую формулу Грина (формула (6.5) гл. 9) и учитывая равенства (1.9), получаем

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}u, v) = \int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j} + Cuv\right) dx.$$

Но $A_{jk} = A_{kj}$, и последний интеграл совпадает с интегралом в формуле (2), которая тем самым оказывается верной для старых элементов.

Полагая в формуле (2) $v = u$, видим, что для старых элементов верна и формула (3).

Пусть теперь u — идеальный элемент пространства $H_{\mathfrak{A}}$. По теореме 4.3.2 существует такая последовательность функций $u_n \in D(\mathfrak{A})$, что

$$\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |u_n - u_s| \xrightarrow[n,s\to\infty]{} 0. \tag{4}$$

Второе из соотношений (4) означает, что

$$|u_n-u_s|^2=(\mathfrak{A}(u_n-u_s),\ u_n-u_s)=$$
$$=\int_\Omega\left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)+C(u_n-u_s)^2\right]dx\xrightarrow[n,\,s\to\infty]{}0.$$

Теперь из неравенства (1.11) вытекает, что

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2dx=\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right\|^2\xrightarrow[n,\,s\to\infty]{}0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

т. е. в метрике $L_2(\Omega)$ последовательности производных $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$, $n=1,\ 2,\ \ldots,$ сходятся в себе. Отсюда следует, что существуют пределы

$$v_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x_k};\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad v_k\in L_2(\Omega).$$

В силу первого соотношения (4) по теореме 2.5.1 $v_k=\frac{\partial u}{\partial x_k}$ и, следовательно, $u\in W_2^{(1)}(\Omega)$. Существование последовательности $\{u_n\}$ со свойствами (4) дает теперь, что $u\in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Докажем, что формулы (2) и (3) верны для идеальных элементов энергетического пространства. Пусть u идеальный элемент, а последовательность $u_n\in D(\mathfrak{A})$, $n=1,\ 2,\ \ldots,$ удовлетворяет соотношениям (4). Тогда $|u_n-u|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и, следовательно,

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2=\lim_{n\to\infty}|u_n|_{\mathfrak{A}}^2=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}+Cu_n^2\right]dx. \tag{5}$$

Докажем, что последний предел равен

$$\int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right]dx.$$

Для этого оценим величину

$$J_n=\left|\int_\Omega\left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(u_n^2-u^2)\right]dx\right|. \tag{6}$$

Непрерывные в замкнутой области функции $A_{jk}(x)$ и $C(x)$ ограничены. Пусть $|A_{jk}(x)|\leqslant M$, $|C(x)|\leqslant M$; $M=\mathrm{const}$, тогда

$$J_n\leqslant M\int_\Omega\sum_{j,\,k=1}^m\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|dx+M\int_\Omega|u_n^2-u^2|\,dx. \tag{7}$$

Второй интеграл оценивается так:

$$\int_\Omega|u_n^2-u^2|\,dx=\int_\Omega|u_n+u|\cdot|u_n-u|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int_\Omega(u_n+u)^2\,dx\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int_\Omega(u_n-u)^2\,dx\right\}^{1/2}=\|u_n+u\|\cdot\|u_n-u\|.$$

Второй множитель стремится к нулю, а первый сходится к пределу (равному $2\|u\|$) и потому ограничен, следовательно, второе слагаемое в (7) стремится к нулю.

Сходным образом оценивается и первое слагаемое:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{m}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j,k=1}^{m}\left\{\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|+\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|\right\}.$$

Справа первые множители ограничены, а вторые стремятся к нулю, и все выражение стремится к нулю. Окончательно,

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2=\int\limits_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right]dx,$$

и формула (3) верна для идеальных элементов энергетического пространства.

Если теперь u и v — два таких элемента, то

$$[u,\ v]_{\mathfrak{A}}=\frac{1}{4}\left\{|u+v|_{\mathfrak{A}}^2-|u-v|_{\mathfrak{A}}^2\right\}.$$

Заменив нормы справа по формуле (3) и проведя элементарные упрощения, придем к формуле (2), которая тем самым установлена и для идеальных элементов.

Остается установить, что для функций пространства $H_{\mathfrak{A}}$ нормы (2) и (6.12) гл. 3 эквивалентны. Пусть $u\in H_{\mathfrak{A}}$. Из формул (2) и (1.3) вытекает, что

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2\geqslant\mu_0\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx.$$

Далее, оператор $\mathfrak{A}$ — положительно определенный, поэтому

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2\geqslant\gamma^2\|u\|^2=\gamma^2\int\limits_{\Omega}u^2\,dx;$$

складывая, находим

$$\|u\|_{W_2^{(1)}}\leqslant c|u|_{\mathfrak{A}},\quad 2c^{-2}=\min(\mu_0,\ \gamma^2).\tag{8}$$

Как было отмечено, коэффициенты A_{jk} ограничены. А тогда ограничено и наибольшее собственное число $\lambda_n(x)$ матрицы этих коэффициентов. Пусть введенная выше постоянная M столь велика, что $\lambda_n(x)\leqslant M$, тогда

$$|u|_{\mathfrak{A}}=\left\{\int\limits_{\Omega}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right)dx\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{M}\left\{\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{1/2}=\sqrt{M}\,\|u\|_{W_2^{(1)}}.\tag{9}$$

Совокупность неравенств (8) и (9) означает, что интересующие нас нормы эквивалентны.

Докажем теперь обратное утверждение: *если функция $u \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$ и если существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\mathfrak{A})$, удовлетворяющая соотношениям* (1), *то $u \in H_{\mathfrak{A}}$.*

Прежде всего ясно, что $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Далее, последовательность $\{u_n\}$ сходится в себе в энергетической метрике. Действительно,

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C(u_n - u_s)^2\right]dx. \tag{10}$$

Коэффициенты A_{jk} и C ограничены постоянной M. Пусть по-прежнему характеристические числа матрицы старших коэффициентов ограничены той же постоянной. Тогда

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 \leqslant M \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 dx + M \int_\Omega (u_n - u_s)^2\, dx,$$

что стремится к нулю при n, $s \to \infty$, в силу соотношений (1).

Энергетическое пространство — полное, поэтому в нем существует элемент w такой, что $|w - u_n|_{\mathfrak{A}} \to 0$. Первое из соотношений (1) показывает, что $w = u$. Окончательно, $u \in H_{\mathfrak{A}}$. ■

Теорема 17.2.2. *Слабое решение задачи Дирихле* (1.5) — (1.6) *является также локально суммируемым обобщенным решением уравнения* (1.5).

Используя формулу (3), приведем тождество (1.17) к виду

$$\int_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} + Cu_0\eta - f\eta\right)dx = 0; \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}. \tag{11}$$

Класс $\mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$, очевидно, содержится в $H_{\mathfrak{A}}$; будем считать, что в тождестве (11) $\eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$. Тогда $\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ и, по определению обобщенной производной,

$$\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\, dx = -\int_\Omega u_0 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right) dx.$$

Теперь из тождества (11) следует:

$$\int_\Omega (u_0 L\eta - f\eta)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega),$$

или $(u_0, L\eta) = (f, \eta)$, $\forall \eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$. Оператор L формально самосопряженный, а последняя формула совпадает (при $s = 2$) с формулой (1.4) гл. 10, определяющей локально суммируемое обобщенное решение дифференциального уравнения. ■

Следствие 17.2.1. *Слабое решение задачи* (1.5) — (1.6) *является обобщенным решением уравнения* (1.5) *в смысле теории обобщенных функций.*

§ 3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть область Ω и коэффициенты $A_{jk}(x)$, $C(x)$ удовлетворяют условиям § 1 и пусть функция $\varphi(x)$ задана на поверхности Γ — границе области Ω. Рассмотрим в области Ω задачу Дирихле для однородного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)-Cv=0 \tag{1}$$

при неоднородном краевом условии

$$v|_\Gamma=\varphi(x). \tag{2}$$

Поставим задачу о минимуме однородного квадратичного функционала

$$\Phi(v)=\int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}+Cv^2\right]dx \tag{3}$$

на множестве $D(\Phi)$ тех функций класса $W_2^{(1)}(\Omega)$, которые удовлетворяют краевому условию (2). Для того чтобы такая задача имела решение, необходимо прежде всего, чтобы множество $D(\Phi)$ было непусто. Будем предполагать поэтому, что существует хотя бы одна функция $\psi\in W_2^{(1)}(\Omega)$, *такая*, что $\psi|_\Gamma=\varphi(x)$. Сформулированное здесь предположение называется *условием продолжимости*; мы вернемся к нему в § 5.

Самую постановку задачи (2) — (3) несколько изменим: говоря, что функция $v(x)$ удовлетворяет краевому условию (2), будем понимать под этим, что

$$(v-\psi)\in H_\mathfrak{A}, \tag{4}$$

где $H_\mathfrak{A}$—энергетическое пространство задачи Дирихле (2.5) — (2.6). Положим $v(x)-\psi(x)=u(x)$. Тогда $u\in H_\mathfrak{A}$ и $\Phi(v)=\Phi(u)+2\Phi(u,\psi)+\Phi(\psi)$, где $\Phi(u,\psi)$ — билинейный функционал

$$\Phi(u,\psi)=\int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+Cu\psi\right]dx; \tag{5}$$

очевидно, $\Phi(u,\psi)$ есть линейный функционал от u. Так как $\Phi(\psi)$ есть постоянная, то ясно, что вариационная задача (2) — (3) равносильна следующей задаче: в пространстве $H_\mathfrak{A}$ найти функцию, сообщающую функционалу

$$\Phi(u)+2\Phi(u,\psi) \tag{6}$$

наименьшее значение.

Докажем, что эта последняя задача имеет решение, и притом единственное. Из условий (1.3) и (1.4) следует, что однородный квадратичный функционал Φ неотрицателен, и для него справедливо неравенство Коши

$$|\Phi(u,\psi)|\leqslant\sqrt{\Phi(u)}\sqrt{\Phi(\psi)}. \tag{7}$$

Если $u \in H_{\mathfrak{A}}$, то $\sqrt{\Phi(u)} = |u|_{\mathfrak{A}}$ (формула (2.3)) и, следовательно,

$$|\Phi(u, \psi)| \leqslant \sqrt{\Phi(\psi)}\, |u|_{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Функция ψ — фиксированная, поэтому $\sqrt{\Phi(\psi)}$ есть величина постоянная, и неравенство (8) показывает, что функционал $\Phi(u, \psi)$ ограничен в $H_{\mathfrak{A}}$.

Теперь из результатов § 9 гл. 4 вытекает, что задача о минимуме функционала (6) имеет в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ одно и только одно решение. Обозначим это решение через $u_0(x)$, и пусть $v_0(x) = u_0(x) + \psi(x)$. Очевидно, функция $v_0(x)$ решает вариационную задачу (2) — (3).

Теорема 17.3.1. *Решение вариационной задачи* (3) — (4) *есть локально суммируемое обобщенное решение уравнения* (1).

Пусть $\eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$ и t — произвольное вещественное число. Тогда $(v_0 + t\eta) \in D(\Phi)$ и потому $\Phi(v_0 + t\eta) \geqslant \Phi(v_0)$. Но тогда $d\Phi(v_0 + t\eta)/dt\,|_{t=0} = 0$, или

$$\int_\Omega \left(A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + C v_0 \eta \right) dx = 0. \tag{9}$$

Функция v_0 имеет в Ω обобщенные первые производные; в соответствии с определением

$$\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k}\, dx = - \int_\Omega v_0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) dx;$$

отсюда

$$\int_\Omega v_0 \left[- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) + C\eta \right] dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega).$$

По определению (§ 1 гл. 10), v_0 есть локально суммируемое обобщенное решение уравнения (1).

Следствие 17.3.1. *Если решение вариационной задачи* (3) — (4) *имеет в Ω непрерывные вторые производные, то оно удовлетворяет уравнению* (1) *в обычном смысле.*

§ 4. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Теорема 17.4.1. *Слабое решение задачи Дирихле в конечной области Ω для однородного уравнения Лапласа с неоднородным краевым условием есть функция, гармоническая в Ω.*

Для уравнения Лапласа $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$, и тождество (3.9) принимает вид

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}\, d\xi = 0. \tag{1}$$

Мы заменили здесь обозначение x на ξ.

Возьмем произвольную точку $x \in \Omega$ и положим в равенстве (1) $\eta = \omega_h(r)$, где $r = |\xi - x|$, а ω_h — усредняющее ядро (§ 1 гл. 2);

радиус усреднения h следует взять меньшим, чем расстояние от точки x до Γ — границы области Ω, тогда $\omega_h(r)|_\Gamma=0$. Функция $\omega_h(r)$ зависит только от разности $\xi-x$, поэтому $\frac{\partial\omega_h(r)}{\partial\xi_k}=-\frac{\partial\omega_h(r)}{\partial x_k}$, и тождеству (1) можно придать следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\omega_h(r)\,d\xi=0.$$

По теореме 2.4.1

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\omega_h(r)\,d\xi=\frac{\partial v_{0h}(x)}{\partial x_k}$$

и, следовательно,

$$\Delta v_{0h}=0. \qquad (2)$$

Если $h\to 0$, то $v_{0h}\to v_0$ в метрике $L_2(\Omega)$ (теорема 2.2.3). По теореме 11.8.2 функция $v_0(x)$ гармонична в Ω.

Теорема 17.4.2. *Если $f\in L_2(\Omega)$ и $u_0(x)$ есть слабое решение задачи*

$$-\Delta u=f(x),\quad u|_\Gamma=0, \qquad (3)$$

то $u\in W_2^{(2)}(\Omega')$, где Ω' — любая внутренняя подобласть Ω.

Построим объемный потенциал

$$\psi(x)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int\limits_\Omega f(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

Из теоремы 11.5.3 вытекает, что $\psi\in W_2^{(2)}(\Omega)$ и $-\Delta\psi=f(x)$.

Функция $u_0(x)$ решает задачу о минимуме функционала

$$F(u)=\int\limits_\Omega\left[\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\right)^2-2f(\xi)\,u(\xi)\right]d\xi,$$

поэтому, если η — произвольная функция из пространства $H_{\mathfrak{A}}$, то $dF(u_0+t\eta)\,|\,dt|_{t=0}=0$, или

$$\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}-f\eta\right]d\xi=0,\quad \forall\eta\in H_{\mathfrak{A}}.$$

Сделаем замену $u_0=v_0+\psi$:

$$\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}-f\eta\right]d\xi=0. \qquad (4)$$

В тождестве (4) положим $\eta=\omega_h(r)$, где ω_h — усредняющее ядро, $r=|\xi-x|$, x — точка области Ω и радиус усреднения h меньше, чем расстояние от точки x до Γ — границы области Ω. Второй интеграл в (4) возьмем по частям:

$$\int\limits_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}\,d\xi=-\int\limits_\Omega\eta\Delta\psi\,d\xi+\int\limits_\Gamma\eta\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,d\Gamma=\int\limits_\Omega f\eta\,d\xi;$$

интеграл по Г, очевидно, пропадает. Тождество (4) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k} d\xi = 0.$$

Те же преобразования, что и в предшествующей теореме, дают, что $\Delta v_{0h} = 0$, и, следовательно, функция v_0 гармонична в Ω. Тем более $v_0 \in W_2^{(2)}(\Omega')$. Но тогда и $u_0 = (v_0 + \psi) \in W_2^{(2)}(\Omega')$. ■

Из теорем настоящего параграфа вытекает следующее утверждение: для уравнения Лапласа, однородного или неоднородного, слабое решение задачи Дирихле является также и сильным решением.

Замечания. 1. Теорема 11.5.3 позволяет сделать также и следующее заключение: если в уравнении (3) функция $f(x)$ удовлетворяет в $\bar{\Omega}$ условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha < 1$, то вторые производные слабого решения $u_0(x)$ задачи (3) удовлетворяют тому же условию и с тем же показателем в любой внутренней замкнутой подобласти $\bar{\Omega}'$.

2. Справедливо также следующее утверждение: если $f \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, то функция u_0 — слабое решение задачи (3) — имеет всевозможные вторые обобщенные производные $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_k} \in L_p(\Omega')$. Это утверждение вытекает из свойств объемного потенциала, сформулированных в замечании к § 5 гл. 11.

§ 5. ОБ УСЛОВИИ ПРОДОЛЖИМОСТИ

Теорема 17.5.1. *Пусть конечная область $\Omega \in E_m$ ограничена поверхностью $\Gamma \in C^{(1)}$. Для того чтобы существовала функция $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющая краевому условию $\psi(x)|_\Gamma = \varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in W^{(1/2)}(\Gamma)$.*

Доказательство проведем для простейшего случая, когда $m = 2$ и Ω есть круг $\rho < 1$; через ρ и ϑ здесь обозначены полярные координаты. Если существует какая-либо функция ψ, о которой говорится в теореме, то существует и гармоническая функция с тем же свойством, Действительно, если ψ существует, то вариационная задача (3.3) — (3.4) имеет слабое решение $v_0(x)$, принадлежащее классу $W_2^{(1)}(\Omega)$ и совпадающее с $\varphi(x)$ на границе Γ области; по теореме 17.4.1 это слабое решение гармонично в Ω.

На окружности $\Gamma: \rho = 1$ положение точки определяется заданием полярного угла ϑ, поэтому будем писать $\varphi(\vartheta)$ вместо $\varphi(x)$. Разложим $\varphi(\vartheta)$ в ряд Фурье, и пусть

$$\varphi(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \tag{1}$$

Докажем прежде всего, что условие $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ равносильно следующему:

$$B(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty; \tag{2}$$

при этом

$$c_1[a_0^2 + B(\varphi)] \leqslant \|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}} \leqslant c_2[a_0^2 + B(\varphi)], \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Для того чтобы $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ необходимо и достаточно (см. формулы (1.2) и (1.3) гл. 3), чтобы

$$J(\varphi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\varphi(\Theta) - \varphi(\vartheta)]^2}{(\Theta - \vartheta)^2}\, d\Theta\, d\vartheta < \infty.$$

Полагая $\Theta = \vartheta + h$ и пользуясь периодичностью функции φ, получаем

$$J(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^{2\pi} [\varphi(\vartheta + h) - \varphi(\vartheta)]^2\, d\vartheta \right\} dh. \tag{4}$$

Используя разложение (1), получаем для $J(\varphi)$ выражение

$$J(\varphi) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{h^2}\, dh,$$

или, если сделать замену $\frac{nh}{2} = t$,

$$J(\varphi) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n^2 + b_n^2) \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt.$$

Положив

$$c' = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt, \quad c'' = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \pi,$$

получим

$$2\pi c' B(\varphi) \leqslant J(\varphi) \leqslant 2\pi c'' B(\varphi); \tag{5}$$

неравенство (5) показывает, что включение $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ и неравенство (2) равносильны.

Норму в $W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ можно ввести по формуле

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{(1/2)}(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + J(\varphi); \tag{6}$$

эта норма, очевидно, эквивалентна норме (1.3) гл. 3, если в последней положить $p = 2$, $l = 0$, $\lambda = 1/2$. Формула (3) вытекает из (5) и (6).

Введем в рассмотрение функции:

$$\varphi_n(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \tag{7}$$

$$\psi_n(\rho, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \tag{8}$$

$$\psi(\rho, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta). \tag{9}$$

Функции φ_n непрерывны на Γ, а функции $\psi_n(\rho, \vartheta)$ гармоничны при $\rho < 1$ и удовлетворяют краевому условию $\psi_n(1, \vartheta) = \varphi_n(\vartheta)$. Очевидно также, что $\psi_n \in W_2^{(1)}(\Omega)$, а $\varphi_n(\vartheta)$ можно рассматривать как значения $\psi_n(1, \vartheta)$ в соответствии с теоремой 3.3.2. Это значение будем называть *следом функции* $\psi_n(\rho, \vartheta)$ при $\rho = 1$.

Нетрудно убедиться, что $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы был конечным интеграл Дирихле

$$D(\psi) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta^2}\right)^2\right] d\vartheta\right\} \rho\, d\rho.$$

Последний интеграл легко вычисляется и приводит к соотношению

$$D(\psi) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n^2 + b_n^2) = \pi B(\varphi), \tag{10}$$

из которого видно, что величина $D(\psi)$ конечна.

Будучи функцией из $W_2^{(1)}(\Omega)$, функция $\psi(\rho, \vartheta)$ имеет след, который обозначим через $\varphi_0(\vartheta)$. По уже упомянутой теореме 3.3.2 оператор, который сопоставляет функции ее след, действует ограниченно из $W_2^{(1)}(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$. Существует, следовательно, такая постоянная c, что

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant c\,\|\psi_n - \psi\|^2_{W_2^{(1)}} = cD(\psi - \psi_n) + c\,\|\psi - \psi_n\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= c\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,(a_k^2 + b_k^2) + \frac{c\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Одновременно $\|\varphi_n - \varphi\|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда $\varphi_0 \equiv \varphi$, и функция $\varphi(\vartheta)$ удовлетворяет условию продолжимости.

Обратно, пусть $\varphi(\vartheta)$ удовлетворяет условию продолжимости: существует гармоническая функция $\psi(\rho, \vartheta) \in W_2^{(1)}(\Omega)$, след которой $\psi(1, \vartheta) = \varphi(\vartheta)$. По теореме 3.3.2 функция $\varphi(\vartheta)$ суммируема с любой степенью и, в частности, $\varphi \in L_2(\Gamma)$. Напишем для функции $\psi(\rho, \vartheta)$ ее ряд (9) и определим функции $\varphi_n(\vartheta)$ и $\psi_n(\rho, \vartheta)$ формулами (7) и (8). Положим еще

$$\varphi_0(\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta), \tag{11}$$

где a_0, a_k, b_k — коэффициенты ряда (9). Как и выше, найдем, что $\|\varphi_n - \varphi_0\|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|\varphi_n - \varphi\|_{L_2(\Gamma)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; отсюда $\varphi_0 \equiv \varphi$. Формула (10) показывает теперь, что $B(\varphi) < \infty$ и следовательно, $\varphi \in W_2^{(1/2)}(\Gamma)$. Для рассматриваемого случая теорема доказана полностью. ■

Для определенности будем рассматривать задачу Дирихле для уравнения Лапласа; относительно области Ω, в которой строится решение, будем предполагать, что она конечная и имеет кусочно гладкую границу. Заметим, что функцию Грина можно строить для значительно более общих уравнений и для других краевых задач.

Рассмотрим задачу

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0; \quad f \in L_2(\Omega). \tag{1}$$

Оператор этой задачи, как и в предшествующих параграфах, обозначим через $\mathfrak{A}$. Как было выяснено, $\mathfrak{A}$ — положительно определенный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$; если $\{\omega_n(x)\}$ — система функций, полная и ортонормированная в энергетическом пространстве $H_{\mathfrak{A}}$, то (см. § 1) слабое решение $u_0(x)$ задачи (1) дается формулой

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \int_{\Omega} f(\xi)\, \omega_n(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Функции класса $C^{(2)}(\overline{\Omega})$, обращающиеся в нуль на границе $\partial\Omega$, образуют область $D(\mathfrak{A})$ определения оператора $\mathfrak{A}$; отсюда следует, что множество этих функций плотно в $H_{\mathfrak{A}}$ и функции ω_n можно выбрать из указанного множества. Поэтому ниже будем считать, что $\omega_n \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ и, конечно, $\omega_n(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$.

Введем в рассмотрение пространство основных функций $D(\Omega) = \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ и соответствующее пространство обобщенных функций $D'(\Omega)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\xi)\, \omega_n(x), \tag{3}$$

в котором будем рассматривать x как параметр, а ξ как независимую переменную.

Теорема 17.6.1. *При любом фиксированном $x \in \Omega$ ряд (3) представляет собой обобщенную функцию из пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$, которая на любую основную функцию действует по формуле* (2).

Пусть $f \in \mathscr{D}(\Omega)$; тем более $f \in L_2(\Omega)$ и ряд (2) дает решение задачи (1). Достаточно доказать, что сумма этого ряда при любом фиксированном $x \in \Omega$ представляет собой линейный непрерывный функционал над $\mathscr{D}(\Omega)$.

Решение задачи (1) можно строить следующим образом. Построим объемный потенциал

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{\Omega} f(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi. \tag{4}$$

Плотность $f(\xi)$ этого потенциала, очевидно, суммируема с любой степенью, и из теоремы 11.5.2 следует, что функция $\psi(x)$ непрерывна. Докажем, что $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$. Действительно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega f(\xi) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi;$$

интегрируя по частям и принимая во внимание, что f финитна в Ω, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi.$$

Таким образом, производная $\partial\psi/\partial x_j$ есть объемный потенциал с финитной плотностью $\partial f/\partial \xi_j$. Прежние рассуждения показывают, что $\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, или $\psi \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, и

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j\, \partial x_k} = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j\, \partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi.$$

Аналогично найдем, что при любом мультииндексе α будет $\psi \in C^{(|\alpha|)}(\Omega)$ и

$$D_x^\alpha \psi(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega D_\xi^\alpha f(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi. \tag{5}$$

Утверждение доказано.

Положим теперь $u_0(x) = \psi(x) - v(x)$, где $u_0(x)$ — слабое решение задачи (1). Тогда $v(x)$ есть слабое решение задачи $\Delta v = 0$, $(v - \psi) \in H_{\mathfrak{A}}$. Как было доказано в § 4, функция v гармонична в Ω. Теперь ясно, что $u_0(x) \in C^{(\infty)}(\Omega)$; тем более эта функция непрерывна в Ω и потому вполне определена в каждой точке $x \in \Omega$. Это означает, что ряд (3), рассматриваемый при фиксированном значении $x \in \Omega$, приводит каждой основной функции f в соответствие вполне определенное число — значение $u_0(x)$ в этой точке. Таким образом, ряд (3) при фиксированном $x \in \Omega$ определяет функционал (очевидно, линейный) в $\mathscr{D}(\Omega)$.

Остается доказать, что функционал (3) непрерывен в $D(\Omega)$. Пусть $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D} f(x)$. Положим

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_n, \omega_k)\, \omega_k(x),$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega f_n(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi,$$

$$v_n(x) = \psi_n(x) - u_n(x).$$

Ядро со слабой особенностью r^{2-m} порождает оператор, ограниченный в $C(\overline{\Omega})$ (теорема 1.3.1), поэтому $\psi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x)$ равномерно и, тем более, к каждой точке области Ω. Далее, функция $v_n(x) - v(x)$ есть слабое решение задачи $\Delta(v_n - v) = 0$, $[(v_n - v) - (\psi_n - \psi)] \in H_{\mathfrak{A}}$.

Докажем, что $v_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} v(x)$ при любом фиксированном $x \in \Omega$. Обозначим $v_n - v = w$, $\psi_n - \psi = \varphi$, так что $\Delta w = 0$, $(w - \varphi) \in H_{\mathfrak{A}}$. Тогда функция $z = w - \varphi$ реализует минимум функционала (см. § 3) $\Phi(z) + 2\Phi(z, \varphi)$, где Φ — интеграл Дирихле; указанная функция при любом $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет тождеству $[z, \eta]_{\mathfrak{A}} = -\Phi(\varphi, \eta)$. Полагая здесь $\eta = z$, получим $|z|_{\mathfrak{A}}^2 = -\Phi(z, \varphi) \leqslant \sqrt{\Phi(z)}\sqrt{\Phi(\varphi)} = \sqrt{\Phi(\varphi)}\,|z|_{\mathfrak{A}}$, отсюда $|z|_{\mathfrak{A}} \leqslant \sqrt{\Phi(\varphi)}$, или $\sqrt{\Phi(w - \varphi)} \leqslant \sqrt{\Phi(\varphi)}$. Обозначая через $\| \ \|$ норму в $L_2(\Omega)$, имеем далее $\|w\| = \|z + \varphi\| \leqslant \|z\| + \|\varphi\|$. Пусть γ^2 — нижняя грань оператора $\mathfrak{A}$, тогда $\|z\| \leqslant \frac{1}{\gamma}|z|_{\mathfrak{A}} \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)}$ и $\|w\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)} + \|\varphi\|$. Функция w гармонична в Ω, поэтому, если δ — расстояние от x до $\partial\Omega$ и радиус усреднения $h < \delta/2$, то (см. § 6 гл. 11)

$$w(x) = w_h(x) = \int_{\Omega} w(\xi)\,\omega_h(r)\,d\xi.$$

Считая точку x и радиус h фиксированными, находим отсюда

$$|w(x)| \leqslant c\|w\| \leqslant c\left(\frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\varphi)} + \|\varphi\|\right); \quad c = \text{const},$$

или, если заменить w и φ их значениями,

$$|v_n(x) - v(x)| \leqslant c\left(\frac{1}{\gamma}\sqrt{\Phi(\psi_n - \psi)} + \|\psi_n - \psi\| = \right.$$

$$= \frac{c}{\gamma}\left\{\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right)^2 d\xi\right\}^{1/2} + c\left\{\int_{\Omega}(\psi_n - \psi)^2\,d\xi\right\}^{1/2}.$$

Из формулы (5) следует, что правая часть последнего соотношения стремится к нулю при $n \to \infty$ и потому $v_n(x) \to v(x)$. В то же время, как мы видели выше, $\psi_n(x) \to \psi(x)$. Теперь

$$u_n(x) = \psi_n(x) - v_n(x) \to \psi(x) - v(x) = u_0(x). \blacksquare$$

Обобщенная функция (3) называется *функцией Грина* задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω. Функцию Грина обычно обозначают через $G(x, \xi)$:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\xi)\,\omega_n(x); \tag{6}$$

очевидно, функция Грина симметрична

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \tag{7}$$

и равна нулю на границе области:

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Грина. Пусть $f(x)$ — произвольная основная функция. По определению производных от обобщенных функций имеем

$$(\Delta_\xi G(x, \xi), f(\xi)) = (G(x, \xi), \Delta_\xi f(\xi)).$$

Правая часть этого равенства есть функция от x, лапласиан которой равен $-\Delta f(x)$ и которая обращается в нуль на $\partial\Omega$. Но тогда эта функция равна $-f(x) = (-\delta(x-\xi), f(\xi))$. Таким образом,

$$(\Delta_\xi G(x, \xi), f(\xi)) = (-\delta(x-\xi), f(\xi)), \quad \forall f \in D(\Omega)$$

и, следовательно,

$$-\Delta_\xi G(x, \xi) = \delta(x-\xi). \tag{9}$$

Отсюда видно, что $G(x, \xi)$ есть то из сингулярных решений оператора $-\Delta$, которое обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Положим теперь

$$G(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - g(x, \xi)\right]. \tag{10}$$

Функция $g(x, \xi)$ является обобщенным решением однородного уравнения Лапласа:

$$\Delta_\xi g(x, \xi) = 0; \tag{11}$$

при этом

$$g(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Функция $g(x, \xi)$, очевидно, симметрична, поэтому также

$$\Delta_x g(x, \xi) = 0, \tag{13}$$

а краевое условие (12) выполняется и при $\xi \in \partial\Omega$.

В § 8 гл. 11 было указано, что обобщенное решение однородного уравнения Лапласа в некоторой области есть функция, гармоническая в данной области. Отсюда следует, что $g(x, \xi)$ можно определить как функцию, которая при фиксированном $\xi \in \Omega$ гармонична в Ω относительно x, а при фиксированном $x \in \Omega$ гармонична в Ω относительно ξ, и удовлетворяет краевому условию (12). Если $\partial\Omega$ — ляпуновская поверхность, то функцию $g(x, \xi)$ можно построить (см. гл. 15) как потенциал двойного слоя, плотность которого удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению. Если Ω имеет кусочно гладкую границу, то $g(x, \xi)$ можно найти как слабое решение задачи (12)—(13). Такое решение существует: в качестве функции $\psi \in W_2^{1}(\Omega)$ (см. § 3) можно взять произведение $r^{2-m}\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$, где ε — достаточно малое положительное число, а $\eta \in C^{(\infty)}(0, \infty)$ и

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & t \geqslant 2. \end{cases}$$

Как показывает равенство (12), $g(x, \xi) > 0$, $x \in \partial\Omega$. По принципу максимума $g(x, \xi) > 0$ всюду в Ω. Вырежем теперь из области Ω шар $r = |x - \xi| < \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε. В оставшейся области функция Грина $G(x, \xi)$ гармонична, причем на части границы $r = \varepsilon$, очевидно, $G(x, \xi) > 0$, а на другой части границы — на $\partial\Omega$, $G(x, \xi) = 0$. По принципу максимума $G(x, \xi) \geqslant 0$. Отсюда следует теперь, что $0 \leqslant g(x, \xi) \leqslant r^{2-m}$ и, наконец,

$$0 \leqslant G(x, \xi) \leqslant \frac{1}{(m-2)|S_1|} \frac{1}{r^{m-2}}. \tag{14}$$

Для шара функция Грина фактически уже нами построена. Именно, рассмотрим функцию $(R/|x|)^{m-2}/r'^{2-m}$ (обозначения см. § 3 гл. 12). Эта функция гармонична в Ω относительно точки ξ и, как показано в § 3 гл. 12, совпадает с r^{2-m}, если $\xi \in S_R$. Отсюда ясно, что для шара радиуса R

$$g(x, \xi) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}} \tag{15}$$

и, следовательно,

$$G(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)|S_1|}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}}\right]. \tag{16}$$

Нетрудно проверить непосредственно в данном случае симметричность функции Грина. Достаточно проверить, что $g(x, \xi) = g(\xi, x)$, а это в свою очередь сводится к установлению тождества $|x|^2 |\xi - x'|^2 = |\xi|^2 |x - \xi'|^2$, где ξ' — точка, симметричная с точкой ξ относительно сферы S_R. Последнее тождество легко сводится к такому:

$$|x|^2 (\xi, x') = |\xi|^2 (\xi', x). \tag{17}$$

Но $x' = x|x'|/|x|$, $\xi' = \xi|\xi'|/|\xi|$, и обе части тождества (17) равны одной и той же величине $R^2(x, \xi)$.

Пусть граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω такова, что при фиксированном $x \in \Omega$ функция $g(x, \xi) \in C^2(\overline{\Omega})$, и пусть гармоническая в Ω функция $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$. По формуле (6.10) гл. 9 получаем, что

$$0 = \int_\Gamma \left(u \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d_\xi \Gamma.$$

Вычтем это из формулы (3.5) гл. 11, дающей интегральное представление гармонической функции, тогда

$$u(x) = \int_\Gamma u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu} d_\xi \Gamma. \tag{18}$$

Формула (18) решает задачу Дирихле для однородного уравнения Лапласа при неоднородном краевом условии; справедливость этой формулы можно установить в условиях, более общих, нежели указанные выше.

§ 7. ЗАДАЧА НЕЙМАНА С ОДНОРОДНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Как и в § 1, рассмотрим формально самосопряженное эллиптическое уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=f(x), \tag{1}$$

решение которого ищется в конечной области $\Omega\subset E_m$ с кусочно гладкой границей Г. Будем предполагать, что $A_{jk}\in C^{(1)}(\bar\Omega)$, $C\in C(\bar\Omega)$, и что уравнение (1) в $\bar\Omega$ не вырождается, так что для любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ справедливо неравенство

$$A_{jk}(x)\,t_jt_k\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}t_k^2, \tag{2}$$

где μ_0 — положительная постоянная.

Для уравнения (1) поставим однородное краевое условие задачи Неймана

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\Big|_\Gamma=0; \tag{3}$$

здесь ν — внешняя нормаль к Г. Оператор, порождаемый задачей Неймана, обозначим через $\mathfrak{N}$. За область его определения $D(\mathfrak{N})$ примем множество функций из $C^{(2)}(\bar\Omega)$, удовлетворяющих условию (3); на этом множестве оператор $\mathfrak{N}$ действует по формуле

$$\mathfrak{N}u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu.$$

Будем рассматривать $\mathfrak{N}$ как оператор в $L_2(\Omega)$ и докажем, что он симметричен. Его область определения плотна в $L_2(\Omega)$, потому что она, очевидно, содержит плотное в $L_2(\Omega)$ множество финитных функций.

Составим скалярное произведение

$$(\mathfrak{N}u,\ v)=-\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx+\int_\Omega Cuv\,dx;\quad u,\ v\in D(\mathfrak{N}).$$

Первый интеграл возьмем по частям:

$$(\mathfrak{N}u,\ v)=-\int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma+$$
$$+\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega Cuv\,dx.$$

В силу краевого условия (3) первый интеграл справа исчезает, а два оставшихся очевидным образом симметричны. Тем самым симметричность оператора $\mathfrak{N}$ доказана. Попутно получается формула

$$(\mathfrak{N}u,\ v)=\int_\Omega\left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cuv\right]dx. \tag{4}$$

Положим в этой формуле $v=u$:

$$(\mathfrak{N}u,\ u)=\int\limits_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right]dx. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\Omega}A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\geqslant\mu_0\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx\geqslant 0,$$

и легко получается следующее достаточное условие положительной определенности оператора $\mathfrak{N}$:

$$C(x)\geqslant C_0=\mathrm{const}>0; \tag{6}$$

в этом случае $(\mathfrak{N}u,\ u)\geqslant C_0\int\limits_{\Omega}u^2\,dx=C_0\|u\|^2$, а это и есть неравенство положительной определенности со значением постоянной $\gamma=\sqrt{C_0}$. Естественно, в случае таких $C(x)$ применима ранее развитая теория, и задача Неймана имеет одно и только одно слабое решение.

Пусть теперь $C(x)\equiv 0$, так что

$$\mathfrak{N}u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{7}$$

и

$$(\mathfrak{N}u,\ u)=\int\limits_{\Omega}A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx; \tag{8}$$

краевое условие (1.3) остается без изменения.

В рассматриваемом случае оператор $\mathfrak{N}$ не только не положительно определенный, но даже не положительный. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию $u_0(x)\equiv 1$. Она имеет все производные и удовлетворяет краевому условию (3), следовательно, $u_0\in D(\mathfrak{N})$; очевидно также, что $\|u_0\|>0$. В то же время $(\mathfrak{N}u_0,\ u_0)=0$, что было бы невозможно, если бы $\mathfrak{N}$ был положительным оператором.

Задача Неймана

$$\mathfrak{N}u=f \tag{9}$$

или, в более подробной записи,

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x),\quad A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\Big|_{\Gamma}=0 \tag{9_1}$$

неразрешима, если функция $f(x)$ не подчинена некоторому специальному условию, которое мы сейчас выясним.

Допустим, что задача (9) имеет решение $u\in D(\mathfrak{N})$. Обе части дифференциального уравнения (9_1) проинтегрируем по Ω. Взяв интеграл слева по частям и воспользовавшись краевым условием (9_1), получим искомое условие

$$\int\limits_{\Omega}f(x)\,dx=(f,\ 1)=0. \tag{10}$$

Таким образом, целесообразно рассматривать уравнение (3) не при произвольных $f \in L_2(\Omega)$, а лишь при таких f, которые принадлежат подпространству, ортогональному к единице. Это подпространство будем обозначать через $\tilde{L}_2(\Omega)$. Полученное только что условие (10) допускает и такую формулировку: при $C(x) \equiv 0$ оператор $\mathfrak{N}$ преобразует любую функцию из $D(\mathfrak{N})$ в функцию из $\tilde{L}_2(\bar{\Omega})$. С другой стороны, если задача (9) имеет решение, то оно не единственное: если функция $u_0(x)$ решает задачу (9), то ее же решает и функция $u_0(x)+c$, где c — произвольная постоянная. Других решений не существует. Действительно, если $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — два решения задачи (9), то разность $v(x)=u_0(x)-u_1(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $\mathfrak{N}v=0$. По формуле (5), в которой следует положить $C(x)\equiv 0$, имеем $\int\limits_\Omega A_{jk} \times \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx=0$. Матрица коэффициентов A_{jk} положительно определенная, поэтому необходимо $\frac{\partial v}{\partial x_k}\equiv 0$, $k=1, 2, \ldots, m$ и $v(x)\equiv\mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Решение задачи Неймана можно сделать единственным, если потребовать, чтобы оно принадлежало введенному выше подпространству $\tilde{L}_2(\Omega)$, — тогда постоянная c определяется единственным образом. Последнее требование можно сформулировать так: мы сужаем оператор $\mathfrak{N}$, заменяя его область определения $D(\mathfrak{N})$ более узкой областью $D(\mathfrak{N})\cap\tilde{L}_2(\Omega)$. Этот суженный оператор будем обозначать через $\mathfrak{N}_0$. Его область определения $D(\mathfrak{N}_0)=D(\mathfrak{N})\cap\tilde{L}_2(\Omega)$, а область значений по-прежнему принадлежит $\tilde{L}_2(\Omega)$. Таким образом, как область определения, так и область значений оператора $\mathfrak{N}_0$ принадлежат подпространству $\tilde{L}_2(\Omega)$. Но тогда $\tilde{L}_2(\Omega)$ можно рассматривать как пространство, в котором действует оператор $\mathfrak{N}_0$. Будем предполагать далее, что область Ω есть объединение конечного числа областей, каждая из которых — звездная относительно некоторого шара. В этом предположении докажем, что в пространстве $\tilde{L}_2(\Omega)$ оператор $\mathfrak{N}_0$ — положительно определенный. Действительно, для этого оператора очевидным образом остается верной формула (5), которая в данном случае принимает вид

$$(\mathfrak{N}_0 u, u)=\int\limits_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx. \tag{11}$$

По неравенству (2)

$$(\mathfrak{N}_0 u, u)\geq \mu_0\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{12}$$

Напишем неравенство Пуанкаре (§ 6 гл. 3)

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \leqslant C\left[\left(\int\limits_\Omega u\,dx\right)^2 + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right].$$

Для функций класса $\tilde{L}_2(\Omega)$ первый интеграл справа исчезает, и неравенство Пуанкаре принимает вид

$$\|u\|^2 = \int\limits_\Omega u^2\,dx \leqslant C\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Подставив это в соотношение (12), получаем неравенство

$$(\mathfrak{N}_0 u,\ u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2;\quad \gamma^2 = \frac{\mu_0}{C}, \tag{13}$$

которое показывает, что оператор $\mathfrak{N}_0$ положительно определенный в $\tilde{L}_2(\Omega)$. Отсюда следует, что задача Неймана (9_1) имеет в $\tilde{L}_2(\Omega)$ одно и только одно слабое решение, если выполнено условие (10). Это решение, как всегда, есть элемент соответствующего энергетического пространства $H_{\mathfrak{N}_0}$. Повторяя рассуждения § 2, нетрудно доказать, что $H_{\mathfrak{N}_0}$ вкладывается в $W_2^{(1)}(\Omega)$ и что энергетические произведение и норма в $H_{\mathfrak{N}_0}$ определяются формулами

$$[u,\ v]_{\mathfrak{N}_0} = \int\limits_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx,\quad |u|^2_{\mathfrak{N}_0} = \int\limits_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx.$$

Слабое решение задачи Неймана реализует минимум функционала

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_0} - 2(u,\ f) = \int\limits_\Omega \left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - 2uf\right)dx, \tag{14}$$

заданного на $H_{\mathfrak{N}_0}$. Легко доказать также, что слабое решение задачи Неймана есть обобщенное решение дифференциального уравнения (9_1).

Дальнейшее исследование проведем для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(x). \tag{15}$$

Краевое условие принимает более простую форму

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0. \tag{16}$$

По-прежнему сохраняются требования $\int\limits_\Omega f(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\,dx = 0$.

Как и в общем случае, существует слабое решение $u_0(x)$ задачи (15)—(16); оно реализует минимум функционала

$$F(u) = \int\limits_\Omega \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2uf\right]dx;\quad u \in H_{\mathfrak{N}_0}. \tag{17}$$

Если $\eta(x)$ — произвольная функция из $H_{\mathfrak{N}_0}$, то $F(u_0+t\eta) \geqslant F(u_0)$ и $\frac{d}{dt}F(u_0+t\eta)|_{t=0}=0$. Это дает тождество

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}-f\eta\right)dx=0, \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}. \tag{18}$$

Тождество (18) остается в силе, если заменить в нем η любой функцией класса $C^{(2)}(\bar\Omega)$, удовлетворяющей условию (10). Действительно, пусть ζ такая функция. Положим $\eta=\zeta-\frac{1}{|\Omega|}\times$ $\times\int_\Omega \zeta\,dx=\zeta-c$. Тогда $\eta \in D(\mathfrak{N}_0) \subset H_{\mathfrak{N}_0}$ и по соотношениям (10) и (18)

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \zeta}{\partial x_k}-f\zeta\right)dx=\int_\Omega \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k}-f\eta\right)dx+c\int_\Omega f\,dx=0. \tag{19}$$

Теорема 17.7.1. *Если $f \in \tilde{L}_2(\Omega)$, то $u_0 \in W_2^{2}(\Omega')$, где Ω' — любая внутренняя подобласть Ω.*

Введем объемный потенциал

$$\psi(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Omega f(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi;$$

как известно, $\psi \in W_2^{2}(\Omega)$ и $-\Delta\psi=f(x)$. Пусть $x \in \Omega'$ и положительное число h меньше, чем кратчайшее расстояние между точками границ $\partial\Omega$ и $\partial\Omega'$. В тождестве (19) заменим обозначение x на ξ, положим $\zeta=\omega_h(r)$, где $r=|\xi-x|$ и ω_h — усредняющее ядро, и сделаем замену $u_0=\psi+v_0$. Простые преобразования приводят тогда тождество (19) к виду $\Delta v_{0h}(x)=0$. Дальнейшие рассуждения протекают, как в теореме 17.4.2, и приводят к тому же результату. ■

Для слабого решения задачи Неймана верны замечания 1, 2 § 4.

§ 8. ЗАДАЧА НЕЙМАНА С НЕОДНОРОДНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma=h(x), \ \Gamma=\partial\Omega. \tag{2}$$

Будем считать, что Ω есть объединение конечного числа звездных областей и что коэффициенты A_{jk} подчинены условиям § 1. Допустим сначала, что задача (1)—(2) имеет решение $u_0 \in C^{(2)}(\bar\Omega)$. Тождество $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial xh}\right)=0$ проинтегрируем по Ω интеграл слева преобразуем по формуле Остроградского. Приняв во внимание краевое условие (2), получим необходимое условие разрешимости задачи

$$\int_{\Gamma} h(x)\,d\Gamma = 0. \tag{3}$$

Далее, если решение $u_0(x)$ задачи (1)—(2) существует, то оно не единственно: наряду с $u_0(x)$ решением является и $u_0(x)+c$, где c — любая постоянная. Чтобы сделать решение единственным, подчиним его условию

$$\int_{\Omega} u_0(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Легко доказать, что если существует решение $u_0 \in C^{(2)}(\Omega)$, то $u_0(x)$ есть также решение задачи о минимуме функционала

$$F(u) = \int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx - 2\int_{\Gamma} h(x)\,u(x)\,dx \tag{5}$$

на множестве функций из $C^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих тождеству (4).

Докажем, что справедливо и обратное утверждение: если функция $u_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ решает указанную вариационную задачу, то эта функция решает также задачу Неймана (1)—(2). Пусть функция $u_0(x)$ решает нашу вариационную задачу и пусть $\eta(x)$ — произвольная функция класса $C^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству (4). Тогда при любом вещественном t справедливо неравенство $F(u_0+t\eta) \geqslant F(u_0)$. Отсюда вытекает, что $\frac{d}{dt}F(u_0+t\eta)\big|_{t=0} = 0$, или

$$\int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\,dx - \int_{\Gamma} h(x)\,\eta(x)\,d\Gamma = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем отсюда

$$-\int_{\Omega} \eta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right)dx + \int_{\Gamma} \eta\left[A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j) - h\right]d\Gamma = 0. \tag{6}$$

Пусть $\zeta(x)$ — произвольная функция класса $C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Положим $a = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\zeta(x)\,dx$. Функция $\zeta(x)-a$ удовлетворяет условию (4). Положим в (6) $\eta(x) = \zeta(x) - a$:

$$-\int_{\Omega} \zeta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right)dx + \int_{\Gamma} \zeta\left[A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j) - h\right]d\Gamma +$$

$$+a\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right)dx - a\int_{\Gamma}\left[A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j) - h\right]d\Gamma = 0.$$

Третий интеграл преобразуем по формуле Остроградского. В силу равенства (3) третий и четвертый интегралы в сумме исчезают, и мы приходим к тождеству

$$-\int_{\Omega} \zeta \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx + \int_{\Gamma} \zeta \left[A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j) - h\right] d\Gamma = 0,$$
$$\forall \zeta \in C^{(1)}(\bar{\Omega}). \quad (7)$$

Заменим в (7) обозначение x на ξ и примем $\zeta = \omega_{h_0}(r)$, $r = |\xi - x|$, где $x \in \Omega$ и h_0 меньше, чем расстояние от x до Γ. Тождество (7) преобразуется к такому: $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right]_{h_0} = 0$. Устремим h_0 к нулю. Усредняемая функция непрерывна, и по теореме 2.2.1 $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right) = 0$. Таким образом, функция $u_0(x)$ — решение вариационной задачи — удовлетворяет уравнению (1).

В тождестве (7) объемный интеграл исчезает, и оно сводится к следующему:

$$\int_{\Gamma} \zeta(\xi)\left[A_{jk}(\xi)\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k}\cos(\nu, x_j) - h(\xi)\right] d_\xi\Gamma = 0.$$

Выберем в качестве x произвольную точку на Γ, но так, чтобы в этой точке и в ее окрестности поверхность Γ была гладкой, и примем опять $\zeta = \omega_{h_0}(r)$. Обозначая через Γ' ту часть Γ, которая заключена в шаре $r < h_0$, получаем равенство

$$\int_{\Gamma'} \omega_{h_0}(r)\left[A_{jk}(\xi)\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k}\cos(\nu,\ x_j) - h(\xi)\right] d_\xi\Gamma = 0.$$

На Γ' ядро $\omega_{h_0}(r)$ положительно, поэтому выражение в скобке должно менять знак; будучи непрерывным, оно обращается в нуль в некоторой точке x', $|x' - x| < h_0$. Устремляя h_0 к нулю и пользуясь опять непрерывностью выражения в скобках, найдем, что это выражение равно нулю в точке x, и функция $u_0(x)$ удовлетворяет также краевому условию (2).

Сказанное выше делает естественным такое определение: *слабым решением задачи Неймана* (1)—(2) называется функция $u_0 \in W_2^{1}(\Omega)$, которая реализует минимум функционала (5) в классе функций из $W_2^{1}(\Omega)$, удовлетворяющих условию (4).

Докажем, что слабое решение задачи Неймана существует, если $h(x)$ удовлетворяет условию (3) и $h \in L_{q'}(\Gamma)$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ и $q < \frac{2(m-1)}{m-2}$. Норму в $W_2^{(1)}(\Omega)$ введем по формуле

$$\|u\|^2_{2,1} = \left(\int_{\Omega} u\, dx\right)^2 + \int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx; \quad (8)$$

легко доказать, что норма (8) эквивалентна норме (6.8) гл. 3. Для функций, удовлетворяющих условию (4), получаем

$$\|u\|^2_{2,1} = \int_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx,$$