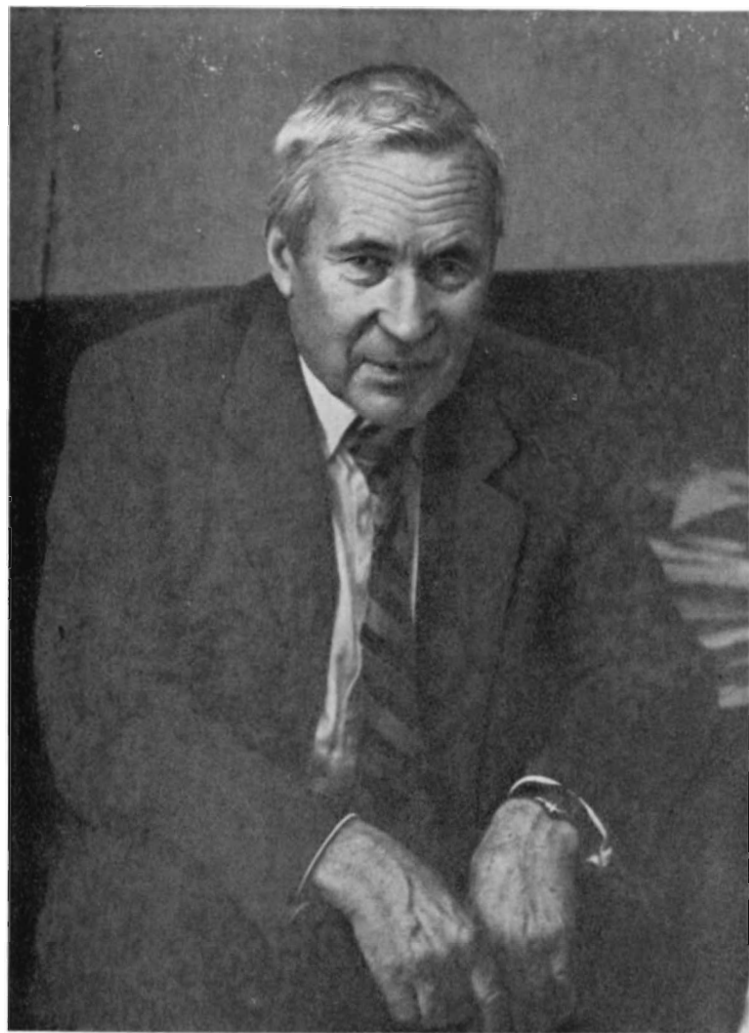


АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Отделение математики



Albert Einstein

А.Н. КОЛМОГОРОВ

Избранные
труды

МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

Ответственный редактор
академик
С. М. НИКОЛЬСКИЙ



МОСКВА
«НАУКА»

1985

Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика.— М.: Наука, 1985.— 470 с.

Настоящее издание представляет собой первую книгу избранных трудов А. Н. Колмогорова. В ней сосредоточены исследования по тригонометрическим и ортогональным рядам, теории меры и интеграла, теории приближений, математической логике, дифференциальным уравнениям, геометрии, топологии, функциональному анализу, суперпозициям функций, дескриптивной теории множеств, теории турбулентности, классической механике и некоторым другим вопросам.

Редакционная коллегия:

Н. Н. БОГОЛЮБОВ (главный редактор),
С. М. НИКОЛЬСКИЙ, А. М. ОБУХОВ, Ю. В. ПРОХОРОВ,
В. М. ТИХОМИРОВ, А. Н. ШИРЯЕВ

Составитель

В. М. ТИХОМИРОВ

Рецензенты:

Б. В. ГНЕДЕНКО, А. А. ГОНЧАР

ОТ РЕДАКЦИИ

Президиум АН СССР принял постановление издать в двух книгах избранные труды одного из крупнейших математиков современности — Андрея Николаевича Колмогорова.

Творчество А. Н. Колмогорова необыкновенно многогранно. В его трудах по теории тригонометрических и ортогональных рядов, теории меры и интеграла, математической логике, теории приближений, геометрии, топологии, функциональному анализу, классической механике, эргодической теории, суперпозиции функций, теории информации были решены принципиальные и фундаментальные проблемы и поставлены новые вопросы, вызвавшие к жизни огромное число исследований. А. Н. Колмогоров является одним из создателей советской школы теории вероятностей, математической статистики и теории турбулентности. В этих областях ему довелось получить ряд основополагающих результатов, обрамленных огромным числом приложений к механике, геофизике, языкознанию, теории стрельбы, биологии и другим областям знания.

В настоящее издание вошли важнейшие журнальные публикации А. Н. Колмогорова, относящиеся к математике и естествознанию. За его пределами остались философские и педагогические работы А. Н. Колмогорова, статьи, написанные для «Большой Советской Энциклопедии», труды по стиховедению и различным приложениям математики, а также публикации по общим вопросам.

Отбор материала для настоящего издания и разбивка его были проведены автором.

В первой книге собраны труды по математике (за исключением тех, которые относятся к теории вероятностей и теории информации), а также — по турбулентности и классической механике. Вторая книга посвящена теории вероятностей и теории информации.

Внутри каждой книги работы располагаются в хронологическом порядке. Они были разбиты автором на отдельные циклы. К большинству циклов написаны комментарии, в которых делается попытка отразить влияние творчества А. Н. Колмогорова на развитие современной математики. Эти комментарии, как правило, предваряются краткими вступительными словами автора.

Подготовка первой книги была осуществлена С. М. Никольским и В. М. Тихомировым, подготовка второй — Ю. В. Прохоровым и А. Н. Ширяевым.

Творчество А. Н. Колмогорова является живой составной частью современной науки, и мы надеемся, что издание его трудов будет встречено научной общественностью с большим интересом.

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ

(Биографическая справка)

Андрей Николаевич Колмогоров родился 25(12) апреля 1903 г. в Тамбове. Отец Николай Матвеевич Катаев был агрономом. Мать Мария Яковлевна Колмогорова скончалась при родах и заботы по воспитанию А. Н. Колмогорова взяла на себя сестра матери Вера Яковлевна. Первые годы своей жизни А. Н. Колмогоров провел в селе Туношне под Ярославлем в усадьбе родителей его матери. Когда ему было около шести лет, В. Я. Колмогорова с племянником приезжают в Москву. В 1910 г. А. Н. Колмогоров поступает в первый подготовительный класс частной гимназии Е. А. Репман в Москве. В трудные годы (1919—1920) А. Н. работает на железной дороге. В 1920 г., получив аттестат об окончании 90-й школы второй ступени (так была переименована гимназия, в которой он начинал учиться), А. Н. Колмогоров поступает в Московский университет на физико-математический факультет.

Решение стать математиком пришло к нему не сразу. Среди разнообразных увлечений А. Н. большое место занимала история. А. Н. посещает семинар видного русского историка С. В. Бахрушина. В этом семинаре А. Н. выполнил научное исследование (о земельных отношениях в Новгороде по писцовым книгам XV—XVI вв.). В то же время А. Н. получил выдающиеся результаты по теории тригонометрических рядов и теории множеств, и в итоге интерес к математике перевесил все остальное.

На первом курсе университета (1920—1921) А. Н. Колмогоров посещает лекции Н. Н. Лузина по теории функций, А. К. Власова по проективной геометрии и становится участником семинара В. В. Степанова по тригонометрическим рядам. В 1921 г. Н. Н. Лузин предложил А. Н. Колмогорову сделаться его учеником. В этом же году А. Н. завершает свою первую работу по тригонометрическим рядам, а в начале 1922 г. — по дескриптивной теории множеств. Летом 1922 г. А. Н. Колмогоров строит ряд Фурье, расходящийся почти всюду (работа датируется 02.06.1922 г.), и этот результат сразу приносит ему всемирную известность.

С 1922 по 1925 г. А. Н. работает учителем математики и физики в потылихинской опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР. В школе он, кроме того, руководит кружком юных биологов и является секретарем школьного совета.

В 1925 г. А. Н. заканчивает Московский университет и становится аспирантом Н. Н. Лузина. К этому же году относится начало исследований А. Н. в области теории вероятностей.

В 1929 г. происходит первое длительное лодочное плавание по Волге с П. С. Александровым, ознаменовавшее начало дружбы,

продолжавшейся до последних дней Павла Сергеевича (П. С. Александров скончался 16 ноября 1982 г.). В 1935 г. А. Н. Колмогоров и П. С. Александров приобретают дом в Комаровке (Клязьма, близ Москвы), в котором протекала в основном их творческая жизнь.

Завершив в 1929 г. обучение в аспирантуре, А. Н. Колмогоров становится старшим научным сотрудником Института математики и механики при Московском университете и одновременно заведующим кафедрой математики в Индустриально-педагогическом институте им. К. Либкнехта. С июня 1930 по март 1931 г. А. Н. находится в первой заграничной научной командировке: Геттинген, Мюнхен, Париж. С 1931 г. по настоящее время А. Н. Колмогоров — профессор Московского университета.

В 1933 г. А. Н. Колмогоров назначается директором Института математики и механики при МГУ. В этой должности он пребывает до 1939 г. (и еще короткий период — с 1951 по 1953 г.). В 1939 г. А. Н. Колмогорова избирают действительным членом Академии наук СССР, и он становится академиком-секретарем Отделения физико-математических наук. В том же году А. Н. становится заведующим кафедрой теории вероятностей на механико-математическом факультете МГУ (до 1966 г.) и заведующим отделом теории вероятностей в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР (до 1958 г.). В 1941 г. А. Н. удостоивается Государственной премии СССР (совместно с А. Я. Хинчиным) за работы по теории вероятностей.

В конце 30-х и начале 40-х годов А. Н. Колмогоров начинает интересоваться проблемами турбулентности и становится заведующим лабораторией атмосферной турбулентности Геофизического института АН СССР, где работает до 1949 г.

Во время Великой Отечественной войны А. Н. Колмогоров принял активное участие в разработке проблем, связанных с обороной нашей Родины.

Осенью 1942 г. Андрей Николаевич женился на Анне Дмитриевне Егоровой — подруге школьных лет.

В 1949 г. А. Н. Колмогоров удостоивается (совместно с Б. В. Гнеденко) премии им. П. Л. Чебышева АН СССР.

С 1954 по 1958 г. А. Н. Колмогоров — декан механико-математического факультета МГУ. В 1958 г. в течение весеннего полугодия он работает профессором Парижского университета. В 1960 г. А. Н. Колмогоров создает лабораторию вероятностных и статистических методов при МГУ. До 1966 г. он является научным консультантом, а с 1966 по 1976 г. — заведующим этой лабораторией.

В 1954 г. А. Н. принимает участие в работе Международного математического конгресса в Амстердаме. Там он выступает с часовым обзорным докладом, посвященным небесной механике. Андрею Николаевичу было предоставлено почетное право этим докладом завершить научную программу конгресса. В том же 1954 г. А. Н. два месяца работает профессором Университета им. Гумбольта

в Берлине. В 1962, 1966 и 1970 гг. А. Н. принимает участие в Международных математических конгрессах, состоявшихся в Стокгольме, Москве и Ницце.

С 1963 по 1968 г. А. Н. Колмогоров возглавил математическую секцию комиссии АН СССР и Академии педагогических наук СССР по определению содержания среднего образования. С 1968 по 1978 г. А. Н. являлся членом Учебно-методического совета при Министерстве просвещения СССР, руководя комиссией по математике при нем. В 1966 г. А. Н. Колмогорова избирают действительным членом Академии педагогических наук СССР. За вклад в развитие народного образования А. Н. Колмогоров был удостоен медали им Н. К. Крупской. В 1963 г. А. Н. Колмогоров выступает одним из инициаторов создания школы-интерната при МГУ и в последующие годы отдает много сил и энергии этому учебному заведению.

В 1965 г. А. Н. удостоивается (совместно с В. И. Арнольдом) звания лауреата Ленинской премии за работы по классической механике.

В 1970 и 1971—1972 гг. А. Н. Колмогоров участвует в двух четырехмесячных плаваниях на научно-исследовательском судне «Дмитрий Менделеев».

С 1976 по 1980 г. А. Н. Колмогоров заведует вновь созданной кафедрой математической статистики на механико-математическом факультете МГУ, с 1980 г. по настоящее время он — заведующий кафедрой математической логики на том же факультете.

На заседании 28 апреля 1953 г. А. Н. Колмогоров был избран почетным членом Московского математического общества, а в период с 1964 по 1967 и с 1973 г. он является его президентом.

С 1936 г. начинается работа А. Н. Колмогорова в качестве редактора математического отдела «Большой Советской Энциклопедии». В 1949—1960 гг. он член Главной редакции 2-го издания «Большой Советской Энциклопедии» и 3-го издания «Малой Советской Энциклопедии». В разные годы А. Н. Колмогоров был членом редакций «Математического сборника», «Докладов АН СССР», «Успехов математических наук», в настоящее время он редактор этого журнала. А. Н. Колмогоров является также заместителем редактора журнала «Квант» и руководит математическим разделом журнала (с 1970 г.).

Среди учеников А. Н. Колмогорова академики АН СССР И. М. Гельфанд, А. И. Мальцев, М. Д. Миллионщиков, В. С. Михалевич, С. М. Никольский, А. М. Обухов, Ю. В. Прохоров, члены-корреспонденты АН СССР В. И. Арнольд, Л. Н. Большев, А. А. Боровков, А. С. Монин, Б. А. Севастьянов, академики республиканских академий Б. В. Гнеденко, С. Х. Сираждинов, лауреат Ленинской премии Ю. А. Розанов, около шестидесяти докторов и кандидатов наук.

Многие университеты и академии мира удостоили А. Н. Колмогорова избранием в число своих членов. Он — почетный член Румынской академии наук (1965, чл.-кор. с 1957), иностранный член Поль-

ской академии наук (1956), почетный член Лондонского королевского статистического общества (1956), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1959), член Академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1959), иностранный член Американского философского общества в Филадельфии (1961), иностранный член Королевской Нидерландской академии наук (1963), член Лондонского королевского общества (1964), почетный член Венгерской академии наук (1965), член Национальной академии наук США (1967), иностранный член Академии наук Франции (1968), член Академии наук ГДР, почетный член Индийского и Калькуттского математических обществ, почетный член Американского общества метеорологов, Международного статистического института, почетный доктор Парижского, Стокгольмского, Варшавского, Будапештского университетов, лауреат Международной премии фонда Бальзана, удостоен золотой медали Американского метеорологического общества, медали Гельмгольца и др.

Заслуги А. Н. Колмогорова высоко оценены советским правительством. Он награжден семью орденами Ленина, орденами Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени. В 1963 г. А. Н. Колмогорову присвоено высокое звание Героя Социалистического Труда.

В. М. Тихомиров

РЯД ФУРЬЕ — ЛЕБЕГА, РАСХОДЯЩИЙСЯ ПОЧТИ ВСЮДУ*

Цель этой заметки — дать пример суммируемой функции¹, ряд Фурье которой расходится почти всюду (т. е. всюду, кроме точек множества меры нуль).

Функция, построенная в этой заметке, не суммируема с квадратом, и я ничего не знаю о порядке величины коэффициентов ее ряда Фурье. Методы, использованные здесь, не позволяют построить ряд Фурье, расходящийся всюду.

1. Я докажу ниже существование последовательности функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, определенных для $0 \leq x \leq 2\pi$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$1^\circ. \varphi_n(x) \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2°. Частные суммы ряда Фурье $\varphi_n(x)$ ограничены.

3°. Каждой функции $\varphi_n(x)$ можно поставить в соответствие положительное число M_n , множество E_n и целое число q_n такие, что:

$$3a) \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \infty;$$

$$3b) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } E_n = 2\pi;$$

3с) для каждой точки множества E_n существует частная сумма ряда Фурье $\varphi_n(x)$ с номером, меньшим или равным q_n , абсолютное значение которой больше, чем M_n .

Предполагая функции $\varphi_n(x)$ построенными, легко найти последовательность возрастающих целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ таких, что:

$$A) \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leq \frac{1}{2^k} \text{ и соответственно } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leq 1.$$

В) Величина $\frac{1}{2} \sqrt{M_{n_k}}$ больше суммы максимумов модуля частных сумм рядов Фурье $(k-1)$ функций $\varphi_{n_1}, \dots, \varphi_{n_{k-1}}$.

$$C) q_{n_i} \leq \frac{1}{2^k} \sqrt{M_{n_k}} \text{ для всех } i < k.$$

Если n_i известны для всех значений i , меньших k , то можно определить n_k , удовлетворяющее неравенствам А), В), С).

Положим теперь

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x).$$

* Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout.— Fund. math., 1923, vol. 4, p. 324—328. Перевод П. Л. Ульянова.

¹ Т. е. интегрируемой в смысле Лебега.

В силу 1° и А) этот ряд сходится² почти всюду к суммируемой функции и коэффициенты ряда Фурье $\Phi(x)$ равны сумме коэффициентов Фурье функций

$$\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим частную сумму ряда Фурье $\Phi(x)$, которая в силу 3° для $\varphi_{n_k}(x)$ больше, чем M_{n_k} в точках множества E_{n_k} .

а) Для члена ряда $\varphi_{n_k}(x)/\sqrt{M_{n_k}}$ она больше, чем $\sqrt{M_{n_k}}$.

б) Для суммы всех членов с номерами, меньшими k , по условию

В) она меньше, чем $1/2 \sqrt{M_{n_k}}$.

с) Для членов с номерами $s > k$ она меньше, чем $6/2^s$.

В самом деле, частная сумма с номером, меньшим или равным $q_{n_k} \leq \frac{1}{2^s} \sqrt{M_{n_s}}$, в силу С) меньше, чем $(2q_{n_k} + 1)$, умноженное на интеграл от абсолютного значения функции, который в этом случае равен $2/\sqrt{M_{n_s}}$.

Из а), в), с) вытекает, что соответствующая сумма $\Phi(x)$ по абсолютной величине больше или равна

$$\frac{1}{2} \sqrt{M_{n_k}} - \frac{6}{2^k}.$$

Отсюда мы получаем заключение, что ряд Фурье $\Phi(x)$ расходится в каждой точке множества $E = \lim_{k \rightarrow \infty} E_{n_k}$, $\text{mes } E = 2\pi$.

II. Конструкция функции $\varphi_n(x)$.

Пусть

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

— конечная последовательность нечетных возрастающих чисел такая, что условия, данные позднее, будут выполнены.

Определим последовательность $m_1, m_2, \dots, m_n$:

$$m_1 = n, \quad 2m_k + 1 = \lambda_k (2n + 1). \quad (1)$$

Положим

$$A_k = k \frac{4\pi}{2n + 1}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad A_n = 2\pi - \frac{2\pi}{2n + 1}. \quad (2)$$

Положим, наконец, $\varphi_n(x) = m_k^2/n$ на сегменте

$$\Delta_k = \left[A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2} \right]. \quad (3)$$

² См., например: Fund. math., 1923, vol. 4, p. 211, теорема Фубини (речь идет о следующей теореме: всюду сходящийся ряд из неубывающих функций можно дифференцировать почленно.—Примеч. пер.).

Для каждой точки, не принадлежащей сегментам Δ_k , мы положим $\varphi_n(x) = 0$.

Очевидно, что

$$\varphi_n(x) \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = 2 \quad (\text{условие } 1^\circ)$$

и $\varphi_n(x)$ имеет ограниченное изменение, поэтому условие 2° также выполнено.

Рассмотрим частную сумму ряда Фурье $\varphi_n(x)$ с номером m_k

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\alpha) \frac{\sin \frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha-x)} d\alpha. \quad (4)$$

Допустим, что точка x лежит в сегменте

$$\sigma_k = \left[A_{k-1} + \frac{2}{n^2}, A_k - \frac{2}{n^2} \right]. \quad (5)$$

Если λ_i для $i < k$ будут определены и соответственно функция $\varphi_n(x)$ определена на сегментах Δ_i , то можно взять λ_k таким большим, что интеграл (4), вычисленный по всем сегментам Δ_i ($i < k$), будет для каждой точки x , принадлежащей σ_k , как угодно мал. Я предполагаю, что он меньше, чем 1, по абсолютной величине.

Рассмотрим теперь интеграл (4) по сегменту Δ_s ($s \geq k$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_s} \frac{m_s^2 \sin \frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{n^2 \sin^{1/2}(\alpha-x)} d\alpha &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_s} \frac{m_s^2 \sin \frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{n^2 \sin^{1/2}(A_s-x)} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_s} \frac{m_s^2}{n} \left[\frac{\sin \frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{2 \sin^{1/2}(\alpha-x)} - \frac{\sin \frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{2 \sin((A_s-x)/2)} \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $|\alpha - A_s| \leq 1/m_s^2$, можно увидеть, что разность в квадратной скобке меньше, чем

$$\frac{1}{m_s^2} \max \left| \frac{d}{d\alpha} \frac{\sin \frac{2m_k+1}{2}\alpha}{2 \sin(\alpha/2)} \right| \leq \frac{4m_k^2}{m_s^2} \leq 4.$$

И, поскольку длина Δ_s равна $2/m_s^2$, второй член в (6) меньше, чем $4/n$.

Вынося постоянную в первом интеграле, мы получаем, что выражение (6) равно

$$\frac{2}{\pi n} \frac{\sin \frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{2 \sin^{1/2}(A_s-x)} + \frac{\tau}{n}, \quad |\tau| \leq 4. \quad (7)$$

Сумма членов с τ для $s = k, k + 1, \dots, n$ меньше по абсолютной величине 4. Замечая, что

$$\frac{2m_k + 1}{2} (A_s - A_k) = (s - k) \lambda_k 2\pi,$$

$$\sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_s - x) = \sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_k - x),$$

$$A_s - x < A_s - A_{k-1} = (s - k + 1) \frac{4\pi}{2n + 1} < (s - k + 1) \frac{2\pi}{n},$$

$$\frac{1}{\sin^{1/2} (A_s - x)} > \frac{n}{\pi (s - k + 1)},$$

мы видим, что сумма первых членов (7) для $s = k, k + 1, \dots, n$ равна по абсолютной величине

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi n} \left| \sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_k - x) \right| \sum_{s=k}^n \frac{1}{\sin^{1/2} (A_s - x)} > \\ > \frac{1}{\pi^2} \left| \sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_k - x) \right| \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{r} - 5. \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, для каждой точки x из σ_k интеграл (4) по абсолютной величине больше, чем

$$\frac{1}{\pi^2} \left| \sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_k - x) \right| \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{r} - 5.$$

Пусть E_n есть множество всех точек x , расположенных в сегментах σ_k для $n - k > \sqrt{n}$ таких, что в них выполняется следующее условие:

$$\frac{1}{\pi^2} \left| \sin \frac{2m_k + 1}{2} (A_k - x) \right| > \frac{1}{\sqrt{\sum_{r=1}^{[V\sqrt{n}]} \frac{1}{r}}} = \frac{1}{N_n}.$$

Можно увидеть, что для каждой точки E_n , принадлежащей σ_k , частная сумма ряда Фурье $\varphi_n(x)$ с номером m_k больше, чем $N_n - 5 = M_n$.

Можно показать без труда, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } E_n = 2\pi.$$

Москва, 2 июня 1922 г.

2

О ПОРЯДКЕ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ
РЯДА ФУРЬЕ—ЛЕБЕГА*

Известно, что коэффициенты Фурье суммируемой функции стремятся к нулю. В этой заметке я докажу следующее предложение относительно рядов по косинусам.

1. Для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к нулю, найдется такая последовательность $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$1) |a_n| < a'_n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx$$

есть ряд Фурье суммируемой функции.

Рассмотрим ряд

$$a_0/2 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots \quad (1)$$

Обозначим

$$\Delta_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta'_n = \Delta_n - \Delta_{n+1}.$$

Применяя два раза преобразование Абеля, получим два ряда

$$\frac{1}{2} \Delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \Delta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta'_n \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2. \quad (3)$$

Если выполнены условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = 0,$$

то ряд (1) сходится одновременно с рядом (3). Эти условия выполнены всюду, кроме точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, если $a_n \rightarrow 0$ и, следовательно, $\Delta_n \rightarrow 0$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|$ сходится, то ряды (3) и (1) сходятся к некоторой функции $f(x)$ всюду, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Заметив, что

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\Delta'_n| \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx = \pi(n+1) |\Delta'_n|,$$

получаем утверждение:

* Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier—Lebesgue. — Bull. Acad. pol. sci. A, 1923, p. 83—86. Представлено В. Серпинским. Перевод П. Л. Ульянова.

II. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) |\Delta'_n|$ сходится и коэффициенты a_n стремятся к нулю, то ряд (3) сходится к суммируемой функции. Значит, ряд (1), сходящийся к суммируемой функции $f(x)$, исключая точки $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, есть ряд Фурье—Лебега.

В частности, если все Δ'_n положительны, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\Delta'_n| = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta'_n = a_0.$$

Следовательно,

III. Если коэффициенты ряда по косинусам стремятся к нулю и их вторые разности положительны, то этот ряд есть ряд Фурье—Лебега.

Так как для любой сходящейся к нулю последовательности $\{a_n\}$ найдется такая сходящаяся к нулю последовательность $\{a'_n\}$, что $a'_n > |a_n|$ и вторые разности положительны, то предложение I доказано.

З а м е ч а н и е 1. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = f(x)$$

удовлетворяет условиям предложения II. Положим $x = my + \pi/2$. Тогда

$$\begin{aligned} f\left(my + \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-a_{4n-3} \sin(4n-3)my + a_{4n-1} \sin(4n-1)my) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-a_{4n-2} \cos(4n-2)my + a_{4n} \cos 4nmy). \end{aligned}$$

Первая сумма есть ряд Фурье—Лебега для

$$\frac{f(my + \pi/2) - f(-my + \pi/2)}{2},$$

в частности, если $m = 1$, видим, что ряд

$$-a_1 \sin y + a_3 \sin 3y - a_5 \sin 5y + a_7 \sin 7y \dots$$

есть ряд Фурье—Лебега.

З а м е ч а н и е 2. Остаток ряда (1) равен

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta'_k \left(\frac{\sin((k+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta_n \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 + \\ &+ a_n \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Если выполнено условие предложения II, то имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta'_k \left(\frac{\sin((k+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \right| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi(k+1) |\Delta'_k| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \Delta_n \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \right| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n+1) |\Delta_n| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n+1) \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta'_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) |\Delta'_k| = 0. \end{aligned}$$

В этом случае $\int_0^{2\pi} |R_n| dx$ стремится к нулю вместе с

$$|a_n| \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)} \right| dx$$

и, следовательно, вместе с $|a_n| \log n$.

IV. Если $\sum_{n=1}^{\infty} n |\Delta'_n|$ сходится, то условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \log n = 0$$

необходимо и достаточно для сходимости ряда (1) в среднем [по метрике L].

Таким образом, из двух рядов Фурье—Лебега

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(\log n)^{1+\varepsilon}}$$

второй сходится в среднем, а первый нет (см. [1]).

3 декабря 1922 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach S., Steinhaus H. Sur la convergence en moyenne.— Bull. Acad. sci. Cracovie, 1918.

3

ЗАМЕЧАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ
РЯДОВ ФУРЬЕ*

Положим, как обычно,

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}.$$

И. Т е о р е м а. Если последовательность целых чисел n_m ($m = 1, 2, \dots$) удовлетворяет условию

$$n_{m+1}/n_m > \lambda > 1,$$

то для ряда Фурье всякой функции, интегрируемой с квадратом, последовательность S_{n_m} сходится почти всюду к данной функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что последовательность $\{S_{n_m}\}$ сходится почти всюду к данной функции, поэтому достаточно доказать, что последовательность $\{S_{n_m} - \sigma_{n_m}\}$ сходится почти всюду к нулю. Но легко видеть, что это — результат сходимости следующего ряда:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (S_{n_m} - \sigma_{n_m})^2 dx. \quad (1)$$

Рассмотрим частную сумму ряда (1) с номером p . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^p \int_0^{2\pi} (S_{n_m} - \sigma_{n_m})^2 dx &= \sum_{m=1}^p \frac{1}{n_m^2} \sum_{k=1}^{n_m} k^2 (a_k^2 + b_k^2) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_p} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \left[\frac{1}{n_{m_k}^2} + \frac{1}{n_{m_k+1}^2} + \dots + \frac{1}{n_p^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где n_{m_k} определяется неравенством

$$n_{m_k-1} < k \leq n_{m_k}.$$

* Une contribution a l'étude de la convergence des séries de Fourier.— Fund. math., 1924, vol. 5, p. 96—97. Перевод И. А. Виноградовой.

Очевидно, что

$$\frac{1}{n_{m_k}^2} + \frac{1}{n_{m_k+1}^2} + \dots + \frac{1}{n_p^2} \leq \frac{1}{n_{m_k}^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} + \dots + \frac{1}{\lambda^{2p}} \right) < \\ < \frac{1}{n_{m_k}^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \leq \frac{1}{k^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1},$$

и, следовательно, сумма (2) не превосходит

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \sum_{k=1}^{k=n_p} (a_k^2 + b_k^2).$$

Это влечет сходимость ряда (1) и наше доказательство завершено.

II. Теорема. Если в ряде Фурье—Лебега отличны от нуля только члены с номерами n_m (последовательность n_m удовлетворяет неравенству в условии теоремы I), то ряд почти всюду сходится.

Доказательство. Если рассматривать только функции, интегрируемые с квадратом, то теорема II немедленно следует из теоремы I; но утверждение верно для всех интегрируемых функций. Последовательность σ_{n_m} почти всюду сходится, следовательно, нужно только рассмотреть разность

$$|S_{n_{m-1}} - \sigma_{n_m}| \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{n_k}{n_m} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|). \quad (3)$$

Так как $|a_{n_k}| + |b_{n_k}|$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ и, с другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{n_k}{n_m} < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^{m-k}} < \frac{1}{\lambda - 1},$$

то видно, что разность (3) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

7 октября 1922 г.

4

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ *

Совместно с Г. А. Селиверстовым

Харди [1] доказал следующую теорему:

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) (\log n)^2$$

* Sur la convergence des séries de Fourier.—C. r. Acad. sci. Paris, 1924, vol. 178, p. 303—306. Представлено А. Лебегом. Перевод, И. А. Виноградовой.

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

сходится почти всюду (исключая множество меры нуль).

Из работы Д. Е. Меньшова [2] нам известно, что для общих ортогональных рядов множитель $(\log n)^2$ нельзя заменить на функцию $w(n)$, удовлетворяющую условию $w(n) = o[(\log n)^2]$.

В настоящей заметке мы докажем, что в случае тригонометрических рядов множитель $(\log n)^2$ может быть заменен на $(\log n)^{1+\varepsilon}$.

Л е м м а. Пусть дана тригонометрическая сумма

$$S(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n > 1),$$

тогда имеем

$$\int_0^{2\pi} S_{k(x)}(x) dx \leq \sqrt{C \log n \sum_{p=1}^n (a_p^2 + b_p^2)}.$$

В этом выражении $k(x)$ есть произвольная целочисленная функция, принимающая значения от 1 до n :

$$S_{k(x)}(x) = \sum_{p=1}^{k(x)} (a_p \cos px + b_p \sin px),$$

a C — абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь неравенством Шварца, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} S_{k(x)}(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) d\alpha dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) dx d\alpha \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S^2(\alpha) d\alpha \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) dx \right]^2 d\alpha}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) dx \right]^2 d\alpha &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) \sum_{q=1}^{k(y)} \cos q(y-\alpha) dy dx d\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{\min[k(x), k(y)]} \int_0^{2\pi} \cos p(x - \alpha) \cos p(y - \alpha) d\alpha dx dy = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{\min[k(x), k(y)]} \cos p(x - y) dx dy.
\end{aligned}$$

Можно без труда доказать, что последнее выражение не превосходит $C \log n$, где C — абсолютная постоянная.

Т е о р е м а. Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) (a_n^2 + b_n^2) = A, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\tau(n)} = N \quad (3)$$

и $\tau(n) < \tau(n+1)$, то ряд (1) сходится почти всюду.

Докажем сначала, что частные суммы ряда (1) почти всюду ограничены.

Положим

$$S_{p, l} = \sum_{q=2^{2^p}}^l (a_q \cos qx + b_q \sin qx),$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, 2^{2^p} \leq l < 2^{2^{p+1}},$$

и

$$A_p = \sum_{q=2^{2^p}}^{2^{2^{p+1}}-1} (a_q^2 + b_q^2).$$

В силу леммы имеем

$$\int_0^{2\pi} S_{p, l(x)}(x) dx \leq \sqrt{C \log 2^{2^{p+1}} A_p} \leq C' \sqrt{2^p A_p},$$

где $l(x)$ — произвольная целочисленная функция, удовлетворяющая неравенству для l . Пусть $\Phi(x)$ — верхняя грань частных сумм ряда (1), тогда отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) dx \leq C' \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{A_p 2^p} + 2\pi(|a_1| + |b_1|). \quad (4)$$

Ряд справа сходится. Действительно,

$$\sum_{p=0}^{\infty} A_p \tau(2^{2^p}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tau(n) = A,$$

а в силу теоремы Коши

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^p}{\tau(2^{2^p})} < 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\tau(2^r)} < 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\tau(n)} = 4N,$$

и, следовательно, имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{A_p \tau(2^{2^p}) \frac{2^p}{\tau(2^{2^p})}} \leq 2 \sqrt{AN}.$$

Опуская первые члены ряда (1), можно сделать интеграл (4) сколь угодно малым. Это доказывает сходимость ряда (1).

14 января 1924 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H. On the summability of Fourier's series.— Proc. London Math. Soc., 1913, vol. 12, p. 365—372.
2. Menchoff D. Sur les séries de fonctions orthogonales.— Fund. math., 1923, vol. 4, p. 82—105.

5

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА *

Класс функций, определенных почти всюду на действительной оси, назовем классом K , если выполнено следующее условие:

У с л о в и е K . Если f — функция класса K и $\varphi(x)$ — монотонная функция, возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$, с ограниченным отношением

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1},$$

то функция $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ также является функцией класса K . Последняя функция считается равной нулю при $\varphi'(x) = 0$ даже тогда, когда $f[\varphi(x)]$ не определена.

Класс K является X -интегрируемым, если на этом классе можно определить функционал (X -интеграл)

$$\int_0^x f(\alpha) d\alpha$$

со следующими свойствами.

* La définition axiomatique l'intégrale.— C. r. Acad. sci. Paris, 1925, vol. 180, p. 110—111. Перевод В. А. Скворцова.

Свойства интеграла. 1) $\int_0^0 f(\alpha) d\alpha = 0$;

2) $\int_0^x f(\alpha) d\alpha$ является непрерывной функцией относительно x ;

3) его X -производная по x почти всюду равна f ;

4) $\int_0^{\varphi(x)} f(\alpha) d\alpha = \int_0^x f[\varphi(\alpha)] \varphi'(\alpha) d\alpha$, где функция $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет указанному выше условию.

Мы предполагаем, что X -производная является функционалом со следующими свойствами.

Свойства производной. 1) $[F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x)$;

2) Множество значений F для тех точек, где $F'(x) = 0$ имеет меру нуль.

Т е о р е м а I. *Некоторой функции $f(x)$ и процессу дифференцирования X , даже для разных интегрируемых классов K_1 и K_2 , может соответствовать только единственная функция*

$$F(x) = \int_0^x f(\alpha) d\alpha.$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Предположим противное: для интегрируемых классов K_1 и K_2 существуют две различные функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$. X -производная от

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

почти всюду равна нулю. Предположим, что $\Phi(x_0) > 0$, $x_0 > 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Положим

$$\Psi(x) = x + \max_{0 \leq \alpha \leq x} \Phi(\alpha), \quad \text{если} \quad x > 0,$$

$$\Psi(x) = x, \quad \text{если} \quad x \leq 0;$$

$\Phi(x)$ — обратная функция ($\Phi[\Psi(x)] = x$) — удовлетворяет условиям, указанным в начале статьи. Функция

$$\Phi[\varphi(x)] = F_1[\varphi(x)] - F_2[\varphi(x)]$$

имеет ненулевую производную на множестве положительной меры, что невозможно.

Т е о р е м а II. *Для процесса дифференцирования X существует X -интегрируемый класс K^m , который содержит все другие.*

Т е о р е м а III. *Для асимптотического дифференцирования интегрируемый класс K^m совпадает с классом всех функций, тотализуемых в смысле Данжуа.*

З а м е ч а н и е. Мы не даем в этой заметке полного аксиоматического определения дифференцирования. В результате становится возможным, что различным процессам дифференцирования могут соответствовать различные интегралы.

6

О ГРАНИЦАХ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА *

I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Рассмотрим ¹ определение классического *интеграла Римана*: интервал интегрирования (a, b) разбиваем на частные интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Найдем на каждом интервале Δ_k нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$: m_k и M_k . Назовем

$$s = \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_k m_k$$

нижней суммой Римана и

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_k M_k$$

верхней суммой Римана ². Если верхняя грань величин s , соответствующих всевозможным разбиениям, совпадает с нижней гранью величин S , эту общую грань называют интегралом от функции $f(x)$ по интервалу (a, b) .

Интеграл Лебега от ограниченной функции можно получить аналогичным образом: интервал (a, b) разбиваем на множества $E_1, E_2, \dots, E_n$. Определим, как раньше,

$$s = \sum_{k=1}^{k=n} E_k m_k, \quad S = \sum_{k=1}^{k=n} E_k M_k.$$

Если верхняя грань величин s , соответствующих всевозможным разбиениям интервала (a, b) на измеримые множества, совпадает с нижней гранью величин S , мы назовем эту общую величину интегралом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В случае интеграла Римана всякое разбиение с достаточно маленькими интервалами Δ имеет суммы s и S , отличающиеся лишь на малую величину. В противоположность этому в случае интеграла Лебега выбор множеств E_k определяется поведением функции. Например, используя обозначения Лебега [3], можно взять

$$E_k = E[l_{k-1} < f(x) \leq l_k].$$

* Sur les bornes de la généralisation de l'intégrale. 1925. Печатается впервые. Перевод Т. П. Лукашенко.

¹ Здесь изложена подробно и полностью моя заметка [1] (см. статью № 5 наст. изд.). См. также введение в мой мемуар [2] (статья № 16 наст. изд.).

² Здесь Δ_k обозначает длину интервала Δ_k . Далее E_k обозначает меру множества E_k .

Общий интеграл Лебега можно определить методом, подобным двум предыдущим: интервал (a, b) разобьем на бесконечную последовательность множеств $E_1, E_2, \dots, E_k \dots$. Обозначим через s и S суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k m_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} E_k M_k$$

в случае, когда они сходятся абсолютно. А если эти ряды не сходятся абсолютно, будем считать, что s и S не определены, что естественно, так как при различном порядке множеств E_k сумма ряда является совершенно произвольной величиной. Как и раньше, назовем интегралом от $f(x)$ по интервалу (a, b) общую грань величин s и S по всем разбиениям, для которых s и S определены.

В случае, когда функция измерима, но несуммируема, интеграл от нее порой удастся получить методом, аналогичным предыдущему. Как и предыдущее изложение, непосредственно последующее служит только для пояснения смысла аксиоматического построения, рассматриваемого в данном мемуаре; тут мы только дадим определение интеграла, эквивалентное интегралу, определенному Дирихле. Разобьем интервал (a, b) на бесконечную последовательность интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots$, расположенных произвольно. Множество их концов есть приводимое множество. Определим величины m_k и M_k для каждого интервала. Назовем выражения $m_k \Delta_k$ и $M_k \Delta_k$ элементами нижней или верхней суммы Римана, соответствующими интервалу Δ_k . При суммировании элементы берутся в порядке следования. Предположим, что среди интервалов Δ_k существует последовательность интервалов $\Delta_{k_1}, \Delta_{k_2}, \dots, \Delta_{k_m}, \dots$, таких, что сумма интервалов Δ_{k_m} — также интервал (при этом пренебрегаем счетным множеством точек). Дополнительно предположим, что ряды элементов, соответствующих интервалам Δ_{k_m} , сходятся абсолютно к s' и S' . Назовем s' и S' элементами, соответствующими сумме интервалов Δ_{k_m} . Мы определим величину сумм Римана, повторяя трансфинитно изложенный процесс (если это возможно). Потом, отправляясь от сумм Римана, определим интеграл, как и прежде.

Предыдущее изложение приводит к заключению, что идея, содержащаяся в понятии обычного интеграла

$$\int f(x) dx,$$

сохраняет свой смысл также в случае более общего определения.

Выражение $f(x) dx$ — запись, обозначающая бесконечно малый элемент в сумме Римана, стремящейся к величине интеграла. При предварительном изложении последующих утверждений будем называть $f(x) dx$ элементом функции.



А. Н. КОЛМОГОРОВ.
30-е годы

§ 2. Изложенный здесь конструктивный метод недостаточен для наших целей, которые состоят в исследовании границ возможного обобщения интеграла. Следует применить аксиоматический метод.

В предыдущем параграфе уже намечены два раздела теории интегрирования: 1) *теория абсолютного интегрирования*, где порядок суммирования элементов функции не важен, 2) *теория упорядоченного (ordinaire) интегрирования*, где результат суммирования элементов определяется полностью порядком элементов.

Область абсолютного интегрирования может быть определена более точно при помощи следующей аксиомы: *величина интеграла не меняется при заменах переменных, сохраняющих меру*. Можно доказать, что если рассматривать только измеримые функции, то суммирование Лебега является наиболее общим процессом абсолютного интегрирования. С определенной точки зрения, которая далее развивается в § 4 введения, теория абсолютного интегрирования Лебега не может быть обобщена даже в области, содержащей неизмеримые функции.

Теория упорядоченного интегрирования может быть определена при помощи следующей аксиомы: *если преобразование переменных $y = \varphi(x)$ не меняет порядка и не переводит множества меры нуль оси x в множества ненулевой меры оси y , то*

$$\int_0^{\varphi(x)} f(\alpha) d\alpha = \int_0^x f[\varphi(\alpha)] \varphi'(\alpha) d\alpha.$$

Далее используется лишь класс более специальных преобразований, которые представляют собой растяжение интервала действительной оси. Интеграл Данжуа удовлетворяет указанной аксиоме. Этот мемуар мы посвятим нахождению границ области упорядоченного интегрирования.

Сначала можно показать, что *упорядоченное интегрирование дает непрерывные примитивные*. Рассмотрение разрывных примитивных может оказаться важным для некоторых разделов математики. Но в таком случае придется отказаться от приведенной выше аксиомы замены переменных или же ограничиться некоторым видом симметрической деформации в окрестности каждой точки. *В такой теории интегрирования величина интеграла будет зависеть не только от порядка элементов функции, но также от их взаимных расстояний.*

Для полного объяснения метода последующих исследований осталось сделать несколько замечаний о принципе, который мы назовем *принципом единственности*.

§ 3. В принятых определениях интеграла интегрируемая функция является всюду, исключая, быть может, множество меры нуль, производной своей примитивной при соответствующем выборе определения производной. Однако при нахождении наиболее общего определения интеграла не следует вводить аксиому существования производной. Действительно, данному определению интеграла может соответствовать определение производной, не введенное ранее. Но любое определение интеграла должно удовлетворять аксиоме единственности:

Примитивная функция не может соответствовать двум функциям, различающимся на множестве ненулевой меры.

В самом деле, теория, допускающая, что ненулевая функция имеет нулевую примитивную, не может быть применена ни для определения коэффициентов Фурье, ни для решения других существующих задач.

§ 4. Мы укажем здесь два приложения принципа единственности: в теории абсолютного интегрирования и в теории обобщенного интегрирования.

1. Можно показать, что абсолютное интегрирование дает абсолютно непрерывные примитивные. Но все абсолютно непрерывные

функции являются примитивными суммируемых функций. Отсюда получаем, что при принятии принципа единственности в число аксиом несуммируемые функции, в том числе и неизмеримые, не могут быть абсолютно интегрируемыми.

2. Какова бы ни была теория интегрирования, следует допустить, что неравенство

$$|f(x)| \leq K$$

непрерывно влечет неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K |b - a|.$$

Теперь видно, что ограниченные функции имеют примитивные, производные числа Дини которых ограничены. Но производные этих примитивных измеримы. *Стало быть ограниченная и неизмеримая функция не может быть интегрируемой ни в каком смысле.*

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМ $\mathcal{K}$

Два класса функций $K \equiv \{F(x)\}$ и $k \equiv \{f(x)\}$ образуют систему $\mathcal{K}$, если они удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции класса K непрерывны и равны нулю, когда $x = 0$.
2. Функции класса k определены и конечны всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль. (Две функции, различающиеся только на множестве меры нуль, считаем равными.)
3. Между классами k и K установлено взаимно однозначное соответствие. Назовем *примитивной* $f(x)$ соответствующую ей функцию $F(x)$; наоборот, $f(x)$ назовем *производной* $F(x)$. Таким образом, рассматриваемая система $\mathcal{K}$ является системой пар функций

$$[F(x), f(x)].$$

4. Если пары $[F_1(x), f_1(x)]$ и $[F_2(x), f_2(x)]$ входят в $\mathcal{K}$, то пара $[l_1 F_1(x) + l_2 F_2(x), l_1 f_1(x) + l_2 f_2(x)]$ входит также (l_1 и l_2 — произвольные действительные числа).

5. Если пара $[F(x), f(x)]$ входит в $\mathcal{K}$, то пара $[F[\varphi(x)], f[\varphi(x)] \varphi'(x)]$ входит также, где $\varphi(x)$ является монотонной функцией, возрастающей от $-\infty$ до $+\infty$, с ограниченным отношением $\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}$. При этом если $\varphi'(x) = 0$, то $f[\varphi(x)] \varphi'(x)$ — также нуль, даже если функция $f[\varphi(x)]$ не определена.

Пять свойств систем $\mathcal{K}$ недостаточны для полного аксиоматического определения производной и интеграла. Действительно, в различных системах $\mathcal{K}$ одной производной $f(x)$ могут соответствовать различные примитивные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ и, наоборот, одной примитивной $F(x)$ могут соответствовать различные производные.

Но эти свойства позволяют свести проблему определения интеграла к проблеме определения производной.

В самом деле, допустим, что дано какое-либо новое определение производной, т. е. что имеется функционал, зависящий от выбора функции $F(x)$ и величины x и определенный для некоторых функций F и некоторых значений x ; этот функционал назовем *обобщенной производной* $F'(x)$. Кроме того, допустим, что выполнены следующие два условия:

1) если $F(x)$ асимптотически дифференцируема в точке x , то $F'(x)$ совпадает с этой производной;

$$2) [l_1 F_1(x) + l_2 F_2(x)]' = l_1 F_1'(x) + l_2 F_2'(x).$$

Дополним теперь пять свойств систем $\mathcal{K}$ следующим шестым свойством:

6. Если пара $[F(x), f(x)]$ входит в $\mathcal{K}$, то, за исключением, быть может, множества меры нуль, $f(x) = F'(x)$.

Опираясь на эти свойства, покажем, что если функция $f(x)$ входит в различные системы $\mathcal{K}$, то ей в них соответствует одна и та же примитивная $F(x)$.

Доказательство. Предположим обратное: в системах $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ функции $f(x)$ соответствуют две различные функции: $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Тогда обозначая $F_1(x) - F_2(x)$ как $\Phi(x)$, мы имеем $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$. Предположим, что $\Phi(x_0) > 0$, $x_0 > 0$ (другие случаи аналогичны). Положим

$$\psi(x) = x + \max_{0 \leq \alpha \leq x} \Phi(\alpha) \quad \text{для } x \geq 0,$$

$$\psi(x) = x \quad \text{для } x < 0.$$

Ясно, что $\frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 1$; значит, для обратной функции $\varphi(x)$ ($\varphi[\psi(x)] = x$) имеем

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 1.$$

В силу свойства 5 функции $F_1[\varphi(x)]$ и $F_2[\varphi(x)]$ принадлежат соответственно классам примитивных K_1 и K_2 и имеют производные, равные $f[\varphi(x)] \varphi'(x)$, за исключением множества меры нуль. Рассмотрим теперь функцию $\Phi[\varphi(x)]$. Из вышеизложенного следует, что $\{\Phi[\varphi(x)]\}'$ существует и равна нулю всюду, кроме, быть может, множества меры нуль.

С другой стороны, легко показать, что в множестве тех точек, в которых $\Phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq x} \Phi(\alpha)$, существует подмножество P меры нуль, на котором множество значений функции $\Phi(x)$, а значит, и $\psi(x)$ имеет ненулевую меру. Пусть Q — множество значений $\psi(x)$ на P . На P имеем

$$\Phi(x) = \psi(x) - x.$$

и

$$\Phi [\varphi (x)] = \psi [\varphi (x)] - \varphi (x) = x - \varphi (x),$$

$$\{\Phi [\varphi (x)]\}' = 1 - \varphi' (x).$$

Производная в последнем равенстве асимптотическая. Производная $\varphi' (x)$ на Q равна нулю, за исключением, быть может, множества меры нуль, так как множество значений $\varphi (x)$ на Q — множество P меры нуль. Следовательно, за исключением множества меры нуль, на Q имеем $\{\Phi [\varphi (x)]\}' = 1$. Противоречие получено³.

III

Теперь легко показать, что сумма всех систем $\mathcal{K}$, обладающих свойством 6, также является системой $\mathcal{K}$, обладающей свойствами 1—6.

Свойства 1, 2, 5 и 6 очевидно выполняются. Свойство 3 также выполняется, так как каждой примитивной соответствует определенная производная и обратно, как показано выше.

Доказательство свойства 4. Докажем сначала следующее: если две системы

$$\mathcal{K}_1 \equiv \{[F_1(x), f_1(x)]\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_2 \equiv \{[F_2(x), f_2(x)]\}$$

обладают свойствами 1—6, то система

$$\mathcal{K} = \{[l_1 F_1(x) + l_2 F_2(x), l_1 f_1(x) + l_2 f_2(x)]\}$$

обладает ими также. Проверка для $\mathcal{K}$ свойств 1, 2, 4, 5, 6 не требует сложных рассуждений. Остается проверить свойство 3: каждой примитивной соответствует определенная производная; для этого необходимо показать, что если производная представима в двух видах: $l_{11}f_{11}(x) + l_{21}f_{21}(x)$ и $l_{12}f_{12}(x) + l_{22}f_{22}(x)$, где f_{11} и f_{12} принадлежат классу k_1 , а f_{21} и f_{22} принадлежат k_2 , то для соответствующих примитивных имеем $l_{11}F_{11}(x) + l_{21}F_{21}(x) = l_{12}F_{12}(x) + l_{22}F_{22}(x)$.

Имеем $l_{11}f_{11}(x) - l_{12}f_{12}(x) = l_{22}f_{22}(x) - l_{21}f_{21}(x)$. Первый член этого равенства — функция из k_1 , второй член — функция из k_2 . По ранее доказанному утверждению их примитивные удовлетворяют

³ Может быть доказано аналогичным образом и следующее утверждение: если две функции f_1 и f_2 принадлежат классам k_1 и k_2 систем $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, обладающих свойством 6, и совпадают на интервале Δ , то их примитивные F_1 и F_2 могут отличаться на этом интервале только на константу.

Доказательство в основном такое же, но проводится только на интервале Δ и в нем делаются следующие изменения. Обозначаем концы интервала Δ как a и b . Предполагаем, что $\Phi(x_0) > \Phi(a)$ (остальные случаи аналогичны), x_0 содержится в интервале Δ . Полагаем

$$\psi(x) = x + \max_{a \leq \alpha \leq x} [\Phi(\alpha)] \quad \text{для } x > a,$$

$$\psi(x) = x + \Phi(x) \quad \text{для } x \leq a.$$

равенству: $l_{11}F_{11}(x) - l_{12}F_{12}(x) = l_{22}F_{22}(x) - l_{21}F_{21}(x)$. Доказываемое равенство является следствием этого. Отсюда становится очевидным справедливость свойства 4 для суммы систем.

Следовательно, сумма всех систем $\mathcal{K}$, обладающих свойством 6, образует *максимальную систему* $\mathcal{K}_m$. Для всех функций соответствующего класса k_m интеграл определен единственным образом с помощью аксиом 1—6. Для каждой функции, не принадлежащей k_m , не существует такого интеграла. Это показывает, что система аксиом является полной.

IV

Желая получить определение интеграла изложенным выше методом, необходимо выбрать некоторое конкретное определение производной. Естественно рассмотреть асимптотическую производную. В этом случае свойство 6 выражается так:

6^a. Если пара $[F(x), f(x)]$ входит в $\mathcal{K}$, то $f(x)$ равна асимптотической производной, $F'(x)$, за исключением, быть может, множества меры нуль ($F'(x)$ обозначает далее асимптотическую производную).

В силу предыдущего существует максимальная система $\mathcal{K}_m^a$. Эта система состоит из функций, тотализируемых по Данжуа, и их примитивных.

Доказательство. Известно, что система тотализируемых функций и их примитивных (разрешимых функций) обладает свойствами 1—6^a. Осталось показать, что эта система максимальна. Предположим обратное: *существует неразрешимая функция $F(x)$, входящая в класс K системы $\mathcal{K}$, обладающей свойством 6^a*. Возможны два случая.

1) На некотором совершенном множестве меры нуль $\mathcal{P}$ функция $F(x)$ имеет ненулевую простую вариацию⁴. Обозначим через $V(F, \mathcal{P}, a, b)$ простую вариацию $F(x)$ на порции $\mathcal{P}$, содержащейся между a и b . Предположим, что некоторая порция $\mathcal{P}$ расположена между точками A и B и для нее $V(F, \mathcal{P}, A, B) > 0$ (случай $V(F, \mathcal{P}, A, B) < 0$ аналогичен). Положим

$$\psi(x) = x + \max_{A \leq a \leq x} V(F, \mathcal{P}, A, a) \quad \text{для } A \leq x \leq B,$$

$$\psi(x) = x + F(A) \quad \text{для } x < A,$$

$$\psi(x) = x + \max_{A \leq a \leq B} V(F, \mathcal{P}, A, a) \quad \text{для } x > B.$$

⁴ Простая (simple) вариация введена А. Данжуа [4] и для совершенного множества $\mathcal{P}$ равна $F(\sup \mathcal{P}) - F(\inf \mathcal{P}) - \sum_k (F(b_k) - F(a_k))$, где (a_k, b_k) — дополнительные интервалы множества $\mathcal{P}$ (на отрезке $[\inf \mathcal{P}, \sup \mathcal{P}]$) и последний ряд абсолютно сходится. — *Примеч. пер.*

Окончание этого доказательства аналогично предыдущему доказательству. Для обратной функции $\varphi(x)$ справедливо свойство 5. Обозначим через Q множество значений $\varphi(x)$ на предложенной порции множества $\mathcal{P}$. Легко видеть, что $F[\varphi(x)]$ имеет положительную асимптотическую производную на некотором подмножестве Q положительной меры. С другой стороны, $\{F[\varphi(x)]\}' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) = 0$ на Q , за исключением, быть может, множества меры нуль. Противоречие получено.

2) Вариация $F(x)$ неприводима на некотором совершенном множестве меры нуль ${}^5\mathcal{P}$. В этом случае можно найти функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию 5 и такую, что функция $F[\varphi(x)]$ не имеет асимптотической производной на некотором множестве положительной меры.

Конструкция функции $\varphi(x)$. Множество Q получается путем замены переменной из множества $\mathcal{P}_1$, являющегося частью $\mathcal{P}$. Мы определим множество с помощью *правильной системы сегментов*. Мы назовем так систему сегментов

$$S \equiv \{\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}\},$$

обладающую следующими свойствами: пусть $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ фиксированы, i_n меняется от 1 до $N_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$. Сегменты одного и того же ранга (с фиксированным числом n) не пересекаются и расположены в порядке возрастания индекса i_n . Каждый сегмент $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ содержится в соответствующем сегменте предыдущего ранга $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$. Сегменты первого ранга содержатся в сегменте Δ с концами a и b . $\mathcal{P}_1$ есть множество всех точек, принадлежащих бесконечному числу сегментов Δ .

Сегмент $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ отображается в некоторый сегмент $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Порция множества $\mathcal{P}_1$, содержащаяся в первом сегменте, отображается в порцию множества Q , содержащуюся во втором сегменте. Обозначим меру этой порции через $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Числа e должны удовлетворять следующему условию:

$$\sum_{k=1}^{k=N_{i_1 i_2 \dots i_n}} e_{i_1 i_2 \dots i_n k} = e_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

Предположим еще, что

$$\sum_{k=1}^{k=N} e_k = e = 1.$$

⁵ Понятие приводимости вариации также принадлежит А. Данжуа [4]. Вариация $F(x)$ приводима на совершенном множестве $\mathcal{P}$, если для любой порции $\mathcal{P}$ существует ее подпорция, для которой простая вариация $F(x)$ существует. — *Примеч. пер.*

Если все числа e определены, то мера порции Q , соответствующей какой-либо порции $\mathcal{P}_1$, определена единственным образом. Обозначим через $e(x)$ меру порции Q , соответствующую порции $\mathcal{P}_1$, содержащейся между a и x . Более точно: для точки x , лежащей между двумя сегментами ранга n , определим $e(x)$ как сумму всех чисел e , соответствующих сегментам ранга n , лежащим левее x . Функция $e(x)$, непрерывная и возрастающая, определена тем самым на всех смежных интервалах множества $\mathcal{P}_1$. Доопределим $e(x)$ на $\mathcal{P}_1$ по непрерывности.

Функция, обратная к функции $\psi(x) = x + e(x)$, является искомой функцией $\varphi(x)$; очевидно, что она удовлетворяет условию 5.

Определим сегменты $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и числа $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ следующим способом по индукции. Предположим, что $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ уже определены. Определим целое число $N_{i_1 i_2 \dots i_n}$, сегменты $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ и числа $e_{i_1 i_2 \dots i_n k}$. Взяв $N_{i_1 i_2 \dots i_n}$ достаточно большим и выбрав сегменты соответствующим образом, можно добиться, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Каждый сегмент $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ содержится в $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и содержит совершенную порцию множества $\mathcal{P}$.

2. Длина $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ меньше $1/n$.

3. Сегменты $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ не перекрываются и расположены в порядке возрастания индекса k .

4. Обозначим через $w_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ и $w''_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ минимум $|F(x) - F(y)|$, где x принадлежит $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k}$, а y принадлежит $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k-1}$ для w' или $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n k+1}$ для w'' . Обозначим далее через $w_{i_1 i_2 \dots i_n k}$ наибольшее из чисел w', w'' . В этих обозначениях потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{N_{i_1 \dots i_n}} w_{i_1 i_2 \dots i_n k} = W_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq n e_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

Определим еще

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n k} = \frac{w_{i_1 i_2 \dots i_n k}}{W_{i_1 i_2 \dots i_n}} e_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

При $n = 1$ берем единственный сегмент $\Delta_1 = \Delta$ и $e_1 = 1$. Так определенные числа e удовлетворяют предшествующим условиям.

Определив таким образом функцию $\varphi(x)$, покажем, что в каждой точке плотности множества Q функция $F[\varphi(x)]$ не имеет асимптотической производной.

В самом деле, такая точка x содержится в последовательности сегментов $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ с возрастающим индексом n . Мера $e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ порции множества Q , содержащейся в сегменте $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, отличается от длины этого сегмента на величину, которая является бесконечно малой более высокого порядка, чем эта длина (в силу того что x — точка

плотности Q). Предположим, что соответствующее число $w_{i_1 i_2 \dots i_n}^1$ больше или равно $w_{i_1 i_2 \dots i_n}^2$ (противоположный случай аналогичен). В этом случае $w_{i_1 i_2 \dots i_n}^1 = w_{i_1 i_2 \dots i_n}^2 \leq w_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}^1$, а значит, по построению чисел e : $e_{i_1 i_2 \dots i_n} \leq e_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$. Значит, длина сегмента $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ может превосходить длину сегмента $\delta_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$ только на величину, которая является бесконечно малой более высокого порядка, чем их длины. Расстояние между этими сегментами также является величиной бесконечно малой по отношению к этим длинам. С другой стороны, ввиду свойства 4 сегментов Δ и определения чисел e и w имеем

$$\begin{aligned} |F[\varphi(x)] - F[\varphi(y)]| &\geq w_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq \\ &\geq e_{i_1 i_2 \dots i_n} (n-1) \end{aligned}$$

для каждого y , принадлежащего сегменту $\delta_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$. Отсюда легко следует, что функция $F[\varphi(x)]$ не имеет асимптотической производной в точке x (см. рис. 1).

Заменяя свойство 6^а свойством 6^б, которое требует, чтобы $f(x)$ совпадала с обычной производной $F'(x)$ всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль, получаем определение интеграла, эквивалентное первому определению Данжуа.

V

Итак, для получения дальнейших обобщений упорядоченного интеграла необходимо иметь более общее определение производной, чем асимптотическая производная. Я приведу здесь определение производной, приемлемое для этой цели. Это определение лишь демонстрирует возможности обобщения интеграла Данжуа с сохранением всех свойств упорядоченного интеграла. Глубокое изучение определений такого рода еще предстоит осуществить.

Вначале следует обобщить понятие плотности множеств. Без потери общности можно ограничиться изучением плотности справа от начала координат. Пусть $y = \varphi(x)$ — функция, имеющая такие две первые производные, что

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \varphi''(x) > 0 \quad \text{для } x > 0.$$

В этом случае каждому множеству E_y на оси y соответствует множество E_x на оси x и наоборот. Можно доказать следующие утверждения:

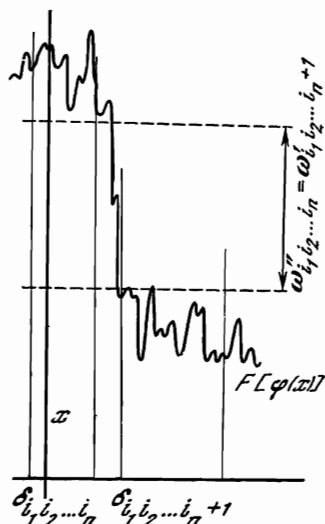


Рис. 1

1) если E_y имеет определенную правую плотность в точке 0, то множество E_x также имеет определенную плотность, которая равна плотности множества E_y ;

2) E_x может иметь определенную плотность, в то время как E_y таковой не имеет.

В связи с этим становится естественным ввести такое определение обобщенной плотности: в качестве обобщенной плотности E_y в точке 0 брать обычную плотность E_x , если она существует. Однако такое определение зависит от выбора функции $\varphi(x)$. Эта ситуация подобна возникающей в суммировании расходящихся рядов: может случиться, что для двух различных функций φ плотности множества не совпадают. Мы должны, таким образом, выбрать определенную функцию $\varphi(x)$. Чтобы исключить неопределенность, ограничимся функцией

$$y = \varphi(x) = e^{-1/x},$$

удовлетворяющей приведенным условиям при $x < 1$. Это вызвано тем, что данная функция обладает таким свойством: если E_y с помощью функции $y = e^{-1/x}$ отображается в множество E_x определенной плотности, то с помощью другой произвольной функции φ оно отображается либо в множество, плотность которого равна предыдущей, либо в множество неопределенной плотности.

Это показывает, что данный метод определения обобщенной плотности приводит нас к таким же результатам, как и все другие методы. Чтобы продвинуться дальше, нужно будет, по-видимому, ввести новые аксиомы для плотности.

При помощи введенного определения обобщенной плотности легко получить определение производной более общее, чем определение асимптотической производной. Можно показать, что такое обобщение производной приводит с помощью метода § 3 к определению интеграла, более общему, чем у Данжуа. Это значит, что максимальная система $\mathcal{K}_m$, соответствующая новой производной, является более обширной, чем система $\mathcal{K}_m^a$. Вот пример примитивной $F(x)$ нашей системы, которая не является примитивной $\mathcal{K}_m^a$:

$$\begin{aligned} f_{\Delta}(x) &= x/\Delta, & \text{если } 0 \leq x \leq \Delta; \\ f_{\Delta}(x) &= 1, & \text{если } \Delta \leq x \leq 1/2; \\ f_{\Delta}(x) &= 1 - (x - 1/2)/\Delta, & \text{если } 1/2 \leq x \leq 1/2 + \Delta; \\ f_{\Delta}(x) &= 0, & \text{если } 1/2 + \Delta \leq x \leq 1; \\ f_{\Delta}(x+1) &= f_{\Delta}(x); \\ \varphi_{\Delta}(x) &= \Delta f_{\Delta}(x/\Delta), \\ \psi_n(x) &= \varphi_{\Delta_n}(x), & \text{если } \psi'_k(x) = 0 \text{ для всех } k < n; \end{aligned}$$

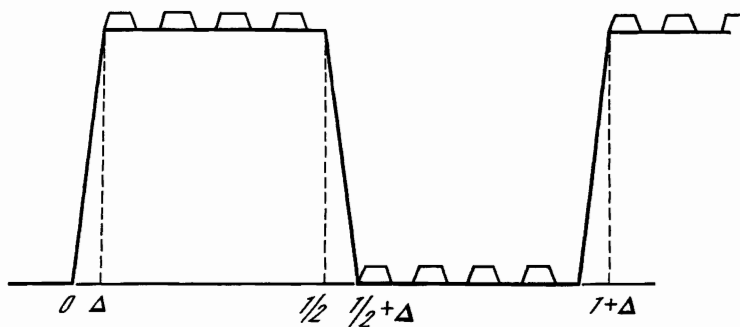


Рис. 2

$\psi_n(x) = 0$, если $\psi'_k(x) \neq 0$ для некоторого $k < n$;

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x).$$

Константы Δ_n должны уменьшаться достаточно быстро и отношение Δ_n/Δ_{n+1} должно быть целым (см. рис. 2).

VI

Таким образом, любое обобщение интеграла Данжуа связано с обобщением асимптотической производной. Для поисков границы такого обобщения введем вместо свойства 6 системы $\mathcal{K}$ следующее свойство.

б. Если $F(x)$ имеет асимптотическую производную $F'(x)$ на множестве E , то она равна $f(x)$.

Мы обозначим через $\overline{\mathcal{K}}$ систему $\mathcal{K}$ обладающую⁶ свойством б.

Система аксиом 1—б неполна (смотри конец § 3), т. е. в двух системах $\overline{\mathcal{K}}_1$ и $\overline{\mathcal{K}}_2$ одной производной могут соответствовать две различные примитивные. Но эта система аксиом достаточна для ограничения области упорядоченного интегрирования. Точнее, можно показать, что функция $f(x)$, не суммируемая ни на каком интервале, содержащемся в сегменте Δ , не может быть производной в системе $\overline{\mathcal{K}}$.

⁶ Если некоторая функция f входит в класс k системы $\overline{\mathcal{K}}$ и совпадает на интервале Δ с функцией f^a , принадлежащей классу k_m^a (это значит, что она тотализуема), то примитивная F может отличаться на Δ от примитивной F^a только на постоянную. Значит, каждый интеграл, удовлетворяющий аксиомам 1—б, совпадает с интегралом Данжуа, если оба существуют. Это немедленно вытекает из примечания к разделу III.

Доказательство. Условимся говорить, что функция $F(x)$ растет на сегменте $\Delta = (a, b)$, если для произвольного x , лежащего между a и b , $F(a) < F(x) < F(b)$. (Это определение не соответствует обычному определению, но для нас оно пригодно). Если функция $F(x)$ непрерывна и $F(a) < F(b)$ для сегмента $\Delta = (a, b)$, то найдется такой сегмент $\Delta' = (a', b')$, содержащийся в Δ , что функция F возрастает на этом сегменте и $F(a') = F(a)$, $F(b') = F(b)$.

Допустим, что функция F_1 растет на сегменте $\Delta_1 = (a_1, b_1)$, а функция F_2 растет на сегменте $\Delta_2 = (a_2, b_2)$. В этом случае обозначим сегмент $\delta = \{[F_1(a_1) + F_2(a_2), F_1(b_1) + F_2(b_2)]\}$ через

$$R[F_1, F_2, \Delta_1, \Delta_2].$$

Допустим, что существует система $S_1 = [\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^n]$ из конечного числа непересекающихся сегментов, которые расположены в порядке роста их индексов, и пусть функция F_1 растет на каждом сегменте Δ_1^k . Предположим еще, что для функции F_2 существует система $S_2 = [\Delta_2^1, \Delta_2^2, \dots, \Delta_2^n]$ с таким же числом сегментов, имеющая аналогичные свойства. Тогда каждой паре сегментов Δ_1^k и Δ_2^k соответствует сегмент

$$\delta^k = (\alpha^k, \beta^k) = R[F_1, F_2, \Delta_1^k, \Delta_2^k].$$

Предположим, наконец, что сегменты δ^k расположены таким образом, что $\beta^{k+1} > \beta^k$, $\alpha^{k+1} \leq \beta^k$. Тогда сумма сегментов δ^k есть сегмент. Обозначим его через

$$R[F_1, F_2, S_1, S_2] = \delta.$$

Лемма I. Пусть сегмент $R[F_1, F_2, S'_1, S'_2] = \delta'$ содержит сегмент (a, b) и сегмент $R[F_1, F_2, S''_1, S''_2] = \delta''$ содержит сегмент (b, c) , причем $a < b < c$, и пусть системы S'' лежат целиком справа от соответствующих систем S' . Тогда можно извлечь систему S_1 из систем S'_1 и S''_1 и систему S_2 из систем S'_2 и S''_2 таким способом, что сегмент

$$R[F_1, F_2, S_1, S_2] = \delta$$

содержит сегмент (a, c) .

Лемма II. Если $R[F_1, F_2, \Delta_1, \Delta_2] = \delta$, где функции F_1 и F_2 непрерывны и каждая имеет неограниченную вариацию на любом интервале, содержащемся в соответствующем сегменте, то можно найти системы S_1 и S_2 произвольно малой меры, содержащиеся в сегментах Δ_1 и Δ_2 такие, что

$$R[F_1, F_2, S_1, S_2] = \delta.$$

Доказательство. По условию функция F_1 растет на $\Delta_1 = (a_1, b_1)$ с $F_1(a_1)$ до $F_1(b_1)$. Разобьем сегмент точкой c_1 на две

Posons:

$$\xi_1(x) = \max_{\substack{\text{sur } P_1 \\ z=a}}^{z=x} \{F(z) + F_1[\xi_1(z)]\},$$

$$\xi_2(x) = \max_{\substack{\text{sur } P_2 \\ z=a}}^{z=x} \{F(z) + F[\xi_2(z)]\}.$$

Les fonctions

$$\psi_1(x) = x + \xi_1(x) + \zeta_1(x)$$

$$\text{et } \psi_2(x) = x + \xi_2(x) + \zeta_2(x)$$

transforment les ensembles P_1 et P_2 dans un même ensemble Ω de mesure positive δ . Les fonctions inverses $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ satisfont à la condition inverse. On peut démontrer que la fonction

$$\phi(x) = F[\varphi_1(x)] + F[\varphi_2(x)]$$

à une dérivée asymptotique égale à 1 presque partout sur Ω .

Ainsi nous arrivons à une contradiction, car $\phi(x)$ étant une primitive dans le système $\mathcal{F}$ devrait avoir presque partout sur Ω la dérivée égale à zéro. En effet

$$\phi'(x) = F[\varphi_1(x)] \varphi_1'(x) + F[\varphi_2(x)] \varphi_2'(x) = 0.$$

Le théorème suivant, qui est plus fort, est probable: dans le système $\mathcal{F}$ il ne peut exister de dérivée non sommable sur chaque portion d'un ^{certain} ensemble parfait P . Mais nos méthodes sont impuissantes à la démontrer.

A. Kolmogoroff

Moscou 14-II-25.

части (a_1, c_1) и (c_1, b_1) так, что функция F_1 растет на (a_1, c_1) . Это можно сделать таким образом, что (a_1, c_1) будет произвольно малым. Разделим еще $\Delta_2 = (a_2, b_2)$ на два сегмента (a_2, c_2) и (c_2, b_2) таких, что F_2 растет на (c_2, b_2) и так, что этот сегмент является достаточно малым.

Можно найти для сегмента (a_1, c_1) систему $S_{11} = [\Delta'_{11}, \Delta^2_{11}, \dots, \Delta^n_{11}]$ сегментов $\Delta^k_{11} = (a^k_{11}, b^k_{11})$, расположенных в порядке роста их индексов и удовлетворяющих следующим равенствам и неравенствам:

$$a^1_{11} = a_1, \quad b^n_{11} = c_1,$$

$$F(b^k_{11}) > F_1(a^k_{11}), \quad F(b^k_{11}) > F_1(a^{k+1}_{11}),$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_1(b^k_{11}) - F_1(a^k_{11}) > [F_1(c_1) + F_2(c_2)] - [F_1(a_1) - F_2(a_2)].$$

Это возможно, так как F_1 имеет неограниченную вариацию на (a_1, c_1) . Можно предположить еще, что F_1 растет на каждом сегменте Δ^k_{11} . Теперь можно найти на сегменте (a_2, c_2) соответствующую систему S_{12} произвольно малой меры и такую, что

$$R[F_1, F_2, S_{11}, S_{12}] = \delta_1 = \{[F_1(a_1) + F_2(a_2)], [F_1(c_1) + F_2(c_2)]\}$$

(см. рис. 3).

Так же можно построить на сегментах (c_1, b_1) и (c_2, b_2) системы S_{21} и S_{22} такие, что

$$R[F_1, F_2, S_{21}, S_{22}] = \delta_2 = \{[F_1(c_1) + F_2(c_2)], [F_1(b_1) + F_2(b_2)]\}.$$

Построение системы S_{22} аналогично построению системы S_{11} и построение S_{21} подобно построению S_{12} . Затем лемма I позволяет извлечь из систем $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ две искомые системы S_1 и S_2 .

Возвращаясь к главной теме этого раздела, предположим, вопреки утверждению, которое мы хотим доказать, что в системе $\mathcal{K}$ существует производная $f(x)$, не суммируемая ни на каком интервале, принадлежащем сегменту Δ . Соответствующая примитивная $F(x)$ не может быть функцией ограниченной вариации ни на каком интервале, принадлежащем Δ . Выберем в Δ сегмент $\Delta' = (a', b')$, на котором функция F растет с $F(a')$ до $F(b')$. Применим лемму II к функциям $F_1 = F$, $F_2 = F$ и сегментам $\Delta_1 = \Delta'$ и $\Delta_2 = \Delta'$. Мы получим две системы S_1 и S_2 с произвольно малыми мерами такие, что

$$R[F, F, S_1, S_2] = R[F, F, \Delta', \Delta'] = \delta.$$

Применяя к каждой паре соответствующих сегментов систем S_1 и S_2 ту же лемму, мы получим две новые системы S^1_1 и S^1_2 , содержа-

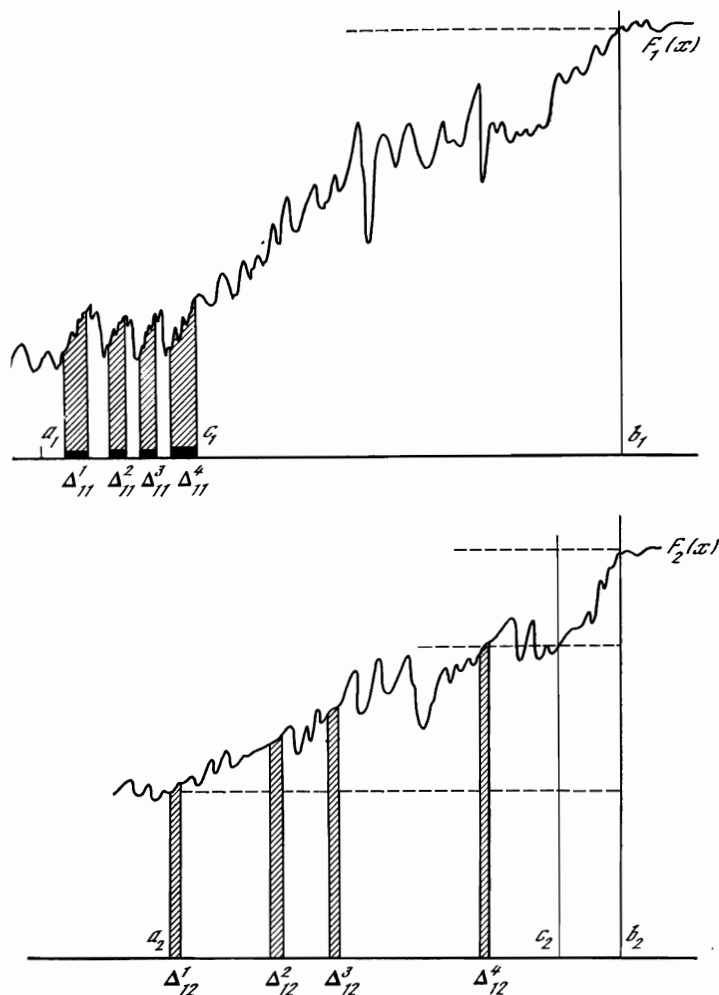


Рис. 3

щиеся в системах S_1 и S_2 и такие, что

$$R[F, F, S_1^1, S_2^1] = \delta.$$

Повторяя эту операцию, можно получить последовательность пар систем S_1^n, S_2^n с мерами, стремящимися к нулю. Обозначим через $\mathcal{P}_1$ совершенное множество, являющееся пределом систем S_1^n , и через $\mathcal{P}_2$ — такое же множество для систем S_2^n . Эти множества меры нуль. По их определению они находятся во взаимно однозначном соответствии с сохранением порядка и непрерывности. Про-

должим это соответствие на дополнительные интервалы. Пусть $\xi_1(x)$ — функция, которая осуществляет наложение $\mathcal{P}_1$ на $\mathcal{P}_2$, а $\xi_2(x)$ — такая, которая осуществляет наложение $\mathcal{P}_2$ на $\mathcal{P}_1$. Легко видеть, что выражение $F(x) + F[\xi_1(x)]$ возрастает на $\mathcal{P}_1$, а выражение $F(x) + F[\xi_2(x)]$ таким же образом возрастает на $\mathcal{P}_2$.

Положим,

$$\zeta_1(x) = \max_{a \leq \alpha \leq x, \alpha \in \mathcal{P}_1} \{F(\alpha) + F[\xi_1(\alpha)]\},$$

$$\zeta_2(x) = \max_{a \leq \alpha \leq x, \alpha \in \mathcal{P}_2} \{F(\alpha) + F[\xi_2(\alpha)]\}.$$

Функции

$$\psi_1(x) = x + \xi_1(x) + \zeta_1(x)$$

и

$$\psi_2(x) = x + \xi_2(x) + \zeta_2(x)$$

преобразуют множества $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ в одно и то же множество Q положительной меры δ . Обратные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условию 5. Можно показать, что функция

$$\Phi(x) = F[\varphi_1(x)] + F[\varphi_2(x)]$$

имеет асимптотическую производную, равную 1 почти всюду на Q .

Таким образом, мы получили противоречие, так как примитивная системы $\mathcal{K}$ обязана иметь почти всюду на Q производную, равную нулю. В самом деле,

$$\Phi'(x) = f[\varphi_1(x)] \varphi_1'(x) + f[\varphi_2(x)] \varphi_2'(x) = 0.$$

Вероятно, верна следующая более сильная теорема: *в системе $\mathcal{K}$ не может существовать производной, не суммируемой на каждой порции некоторого совершенного множества*. Но наши методы недостаточны для ее доказательства.

Москва, 14 февраля 1925 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A. La définition axiomatique de l'intégrale.— C. r. Acad. sci. Paris, 1925, vol. 180, p. 110—112.
2. Kolmogoroff A. Untersuchungen über den Integralbegriff.— Math. Ann., 1930, Bd. 103, S. 659—696.
3. Lebesgue H. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, 1904.
4. Denjoy A. Sur la dérivation et son calcul inverse.— C. r. Acad. sci. Paris, 1916, vol. 162, p. 377—380.

7

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБЩЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОИЗВОДНОЙ, ИНТЕГРАЛА И СУММИРОВАНИЯ
РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ*

I. Всякий способ обобщенного дифференцирования, приемлемый для приложений, должен удовлетворять следующим условиям.

1°. Обобщенная производная совпадает с обычной производной, если эта производная существует.

2°. Если $\varphi(x) = af(x)$, то функция $\varphi(x)$ дифференцируема в тех же точках, что $f(x)$ и $\varphi'(x) = af'(x)$.

3°. Если $\varphi(x) = f(ax)$ и функция $f(x)$ дифференцируема в точке ax_0 , то $\varphi'(x_0) = af'(ax_0)$.

4°. Если $\varphi(x) = f(x+h)$ и функция f дифференцируема в точке x_0+h , то $\varphi'(x_0) = f'(x_0+h)$.

5°. Если f_1, f_2 обе дифференцируемы в точке x_0 , то функция $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ также дифференцируема в точке x_0 и

$$\varphi'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0).$$

Если хотим ввести бесконечную производную, то должны выполняться следующие условия:

если $a > 0$, то $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$,

если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$, $+\infty + a = +\infty$, $-\infty + a = -\infty$.

Пусть все предыдущие условия выполнены, тогда если функция

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3^n x}{3^n}$$

имеет производную, конечную или бесконечную на множестве положительной меры, то эта производная есть функция неизмеримая.

II. Если есть метод суммирования расходящихся рядов, который удовлетворяет условиям:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} av_n = a \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

и если при помощи его можно определить сумму, конечную или бесконечную для каждого ряда вида $\sum \sin 3^n x$, то можно построить эффективный пример функции, неизмеримой по Лебегу.

* Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée, de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes.—C. r. Acad. sci. Paris, 1925, vol. 180, p. 362—364. Представлено Э. Борелем. Перевод Л. А. Балашова.

III. Пусть для данного определения интеграла выполняются:

$$(1) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

$$(3) \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

При этих условиях, если можно определить интегралы

$$\int_0^1 f_t(x) dx$$

(функции f_t будут определены ниже), конечные или бесконечные для всех точек некоторого множества положительной меры, то можно построить пример функции, не измеримой по Лебегу. Здесь

$$f_t = 2^n \sin 3^n t, \quad \text{когда } \frac{1}{2^{n-1}} \geq x > \frac{1}{2^n}.$$

Доказательства довольно длинные, но почти очевидны.

26 января 1925 г.

8

О ГАРМОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И РЯДАХ ФУРЬЕ *

Привалов [1] доказал следующую теорему:

Если $f(\theta)$ — суммируемая функция и

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \theta)} d\alpha,$$

то при z , стремящемся к $e^{i\theta}$ по любому пути, некасательному к окружности, гармоническая функция $g(z)$, сопряженная к $f(z)$, стремится для почти всех значений θ к определенному пределу

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta + \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} d\alpha,$$

* Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier.—Fund. math., 1925, vol. 7, p. 24—29. Перевод Т. П. Лукашенко.

где интеграл понимается как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}.$$

Вообще говоря, $g(\theta)$ является несуммируемой функцией [2]. Я докажу в этой заметке, что функция $|g(\theta)|^{1-\varepsilon}$ суммируема при $\varepsilon > 0$ (теорема II). Как непосредственное следствие я докажу теорему (III) о сходимости в среднем рядов Фурье, из которой вытекает теорема, что всякий ряд Фурье — Лебега сходится по мере.

Т е о р е м а I. Рассмотрим множество E всех точек θ , для которых $|g(\theta)| > R$, R — произвольное число. При этих условиях имеем

$$R \text{ mes } E \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta,$$

где C — абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что не существует такой постоянной C , удовлетворяющей указанному неравенству. В этом случае для каждого n существуют функция $f_n(\theta)$, множество E_n и постоянная R_n такие, что:

1) $|g_n(\theta)| > R_n$, если θ принадлежит множеству E_n ;

2) $R_n \text{ mes } E_n > n$;

3) $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(\theta)| d\theta < 1$.

Дополнительно предположим, что функции $f_n(\theta)$ и $g_n(\theta)$ непрерывны; это возможно, если, например, положить $\bar{f}_n(z) = f_n(z\rho)$, $\bar{g}_n(z) = g_n(z\rho)$, где $\rho < 1$, а $1 - \rho$ настолько мало, что сохраняются условия 1), 2), 3).

Без труда можно доказать, беря, если необходимо, некоторые n_k последовательно равными между собой, существование последовательности $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty,$$

(A) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes } E_{n_k}$ расходится,

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{mes } E_{n_k}}{\sqrt{n_k}}$ сходится.

Следовательно, положив $a_k = \frac{\sqrt{n_k}}{R_{n_k}} < \frac{\text{mes } E_{n_k}}{\sqrt{n_k}}$, будем иметь

(B) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

(C) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k R_{n_k} = \infty$.

Рассмотрим сумму (p_n — целые числа)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(z^{p_k}) = \varphi(z).$$

Этот ряд сходится почти всюду на окружности $\rho = 1$ к некоторой суммируемой функции, так как в силу 3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |a_k f_{n_k}(e^{ip_k \theta})| d\theta < \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

и к интегралу Пуассона от этой функции внутри круга. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_{n_k}(z^{p_k}) = \psi(z)$$

сходится к сопряженной функции внутри круга.

Определим две последовательности

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots \rightarrow \infty,$$

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_k < \dots \rightarrow 1,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

I. Если $\tilde{E}_k$ множество точек $e^{i\theta}$ таких, что точки $e^{ip_k \theta}$ принадлежат множеству E_{n_k} , и если E является верхним пределом множеств $\tilde{E}_k$, то

$$\text{mes } E = 2\pi.$$

II. Для всех значений θ и $1 > \rho \geq \rho_k$ имеем

$$\left| \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(\rho e^{i\theta})^{p_q}] - \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(e^{i\theta})^{p_q}] \right| < 1,$$

$$|a_k g_{n_k}[(\rho e^{i\theta})^{p_k}] - a_k g_{n_k}[(e^{i\theta})^{p_k}]| < 1.$$

III. Для всех θ и $\rho \leq \rho_k$ имеем

$$\left| \sum_{q=k+1}^{\infty} a_q g_{n_q}[(\rho e^{i\theta})^{p_q}] \right| < 1.$$

В самом деле: 1) можно доказать, что условие I выполнено, если числа p_k возрастают достаточно быстро¹; 2) если даны $p_1, p_2, \dots, p_k$, то можно выбрать ρ_k таким, что условие II выполнено в силу непрерывности функций $g_n(\theta)$; 3) условию III удовлетворим, выбирая $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$ такими большими, что $\rho_k^{p_{k+1}}, \rho_k^{p_{k+2}}, \rho_k^{p_{k+3}}, \dots$ достаточно малы, и тогда условие III будет выполнено, ибо $g_n(0) = 0$.

Рассмотрим точку θ , принадлежащую множеству E_k . В силу III и II

$$\begin{aligned} \psi(\rho_k, \theta) &= \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q} [(\rho_k e^{i\theta})^{p_q}] + a_k g_{n_k} [(\rho_k e^{i\theta})^{p_k}] + \\ &+ \sum_{q=k+1}^{\infty} a_q g_{n_q} [(\rho_k e^{i\theta})^{p_k}] = \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q} [e^{ip_q \theta}] + a_k g_{n_k} [e^{ip_k \theta}] + \tau, \\ |\tau| &< 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\rho_{k-1}, \theta) &= \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q} [(\rho_{k-1} e^{i\theta})^{p_q}] + \sum_{q=k}^{\infty} a_q g_{n_q} [(\rho_{k-1} e^{i\theta})^{p_k}] = \\ &= \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q} [e^{ip_q \theta}] + \tau', \quad |\tau'| < 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\psi(\rho_k, \theta) - \psi(\rho_{k-1}, \theta)| > |a_k g_{n_k} [e^{ip_k \theta}]| - 5 > |a_k R_{n_k}| - 5.$$

Из этого результата имеем (см. I и (C)), что для всякой точки θ множества E функция $\psi(\rho, \theta)$ не стремится к пределу, когда ρ стремится к единице. Противоречие с результатом Привалова доказывает теорему.

Т е о р е м а II. Для $1 > \varepsilon > 0$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^{1-\varepsilon} d\theta \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta \right)^{1-\varepsilon},$$

где C — абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на следующих замечаниях: а) мера множества, на котором $|g(\theta)| > R$, меньше меры множества, на котором $|1/\theta| > R$, умноженной на $C \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta$, и б) функция $|1/x|^{1-\varepsilon}$ суммируема.

¹ Доказательство этого длинное; оно может быть основано на расхождении ряда (A) и на следующем замечании: если даны измеримые множества $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_{k-1}$, то можно выбрать p_k таким большим, что множество $\tilde{E}_k$ расположено довольно равномерно на окружности и мера пересечения $\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \dots \tilde{E}_{k-1}$ с $\tilde{E}_k$ близка к произведению мер, деленному на 2π .

Т е о р е м а III. Если $f(x)$ — суммируемая функция, а S_n — сумма n первых членов ее ряда Фурье, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)|^{1-\varepsilon} dx = 0 \quad (1)$$

для $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\alpha)}{\alpha} \sin n\alpha d\alpha + \omega_n(x),$$

где $\omega_n(x)$ стремится к нулю равномерно. Аналогичным образом можно записать

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} \sin n\alpha d\alpha + \omega'_n(x),$$

где $\omega'_n \rightarrow 0$ равномерно.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_n - \omega'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} \sin n\alpha d\alpha = \\ &= \frac{\cos nx}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\alpha) \sin n(x+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} d\alpha - \\ &- \frac{\sin nx}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\alpha) \cos n(x+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} d\alpha, \end{aligned}$$

где интегралы взяты как $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right)$.

Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — функции, сопряженные к $f(x)\sin nx$, $f(x)\cos nx$,

то имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^{1-\varepsilon} dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (|\cos nx \varphi(x)| + |\sin nx \psi(x)| + |\omega'_n(x)|)^{1-\varepsilon} dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (|\varphi(x)|^{1-\varepsilon} + |\psi(x)|^{1-\varepsilon} + |\omega'_n(x)|^{1-\varepsilon}) dx \leq \end{aligned}$$

² Для $\varepsilon = 0$ это неверно, см. [3].

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \sin nx| dx \right)^{1-\varepsilon} + \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) \cos nx| dx \right)^{1-\varepsilon} + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} |\omega'_n(x)|^{1-\varepsilon} dx \leq \frac{2C}{\varepsilon} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \right)^{1-\varepsilon} + \int_{-\pi}^{\pi} |\omega'_n(x)|^{1-\varepsilon} dx. \quad (2)$$

Для любого $h > 0$ построим две функции $f'(x)$, $f''(x)$ такие, что:

1. $f'(x) + f''(x) = f(x)$;

2. $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx \right)^{1-\varepsilon} < \frac{h\varepsilon}{4C}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^{1-\varepsilon} dx < \frac{h}{2}$;

3. $f'(x)$ непрерывна и тогда она удовлетворяет условию (1).

Применяя формулу (2) к $f''(x)$ и обозначая через S'_n , S''_n частичные суммы рядов Фурье от f' , f'' , мы получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^{1-\varepsilon} dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x) - S'_n(x)|^{1-\varepsilon} dx + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^{1-\varepsilon} dx + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S''_n|^{1-\varepsilon} dx < h.$$

Это доказывает теорему.

Москва, февраль 1923 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Интеграл Коши. Саратов, 1919.
2. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М., 1915.
3. Banach S., Steinhaus H. Sur la convergence en moyenne. — Bull. Acad. Cracovie, 1918.

9

О ПРИНЦИПЕ TERTIUM NON DATUR *

ВВЕДЕНИЕ

Работами Брауэра обнаружена незаконность употребления принципа tertium non datur ¹ в области трансфинитных умозаключений. Нашей задачей является выяснение причины того, что это незаконное употребление не привело до сего времени к противоречиям и даже самая незаконность его оставалась часто незамеченной.

* Мат. сб., 1925, т. 32, № 4, с. 646—667.

¹ Tertium non datur (лат.) — третьего не дано; название, употреблявшееся схоластиками для закона исключенного третьего. — Примеч. ред.

Значение в приложениях могут иметь лишь финитные выводы математики. Но для обоснования финитных выводов часто употребляются трансфинитные умозаключения. Брауэр считает поэтому, что и интересующиеся лишь финитными результатами математики не могут пренебрегать интуитивистской критикой принципа *tertium non datur*.

Мы доказываем, что все финитные выводы, полученные посредством трансфинитного применения принципа *tertium non datur*, верны и могут быть доказаны и без его помощи.

Естественен вопрос: имеют ли какой-либо смысл те трансфинитные посылки, которые послужили для получения правильных финитных выводов?

Мы доказываем что всякий вывод, полученный при помощи принципа *tertium non datur*, верен, если только вместо каждого суждения, входящего в его формулировку, поставить суждение, утверждающее его двойное отрицание. Мы назвали двойное отрицание суждения его «псевдоистинностью». Таким образом, в математике псевдоистинности законно применение принципа *tertium non datur*.

Необходимость введения подобных понятий «псевдосуществования» и «псевдоистинности» давно чувствовалась в математике, хотя бы в связи с вопросом об аксиоме Цермело. Но только теперь один из видов псевдоистинности получил строгое определение и обоснование в виде аксиом, применимых в области псевдоистинности и не применимых к подлинной истинности.

I. ФОРМАЛЬНАЯ И ИНТУИТИВИСТСКАЯ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

§ 1. С формальной стороны математика является совокупностью формул (см. [1, с. 152]). Формулы — это комбинации определенного запаса элементарных символов. В основе математики лежат определенная группа формул, называемых аксиомами, и определенные правила построения новых формул, исходя из данных (формул); такими правилами являются в настоящее время вывод по схеме $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z} \mid \mathfrak{Z}$ и правила подстановки частных значений вместо символов переменных различного рода.

Определенная группа формул в противоположность аксиомам, заведомо «истинным», признается заведомо «ложной». Система аксиом называется «непротиворечивой», если в результате вывода из них, совершаемого согласно правилам, не может получиться ни одной из формул, считаемых «ложными».

§ 2. Формальная точка зрения на математику утверждает, что выбор аксиом, лежащих в основе ее, произволен и подчиняется лишь соображениям практического удобства, лежащим вне математики

и, конечно, более или менее условным². Единственное абсолютное требование, предъявляемое каждому математическому учению, это, с рассматриваемой точки зрения, требование непротиворечивости лежащих в его основе аксиом.

Истинными называются формулы, доказуемые на основании аксиом, ложными — приводящие к противоречию. Вопрос о истинности или ложности непротиворечивой, но и недоказуемой формулы с формальной точки зрения не имеет смысла. Существование таких формул указывает на неполноту системы аксиом. Неполная система аксиом может быть пополнена, если это почему-либо желательно, путем признания за аксиому одной из недоказуемых и непротиворечивых формул или, с таким же правом, ей противоположной. Выбор формулы, принимаемой за новую аксиому, среди различных противоречащих друг другу подчинен таким образом лишь соображениям удобства.

§ 3. Интуитивистская точка зрения исходит из признания реального значения математических предложений. Аксиомы, лежащие в основе математики, признаются за выражение данных нам фактов. Эта точка зрения допускает формальный метод изучения математических построений как один из возможных, но противоречит формальному взгляду на математику в целом.

Совершенно иначе, чем с чисто формальной, решается с интуитивистской точки зрения вопрос о природе недоказуемых, но и непротиворечивых предложений. Пусть для некоторой области математики, например геометрии, дана система аксиом. Аксиомы эти являются выражением свойств объекта изучения, в частном случае — пространства. Пусть далее, некоторое предложение избранной области не может быть доказано на основании данных аксиом, но и не приводит к противоречию. С интуитивистской точки зрения может представиться два случая. Во-первых, может случиться, что истинность или же ложность рассматриваемого предложения следует из непосредственного усмотрения; в этом случае можно принять в качестве новой аксиомы данное предложение, если оно истинно, или, если оно ложно, ему противоположное. Во-вторых, может случиться, что предложение неопределенно, т. е. истинность его или ложность не извлекаются из непосредственного усмотрения; в этом случае можно лишь попытаться вывести рассматриваемое предложение из других непосредственно очевидных; если же это не удастся, то необходимо считать предложение неопределенным, так как возможно, что впоследствии нам придется принять как очевидно истинные аксиомы, из которых можно будет вывести его истинность или ложность, что же именно — неизвестно.

² См. [2, введение]. Близок к этой точке зрения и Гильберт: для него абсолютными истинами (*absolute Wahrheiten*) являются лишь предложения «метаматематики», т. е. утверждения о непротиворечивости, но, с другой стороны, и формулы обычной математики (*eigentliche Mathematik*), по его мнению, все же являются выражением некоторых мыслей (*Gedanken*) (см. [1, с. 152—153]).

§ 4. Формальная точка зрения выдвигается и в математической логике. Мы в этой работе сталкиваемся с ней именно на почве логики. Тем не менее основанием для формальной точки зрения в математической логике является отрицание реального значения математических предложений. В самом деле, к реальности никто не предложил бы применять логические формулы, не имеющие реального значения. Таким образом, поскольку математическая логика признается только формальной системой, формулы которой не имеют реального значения, постольку отделяется от общей логики: формальная точка зрения может существовать только в математике и математической логике, но не в обыкновенной логике, претендующей на значимость в применении к действительности.

Мы же не отделяем от общей логики особой «математической логики», но признаем только, что своеобразие математики как науки создает для логики особые проблемы, которые исследуются специальной «логикой математики». Только в ней возникает сомнение в безусловной применимости принципа tertium non datur.

§ 5. Различие двух установленных точек зрения проявляется уже в области логики суждений. Мы понимаем в дальнейшем под общей логикой суждений науку, исследующую свойства произвольных суждений в отношении их истинности, ложности и процесса вывода независимо от их состава (каждое суждение считается неразложимым элементом исследования). Формальное выражение общей логики суждений осуществляется при помощи символов произвольного суждения $A, B, C, \dots$, символа следования $A \rightarrow B$ и символа отрицания $\bar{A}$.

Гильберт предложил следующую систему аксиом логики суждений (см. [1, с. 153]):

Аксиомы следования

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
2. $\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$.
3. $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$.
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$.

Аксиомы отрицания

5. $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$.
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$.

Внутренняя непротиворечивость этих аксиом доказывается крайне элементарно (см. [3]). С формальной точки зрения этого достаточно, чтобы принять их за основу общей логики суждений.

Кроме того, система Гильберта является полной: она не может быть пополнена без противоречия новой независимой аксиомой. Точнее: всякая формула, написанная в символах логики суждений,

хотя бы такая, как

$$\overline{(A \rightarrow B)} \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B}),$$

или может быть доказана на основании аксиом Гильберта или же из нее при помощи тех же аксиом можно извлечь следствие

$$A,$$

т. е. истинность произвольного суждения.

§ 6. С интуитивистской точки зрения взаимная непротиворечивость аксиом Гильберта отнюдь не достаточна для их признания. В следующей главе мы проанализируем источники их значимости для суждений вообще и для частных видов суждений.

Из двух гильбертовых аксиом отрицания аксиома 6 в несколько необычной форме выражает принцип tertium non datur. Необоснованность применения этого принципа к произвольным суждениям была показана Брауэром³. Аксиома 5 употребляется только в символическом изложении логики суждений, поэтому критика Брауэра не коснулась ее, тем не менее она также не имеет интуитивных оснований.

Таким образом, вместе с критикой аксиом Гильберта мы должны будем предложить новые аксиомы отрицания, приложимость которых к произвольным суждениям была бы удостоверена.

³ См. [4, с. 252]. Гильберт тоже считает принцип tertium non datur в применении к бесконечным совокупностям объектов не очевидным интуитивно. Символически он выражает его в этом случае двумя формулами

$$\overline{(a)} A (a) \bar{a}q.(Ea) \bar{A} (a),$$

$$\overline{(Ea)} A (a) \bar{a}q. (a) \bar{A} (a)$$

(см. [1, с. 153]). Что же касается принципа tertium non datur в общей логике суждений (аксиома 6), то Гильберт ничего не говорит о его интуитивной очевидности; по-видимому, он считает ее несомненной. Эти взгляды Гильберта не связаны неразрывно с основной чисто формальной его задачей — исследованием непротиворечивости; они кажутся нам неверными.

Во-первых, аксиома 6 не является интуитивно очевидной. Отношение ее к финитной логике (finite Logik) только кажущееся: в то время как истинность аксиом следования 1—4 усматривается независимо от содержания суждений, истинность аксиомы 6, как будет выяснено в следующей главе, требует для своего оправдания привлечения содержания суждений, содержание же это может быть и трансфинитным.

Во-вторых, если аксиомы 1—6 признаны, то приведенные выше две формулы могут быть доказаны при помощи нескольких аксиом, интуитивная очевидность которых не может подлежать сомнению. Доказательства мы дадим в главе V, для оправдания же следующих ниже исследований достаточно и первого аргумента.

II. АКСИОМЫ ЛОГИКИ СУЖДЕНИЙ

§ 1. Аксиомы общей логики суждений претендуют на значимость для всех суждений; следовательно, они должны вытекать из общих свойств суждений. Конечно, все дальнейшее является отнюдь не определением основных понятий и доказательством аксиом логики суждений, но разысканием об их интуитивных источниках, пользуясь уже всеми понятиями и приемами логики.

Суждение в логике суждений рассматривается как последний элемент исследования. Когда рассматривают суждение независимо от заключенного в нем синтеза субъекта и предиката, остается единственное характеристическое свойство суждения, отличающее его от других видов высказывания, данное Аристотелем ⁴: подлежать оценке с точки зрения истинности и ложности. Естественно попытаться вывести аксиомы общей логики суждений, не выходя за ее собственные пределы, т. е. только из указанного свойства суждения. В какой мере это возможно, мы исследуем в следующих параграфах этой главы.

§ 2. Значение символов $A \rightarrow B$ исчерпывается тем, что убедившись в истинности A , мы обязаны признать истинным и B . Или в формальном освещении: если написана формула A , мы можем написать и формулу ⁵ B . Таким образом, отношение следования между двумя суждениями не устанавливает никакого соотношения между их содержанием.

Первая из гильбертовых аксиом следования, означающая «истинное следует из всего», вытекает из такого формального понимания следования: раз B само по себе истинно, то, признав A , мы также должны считать B истинным. Истинность остальных трех аксиом следования также легко усматривается на основании данного понимания понятия следования. При этом характер рассматриваемых суждений совершенно не затрагивается; следовательно, не может возникнуть сомнений в применимости этих аксиом к произвольным суждениям.

Интересен вопрос о полноте системы четырех аксиом следования. После сказанного о полноте всей гильбертовой системы аксиом логики суждений, вопрос следует поставить так: истинной называется формула, доказываемая при помощи аксиом следования и аксиом отрицания; всякая ли истинная формула, написанная при помощи одних символов произвольного суждения и следования без символа отрицания, может быть доказана на основе одних четырех аксиом следования?

⁴ De interp. 4; De anima III, 6. (Об истолковании, гл. 4; О душе, кн. III, гл. 6 (лат.). См. [8, 9].— Примеч. ред.).

⁵ Именно это выражается схемой гильбертовой метаматематики $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \rightarrow \rightarrow \mathfrak{Z} | \mathfrak{Z}$. Зигварт также считает эту схему наиболее общей схемой всякого вывода (см. [5, с. 372]).

§ 3. В отношении к законченному суждению, рассматриваемому как целое, отрицание является только запрещением признавать суждение истинным. Более полное представление об отрицании можно получить, рассматривая суждение как высказывание предиката о субъекте; отрицание явится тогда утверждением о несоответствии предиката субъекту.

Символ логики суждений $\bar{A}$ естественно выражает первое понимание отрицания как запрещения мыслить суждение A истинным. Между тем обычная логическая традиция сводит это первое понимание ко второму как более первичному⁶. В применении к математическим суждениям это оказывается невозможным.

Действительно, поскольку отрицание суждения является продуктом непосредственного усмотрения, постольку второе понимание, исходящее из идеи неосуществимости того синтеза, который создает суждение, ближе к существу дела, чем первое, опирающееся на чисто формальную идею запрещения. Но в случае получения отрицания в результате вывода сведение первого понимания ко второму уже не необходимо, а в случае математических суждений иногда и невозможно. В самом деле, многие отрицательные суждения математики доказываются путем приведения к противоречию по схеме $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} | \mathfrak{S}$ и не могут быть доказаны иным путем.

Таким образом, первое понимание отрицания является самостоятельным. Оно впервые выделено Брауэром, который определяет отрицание как абсурдность (см. [4]). Оно опирается на второе, так как для вывода отрицательного суждения приведением к противоречию надо уже иметь отрицательные же суждения, но в то же время оно шире его.

§ 4. Первая из аксиом отрицания Гильберта: «из ложного следует все» — появилась лишь с возникновением символической логики, как, впрочем, и первая из аксиом следования. Но в то время, как первая аксиома следования с интуитивной очевидностью вытекает из правильного понимания идеи логического следования, рассматриваемая теперь аксиома не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного: мы обязаны признать B , если признали ложным истинное суждение A .

Таким образом, первая аксиома отрицания Гильберта не может быть аксиомой интуитивистской логики суждений, из какого бы понимания отрицания мы ни исходили. Этим, конечно, не исключается возможность, что она может быть доказуемой на основании других аксиом формальной логики.

§ 5. Вторая аксиома отрицания Гильберта выражает принцип tertium non datur. Он выражен здесь в той форме, в которой применя-

⁶ См., например, [5, с. 135 и след.].

⁷ См. в § 6 о принципе противоречия.

ется для выводов: если B следует из A и из $\bar{A}$, то B истинно. Обычная его форма: «всякое суждение или истинно, или ложно»⁸ — эквивалентна вышеприведенной⁹.

Ясно, что из первого понимания отрицания как запрещения считать суждение истинным нельзя извлечь уверенности в истинности принципа tertium non datur; таких попыток, впрочем, и не делалось. Следовательно, для его оправдания необходимо обратиться к составу суждения: отношению предиката к субъекту. Уже в простейшем случае суждения типа «все A есть B » в рассмотрение неизбежно входят отношения к предикату B всех возможных A , запас которых может быть и бесконечен. Брауэром показано¹⁰, что в случае подобных трансфинитных суждений принцип tertium non datur и с этой точки зрения не может считаться очевидным.

§ 6. Итак с интуитивистской точки зрения ни одна из двух аксиом отрицания Гильберта не может быть принята за аксиому общей логики суждений. Мы предлагаем здесь следующую аксиому, которую назовем принципом противоречия:

$$(3) \quad 5. \quad (A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\}.$$

Смысл ее таков: если из A следует и истинность и ложность некоторого суждения B , то само суждение A ложно.

Обычный принцип противоречия: «суждение не может быть и истинным и ложным» — не может быть сформулирован в терминах произвольного суждения, следования и отрицания. Наш принцип содержит в себе несколько больше, именно: из него в соединении с первой аксиомой следования вытекает и принцип *reductio ad absurdum*: если B верно и из A следует ложность B , то A ложно.

Истинность предлагаемой аксиомы вытекает из простейшего понимания отрицания как запрещения считать суждение истинным и не связана с рассмотрением содержания суждений.

Систему из пяти аксиом: четырех аксиом следования (1) и только что установленной аксиомы отрицания (3) — я буду называть системой $\mathfrak{B}$. Нам неизвестно формул общей логики суждений, обладающих интуитивной очевидностью в применении к произвольным

⁸ Простейшая формулировка Лейбница (см.: *Nouveaux Essais*, IV, 2 («Новые опыты...», кн. IV, гл. 2 (фр.). См. [10]. — *Примеч. ред.*)).

⁹ Символически вторая форма выражается так: $A \vee \bar{A}$, где $\vee$ означает «или». Эквивалентность обеих форм легко доказывается на основании аксиом следования и следующих аксиом, определяющих значение символа $\vee$, заимствованных из работы Аккермана [3]:

1. $A \rightarrow A \vee B$.
2. $B \rightarrow A \vee B$.
3. $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$.

¹⁰ См. [4] или же детально разобранный пример предложения, недоказуемого иначе, как с незаконным применением принципа tertium non datur, в статье [6].

суждениям, недоказуемых на основании этой системы аксиом. Тем не менее вопрос, является ли эта система аксиом полной системой аксиом интуитивистской общей логики суждений, остается открытым.

§ 7. Принцип tertium non datur, как мы видели, хотя и не может быть признан за аксиому общей логики суждений, в ограниченной области суждений, называемых Брауэром финитными, имеет силу. Здесь мы не будем исследовать границу области финитных суждений; задача эта не столь легка, как может показаться; поэтому мы ограничимся признанием, что некоторая такая область существует.

Помимо принципа tertium non datur, в области финитного имеет силу принцип двойного отрицания, выражаемый символически так:

$$(4) \quad 6. \quad \bar{\bar{A}} \rightarrow A.^{11}$$

Само собою разумеется, что все пять аксиом общей логики суждений (система $\mathfrak{B}$) действительны и в области финитного. Систему аксиом, состоящую из аксиом системы $\mathfrak{B}$ (т. е. (1) и (3)) и аксиомы двойного отрицания (4), мы будем называть системой $\mathfrak{F}$.

Система $\mathfrak{F}$ эквивалентна системе аксиом Гильберта (1) и (2). Аксиомы следования в обеих системах общие. Для доказательства, следовательно, достаточно доказать формулы (3) и (4) на основании формул (2) и обратно, пользуясь в обоих случаях аксиомами следования. Доказательство формул (3) и (4) на основании аксиом Гильберта (1) и (2) мы не будем приводить, обратное же, опирающееся на аксиомы (3) и (4), впервые введенные здесь, приводится в следующем параграфе.

Для нас система $\mathfrak{F}$ имеет то преимущество, что получается из системы $\mathfrak{B}$ общей логики суждений путем добавления одной аксиомы двойного отрицания; это значительно облегчает дальнейшие исследования.

Ясно, что система $\mathfrak{F}$, так же как и система Гильберта, является полной. Из нее можно вывести все формулы традиционной логики суждений. Все они являются истинными, если только заменить в них символы произвольного суждения $A, B, C, \dots$ символами произвольного финитного суждения $A^f, B^f, C^f, \dots$. Доказательство этого факта встречает некоторые трудности, которые выясняются и преодолеваются в следующей главе¹².

§ 8. Будем обозначать аксиомы системы $\mathfrak{F}$ (1), (3) и (4) их номерами 1—6. Подчеркнуты (двумя чертами) номера формул, опирающихся на аксиому 6, так как эти формулы имеют силу только в об-

¹¹ Формула $A \rightarrow \bar{\bar{A}}$ доказуема на основании системы $\mathfrak{B}$. См. дальше формулу (34).

¹² См. § 4 гл. III.

ласти финитного, в то время как остальные действительны для произвольных суждений.

$$(5) \quad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow A)}{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})} \quad \text{Акс. 1}$$

$$(6) \quad \frac{\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{[(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}]} \quad \text{Акс. 3}$$

$$[(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \quad (6)$$

$$(7) \quad \frac{(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}} \quad \text{Акс. 4}$$

$$(8) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{\{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})\} \rightarrow [\{ (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})]} \quad (7)$$

$$\{(\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})) \rightarrow [\{ (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})]\} \quad (8)$$

$$(9) \quad \frac{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})}{\{ (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})} \quad (5)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{ (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \} \quad \text{Акс. 5}$$

$$(10) \quad \frac{\{ (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})} \quad (9)$$

$$(11) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})} \quad (10)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{Акс. 1}$$

$$(12) \quad \frac{(B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})} \quad (11)$$

$$(13) \quad \frac{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})} \quad (12)$$

$$(14) \quad \frac{\bar{\bar{A}} \rightarrow A}{\bar{\bar{B}} \rightarrow B} \quad \text{Акс. 6}$$

$$(15) \quad \frac{(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{(\bar{\bar{B}} \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)\}} \quad \text{Акс. 4}$$

$$(\bar{\bar{B}} \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)\}$$

$$(16) \quad \frac{\bar{\bar{B}} \rightarrow B}{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad (14)$$

$$(17) \quad \frac{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)}{(\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)} \quad (16)$$

$$A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \quad (13)$$

$$(18) \quad \frac{(\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)} \quad (16)$$

Таким образом, первая аксиома отрицания Гильберта доказана.

$$(19) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})} \quad (10)$$

$$(20) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\}}{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\}} \quad \text{Акс. 5}$$

$$(10) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

$$(21) \quad \frac{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\}}{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\}} \quad (20)$$

$$(22) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{\{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})\} \rightarrow \{[(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}] \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}\}} \quad (7)$$

$$\{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})\} \rightarrow \{[(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}] \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}\} \quad (22)$$

$$(23) \quad \frac{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{\{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\} \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}} \quad (19)$$

$$(21) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\}$$

$$(24) \quad \frac{\{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{B}\} \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}}{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}} \quad (23)$$

$$(25) \quad \frac{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (A \rightarrow B)}{\{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\} \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}} \quad (16)$$

$$(24) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\}$$

$$(26) \quad \frac{\{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}\} \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}}{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}} \quad (25)$$

Таким образом, и вторая аксиома Гильберта доказана.

Формулы (12) и (24) являются из формул, доказуемых при помощи аксиом $\mathfrak{F}$ без аксиомы двойного отрицания, наиболее близкими к аксиомам отрицания Гильберта. Вторая из них, приближающаяся к принципу tertium non datur, означает: если B следует и из истинности и из ложности A , то B не может быть ложным. В самом деле, допустим, что B ложно, тогда A не может быть истинным, так как из A следовало бы B , но из ложности A следовала бы истинность B .

III. ЧАСТНАЯ ЛОГИКА СУЖДЕНИЙ И ОБЛАСТЬ ЕЕ ПРИМЕНИМОСТИ

§ 1. Формулы, доказуемые на основании аксиом $\mathfrak{F}$, образуют общую логику суждений. Совокупность формул, доказуемых на основании шести аксиом $\mathfrak{F}$, будем называть частной логикой суждений¹³. Содержание частной логики суждений богаче, чем общей,

¹³ Общая логика суждений имеет и другое, реальное определение (см. § 5 гл. I). Частная логика суждений пока может быть определена только формально, так как реальное значение ее формул будет установлено лишь впоследствии.

но область применения уже. Все дальнейшее посвящено выяснению области применимости частной логики суждений. Эта область, может быть, и несколько уже, чем область применимости принципа tertium non datur в гильбертовой форме.

§ 2. Введем символы $A', B', C', \dots$, обозначающие произвольное суждение, для которого из двойного отрицания его следует само суждение. Таковы финитные суждения. Таковы же все истинные суждения; это, впрочем, не найдет применения в дальнейшем. Брауэр показал, что таковы все отрицательные суждения (см. [6]). Доказательство, приводимое ниже, опирается только на аксиомы системы $\mathfrak{B}$.

На основании аксиом следования легко доказать формулу

$$(27) \quad A \rightarrow A$$

$$(28) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\}}{(\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}} \quad \text{Акс. 5}$$

$$(29) \quad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow A)}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow A)} \quad \text{Акс. 1}$$

$$A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow A) \quad (29)$$

$$(30) \quad \frac{(\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}}{A \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}} \quad (28)$$

$$(31) \quad \frac{\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{[A \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}] \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow \bar{\bar{A}})\}} \quad \text{Акс. 3}$$

$$[A \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}] \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow \bar{\bar{A}})\} \quad (31)$$

$$(32) \quad \frac{A \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{\bar{A}}\}}{(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow \bar{\bar{A}})} \quad (30)$$

$$(33) \quad \frac{A \rightarrow A}{\bar{A} \rightarrow \bar{A}} \quad (27)$$

$$(\bar{A} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow \bar{\bar{A}}) \quad (32)$$

$$(34) \quad \frac{\bar{A} \rightarrow \bar{A}}{A \rightarrow \bar{\bar{A}}} \quad (33)$$

$$(35) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(A \rightarrow \bar{\bar{A}}) \rightarrow (\bar{\bar{\bar{A}}} \rightarrow \bar{A})} \quad (10)$$

$$(A \rightarrow \bar{\bar{A}}) \rightarrow (\bar{\bar{\bar{A}}} \rightarrow \bar{A}) \quad (35)$$

$$(36) \quad \frac{A \rightarrow \bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\bar{A}}} \rightarrow \bar{A}} \quad (34)$$

Последняя формула доказывает, что все отрицательные суждения суть суждения типа A^* .

Система аксиом $\mathfrak{F}$ отличается от системы $\mathfrak{B}$, имеющей универсальную применимость, только аксиомой двойного отрицания. Для суждений типа A^* она выражается следующей формулой:

$$(37) \quad \bar{A}^* \rightarrow A^*.$$

Только эту формулу мы рассматриваем как истинную, формулу же (4) считаем необоснованной.

Но из сказанного еще не следует, что все формулы частной логики суждений верны для суждений типа A^* ; в самом деле, при их выводе аксиома двойного отрицания (4) применяется не только к элементарным суждениям, что для нашего случая суждений типа A^* узаконено формулой (37), но и к сложным формулам; между тем неизвестно, является ли, например, формула типа $A^* \rightarrow B^*$ формулой типа A^* .

§ 3. Мы докажем теперь, что всякая формула, выраженная в символах A^* , B^* , C^* , . . . , следования и отрицания, является формулой типа A^* . Для этого достаточно разобрать два простейших случая.

Во-первых, всякое отрицательное суждение есть суждение типа A^* в силу брауэровской формулы (36).

Во-вторых, мы сейчас докажем, что суждение типа $A^* \rightarrow B^*$ является также суждением типа A^* .

$$(38) \quad \frac{A \rightarrow A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad (27)$$

$$(39) \quad \frac{\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{\{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow [A \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow B\}]} \quad \text{Акс. 3}$$

$$\{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow [A \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow B\}] \quad (39)$$

$$(40) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)}{A \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow B\}} \quad (38)$$

$$(41) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}})} \quad (10)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{\bar{B}} \rightarrow \bar{\bar{A}}) \quad (10)$$

$$(42) \quad \frac{(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}})}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}})} \quad (44)$$

$$(43) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}})}{\{(A \rightarrow B) \rightarrow B\} \rightarrow \{(\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow \bar{\bar{B}}\}} \quad (42)$$

$$A \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow B\} \quad (40)$$

$$(44) \quad \frac{\{(A \rightarrow B) \rightarrow B\} \rightarrow \{(\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow \bar{\bar{B}}\}}{A \rightarrow \{(\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow \bar{\bar{B}}\}} \quad (43)$$

$$(45) \quad \frac{\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{[A \rightarrow \{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow \overline{B}\}] \rightarrow \{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow (A \rightarrow \overline{B})\}} \quad \text{Акс. 3}$$

$$[A \rightarrow \{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow \overline{B}\}] \rightarrow \{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow (A \rightarrow \overline{B})\} \quad (45)$$

$$(46) \quad \frac{A \rightarrow \{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow \overline{B}\}}{(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow (A \rightarrow \overline{B})} \quad (44)$$

Эта формула верна для произвольных суждений A и B . Заменяя A и B через A^* и B^* и пользуясь формулой (37), легко вывести формулу

$$(47) \quad (\overline{A^* \rightarrow B^*}) \rightarrow (A^* \rightarrow B^*),$$

которая и показывает, что суждения типа $A^* \rightarrow B^*$ принадлежат к типу A^* .

Восходя постепенно к более сложным формулам, можно доказать утверждение начала параграфа.

§ 4. Теперь можно утверждать, что все формулы частной логики суждений верны для суждений типа A^* , в том числе для всех финитных и для всех отрицательных суждений. В самом деле, символы A^* , B^* , C^* , ..., $A^* \rightarrow B^*$ и $\overline{A^*}$ допускают все те операции, что и символы общей логики суждений: подстановку вместо символов A^* , B^* , C^* , ... любой формулы, написанной в рассматриваемых символах, и вывод по схеме $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{S} | \mathfrak{Z}$; кроме того, для них верны все шесть аксиом $\mathfrak{F}$.

Этим найдена точная граница области применимости частной логики суждений: область эта совпадает с областью применимости формулы двойного отрицания (4).

IV. МАТЕМАТИКА ПСЕВДОИСТИННОСТИ

§ 1. В предыдущей главе мы установили, что все формулы традиционной логики суждений могут быть действительно доказаны, как формулы частной логики суждений. Следует только признать, что они имеют отношение лишь к суждениям типа A^* . При этом сами эти формулы оказываются формулами типа A^* .

Теперь ставится вопрос: можно ли аналогично, наложив некоторые ограничения на их реальное толкование, восстановить значимость всех тех формул математики, которые доказываются при помощи незаконного применения формул частной логики суждений, в частности принципа tertium non datur, вне области их применимости? Эта задача оказывается выполнимой.

§ 2. Мы построим рядом с обычной математикой новую «псевдоматематику» так, что каждой формуле первой соответствует формула второй, и при этом так, чтобы каждая формула псевдоматематики была формулой типа A^* . Пока мы не касаемся вопроса об истинности формул псевдоматематики; к нему мы вернемся в § 5 этой главы.

Формулой называется символ простой или сложный, выражающий суждение. Элементарными формулами, или формулами первого порядка, будем называть формулы, никакая часть которых не является формулой; такова формула $a = a$. Формулой n -го порядка будем называть формулу, части которой являются формулами порядка не выше $n - 1$. Например, формула

$$a = b \rightarrow \{A(a) \rightarrow B(a)\}$$

есть формула третьего порядка, так как ее составная часть $A(a) \rightarrow B(a)$ является формулой второго порядка.

Элементарной формуле $\mathfrak{S}$ соответствует в псевдоматематике формула

$$(48) \quad \mathfrak{S}^* \equiv \bar{\mathfrak{S}},$$

выражающая двойное отрицание $\mathfrak{S}$. В дальнейшем для удобства мы двойное отрицание $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $n\mathfrak{S}$.

Формуле n -го порядка $F(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_k)$, где $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_k$ — формулы не выше $(n - 1)$ -го порядка, соответствует в псевдоматематике формула

$$(49) \quad F(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_k)^* \equiv nF(\mathfrak{S}_1^*, \mathfrak{S}_2^*, \dots, \mathfrak{S}_k^*),$$

причем $\mathfrak{S}_1^*, \mathfrak{S}_2^*, \dots, \mathfrak{S}_k^*$ считаются уже определенными. Например, формуле

$$a = b \rightarrow \{A(a) \rightarrow B(a)\}$$

соответствует в псевдоматематике формула

$$n[n(a = b) \rightarrow n\{nA(a) \rightarrow nB(a)\}].$$

Каждому символу, не являющемуся формулой, также соответствует определенный символ псевдоматематики. Символу простому или сложному, никакая часть которого не является формулой, в псевдоматематике соответствует тождественный ему символ. Сложному символу, в состав которого входят формулы, соответствует символ, в котором все формулы $\mathfrak{S}$ заменены формулами $\mathfrak{S}^*$.

§ 3. Все формулы математики выводятся из аксиом¹⁴, которые мы обозначим $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots, \mathfrak{U}_k$, при помощи операций подстановки частных значений вместо переменных и вывода по схеме $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Z} \mid \mathfrak{Z}$. Аксиомам в псевдоматематике соответствуют формулы $\mathfrak{U}_1^*, \mathfrak{U}_2^*, \dots, \mathfrak{U}_k^*$. Мы докажем, что всякая формула псевдоматематики, соответствующая формуле, доказуемой на основании аксиом $\mathfrak{U}$, является следствием формул $\mathfrak{U}^*$. Для доказательства достаточно установить следующие два факта.

Во-первых, если при подстановке в формулу $\mathfrak{S}$ вместо переменных частных значений получается формула $\mathfrak{Z}$, то при подстановке

¹⁴ В число аксиом математики здесь включаются и все аксиомы логики.

аксиоме

$$(a) A (a) \rightarrow A (a)$$

соответствует истинная формула

$$n \{n (a) nA (a) \rightarrow nA (a)\}.$$

Будем называть аксиомы, обладающие формулированным выше свойством, аксиомами типа $\mathfrak{K}$. Назовем далее формулами типа $\mathfrak{K}$ формулы, доказуемые на основе аксиом типа $\mathfrak{K}$. Все известные нам аксиомы и формулы математики¹⁵ принадлежат к типу $\mathfrak{K}$.

В силу сказанного выше та часть псевдоматематики, формулы которой соответствуют формулам типа $\mathfrak{K}$, приобретают реальное значение: все формулы ее истинны, так как они являются следствиями истинных формул, соответствующих в псевдоматематике аксиомам типа $\mathfrak{K}$. Название «псевдоматематика» для этой ее части, только пока и существующей, становится неподходящим: она как собрание истинных формул является частью настоящей математики.

Будем называть суждение псевдоистинным, если истинно его двойное отрицание. Суждение типа $n\mathfrak{E}$ утверждает таким образом псевдоистинность суждения $\mathfrak{E}$. Формулы псевдоматематики выражают всегда только суждения о псевдоистинности. Мы имеем право назвать поэтому ту часть псевдоматематики, которая имеет реальное значение, математикой псевдоистинности.

§ 6. В обычном изложении математики ряд выводов получается посредством незаконного употребления формул частной логики суждений, например принципа tertium non datur. Все эти случаи, как было показано, могут быть сведены к употреблению принципа двойного отрицания

$$(4) \quad 6. \quad \bar{\bar{A}} \rightarrow A.$$

Рассмотрим те из этих выводов, которые, кроме незаконной формулы (4), опираются только на аксиомы типа $\mathfrak{K}$. Формулы, их выражающие, будем называть формулами типа $\mathfrak{K}'$.

Построим формулы псевдоматематики, соответствующие формулам $\mathfrak{K}'$. Все они будут следовать из формул $\mathfrak{U}^*$, соответствующих аксиомам типа $\mathfrak{K}$, и из формулы

$$(56) \quad n \{n (\bar{\bar{nA}}) \rightarrow nA\},$$

соответствующей формуле (4).

Формула (56) является истинной. В самом деле, она вытекает в силу формулы (34) из следующей:

$$(57) \quad n (\bar{\bar{nA}}) \rightarrow nA.$$

¹⁵ Иногда в математике признавались за аксиомы формулы, истинность которых не очевидна; такова, например, так называемая аксиома Цермело. Но и они обладают свойством $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$.

Формула (57) может быть получена посредством подстановки из формулы частной логики суждений.

$$(58) \quad n(\overline{A'}) \rightarrow A',$$

в частной же логике суждений, как известно, четное повторение отрицания приводится к утверждению.

Таким образом, в то время как рассматриваемые формулы обычной математики основаны на незаконном употреблении формулы (4), соответствующие формулы псевдоматематики опираются на истинную формулу (56).

Итак, окончательно получим:

Все выводы обычной математики, основанные на употреблении вне области финитного формулы двойного отрицания и других формул, от нее зависящих (как принцип tertium non datur), не могут считаться твердо установленными.

Но поскольку кроме этой формулы, они опираются только на аксиомы типа $\mathfrak{A}$, а других пока неизвестно, постольку соответствующие формулы псевдоматематики являются истинными и, следовательно, входят в математику псевдоистинности.

Иначе говоря, все выводы, основанные на аксиомах типа $\mathfrak{A}$ и формуле двойного отрицания, верны, если мы каждое входящее в них суждение будем понимать в смысле утверждения о его псевдоистинности, т. е. его двойного отрицания.

V. ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Обнаружив незаконность применения принципа tertium non datur к трансфинитным суждениям, Брауэр поставил задачу обоснования математики без помощи этого принципа, которую в значительной мере и выполнил¹⁶. Но при этом выяснилось, что существует ряд математических предложений, которые не могут быть доказаны без помощи отвергнутого Брауэром принципа t. n. d. Далее мы рассмотрим некоторые примеры таких предложений.

Мы показали в предыдущих главах, что наряду с изложением математики без помощи принципа t. n. d. может быть сохранено и обычное изложение. Правда, при этом всем предложениям надлежит придать ограничительное толкование, именно: каждое суждение обычной математики надо заменить утверждением о его псевдоистинности. Но это изложение все же сохраняет два замечательных свойства.

1. Если при помощи рассуждений, основанных на применении принципа t. n. d., хотя бы и в области трансфинитного, получен финитный вывод, то вывод этот истинен в обычном понимании. В самом деле, он может в силу предыдущего быть доказан, как вывод о псевдоистинности; в области же финитного псевдоистинность совпадает с обычной истинностью.

¹⁶ См., например, [7].

2. Применение принципа *t. n. d.* никогда не приведет к противоречию. В самом деле, если бы при его помощи была получена ложная формула, то соответствующая формула псевдоматематики была бы доказана без его помощи и все же приводила бы к противоречию¹⁷.

Первое из этих положений противоречит одному замечанию Брауэра¹⁸, который считает, что финитные выводы, основанные на трансфинитном применении принципа *t. n. d.*, также должны считаться недостоверными.

§ 2. Предложения, которые мы не умеем доказать без помощи незаконного применения принципа *t. n. d.*, обычно непосредственно опираются не на принцип *t. n. d.* логики суждений, но на другой принцип, носящий то же название. В самом деле, из принципа *t. n. d.* в форме, свойственной логике суждений: «каждое суждение или истинно, или ложно», дальнейшие выводы получаются по схеме формулы Гильберта: если B следует и из A , и из $\bar{A}$, то B истинно. Но в интересующем нас случае трансфинитных суждений из чистого отрицания $\bar{A}$ трудно получить какой-либо положительный вывод B ; для этого надо сначала преобразовать суждение $\bar{A}$ в какое-либо другое.

Наиболее обычен следующий тип трансфинитного суждения: для всех (a) верно $A(a)$; символически это суждение записывается так: $(a) A(a)$. Когда из отрицания этого суждения $\bar{(a) A(a)}$ хотят извлечь положительный вывод, то его приводят к форме $(Ea) \bar{A}(a)$, т. е. существует (a) такое, что для него $A(a)$ неверно. Эквивалентность последнего утверждения простому отрицанию суждения $(a) A(a)$ выражается следующими двумя формулами:

$$(59) \quad \bar{(a) A(a)} \rightarrow (Ea) \bar{A}(a).$$

$$(60) \quad (Ea) \bar{A}(a) \rightarrow \bar{(a) A(a)}.$$

В § 4 этой главы мы докажем, что формула (59) для своего доказательства, помимо формул, интуитивная очевидность которых несомненна, в том числе аксиом общей логики суждений, требует только признания принципа двойного отрицания (4). Формула же (60) доказывается и без помощи этого принципа.

Если мы признаем формулы (59) и (60), то мы будем иметь право формулировать принцип *t. n. d.* для суждений типа $(a) A(a)$ так:

$$(a) A(a) \vee (Ea) \bar{A}(a),$$

т. е. или $A(a)$ верно для всех (a) , или существует (a) , для которого $\bar{A}(a)$ неверно.

¹⁷ Предполагается, что все рассматриваемые аксиомы являются аксиомами типа $\mathfrak{A}$, кроме того, что формулы, признанные заведомо ложными, $\mathfrak{E}$ таковы, что соответствующие им $\mathfrak{E}^*$ также ложны.

¹⁸ См. [4, с. 252, примеч.].

Гильберт (см. [1, с. 157]) присоединяет к формулам (59) и (60) еще следующие:

$$(61) \quad (\overline{Ea}) A(a) \rightarrow (a) \bar{A}(a).$$

$$(62) \quad (a) \bar{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a).$$

В согласии со сказанным выше он считает, что формулы (59)—(62) обосновывают применение принципа t. n. d. к бесконечным совокупностям объектов (a) . В противоположность формулам (59)—(60) формулы (61)—(62) обе могут быть доказаны на основании одних интуитивно очевидных аксиом. Доказательство дается в § 4.

Таким образом, формулы (60)—(62) являются просто истинными формулами, формула же (59) доказывается на основе принципа двойного отрицания (4); к выводам, опирающимся на нее, следовательно, применимо все изложенное в предыдущей главе.

§ 3. Прежде всего заметим, что, определяя значение символа $(a)A(a)$, как «для всех (a) верно $A(a)$ », мы понимаем «для всех (a) » так же, как «для каждого (a) », т. е. в том смысле, что, каково бы ни было дано (a) , можно утверждать, что будет верно $A(a)$.

Каждая формула общей логики суждений, когда она написана самостоятельно, означает, что она верна для всех возможных суждений $A, B, C, \dots$. Так, формула $A \rightarrow \bar{A}$ означает, что для любого суждения из его истинности вытекает его двойное отрицание. Таким образом, нельзя утверждать, что введение символа $(a)A(a)$ впервые выводит нас из области финитного: понятие «для всех (a) » в скрытом виде содержится во всех формулах, заключающих символы переменных.

Вообще формула $A(a)$, написанная самостоятельно, обозначает, что, каково бы ни было частное значение (a) , верно $A(a)$. Из этого вытекает следующий принцип, не могущий быть выраженным символически; если формула $\mathfrak{S}$ написана самостоятельно, то можно написать формулу $^{19}(a)\mathfrak{S}$. При ссылках мы обозначаем этот принцип через **P**.

Далее, мы принимаем следующие аксиомы:

$$\begin{aligned} & \text{I. } (a) \{A(a) \rightarrow B(a)\} \rightarrow \{(a) A(a) \rightarrow (a) B(a)\} \\ & \text{II. } (a) \{A \rightarrow B(a)\} \rightarrow \{A \rightarrow (a) B(a)\} \\ (63) \quad & \text{III. } (a) \{A(a) \rightarrow C\} \rightarrow \{(Ea) A(a) \rightarrow C\} \\ & \text{IV. } A(a) \rightarrow (Ea) A(a). \end{aligned}$$

¹⁹ Символ (a) может стоять и перед формулой, не заключающей в действительности переменное (a) . Вместо принципа **P** можно ввести аксиому

$$(a) V,$$

где V обозначает истинное суждение, и тоже неформулируемое символически правило подстановки: вместо V можно подставить любую самостоятельно написанную формулу.

Мы считаем все эти аксиомы интуитивно очевидными. Выбор их и их количество определяются исключительно нашей целью: доказательство формул (59)—(62).

§ 4.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \quad (11)$$

$$(64) \quad \frac{A(a) \rightarrow (Ea) A(a)}{(\bar{Ea}) A(a) \rightarrow \bar{A}(a)} \quad \text{Акс. IV}$$

$$(65) \quad (a) \{(\bar{Ea}) A(a) \rightarrow \bar{A}(a)\} \quad (64)P$$

$$(a) \{A \rightarrow B(a)\} \rightarrow \rightarrow \{A \rightarrow (a) B(a)\} \quad \text{Акс. II}$$

$$(66) \quad \frac{(a) \{(\bar{Ea}) A(a) \rightarrow \bar{A}(a)\}}{(\bar{Ea}) A(a) \rightarrow (a) \bar{A}(a)} \quad (65)$$

Таким образом, формула (61) доказана.

$$\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\} \quad \text{Акс. 3}$$

$$(67) \quad \frac{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})}{\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})} \quad (12)$$

$$(68) \quad \frac{\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow \bar{E})}{\bar{A}(a) \rightarrow \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\}} \quad (67)$$

$$(69) \quad (a) [\bar{A}(a) \rightarrow \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\}] \quad (68)P$$

$$(a) \{A(a) \rightarrow B(a)\} \rightarrow \rightarrow \{(a) A(a) \rightarrow (a) B(a)\} \quad \text{Акс. I}$$

$$(70) \quad \frac{(a) [\bar{A}(a) \rightarrow \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\}]}{(a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\}} \quad (69)$$

$$(71) \quad \frac{(a) \{A(a) \rightarrow C\} \rightarrow \{(Ea) A(a) \rightarrow C\}}{(a) \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\} \rightarrow \{(Ea) A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\}} \quad \text{Акс. III}$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \quad \text{Акс. 5}$$

$$(72) \quad \frac{A \rightarrow A}{(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}} \quad (27)$$

$$(73) \quad \frac{(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}}{\{(Ea) A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\} \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)} \quad (72)$$

$$(a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) \{A(a) \rightarrow (\bar{Ea}) A(a)\} \quad (70)$$

$$(a) \{A(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)\} \rightarrow \{(Ea) A(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)\} \quad (71)$$

$$(74) \quad \frac{\{(Ea) A(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)\} \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)}{(a) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)} \quad (73)$$

Таким образом формула (62) доказана,

$$(75) \quad \frac{(a) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) A(a)}{(a) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a)} \quad (74)$$

$$(76) \quad \frac{A \rightarrow \overline{A}}{A(a) \rightarrow \overline{A}(a)} \quad (34)$$

$$(77) \quad (a) \{A(a) \rightarrow \overline{A}(a)\} \quad (76)P$$

$$(a) \{A(a) \rightarrow B(a)\} \rightarrow \{(a) A(a) \rightarrow (a) B(a)\} \quad \text{Акс. II}$$

$$(78) \quad \frac{(a) \{A(a) \rightarrow \overline{A}(a)\}}{(a) A(a) \rightarrow (a) \overline{A}(a)} \quad (77)$$

$$(a) A(a) \rightarrow (a) \overline{A}(a) \quad (78)$$

$$(79) \quad \frac{(a) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a)}{(a) A(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a)} \quad (75)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \quad (11)$$

$$(80) \quad \frac{(a) A(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a)}{(\overline{Ea}) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{a}) A(a)} \quad (79)$$

$$(81) \quad \frac{A \rightarrow \overline{A}}{(Ea) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a)} \quad (34)$$

$$(Ea) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{Ea}) \overline{A}(a) \quad (81)$$

$$(82) \quad \frac{(\overline{Ea}) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{a}) A(a)}{(Ea) \overline{A}(a) \rightarrow (\overline{a}) A(a)} \quad (80)$$

Таким образом, формула (60) доказана.

Доказательство формулы (59) не может быть проведено без помощи аксиомы двойного отрицания. Номера формул, опирающихся на эту аксиому, подчеркнуты

$$(83) \quad \frac{(\overline{Ea}) A(a) \rightarrow (a) \overline{A}(a)}{(\overline{Ea}) \overline{A}(a) \rightarrow (a) \overline{A}(a)} \quad (66)$$

- (84)
$$\frac{\bar{A} \rightarrow A}{\bar{\bar{A}}(a) \rightarrow A(a)} \quad \text{Акс. 6}$$
- (85)
$$(a) \{ \bar{A}(a) \rightarrow A(a) \} \quad (84) \text{P}$$
- $$(a) \{ A(a) \rightarrow B(a) \} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{ (a) A(a) \rightarrow (a) B(a) \} \quad \text{Акс. II}$$
- (86)
$$\frac{(a) \{ \bar{A}(a) \rightarrow A(a) \}}{(a) \bar{\bar{A}}(a) \rightarrow (a) A(a)} \quad (85)$$
- $$(\bar{E}a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) \bar{\bar{A}}(a) \quad (83)$$
- (87)
$$\frac{(a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) A(a)}{(\bar{E}a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) A(a)} \quad (86)$$
- $$(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (B \rightarrow \bar{A}) \quad (11)$$
- (88)
$$\frac{(\bar{E}a) \bar{A}(a) \rightarrow (a) A(a)}{(\bar{a}) A(a) \rightarrow (\bar{E}a) \bar{A}(a)} \quad (87)$$
- (89)
$$\frac{\bar{A} \rightarrow A}{(\bar{E}a) \bar{A}(a) \rightarrow (Ea) \bar{A}(a)} \quad \text{Акс. 6}$$
- $$(\bar{a}) A(a) \rightarrow (\bar{E}a) \bar{A}(a) \quad (88)$$
- (90)
$$\frac{(\bar{E}a) \bar{A}(a) \rightarrow (Ea) \bar{A}(a)}{(\bar{a}) A(a) \rightarrow (Ea) \bar{A}(a)} \quad (89)$$

Таким образом формула (59) доказана с помощью аксиомы двойного отрицания.

§ 5. Прекрасный пример предложения, недоказуемого без помощи незаконного применения принципа tertium non datur, дан Брауэром (см. [6]): нельзя считать доказанным, что всякое действительное число имеет разложение в бесконечную десятичную дробь. Брауэром даже указано определенное число, про которое неизвестно, имеет ли оно первую цифру десятичного разложения.

Таково же предложение, утверждающее, что дополнение к замкнутому множеству есть область, т. е. что каждая точка, не принадлежащая к замкнутому множеству, содержится в некотором интервале, не заключающем в себе точек замкнутого множества²⁰. Доказательство, как известно, осуществляется так: в силу принципа t. n. d. в форме § 2 этой главы или все интервалы, содержащие взятую точку, включают в себе точки множества, или существует хотя бы один, их не содержащий; первое предположение приводит к противоречию, так как из него следует, что точка принадлежит множеству, следовательно, верно второе. В противоположность примеру

²⁰ Пример указан П. С. Новиковым.

Брауэра мы не умеем указать определенное замкнутое множество и определенную внешнюю для него точку, для которых было бы сомнительным существование требуемого интервала.

§ 6. Интереснее следующий пример: нельзя доказать без помощи принципа *t. n. d.* все предложения, доказательство которых сводится обычно к применению принципа трансфинитной индукции. Таково, например, предложение: каждое замкнутое множество является суммой совершенного и счетного множества.

Часто проводят доказательство подобных предложений без помощи принципа трансфинитной индукции. Но все такие доказательства опираются на принцип *t. n. d.*, примененный к бесконечным совокупностям, или на принцип двойного отрицания.

Важно отметить, что сам принцип трансфинитной индукции может быть выведен без всяких новых по сравнению с теорией точечных множеств допущений, но обязательно с применением принципа *t. n. d.* Следует только формулировать принцип трансфинитной индукции, не употребляя термина «трансфинитное число», введение которого потребовало бы новых аксиом. Будем вместо этого рассматривать расположенные вполне упорядоченно, слева направо, множества рациональных чисел. Будем называть отрезком такого множества его часть, расположенную левее какой-либо точки, принадлежащей или не принадлежащей ему. Отрезок всегда будет тоже вполне упорядоченным множеством. Множество отрезков само также будет вполне упорядоченным. Назовем отрезок правильным, если существуют точки множества, ему не принадлежащие. Принцип трансфинитной индукции формулируется теперь так.

Пусть некоторое свойство J , могущее быть присущим или не присущим вполне упорядоченным множествам рациональных чисел, удовлетворяет следующим условиям.

1. Множества, состоящие из одной точки, обладают свойством J .
2. Если все правильные отрезки некоторого множества обладают свойством J , то и само множество им обладает.

При этих условиях все вполне упорядоченные множества рациональных чисел обладают свойством J .

Так сформулированный принцип трансфинитной индукции может быть использован в тех же случаях, как и обычный. Доказательство его проводится так: или все множества обладают свойством J , или существует такое множество E , которое им не обладает; второе предположение приводит к противоречию: среди отрезков E должен быть первый, не обладающий свойством J , существование же такого отрезка противоречит условиям.

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, что наряду с развиваемым Брауэром изложением математики без помощи принципа *t. n. d.* должно быть сохранено обычное изложение, пользующееся этим принципом, правда, только как изложение математики псевдоистинности.

Москва, 30 сентября 1925 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D. Die logischen Grundlagen der Mathematik.— Math. Ann., 1923, Bd. 88, S. 151—165.
2. Whitehead A. N., Russel B. Principia mathematica. Cambridge, 1910—1913. Vol. 1—3.
3. Ackermann W. Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.— Math. Ann., 1924, Bd. 93, S. 1—36.
4. Brouwer L. E. J. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe.— Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung, 1925, Bd. 33, S. 251—256.
5. Зиггарт Х. Логика. СПб., 1908. Т. 1.
6. Brouwer L. E. J. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? — Math. Ann., 1921, Bd. 83, S. 201—210.
7. Brouwer L. E. J. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz ausgeschlossenen Dritten. (I) Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre.— Verh. Kon. ned. akad. wetensch. Amsterdam, I, 1918, vol. 12, N 5; (II) Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen.— Ibid., 1919, vol. 12, N 7.
8. Аристотель. Об истолковании.— Сочинения. М.: Мысль, 1978, т. 2, с. 91—116.
9. Аристотель. О душе.— Сочинения. М.: Мысль, 1975, т. 1, с. 369—448.
10. Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разуме. М.; Л.: Соцэкгиз, 1936. 484 с.

10

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ*

Совместно с Г. А. Селиверстовым

В предыдущей работе [4] нами было дано условие сходимости тригонометрического ряда, более общее, нежели аналогичные условия, данные ранее Фату [1], Вейлем [6], Гобсоном [3], Планшерелем [5] и Харди [2].

Мы установили, что сходимость почти всюду тригонометрического ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

следует из сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{1+\varepsilon} (a_n^2 + b_n^2)$$

при каком-нибудь положительном ε .

Уже было указано, что все условия, данные ранее (самое общее из них, принадлежащее Харди, отличается от нашего множителем $\log^2 n$ вместо $(\log n)^{1+\varepsilon}$), верны для любой ортогональной системы функций, в то время как наше условие неверно для некоторых ор-

* Sur la convergence des séries de Fourier.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1926, vol. 3, p. 307—310. Представлено А. Тонелли. Перевод И. А. Виноградовой.

тогональных систем — это следует из результатов Д. Е. Меньшова [7]. Таким образом, доказательство нашей теоремы опирается на специфические свойства тригонометрической системы.

В этой работе мы дадим более простое доказательство следующего более сильного утверждения: *сходимость почти всюду ряда (1) следует из сходимости ряда*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log n (a_n^2 + b_n^2). \quad (2)$$

1. Л е м м а. Пусть дана тригонометрическая сумма

$$S(x) = \sum_{k=2}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{S_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \leq \sqrt{C \sum_{p=2}^n (a_p^2 + b_p^2)}, \quad (3)$$

где $k(x)$ есть произвольная целочисленная функция, принимающая значения от 2 до n ; $S_{k(x)}(x)$ — сумма k первых членов $S(x)$; C — абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По неравенству Шварца

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{S_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx &= \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\log k(x)}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) d\alpha dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx d\alpha \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} S^2(\alpha) d\alpha \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right]^2 d\alpha} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \sum_{p=2}^n (a_p^2 + b_p^2) I}. \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (3) осталось установить ограниченность I . Интегрируя по частям относительно α и используя орто-

гональность тригонометрической системы, получаем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right]^2 d\alpha = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-\alpha) \sum_{q=1}^{k(y)} \cos q(y-\alpha)}{\sqrt{\log k(x) \log k(y)}} dx dy d\alpha = \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{k(x,y)} \cos p(x-y)}{\sqrt{\log k(x) \log k(y)}} dx dy,
 \end{aligned}$$

где $k(x, y)$ есть наименьшее из чисел $k(x)$, $k(y)$.

Обозначим через P множество тех точек (x, y) , для которых $k(x) \leq k(y)$ и, следовательно, $k(x, y) = k(x)$, $\log k(y) \geq \log k(x)$; через Q множество (x, y) , для которых $k(y) < k(x)$, $k(x, y) = k(y)$, $\log k(x) > \log k(y)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{I}{\pi} &\leq \iint_P \frac{\left| \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-y) \right|}{\log k(x)} dx dy + \iint_Q \frac{\left| \sum_{p=1}^{k(y)} \cos p(x-y) \right|}{\log k(y)} dx dy \leq \\
 &\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log k(x)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{p=1}^{k(x)} \cos p(x-y) \right| dy dx + \\
 &+ \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log k(y)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{p=1}^{k(y)} \cos p(x-y) \right| dx dy.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что последнее выражение не превосходит абсолютной постоянной C .

2. Из условия (2), которому удовлетворяет ряд (1), следует существование возрастающей к бесконечности последовательности $\tau(n)$ такой, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \tau(n) \log n (a_n^2 + b_n^2) \quad (4)$$

сходится.

Положим

$$A_n = \sqrt{\tau(n) \log n} a_n, \quad B_n = \sqrt{\tau(n) \log n} b_n.$$

Тогда ряд (4) преобразуется так:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2).$$

Введем обозначения:

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx), \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n S_k(x),$$

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\tau(n) \log n}} - \frac{1}{\sqrt{\tau(n+1) \log(n+1)}}, \quad \Delta'_n = \Delta_n - \Delta_{n+1}.$$

Последовательность $\tau(n)$ можно определить так, чтобы все Δ'_n были положительными. Тогда ряд¹

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\Delta'_n = \frac{1}{\sqrt{\tau(2) \log 2}} + \Delta_2$$

сходится абсолютно, и, следовательно,

$$n\Delta_n = n \sum_{k=n}^{\infty} \Delta'_k < \sum_{k=n}^{\infty} k\Delta'_k \rightarrow 0.$$

Применяя к ряду (1) два раза преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau(n) \log n}} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n S_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\Delta'_n \sigma_n(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Для обоснования справедливости преобразования достаточно доказать соотношения

$$\frac{S_n(x)}{\sqrt{\tau(n) \log n}} \rightarrow 0, \quad n\Delta_n \sigma_n \rightarrow 0.$$

Второе из них выполнено, если σ_n ограничены, т. е. почти всюду. Что касается первого, то выполнение его почти всюду следует из нашей леммы. Наконец, если последовательность σ_n сходится (что имеет место почти всюду), то ряд (5) сходится. Итак, сходимость ряда (1) почти всюду доказана.

7 февраля 1926 г.

¹ Сумма

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\Delta'_n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta'_k + \sum_{k=2}^{\infty} \Delta'_k = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n + \Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau(2) \log 2}} + \Delta_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fatou P.* Séries trigonométriques et série de Taylor.— *Acta math.*, 1906, vol. 30, p. 335—400.
2. *Hardy G. H.* On the summability of Fourier's series.— *Proc. London Math. Soc.*, 1913, vol. 12, p. 365—372.
3. *Hobson E. W.* On the convergence of series of orthogonal functions.— *Proc. London Math. Soc.*, 1913, vol. 12, p. 297—308.
4. *Kolmogoroff A., Seliverstoff G.* Sur la convergence des séries de Fourier.— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1924, vol. 178, p. 303—306.
5. *Plancherel M.* Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales.— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1913, vol. 156, p. 539—541.
6. *Weil H.* Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.— *Math. Ann.*, 1909, Bd. 67, S. 225—245.
7. *Menchoff D.* Sur les séries de fonctions orthogonales.— *Fund. math.*, 1923, vol. 4, p. 82—105.

11

РЯД ФУРЬЕ—ЛЕБЕГА, РАСХОДЯЩИЙСЯ ВСЮДУ *

Цель этой заметки дать пример суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится всюду.

1°. Определим для каждого целого n функцию $\varphi_n(x)$:

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{m-k}{m} \cos kx,$$

$$m_i = n^{4(i+1)}, \quad A_i = \frac{4i\pi}{2n+1} \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sigma_{m_i}(A_i - x).$$

Очевидно, что

$$\varphi_n(x) \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = \pi.$$

2°. Функция $\varphi_n(x)$ может быть представлена в виде

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m_n} a_k \cos(kx + \lambda_k).$$

* Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout.— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1926, vol. 183, p. 1327—1329. Представлено Э. Борелем. *Перевод Л. А. Балашова.*

Рассмотрим частную сумму $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^k a_l \cos(lx + \lambda_l) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^j \sigma_{m_i}(A_i - x) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{i=j+1}^n \frac{k}{m_i} \sigma_k(A_i - x) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{i=j+1}^n \frac{m_i - k}{m_i} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}(A_i - x)}{2 \sin \frac{1}{2}(A_i - x)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где j предполагается таким, что $m_j \leq k < m_{j+1}$. Два первых члена (1) будут неотрицательны. Поэтому

$$S_k(x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{i=j+1}^n \frac{m_i - k}{m_i} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}(A_i - x)}{2 \sin \frac{1}{2}(A_i - x)}. \quad (2)$$

3°. Можно доказать, что для достаточно больших n и для x , лежащих в сегменте $\left[A_j - \frac{1}{n^3}, A_j + \frac{1}{n^3}\right]$, имеет место неравенство

$$S_n(x) > C_1 n, \quad (3)$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

4°. Для каждого x , лежащего в сегменте $\left[A_j + \frac{1}{n^3}, A_{j+1} - \frac{1}{n^3}\right]$, предполагая n достаточно большим, можно определить k такое, что $2k+1$ будет делиться на $2n+1$ и будут выполняться следующие неравенства:

$$m_j \leq k \leq \frac{m_{j+1}}{2}, \quad -\sin \frac{2k+1}{2} x \geq \frac{1}{2}.$$

В этом случае из (2) можно вывести, что

$$\begin{aligned} S_k(x) &\geq -\frac{1}{n+1} \sin \frac{2k+1}{2} x \sum_{i=j+1}^n \frac{m_i - k}{m_i} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}(A_i - x)} \geq \\ &\geq C_2 \log(n-j). \end{aligned} \quad (4)$$

5°. Для каждого x , удовлетворяющего неравенству

$$0 \leq x \leq 2\pi - 1/\sqrt{n},$$

на основании (3) и (4) можно определить индекс k такой, что

$$S_k(x) \geq C_3 \log n.$$

Положим, наконец,

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \varphi_{n_m}(x).$$

Если ряд из M_n сходится абсолютно, то $\Phi(x)$ суммируема. Если индексы n_m растут достаточно быстро, то ряд Фурье Φ расходится всюду. Для доказательства двух последних фактов можно использовать мою заметку [1].

27 декабря 1926 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A. Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout.— Fund. math., 1923, vol. 4, p. 324—328.

12

О СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ*

Совместно с Д. Е. Меньшовым

Основной результат этой статьи заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а I. *Существуют такая система функций $\varphi_n(x)$, ортогональная на интервале $(0, 1)$ и принимающая только значения ± 1 , и такая последовательность чисел a_n , для которых ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (1)$$

сходится, тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

всюду расходится.

Известно (см. [1, 2]), что в случае произвольных ортогональных функций достаточным условием для сходимости почти всюду ряда (2) является сходимость следующего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n. \quad (3)$$

Кроме того, известно (см. [2]), что множитель $(\log n)^2$ не может быть заменен на другой, растущий менее быстро.

* Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales.— Math. Ztschr., 1927, Bd. 26, S. 432—441. Перевод С. В. Бочкарева.

В случае, когда функции $\varphi_n(x)$ ограничены в совокупности, мы не можем дать столь же окончательный ответ. Мы можем только доказать следующую теорему.

Т е о р е м а II. *Какова бы ни была положительная функция $W(n)$, удовлетворяющая условию $W(n) = o(\log n)$, всегда существуют система функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ортогональная на $(0, 1)$ и принимающая только значения ± 1 , и последовательность действительных чисел a_n , для которых ряд (2) всюду расходится, тогда как ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n) \quad (4)$$

сходится.

Таким образом, может случиться, что в случае функций $\varphi_n(x)$, ограниченных в совокупности, сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log n \quad (5)$$

является достаточным условием для сходимости ряда (2). Для тригонометрических рядов дело обстоит действительно так (см. [3, 4]).

Можно также построить ряд (2), расходящийся почти всюду, используя в качестве функций $\varphi_n(x)$ тригонометрические функции. Но в этом случае нельзя приблизиться к пределу $W(n) = \log n$. Вот почему мы только формулируем здесь без доказательства следующую теорему.

Т е о р е м а III. *Существует расходящийся почти всюду ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(m_n x + \lambda_n),$$

где целые числа m_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) все различны и ряд (1) сходится¹.

Теорема I есть непосредственное следствие теоремы II. Для доказательства этой последней теоремы нам нужна следующая лемма.

О с н о в н а я л е м м а. *Каково бы ни было целое положительное n , существует сумма*

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (6)$$

обладающая следующими свойствами:

I. *Функции $\varphi_k(x)$ попарно ортогональны на интервале $(0, 1)$, принимают только значения ± 1 и постоянны на каждом из интервалов δ , образующих подходящее конечное разбиение интервала $(0, 1)$.*

¹ Теорема была доказана А. Н. Колмогоровым.

$$\text{II. } \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1.$$

III. Для каждой точки множества E , $\text{mes } E = 1/2$, существует число $p \leq n$ такое, что

$$\sum_{k=1}^p a_k \varphi_k(x) \geq C \sqrt{\log n},$$

где C — абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ

1°. Мы рассмотрим только случай, когда $n = 12(4^m - 1)$, где m — целое положительное число. Отсюда без труда следует общий случай. В неравенстве III мы заменим $C \sqrt{\log n}$ на $1/3 \sqrt{m}$, что также законно.

Впоследствии мы построим члены суммы (6) для номера $12(4^m - 1)$ и затем в п. 11° определим их нумерацию. Сначала введем некоторые вспомогательные функции.

2°. Пусть $S_l(i, r)$ — некоторая функция целочисленных аргументов, обладающая следующими свойствами:

а) она определена для

$$1 \leq i \leq 3 \cdot 2^l, \quad 1 \leq r \leq 3 \cdot 2^l - 1;$$

б) при фиксированном i она принимает каждое значение $1, 2, 3, \dots, 3 \cdot 2^l$, кроме i , один и только один раз;

с) при фиксированном r она принимает все целые значения от 1 до $3 \cdot 2^l$;

$$\text{d) } S_l[S_l(i, r), r] = i;$$

е) каждой паре чисел i_1, i_2 , ($i_1 \neq i_2$, $1 \leq i_1 \leq 3 \cdot 2^l$, $1 \leq i_2 \leq 3 \cdot 2^l$) соответствует единственное число r , удовлетворяющее двум соотношениям:

$$S_l(i_1, r) = i_2, \quad S_l(i_2, r) = i_1.$$

Свойство е) является следствием свойств б) и д). Определим функцию $S_l(i, r)$ рекуррентным способом.

А. Если $l = 1$, то значения $S_l(i, r)$ задаются следующей таблицей:

i					
6	5	4	2	3	1
5	6	2	3	1	4
4	3	6	1	2	6
3	4	1	5	6	2
2	1	5	6	4	3
1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5

В. Значения $S_{l+1}(i, r)$ получаются из значений $S_l(i, r)$ следующим образом:

а) если $r < 3 \cdot 2^l$, $i \leq 3 \cdot 2^l$, то

$$S_{l+1}(i, r) = S_l(i, r);$$

б) если $r < 3 \cdot 2^l$, $i > 3 \cdot 2^l$, то

$$S_{l+1}(i, r) = S_l(i - 3 \cdot 2^l, r) + 3 \cdot 2^l;$$

в) если $r \geq 3 \cdot 2^l$, $i \leq 3 \cdot 2^l$, то

$$S_{l+1}(i, r) = i + r, \quad \text{когда } i + r \leq 3 \cdot 2^{l+1},$$

$$S_{l+1}(i, r) = i + r - 3 \cdot 2^l, \quad \text{когда } i + r > 3 \cdot 2^{l+1},$$

г) если $r \geq 3 \cdot 2^l$, $i > 3 \cdot 2^l$, то значения $S_{l+1}(i, r)$ определяются единственным образом с помощью свойства д), исходя из значений, определенных в предыдущих случаях ².

3°. Пусть $S_{l,q}(i, r)$ — функция, обладающая свойствами б), с), д), е) функции $S_l(i, r)$ и свойством а’):

а’) она определена для

$$1 \leq i \leq 3 \cdot 2^l, \quad 1 \leq r \leq 3 \cdot 2^l \quad (r \neq q).$$

Определим $S_{l,q}(i, r)$ следующим образом: $S_{l,q}(i, r) = S_l(i, r - q)$, если $r - q > 0$; $S_{l,q}(i, r) = S_l(i, r - q + 3 \cdot 2^l)$, если $r - q < 0$.

² Для $l = 2$ значения $S_l(i, r)$ задаются следующей таблицей.

i												
12	11	10	8	9	7	6	5	4	3	2	1	
11	12	8	9	7	10	5	4	3	2	1	6	
10	9	12	7	8	11	4	3	2	1	6	5	
9	10	7	11	12	8	3	2	1	6	5	4	
8	7	11	12	10	9	2	1	6	5	4	3	
7	8	9	10	11	12	1	6	5	4	3	2	
6	5	4	2	3	1	12	7	8	9	10	11	
5	6	2	3	1	4	11	12	7	8	9	10	
4	3	6	1	2	5	10	11	12	7	8	9	
3	4	1	5	6	2	9	10	11	12	7	8	
2	1	5	6	4	3	8	9	10	11	12	7	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	r

Конструкция этой таблицы может быть также объяснена с точки зрения соответствия между i_1 и i_2 (свойство е): соответствие между i_1 и i_2 в пределах от 1 до 6 обеспечивается левой нижней четвертью; соответствие между i_1 и i_2 , изменяющимися между 7 и 12, устанавливается аналогичным образом посредством левой верхней четверти; наконец, соответствие между i_1 , меняющимся от 1 до 6, и i_2 , меняющимся от 7 до 12, устанавливается правой половиной.

Следовательно, имеем

$$S_l(i, r) = S_{l, 3 \cdot 2^l}(i, r).$$

4°. Пусть

$$U_{l, q}(i, r) = \min[i; S_{l, q}(i, r)].$$

Из свойства d) функции $S_l(i, r)$ можно вывести, что

$$U_{l, q}(i, r) = U_{l, q}[S_{l, q}(i, r), r]; \quad (7)$$

из свойства e) следует, что для r , соответствующего паре i_1, i_2 , будем иметь

$$U_{l, q}(i_1, r) = U_{l, q}(i_2, r) = \min(i_1, i_2). \quad (8)$$

5°. Положим $\psi_l(x) = +1$ на интервалах $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{2k-1}{6 \cdot 2^l}\right)$, $\psi_l(x) = -1$ на интервалах $\left(\frac{2k-1}{6 \cdot 2^l}, \frac{k}{3 \cdot 2^l}\right)$, где k — произвольное целое положительное число.

6°. Определение функций ϕ_{lqi} . Пусть

$$1 \leq l \leq m, \quad 1 \leq q \leq 3 \cdot 2^l, \quad 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^l.$$

Таким образом, общее число функций ϕ_{lqi} равно

$$n = \sum_{l=1}^m (3 \cdot 2^l)^2 = 12(4^m - 1).$$

Положим $\phi_{lqi} = \psi_l$ на интервале $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$,

$$\phi_{lqi} = \pm \psi_\alpha, \quad \alpha = m + 9 \cdot 4^m + 3 \cdot 2^l \cdot q + U_{l, q}(i, r)$$

на интервале $\left(\frac{r-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{r}{3 \cdot 2^l}\right)$, $r \neq q$, где берется знак (+), если

$$U_{l, q}(i, r) = i, \text{ и знак } (-), \text{ если } U_{l, p}(i, r) = S_{l, q}(i, r).$$

7°. Определение коэффициентов a_{lqi} :

$$a_{lqi} = \pm \frac{1}{\sqrt{m \cdot 3 \cdot 2^l}},$$

где берется знак (+), если $1 \leq i \leq 2 \cdot 2^l$, и знак (-), если $2 \cdot 2^l < i \leq 3 \cdot 2^l$.

8°. Чтобы сумма (6) обладала свойствами, указанными в основной лемме, возьмем в качестве ее членов $a_{lqi} \phi_{lqi}(x)$, общее число которых уже было определено в п. 6°. Определим сумму квадратов

коэффициентов:

$$\sum a_{lqi}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^{3 \cdot 2^l} \sum_{i=1}^{3 \cdot 2^l} \frac{1}{m \cdot 9 \cdot 4^l} = 1.$$

Итак, условие II основной леммы выполняется.

9°. Чтобы доказать, что функции φ_{lqi} попарно ортогональны (условие I), нам потребуется три леммы, в которых формулируются свойства функций $\psi_t(x)$ (см. п. 5°).

Л е м м а I.

$$\int_{\frac{k-1}{3 \cdot 2^n}}^{\frac{k}{3 \cdot 2^n}} \psi_t(x) dx = 0, \quad \text{когда } t \geq n.$$

Л е м м а II.

$$\int_{\frac{k-1}{3 \cdot 2^n}}^{\frac{k}{3 \cdot 2^n}} \psi_{t_1}(x) \psi_{t_2}(x) dx = 0, \quad \text{когда } t_1 \neq t_2, t_1 \geq n.$$

Л е м м а III.

$$\int_{\frac{k-1}{3 \cdot 2^n}}^{\frac{k}{3 \cdot 2^n}} [\psi_t(x)]^2 dx = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Во всех этих трех леммах k и n суть целые положительные числа. В дальнейшем нам понадобится еще

Л е м м а IV. Множество точек x интервала $\left(\frac{g-1}{3 \cdot 2^t}, \frac{g}{3 \cdot 2^t}\right)$, где сумма

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_{t_k}(x)$$

положительна, имеет меру, равную мере множества точек того же интервала, где эта сумма отрицательна. Здесь предполагается, что g есть некоторое целое число и все t_k больше или равны t (t и t_k — целые положительные числа).

Доказательство леммы немедленно получается из очевидного соотношения

$$\sigma\left(\frac{g}{3 \cdot 2^t} - y\right) = -\sigma\left(\frac{g-1}{3 \cdot 2^t} + y\right),$$

которое заведомо выполняется для всех иррациональных y .

10°. Чтобы доказать, что две функции $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ ортогональны, нужно отдельно рассмотреть следующие случаи.

Первый случай: $l_1 \neq l_2$. Положим для определенности $l_1 > l_2$ и рассмотрим интервал $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^{l_1}}, \frac{k}{3 \cdot 2^{l_1}}\right)$. На этом интервале имеем $\varphi_{l_1 q_1 i_1} = \psi_{t_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2} = \psi_{t_2}$, где t_1 и t_2 , вообще говоря, зависят от k . Каково бы ни было k , из определения $\varphi_{l q i}$ (см. п. 6°) следует, что $t_1 \neq t_2$, $t_1 \geq l_1$; поэтому из леммы II следует, что на каждом из рассматриваемых интервалов интеграл от произведения $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ равен нулю, откуда получаем, что две функции $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ ортогональны на $(0, 1)$.

Второй случай: $l_1 = l_2 = l$; $q_1 \neq q_2$. На интервале $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{k}{3 \cdot 2^l}\right)$ имеем $\varphi_{l q_1 i_1} = \psi_{t_1}$, $\varphi_{l q_2 i_2} = \psi_{t_2}$, где $t_1 \geq l$, $t_2 \geq l$, $t_1 \neq t_2$; следовательно, на этом интервале интеграл от произведения $\varphi_{l q_1 i_1} \varphi_{l q_2 i_2}$ также равен нулю и две функции $\varphi_{l q_1 i_1}$, $\varphi_{l q_2 i_2}$ ортогональны на $(0, 1)$.

Третий случай: $l_1 = l_2 = l$, $q_1 = q_2 = q$, $i_1 \neq i_2$. Повторяя рассуждения двух предыдущих случаев, видно, что на каждом интервале $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{k}{3 \cdot 2^l}\right)$, кроме двух исключительных интервалов, интеграл от произведения $\varphi_{l q i_1} \varphi_{l q i_2}$ равен нулю. Один из исключительных интервалов соответствует случаю $k = q$, и на этом интервале имеем $\varphi_{l q i_1} = \varphi_{l q i_2} = \psi_l$ (см. п. 6°). Следовательно, в силу леммы III интеграл от произведения равен $+\frac{1}{3 \cdot 2^l}$.

Второй исключительный интервал есть интервал, для которого согласно соотношению (8) $U_{l q}(i_1, k) = U_{l q}(i_2, k)$. На этом интервале имеем $\varphi_{l q i_1} = -\varphi_{l q i_2} = \pm \psi_t$ (значение t определяется согласно п. 6°). Следовательно, в силу леммы III интеграл от произведения равен $-\frac{1}{3 \cdot 2^l}$. Итак, видно, что в третьем случае две функции $\varphi_{l q i_1}$ и $\varphi_{l q i_2}$ также ортогональны на $(0, 1)$.

11°. Определим для каждой функции $\varphi_{l q i}$ фундаментальную точку $x_{l q i}$ посредством условий:

$$x_{l q i} = \frac{2q-1}{6 \cdot 2^l}, \quad \text{когда } i \leq 2 \cdot 2^l,$$

и

$$x_{lqi} = \frac{q}{3 \cdot 2^l}, \quad \text{когда } i > 2 \cdot 2^l.$$

Занумеруем функции φ_{lqi} в порядке убывания x_{lqi} . Функции, имеющие одинаковые фундаментальные точки, могут быть занумерованы в произвольном порядке. Занумеруем, кроме того, коэффициенты a_{lqi} и точки x_{lqi} в том же порядке, что и соответствующие функции φ_{lqi} . Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad n = 12(4^m - 1), \quad (6')$$

где a_k и φ_k суть a_{lqi} и φ_{lqi} , занумерованные в указанном выше порядке.

Докажем, что сумма (6') обладает всеми тремя свойствами, сформулированными в основной лемме. Свойства I и II уже были получены в п. 8° и 10°. Остается доказать, что сумма (6') обладает свойством III.

12°. Пусть g — некоторое целое число. Обозначим через x_k ($1 \leq k \leq n$) точки x_{lqi} , занумерованные в том же порядке, что и члены $a_k \varphi_k(x)$, т. е. справа налево. Рассмотрим на интервале $\Delta = \left(\frac{g-1}{6 \cdot 2^m}, \frac{g}{6 \cdot 2^m}\right)$ частную сумму

$$\sum_{k=1}^{p_g} a_k \varphi_k(x), \quad (9)$$

состоящую из всех членов $a_k \varphi_k(x)$, для которых соответствующие фундаментальные точки x_k лежат правее Δ . (Так как x_k занумерованы справа налево, существует целое число p_g , не зависящее от точек интервала Δ , и такое, что сумма (9) обладает указанным свойством.)

Для каждого значения l ($1 \leq l \leq m$) существует одно и только одно целое число q , для которого интервал Δ содержится в интервале $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. Для некоторых значений l интервал Δ целиком лежит в левой половине интервала $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$, тогда как для других значений l этот интервал Δ содержится в правой половине $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. Рассмотрим некоторое значение l , для которого Δ содержится в левой половине указанного интервала. В этом случае для всех значений i ($1 \leq i \leq 3 \cdot 2^l$) точки x_{lqi} расположены правее Δ (см. п. 11°), и, следовательно, в сумме (9) содержатся все члены вида $a_{lqi} \varphi_{lqi}$. Среди этих членов $2 \cdot 2^l$ первых равны $+\frac{1}{\sqrt{m \cdot 3 \cdot 2^l}}$, тогда как другие 2^l членов равны $-\frac{1}{\sqrt{m \cdot 3 \cdot 2^l}}$ (см. п. 6° и 7°).

Следовательно, сумма всех рассматриваемых слагаемых равна $1/3\sqrt{m}$.

Рассмотрим теперь такое значение l , для которого Δ содержится в правой половине $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. В этом случае правее Δ расположены только точки x_{lqi} , имеющие индекс $i > 2 \cdot 2^l$. Следовательно, в сумме (9) содержится только 2^l членов вида $a_{lqi}\varphi_{lqi}$, и все эти члены положительны, так как a_{lqi} и φ_{lqi} отрицательны. Сумма рассматриваемых членов равна $1/3 \sqrt{m}$. Таким образом, получается то же самое значение, что и в предыдущем случае.

Обозначим через Σ' сумму всех тех членов в (9), которые были до сих пор рассмотрены. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\Sigma' = 1/3 \sqrt{m}$$

для всех точек из Δ .

Затем рассмотрим сумму Σ'' тех членов в (9), которые не вошли в Σ' . На интервале Δ каждый член $a_k\varphi_k(x)$ из Σ'' равен некоторому выражению $a_k\psi_{t_k}(x)$, где $t_k > m$ (см. определение функций φ_{lqi} в п. 6°). Следовательно, в силу леммы IV функция Σ'' неотрицательна на множестве, мера которого равна половине длины интервала Δ , и поэтому вся сумма (9) больше или равна $1/3 \sqrt{m}$ по крайней мере на множестве меры, равной $1/2 |\Delta|$. Таким образом, свойство III основной леммы доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ II

1°. Обозначим для некоторого n через a_{kn} и $\varphi_{kn}(x)$ числа a_k и функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие условиям основной леммы. Положим для произвольного интервала $\delta = (a, b)$

$$\varphi_{kn}(x, \delta) = \varphi_{kn}\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^n a_{kn}\varphi_{kn}(x, \delta)$$

обладает теми же свойствами, что и сумма (6) основной леммы, нужно только заменить интервал $(0, 1)$ на δ и множество E на множество $E(\delta)$, $\text{mes } E(\delta) = 1/2 |\delta|$.

2°. Для доказательства теоремы II рассмотрим какую-нибудь положительную функцию $W(n)$, подчиненную единственному условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(n)}{\log n} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, существует бесконечная последовательность целых положительных чисел n_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), которая обладает свойствами:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} n_i < n_\nu, \quad (11)$$

$$\frac{W(n)}{\log n} < \frac{1}{\nu^2} \quad \text{для } n \geq n_\nu. \quad (12)$$

Положим

$$N_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} n_i. \quad (13)$$

Согласно соотношению (11) имеем

$$N_\nu < 2n_\nu. \quad (14)$$

3°. Определим числа a_n и функции $\varphi_n(x)$ следующим образом.

а). Для $n \leq n_1$

$$a_n = \frac{a_{nn_1}}{\sqrt{\log n_1}}, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{nn_1}(x).$$

б). Принимая, что a_n и $\varphi_n(x)$ уже определены для $n \leq N_{\nu-1}$, и предполагая, что интервал $(0, 1)$ разделен на конечное число интервалов δ , на каждом из которых все функции $\varphi_n(x)$ ($n \leq N_{\nu-1}$) сохраняют постоянные значения, положим для $N_{\nu-1} < n \leq N_\nu$:

$$a_n = \frac{a_{kn_\nu}}{\sqrt{\log n_\nu}}, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{kn_\nu}(x, \delta)$$

на каждом из интервалов δ , где $k = n - N_{\nu-1}$.

Свойство функций $\varphi_n(x)$ быть постоянными на некоторых интервалах δ , полученных разбиением $(0, 1)$ на конечное число частей, сохраняется на каждом шаге; поэтому можно последовательно определить функции $\varphi_n(x)$ и коэффициенты a_n для всех значений n .

4°. Легко доказать, что функции $\varphi_n(x)$ попарно ортогональны и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

расходится почти всюду. Изменяя значения некоторых функций $\varphi_n(x)$ на множестве меры нуль, можно, кроме того, преобразовать ряд (5) в расходящийся всюду ряд.

Для завершения доказательства теоремы II остается показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n)$$

сходится. Это устанавливается следующим вычислением:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n^2 W(n) &= \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{n=N_{v-1}+1}^{N_v} a_n^2 \frac{W(n)}{\log n} \log n \leq \\ &\leq \sum_{v=2}^{\infty} \log N_v \sum_{n=N_{v-1}+1}^{N_v} a_n^2 \frac{W(n)}{\log n} \leq \\ &\leq C' \sum_{v=2}^{\infty} \log n_v \cdot \frac{1}{(v-1)^2} \sum_{k=N_{v-1}+1}^{N_v} a_k^2 = C' \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{(v-1)^2} = C, \end{aligned}$$

где C' и C — постоянные³.

5 марта 1926 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen.— Math. Ann., 1922, Bd. 87, S. 112—138.
2. Menchoff D. Sur les séries de fonctions orthogonales.— Fund. math., 1923, vol. 4, p. 82—105.
3. Plessner A. Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen.— J. reine und angew. Math., 1925, Bd. 155, S. 15—25.
4. Kolmogoroff A., Seliverstoff G.: Sur la convergence des séries de Fourier.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1926, vol. 3, p. 307—310.

13

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД МНОЖЕСТВАМИ *

В 1921 г. Н. Н. Лузин определил в курсе лекций по теории функций, читанном в Московском университете, класс C -множеств и поставил вопрос о всестороннем его изучении. Недавно Е. А. Селивановским¹ опубликован ряд результатов, относящихся к этому классу и дающих довольно полную его характеристику. Мне кажется, что в связи с этим будет небезынтересно и предлагаемое ниже исследование, где я получаю часть из этих результатов, исходя из весьма общих рассуждений. Оказывается, что теорема о непустоте $\aleph_1$ классов, на которые, так же как и класс множеств, измеримых B , распадается класс C -множеств, имеет место для произвольного класса, порождаемого итерацией операций весьма общего, определенно-го ниже типа и операции взятия дополнения.

³ Доказательство теоремы II аналогично рассуждениям, уже примененным Д. Е. Меньшовым в работе [2] (см. [2, с. 99]).

* Мат. сб., 1928, т. 35, № 3/4, с. 414—422.

¹ Sur une classe d'ensembles définis par une infinité dénombrable de conditions.— C. r. Acad. sci. Paris, 1927, vol. 184, p. 1311—1314.

Самое определение этого вида операций дано Хаусдорфом во втором его издании «Теории множеств». Но ни определения дополнительной операции, ни основной теоремы о дополнениях у него нет.

Ниже следующее является лишь незначительной переработкой рукописи, оконченной 3 января 1922 г.

I

Все рассматриваемые в дальнейшем множества расположены на открытом интервале $(0, 1)$ действительной прямой. За основной класс элементарных множеств принимаются *замкнутые* относительно основного интервала, включая в их число «пустое множество».

Операции, подлежащие нашему изучению, определяются заданием некоторой совокупности частей натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

называемых *числовыми цепями*. Операция X считается вполне определенной, если определена совокупность $\{U^X\}$ ее числовых цепей, где каждая цепь U^X является просто некоторой совокупностью натуральных чисел. Совокупность $\{U^X\}$ будет называться *определяющей системой* операции X .

Пусть теперь дана последовательность множеств

$$E_1, E_2, E_3, \dots$$

Каждой цепи

$$U^X \equiv \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$$

соответствует определенная цепь множеств

$$\mathfrak{U}^X \equiv \{E_{n_1}, E_{n_2}, E_{n_3}, \dots\}.$$

Будем называть *ядром* R $[\mathfrak{U}^X]$ цепи $\mathfrak{U}^X$ произведение всех входящих в нее множеств. Результат операции X над данной последовательностью множеств мы определяем как сумму ядер всех соответствующих цепей

$$X(E_1, E_2, E_3, \dots) = \Sigma R[\mathfrak{U}^X].$$

Рассмотрим некоторые отдельные операции определенного выше типа. Прежде всего операцию *сложения*:

$$\Sigma \{E_n\} = E_1 + E_2 + \dots$$

Эта операция определяется посредством счетной совокупности цепей, состоящих каждая из одного элемента:

$$U_1^\Sigma \equiv \{1\}, U_2^\Sigma \equiv \{2\}, \dots$$

Операция *умножения* Π определяется посредством одной цепи, состоящей из всего натурального ряда:

$$U^\Pi \equiv \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Легко определить также операцию взятия *верхнего* или *нижнего предела* последовательности множеств. Операция нахождения предела последовательности множеств, естественно, не может быть определена нашим способом, так как не для всякой последовательности множеств она приводит к определенному результату.

A-операция обычно определяется для счетной совокупности множеств, занумерованных не просто натуральными числами, а всевозможными *кортежами*

$$n_1, n_2, \dots, n_k.$$

При этом цепью кортежей U^A называется любая последовательность кортежей

$$U_{n_1 n_2 \dots}^A \equiv \{n_1, n_1 n_2, n_1 n_2 n_3, \dots\}.$$

Множество

$$A \{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\},$$

изучаемое посредством *A-операции* из множеств $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$, соответствующих всевозможным кортежам $n_1, n_2, \dots, n_k$, определяется как сумма ядер всевозможных цепей

$$u_{n_1 n_2 \dots}^A \equiv \{E_{n_1}, E_{n_1 n_2}, E_{n_1 n_2 n_3} \dots\}.$$

Легко видеть, что если раз навсегда занумеровать кортежи $n_1, n_2, \dots, n_k$ натуральными числами

$$\mu (n_1, n_2, \dots, n_k),$$

это определение может быть приведено к данной выше форме, так как цепи кортежей можно будет заменить цепями их номеров μ .

Операция X называется *нормальной*, если множество, получаемое двукратным ее применением:

$$E = X \{E_n\}_n, \quad E_n = X \{E_{nm}\}_m,$$

может быть получено X -операцией над множествами E_{nm} в некотором надлежащем выбранном расположении:

$$E = X \{E_{n_k m_k}\}, \quad m_k = \varphi(k), \quad n_k = \psi(k).$$

Вообще говоря, функции $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ могут зависеть от рассматриваемого семейства множеств, но для известных нам нормальных операций их удастся выбрать в зависимости только от самой операции.

Операции сложения и умножения, очевидно, нормальны; операция взятия верхнего или нижнего предела не нормальны.

Нормальность *A-операции* доказывается значительно сложнее тем же методом, как доказывается то, что *A-операция*, примененная к *A-множествам*, доставляет вновь *A-множества*.

II

Рассмотрим систему числовых цепей $\{U^X\}$ операции X . Будем называть цепью, *дополнительной* к данной системе, всякую совокупность натуральных чисел, имеющую хотя бы по одному общему элементу с каждой цепью U^X . Система всех дополнительных цепей $\{U^{\bar{X}}\}$ определяет операцию, которую мы будем называть *дополнительной* к операции X и будем обозначать $\bar{X}$.

Основное свойство операции $\bar{X}$, послужившее поводом к ее обозначению как операции, дополнительной к X , заключается в следующем: обозначая E геометрическое дополнение множества E , имеем при условии

$$E = X(E_1, E_2, \dots)$$

равенство

$$\bar{E} = \bar{X}(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots).$$

Операция, дополнительная к $\bar{X}$, то, что можно обозначить $\bar{\bar{X}}$, очевидно, даст в применении к любой системе множеств те же результаты, что и X ; это можно записать так:

$$\bar{\bar{X}} \sim X.$$

В частности, операция, дополнительная к сложению, есть в точности умножение, но операция, дополнительная к умножению, хотя и эквивалентна со сложением, но определяется другой системой цепей. Очевидно, что операция, дополнительная к нормальной, сама нормальна.

Операция, дополнительная к A -операции, называется Γ -операцией. Естественно ее также определять посредством цепей кортежей, как и A -операцию. П. С. Александровым дан следующий красивый геометрический образ Γ -цепей: будем рассматривать кортежи $n_1, n_2, \dots, n_k$ как группы пространства Бэра нулевого измерения; тогда, для того чтобы система кортежей была Γ -цепью, необходимо и достаточно, чтобы она полностью покрывала все пространство.

III

Будем называть X -множествами множества, получаемые посредством применения X -операции к последовательности замкнутых множеств. Множества, дополнительные к X -множествам, могут быть получены X -операцией из открытых множеств (областей).

Основная теорема. *Существует X -множество, дополнение которого не есть X -множество.*

Рассмотрим бесконечномерный куб, точки которого определяются координатами

$$0 \leq a_{nm} \leq 1, \quad 0 \leq b_{nm} \leq 1,$$

где индексы n и m принимают всевозможные значения. Построим в этом кубе кривую Пеано, т. е. функции

$$\varphi_{nm}(t), \quad \psi_{nm}(t),$$

непрерывные и такие, что когда t пробегает интервал от нуля до единицы, то точка

$$a_{nm} = \varphi_{nm}(t), \quad b_{nm} = \psi_{nm}(t)$$

принимает хотя бы по одному разу всевозможные положения в нашем кубе.

Определим множество $P_n(t)$ как замкнутое множество, получаемое из интервала $(0, 1)$ посредством выбрасывания из него интервалов $\Delta_{nm}(t)$ с концами $\varphi_{nm}(t)$ и $\psi_{nm}(t)$, соответствующих всевозможным индексам m . Очевидно, что для каждой последовательности замкнутых множеств

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

существует такое t , что

$$P_1 = P_1(t), \quad P_2 = P_2(t), \dots$$

Определим, далее, множество

$$E_t = X \{P_n(t)\}.$$

Из предыдущего следует, что каждому X -множеству E соответствует такое t , что

$$E = E_t.$$

Определим, наконец, Q_n как множество тех точек t , которые входят в соответствующее $P_n(t)$. Нетрудно доказать, что множество Q_n замкнуто. Множество

$$E = X \{Q_n\}$$

обладает следующим свойством: если t входит в E_t , то оно входит и в E , если же t не входит в E_t , то оно не входит и в E .

Очевидно, E является X -множеством, но если бы $\bar{E}$ тоже было X -множеством, то существовало бы такое t , что

$$\bar{E} = E_t,$$

из чего легко извлечь противоречие, что и доказывает основную теорему.

IV

Определим $W(X)$ -область как минимальную область множеств, содержащую в себе все замкнутые множества, инвариантную по отношению к X -операции и заключающую в себе все дополнения входящих в нее множеств. Очевидно, $W(\Sigma)$ и $W(\Pi)$ совпадают с областью множеств, измеримых B , $W(A)$ и $W(\Gamma)$ с C -областью

Н. Н. Лузина. Мы построим классификацию множеств $W(X)$ -области, аналогичную классификации Бэра, и в некоторых весьма широких допущениях докажем непустоту всех классов этой классификации.

Определим, далее, классы $W_\alpha(X)$ и $\bar{W}_\alpha(X)$, где α — трансфинитное число второго класса, следующим индуктивным процессом.

1. $W_0(X)$ есть совокупность замкнутых множеств, $\bar{W}_0(X)$ — совокупность открытых множеств.

2. Если $W_\alpha(X)$ и $\bar{W}_\alpha(X)$ определены для $\alpha < \beta$, определим $W_\beta(X)$ как совокупность множеств, получаемых посредством $\bar{X}$ -операции над множествами, каждое из которых принадлежит к какому-либо из классов $\bar{W}_\alpha$, $\alpha < \beta$. Соответственно $\bar{W}_\beta(X)$ определяется как класс множеств, получаемых из множеств классов $W_\alpha(X)$, $\alpha < \beta$, посредством X -операции.

Каждая операция, производимая над последовательностью тождественных множеств, приводит вновь к взятому множеству

$$X(E, E, E, \dots) = E.$$

Поэтому ясно, что $W_\alpha(X)$ содержит в себе все $\bar{W}_\beta(X)$ для $\beta < \alpha$. С другой стороны, ясно, что $W_\alpha(X)$ содержит и все $W_\beta(X)$, $\beta < \alpha$. Соответственно и $\bar{W}_\alpha(X)$ включает в себе все $\bar{W}_\beta(X)$ и $W_\beta(X)$.

Дополнение к множеству класса $W_\alpha(X)$, очевидно, всегда принадлежит к $\bar{W}_\alpha(X)$. Из этого вместе с предыдущим легко вывести равенство

$$W(X) = \Sigma W_\alpha(X) = \Sigma \bar{W}_\alpha(X),$$

где суммирование распространяется на все трансфинитные числа второго класса.

В самом деле, замкнутые множества и их дополнения, открытые множества, принадлежат $W_\alpha(X)$; посредством трансфинитной индукции можно доказать, что и все множества из $W_\alpha(X)$ или $\bar{W}_\alpha(X)$ также входят в $W(X)$. С другой стороны, легко видеть, что суммы

$$\Sigma W_\alpha(X) = \Sigma \bar{W}_\alpha(X)$$

удовлетворяют условиям, выставленным в начале для классов, из которых $W(X)$ является минимальным.

Обозначим теперь:

$$V_\alpha(X) = W_\alpha(X) - \sum_{\beta < \alpha} W_\beta(X), \quad \bar{V}_\alpha(X) = \bar{W}_\alpha(X) - \sum_{\beta < \alpha} \bar{W}_\beta(X).$$

Тогда имеем

$$W(X) = \Sigma V_\alpha(X) = \Sigma \bar{V}_\alpha(X),$$

причем члены последних сумм не пересекаются между собой.

Теорема о непустоте классов. Если операция сложения может быть заменена какой-либо комбинацией X - и $\bar{X}$ -опе-

раций, то ни один из классов $V_\alpha(X)$ и $\bar{V}_\alpha(X)$ не может быть пустым.

1. Допустим, что

$$V_\alpha(X) = 0;$$

тогда

$$W_\alpha(X) = \sum_{\beta < \alpha} W_\beta(X), \quad \bar{W}_\alpha(X) = \sum_{\beta < \alpha} \bar{W}_\beta(X) \subset W_\alpha(X);$$

легко видеть, что в этом случае

$$W(X) = W_\alpha(X).$$

Мы покажем, что в условиях теоремы это равенство неосуществимо.

2. Пусть дана операция Y и последовательность операций $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$. Определим операцию Z , которую будем обозначать

$$Z \equiv (Y \mid Y_1, Y_2, \dots),$$

следующим образом, сначала как операцию над системой множеств с двумя индексами:

$$\{E_{nm}\}.$$

Цепью U^Z мы будем называть такую совокупность пар индексов (nm) , что совокупность встречающихся в этих парах значений первого индекса образует цепь U^Y , а совокупность значений второго индекса в парах с данным первым индексом n образует цепь U^{Y_n} .

Легко видеть, что из

$$E = Y \{E_m\}, \quad E_n = Y_n \{E_{nm}\}_m$$

следует

$$E = Z \{E_{nm}\}_{nm}$$

и, обратно, из последнего равенства следует существование множеств E_n , удовлетворяющих первому. Таким образом, Z -операция заменяет совершение Y -операции над результатами Y_n -операций и, обратно, результат Z -операции может быть получен последовательным совершением Y и Y_n -операций.

Перенумеровав пары (nm) посредством одного индекса k , нетрудно получить, наконец, операцию с одним индексом

$$Z \{E_k\}_k,$$

обладающую теми же свойствами.

В частности, операция

$$Z \equiv (\Sigma \mid Y_1, Y_2, \dots),$$

если предположить для всех $n \neq n_0$

$$E_{nm} = 0$$

и для $n = n_0$

$$E_{nm} = E_m,$$

доставляет множество, получаемое операциями Y_n :

$$Z \{E_{nm}\}_{nm} = Y \{E_m\}.$$

Таким образом, при помощи операции Z можно получить все множества, получаемые какой-либо из операций Y_n .

3. Определим операции X_α и $\bar{X}_\alpha$ следующим индуктивным процессом. Предполагаем все трансфинитные числа ν

$$\nu < \beta < \alpha$$

определенным образом расположенными в последовательность $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$. Полагаем

$$\bar{X}_1 = X, \quad X_1 = \bar{X}.$$

Далее, предполагаем X_ν и $\bar{X}_\nu$ для $\nu < \beta$ определенными, определим в случае β предельного

$$X_\beta \equiv (\bar{X} \mid \bar{X}_{\beta-1}, \bar{X}_{\beta-1}, \bar{X}_{\beta-1}, \dots),$$

$$\bar{X}_\beta \equiv (X \mid X_{\beta-1}, X_{\beta-1}, X_{\beta-1}, \dots).$$

В случае же β предельного

$$X'_\beta \equiv (\Sigma \mid X_{\nu_1}, X_{\nu_2}, X_{\nu_3}, \dots),$$

$$X_\beta \equiv (\bar{X} \mid X'_\beta, X'_\beta, \dots),$$

$$\bar{X}_\beta \equiv (X \mid X'_\beta, X'_\beta, \dots).$$

4. Нетрудно посредством индукции доказать, что операция X_α позволяет из замкнутых и открытых множеств построить любое множество класса $W_\alpha(X)$. По основной теореме о дополнениях операция $\bar{X}_\alpha$ позволит тогда построить множество, не принадлежащее к $W_\alpha(X)$. Легко, однако, доказать, что это множество принадлежит к $W_\alpha(X)$, что и доказывает нашу теорему.

V

Применение к теории B - и C -множеств не требует пояснений.

14 декабря 1928 г.

14

О ПРОЦЕССЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
ДАНЖУА *

Пусть $f(x)$ — функция с периодом $b - a$. Пусть

$$a \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq \xi_i \leq x_i \leq \dots \leq \xi_n \leq b \quad (x_0 = a, \\ x_n = b)$$

— разбиение отрезка $[a, b]$. В соответствии с определением Данжуа $f(x)$ интегрируема в смысле (B) и интеграл

$$B \int_a^b f(x) dx$$

имеет значение I , если при стремлении к нулю шага ω разбиения x_i мера множества тех t , которые удовлетворяют соотношению

$$|I - \varphi(t)| = |I - \sum (x_i - x_{i-1}) f(x_i + t)| > R, \\ 0 < t < b - a, \dagger$$

стремится к нулю, каково бы ни было положительное число R , не зависящее от ω .

Данжуа доказал, что все суммируемые функции интегрируемы (B). Наша цель состоит в том, чтобы показать, что все функции

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} d\alpha,$$

сопряженные к суммируемым функциям $f(x)$ периода 2π , также интегрируемы (B). Известно, что среди этих функций $g(x)$ имеются такие, которые несуммируемы ни на каком интервале.

Мы установили ранее (см. [1]) неравенство

$$\operatorname{mes} \{ |g(x)| > R \} < \frac{C}{R} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx, \quad (1)$$

где C — абсолютная константа. Образует сумму $\varphi(t)$ для функции $g(x)$, при этом $\varphi(t)$ является сопряженной к функции

$$\sum (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i + t).$$

Тогда в силу (1)

$$\operatorname{mes} \{ |\varphi(t)| > R \} < \frac{2\pi C}{R} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx. \quad (2)$$

* Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy. — Fund. math., 1928, vol. 11, p. 27—28. Перевод В. А. Скворцова.

Пусть ε сколь угодно мало, f может быть представлена в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ ограничена и

$$\int_0^{2\pi} |f_2(x)| dx < \frac{\varepsilon R}{8\pi C}.$$

Функция $g_1(x)$, сопряженная к $f_1(x)$, суммируема к нулю на интервале $(-\pi, \pi)$ и значение интеграла равно нулю. Значит, для достаточно малого ω имеем

$$E_1 = \text{mes} \{ |\varphi_1(t)| > 1/2 R \} < \varepsilon/2.$$

С другой стороны, в силу (2) имеем

$$E_2 = \text{mes} \{ |\varphi_2(t)| > 1/2 R \} < \varepsilon/2.$$

Из этих двух неравенств получаем для достаточно малого ω

$$\text{mes} \{ |\varphi(t)| > R \} \leq E_1 + E_2 < \varepsilon,$$

что доказывает интегрируемость (В) функции $g(x)$.

Аналогичным образом можно показать, что $g(x) \cos nx$ и $g(x) \sin nx$ также интегрируемы (В) и что ряд Фурье — (В) функции $g(x)$ является сопряженным к ряду Фурье—Лебега функции $f(x)$.

5 апреля 1927 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. — Fund. math., 1925, vol. 7, p. 23—28.

15

О ТОПОЛОГО-ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОМ ОБОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ*

Известно, что n -мерное пространство постоянной кривизны (т. е. гиперболическое, евклидово, эллиптическое или сферическое пространство) имеет $(n+1)n/2$ -мерную непрерывную группу движений. Все остальные до сих пор известные n -мерные геометрические образования допускают только меньшую свободу движений¹. Представляется естественной задача охарактеризовать пространства постоянной кривизны как единственные топологические пространства с дос-

* Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1930, Bd. 8, S. 208—210. Представлено П. Александровым. Перевод И. Пенкова (НРБ).

¹ Замечательным исключением являются в одномерном случае соленоиды ван Даница; см.: Fund. math., 1929, vol. 15, p. 102—105.

таточно большой свободой движений. Для этого рассмотрим топологическое пространство R и некоторую группу Γ из однозначных непрерывных отображений R на себя. Для того, чтобы добиться сходства Γ с группой, составленной из движений, естественно потребовать, чтобы отображения из Γ были в совокупности равномерно непрерывны ²:

У с л о в и е I. Для любой пары точек (x, y) и любой окрестности $U(y)$ существуют две окрестности $V(x)$ и $W(y)$ такие, что при любом отображении из Γ , которое переводит по крайней мере одну точку из $V(x)$ в $W(y)$, весь образ $V(x)$ лежит в $U(y)$.

В случае метризуемого и локально компактного пространства R условие I необходимо и достаточно для того, чтобы на R можно было ввести такую метрику (функцию расстояния), чтобы все отображения из Γ сохраняли расстояние между любыми двумя точками, т. е. стали конгруэнтными отображениями ³.

У с л о в и е II. R метризуемо и локально компактно.

У с л о в и е III. R связно.

У с л о в и е IV. Γ транзитивна ⁴.

Отображения из Γ , сохраняющие данную точку x , образуют подгруппу Γ_x вращений вокруг x . Обозначим множество всех образов точки y при отображениях из Γ_x через $S(x|y)$ и назовем его сферой вокруг x . Если z лежит в $S(x|y)$, то $S(x|y)$ и $S(x|z)$ совпадают. Далее будем обозначать сферы с центром в x просто через $S(x)$.

У с л о в и е V. Для любых двух различных сфер $S'(x)$ и $S''(x)$ с общим центром x одна из них всегда отделяет другую от центра.

С помощью условий I—V можно показать, что на R можно ввести инвариантную относительно Γ выпуклую ⁵ функцию расстояния $\rho(x, y)$. При этом Γ определяет эту выпуклую функцию расстояния с точностью до множителя. Если R одномерно, из I—V следует, что R гомеоморфно обычной окружности или прямой. При этом можно так отобразить R на окружность или на прямую, что Γ перейдет в группу вращений и отражений [и группу сдвигов и отражений соответственно]. Не исключена возможность, что и в общем случае пространство R с условиями I—V обязательно гомеоморфно конечномер-

² Мне кажется, что это определение равномерной непрерывности системы отображений в окрестности пары точек (x, y) представляет известный интерес и в общем случае отображений из одного пространства R в другое пространство R' .

³ В случае компактного пространства R такая функция расстояния $\rho^*(x, y)$ определяется как верхний предел $\rho(x', y')$ для всех образов (x', y') , пар точек (x, y) при отображениях из Γ ; при этом $\rho(x, y)$ — произвольная функция расстояния в R .

⁴ Соленоиды ван Даницга удовлетворяют условиям I—IV; но условие III можно было бы заменить более сильным (которое не выполнено для соленоидов):

У с л о в и е III'. Пространство R связно и локально связно.

Условия I, II, III' и IV выполнены, например, для группы движений обыкновенного кругового цилиндра. Встает вопрос, не является ли R при этих условиях обязательно многообразием?

⁵ Говорят, что $\rho(x, y)$ выпукла, если для любых двух точек x и y существует по крайней мере одна точка z такая, что $\rho(x, y) = 2\rho(x, z) = 2\rho(y, z)$.

ному пространству постоянной кривизны. Но для того, чтобы получить полную группу движений или движений и отражений, условия I—V недостаточны: уже в четырехмерном евклидовом пространстве существует группа движений, которая удовлетворяет I—V, но является только семимерной⁶.

При любом отображении из Γ_x , сфера $S(x)$ переходит вместе с центром x сама в себя. Эти отображения $S(x)$ на себя образуют группу $\Gamma\{S(x)\}$. Для любой точки y на $S(x)$ можно теперь определить группу вращений $\Gamma_y\{S(x)\}$ сферы $S(x)$ вокруг точки y . Множество образов точки z , лежащей на $S(x)$, при отображениях из $\Gamma_y\{S(x)\}$ обозначим через $S(x, y | z)$ или коротко через $S(x, y)$ и назовем его сферой второго порядка. Более общо, если даны сфера n -го порядка $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и группа $\Gamma\{S(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, для любой точки y на $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется аналогично группа вращений $\Gamma_y\{S(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ вместе со сферами $(n+1)$ -го порядка $S(x_1, x_2, \dots, x_n, y | z)$ или коротко $S(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Наконец, определяются также и группы $\Gamma\{S(x_1, x_2, \dots, x_n, y)\}$.

У с л о в и е V' . Для любых двух различных сфер $S'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $S''(x_1, x_2, \dots, x_n)$ одна из них отделяет другую от центра x_n в $S(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} | x_n)$.

Если сфера $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нульмерна, условие V' становится бессодержательным для сфер большего порядка, которые лежат в $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$; можно доказать, что в действительности если выполнены условия I—IV и V' , то все сферы достаточно большого порядка нульмерны. Следовательно, существуют также и одномерные сферы, а они обязательно гомеоморфны обычным окружностям. С помощью метода индукции получается наконец

О с н о в н а я т е о р е м а. Если выполнены условия I, II, III, IV, V' , то R гомеоморфно конечномерному пространству постоянной кривизны; при этом R можно отобразить на это пространство так, что Γ перейдет в полную группу движений и отражений.

18 июля 1930 г.

16

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА*

Основная цель этой работы — выяснить логическую природу процессов интегрирования. И если, помимо объединения различных подходов, при этом возникло некоторое обобщение понятия интеграла, то дело тут, по-видимому, в том, что обобщение понятия зачастую бывает полезно для постижения его сущности (ср. с предисловием ко второму изданию [1]). Не исключено, что все эти обобще-

⁶ Эта группа соответствует унитарной группе линейных кватернионных подстановок: $x' = ax + b$, $|a| = 1$.

* Untersuchungen über Integralbegriff. — Math. Ann., 1930, Bd. 103, S. 654—696. Перевод П. Освальда (ГДР).

ния могут представить интерес и для приложений, однако достоинства более общего подхода видятся мне прежде всего в простоте и ясности, которые вносят новые понятия.

Интересом к общим проблемам теории интегрирования я обязан профессору Н. Н. Лузину. Кроме того, я хотел бы поблагодарить В. И. Гливенко, с которым имел многочисленные беседы, относящиеся к содержанию данной работы и из которых извлек много полезного.

Глава I ВВЕДЕНИЕ

§ 1. То, что сегодня понимают под словом «интегрирование», не является, собственно говоря, логическим понятием в строгом смысле. Скорее этот термин является собирательным для нескольких операций, каждая из которых имеет свое определение. В большинстве случаев, однако, эти операции обладают тем общим свойством, что в случае интегрирования непрерывной функции получается интеграл в классическом смысле. Мне кажется, что все многообразие определений не может быть естественным образом сведено к одному, т. е. иначе говоря, проблема отыскания естественного определения интеграла, содержащего в себе все прежние определения в качестве частных случаев, является совершенно безнадежной.

В частности, мне представляется, что, пытаясь объединить общей концепцией, с одной стороны, интеграл типа Стильтеса для функций на абстрактных множествах (в той форме, которую предложил недавно Фреше [21]) и, с другой стороны, интеграл Данжуа, мы неизбежно столкнулись бы с принципиальными трудностями. Ведь для того, чтобы такое объединенное понятие могло быть применено к функциям, заданным на произвольных абстрактных множествах, оно должно базироваться лишь на таких построениях, которые основаны на общих свойствах множеств и функций. В то же время оно же должно учитывать особенности метода интегрирования Данжуа, столь тесно связанного с отношением порядка на числовой прямой.

Процесс обобщения математического понятия, идущий одновременно в нескольких направлениях, встречается здесь не впервые: аналогичная картина имеется, например, когда различные свойства натурального числа служат отправной точкой принципиально различных обобщений. С одной стороны, получаются трансфинитные порядковые и кардинальные числа, с другой — вещественные числа.

Интегрирование в смысле Данжуа (им самим названное «тотализацией») является обобщением классического метода интегрирования, понимаемого как построение первообразной к данной функции. Это есть вполне естественный и логичный путь обобщения, который, если угодно, можно рассматривать как последнее звено цепи, имеющей своим началом ньютоновское понимание интеграла.

Другой и еще более проторенный путь исходит из общей и довольно неопределенной идеи, согласно которой интегрирование есть не-

кий способ суммирования, относящийся к бесконечному числу бесконечно малых величин, соответствующих в свою очередь бесконечно малым частям области интегрирования. Эта идея, которой мы обязаны также самим словом «интеграл», была высказана в весьма расплывчатой, но совершенно общей форме Лейбницем. Она получила толкование (более или менее удовлетворяющее современного математика) впервые у Коши. Среди множества последующих работ, занимающихся проблемой интегрирования, большинство посвящено развитию этой идеи Лейбница. К этому же источнику относится уже упомянутое определение интеграла, данное Фреше (и ведущее в другую сторону по сравнению с интегралом Данжуа).

Создание по возможности более широкого определения интеграла, реализующего понятие интеграла Лейбница в форме, отвечающей современным требованиям строгости, и, насколько это можно, сохраняющего при этом его универсальный характер, является целью данной работы.

Оба указанных направления не являются единственными, в которых можно продвигаться разумным образом, сохраняя достаточно много свойств операции интегрирования в классическом смысле. В особенности хочу отметить, что исходя из проблемы нахождения среднего значения функции (решение которой, как известно, в классических случаях задается интегралом) можно получить новую, весьма общую операцию, которая, между прочим, полезна в различных конкретных вопросах теории вероятностей. Эту операцию (которая, конечно, содержит классическое интегрирование как частный случай) я надеюсь сделать предметом другой работы. Здесь хочу лишь указать на тот замечательный факт, что даже для вещественной функции $f(x)$ одной вещественной переменной естественным образом однозначно определенное среднее значение на единичном отрезке может не совпадать с интегралом Данжуа (взятым по тому же отрезку).

То обстоятельство, что мы имеем дело с двумя определениями интеграла, каждое из которых является естественным и важным обобщением классического интеграла и дает для одной и той же функции два различных значения, на мой взгляд обосновывает высказанное в начале этого параграфа воззрение о безнадежности нахождения универсального понятия интеграла, охватывающего все разумные определения интеграла.

Но даже в рамках данной работы мы встретимся с двумя определениями, а именно: с определениями интеграла из глав II и III, которые для некоторых функций дают различные значения (см. гл. III, п. 14).

Следует, однако, отметить, что случаи несовпадения двух последних названных определений интеграла реализуются только на функциях множества, построенных *ad hoc*¹ и для которых неясно, представляет ли вообще интерес их интегрирование.

¹ По конкретному поводу (лат.).

§ 2. Пусть x — изменяющаяся в интервале (a, b) величина. Лейбниц предполагает, что каждому значению x отвечает бесконечно малая величина dy . Складывая все эти dy , получается так называемая Summa Omnium Лейбница или интеграл от dy на интервале (a, b) . Смысл этого определения был даже для математиков XVIII в. недостаточно ясен, что вынуждало их до Коши, отказываясь от подхода Лейбница, определить интегрирование как обращение дифференцирования.

Коши первым перевел определение Лейбница из языка метафизики на язык математики и открыл этим возможность — хотя бы в частном случае $dy = f(x) dx$ — найти путем настоящего вычисления интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

как предел известных интегральных сумм

$$\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (2)$$

Обозначим интервалы (x_{i-1}, x_i) через Δ_i , длину интервала Δ через $l(\Delta)$, а через $f(\Delta)$ многозначную функцию интервала, которая на каждом интервале принимает все значения, пробегаемые $f(x)$ на Δ . Тогда выражение (2) имеет вид

$$\sum f(\Delta_i) l(\Delta_i) = \sum \varphi(\Delta_i). \quad (3)$$

Идея Лейбница осуществляется следующим образом. Найти для каждого значения x в (a, b) бесконечно малую dy означает определить функцию интервала $\varphi(\Delta)$, которая становится *бесконечно малой*, когда Δ стягивается к точке x . Найти сумму всех dy означает определить предел интегральных сумм (3) при бесконечном продолжении разбиений отрезка (a, b) на частичные отрезки.

Открываются следующие четыре возможности обобщения метода интегрирования Коши.

1. Вместо функции интервала $\varphi(\Delta) = f(\Delta) l(\Delta)$ можно рассматривать произвольные функции интервала $\varphi(\Delta)$.

2. Область интегрирования может разбиваться на конечное или счетное число произвольных множеств (и не обязательно на интервалы).

3. Область интегрирования не обязательно должна представлять собой отрезок числовой прямой. Можно допускать в качестве областей, по которым производится интегрирование, множества, состоящие из элементов произвольной природы.

4. Наконец, можно также выбрать значения функции $\varphi(\Delta)$ из элементов произвольного векторного пространства, не обязательно из вещественных чисел.

В первом из этих четырех направлений большой прогресс достигнут в виде интеграла Стильтьеса и его непосредственных обобщений.

Вместо длины $l(\Delta)$ вводилась произвольная аддитивная функция интервала. Однако общая постановка вопроса впервые появилась у Беркилля [3], который в 1924 г. для произвольной функции интервала $\varphi(\Delta)$ определил интеграл

$$\int_a^b d\varphi(\Delta)$$

как предел сумм

$$\sum \varphi(\Delta_i).$$

при бесконечном продолжении разбиений (a, b) на частичные отрезки Δ_i . Беркилля при этом ограничился рассмотрением однозначных функций $\varphi(\Delta)$, что ему не позволило получить классическое определение интеграла по Юши в качестве частного случая своего собственного.

В данной работе мы систематически допускаем многозначные функции, кроме того, функции точки $f(x)$ последовательно заменяются на функции интервала и — даже более общо — на функции множества $f(E)$, принимающие в качестве своих значений на E совокупность значений $f(x)$ на этом же множестве. Только этот путь приведет нас к общей теории интеграла, в которой под знаком интеграла рассматривается лишь одна функция множества. Господствовавшее до сих пор во всех теориях интегрирования расщепление функции, подлежащей интегрированию, является, таким образом, искусственным и немотивированным ограничением, одновременно суживающим общность проблемы и простоту метода.

Существенный прогресс во втором направлении, как известно, был достигнут благодаря Лебегу, который интеграл (1) определял как предел сумм

$$\sum f(E_i) m(E_i), \tag{4}$$

где E_i представляют собой измеримые множества, на которые разбивается отрезок (a, b) , а $m(E)$ есть мера множества E . Лебег в своем определении требует, чтобы выражения (4) стремились к пределу для разбиений более специального вида. Общее определение предела для выражения, зависящего от разбиений отрезка (a, b) при «неограниченном продолжении» разбиений (ср. гл. II, п. 8), принадлежит Муру [4]. Сам Мур указывает на то, что введенное им понятие предела делает возможным особенно простую форму определения интеграла Лебега и приведет к его обобщению. Некоторые обобщения классического интеграла Стильеса получил этим путем Смит [5].

Что касается общности допустимых областей интегрирования, то — после ряда исследований различных авторов — Фреше в уже цитированной работе окончательно установил, что вся общая теория интегрирования может быть развита без всякого ограничения этой общности.

То, что до сих пор делалось в этих первых трех направлениях теории интегрирования, было учтено при создании построенного в данной работе определения. Зато оставшийся еще четвертый путь — интегрирование функций, значения которых принадлежат произвольному векторному пространству — сознательно не рассматривается. Большинство результатов обобщается и на этот случай, однако осуществление этого обобщения излишне перегружало бы изложение.

§ 3. В предыдущем параграфе мы проследили тот путь развития понятия интеграла, который начинается с Summa Omnium Лейбница. При этом мы убедились, что все это развитие являлось последовательным и неизбежным раскрытием идеи Лейбница, хотя некоторые более недавние определения кажутся очень отдаленными от первоначальной идеи.

По-другому обстоит дело с понятием неопределенного интеграла. Классическое понимание, рассматривающее неопределенный интеграл как функцию точки, существенно связано с интегрированием на линейном интервале прямой и даже не обобщается на случай кратных интегралов. Лишь в последнее время развивалась более общая и одновременно более простая точка зрения, рассматривающая неопределенный интеграл как *функцию множества*, по которому производится интегрирование. Мы в дальнейшем имеем дело только с последним подходом.

В случае интеграла Стильтьеса — Радона речь идет о двух аддитивных функциях множества $\varphi(E)$ и $\psi(E)$ и о функции точки $f(x)$, связанных друг с другом посредством следующих соотношений:

$$\psi(E) = \int_E f(x) d\varphi(E), \quad (1)$$

$$d\psi(E)/d\varphi(E) = f(x). \quad (2)$$

Второе соотношение при этом имеет место лишь «почти всюду». Следует еще отметить, что понятие производной одной функции множества по отношению к другой зависит существенно от геометрических свойств пространства, в котором лежат соответствующие множества. Правда, в приложении к этой работе мы покажем, что и в случае определенного на абстрактном множестве интеграла типа Стильтьеса (без всякого привлечения геометрических понятий) производную (2) можно ввести так, чтобы из (2) следовало (1).

Общая концепция интегрирования, связанная с формулами (1), (2), неоднократно пропагандировалась Лебегом, который подчеркивал ее основополагающее значение для *физики*. Однако мы увидим, что *чисто логически* это понятие интеграла включено в общий метод интегрирования

$$\psi(E) = \int_E \varphi(dE) \quad (3)$$

с необязательно аддитивной функцией множества $\varphi(E)$. Я надеюсь в одной из последующих работ показать, что это еще более общее

понятие также *математически* оправдано и что оно принесет большую пользу именно в теории меры и в общей теории квадратур поверхностей.

В случае (3), где встречаются две функции множества, только одна из которых аддитивна, интегрирование, конечно, не может быть связано с каким-то методом дифференцирования. Тем не менее и в этом случае функции φ и ψ связаны отношением, носящим определенный дифференциальный характер, которое мы в дальнейшем введем под названием дифференциальной эквивалентности.

Глава II ПЕРВАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (СЧЕТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ)

§ 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Система множеств со свойством, что пересечение двух множеств системы снова принадлежит системе, называется *$\mathfrak{M}$ -системой* (-мультипликативной системой) и обозначается² через $\mathfrak{M}$.

2. Каждое разбиение множества E из данной $\mathfrak{M}$ -системы на конечное или счетное число попарно не пересекающихся слагаемых из той же системы

$$E = \sum_n E_n$$

обозначается через

$$DE = \sum_n E_n,$$

множества E_n при этом называются элементами разбиения D .

3. Каждое разбиение DE с элементами E_n порождает в подмножестве E' из E однозначно определенное разбиение

$$DE' \equiv \sum_n E'_n \equiv \sum_n E'E,$$

которое обозначим той же буквой D .

4. Разбиение $D'E$ называется *продолжением* разбиения DE , если каждый элемент E'_n разбиения D' содержится в некотором элементе E_m из D , что обозначим так: $D' > D$. Очевидно, что из $D'' > D'$, $D' > D$ следует соотношение $D'' > D$.

5. Под *произведением* двух разбиений $D'E$ и $D''E$ понимается разбиение

$$[D'D'']E = \sum_{nm} E'_n E''_m.$$

² Если в системе множеств $\mathfrak{M}$ содержатся два непересекающихся множества, то согласно предположению и *пустое множество* принадлежит $\mathfrak{M}$.

Здесь E'_n и E''_m обозначают соответственно элементы из D' и D'' . Благодаря основному свойству $\mathfrak{M}$ -системы элементы произведения разбиений принадлежат нашей $\mathfrak{M}$ -системе. Произведение двух разбиений, очевидно, является одновременно продолжением каждого из разбиений.

6. Определим еще сумму разбиений. Если

$$DE \equiv \sum_n E_n, \quad D^{(n)}E_n \equiv \sum_m E_{nm}$$

и

$$D'E \equiv \sum_{nm} E_{nm} \equiv \sum_n \sum_m E_{nm},$$

то положим по определению

$$D'E = \sum_n D^{(n)}E_n.$$

Таким образом, каждое продолжение $D'E$ разбиения DE может быть представлено в таком виде и притом единственным образом, в этом случае разбиения $D^{(n)}E_n$ назовем *компонентами* продолжения $D'E$. Верно также обратное к этому утверждению: каждое разбиение $\sum D^{(n)}E_n$ является, очевидно, продолжением разбиения DE .

7. Совокупность элементов всех разбиений DE множества E обозначается через $\mathfrak{M}E$. Система множеств $\mathfrak{M}E$ сама является $\mathfrak{M}$ -системой. В самом деле, если E' и E'' — элементы из $\mathfrak{M}E$, то они встречаются в качестве элементов некоторых разбиений $D'E$ и $D''E$, а пересечение $E'E''$ является элементом из $[D'D'']E$.

Если G принадлежит $\mathfrak{M}E$, то $\mathfrak{M}G$ содержится в $\mathfrak{M}E$.

8. Допустим сейчас, что на некотором множестве разбиений DE множества E задана одно- или многозначная функция $f(D)$. Следуя Муру, назовем число I *пределом для $f(DE)$ при неограниченном продолжении разбиений DE* и обозначим

$$I = l[f(DE)],$$

если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое DE , что для всех $D' > D$ определена функция $f(D')$ и выполняется неравенство (см. [4])

$$\sup |f(D') - I| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что более одного предела существовать не может. Если I' и I'' — два предела, то найдутся также два разбиения $D'E$ и $D''E$, для произведения которых (являющегося совместным их продолжением) справедливы неравенства

$$\sup |f([D'D'']) - I'| < \varepsilon/2, \quad \sup |f([D'D'']) - I''| < \varepsilon/2,$$

откуда $|I' - I''| < \varepsilon$ и в силу произвольности положительного ε мы должны иметь $I' = I''$.

9. Для $f(DE)$ существует предел тогда и только тогда, когда выполнен критерий сходимости Коши, а именно: для каждого $\varepsilon > 0$

существует « ε -регулярное разбиение DE », т. е. такое разбиение, для которого из $D' > D$ всегда следует ³

$$\sup |f(DE) - f(D'E)| < \varepsilon.$$

10. Данное выше определение легко обобщается на случай $I = \pm \infty$. Положим

$$l[f(DE)] = +\infty,$$

если для любого $H < +\infty$ существует такое DE , что при $D' > D$ выполнено

$$\inf [f(D'E)] > H.$$

Аналогично определяется отрицательно бесконечный предел.

§ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

11. Пусть функция $f(E)$ определена для всех элементов разбиения DE . Введем обозначение

$$(Rf)(DE) = \sum_n f(E_n),$$

в случае многозначной функции f многозначным будет и (Rf) (различные значения для (Rf) получаются, если при суммировании для каждого E_n берутся все различные значения $f(E_n)$). Чтобы приведенное выше обозначение имело смысл, предполагается ⁴, что ряд справа является абсолютно сходящимся при любом выборе значений функции $f(E_n)$.

Выражение $(Rf)(DE)$ можно назвать суммой Римана для f , отвечающей разбиению DE .

12. Интеграл для f на множестве E по отношению к данной системе $\mathfrak{M}$ положим по определению равным

$$(\mathfrak{M}) \int_E f(dE) = l[(Rf)(DE)],$$

где предел понимается в смысле п. 8.

Букву $(\mathfrak{M})$ перед знаком интеграла чаще всего можно опустить, поскольку все рассуждения, в которых одновременно участвуют несколько интегралов, относятся всегда к одной и той же $\mathfrak{M}$ -системе.

13. Ясно, что интеграл не может существовать, если функция (Rf) не определена для любых продолжений хотя бы одного разбиения

³ При этом разность двух многозначных выражений принимает все значения, являющиеся разностью двух значений данных выражений.

⁴ Следует при этом оговорить, что для пустого множества все рассматриваемые функции принимают только нулевое значение. Это соглашение необходимо в любой аддитивной теории функций множества, иначе, в частности, не существовала бы ни одна интегрируемая функция.

ния DE . Что касается функции f , то в определении интеграла используются лишь ее значения для элементов системы $\mathfrak{M}E$, достаточно даже ограничиться значениями, которые она принимает на всех элементах любых продолжений некоторого разбиения DE . Совокупность этих последних множеств обозначим через $\mathfrak{M}DE$. Ясно, что $\mathfrak{M}DE$ является подсистемой для $\mathfrak{M}E$ и в свою очередь $\mathfrak{M}$ -системой. Функцию множеств, определенную для всех элементов некоторой системы $\mathfrak{M}DE$, назовем определенной на $\mathfrak{M}E$ дифференциальным образом — или короче *дифференциально определенной функцией*. Тогда необходимое условие, при котором интеграл для f на E существует, состоит в свойстве f быть определенной на $\mathfrak{M}E$ дифференциальным образом.

14. Свойства интеграла.

I. Если существует интеграл для f на E , то существует также интеграл для f на любом множестве из $\mathfrak{M}E$.

Доказательство этого свойства проводится вместе с доказательством следующего свойства.

II. Интеграл является аддитивной функцией множества; т. е. для каждого разбиения DE имеем

$$\int_E f(dE) = \sum_n \int_{E_n} f(dE_n), \quad (1)$$

при этом из существования интеграла в левой части этого равенства вытекает существование всех интегралов в правой части (последнее утверждение совпадает с утверждением в I), а также абсолютная сходимость ряда из этих интегралов.

Доказательство. В самом деле, допустим, что существует интеграл для f на E , т. е. что $(Rf)(DE)$ сходится к определенному пределу при неограниченном продолжении DE . Тогда в силу п. 9 для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε -регулярное разбиение $D'E$, для каждого продолжения $D''E$ которого имеем

$$\sup |(Rf)(D''E) - (Rf)(D'E)| < \varepsilon.$$

Я утверждаю, что разбиение $D'E_n$ также ε -регулярно. В самом деле, пусть $D'''E_n$ представляет собой продолжение для $D'E_n$, тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \sup |(Rf)(D'''E_n) - (Rf)(D'E_n)| &\leq \\ &\leq \sup |(Rf)(D'''E_n + \sum_{m \neq n} D'E_m) - (Rf) \sum_m (D'E_m)| = \\ &= \sup |(Rf)(D^{IV}E) - (Rf)(DE)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

где $D^{IV}E$, очевидно, есть продолжение для $D'E$.

Так как для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε -регулярное разбиение $D'E_n$, то при каждом n также существует предел для $(Rf)(DE_n)$, т. е. интеграл I_n для f на E_n . Выберем для каждого n такое разбиение D'_nE_n , что для любого продолжения D''_nE_n справедливо

$$\sup |(Rf)(D''_nE_n) - I_n| < \varepsilon/2^n.$$

Сейчас положим

$$D'E \equiv \sum_n D'_n E_n.$$

Для произвольного продолжения $D''E \equiv \sum D''_n E_n$ этого разбиения очевидным образом выполнено неравенство

$$\sup |(Rf)(D''E) - \sum_n I_n| \leq \sum_n \sup |(Rf)(D''_n E_n) - I_n| < \varepsilon,$$

из которого следует, что интеграл для f на E совпадает с величиной $\sum_n I_n$, что и требовалось доказать.

$$\text{III. } \int_E [f_1(dE) + f_2(dE)] = \int_E f_1(dE) + \int_E f_2(dE),$$

при этом из существования правой части следует существование левой.

$$\text{IV. } \int_E kf(dE) = k \int_E f(dE).$$

V. Если справедливо $f_1(E) \geq f_2(E)$ для всех множеств, на которых одновременно определены обе функции⁵, то имеем также

$$\int_E f_1(dE) \geq \int_E f_2(dE).$$

VI. Интеграл для аддитивной на $\mathfrak{M}E$ функции совпадает с ней.

VII. Пусть заданы функция f и последовательность функций $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ такие, что⁶

$$\sup |(R | f - f_n |)(DE)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

тогда

$$\int_E f_n(dE) \rightarrow \int_E f(dE) \quad (n \rightarrow \infty),$$

причем из существования интегралов в левой части последнего соотношения вытекает существование интеграла в правой части.

Все эти свойства вряд ли нуждаются в доказательстве.

§ 3

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

15. Мы увидели, что, если f на E интегрируема и, следовательно, определена на некотором $\mathfrak{M}DE$, то ее интеграл

$$F(G) = \int_G f(dG)$$

⁵ Неравенство $f_1(E) > f_2(E)$ означает, что каждое значение $f'(E)$ больше любого значения $f_2(E)$.

⁶ Знак $\sup$ здесь обозначает точную верхнюю грань значений $(R | f - f_n |)$ для всех DE и фиксированного n .

является аддитивной функцией, определенной для всех множеств G системы $\mathfrak{M}E$. Естественно возникает вопрос: каковы связи между функциями f и F ? Ответ на этот вопрос получается с помощью следующего

О п р е д е л е н и я. Дифференциально определенные на $\mathfrak{M}E$ функции $f(G)$ и $g(G)$ называются дифференциально эквивалентными, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение DE , что для всех $D' > D$ имеет место

$$\sup \sum |f(E'_n) - g(E'_n)| < \varepsilon.$$

Свойство дифференциальной эквивалентности может быть выражено короче в следующих двух формах:

$$l[(R | f - g |)(DE)] = 0$$

или

$$\int_E |f(dE) - g(dE)| = 0.$$

Наконец, введем еще следующее обозначение для дифференциальной эквивалентности на $\mathfrak{M}E$ двух функций f и g :

$$f(DE) = g(DE) (\mathfrak{M}E),$$

где $(\mathfrak{M}E)$ опускается в тех случаях, когда исключено недоразумение.

16. Дифференциальная эквивалентность удовлетворяет условию транзитивности, т. е. из

$$f(dE) = g(dE) \quad \text{и} \quad g(dE) = h(dE)$$

следует, что

$$f(dE) = h(dE).$$

Действительно, существуют такие D_1E и D_2E , что для их продолжений D'_1E и D'_2E справедливы неравенства

$$\sup (R | f - g |)(D'_1E) < \varepsilon/2, \quad \sup (R | g - h |)(D'_2E) < \varepsilon/2.$$

Теперь без труда можно убедиться, что для произвольного продолжения D'_3E разбиения $D_3E = [D_1D_2]E$ имеет место неравенство

$$\sup (R | f - h |)(D'_3E) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

17. Чтобы более полно охарактеризовать понятие дифференциальной эквивалентности, докажем еще следующее

П р е д л о ж е н и е. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n вещественных переменных удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)| < K \sum_n |x_k - y_k|.$$

Если функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ и $f'_1, f'_2, \dots, f'_n$ на $\mathfrak{M}E$ дифференциально определены и удовлетворяют условиям $f_k(dE) = f'_k(dE)$, то

$$\begin{aligned}\Phi(dE) &= \varphi[f_1(dE), f_2(dE), \dots, f_n(dE)] = \\ &= \Phi'(dE) = \varphi[f'_1(dE), f'_2(dE), \dots, f'_n(dE)].\end{aligned}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют разбиения $D_k E$ со свойством, что при всех $D'_k > D_k$

$$\sup_m \sum |f'_k(E'_{km}) - f_k(E'_{km})| < \varepsilon/nK.$$

Каждое продолжение $D'E$ разбиения

$$DE = [D_1, D_2, \dots, D_n] E$$

является также продолжением любого разбиения из $D_k E$, откуда следует неравенство

$$\sup_m \sum |\Phi'(E'_m) - \Phi(E'_m)| < \varepsilon$$

и из него непосредственно наше предложение.

18. Из соотношения (1) для дифференциально эквивалентных функций f и g вытекает, что для каждого G из $\mathfrak{M}E$ справедливо

$$\int_G |f(dG) - g(dG)| = 0$$

и согласно свойству V интеграла (п. 14)

$$\int_G [f(dG) - g(dG)] \leq 0, \quad \int_G [g(dG) - f(dG)] \leq 0,$$

$$\int_G [f(dG) - g(dG)] = 0. \quad (2)$$

Если одна из двух функций f и g интегрируема, то очевидно

$$\int_G f(dG) = \int_G g(dG).$$

Мы хотим сейчас показать, что и, наоборот, из справедливости (2) для каждого G следует дифференциальная эквивалентность функций f и g . Таким образом, необходимое и достаточное условие дифференциальной эквивалентности двух функций состоит в обращении в нуль интеграла для их разности на любом G , взятом из $\mathfrak{M}E$.

Полагая $h = f - g$, сведем наше утверждение к следующему.

19. Для любой функции $h(E)$ из справедливости условия

$$\int_G h(dG) = 0$$

для всех G из $\mathfrak{M}E$ вытекает соотношение

$$\int_E |h(dE)| = 0$$

или, что то же самое,

$$h(dE) = 0.$$

Доказательство. В силу интегрируемости h на E существует ε -регулярное разбиение DE , для произвольного продолжения которого имеем

$$\sup | (Rh)(D'E) | < \varepsilon.$$

Я утверждаю, что тогда для каждого $D' > D$ справедливо

$$\sup (R|h|)(D'E) < 4\varepsilon,$$

что докажет наше предложение.

Допустим противное, т. е. что существует такое продолжение $D'E$, для которого выполнено

$$\sup (R|h|)(D'E) = \sup \sum_n |h(E'_n)| \geq 4\varepsilon.$$

Тогда из совокупности N всех индексов n можно выбрать подсистему M с

$$\sup \left| \sum_M h(E'_n) \right| \geq 2\varepsilon.$$

Для каждого индекса n из $N - M = L$ выберем такое $D^{(n)}E'_n$, чтобы имело место

$$\sup | (Rh)(D^{(n)}E'_n) | < \varepsilon/2^n,$$

и положим

$$D''E \equiv \sum_M E'_n + \sum_L D^{(n)}E'_n.$$

Как легко видеть, справедливо

$$\sup | (Rh)(D''E) | \geq \sup \left| \sum_n h(E'_n) \right| - \sum_L \sup | (Rh)(D^{(n)}E'_n) | > \varepsilon,$$

что является противоречием, поскольку $D''E$ есть продолжение для DE .

20. Интегрируемая на E функция $f(G)$ дифференциально эквивалентна своему неопределенному интегралу на $\mathfrak{M}E$

$$F(G) = \int_G f(dG).$$

Действительно,

$$\int_G F(dG) = F(G) = \int_G f(dG)$$

и благодаря п. 18 имеем

$$f(dE) = F(dE).$$

Верно также обращение этого предложения: если на $\mathfrak{M}E$ функция $f(G)$ дифференциально эквивалентна некоторой аддитивной функций $F(G)$, то из п. 18 вытекает, что

$$\int_E f(dE) = \int_E F(dE) = F(E).$$

21. Таким образом, получаем

Второе определение интеграла. Интегралом для f на E называется аддитивная функция на $\mathfrak{M}E$, являющаяся дифференциально эквивалентной функции f .

Из только-что доказанного следует, что такая функция, если она вообще существует, однозначно определена и что второе определение интеграла эквивалентно первому.

§ 4

ЗАМЕЧАНИЯ О БЕСКОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕГРАЛА

22. В п. 10 был оговорен смысл выражения «функция разбиения DE сходится при неограниченном продолжении разбиений к $\pm\infty$ ». Чтобы получить определение бесконечных значений интеграла, однако, вряд ли будет целесообразно ограничиться заменой в определении в п. 12 понятия предела из п. 8 на определение из п. 10. Более естественный путь состоит в таком обобщении определения абсолютной сходимости, которое позволяет учесть и бесконечные значения римановых сумм $(Rf)(DE)$. Кроме того, уместно также отбросить требование конечности интегрируемой функции и, следовательно, рассмотреть $\pm\infty$ в качестве допустимых значений функций.

Итак, введем следующее определение:

Ряд

$$\sum_n u_n$$

назовем абсолютно сходящимся в расширенном смысле в следующих случаях:

- а) если он сходится абсолютно в обычном смысле;
- б) если сумма его положительных членов равна $+\infty$, в то время как ряд из отрицательных членов абсолютно сходится в обычном смысле. В этом случае ряд по определению сходится к $+\infty$. Меняя ролями оба знака, получим абсолютно сходящиеся к $-\infty$ ряды;
- с) если некоторые члены равны $+\infty$, в то время как остальные сходятся в смысле а) или б) к конечному значению или к $+\infty$. Аналогичным образом получается случай $-\infty$.

23. Кроме модификации определения абсолютной сходимости, определение для $(Rf)(DE)$ остается прежним, в то время как опре-

деление интеграла с использованием данного в п. 10 определения бесконечного предела в остальном проводится, как в п. 12.

24. Что касается свойств интеграла I—VII, то только V, VI и VII сохраняются в точности, причем в формулировке для VI понятие аддитивной функции следует понимать в естественно расширенном смысле: функция $f(G)$, принимающая для каждого G из $\mathfrak{M}E$ однозначно определенное, но возможно бесконечное значение, называется аддитивной в расширенном смысле, если для каждого разбиения DG выполнено равенство

$$f(G) = \sum_n f(G_n)$$

в смысле обобщенной абсолютной сходимости согласно определению из п. 22.]

25. Свойство I, вообще говоря, отпадает, как видно из следующего примера. Предположим, что $\mathfrak{M}E$ состоит из двух непересекающихся множеств E_1 и E_2 , $E_1 + E_2 = E$, причем

$$f(E_1) = \pm 1, \quad f(E_2) = +\infty.$$

Очевидно, что интеграл для f на E равен $+\infty$, в то время как интеграл на E_1 не существует вообще.

Свойство II сохраняется с тем ограничением, что из существования левой части вовсе не вытекает существование правой.

Свойство III сохраняется, за исключением того случая, когда правая часть принимает вид $(+\infty) + (-\infty)$. Свойство IV верно, если k отлично от 0 и $\pm\infty$.

26. Второе определение интеграла, основанное на понятии дифференциальной эквивалентности, нельзя расширить на тот случай, когда допускаются бесконечные значения интеграла. Все же сохраняется предложение:

Если имеет место $f_1(dE) = f_2(dE)$, то функции или обе интегрируемы, или обе неинтегрируемы, причем в первом случае выполнено

$$\int_E f_1(dE) = \int_E f_2(dE).$$

§ 5

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ. ПОЛУАДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

27. Однозначная функция, принимающая, возможно, и бесконечные значения, называется *полуаддитивной вверх*, если для любого разбиения DG множества G из $\mathfrak{M}E$ выполняется неравенство

$$f(G) \geq \sum_n f(G_n),$$

причем ряд в правой части должен абсолютно сходиться в расширенном смысле (разбираемом в п. 22). Если при тех же условиях имеет

место неравенство

$$f(G) \leq \sum_n f(G_n),$$

то f называется *полуаддитивной вниз*.

Когда $f(G)$ полуаддитивна вверх, то $-f(G)$ полуаддитивна вниз и наоборот, отсюда вытекает возможность в большинстве случаев ограничиться изучением одного из этих двух классов функций.

28. Для функции f , полуаддитивной вверх, имеем для всех $D' > D$
 $(Rf)(DG) \geq (Rf)(D'G).$

В самом деле, пусть

$$DG \equiv \sum_n G_n, \quad D'G_n \equiv \sum_m G_{nm},$$

тогда

$$(Rf)(DG) = \sum_n f(G_n) \geq \sum_n \sum_m f(G_{nm}) = (Rf)(D'G).$$

Для полуаддитивной вниз функции очевидно справедливо обратное соотношение.

29. Каждая полуаддитивная на $\mathfrak{M}E$ функция интегрируема на E .

Действительно, пусть f полуаддитивна вверх. Как легко видеть, число

$$I = \inf [(Rf)(DE)]$$

удовлетворяет определению интеграла $\int_E f(dE)$. Для полуаддитивной вниз функции имеем соответственно

$$\int_E f(dE) = \sup [(Rf)(DE)].$$

Эти факты являются частными случаями следующего утверждения:

Если однозначная функция $f(DE)$ является невозрастающей, т. е. если из $D'E > DE$ вытекает неравенство $f(D'E) \leq f(DE)$, то

$$l[f(DE)] = \inf [f(DE)],$$

в то время как для неубывающей функции имеет место равенство

$$l[f(DE)] = \sup [f(DE)].$$

30. В предположении, что $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ являются аддитивными, функции

$$|f(G)| \quad \text{и} \quad \sqrt{f_1^2(G) + f_2^2(G) + \dots + f_n^2(G)}$$

полуаддитивны вниз. Достаточны несложные выкладки (с особым учетом случая, когда появляются бесконечные значения), чтобы убедиться в этом.

Следовательно, для аддитивных на $\mathfrak{M}E$ функций $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ существуют интегралы

$$\int_E |f(dE)|, \quad \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + \dots + f_n^2(dE)}.$$

Первый из этих интегралов есть *полная вариация* для $f(G)$ на множестве E . Представление полной вариации аддитивной функции в виде интеграла восходит к Радону, однако без указания точного смысла, в котором берется интеграл. Второй из наших интегралов назовем *совместной полной вариацией* функций $f_1, f_2, \dots, f_n$.

31. Если $\mathfrak{M}E$ является *аддитивной системой* множеств (т. е. системой множеств, содержащей все разности и конечные или счетные суммы своих элементов), на которой определена конечная и аддитивная функция $f(G)$, то, как известно, также конечна полная вариация для f на E . Напротив, как видно из простого примера, для общих систем множеств $\mathfrak{M}E$ из конечности и аддитивности $f(G)$ на $\mathfrak{M}E$ вовсе не следует конечность ее полной вариации.

Пусть E — полуоткрытый отрезок $0 \leq x < 1$, а система $\mathfrak{M}E$ состоит из всех отрезков $a \leq x < b$ с $0 \leq a < b \leq 1$. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную функцию $f(x)$, имеющую в точке 0 бесконечную вариацию (к примеру, положим $f(x) = x \sin(1/x)$), и определим функцию интервала $f[a, b)$ через приращение $f(x)$ на $[a, b)$:

$$f[a, b) = f(b) - f(a).$$

Легко убедиться, что $f[a, b)$ аддитивна на $\mathfrak{M}E$ (единственное сомнение, которое здесь могло возникнуть, касается разбиений интервала $[0, b)$: оно сразу устраняется тем, что любое разбиение указанного отрезка содержит непременно элемент вида $[0, a]$, и так как все остальные элементы отдалены от опасной точки 0, то аддитивность и здесь сохраняется). Так как очевидно

$$(\mathfrak{M}E) \int_E |f(dE)| = +\infty,$$

то наша цель достигнута.

32. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы каждая из аддитивных функций $f_1(G), f_2(G), \dots, f_n(G)$ имела ограниченную вариацию, является конечность интеграла*

$$I = \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + f_2^2(dE) + \dots + f_n^2(dE)}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что, с одной стороны, в силу $|f_k| \leq \sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2}$ имеем

$$\int_E |f_k(dE)| \leq I,$$

а с другой —

$$I = \sup [(R \sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2})(DE)] \leq \sum_k \sup [(R |f_k|)(DE)] = \\ = \sum_k \int_E |f_k| (dE).$$

33. Если положить

$$\varphi(G) = \frac{1}{2} \left[\int_G |f(dG)| + f(G) \right], \quad \psi(G) = \frac{1}{2} \left[\int_G |f(dG)| - f(G) \right],$$

то для аддитивной функции $f(G)$ ограниченной вариации получим обычное представление в виде разности двух неотрицательных функций:

$$f(G) = \varphi(G) - \psi(G).$$

34. Из дифференциальной эквивалентности двух функций $f'(G)$ и $f''(G)$ вытекает непосредственно дифференциальная эквивалентность их абсолютных величин $|f'(G)|$ и $|f''(G)|$. Из этого замечания следует, что если $f(G)$ на множествах из $\mathfrak{ME}$ обладает конечным интегралом $F(G)$ (который согласно п. 20 дифференциально эквивалентен $f(G)$), то имеет место соотношение

$$\int_E |f(dE)| = \int_E |F(dE)|.$$

Полная вариация, таким образом, может быть определена для каждой функции, имеющей конечный интеграл.

§ 6

НЕКОТОРЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ОБ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЯХ

35. I. Пусть $f_1(G), f_2(G), \dots, f_n(G)$ — определенные на $\mathfrak{ME}$ конечные аддитивные функции ограниченной вариации и $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — положительно однородная функция первого порядка,

$$\varphi(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с ограниченными вторыми производными в каждом из направлений:

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right| \leq \frac{K}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}. \quad (2)$$

Тогда функция

$$\varphi(G) = \varphi[f_1(G), f_2(G), \dots, f_n(G)]$$

имеет конечный интеграл на E .

Доказательство. Положим

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \psi = \varphi + 2K\rho.$$

Мы утверждаем, что конус V , определенный в $(n + 1)$ -мерном пространстве равенством

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

является выпуклым вниз. В самом деле, для его выпуклости достаточно, чтобы имело место

$$\partial^2 \psi / \partial s^2 \geq 0$$

для любого направления, ортогонального к радиус-вектору из O в данную точку конуса. Последнее неравенство вытекает из того, что для таких направлений

$$\partial^2 \rho / \partial s^2 = 1/\rho,$$

что в силу (2) дает

$$\partial^2 \psi / \partial s^2 = \partial^2 \varphi / \partial s^2 + 2K \partial^2 \rho / \partial s^2 > 0.$$

Из выпуклости V следует, что середина отрезка с лежащими на V концами $z'_1, x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ и $z'', x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ лежит выше конуса, т. е.

$$\frac{\psi(x') + \psi(x'')}{2} > \psi\left(\frac{x' + x''}{2}\right),$$

откуда (согласно (1))

$$\psi(x') + \psi(x'') > \psi(x' + x''). \quad (3)$$

Несложная индукция с последующим переходом к пределу показывает, что, когда

$$\sum_m x_k^{(m)} = x_k$$

является абсолютно сходящимся для всех k , имеет место

$$\sum_m \psi(x^{(m)}) > \psi(x). \quad (4)$$

Из (4) непосредственно следует полуаддитивность вниз для функций $\varphi[f_1(G), \dots, f_n(G)]$, что влечет за собой ее интегрируемость на E . Так как $\rho[f_1(G), \dots, f_n(G)]$ также интегрируема, то доказано и существование интеграла

$$\int_E \varphi(dE) = \int_E \psi(dE) - 2K \int_E \rho(dE).$$

36. II. Пусть $f_1(G), f_2(G), \dots, f_n(G)$ — аддитивные функции ограниченной вариации на $\mathfrak{M}E$ и $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывная и положительно однородная функция первого порядка. При этих условиях

$$\varphi(G) = \varphi[f_1(G), f_2(G), \dots, f_n(G)]$$

обладает конечным интегралом на E .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим φ в виде предела некоторой последовательности функций

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \varphi, \quad m \rightarrow \infty,$$

удовлетворяющих условиям предложения I, и позаботимся при этом о том, чтобы для любого $\eta > 0$ и достаточно больших m

$$|\varphi_m - \varphi| \leq \eta \delta.$$

Далее, положим

$$K = \int_E \sqrt{f_1^2(dE) + \dots + f_n^2(dE)} = \sup [(R \sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2})(DE)].$$

Тогда для достаточно большого m справедливо

$$(R |\varphi_m - \varphi|)(DE) \leq \eta K.$$

Затем свойство VII (п. 14) позволяет из существования интегралов для $\varphi_m(G)$ на E заключить о существовании

$$\int_E \varphi(dE).$$

37. III. Предложение I остается справедливым также в случае, когда относительно функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ не предполагается их аддитивность, а лишь существование конечных интегралов на E .

Действительно, в силу п. 20 функции $f_k(G)$ дифференциально эквивалентны своим неопределенным интегралам $F_k(G)$. Согласно п. 17 далее $\varphi(G) = \varphi[f_1(G), \dots, f_n(G)]$ и $\Phi(G) = \varphi[F_1(G), \dots, F_n(G)]$ также дифференциально эквивалентны. Но так как вторая из этих функций интегрируема благодаря I, то это имеет место и для $\varphi(G)$, что и требовалось доказать.

§ 7

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА $\int_E f(x) \varphi(dE)$

38. О п р е д е л е н и е. Для функции $f(x)$ (возможно, многозначной) обозначим через $f(E)$ функцию множества, принимающую на множестве E все значения, пробегаемые $f(x)$ на всем множестве E .

Если $f(x)$ определена для всех $x \in E$ и $\varphi(G)$ дифференциально определена на $\mathfrak{M}E$, то положим

$$(\mathfrak{M}) \int_E f(x) \varphi(dE) = (\mathfrak{M}) \int_E f(dE) \varphi(dE). \quad (1)$$

Нас главным образом интересует случай, когда $f(x)$ однозначна, а $\varphi(G)$ на $\mathfrak{M}E$ конечна и аддитивна. В этом случае скажем, что интеграл (1) является *интегралом типа Стильеса*. Однако кое-что мы докажем и в общем случае.

39. Соотношение

$$\int_E f(x) [\varphi_1(dE) + \varphi_2(dE)] = \int_E f(x) \varphi_1(dE) + \int_E f(x) \varphi_2(dE) \quad (2)$$

вытекает непосредственно из свойства III (п. 14), причем существование правой части из (2) влечет за собой существование левой. Чуть более сложно доказывается формула

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)] \varphi(dE) = \int_E f_1(x) \varphi(dE) + \int_E f_2(x) \varphi(dE). \quad (3)$$

Из свойства III сначала имеем

$$\int_E [f_1(dE) + f_2(dE)] \varphi(dE) = \int_E f_1(dE) \varphi(dE) + \int_E f_2(dE) \varphi(dE), \quad (4)$$

при этом правая часть (4) согласно нашему определению равна правой части из (3), в то время как левая часть в (3) совпадает с выражением

$$\int_E (f_1 + f_2)(dE) \varphi(dE),$$

где $(f_1 + f_2)(G)$ представляет собой совокупность значений, принимаемых $f_1(x) + f_2(x)$, когда x пробегает множество G .

Если $f(G)$, понимаемое в смысле определения п. 38, как множество содержится в $f'(G)$, то пишем (в соответствии с обычными теоретико-множественными обозначениями) $f(G) \subset f'(G)$. Аналогично поступаем для функций разбиения. Очевидно, что из $f(DE) \subset f'(DE)$ вытекает соотношение

$$l[f(DE)] = l[f'(DE)], \quad (5)$$

причем из существования правой части следует опять существование левой.

Включение $f(G) \subset f'(G)$ на $\mathfrak{M}E$ влечет за собой аналогичное включение

$$(Rf)(DE) \subset (Rf')(DE)$$

для римановых сумм, откуда в силу (5) получаем, что

$$(\mathfrak{M}) \int_E f(dE) = (\mathfrak{M}) \int_E f'(dE).$$

Так как имеет место далее

$$(f_1 + f_2)(G) \subset f_1(G) + f_2(G),$$

$$(f_1 + f_2)(G) \varphi(G) \subset [f_1(G) + f_2(G)] \varphi(G),$$

то, принимая во внимание (4), получим

$$\begin{aligned} \int_E [f_1(x) + f_2(x)] \varphi(dE) &= \int_E (f_1 + f_2)(dE) \varphi(dE) = \\ &= \int_E [f_1(dE) + f_2(dE)] \varphi(dE) = \int_E f_1(x) \varphi(dE) + \int_E f_2(x) \varphi(dE), \end{aligned}$$

т. е. формулу (3), где снова из существования правой части вытекает существование левой.

40. Предположим сейчас, что $\varphi(G)$ аддитивна на $\mathfrak{M}E$ и неотрицательна. Рассмотрим разбиение DG множества G из $\mathfrak{M}E$. Легко показать, что для каждой функции $f(G)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sup \{[R(f\varphi)(DG)]\} &= \sup \left\{ \sum_n f(G_n) \varphi(G_n) \right\} \leqslant \\ &\leqslant \sup \left\{ f(G) \sum_n \varphi(G_n) \right\} \leqslant \sup [f(G) \varphi(G)] \end{aligned}$$

и аналогично

$$\inf \{[R(f\varphi)(DG)]\} \geqslant \inf [f(G) \varphi(G)].$$

Соответственно для любого продолжения $D'E$ разбиения DE имеем

$$\sup \{[R(f\varphi)(D'E)]\} \leqslant \sup \{[R(f\varphi)(DE)]\} \quad (6)$$

и

$$\inf \{[R(f\varphi)(D'E)]\} \geqslant \inf \{[R(f\varphi)(DE)]\}. \quad (7)$$

Суммы Римана для $f\varphi$, таким образом, для продолжения разбиения DE заключены в более тесных границах, чем для самого разбиения DE . Далее, из определения интеграла как предела римановых сумм мы заключаем, что для каждого разбиения выполнено

$$\inf \{[R(f\varphi)(DE)]\} \leqslant \int_E f(x) \varphi(dE) \leqslant \sup \{[R(f\varphi)(DE)]\}. \quad (8)$$

На основании этого результата в нашем случае неотрицательной аддитивной на $\mathfrak{M}E$ функции $\varphi(G)$ интеграл

$$\int_E f(x) \varphi(dE)$$

можно определить как такое число I , для которого при каждом $\varepsilon > 0$ существует разбиение DE , удовлетворяющее неравенству

$$|[R(f\varphi)(DE)] - I| < \varepsilon. \quad (9)$$

Действительно, если существует разбиение с требуемыми свойствами, то те же свойства (в силу (6) и (7)) справедливы для произвольного продолжения этого разбиения, что приведет нас к первоначальному определению интеграла. Обратный переход тривиален,

так как теперешнее условие является ослабленной формой *первоначального*.

41. Если $\varphi(G)$ — аддитивная функция ограниченной вариации, то представление в виде разности (п. 33)

$$\varphi(G) = \psi(G) - \chi(G)$$

согласно (2) приведет к аналогичному представлению

$$\int_E f(x) \varphi(dE) = \int_E f(x) \psi(dE) - \int_E f(x) \chi(dE). \quad (10)$$

Формула (10) тоже может служить определением интеграла для $f\varphi$, если интегралы справа определены в смысле п. 40. В качестве специального случая нашего определения получаем, таким образом, определение интеграла Стильтеса в виде, данном Фреше и рядом других авторов.

Следует еще отметить, что для неотрицательных $\varphi(G)$ в силу формул (6) — (8) можно избежать использования понятия предела по Муру потому, что уже существование разбиения с маленьким колебанием соответствующих римановых сумм гарантирует хорошее приближение интеграла. Однако привлечение формулы (10) в целях определения интеграла в общем случае является обходным путем, так что все равно в этом случае понятие предела по Муру больше соответствует существу дела.

42. Функцию $f(x)$ назовем *измеримой на $\mathfrak{M}$* , если при любом выборе вещественных чисел a и b множество E ($a \leq f(x) < b$) всех тех x , для которых $f(x)$ удовлетворяет взятому в скобки неравенству, принадлежит к системе $\mathfrak{M}$. Легко доказать, что интеграл (1) существует, как только $f(x)$ ограничена и измерима на $\mathfrak{M}$, а $\varphi(G)$ имеет ограниченную вариацию по этой же системе множеств.

43. Если $f(x)$ по абсолютной величине меньше некоторой константы K , то из дифференциальной эквивалентности двух функций $\varphi(E)$ и $\psi(E)$ вытекает дифференциальная эквивалентность для $f(E)\varphi(E)$ и $f(E)\psi(E)$. Из дифференциальной эквивалентности интеграла и стоящей под знаком интеграла функции мы, далее, заключаем:

Если $f(x)$ ограничена и $\varphi(G)$ обладает конечным интегралом на E , то

$$\int_E f(x) \varphi(dE) = \int_E f(x) \left[\int_{dE} \varphi(dE) \right].$$

Таким образом, из существования конечного интеграла с ограниченной вариацией для $\varphi(E)$ следует интегрируемость $f(x)\varphi(E)$ для ограниченных и измеримых $f(x)$. В частности, существует интеграл

$$\int_E f(x) \varphi[f_1(dE), f_2(dE), \dots, f_n(dE)],$$

как только $f_1, f_2, \dots, f_n$ удовлетворяют условиям одного из предложений § 6. Аналогичным образом в качестве частного случая нашего определения получаем интеграл в смысле Хеллингера [6]:

$$\int_a^b u(x) \frac{df(x) df_1(x)}{dg(x)}.$$

§ 8

ПРИМЕРЫ $\mathfrak{M}$ -СИСТЕМ

44. Пусть система $\mathfrak{M}_1$ состоит из всех открытых интервалов (не исключены бесконечные интервалы) и из всех одноточечных множеств числовой прямой. Разбиения DE при этом являются разбиениями интервала E на не более чем *счетное число* интервалов и отдельных точек. Во многих случаях (в частности, когда интегрируемая функция множества для одноточечных множеств принимает значение нуль) только интервалы играют существенную роль.

45. Интеграл вида

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) l(d\Delta),$$

где $l(\Delta)$ обозначает длину интервала Δ , представляет собой небольшое обобщение интеграла Коши—Римана: те и только те функции оказываются интегрируемыми в данном смысле, которые вместе со своей абсолютной величиной интегрируемы по методу Дирихле.

46. Если $F(x)$ имеет только точки разрыва первого рода, то $(VF)(E)$ определяется через разность $F(b+0) - F(a+0)$, когда E является интервалом (a, b) ; для E , состоящего из одной точки a , положим $(VF)(E) = F(a+0) - F(a-0)$. По определению пишем

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) dF(x) = (\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) (VF)(d\Delta). \quad (1)$$

Это определение интеграла близко понятию интеграла Стильеса. Оно отличается от последнего тем, что допускаются не только конечные, но и счетные разбиения. Кроме того, используется понятие предела по Муру. Это второе обстоятельство важно для следующего легко доказываемого результата:

Если $f(x)$ и $F(x)$ обе имеют ограниченную вариацию на Δ , то существует интеграл (1).

Когда обе функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют разрыв в одной точке, то обычное определение Стильеса недостаточно. Интегралы этого типа имеют большое значение, в частности, в некоторых вопросах теории вероятностей.

47. Пусть область $\mathfrak{M}_2$ состоит из всех измеримых в смысле Лебега множеств числовой прямой. Интеграл

$$(\mathfrak{M}_2) \int_E f(x) m_1(dE),$$

где m_1 обозначает линейную меру Лебега, совпадает с интегралом Лебега. Как уже отмечалось в п. 40, в этом случае понятие предела по Муру не дает ничего нового.

48. Пусть система $\mathfrak{M}_3$ состоит из всех измеримых по Борелю множеств числовой прямой. Если $F(x)$ имеет ограниченную вариацию, то, как известно, $(VF)(E)$ может быть определена для каждого E из $\mathfrak{M}_3$. По аналогии с п. 44 определим

$$(\mathfrak{M}_3) \int_E f(x) dF(x) = (\mathfrak{M}_3) \int_E f(x) (VF)(dF).$$

Для измеримых в смысле Бореля функций это определение интеграла Стильтьеса совпадает с данным Лебегом (см. [1]).

49. Назовем $\mathfrak{M}$ -систему Z -системой («разложимой системой»), если для любых двух множеств $E_1 \subset E$ можно найти разбиение DE такое, что E_1 является его (первым) элементом и все элементы принадлежат системе множеств $\mathfrak{M}$.

Примерами Z -систем служат системы $\mathfrak{M}E$ (п. 7) и $\mathfrak{M}DE$ (п. 13). Таким образом, определение интеграла зависит только от значений интегрируемой функции в некоторой Z -системе. В соответствии с этим нас должны прежде всего интересовать те случаи, в которых системы множеств $\mathfrak{M}$, по отношению к которым производится интегрирование, сами представляют собой Z -системы. Этому условию удовлетворяют рассмотренные выше системы $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$. Если же вместо $\mathfrak{M}_1$ взять состоящую из одних интервалов систему $\mathfrak{M}'$, не являющуюся Z -системой, в качестве основы для построения теории интегрирования, то формально такую теорию можно безупречно развивать. Однако она оказалась бы несодержательной, ибо интервал нельзя разбить на меньшие непересекающиеся интервалы, так что интеграл любой функции интервала совпал бы всегда с самой этой функцией.

Для Z -системы система ZE по определению совпадает с совокупностью всех подмножеств множества E , принадлежащих данной Z -системе.

50. Если система $\mathfrak{M}'$ содержится в другой системе $\mathfrak{M}$, то из существования интегралов

$$(\mathfrak{M}') \int_E f(dE) \quad \text{и} \quad (\mathfrak{M}) \int_E f(dE),$$

вообще говоря, не следует их равенство. В этом можно убедиться на простых примерах. Пусть $\mathfrak{M}'$ состоит из одного единственного множества $E \neq \phi$ и $\mathfrak{M}$ из множеств E, E_1, E_2 с $E = E_1 + E_2, E_1 E_2 =$

$= \phi$. Положим $f(E) = 0$, $f(E_1) = 1$, $f(E_2) = 1$, тогда

$$(\mathfrak{M}') \int_E f(dE) = 0, \quad (\mathfrak{M}) \int_E f(dE) = 2.$$

Однако формула

$$(\mathfrak{M}') \int_E f(dE) = (\mathfrak{M}) \int_E f(dE)$$

может быть доказана в следующем частном случае:

Если $\phi(E)$ неотрицательна и аддитивна на $\mathfrak{M}$, то для любой подсистемы $\mathfrak{M}'$ системы $\mathfrak{M}$ соотношение

$$(\mathfrak{M}') \int_E f(x) \phi(dE) = (\mathfrak{M}) \int_E f(x) \phi(dE) \quad (1)$$

вытекает из существования обоих интегралов.

Согласно п. 40 в $\mathfrak{M}'$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение DE , удовлетворяющее неравенству (9) из п. 40, где под I следует понимать интеграл в левой части (1). Поскольку DE можно рассматривать также как разбиение в $\mathfrak{M}$, то из формулы (8) того же п. 40 следует, что стоящий в правой части интеграл тоже не может отклоняться от I больше, чем на ε . Так как ε произвольно, то отсюда получаем наше утверждение.

51. Согласно (10) из п. 41 формула (1) остается в силе также для интегралов типа Стилтеса, если те могут быть определены с помощью указанной формулы (10), т. е. если $\phi(G)$ на $\mathfrak{M}E$ имеет ограниченную вариацию.

Для общего же случая интегралов типа Стилтеса только-что обсужденный вопрос остается неразрешенным.

Глава III ВТОРАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (КОНЕЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ)

§ 1

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Теория интегрирования главы II основывалась на систематическом рассмотрении разбиений DE множества E на конечное или счетное число подмножеств. В данной главе мы хотим исследовать те изменения, которые претерпит теория в случае, когда допускаются лишь конечные разбиения (т. е. разбиения от E на конечное число подмножеств).

Что касается возникающего на этом пути определения интеграла, то можно было думать, что оно более узко, чем наше прежнее определение. Однако это неверно: имеются важные случаи, в которых определенный с помощью конечных разбиений интеграл суще-

ствуем, в то время как мы имеем дело со случаем неинтегрируемости, когда в основу кладутся бесконечные разбиения. Более того, точка зрения, которой мы сейчас придерживаемся, непосредственно примыкает к классической теории Коши и Римана и дает большие возможности для полноты и прозрачности всего построения.

В случае конечных разбиений мы сохраняем те же обозначения, которые служили в аналогичных целях для бесконечных разбиений. Когда встречаются параллельно понятия из обеих теорий, то относящиеся к бесконечным разбиениям (т. е. к теории главы II) отмечаются звездой.

2. Все определения § 1 из главы II остаются в силе и при настоящих предположениях, понятие суммы, естественно, вводится только для конечных разбиений. Ясно, что система $\mathfrak{M}E$ сейчас не совпадает, вообще говоря, с соответствующей системой $\mathfrak{M}E^*$ при тех же $\mathfrak{M}$ и E , а вполне может представлять собой более узкую систему. В предположении конечных разбиений предел $l[f(DE)]$ может не совпадать с аналогичным выражением $l[f(D^*E)]$ даже тогда, когда исходная система $\mathfrak{M}$ одна и та же для обоих переходов к пределу.

3. Суммы Римана (гл. II, п. 11) сейчас существуют для любого разбиения, если только функция, подлежащая интегрированию, конечна, в то время как в гл. II отсутствие абсолютной сходимости соответствующих рядов приведет неизбежно к неприятностям.

Само определение интеграла — по формулировке — естественно остается неизменным.

Свойства I—VI, за исключением свойства II, остаются также справедливыми, если брать за основу конечные разбиения. Что касается свойства II, то имеет место *конечная аддитивность*, т. е. формула (1) (см. гл. II, п. 14) выполнена только для конечных разбиений. При этом из существования интегралов в правой части этой формулы следует существование интеграла в левой.

4. Определение дифференциальной эквивалентности и связанные с ней результаты также остаются неизменными, однако с той естественной оговоркой, что все встречающиеся разбиения конечны и под аддитивностью соответствующих функций понимается их конечная аддитивность.

5. Введение бесконечных значений интеграла происходит, как в § 4, причем необходимость расширения понятия абсолютной сходимости отпадает; вместо этого договоримся о том, что сумма произвольного конечного числа бесконечных слагаемых одного знака равняется бесконечности (того же знака) и что этот результат не изменяется при добавлении еще конечного числа конечных слагаемых.

§ 2

РАЗЛОЖИМЫЕ СИСТЕМЫ

6. По аналогии с п. 49 из гл. II скажем, что $\mathfrak{M}$ -система является Z -системой, если для любого E из $\mathfrak{M}$ и каждого его подмножества E_1 из $\mathfrak{M}$ существует разбиение DE , первый элемент которого — множество E_1 , а остальные (их сейчас только конечное число) принадлежат $\mathfrak{M}$. Очевидно, что Z -система в указанном выше смысле является непременно Z^* -системой. Эти последние ниже рассматриваются под названием $\mathcal{Z}$ -систем в расширенном смысле.

7. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ — множества из Z с

$$\sum_{m=1}^n E_m \subset E, \quad E_i E_j = \emptyset, \quad \text{если } i \neq j.$$

Тогда существует разбиение $DE \equiv \sum_{m=1}^{n+p} E_m$, первые n элементов которого совпадают с заданными E_m .

По определению в Z существуют разбиения

$$D_m E = E_m + \sum_{s=1}^t E_s^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

с E_m в качестве первого элемента. Разбиение

$$DE = \sum_{m=1}^n E_m + \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} E_{s_1}^{(1)} E_{s_2}^{(2)} \dots E_{s_n}^{(n)}$$

удовлетворяет требованиям нашего предложения.

8. Как в случае Z^* -системы, ZE совпадает с совокупностью всех подмножеств из E , принадлежащих Z . Отсюда вытекает, что $ZE = Z^*E$, последнее утверждение уже необязательно выполняется для общей $\mathfrak{M}$ -системы. Для примера рассмотрим $\mathfrak{M}^*$ -систему, состоящую из E и счетного числа элементов некоторого бесконечного разбиения DE . В этих условиях $\mathfrak{M}E$ состоит из одного множества E , а $\mathfrak{M}^*E$ из E и всех E_n .

9. Далее, пусть KZ — наименьшее тело множеств, содержащее систему множеств Z . Мы хотим доказать, что KZ является совокупностью множеств, допускающих конечное разбиение на элементы из Z . Для доказательства обозначим через σZ систему всех множеств, удовлетворяющих указанному последнему свойству. Система содержится, очевидно, в KZ , остается показать, что σZ сама является телом. Пусть

$$E = \sum_{m=1}^n E_m, \quad E' = \sum_{q=1}^p E'_q$$

— два множества из σZ , представленные в виде сумм попарно непересекающихся множеств из Z . Так как множества $E_m E'_q$ принад-

лежат Z , то согласно п. 7 в Z имеются разбиения вида

$$D_m E_m \equiv \sum_q E_m E'_q + \sum_{s=1}^{t_m} E_s^{(m)}.$$

Очевидно, что

$$EE' = \sum_m \sum_q E_m E'_q,$$

$$E + E' = \sum_q E'_q + \sum_m \sum_s E_s^{(m)},$$

$$E - E' = \sum_m \sum_s E_s^{(m)}$$

принадлежат σZ , поскольку правые части этих равенств представляют собой разбиения на попарно не пересекающиеся множества из Z . Отсюда вытекает, что σZ является телом и, следовательно, совпадает с KZ .

10. Аддитивная на Z функция $f(E)$ всегда и притом единственным образом продолжима на область KZ с сохранением ее свойства аддитивности.

Ясно, что (в предположении, что такое продолжение возможно) для каждого разбиения множества E из KZ на множества из Z мы должны иметь

$$f(E) = (Rf)(DE). \quad (1)$$

На основании аддитивности f на Z мы, далее, имеем для любых разбиений DE и $D'E$ соотношение

$$(Rf)(DE) = (Rf)\{[DD']E\} = (Rf)(D'E),$$

которое показывает, что данное формулой (1) определение $f(E)$, где E — произвольный элемент из KZ , не зависит от выбора разбиения DE . Продолженная на всю область KZ функция $f(E)$ является аддитивной.

11. Для E из KZ положим

$$(Z) \int_E f(dE) = \sum_{m=1}^n (Z) \int_{E_m} f(dE_m),$$

причем $DE \equiv \sum E_m$ — разбиение E в Z .

Согласно только что доказанному это определение от выбора разбиения не зависит. Определенный таким образом интеграл обладает свойствами I—VI.

12. В качестве примеров Z -систем приведем следующие: уже определенную в гл. II (п. 44) систему $\mathfrak{M}_1$, состоящую из открытых интервалов и одноточечных множеств числовой прямой; систему $\mathfrak{M}_4$ всех «полуоткрытых» интервалов $[a, b)$ (этой системой мы пользовались в гл. II, п. 34); систему $\mathfrak{M}_5$ всех интервалов вида (a, b) , $[a, b)$,

$(a, b]$, $[a, b]$, причем к замкнутым интервалам $[a, b]$ отнесены также отдельные точки.

Очевидно, что, кроме того, каждое тело, в частности системы $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ из гл. II (п. 47 и 48), является Z -системой. Z -системы образуют естественную основу для построения теории интегрирования.

§ 3

О ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

13. Ограничимся рассмотрением интегралов

$$(Z) \int_E f(dE) \quad \text{и} \quad (Z) \int_E^* f(dE), \quad (1)$$

взятых относительно Z -систем. Как упоминалось уже в п. 8, в этом случае ZE и ZE^* совпадают. В общем случае $\mathfrak{M}E$ и $\mathfrak{M}E^*$ могут быть различными и одно это обстоятельство затрудняет в значительной степени построение более или менее простой теории.

14. Прежде всего покажем на примере, что интегралы (1) на самом деле могут быть различными. Для этой цели вспомним состоящую из интервалов и отдельных точек систему множеств $\mathfrak{M}_1$, которая согласно п. 12 является Z -системой, и определим $f(E)$, полагая $f(E) = 1$ для каждого интервала вида $E = (0, a)$ и $f(E) = 0$ для остальных элементов $\mathfrak{M}_1$. Очевидно, что $f(E)$ аддитивна (т. е. конечно аддитивна), однако только полуаддитивна вверх в смысле бесконечных разбиений. Легко видеть, что для единичного интервала $\Delta = (0, 1)$ имеем

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(d\Delta) = 1, \quad (\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta}^* f(d\Delta) = 0,$$

так что оба определения интеграла дают вполне определенные, но отличные друг от друга значения.

15. Следуя Фреше, назовем заданную на Z функцию множества *непрерывной по системе Z* , если для каждой последовательности убывающих множеств E_n с пустым пересечением $f(E_n)$ сходится к нулю при возрастающем n . Легко убедиться, что построенная в п. 14 функция не является непрерывной.

16. Для непрерывной на теле множеств K функции $f(E)$ имеет место

$$(K) \int_E f(dE) = (K) \int_E^* f(dE),$$

причем из существования левой части следует существование правой.

Предположим, что левый интеграл I существует и конечен. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное разбиение $DE \equiv \sum_{m=1}^n E_m$

такое, что для каждого его продолжения $D'E > DE$

$$|(Rf)(D'E) - I| < \varepsilon. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь произвольное бесконечное продолжение

$$D^*E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*$$

для DE и докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_k^*) = (Rf)(D^*E) \quad (3)$$

является абсолютно сходящимся. Последовательность множеств

$$G_{mk} = E_m \sum_{i=k}^{\infty} E_i^* = E_m - \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(члены которой, очевидно, принадлежат K) удовлетворяет условию непрерывности из п. 15, так что $\lim f(G_{mk}) = 0$. Следовательно, мы можем взять k_0 настолько большим, что для всех $m \leq n$

$$f(G_{mk}) < \varepsilon/n, \quad k > k_0. \quad (4)$$

Конечное разбиение

$$D'_k E \equiv \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{m=1}^n G_{mk}$$

является продолжением DE , таким образом, для него справедливо неравенство (2). Принимая во внимание (4), из (2) следует, что для достаточно больших k выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^k f(E_i^*) - I \right| < 2\varepsilon. \quad (5)$$

Но тогда ряд (3) должен абсолютно сходиться, в противном случае можно было бы перенумеровать E_k^* таким образом, чтобы неравенство (5) было нарушено, каким бы большим ни было k .

Этим доказано, что сумма Римана $(Rf)(D^*E)$ существует и согласно (5) удовлетворяет неравенству

$$|(Rf)(D^*E) - I| \leq 2\varepsilon. \quad (6)$$

Поскольку для конечных разбиений имеет место более сильное неравенство (2), то (6) справедливо для всех продолжений DE , что (в силу произвольности ε) дает требуемую формулу

$$(K) \int_E^* f(dE) = I.$$

Аналогично можно справиться со случаем бесконечных значений интеграла.

17. Если интегрирование ведется в Z -системе, не являющейся телом, то только что доказанное предложение теряет силу. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример. Элементом системы множеств $\mathfrak{M}_6$ считается множество всех иррациональных точек, лежащих внутри квадрата числовой плоскости с рациональными вершинами (для краткости всякое такое множество назовем также квадратом). Здесь под рациональной (соответственно иррациональной) точкой понимается точка, обе координаты которой являются рациональными (соответственно иррациональными). Для квадратов E , примыкающих справа к оси y , положим $f(E)$ равным длине стороны данного квадрата, для остальных квадратов положим $f(E) = 0$. Как нетрудно видеть, для единичного квадрата E_1 имеем

$$(\mathfrak{M}_6) \int_{E_1} f(dE_1) = 1, \quad (\mathfrak{M}_6) \int_{E_1}^* f(dE_1) = 0,$$

хотя $f(E)$ непрерывна на $\mathfrak{M}_6$ и $\mathfrak{M}_6$ является Z -системой.

18. Укажем еще пример непрерывной на Z -системе функции, интегрируемой в смысле конечных разбиений, но неинтегрируемой в смысле бесконечных разбиений. Для этого рассмотрим на системе $\mathfrak{M}_1$ вариацию $(VF)(E)$ непрерывной функции точки $F(x)$ (ср. гл. II, п. 46). Как известно, (VF) непрерывна на $\mathfrak{M}_1$ в смысле определения из п. 15, а $\mathfrak{M}_1$ является Z -системой. Тем не менее в силу аддитивности (VF) имеем

$$(\mathfrak{M}_1) \int_E (VF)(dE) = (VF)(E),$$

в то время как

$$(\mathfrak{M}_1) \int_E^* (VF)(dE)$$

существует только тогда, когда $F(x)$ имеет на E ограниченную вариацию.

19. Определенная на Z функция $f(E)$ называется *вполне непрерывной*, если для каждой последовательности множеств

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

из KZ с пустым пересечением и каждой последовательности разбиений

$$D_1 E_1, D_2 E_2, \dots, D_n E_n, \dots$$

множеств E_n на множества из Z суммы $(Rf)(D_n E_n)$ становятся бесконечно малыми при возрастающем n (само собой разумеется, что эти разбиения предполагаются конечными).

Очевидно (п. 15), что вполне непрерывная функция является непрерывной в смысле Фреше⁷.

20. Для вполне непрерывной на Z функции $f(E)$ справедливо

$$(Z) \int_E f(dE) = (Z) \int_E^* f(dE), \quad (1)$$

причем из существования одного из этих интегралов вытекает существование другого.

Предположим сначала, что существует первый из этих интегралов и пусть он равен конечному числу I . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти разбиение $DE = \sum_{m=1}^n E_m$, для каждого конечного продолжения $D'E > DE$ которого имеет место

$$|(Rf)(D'E) - I| < \varepsilon. \quad (2)$$

Пусть $D^*E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*$ — бесконечное продолжение для DE . Для последовательности множеств

$$G_k = \sum_{i=k}^{\infty} E_i^*,$$

члены которой принадлежат KZ , в силу полной непрерывности f при любом выборе разбиений $D_n G_n$ имеем

$$(Rf)(D_n G_n) \rightarrow 0.$$

Выберем k настолько большим, что для произвольного DG_k выполнено

$$|(Rf)(DG_k)| < \varepsilon. \quad (3)$$

В силу п. 7 существует разбиение для E на множества из Z вида

$$D_k E = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{p_k} E_m E_{kq},$$

очевидно при этом, что $\sum_q E_{kq} = G_k$. Разбиение

$$D'_k E = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{p_k} E_m E_{kq}$$

⁷ Для аддитивных функций оба понятия совпадают, поэтому в прежних теориях наше новое понятие было ненужным. Однако в общем случае как раз полная непрерывность представляет собой естественное обобщение на неаддитивные функции понятия непрерывности для аддитивных функций.

является продолжением DE , следовательно, для него справедливо неравенство (2). С другой стороны, согласно (3) имеем

$$\left| \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{p_k} f(E_m E_{kq}) \right| = |(Rf)(D'_h G_k)| < \varepsilon, \quad (4)$$

что вместе с (2) дает

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} f(E_i^*) - I \right| < 2\varepsilon. \quad (5)$$

Как и в п. 16, отсюда заключаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(E_k^*) = (Rf)(D^*E)$$

абсолютно сходится и имеет место

$$|(Rf)(D^*E) - I| \leq 2\varepsilon.$$

Так как это неравенство верно для произвольного бесконечного продолжения разбиения DE , а для конечных продолжений справедливо даже (2), то получим (как в п. 16) равенство

$$I^* = (Z) \int_E^* f(dE) = I. \quad (6)$$

В случае бесконечного I доказательство проводится в полной аналогии.

Допустим сейчас, что I^* существует и конечен. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение D^*E , что для любого его продолжения D_1^*E выполнено неравенство

$$|(Rf)(D_1^*E) - I^*| < \varepsilon. \quad (7)$$

Мы хотим построить с помощью D^*E некоторое конечное разбиение DE , удовлетворяющее при любом $D_1E > D^*E$ неравенству

$$|(Rf)(D_1E) - I^*| < 3\varepsilon. \quad (8)$$

Если D^*E — подлинно бесконечное разбиение, т. е.

$$D^*E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*,$$

то можно найти такое k , что (сохраняя наши прежние обозначения) имеет место неравенство (3), и кроме того,

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} f(E_i^*) \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Последнего свойства, кстати, можно добиться за счет абсолютной сходимости ряда $(Rf)(D^*E)$, которая в формуле (7) предполагается.

Сейчас положим

$$DE \equiv D_k E \equiv \sum_{i=1}^{k-1} E_i^* + \sum_{q=1}^{p_k} E_{kq}.$$

Пусть $D_1 E$ — конечное продолжение DE . Разбиение

$$D_1^* E \equiv \sum_{i=1}^{k-1} D_1 E_i^* + \sum_{i=k}^{\infty} E_i^*$$

является продолжением для $D^* E$, так что выполнено условие (7). С другой стороны, согласно (3) и (9) имеем

$$|(Rf)(D_1 E) - (Rf)(D_1^* E)| \leq \left| \sum_{q=1}^{p_k} f(E_{kq}) \right| + \left| \sum_{i=k}^{\infty} f(E_i^*) \right| < 2\varepsilon,$$

что вместе с (7) показывает справедливость формулы (8) для бесконечного $D^* E$. Если $D^* E$ конечно, то положим $DE = D^* E$ и (8) тогда непосредственно следует из (7). Наконец, в силу произвольности ε получим

$$I = (Z) \int_E f(dE) = I^*.$$

Аналогичные рассуждения приведут к цели и в случае бесконечного I^* , чем полностью заканчивается доказательство.

§ 4

ПРИМЕРЫ

21. По аналогии с § 8 при исследовании понятия интеграла из гл. II рассмотрим интеграл в нашем новом смысле для конкретных $\mathfrak{M}$ -систем. В первую очередь обратимся к определенной в гл. II (п. 45) системе $\mathfrak{M}_1$, состоящей из интервалов и отдельных точек вещественной числовой прямой.

Как там, обозначим через $l(\Delta)$ длину интервала Δ . Тогда для

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) l(d\Delta)$$

получим определение, совпадающее с интегралом по Коши

$$\int_{\Delta} f(x) dx.$$

22. Если рассмотреть непрерывные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ как параметрическое представление некоторой непрерывной кривой и через $s(\Delta)$ обозначить расстояние («длину хорды») между точками кривой, соответствующими концам интервала Δ , то длина заданной этими точками дуги кривой определяется

интегралом

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} s(d\Delta).$$

23. Используя те же обозначения, что и в гл. II (п. 46), определим как там,

$$(\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) dF(x) = (\mathfrak{M}_1) \int_{\Delta} f(x) (VF)(d\Delta). \quad (1)$$

Это определение совпадает с определением интеграла Стильеса, данным Смитом. Интеграл (1) существует (как в случае гл. II), когда $F(x)$ и $f(x)$ имеют ограниченную вариацию. В отличие от ситуации гл. II (1) существует даже тогда, когда от $F(x)$ требуется непрерывность, а от $f(x)$ по-прежнему ограниченность вариации. Это как раз тот важный случай, когда наше определение шире определения из гл. II.

24. Интеграл

$$(\mathfrak{M}_2) \int_E f(x) m_1(dE)$$

аналогичен исследованному в гл. II (п. 47), он существует только для ограниченных функций и в этом случае совпадает с интегралом Лебега.

Добавление I.

ИНТЕГРАЛ КАК МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ

1. До сих пор мы при изложении хотя и пользовались систематически многозначными функциями под знаком предела (соответственно интеграла), но в предположении, что значение предела (соответственно интеграла) определялось однозначно. Можно, однако, сделать рассмотрения одновременно более общими и простыми, если отказаться от однозначности и в последнем случае. Большое преимущество, получаемое при этом, состоит в том, что теперь каждая дифференциально определенная функция интегрируема, в то время как интегрируемые в прежнем смысле функции можно называть однозначно интегрируемыми. При этом верхняя и нижняя грани (многозначного) интеграла выступают в качестве верхнего и нижнего интегралов. В этом добавлении дается краткий очерк такой теории интегрирования. Мы при этом придерживаемся понятий из гл. II, т. е. используем бесконечные разбиения. Изменения, которые потребует случай конечных разбиений, мы оставляем читателю.

2. Пусть задана одно- или многозначная функция $f(DE)$ разбиений DE множества E на подмножества из системы $\mathfrak{M}$, причем f может принимать конечные или бесконечные значения. Под *пределом* $f(DE)$ при неограниченном продолжении DE сейчас понимает-

ся любое число

$$I = L[f(DE)]$$

со свойством, что для произвольно выбранного DE и $\varepsilon > 0$ существует разбиение $D'E > DE$ с

$$\inf |f(D'E) - I| < \varepsilon.$$

При этом под знаком инфимума допускаются все значения, принимаемые f (при заданном $D'E$). Положим $L[f(DE)] = +\infty$, если для каждого DE и произвольного $H < +\infty$ существует такое $D'E > DE$, что $\sup f(D'E) > H$. Аналогичное определение имеет место для $L[f(DE)] = -\infty$.

3. Легко убедиться в том, что произвольно определенная на всех DE функция $f(DE)$ имеет по крайней мере один предел и что все пределы для $f(DE)$ образуют замкнутое множество. Поэтому и числа $\sup L[f(DE)]$ и $\inf L[f(DE)]$ вполне определены, причем они сами являются значениями $L[f(DE)]$.

Если

$$\sup L[f(DE)] = \inf L[f(DE)]$$

(т. е. если $L[f(DE)]$ однозначен), то имеем

$$L[f(DE)] = l[f(DE)],$$

и получим понятие предела, указанного в гл. II (п. 8).

4. Данное в гл. II (п. 22) определение суммы ряда сейчас следует дополнить. В случае неабсолютно сходящегося ряда допускается всякое значение от $-\infty$ до $+\infty$ в качестве значения суммы ряда. После этого символ $(Rf)(DE)$ определяется дословно, как в гл. II (п. 11), и понятие интеграла вводится с помощью формулы

$$(\mathfrak{M}) \int_E f(DE) = L[(Rf)(DE)].$$

5. Далее, положим

$$\int_E f(dE) = \sup_E \bar{\int}_E f(dE), \quad \int_E f(dE) = \inf_E \bar{\int}_E f(DE).$$

Если $\bar{\int} = \int$, то просто пишем $\bar{\int} = \int$ и получим тогда интеграл в смысле гл. II.

6. Что касается сформулированных в гл. II (п. 14) свойств интеграла, то сейчас они имеют место со следующими изменениями.

Свойство I теряет свое значение, ибо теперь каждая дифференциально определенная функция интегрируема. Из однозначности и конечности интеграла вытекает его однозначность на любом множестве из $\mathfrak{M}E$.

Свойство II остается справедливым, если учесть данное в гл. II (п. 11) правило сложения многозначных функций.

Свойство III теряется, в то время как IV, V, VI, VII остаются верными.

7. Что касается верхнего и нижнего интегралов, то на подробном рассмотрении их свойств мы здесь не останавливаемся. Отметим лишь, что при любом разбиении DE имеют место соотношения

$$\bar{\int}_E f(dE) = \sup \sum_n \bar{\int}_{E_n} f(dE_n), \quad \underline{\int}_E f(dE) = \inf \sum_n \underline{\int}_{E_n} f(dE_n).$$

Если соответствующие ряды сходятся абсолютно, то знаки $\sup$ и $\inf$ можно опустить. Если же абсолютная сходимость не имеет места, то интегралы в левых частях равны положительной (соответственно отрицательной) бесконечности. Таким образом, *конечный верхний или нижний интеграл обязательно является аддитивной функцией множества.*

Добавление II.

К ОБОСНОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

1. Мы здесь хотим показать, что определение производной одной аддитивной функции множества по отношению к другой можно ввести независимо от всяких геометрических свойств соответствующих областей их задания. Так как мы не собираемся развивать общую теорию, то для ясности изложения сделаем предварительно несколько ограничительных предположений.

Пусть F — аддитивная система множеств, $\varphi(E)$ — определенная там конечная неотрицательная и аддитивная функция и $f(x)$ — измеримая относительно F функция точки (ср. гл. II, п. 42), не превышающая по абсолютной величине некоторой константы, скажем 1. Тогда для каждого E из F существует интеграл

$$\psi(E) = (F) \int_E f(x) d\varphi(dE), \quad (1)$$

причем, как легко видеть,

$$|\psi(E)| \leq \varphi(E). \quad (2)$$

Измеримая относительно F функция $f(x)$ называется производной от ψ по отношению к φ ,

$$f(x) = \psi(dE)/\varphi(dE),$$

если она удовлетворяет (1) при всех E из F .

2. Сперва докажем, что (если пренебречь множествами E с $\varphi(E) = 0$) производная единственна. Другими словами, если

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ обе удовлетворяют (1) и G обозначает то множество, где $f_1(x) \neq f_2(x)$, то $\varphi(G) = 0$. Действительно, имеем

$$\int_E (f_1 - f_2)(x) \varphi(dE) = 0$$

для всех E из F и согласно п. 19 из гл. II также

$$\int_E |f_1 - f_2|(x) \varphi(dE) = 0.$$

Отсюда легко следует, что при каждом $\varepsilon > 0$ множество G_ε , где $|f_1 - f_2| > \varepsilon$, удовлетворяет условию $\varphi(G_\varepsilon) = 0$. Следовательно, имеем также $\varphi(G) = 0$, что и требовалось доказать.

3. Докажем теперь, что

$$f(x) = \psi(dE)/\varphi(dE)$$

существует, как только $\psi(E)$ аддитивна и выполнено неравенство (2). Для этого мы укажем способ ее построения, который между прочим может служить для определения производной в более общих ситуациях.

Функция $f(x)$ будет построена для конкретного множества E , однако построение легко распространяется на все остальные множества из F . Построим сначала функцию $f(DE, x)$, зависящую от точки x и от разбиения $DE = \sum_n E_n$. Для этого положим

$$f(DE, x) = \psi(E_n)/\varphi(E_n), \quad x \in E_n,$$

причем если $\varphi(E_n) = 0$, то $f(DE, x) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение DE такое, что для каждого его продолжения $D'E$ выполняется неравенство

$$I = \int_E [f(DE, x) - f(D'E, x)]^2 \varphi(dE) < \varepsilon. \quad (3)$$

Действительно, пусть

$$D'E \equiv \sum_n D'E_n \equiv \sum_n \sum_m E_{nm}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_n \sum_m \left(\frac{\psi(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - \frac{\psi(E_n)}{\varphi(E_n)} \right)^2 \varphi(E_{nm}) = \\ &= \sum_n \left(\sum_m \frac{\psi^2(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - 2 \frac{\psi(E_n)}{\varphi(E_n)} \sum_m \psi(E_{nm}) + \frac{\psi^2(E_n)}{\varphi^2(E_n)} \sum_m \varphi(E_{nm}) \right) = \\ &= \sum_n \left(\sum_m \frac{\psi^2(E_{nm})}{\varphi(E_{nm})} - \frac{\psi^2(E_n)}{\varphi(E_n)} \right) = \left(R \frac{\psi^2}{\varphi} \right)(D'E) - \left(R \frac{\psi^2}{\varphi} \right)(DE). \end{aligned}$$

(4)

Функция $\psi^2(G)/\varphi(G)$ на E интегрируема, ибо в силу (2) она совпадает с функцией $\psi^2(G)/\max[\varphi(G), \psi(G)]$, которая удовлетворяет условиям предложения из гл. II (п. 36). Поэтому разность в конце выражения (4) может быть сделана меньше ε за счет подходящего выбора DE , что и доказывает наше утверждение.

Так же как в обычной теории сходимости в среднем, легко установить, что из (3) вытекает существование функции $f(x)$, для которой имеет место

$$l \int_E [f(x) - f(DE, x)]^2 \varphi(dE) = 0$$

(предел понимается, как и выше, в смысле предела по Муру для функции разбиения DE). Эта функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям приведенного в п. 1 формального определения производной.

6 февраля 1930 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lebesgue H.* Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2éd. Paris, 1928. Рус. пер.: *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.; Л.: ГТТИ, 1934.
2. *Frechet M.* Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. — Bull. Soc. math. France, 1915, vol. 43, p. 248.
3. *Burkill J. S.* The derivatives of functions of intervals. — Fund. math., 1924, vol. 5, p. 321.
4. *Moore E. H., Smith H. L.* A general theory of limity. — Amer. J. Math., 1922, vol. 44, p. 102; ср. также: *Шатуновский С. О.* Введение в анализ. Одесса, 1923.
5. *Smith H. L.* On the extension of Stieltjes integral. — Trans. Amer. Math. Soc., 1925, vol. 27, p. 491—515.
6. *Hellinger E.* Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. — J. reine und angew. Math., 1909, Bd. 136, S. 234.

17

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО *

Все известные типы средних, такие, как, например, средние арифметическое, квадратическое, геометрическое, гармоническое и т.п., имеют вид

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi\left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n}\right), \quad (4)$$

где φ — непрерывная строго монотонная функция, а ψ — обратная к ней.

* Sur la notion de la moyenne. — Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1930, vol. 12, N 9, p. 383—391. Представлено Г. Кастельнуово. Перевод В. М. Тихомирова.

В этой заметке будет показано, что каждый тип среднего, если только он удовлетворяет нескольким естественным условиям (*аксиомам среднего*), необходимо имеет вид (1).

Далее будем предполагать, что функция $M_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или просто $M(x_1, \dots, x_n)$ определена для любого $n \geq 1$ и любых значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, лежащих в интервале $a \leq x \leq b$.

Полученный далее результат распространяется также и на средние, определенные на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$, $a \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq b$ (к таковым относятся средние арифметические и геометрические). Доказательство в этих случаях должно быть лишь слегка изменено.

Последовательность функций M_n определяет *регулярный* тип среднего, если удовлетворяются следующие условия:

I. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна и монотонна по каждому переменному. Для определенности будем считать, что M возрастает по каждому переменному.

II. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — симметрическая функция.

III. Среднее от одинаковых чисел равно их общему значению: $M(x, x, \dots, x) = x$.

IV. Можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего:

$$M(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = M_{n+m}(x, \dots, x, y_1, \dots, y_n),$$

где $x = M(x_1, \dots, x_m)$.

Т е о р е м а. При выполнении условий I—IV среднее $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид (1), где φ — непрерывная возрастающая функция, а ψ — обратная к ней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M(tx, ny)$ — среднее t одинаковых значений x и n одинаковых значений y :

$$M(tx, ny) = M(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \quad (2)$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = x, \quad y_1 = y_2 = \dots = y_n = y.$$

Тогда в силу IV и III.

$$M(pmx, pny) = M(pM(tx, ny)) = M(tx, ny).$$

Значит, если $mn' = nm'$, то

$$M(tx, ny) = M(mn'x, nn'y) = M(nm'x, nn'y) = M(m'x, n'y). \quad (3)$$

Можно теперь определить для каждого рационального z , $0 \leq z = p/q \leq 1$, функцию $\psi(z)$ следующим образом:

$$\psi(z) = M(pb, (q-p)a). \quad (4)$$

Это определение корректно, поскольку для двух разных представлений $z = p/q = p'/q'$ числа z имеет место очевидное равенство $p(q' - p') = (q - p)p'$ и, значит, в силу (3) имеется единственное значение $\psi(z)$. Функция $\psi(z)$, как функция рациональных z , являет-

ся возрастающей. Действительно, пусть $z' > z$. Представим z' и z как дроби с одинаковым знаменателем $z' = p'/q$, $z = p/q$, $p' > p$, и тогда получим в силу свойства монотонности I неравенство

$$\psi(z') = M(p'b, (q - p')a) > M(pb, (q - p)a) = \psi(z).$$

В итоге получилось, что можно однозначно определить обратную функцию $\varphi(x)$, определенную для всех значений x , где z рационально и при этом φ будет возрастающей непрерывной функцией.

Теперь можно без труда вычислить среднее $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для значений $x_i = \psi(z_i)$, где z_i рациональны. Для этого представим z_i как дроби с одинаковым знаменателем: $z_i = p_i/q$, тогда $x_i = M(p_i b, (q - p_i)a)$ и

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, \dots, x_n) &= M(qx_1, qx_2, \dots, qx_n) = M((p_1 + \dots \\ &\dots + p_n)b, (nq - p_1 - p_2 - \dots - p_n)a) = \psi\left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{nq}\right) = \\ &= \psi\left(\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}\right) = \psi\left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, формула (4) оказалась доказанной для тех специальных значений переменных, о которых говорилось выше.

Докажем теперь, что функция ψ непрерывна для каждого значения $0 \leq y \leq 1$, рационального или иррационального. Предположив противоположное, найдем точку y , не являющуюся точкой непрерывности ψ . Если допустить, что $y \neq 0$ и $y \neq 1$, то тогда значения пределов $\psi(y - 0) = u$ и $\psi(y + 0) = v$ различны и, значит, $u < v$. Имеем для двух рациональных чисел z_1 и z_2 (согласно (5))

$$M(\psi(z_1), \psi(z_2)) = \psi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Если теперь заставить z_1 и z_2 сходиться к y так, что первая точка стремится к y слева, а вторая справа, то получится, очевидно,

$$\lim \psi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = M(u, v) > u.$$

Однако можно сделать так, чтобы $(z_1 + z_2)/2$ всегда было слева от y . Тогда $\lim \psi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = u$. Противоречие показывает, что допущение о том, что y не является точкой непрерывности, ложно. Аналогичное заключение можно сделать и для точек $y = 1$ и $y = 0$.

Мы видим, таким образом, что значения $x = \psi(z)$, соответствующие рациональным z , образуют плотное множество в интервале между $a = \psi(0)$ и $b = \psi(1)$. Следовательно, можно определить функции $\psi(z)$ и $\varphi(x)$ по непрерывности для всех точек интервалов $0 \leq z \leq 1$ и $a \leq x \leq b$ соответственно. Таким образом, формула (5) остается верной по непрерывности для всех значений x , $a \leq x \leq b$, что и доказывает теорему.

О КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ *

Пусть G есть множество функций $f(x)$, определенных во всех точках x некоторого ограниченного множества F в n -мерном евклидовом пространстве R^n и интегрируемых в p -й степени ($p > 1$):

$$\int_F |f(x)|^p d\sigma < \infty.$$

Говорят, что последовательность $\{f_m(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_F |f_m(x) - f(x)|^p d\sigma = 0. \quad (1)$$

Множество G называется компактным, если всякая последовательность $\{f_m(x)\}$ функций из G содержит подпоследовательность $\{f_{m_k}(x)\}$, сходящуюся в среднем. В этой работе мы дадим необходимое и достаточное условие компактности G .

Если положить

$$\rho(f, g) = \left\{ \int_F |f(x) - g(x)|^p d\sigma \right\}^{1/p}, \quad (2)$$

то (1) можно записать в форме

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(f_m, f) = 0.$$

Совокупность всех функций, интегрируемых в p -й степени с «расстоянием» (2), образует, как известно, полное метрическое пространство.

В дальнейшем всегда предполагается, что $f(x) = 0$ во всех точках из R^n , не принадлежащих F . Положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x, \varepsilon)} f(y) d\sigma,$$

где $S(x, \varepsilon)$ обозначает шар с центром x радиуса ε и $V(\varepsilon)$ — его объем. Как легко видеть, всегда

$$\rho(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \leq \rho(f, g). \quad (3)$$

Докажем, что для любой функции

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(f_\varepsilon, f) = 0.$$

* Ueber Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1931, Bd. 9, S. 60—63. Представлено Р. Курантом.
Перевод С. Б. Стечкина.

Действительно, как известно, для любого $\delta > 0$ существует функция $u(x)$, равномерно непрерывная на всем пространстве R^n и обладающая свойством

$$\rho(u, f) \leq \delta.$$

Для равномерно непрерывной функции, очевидно, имеем

$$\lim \rho(u_\varepsilon, u) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

и так как в силу (3)

$$\rho(u_\varepsilon, f_\varepsilon) \leq \rho(u, f) \leq \delta,$$

то, следовательно,

$$\overline{\lim} \rho(f_\varepsilon, f) \leq 2\delta, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ это доказывает утверждение.

Т е о р е м а. Для компактности G необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия.

I. Существует постоянная K , что для всех функций из G

$$\int_F |f(x)|^p d\sigma \leq K.$$

II. Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$, что для всех функций из G

$$\int_F |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p d\sigma \leq \delta^1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о того, что условия необходимы. Пусть не выполняется условие I; тогда существует последовательность $\{f_m\}$ функций из G , для которой расстояния

$$\rho(f_m, 0) = \left\{ \int_F |f_m(x)|^p d\sigma \right\}^{1/p}$$

стремятся к $+\infty$, а значит, и расстояния

$$\rho(f_m, f) \geq \rho(f_m, 0) - \rho(0, f)$$

от любой другой точки f неограниченно, возрастают с ростом m . Но тогда последовательность $\{f_m\}$, а значит, и G некомпактны.

Допустим теперь, что не выполняется условие II; тогда найдутся такое $\delta > 0$, такая последовательность

$$f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$$

функций из G и такая последовательность $\varepsilon_m > 0$,

$$\lim \varepsilon_m = 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

¹ В данном виде условие II сформулировано по предложению проф. Куранта.

что для любого m

$$\rho(f_{m\varepsilon_m}, f_m) \geq \delta. \quad (4)$$

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \delta &\leq \rho(f_{m\varepsilon_m}, f_m) \leq \rho(f_{m\varepsilon_m}, f_{\varepsilon_m}) + \rho(f_{\varepsilon_m}, f) + \rho(f, f_m) \leq \\ &\leq 2\rho(f, f_m) + \rho(f_{\varepsilon_m}, f). \end{aligned}$$

Так как

$$\lim \rho(f_{\varepsilon_m}, f) = 0,$$

то в силу (4)

$$\underline{\lim} \rho(f_m, f) \geq 1/2\delta.$$

Следовательно, последовательность $\{f_m\}$ и само множество G некомпактны.

Доказательство того, что условия достаточны. Обозначим через G_ε множество функций $f'_\varepsilon(x)$, которые соответствуют функциям $f(x)$ из G . Функции из G_ε равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. В самом деле, для любого множества J объема $V(J)$

$$\begin{aligned} \int_J f(x) d\sigma &= \int_J 1 \cdot f(x) d\sigma \leq \left\{ \int_J 1 \cdot d\sigma \right\}^{1/q} \left\{ \int_J |f(x)|^p d\sigma \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \{V(J)\}^{1/q} K^{1/p}, \quad 1/p + 1/q = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя неравенство (5) к множеству $J = S(x, \varepsilon)$, получаем

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_{S(x, \varepsilon)} f(y) d\sigma \leq \{V(\varepsilon)\}^{1/q-1} K^{1/p},$$

что доказывает равномерную ограниченность функций $f_\varepsilon(x)$. Точно так же, полагая

$$J = \{S(x', \varepsilon) \setminus S(x'', \varepsilon)\} \cup \{S(x'', \varepsilon) \setminus S(x', \varepsilon)\},$$

получаем неравенство

$$|f_\varepsilon(x'') - f_\varepsilon(x')| = \left| \frac{1}{V(\varepsilon)} \int_J f(y) d\sigma \right| \leq \{V(J)\}^{1/q} \{V(\varepsilon)\}^{-1} K^{1/p}.$$

Так как $V(J)$ равномерно стремится к нулю вместе с $|x - x'|$, то доказана также равномерная непрерывность функций $f_\varepsilon(x)$.

Следовательно, G компактно в смысле равномерной сходимости и тем более в смысле сходимости в среднем, так как если последовательность функций равномерно сходится, то она сходится также и в среднем.

В силу условия II множества G_ε аппроксимируют множество G с произвольной точностью, т. е. если ε достаточно мало, то G лежит в объединении шаров $S(G_\varepsilon, \rho)$ сколь угодно малого радиуса ρ . Отсюда непосредственно следует компактность G .

Гёттинген, 6 февраля 1931 г.

К ТОЛКОВАНИЮ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ *

На данную работу можно смотреть с двух совершенно различных точек зрения.

1. Если не признавать интуиционистских теоретико-познавательных предпосылок, то следует принимать во внимание лишь первый параграф. Выводы этого параграфа могут быть суммированы приблизительно следующим образом.

Наряду с теоретической логикой, систематизирующей схемы доказательств теоретических истин, возможна систематизация схем решений задач, например, геометрических задач на построение. Принципу силлогизма будет здесь соответствовать, например, следующий принцип: *если мы можем свести решение задачи b к решению задачи a , а решение задачи c — к решению задачи b , то и решение задачи c мы можем свести к решению задачи a .*

Введя соответствующую символику, можно дать формальные исчислительные правила, позволяющие осуществить символистическое построение системы подобных схем решения задач. Таким образом, наряду с теоретической логикой возникает некоторое новое исчисление задач. При этом нет нужды в каких-либо специальных (например, интуиционистских) теоретико-познавательных предпосылках.

Имеет место следующий замечательный факт: *исчисление задач по форме совпадает с браузеровой интуиционистской логикой, недавно формализованной Гейтингом [1, 2].*

2. Во втором параграфе при признании общих интуиционистских предпосылок критически исследуется интуиционистская логика; при этом указывается, что она должна быть заменена исчислением задач, поскольку ее объекты суть в действительности не теоретические высказывания, а, напротив, задачи.

§ 1

Мы не определяем, что такое *задача*, а объясняем это на примерах. Вот задачи:

1. Найти такие четыре целые числа x, y, z, n , для которых выполняются соотношения

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2. \quad (1)$$

2. Доказать, что теорема Ферма неверна.

* Zur Deutung der intuitionistischen Logik.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 58—65. Перевод В. А. Успенского.

3. Через три заданные точки (x, y, z) провести окружность ¹.
4. Предположив, что один корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ дан, найти другой.
5. Предположив, что число π допускает рациональное выражение $\pi = m/n$,

найти аналогичное выражение для числа e .

Отличие второй задачи от первой понятно и еще не составляет предмет специфически интуиционистского утверждения ². Четвертая и пятая суть примеры *условных* задач; при этом посылка в пятой задаче невозможна и, следовательно, сама задача бессодержательна или пуста. Доказательство *бессодержательности* задачи будет всегда в дальнейшем рассматриваться как ее решение.

Мы полагаем, что после этих примеров и разъяснений понятия «задача» и «решение задачи» во всех случаях, которые встречаются в конкретных областях математики, могут употребляться без недоразумений ³. В дальнейшем задачи будут обозначаться посредством строчных латинских букв $a, b, c, \dots$.

Коль скоро a и b — задачи, $a \wedge b$ означает задачу «решить обе задачи a и b », а $a \vee b$ — задачу «решить по крайней мере одну из задач a и b ». Далее, $a \supset b$ есть задача «предположив, что решение задачи a дано, решить задачу b » или, что значит то же самое, «свести решение задачи b к решению задачи a ».

Мы нигде не предполагали, что каждая задача разрешима. Пусть, например, теорема Ферма верна; в таком случае решение первой задачи было бы противоречивым. Соответственно этому $\neg a$ означает задачу «предположив, что решение задачи a дано, получить противоречие» ⁴.

Согласно этим определениям, если a, b, c, d суть задачи, каждая формула $p(a, b, c, \dots)$, составленная с помощью знаков $\wedge, \vee, \supset$ и $\neg$, также обозначает некоторую задачу. Если же $a, b, c, \dots$ суть только символы неопределенных задач, можно сказать, что $p(a, b, c, \dots)$ представляет собой функцию заданных переменных $a, b, c, \dots$. В общем случае если x есть переменная (произвольного сорта) и $a(x)$ обозначает задачу, смысл которой зависит от значений

¹ Чтобы быть совершенно точным, следует при формулировании этой задачи указать дозволенные средства построения.

² В противоположность этому *высказывания* «теорема Ферма неверна» и «существуют четыре числа, удовлетворяющие соотношениям (1)» с точки зрения классической логики эквивалентны.

³ Главные понятия логики высказываний «высказывание» и «доказательство высказывания» находятся не в лучшем положении.

⁴ Отметим, что $\neg a$ не следует понимать как задачу «доказать неразрешимость задачи a ». В общем случае, если рассматривать «неразрешимость a » как вполне определенное понятие, мы получаем лишь, что из $\neg a$ вытекает неразрешимость a , но не обратное. Если бы, например, было доказано, что осуществление вполне-упорядочения континуума превосходит наши способности, еще нельзя было бы утверждать, что из наличия такого вполне-упорядочения вытекает противоре-
чие.

x , то $(x) a$ (x) обозначает задачу «указать общий метод решения задачи a (x) при каждом отдельном значении x ». Это следует понимать так: решить задачу $(x) a$ (x) значит быть в состоянии для каждого заданного единичного значения x_0 переменной x решить задачу $a(x_0)$ посредством конечной последовательности заранее (до выбора этого x_0) известных шагов⁵.

Для функций $p(a, b, c, \dots)$ от неопределенных задач $a, b, c, \dots$ в дальнейшем вместо

$$(a)(b)(c) \dots p(a, b, c, \dots)$$

пишем просто⁶

$$\vdash p(a, b, c, \dots).$$

Следовательно, $\vdash p(a, b, c, \dots)$ обозначает задачу «указать общий метод решения задачи $p(a, b, c, \dots)$ при каждом отдельном выборе задач $a, b, c, \dots$ ».

Задачи вида $\vdash p(a, b, c, \dots)$, где p выражено посредством знаков $\vee, \wedge, \supset$ и $\neg$, составляют предмет *элементарного исчисления задач*⁷.

Соответствующие функции $p(a, b, c, \dots)$ суть *элементарные задачные функции*.

То, что я решил задачу, является чисто субъективным фактом, который сам по себе еще не представляет никакого общего интереса. Логические и математические задачи обладают, однако, специальным свойством *общеобязательной значимости их решений*: если я решил логическую или математическую задачу, то я могу изложить это решение общепонятным способом и оно с *необходимостью* будет признано правильным, хотя эта необходимость и носит идеальный, в некоторой степени, характер, поскольку предполагает достаточное развитие слушателей⁸.

Цель исчисления задач состоит, собственно говоря, в том, чтобы дать метод, позволяющий посредством механического применения нескольких простых исчислительных правил решать задачи вида $\vdash p(a, b, c, \dots)$, где $p(a, b, c, \dots)$ представляет собой элементарную задачную функцию. Чтобы свести все к этим исчислительным правилам, мы должны предположить, однако, что решения некоторых элементарных задач нам уже известны. Мы принимаем как *постулаты*, что две следующие группы задач А и В уже решены.

⁵ Как и ранее, мы надеемся, что в конкретных областях математики это определение не может привести к недоразумениям.

⁶ Такое объяснение значения значка $\vdash$ полностью отличается от предложенного Гейтингом, хотя и приводит к тем же самым правилам исчисления.

⁷ Это определение аналогично определению элементарного исчисления высказываний. Однако в исчислении высказываний логические функции, аналогичные функциям $\wedge, \vee, \supset$, и $\neg$, могут быть выражены через две из них. В исчислении задач все четыре функции независимы.

⁸ Дословно то же справедливо и для доказательств теоретических высказываний. Существенно, однако, что каждое доказанное высказывание является *верным*; для задач подобное понятие верности отсутствует.

Дальнейшее изложение обращено только к такому читателю, который решил все эти задачи⁹:

- 2.1 $\vdash a \supset a \wedge a$
 2.11 $\vdash a \wedge b \supset b \wedge a$
 2.12 $\vdash (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$
 2.13 $\vdash (a \supset b) \wedge (b \supset c) \supset (a \supset c)$
 2.14 $\vdash b \supset (a \supset b)$
 А 2.15 $\vdash a \wedge (a \supset b) \supset b$
 3.1 $\vdash a \supset a \vee b$
 3.11 $\vdash a \vee b \supset b \vee a$
 3.12 $\vdash (a \supset c) \wedge (b \supset c) \supset (a \vee b \supset c)$
 4.1 $\vdash \neg a \supset (a \supset b)$
 4.11 $\vdash (a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset \neg a$.

Итак, мы предполагаем, что при любом выборе задач a, b, c читатель может решить все стоящие здесь после знака $\vdash$ задачи. Это не представляет никаких трудностей. Например, в задаче 2.12, предполагая, что решение b уже сведено к решению a , следует свести решение $b \wedge c$ к решению $a \wedge c$. Пусть решение $a \wedge c$ дано; это означает, что даны как решение a , так и решение c ; из решения a мы можем по предположению вывести решение b , а так как решение c уже является данным, мы получаем решения обеих задач b и c , а следовательно, и решение задачи $b \wedge c$.

В этом рассуждении заключается общий метод решения задачи

$$(a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c),$$

справедливый при любых a, b, c . Таким образом, мы имеем право рассматривать задачу

$$2.12. \vdash (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$$

(со знаком общности $\vdash$) как решенную.

Вторая группа задач, для которой мы постулировали наличие решений, — группа В — содержит лишь три задачи¹⁰. А именно мы исходим из того, что мы всегда в состоянии (владеем общим методом) решить для любых элементарных задачных функций $p, q, r, s, \dots$ следующие задачи:

I. Если $\vdash p \wedge q$ решена, решить $\vdash p$.

II. Если $\vdash p$ и $\vdash p \supset q$ решены, решить $\vdash q$.

III. Если $\vdash p(a, b, c, \dots)$ решена, решить $\vdash p(q, r, s, \dots)$.

Теперь мы можем указать правила нашего исчисления задач.

⁹ В случае исчисления высказываний, если желать установить верность следствий, следует сперва убедиться в верности аксиом. Относительно нумерации формул ср. [1].

¹⁰ Их нельзя, однако, выразить символически посредством знаков элементарного исчисления задач.

1. Сперва мы заносим в список решенных задач задачи группы А.
2. Если в нашем списке уже находится $\vdash p \wedge q$, разрешается поместить туда также и $\vdash p$.
3. Если там находятся обе формулы $\vdash p$ и $\vdash p \supset q$, можно поместить и $\vdash q$.
4. Если $\vdash p(a, b, c, \dots)$ уже находится в списке и $q, r, s, \dots$ суть произвольные задачные функции, разрешается поместить туда также и $\vdash p(q, r, s, \dots)$.

На основании ранее принятых постулатов легко убедиться, что это формальное исчисление действительно обеспечивает решение соответствующих задач.

Мы отказываемся здесь от дальнейшего развития этого исчисления поскольку все только что указанные формальные исчислительные правила и а priori написанные формулы совпадают с исчислительными правилами и аксиомами Гейтинга [1]; следовательно, все формулы названной статьи мы можем трактовать как задачи и все эти задачи считать решенными.

Здесь мы отметим лишь некоторые особенно интересные из таких задач (они также рассматриваются как решенные):

- 4.3 $\vdash a \supset \neg \neg a$
- 4.2 $\vdash (a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$
- 4.3.2 $\vdash \neg \neg \neg a \supset \neg a$

Решения задач 4.3 и 4.2 ясны и без вычислений. Решение задачи 4.3.2 получается из 4.3 и 4.2, если в 4.2 заменить b на $\neg \neg a$.

Если к принятым а priori формулам А присоединить еще формулу

$$\vdash a \vee \neg a \quad (2)$$

(в логике высказываний — принцип исключенного третьего), мы получим полную систему аксиом классической логики высказываний. При нашем толковании задач формула (2) читается следующим образом: указать общий метод, позволяющий для каждой задачи a либо найти ее решение, либо же из наличия такого решения вывести противоречие! В частности, когда задача a состоит в доказательстве высказывания, надо располагать общим методом, позволяющим каждое высказывание либо доказать, либо привести к противоречию. Если наш читатель не считает себя всезнающим, он, пожалуй, согласится, что формула (2) не может находиться в списке решенных им задач.

Странным образом, однако, задачу ¹¹

$$4.8 \quad \vdash \neg \neg (a \vee \neg a)$$

можно решить, как показывается исчислением Гейтинга.

¹¹ В логике высказываний 4.8 выражает брауэрову теорему о непротиворечивости закона исключенного третьего.

Формула

$$\vdash \neg \neg a \subset a \quad (3)$$

(в исчислении высказываний — правило двойного отрицания) также не может появиться в нашем исчислении задач, поскольку из нее с помощью 4.8 следует формула (2).

Мы видим, таким образом, что в противоположность формулам интуиционистской логики Гейтинга даже самые простые формулы классической логики высказываний не могут появиться в нашем исчислении задач.

Следует еще отметить, что если формула $\vdash p$ является ложной в классической логике высказываний, то соответствующая задача $\vdash p$ не может быть решена. В самом деле, из такой формулы $\vdash p$ с помощью ранее принятых формул и исчислительных правил исчисления задач можно вывести очевидным образом противоречивую формулу $\vdash a \wedge \neg a$ (ср. [3]).

§ 2

Основной принцип интуиционистской критики логических и математических теорий таков: *каждое не бессодержательное высказывание должно указывать на одно или несколько совершенно определенных, доступных нашему опыту положений вещей*¹².

Если a есть общее высказывание вида «каждый элемент множества K обладает свойством A » и если, сверх того, множество K бесконечно, то отрицание высказывания a , т. е. высказывание « a ложно», не удовлетворяет только что сформулированному принципу. Чтобы устранить это затруднение, Брауэр дает новое определение отрицания: « a ложно» следует понимать как « a ведет к противоречию». Таким образом, отрицание высказывания a превращается в *экзистенциальное высказывание*, или *высказывание о существовании*: «Существует цепь логических заключений, которая, если принять верность высказывания a , приводит к противоречию».

Экзистенциальные высказывания, однако, были подвергнуты Брауэром глубокой критике. А именно, с интуиционистской точки зрения не имеет смысла просто сказать: «среди элементов бесконечного множества K имеется по крайней мере один элемент со свойством A », не указав этот элемент.

Брауэр, однако, не намерен полностью изгнать из математики экзистенциальные высказывания. Он лишь разъясняет, что экзистенциальное высказывание не должно высказываться без приведения соответствующей конструкции. Вместе с тем экзистенциальное высказывание не является, согласно Брауэру, простой констатацией того факта, что мы уже нашли в K соответствующий элемент; в этом последнем случае экзистенциальное высказывание оказывалось бы

¹² Ср. [4]. Все дальнейшее исследование негативных и экзистенциальных высказываний примыкает в сущности к этой работе Вейля.

неверным до изобретения конструкции и верным лишь после этого. Так возникает этот совершенно особый тип высказываний, которые, хотя и не должны иметь меняющегося с течением времени содержания, могут тем не менее высказываться только при определенных условиях.

Может возникнуть естественный вопрос, не является ли этот особый тип высказываний всего лишь фикцией. В самом деле, предлагается задача «во множестве K найти элемент со свойством A »; эта задача имеет в действительности некоторый определенный, не зависящий от состояния наших знаний смысл; если эта задача решена, т. е. если соответствующий элемент x найден, мы получаем эмпирическое высказывание «теперь наша задача решена». Итак, то, что Брауэр понимает под экзистенциальным высказыванием, полностью разложено на два элемента: объективный элемент (задача) и субъективный (ее решение). Тем самым не остается ничего, что можно было бы трактовать как экзистенциальное высказывание в собственном смысле слова.

Поэтому главный результат интуиционистской критики негативных высказываний должен быть сформулирован следующим простым способом: *для общего высказывания бессмысленно в общем случае рассматривать его отрицание как определенное высказывание*. Но тогда исчезает предмет интуиционистской логики, поскольку теперь принцип исключенного третьего оказывается справедливым для всех высказываний, для которых отрицание вообще имеет смысл¹³.

Для математики отсюда следует, что решение задач должно рассматриваться как ее самостоятельная цель (наряду с доказательством теоретических высказываний). Как было показано в первом параграфе, в сфере задач и решений формулы интуиционистской логики также приобретает новый смысл¹⁴.

Гёттинген, 15 января 1931 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1930, S. 42—56.
2. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1930, S. 57—71, 158—169.
3. Glivenko V.— Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.— Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., sér. 5, 1929, vol. 15, p. 183—188.
4. Weyl H. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.— Math. Ztschr., 1921, Bd. 10, S. 39—79. Рус. пер.: О новом кризисе основ математики.— В кн.: Вейль Г. О философии математики. М.; Л.: ГТТИ, 1934, с. 92—128.
5. Heyting A. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.— Erkenntnis, 1931, Bd. 2, S. 106—115.

¹³ Возникает однако, новый вопрос: какие логические законы справедливы для высказываний, отрицание которых не имеет смысла?

¹⁴ Эта интерпретация интуиционистской логики тесно связана с идеей, которую развил Гейтинг в [5]; у Гейтинга, правда, отсутствует ясное различие между высказыванием и задачей.

К ОБОСНОВАНИЮ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ *

Мы хотим здесь указать на одно интересное приложение теоремы Понтрягина о непрерывных алгебраических телах¹. Если при обосновании проективной геометрии принимать только (трехмерные) аксиомы инцидентности, то получится, как хорошо известно, большое количество возможных типов пространств. Эти различные типы проективных пространств соответствуют различным типам абстрактных алгебраических тел. В самом деле, в каждом проективном пространстве можно, обычным путем (с помощью теоремы Дезарга) ввести исчисление расстояний и получившееся при этом (вообще говоря, некоммутативное) тело расстояний определяется однозначно с точностью до изоморфизма при помощи исходного пространства. Обратное, если задано абстрактное алгебраическое тело, можно построить единственный, ему соответствующий тип проективного пространства.

Для того чтобы охарактеризовать обычную вещественную проективную геометрию, мы должны были бы следуя классическому методу, ввести две новые группы аксиом, а именно: аксиомы порядка и аксиомы непрерывности. Лишь после этого можно было бы добавлением комплексных элементов обосновать комплексную проективную геометрию. Но абстрактная топология дает нам теперь возможность рассматривать свойства непрерывности независимо от свойств порядка и, следовательно, обосновать аксиоматически комплексную геометрию *непосредственно*, без использования аксиом порядка, которые верны только в вещественной геометрии. Ниже мы и предлагаем один такой прямой путь.

Даны три системы элементов, которые называются точками, прямыми и плоскостями. Пусть они удовлетворяют следующим условиям.

I. Каждая из этих трех систем образует связное бикompактное топологическое пространство.

II. Точки, прямые и плоскости удовлетворяют обычным проективным аксиомам инцидентности.

III. Отношения инцидентности непрерывны: проходящая через две точки прямая является непрерывной функцией этих двух точек (если они не сливаются) и т. д.

Если в проективном пространстве, удовлетворяющем I—III, выбрать на одной прямой три произвольные точки в качестве нуля, единицы и бесконечности и определить соответствующее исчисление расстояний, то, как легко показать, в получившемся теле расстояний выполнены все требования теоремы Понтрягина. Следовательно, это тело расстояний изоморфно либо телу вещественных, либо телу

* Zur Begründung der projektiven Geometrie.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 175—176. Перевод И. Пенкова (НРБ).

¹ Über stetige algebraische Körper.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 163—174.

комплексных чисел, либо телу кватернионов. И значит, существуют лишь три различных типа пространств, удовлетворяющих требованиям I—III, а именно: обычное вещественное проективное пространство, комплексное проективное пространство и пространство, которое строится с помощью однородных координат из тела кватернионов.

Если принять теорему Паскаля (и, следовательно, коммутативность умножения) как новую аксиому, последняя возможность исключается. Наконец, комплексная геометрия выделяется при помощи аксиомы полноты.

26 мая 1931 г.

21

К ТЕОРИИ МЕРЫ *

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(E)$ — неотрицательная (может быть, принимающая также и значение $+\infty$) функция множества, определенная на всех A -множествах (суслинских множествах) n -мерного евклидова пространства R^n . Говорят, что $\mu(E)$ есть функция меры (или просто мера), если она удовлетворяет следующим условиям:

I. Если объединение конечного или счетного числа множеств E_m покрывает множество E :

$$E \subset \sum E_m$$

(что обозначается $\{E_m\} = \mathfrak{U}(E)$), то

$$\mu(E) \leq \sum \mu(E_m).$$

II. Если конечное или счетное число множеств E_m дизъюнкты и все они лежат в E :

$$E_m \subset E, \quad E_i E_j = 0, \quad i \neq j$$

(что обозначается $\{E_m\} = \mathfrak{J}(E)$), то

$$\sum \mu(E_m) \leq \mu(E).$$

Для формулировки условия III нужно следующее

О п р е д е л е н и е ¹. Множество E есть нерастянутый образ множества, E' , если существует однозначное отображение из E'

* Beiträge zur Maßtheorie.— Math. Ann., 1933, Bd. 107, S. 351—366. Перевод И. Пенкова (НРБ).

¹ Понятия нерастягивающего отображения (отображения без растяжения) было впервые использовано Э. Шмидтом для определения длины кривой (см. [2]).

на E , при котором расстояние любых двух точек из E' не меньше чем расстояние их образов в E .

Нерастянутый образ множества E будет всегда обозначаться через $\pi(E)$, где $\pi(x)$ — соответствующее непрерывное отображение.

III. Если множество E' является нерастянутым образом множества E , то

$$\mu(E') \leq \mu(E).$$

IV. Для некоторого множества J (эталона меры) выполнено

$$\mu(J) = 1.$$

З а м е ч а н и е I. Мы всегда предполагаем, что $\mu(E)$ определено для всех A -множеств из $\mathbb{R}^n$ и только для них.

З а м е ч а н и е II. Из I и II следует, что для

$$E = \sum E_m, \quad E_i E_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

выполнено] равенство

$$\mu(E) = \sum \mu(E_m),$$

т. е. $\mu(E)$ аддитивна.

З а м е ч а н и е III. Из III следует

III'. Если E' и E'' конгруэнтны, то

$$\mu(E') = \mu(E'').$$

З а м е ч а н и е IV. Из I следует, что если $E \subset E'$, то выполнено неравенство

$$\mu(E) \leq \mu(E'),$$

т. е. $\mu(E)$ — монотонная функция множества.

Самым важным является случай, когда в качестве эталона меры J выбран k -мерный ($k \leq n$) единичный куб J^k . В этом случае мы называем $\mu(E)$ k -мерной мерой и пишем $\mu^k(E)$.

Впрочем, известно², что в случае $k = n$ мера Лебега $m^n(E)$ есть единственная функция множества, определенная на всех A -множествах в $\mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условиям I, II, III', IV. Дальше мы увидим, что мера Лебега $m^n(E)$ удовлетворяет также условию III (а не только III'); следовательно, мера Лебега есть единственное решение нашей задачи о мерах, где в качестве эталона меры выбран n -мерный единичный куб. Если $k < n$, то для любого множества E из $\mathbb{R}^k$, которое лежит в некотором $\mathbb{R}^k$, имеет место равенство $\mu^k(E) = m^k(E)$.

² Утверждение справедливо, согласно Лебегу, для любой аддитивной функции $\mu(E)$, которая удовлетворяет условиям III и IV и определена на всех борелевских множествах. Но так как для любого A -множества E (как и для любого измеримого по Лебегу множества) существуют борелевские множества E' и E'' такие, что $E' \subset E \subset E''$, $m^n(E') = m^n(E) = m^n(E'')$, то наше утверждение справедливо и для функций, определенных на всех A -множествах.

Случай $k < n$ был рассмотрен впервые Каратеодори в его основополагающей для всех дальнейших исследований в этой области работе [3] и привел к целому ряду различных определений меры. Целью настоящей работы является предложение некоторого принципа упорядочивающего это многообразие определений.

Наш основной результат о k -мерных функциях меры может быть сформулирован следующим образом.

Основная теорема. Для любого натурального числа $k < n$ существуют две специальные функции меры: максимальная мера $\bar{\mu}^k(E)$ и минимальная мера $\underline{\mu}^k(E)$. Любая другая k -мерная функция меры $\mu^k(E)$ для любого A -множества E лежит между $\bar{\mu}^k(E)$ и $\underline{\mu}^k(E)$:

$$\bar{\mu}^k(E) \geq \mu^k(E) \geq \underline{\mu}^k(E).$$

§ 1

НЕРАСТЯГИВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сначала мы докажем, что для множеств в $\mathbb{R}^n$ мера Лебега $m^n(E)$ удовлетворяет условию III. Этот факт следует из следующей общей теоремы.

Теорема 1. Для любого нерастянутого образа $\pi(E)$ произвольного множества E (оба множества лежат в $\mathbb{R}^n$) выполнено неравенство:

$$m_S^n(E) \geq m_S^n\{\pi(E)\},$$

где $m_S^n(E)$ — верхняя мера Лебега E .

Доказательство основано на следующем утверждении.

Вспомогательная теорема. Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$, лежащее внутри шара S^n объема V ; если $\pi(E)$ — нерастягивающее отображение из E на некоторое множество $E' = \pi(E)$, также лежащее в $\mathbb{R}^n$, то выполнено

$$m_S^n(E') \leq V.$$

Ясно, что диаметр d' множества E' не больше чем диаметр S^n . Если F — выпуклая оболочка E' , то ее диаметр тоже d' и ее объем U не больше объема V' шара диаметра d' . Поэтому

$$m_S^n(E') \leq U \leq V' \leq V,$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим покрытие множества E шарами S_k^n , $k = 1, 2, 3, \dots$; эти шары можно выбрать так, чтобы было выполнено условие

$$\sum V_k \leq m_S^n(E) + \varepsilon,$$

где V_k — объем S_k^n . Ясно, что такое покрытие существует для любого $\varepsilon > 0$. Если обозначить ES_k^n через E_k , то

$$E = \sum E_k, \quad E_k \subset S_k^n, \quad m_S^n \{\pi(E_k)\} \leq V_k,$$

$$m_S^n \{\pi(E)\} \leq \sum m_S^n \{\pi(E_k)\} \leq \sum V_k \leq m_S^n(E) + \varepsilon,$$

что доказывает нашу теорему.

Мы хотели бы указать еще следующее известное свойство непрерывных (в частности, нерастягивающих) отображений.

Если $E' = \varphi(E)$ — непрерывное отображение A -множества E на множество E' , то образы A -подмножеств из E (в частности, само E') и прообразы (в E) A -подмножеств из E' сами являются A -множествами (см. [1]).

В дальнейшем если $E' = \varphi(E)$, то мы обозначаем прообраз в E некоторого множества $E'' \subset E'$ через $\varphi^{-1}(E'')$.

§ 2

МАКСИМАЛЬНАЯ МЕРА $\bar{\mu}^k(E)$

Определим теперь на всех A -множествах функцию множества $\bar{\mu}^k(E)$ как нижнюю грань меры Лебега $m^k \pi^{-1}(E)$ для всех A -множеств $\pi^{-1}(E)$ из $\mathbf{R}^k$, которые можно отобразить нерастягивающим образом на E :

$$\bar{\mu}^k(E) = \inf m^k \pi^{-1}(E).$$

Если множества $\pi^{-1}(E)$ не существуют вообще, полагают

$$\bar{\mu}^k(E) = +\infty.$$

Про функцию $\bar{\mu}^k(E)$ мы докажем, что она есть k -мерная функция меры и при этом наибольшая среди всех k -мерных функций меры. Таким образом, будет доказана первая половина основной теоремы.

I. $\bar{\mu}^k(E)$ удовлетворяет условию I из введения.

Если хотя бы одно из слагаемых $\bar{\mu}^k(E_m)$ равно $+\infty$, то наше утверждение заведомо справедливо. В противоположном случае в $\mathbf{R}^k$ существуют такие множества E'_m , что

$$\pi^{(m)}(E'_m) = E_m, \quad m^k(E'_m) \leq \bar{\mu}^k(E_m) + \varepsilon/2^m.$$

Рассмотрим разбиение $\mathbf{R}^k$ на кубы, каждый из которых меньше единичного; обозначая через E'_{mr} ($r = 1, 2, 3, \dots$) пересечение E'_m с кубами этого разбиения, получаем

$$m^k(E'_m) = \sum m^k(E'_{mr}).$$

Далее,

$$E_m = \sum \pi^{(m)}(E'_{mr}) = \sum E_{mr}.$$

Заметим еще здесь, что диаметры E_{mr} тоже < 1 . Упорядочим все E_{mr} в последовательность

$$E_{m_1 r_1}, E_{m_2 r_2}, E_{m_3 r_3}, \dots, E_{m_i r_i}, \dots$$

и положим $\rho_i = \sup \rho(x, y)$, где x пробегает все точки множества $E_{m_i r_i}$, а y — объединения всех $E_{m_j r_j}$ для $j < i$. Теперь мы определяем подмножества E_{mr}^* в $\mathbb{R}^k$ так, чтобы E_{mr}^* было конгруэнтно E'_{mr} и, кроме того, было выполнено неравенство

$$\rho(E_{m_i r_i}^*, \sum_{j < i} E_{m_j r_j}^*) \geq \rho_i.$$

Наконец мы определяем

$$E^* = \sum E_{mr}^*.$$

Каждое E_{mr}^* отображается на соответствующее E'_{mr} при помощи конгруэнтного отображения:

$$E'_{mr} = K_{mr}(E_{mr}^*).$$

Далее,

$$E_{mr} = \pi^{(m)}(E'_{mr}) = \pi^{(m)}K_{mr}(E_{mr}^*).$$

Таким образом, E^* отображается на

$$E = \sum E_m = \sum E_{mr}.$$

Это отображение нерастягивающее. Действительно, если две точки x_1^* и x_2^* принадлежат одному множеству E_{mr}^* , то

$$x = \pi^*(x^*) = \pi^{(m)}K_{mr}(x^*)$$

и так как K_{mr} , соответственно $\pi^{(m)}$, конгруэнтно, соответственно нерастягивающее, то

$$\rho(x_1^*, x_2^*) \geq \rho(x_1, x_2).$$

С другой стороны, если x_1^* и x_2^* принадлежат различным множествам, например, x_1^* принадлежит $E_{m_i r_i}^*$, а x_2^* принадлежит $E_{m_j r_j}^*$ (с $i > j$), то

$$\rho(x_1^*, x_2^*) \geq \rho_i \geq \rho(x_1, x_2).$$

Наконец, мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^k(E) &\leq m^k(E^*) = \sum m^k(E_{mr}^*) = \sum m^k(E'_{mr}) = \\ &= \sum m^k(E'_{mr}) \leq \sum (\bar{\mu}^k(E_m) + \varepsilon/2^m) = \sum \bar{\mu}^k(E_m) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было произвольным, получаем

$$\bar{\mu}^k(E) \leq \sum \bar{\mu}^k(E_m),$$

что и требовалось.

II. $\bar{\mu}^k(E)$ удовлетворяет условию II из введения.

Действительно, если $\bar{\mu}^k(E) = +\infty$, то это тривиальным образом верно. Но если $\bar{\mu}^k(E) < +\infty$, в $\mathbf{R}^k$ существует множество $\pi^{-1}(E)$ такое, что

$$\bar{\mu}^k(E) > m^k \pi^{-1}(E) - \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum \bar{\mu}^k(E_m) \leq \sum m^k \pi^{-1}(E_m) \leq m^k \pi^{-1}(E) \leq \bar{\mu}^k(E) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было произвольным, этим наше утверждение доказано.

III. Всегда

$$\bar{\mu}^k \pi(E) \leq \bar{\mu}^k(E)$$

(условие III).

Это следует немедленно из того, что композиция двух нарастающих отображений $\pi_1 \pi_2(E)$ есть снова нарастающее отображение.

IV. Для множеств из $\mathbf{R}^k$ выполнено

$$\bar{\mu}^k(E) = m^k(E).$$

Это следует из теоремы 1 (§ 1). В частности, $\bar{\mu}^k(J^k) = 1$ (условие IV).

V. Для любой другой k -мерной меры $\mu^k(E)$ выполнено неравенство

$$\mu^k(E) \leq \bar{\mu}^k(E).$$

Действительно, для любого $\pi^{-1}(E) \subset \mathbf{R}^k$

$$\mu^k(E) \leq \mu^k \pi^{-1}(E) = m^k \pi^{-1}(E),$$

следовательно, и

$$\mu^k(E) \leq \inf m^k \pi^{-1}(E) = \bar{\mu}^k(E).$$

§ 3.

МИНИМАЛЬНАЯ МЕРА $\underline{\mu}^k(E)$

Положим

$$\underline{\mu}^k(E) = \sup \sum m^k \pi_i(G_i) \quad (G_i \subset E; G_i G_j = 0, i \neq j),$$

где знак супремума относится к всевозможным счетным последовательностям A -множеств, которые удовлетворяют условиям в скобках и образы которых лежат в $\mathbf{R}^k$. Так же как и для $\bar{\mu}^k(E)$, мы докажем следующие утверждения.

I. $\underline{\mu}^k(E)$ удовлетворяет условию I из введения.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ имеется последовательность A -множеств G_i ($G_i \subset E$, $G_i G_j = 0$, $i \neq j$) и отображений π_i таких, что

$$\underline{\mu}^k(E) \leq \sum m^k \pi_i(G_i) + \varepsilon.$$

Далее имеем

$$\underline{\mu}^k(E_m) \geq \sum m^k \pi_i(E_m G_i),$$

$$\sum \underline{\mu}^k(E_m) \geq \sum \sum m^k \pi_i(E_m G_i) \geq \sum m^k \pi_i(G_i) \geq \underline{\mu}^k(E) - \varepsilon.$$

Поскольку ε было произвольным, наше утверждение доказано.

II. $\underline{\mu}^k(E)$ удовлетворяет условию II.

Действительно, для любого m имеется такая последовательность A -множеств G_{mi} ($G_{mi} \subset E_m$, $G_{mi} G_{mj} = 0$, $i \neq j$) и отображений π_{mi} , что

$$\underline{\mu}^k(E_m) \leq \sum m^k \pi_{mi}(G_{mi}) + \varepsilon/2^m.$$

Поэтому поскольку множества G_{mi} лежат в E и дизъюнктивны, то

$$\underline{\mu}^k(E) \geq \sum \sum m^k \pi_{mi}(G_{mi}) \geq \sum \underline{\mu}^k(E_m) - \varepsilon,$$

чем наша теорема доказана.

III. Всегда

$$\underline{\mu}^k \pi(E) \leq \underline{\mu}^k(E).$$

IV. Для множеств из $\mathbf{R}^k$

$$\underline{\mu}^k(E) = m^k(E).$$

V. Для любой k -мерной меры $\mu^k(E)$ выполнено неравенство

$$\underline{\mu}^k(E) \leq \mu^k(E).$$

Доказательство.

$$\underline{\mu}^k(E) = \sup \sum m^k \pi_i(G_i) \leq \sup \sum \mu^k(G_i) \leq \mu^k(E).$$

Этим наша основная теорема полностью доказана.

§ 4

НЕСКОЛЬКО СПЕЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ МЕРЫ

$$\bar{\mu}^k(E) \text{ И } \underline{\mu}^k(E)$$

Следующая теорема проясняет связь между функциями меры различных размерностей.

Т е о р е м а I. Пусть $i < k$; тогда из $\underline{\mu}^k(E) > 0$ следует, что $\underline{\mu}^i(E) = +\infty$, а из $\bar{\mu}^k(E) > 0$ следует, что $\bar{\mu}^i(E) = +\infty$.

Действительно, если $\underline{\mu}^k(E) > 0$, в E существует подмножество E' , которое можно нерастянуто отобразить на некоторое подмножество E'' из $\mathbf{R}^k$ с $m^k(E'') > 0$. Но тогда в E'' можно найти последовательность подмножеств E''_m , которые лежат в различных (например, в параллельных) $\mathbf{R}^i$, так что

$$\sum m^i(E''_m) = +\infty.$$

Следовательно,

$$\underline{\mu}^i(E) \geq \underline{\mu}^i(E') \geq \underline{\mu}^i(E'') \geq \sum \underline{\mu}^i(E''_m) = \sum m^i(E''_m) = +\infty,$$

что доказывает первую половину нашей теоремы.

Если предположить, что $\underline{\mu}^i(E) < +\infty$, $i < k$, то в $\mathbf{R}^i$ существует $E' = \pi^{-1}(E)$. Тем более E' лежит в некотором $\mathbf{R}^k$, причем

$$\underline{\mu}^k(E) \leq m^k(E') = 0,$$

что и требовалось.

Дальше мы обозначим через $S_a(x) = y$ преобразование подобия $\mathbf{R}^n$ на себя с коэффициентом пропорциональности, равным a . Мы говорим, что функция меры $\mu(E)$ имеет хорошо определенный порядок, равный s , если для любого множества E из $\mathbf{R}^n$ и для любого $S_a(x)$ выполнено равенство

$$\mu\{S_a(E)\} = a^s \mu(E);$$

при этом s может быть произвольным положительным числом.

Легко видеть, что функции меры $\underline{\mu}^k(E)$ и $\underline{\mu}^k(E)$ имеют порядок $s = k$; при этом мы, однако, не знаем, каждая ли $\underline{\mu}^k(E)$ имеет хорошо определенный порядок и равен ли он обязательно k .

Т е о р е м а II. Пусть $\varphi(E) = E'$ — непрерывное отображение множества E на множество E' такое, что

$$\rho(x', y') \leq a\rho(x, y)$$

(где $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$, а $\rho(x, y)$ означает расстояние между x и y); пусть, далее, $\mu(E)$ — функция меры порядка s . Тогда

$$\mu(E') \leq a^s \mu(E). \quad (1)$$

Действительно, пусть

$$E'' = S_{a^{-1}}(E').$$

Всегда верно, что

$$\rho(x'', y'') = a^{-1}\rho(x', y') \leq \rho(x, y).$$

Следовательно, $E'' = S_{a^{-1}}\varphi(E)$ является нерастягивающим отображением; далее, по свойству III функции $\mu(E)$ имеем

$$\mu(E'') \leq \mu(E)$$

и, поскольку, кроме того, $\mu(E'') = a^{-c} \mu(E')$, в результате получаем неравенство (1).

§ 5

СЛУЧАИ, КОГДА ЛИНЕЙНАЯ МЕРА ОДНОЗНАЧНА

Линейная, т. е. одномерная мера, очевидно однозначно определена для E , когда $\bar{\mu}^1(E) = \underline{\mu}^1(E)$. Далее мы даем некоторые достаточные условия для этой однозначности.

Т е о р е м а I. Для любой простой жордановой дуги S верно равенство

$$\underline{\mu}^1(S) = \bar{\mu}^1(S) = L(S),$$

где $L(S)$ — длина S .

Вспомогательная теорема. Для любого континуума K верно

$$\underline{\mu}^1(E) \geq d(K),$$

где $d(K)$ обозначает диаметр K .

Действительно, пусть точки a и b из K выбраны так, что $\rho(a, b) = d(K)$. Функция $f(x) = \rho(a, x)$ дает нерастягивающее отображение K на отрезок числовой оси Δ от 0 до $d(K)$, для которого $m^1(\Delta) = d(K)$ и этим наше утверждение доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I. По определению длины дуги $L(S)$ на S существует последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_m$ таких, что

$$\sum \rho(x_{i-1}, x_i) \geq L(S) - \varepsilon.$$

Пусть S_i — части дуги S , расположенные между x_{i-1} и x_i . По доказанной вспомогательной теореме $\underline{\mu}^1(S_i) \geq \rho(x_{i-1}, x_i)$ и $\underline{\mu}^1(S) = \sum \underline{\mu}^1(S_i) \geq L(S) - \varepsilon$ и, следовательно,

$$\underline{\mu}^1(S) \geq L(S). \quad (1)$$

Пусть теперь y_0 — начальная точка S . Функция $\pi^{-1}(y) = L(y_0, y)$ (где (y_0, y) — часть дуги S с конечными точками y_0 и y) реализует отображение из S на интервал Δ длины $L(S)$. Обратная к ней функция $\pi(x)$ отображает Δ нерастягивающим образом на S , так как для точек x', x'' , отвечающих точкам y', y'' из Δ очевидно имеем

$$\rho(x', x'') = L(y', y'') \geq \rho(y', y'').$$

Из этого мы заключаем, что

$$\bar{\mu}^1(S) \leq L(S). \quad (2)$$

Так как $\bar{\mu}^1(S) \geq \underline{\mu}^1(S)$, утверждение теоремы вытекает из неравенств (1) и (2).

З а м е ч а н и е. Из предыдущего видно, что $L(S)$ — это нижняя грань длин интервалов Δ , которые можно отобразить нерастягивающим образом на S . Это определение длины восходит к Э. Шмидту (ср. с [2]).

Можно доказать более общее утверждение.

Т е о р е м а II. Для любого континуума K $\bar{\mu}^1(K) = \underline{\mu}^1(E)$.

Сначала мы предположим, что K не является локально связным. Тогда существует бесконечно много дизъюнктивных континуумов $K_1, K_2, \dots, K_m, \dots$ в K таких, что их диаметры превосходят некоторую фиксированную положительную константу D . Поскольку $\underline{\mu}^1(K_m) > D$, то $\underline{\mu}^1(K) \geq \sum \underline{\mu}^1(K_m) = +\infty$, следовательно, $\underline{\mu}^1(K) = \bar{\mu}^1(K) = +\infty$.

Пусть теперь K локально связан. Тогда на основе известных теорем для каждой точки $a \in K$ и для каждого ее не содержащего замкнутого множества $F \subset K$ можно найти жорданову дугу $(a, F) \subseteq K$ так, чтобы a была ее крайней точкой, а другая ее крайняя точка была бы единственной точкой дуги, принадлежащей F . Начнем теперь индуктивный процесс, в котором множеством F_0 будет некоторая точка $a_0 \in K$, и примем, что замкнутые множества $F_0, F_1, \dots, F_m$ уже построены. Выберем дальше одну из всех наиболее отдаленных от F_n точек из K , скажем a_m , построим дугу $(a_m, F_m) \subseteq K$ и положим $F_{m+1} = F_m + (a_m, F_m)$.

Если ряд

$$\sum L(a_m, F_m) \quad (3)$$

расходится, то по теореме I

$$\underline{\mu}^1(K) \geq \sum \underline{\mu}^1(a_m, F_m) = \sum L(a_m, F_m) = +\infty$$

и, следовательно, $\underline{\mu}^1(K) = \bar{\mu}^1(K) = +\infty$.

Если же ряд (3) имеет конечную сумму L , то $L(a_m, F_m)$ стремится к нулю с ростом m , из чего при помощи определения дуги (a_m, F_m) следует, что множества F_m аппроксимируют континуум K сколь угодно хорошо. Теперь мы определим непрерывные кривые $S_0, S_1, \dots, S_m, \dots$ так, что запас точек S_m будет совпадать с F_m . S_m строятся последовательно таким образом: S_0 совпадает с точкой $a_0 = F_0$. Примем, что кривая S_m уже построена, и выберем на ней первую точку x_m , которая совпадает с конечной точкой (a_m, F_m) , принадлежащей F_m . Тогда пусть S_{m+1} будет по определению непрерывной кривой, которая начиная с начальной точки кривой S_m совпадает с S_m вплоть до точки x_m , затем пробегает дугу (a_m, F_m) туда и обратно и после возвращения в x_m пробегает остаток S_m от x_m до конечной точки.

Очевидно, все начальные и конечные точки кривых S_m совпадают с точкой a_0 ; их общая длина равна

$$L(S_m) = 2 \sum_{k < m} L(a_k, F_k).$$

В предположении, что ряд (3) сходится, легко видеть, что кривые S_m аппроксимируют некоторую непрерывную кривую S , длина которой будет в точности равна $2L$. Кривая S (как множество точек) совпадает с континуумом K .

Континуум K может быть представлен в виде

$$K = \sum (a_m, F_m) + E, \quad (4)$$

где E — множество точек, не принадлежащих дугам (a_m, F_m) . Отобразим S на отрезок Δ длины $2L$, как в доказательстве теоремы I, так, чтобы обратное отображение было нерастягивающим. При этом два раза пробегаемые дуги (a_m, F_m) переходят в части Δ с общей длиной $2L$, а E отображается на множество E' меры $2L - 2L = 0$. Далее, поскольку E' отображается на E нерастягивающим образом, $\bar{\mu}^1(E) = 0$, а следовательно, и $\underline{\mu}^1(E) = 0$, из чего при помощи (4) следует, что

$$\bar{\mu}^1(K) = \sum \bar{\mu}^1(a_m, F_m) = L = \sum \underline{\mu}^1(a_m, F_m) = \underline{\mu}^1(K).$$

§ 6

ТЕОРИЯ МЕРЫ В ОБЩИХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Во всем изложении до этого места мы могли предполагать, что функции множества $\mu(E)$ определены для всех метрических A -множеств. При этом под метрическим множеством мы понимаем множество из любых элементов, в котором для любой пары элементов (x, y) определено расстояние, удовлетворяющее обычным аксиомам (см. [1]). Метрическое множество называется (абсолютным) A -множеством, если оно является непрерывным образом множества всех иррациональных чисел.

Функции множества $\bar{\mu}^k(E)$ и $\underline{\mu}^k(E)$ определены, следовательно, для всех метрических A -множеств и обладают в этой новой области определения всеми ранее сформулированными свойствами. В частности, результаты § 5 о длине дуг и о линейной мере континуумов верны тоже в общих метрических пространствах. Возможность построения теории меры в общих метрических пространствах была осознана впервые П. Урысоном в 1921 г. в одной его неопубликованной работе. Урысон рассматривает множества E в компактном метрическом пространстве R и поступает следующим образом.

Пусть $\mathcal{U}$ — покрытие E , состоящее из конечного или счетного числа замкнутых множеств $F_k \subset R$ с диаметрами $d_k \leq \varepsilon$. Мера $m_\sigma(E)$ порядка σ ($\sigma > 0$) определяется как

$$m_\sigma(E) = \liminf m(\sigma) \sum d_k^\sigma, \quad m(\sigma) = \frac{\pi^{\sigma/2}}{2^\sigma \Gamma(\sigma/2 + 1)}.$$

Для точечных множеств из $\mathbb{R}^n$ это определение можно найти у Хаусдорфа [4] среди многих других определений, которые не имеют смысла для общих метрических пространств³.

Функция меры $m_\sigma(E)$ удовлетворяет нашим условиям I, II, III, и если σ целочисленно, то и условию IV с единичным кубом J^σ в качестве эталона меры. Следовательно, для целых σ

$$\underline{\mu}^\sigma(E) \leq m_\sigma(E) \leq \bar{\mu}^\sigma(E).$$

Если $\sigma = 1$, $m_\sigma(E)$ отождествляется с линейной мерой Каратеодори; мне кажется вероятным, что равенство $m_1(E) = \underline{\mu}^1(E)$ имеет место всегда.

§ 7

ТЕОРЕМА ОДНОЗНАЧНОСТИ ДЛЯ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ МЕРЫ

Мы возвращаемся теперь к множествам, лежащим в $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующая

Т е о р е м а о д н о з н а ч н о с т и . *Равенство*

$$\bar{\mu}^k(E) = \underline{\mu}^k(E)$$

выполнено для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, которое может быть представлено как нерастянутый образ некоторого A -множества $E' \subset \mathbb{R}^k$.

Неравенство $\bar{\mu}^k(E) > \underline{\mu}^k(E)$, следовательно, возможно только при $\bar{\mu}^k(E) = +\infty$. В случае однозначности отображения $\pi^{-1}(E) = E'$ теорема однозначности следует из некоторого интегрального представления функций меры $\bar{\mu}^k(E)$ и $\underline{\mu}^k(E)$. Рассмотрим для этого функции

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_k), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которые представляют отображение в некоторых прямоугольных координатах в $\mathbb{R}^n$ и соответственно в $\mathbb{R}^k$. Поскольку $\pi(E')$ нерастягивающее, то

$$|x_i - x'_i| / |\eta' - \eta''| \leq 1, \quad (1)$$

где η , как обычно, обозначает вектор с компонентами $y_1, y_2, \dots, y_k$ (а также и точку $(y_1, y_2, \dots, y_k)$), и

$$|\eta' - \eta''| = \rho(\eta', \eta'') = \sqrt{\sum (y'_i - y''_i)^2}.$$

³ Во время исследований Урысона (1921) работа Хаусдорфа [4] была в Москве недоступной.

Следовательно, для функций x_i почти везде на E' определены частные производные $\partial x_i / \partial y_j$. Составим выражение

$$D(\eta) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_k)} \right)^2},$$

где знак суммы распространяется на всевозможные наборы $(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Теорема об интеграле. В сделанных предположениях

$$\bar{\mu}^k(E) = \underline{\mu}^k(E) = \int_{E'} D d\sigma = I^k(E),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега⁴.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассматривать множества E' с $m^k(E') < +\infty$, так как иначе E' можно было бы разложить в счетную сумму таких множеств.

Говорят, что $x_i(y_1, y_2, \dots, y_k) = x_i(\eta)$ дифференцируема в некоторой точке, если для $\Delta x_i = x'_i - x_i$ и $\Delta y_j = y'_j - y_j$ выполнено

$$\Delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Delta y_j + o(|\Delta \eta|).$$

Если обозначить матрицу $\|\partial x_i / \partial y_j\|$ через $\partial \mathfrak{X} / \partial \eta$, то в точке, где все функции x_i дифференцируемы, в векторных обозначениях выполнено равенство

$$\Delta \mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \eta} \Delta \eta + o(|\Delta \eta|). \quad (2)$$

Из результатов Радемахера [5] и из (1) следует, что (2) выполнено почти всюду. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти подмножество P из E' такое, что $m^k(E' - P) \leq \varepsilon$, компоненты $\partial \mathfrak{X} / \partial \eta$ непрерывны на P и (2) выполнено равномерно.

Поскольку $|D| \leq 1$,

$$\int_{E' - P} D d\sigma \leq m^k(E' - P) \leq \varepsilon,$$

$$\underline{\mu}^k \pi(E' - P) \leq \bar{\mu}^k \pi(E' - P) \leq m^k(E' - P) \leq \varepsilon,$$

достаточно доказать нашу теорему об интеграле для P и $Q = \pi(P)$ вместо E' и E . Пусть η — точка из P , а S — открытый шар (внутренность шара) радиуса ρ с центром в η . Положим также

$$R = PS, \quad T = \pi(R).$$

⁴ В частности, из нашей теоремы следует независимость интеграла $I^k(E)$ от отображения $E = \pi(E')$.

Вспомогательная теорема. Для $\mu^k = \bar{\mu}^k$, а также для $\mu^k = \underline{\mu}^k$ и для любой точки η из P выполнено

$$\mu^k(T) = \int_R D d\sigma + o(\rho) m^k(S).$$

Примем пока, что эта вспомогательная теорема доказана. По теореме Витали для любого $\varepsilon > 0$ можно найти последовательность шаров $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots$ таких, что

$$S_i S_j = 0, \quad i \neq j,$$

$$P = \sum R_m + N, \quad m^k(N) = 0,$$

$$\sum m^k(S_m) \leq 2m^k(P),$$

$$\mu^k(T) = \int_R D d\sigma + \varepsilon m^k(S_m)$$

и, следовательно,

$$\mu^k(Q) = \int_P D d\sigma + 2\varepsilon m^k(P);$$

последняя формула доказывает нашу теорему об интеграле.

Доказательство вспомогательной теоремы. Пусть $D(\eta) \neq 0$. Отображение

$$\zeta' = \Phi(\eta') = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \eta}(\eta' - \eta)$$

переводит шар S в k -мерный эллипсоид $E = \Phi(S)$. Это отображение однозначно и непрерывно. Следовательно, отношение

$$|\zeta' - \zeta''| / |\eta' - \eta''|$$

имеет положительную нижнюю грань и вместе с (2) выполнено

$$\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}'' = \zeta' - \zeta'' + o(\rho) |\zeta' - \zeta''|,$$

$$|\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}''| = |\zeta' - \zeta''| \{1 + o(\rho)\}. \quad (3)$$

Пусть $U = \Phi(R)$. В силу равенства (3) отображение $T = \pi\Phi^{-1}(U)$ лишь немного отличается от конгруэнтного отображения. По теореме II § 4 из этого следует соотношение

$$\mu^k(T) = m^k(U) \{1 + o(\rho)\}.$$

Но, поскольку $m^k(U) = D(\eta) m^k(R)$ и D меняется непрерывно вместе с η , получаем, наконец,

$$\begin{aligned} \mu^k(T) &= D(\eta) m^k(R) \{1 + o(\rho)\} = \int_R D d\sigma \{1 + o(\rho)\} = \\ &= \int_R D d\sigma + o(\rho) m^k(S). \end{aligned}$$

Остается случай $D(\eta) = 0$. Тогда в силу непрерывности Φ имеем

$$\int_R D d\sigma = o(\rho) m^k(S),$$

так что остается только показать, что и

$$\underline{\mu}^k(T) \leq \bar{\mu}^k(T) = o(\rho) m^k(S).$$

Отображение $\zeta' = \Phi(\eta')$ переводит теперь шар S в i -мерный эллипсоид, где $i < k$. При подходящем выборе прямоугольной системы координат можно представить Φ в виде

$$\begin{aligned} z'_j &= \lambda_j (y'_j - y_j), & \lambda &\neq 0, \quad j \leq i, \\ z'_j &= 0, & j &\geq i. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} z_j^* &= \lambda_j (y'_j - y_j), & j &\leq i, \\ z_j^* &= \delta (y'_j - y_j), & i &\leq j \leq k, \\ z_j^* &= 0, & k &\leq j. \end{aligned}$$

Это есть однозначное отображение $\zeta^* = \Phi_*(\eta')$ шара S в некоторый k -мерный эллипсоид E^* ; отсюда следует, что отношение

$$|\zeta_1^* - \zeta_2^*| / |\eta_1' - \eta_2'|$$

имеет положительную нижнюю грань. Пусть $U^* = \Phi_*(R)$; отображение $T = \pi \Phi_*^{-1}(U^*)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} |x'_1 - x'_2| &\leq |\zeta'_1 - \zeta'_2| + o(\rho) |y'_1 - y'_2| \leq \\ &\leq |\zeta_1^* - \zeta_2^*| + o(\rho) |\eta'_1 - \eta'_2| \leq |\zeta_1^* - \zeta_2^*| \{1 + o(\rho)\}. \end{aligned}$$

По теореме II § 4 имеем далее

$$\bar{\mu}^k(T) \leq m^k(U^*) \{1 + o(\rho)\}.$$

Но поскольку δ было произвольным, отношение

$$m^k(U^*)/m^k(R) = m^k(E^*)/m^k(S)$$

можно сделать сколь угодно малым, так что в итоге получаем

$$\bar{\mu}^k(T) = o(\rho) m^k(S).$$

Наша вспомогательная теорема, а вместе с ней и теорема об интеграле, тем самым доказана.

Доказательство теоремы однозначности. Ясно, что E' можно представить в виде

$$E' = P_1 + P_2 + \dots + P_m + \dots + N, \quad P_m \subset P_{m+1},$$

где P_m замкнуты и ограничены и $m^k(N) = 0$. Пусть

$$Q_m = \pi(P_m), \quad M = \pi(N).$$

Поскольку $\bar{\mu}^k(M) = 0$, выполнено соотношение

$$\bar{\mu}^k(Q_m) \rightarrow \bar{\mu}^k(E) \quad (m \rightarrow \infty).$$

Нужно, следовательно, доказать только равенство

$$\underline{\mu}^k(Q_m) = \bar{\mu}^k(Q_m).$$

Но для замкнутых множеств P и Q это равенство следует из теоремы об интеграле при помощи следующей теоремы.

Т е о р е м а о б у н и ф о р м и з а ц и и. Если P — замкнутое ограниченное множество и $Q = \varphi(P)$ — непрерывное отображение, то в P существует A -[под]множество A такое, что $\varphi(A) = Q$ и это отображение взаимно однозначно на A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(C) = P$ — непрерывное отображение из канторовского совершенного множества (см. [1]) на P . Мы рассматриваем непрерывное отображение $Q = \psi(C) = \varphi f(C)$. Прообраз $\psi^{-1}(x')$ точки $x' \subset Q$ является замкнутым подмножеством в C ; обозначим через $y = \omega(x')$ нижнюю грань

$$y = \inf \psi^{-1}(x')$$

множества $\psi^{-1}(x')$. Функция $y = \omega(x')$ определена на Q и непрерывна, следовательно, ее множество значений A_C является A -множеством. Отображение $\psi(A_C) = Q$, очевидно, взаимно однозначно. Пусть теперь $A = f(A_C)$. A есть тоже A -множество и отображение $Q = \varphi(A)$ взаимно однозначно, что и требовалось.

Наконец, заметим, что по нашей теореме об интеграле обе функции множества $\bar{\mu}^k(E)$ и $\underline{\mu}^k(E)$ совпадают для квадрируемых по Лебегу поверхностей с их поверхностной мерой (см. [6, с. 315]) (мы рассматриваем только двумерные элементы, т. е. поверхности, которые взаимно однозначно и непрерывно отображаются на плоский квадрат); для этого класса поверхностей Т. Радо доказал (см. [7, с. 445]), что классическое интегральное выражение $I^k(E)$ действительно задает поверхностную меру Лебега. Поверхностная мера множеств, лежащих на квадрируемых по Лебегу поверхностях, определенная Радемахером (см. [8, с. 54 и особенно § 17, с. 61]), также совпадает с $I^k(E) = \bar{\mu}^k(E) = \underline{\mu}^k(E)$.

Дополнение

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ МНОЖЕСТВ

Понятие нерастягивающего отображения, которое мы использовали в этой работе для обоснования естественного понятия меры для множеств возможно более общей природы, дает в применении к линейным множествам следующее очень простое определение. Рас-

смотрим все нерастягивающие отображения данного линейного множества E на замкнутый отрезок:

$$\pi(E) = J$$

и положим

$$L(E) = \sup \{L(J)\},$$

где $L(J)$ обозначает длину отрезка J .

Теорема. Для множеств E , измеримых по Лебегу, число $L(E)$ совпадает с мерой Лебега $m^1(E)$.

Доказательство. Пусть F — ограниченное замкнутое подмножество в E . Определим функцию $\pi(x)$ с помощью равенства

$$\pi(x) = m^1\{F(x)\},$$

где через $F(x)$ обозначается множество всех точек из F , лежащих левее x . Как легко видеть, эта функция отображает всю прямую, множество F , а также множество E на один и тот же интервал длины $m^1(F)$. Поскольку это отображение, кроме того, и нерастягивающее, то

$$L(E) \geq m^1(F).$$

Так как F было произвольным ограниченным подмножеством E , выполнено далее

$$L(E) \geq \sup m^1(F) = m^1(E).$$

С другой стороны, по теореме I § 1

$$L(E) \leq m^1(E),$$

что завершает доказательство нашей теоремы.

1 января 1932 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. 2 Aufl. Berlin; Leipzig: W. de Gruyter Co, 1927. Рус. пер.: Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
2. Schmidt E. Über die Definition des Begriffs der Länge krummer Linien.— Math. Ann., 1901, Bd. 55, S. 163—176.
3. Carathéodory K. Über das lineare Mass von Punktmengen.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1914, Okt. 24.
4. Hausdorff F. Dimension und äusseres Mass.— Math. Ann., 1918, Bd. 79, S. 157—172.
5. Rademacher H. Über partielle und totale Differentierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformationen der Doppelintegrale.— Math. Ann., 1918, Bd. 79, S. 340—359.
6. Lebesgue H. Thèse.— Ann. mat. pura ed appl. 3, 1902, vol. 7, p. 315.
7. Rado T. Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen.— Math. Ann., 1928, Bd. 100, S. 445—479.
8. Rademacher H. Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen. II.— Math. Ann., 1920, Bd. 81, S. 52—63.

22

О ТОЧКАХ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ
ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ *

Совместно с И. Я. Верченко

Пусть $f(P)$ есть ограниченная ($|f(P)| \leq M$) однозначная действительная функция, определенная во всех точках P плоской области G . Рассмотрим точку P_0 области G и полупрямую L , начинающуюся в точке P_0 и образующую угол α с положительным направлением оси X . Обозначим через $\Phi(P_0, \alpha)$ верхнюю грань верхних пределов $f(P)$ при приближении P к P_0 по всевозможным касательным к L путям. $\Phi(P_0, \alpha)$ называется *верхним пределом $f(P)$ в точке P_0 по направлению α* . Аналогично определяется *нижний предел $\varphi(P_0, \alpha)$ функции $f(P)$ в точке P_0 по направлению α* . $\Phi(P_0, \alpha)$ как функция α полунепрерывна сверху, а $\varphi(P_0, \alpha)$ полунепрерывна снизу; эти две функции α в значительной мере характеризуют поведение функции $f(P)$ в окрестности точки P_0 .

1. Для того чтобы $f(P)$ была непрерывна в точке P_0 , необходимо и достаточно, чтобы для всех α

$$\Phi(P_0, \alpha) = \varphi(P_0, \alpha) = f(P_0).$$

2. P_0 есть точка разрыва первого рода функции $f(P)$, если $f(P)$ не непрерывна в точке P_0 и для всех α

$$\Phi(P_0, \alpha) = \varphi(P_0, \alpha).$$

Множество точек разрыва первого рода произвольной функции $f(P)$ не более чем счетно.

Доказательство. Обозначим через $\omega(P_0)$ колебание $f(P)$ в точке P_0 . Пусть E_n есть множество тех точек разрыва первого рода, для которых колебание функции $f(P)$ превышает $1/n$. Легко показать, что E_n не содержит ни одной своей предельной точки и поэтому не более чем счетно. Следовательно, и множество всех точек разрыва первого рода

$$E = \sum_n E_n$$

не более чем счетно.

3. P_0 есть нормальная точка функции $f(P)$, если для всех α

$$\Phi(P_0, \alpha) = \Phi(P_0) \geq f(P_0) \geq \varphi(P_0) = \varphi(P_0, \alpha),$$

т. е. если $\Phi(P_0, \alpha)$ и $\varphi(P_0, \alpha)$ не зависят от α и $f(P_0)$ лежит между ними. Каждая точка непрерывности функции $f(P)$ есть нормальная точка. Нормальная точка, не являющаяся точкой непрерывности, называется точкой нормального разрыва.

Т е о р е м а. Множество не нормальных точек произвольной функции $f(P)$ может быть расположено на счетном множестве спрямляемых кривых.

Отсюда следует, в частности, что множество не нормальных точек имеет плоскую меру нуль. Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном предположении, справедливом в случае ограниченной области G .

Рассмотрим сектор круга с радиусом ρ и центром P_0 , лежащий между направлениями $a - \delta$ и $a + \delta$, и обозначим через $M(P_0, \alpha, \delta, \rho)$ верхнюю грань значений $f(P)$ во внутренних точках этого сектора. Для любых $\alpha, \delta > 0, \rho > 0, a > b$ множество тех точек P_0 , в которых

$$\bar{f}(P_0) \geq \alpha, \quad M(P_0, \alpha, \delta, \rho) \leq b,$$

может быть расположено на конечном числе спрямляемых кривых¹.
Москва, 21 декабря 1933 г.

23

О НОРМИРУЕМОСТИ ОБЩЕГО ЛИНЕЙНОГО
ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА *

Мы исходим из следующего определения линейного топологического пространства: множество E является *линейным топологическим пространством*, если:

1) для элементов из E определены операции сложения и умножения на действительное число, которые удовлетворяют аксиомам линейного пространства¹;

2) для любого подмножества A множества E определено его замыкание $\bar{A} \subset E$, которое удовлетворяет трем аксиомам топологического пространства²;

3) операции сложения и умножения непрерывны.

Открытые множества топологического пространства в смысле примечания², рассматриваемые как окрестности содержащихся в

¹ $\bar{f}(P_0)$ обозначает здесь верхний предел $f(P)$ в точке P_0 , т. е. максимум $f(P_0)$ и $\Phi(P_0) = \sup \Phi(P_0, \alpha)$. Аналогично через $\underline{f}(P_0)$ обозначаем нижний предел $f(P)$ в точке P_0 . Тогда $\omega(P_0) = \bar{f}(P_0) - \underline{f}(P_0)$.

* Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes.— Stud. math., 1934, vol. 5, p. 29—33. Перевод С. Б. Стечкина.

¹ См.: Banach S. Theorie des operations linéaires. Warszawa, 1931. Chap. 2.

² См., например: Alexandroff P. Über stetige Abbildungen kompakter Räume.— Math. Ann., 1926, Bd. 96, S. 555. Эти аксиомы звучат следующим образом:
1. Каждое подмножество $A \subset E$, состоящее не более чем из одного элемента, совпадает со своим замыканием.

2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ для всякого множества $A \subset E$.

3. $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$.

них точек, удовлетворяют, вообще говоря³, трем первым аксиомам Хаусдорфа и первой аксиоме отделимости. Однако в нашем случае линейных топологических пространств, как вообще в случае топологических групп, автоматически выполняются также вторая и третья аксиомы отделимости, т. е. пространство является регулярным. Этот факт будет доказан в § 1. В связи с этим представляется совершенно естественным развивать общую теорию линейных функционалов и операторов именно в линейных топологических пространствах. Однако значительная часть этой теории развита в настоящее время только для случая *нормированных пространств*, т. е. таких пространств, в которых каждому элементу x сопоставлено в качестве нормы неотрицательное число $|x|$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$|ax| = |a| |x|, \quad (1)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|; \quad (2)$$

причем топологические свойства пространства определяются расстоянием между двумя элементами, которое определяется формулой

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (3)$$

Возникает вопрос: какие линейные топологические пространства можно нормировать? Иными словами, при каких условиях можно ввести в линейном топологическом пространстве норму, удовлетворяющую условиям (1), (2), чтобы при помощи (3) она определяла а priori заданные топологические отношения пространства. Для ответа на этот вопрос мы используем следующее определение⁴.

О п р е д е л е н и е. Множество $A \subset E$ называется *ограниченным*, если для любой последовательности $\{a_n\}$ действительных чисел и любой последовательности элементов $\{x_n\}$, принадлежащих A , из $a_n \rightarrow 0$ вытекает $a_n x_n \rightarrow 0$ (где 0 во втором соотношении обозначает нулевой элемент пространства E).

Это определение позволяет нам сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а. Для нормируемости пространства E необходимо и достаточно, чтобы в E существовала по крайней мере одна ограниченная выпуклая окрестность нуля.

При этом множество $A \subset E$ называется *выпуклым*, если из $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ следует

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in A. \quad (4)$$

Доказательству этой теоремы посвящен § 2.

³ См.: Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Berlin, 1927, S. 227—229.

⁴ Mazur S., Orlicz W. Über Folgen linearer Operationen.— Stud. math., 1933, vol. 4, p. 152—157, особенно с. 152.

§ 1

В этом параграфе E может быть произвольной топологической группой, т. е. произвольным топологическим пространством, в котором определено сложение, удовлетворяющее всем аксиомам группы, и сложение и вычитание непрерывны. Мы докажем, что тогда E регулярно, иными словами, что для любой окрестности $U(x_0)$ элемента $x_0 \in E$ найдется окрестность $V(x_0)$, которая принадлежит $U(x_0)$ вместе со своим замыканием. При помощи преобразования $x' = x - x_0$ эта задача сводится к случаю $x_0 = 0$.

Итак, пусть задана окрестность нуля U . Так как $0 + 0 = 0$, то в силу непрерывности сложения можно найти такую окрестность V нуля, что из $x' \in V$, $x'' \in V$ следует $x' + x'' \in U$. Пусть теперь $x \in \bar{V}$. Так как $x - x = 0$ и вычитание непрерывно, то существует такая окрестность $W(x)$ точки x , что из $x' \in W(x)$, $x'' \in W(x)$ следует $x' - x'' \in V$. Найдем теперь точку x^* , которая принадлежит как $W(x)$, так и V (x^* существует, так как $x \in \bar{V}$). Так как x и x^* принадлежат окрестности $W(x)$, то $x - x^* \in \bar{V}$. Так как, далее, $x - x^*$ и x^* принадлежат окрестности V , то $x = (x - x^*) + x^*$ принадлежит окрестности U , откуда следует

$$\bar{V} \in U, \quad (5)$$

и т. д.

§ 2

Необходимость условий нашей теоремы очевидна, так как состоящий из всех точек с $|x| < 1$ шар образует выпуклую ограниченную окрестность нуля. Остается доказать, что условия достаточны. Пусть U — выпуклая ограниченная окрестность нуля. Обозначим через aU множество точек $x = ax'$, для которых $x' \in U$. Для любого $a \neq 0$ множество aU есть ограниченная выпуклая окрестность нуля. Положим по определению

$$|x| = \sup |a|, \quad x \in E \setminus aU, \quad (6)$$

где знак $\sup$ распространяется на все a , для которых выполняется условие $x \in E \setminus aU$.

Сразу видно, что определенная формулой (6) норма удовлетворяет условию (1).

Покажем теперь, что выполняется также и условие (2). Для этого заметим прежде всего, что из $x \in aU$ и $y \in aU$ при $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ вытекает

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in aU$$

и, следовательно, из $|x| \leq \alpha$ и $|y| \leq \alpha$ имеем

$$\left| \frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \right| \leq \alpha.$$

Полагая $|x| = \lambda$, $|y| = \mu$, $\lambda + \mu = \alpha$, $x' = \frac{\alpha}{\lambda} x$, $y' = \frac{\alpha}{\mu} y$, получаем

$$|x'| = \frac{\alpha}{\lambda} |x| = \alpha, \quad |y'| = \frac{\alpha}{\mu} |y| = \alpha,$$

$$|x + y| = \left| \frac{\lambda x' + \mu y'}{\lambda + \mu} \right| \leq \alpha = \lambda + \mu = |x| + |y|.$$

Остается показать, что расстояние $\rho(x, y) = |x - y|$ определяет те же предельные отношения, что и в пространстве E . Рассмотрим точку 0 и докажем, что множества aU , $a > 0$, образуют полную систему окрестностей нуля. Пусть W — произвольная окрестность нуля; надо найти такое $a > 0$, чтобы aU содержалось в W . Если бы это было невозможно, то можно было бы найти такие последовательности $a_n \rightarrow 0$ и $x_n \in U$, что для всех n точки $a_n x_n$ лежат вне W и, значит, последовательность $a_n x_n$ не стремится к нулю, что противоречит ограниченности U .

Множества aU образуют, следовательно, полную систему окрестности нуля. Сразу видно, что шар $|x| < a$ содержится во множестве aU . Поэтому если будет доказано, что 0 является внутренней точкой каждого шара $|x| < a$, $a > 0$, то этим будет установлено, что система шаров $|x| < a$, $a > 0$, эквивалентна полной системе окрестностей нуля aU . Но каждый шар $|x| < a$, $a > 0$, содержит окрестность нуля, равную пересечению $^{5} \frac{1}{2}aU$ и $^{-1/2}aU$. Действительно, если одновременно $x \in \frac{1}{2}aU$ и $x \in -\frac{1}{2}aU$, то x будет лежать в каждой окрестности bU с $|b| \geq a/2$, откуда следует $|x| \leq \frac{1}{2}a < a$.

При помощи преобразования $x' = x - x_0$ мы убеждаемся, что шары с центром в x_0 эквивалентны полной системе окрестностей этой точки. Таким образом, наша теорема полностью доказана.

26 мая 1934 г.

24

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ О ТОЧКАХ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Совместно с И. Я. Верченко

В предыдущей нашей заметке ¹ было доказано, что за исключением точек, лежащих на счетном множестве спрямляемых кривых, все точки области существования G произвольной ограниченной

⁵ Было бы нетрудно убедиться, что шары $|x| < a$ совпадают с пересечением $aU \cap (-aU)$.

* ДАН СССР, 1934, т. 4, № 7, с. 361—362. Представлено Н. Н. Лузиным.

¹ ДАН СССР, 1934, т. 1, № 3, с. 104—106 (см. № 22 наст. изд.).

функции двух переменных являются нормальными точками, т. е. для них имеют место соотношения

$$\Phi(P_0, \alpha) = \Phi(P_0) \geq f(P_0) \geq \varphi(P_0) = \varphi(P_0, \alpha).$$

Из не нормальных точек может быть выделен класс линейных точек. Именно будем называть точку P_0 *линейной точкой* функции $f(P)$, если существует такая проходящая через P_0 прямая R , что как $\Phi(P_0, \alpha)$, так и $\varphi(P_0, \alpha)$ принимают по обоим направлениям вдоль R равные значения, а по обе стороны от R постоянны. Обозначая через ξ положительное направление прямой R , мы можем записать условия линейности точки P_0 следующим образом:

$$\Phi(P_0, \xi) = \Phi(P_0, \xi + \pi) = \Phi_0(P_0),$$

$$\varphi(P_0, \xi) = \varphi(P_0, \xi + \pi) = \varphi_0(P_0),$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(P_0, \alpha) &= \Phi_1(P_0) \\ \varphi(P_0, \alpha) &= \varphi_1(P_0) \end{aligned} \right\}, \quad \xi < \alpha < \xi + \pi,$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(P_0, \alpha) &= \Phi_2(P_0) \\ \varphi(P_0, \alpha) &= \varphi_2(P_0) \end{aligned} \right\}, \quad \xi + \pi < \alpha < \xi + 2\pi.$$

Легко видеть, что при этом неизбежно

$$\Phi_0(P_0) \geq \Phi_1(P_0) \geq \varphi_1(P_0) \geq \varphi_0(P_0),$$

$$\Phi_0(P_0) \geq \Phi_2(P_0) \geq \varphi_2(P_0) \geq \varphi_0(P_0).$$

Линейные ненормальные точки могут как показывают элементарные примеры, заполнять целиком спрямляемые кривые. В противоположность этому имеет место следующая

Т е о р е м а. *Множество нелинейных точек произвольной ограниченной функции $f(P)$ имеет линейную меру нуль.*

Так как нелинейные точки в то же время и не нормальны и, следовательно, все лежат на счетном числе спрямляемых кривых, то для доказательства этой теоремы достаточно установить, что множество нелинейных точек имеет лебеговскую меру, равную нулю на любой спрямляемой кривой.

В заключение укажем на применения полученных результатов к изучению плоских множеств в направлении, начатом Булиганом.

Пусть теперь $f(P)$ есть характеристическая функция плоского точечного множества E , т. е. функция, равная единице на E и нулю вне E . В этом случае $\Phi(P_0, \alpha)$ может принимать только два значения — нуль и единица. Множество $C(P_0)$, являющееся суммой всех полупрямых, выходящих из P_0 , для которых $\Phi(P_0, \alpha) = 1$, названо Булиганом *контингенцией* множества E в точке P_0 . Понятие контингенции является естественным обобщением понятия касательной. Из полунепрерывности (сверху) функции $\Phi(P_0, \alpha)$ непосредственно вытекает замкнутость контингенции $C(P_0)$.

В изолированных точках множества E контингенция его пуста, так же как во всех точках, лежащих на положительном расстоянии от E (последние точки мы будем называть внешними точками для E). Напротив, во всех предельных точках множества E контингенция содержит хотя бы одну полупрямую. Если предельная точка множества E является нормальной точкой функции $f(P)$, то, очевидно контингенция множества E в ней содержит всю плоскость. В линейных ненормальных точках функции $f(P)$, помимо случая контингенции, заполняющей всю плоскость, могут встретиться еще два существенно различных случая: или

$$\Phi_0(P_0) = 1, \quad \Phi_1(P_0) = \Phi_2(P_0) = 0,$$

или

$$\Phi_0(P_0) = \Phi_1(P_0) = 1, \quad \Phi_2(P_0) = 0.$$

В первом из них контингенция состоит из одной прямой (случай существования касательной), во втором — из полуплоскости. В соответствии с этими различиями мы введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. Множество E имеет в точке P_0 касательную, если контингенция $C(P_0)$ этого множества состоит из одной прямой.

О п р е д е л е н и е 2. Точка P_0 принадлежит правильному краю множества E , если $C(P_0)$ состоит из полуплоскости.

О п р е д е л е н и е 3. Точка P_0 есть недостижимая точка множества E , если $C(P_0)$ состоит из полной плоскости.

О п р е д е л е н и е 4. Точка P_0 является внешней по отношению к множеству E , если она лежит на положительном расстоянии от E .

О п р е д е л е н и е 5. Во всех остальных случаях точка P_0 называется иррегулярной точкой множества E .

Т е о р е м а. Множество точек, в которых множество E имеет касательную, множество точек регулярного края E и множество иррегулярных точек E лежат на счетном множестве спрямляемых кривых. Множество иррегулярных точек имеет на каждой из этих кривых линейную меру нуль в смысле Лебега. Остальные точки плоскости являются недостижимыми или внешними для E .

Москва, 3 ноября 1934 г.

25

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ
ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ*

В недавно опубликованной заметке И. П. Натансон [1] доказал, что ряды по ортогональным полиномам при любом суммируемом положительном весе $p(x)$ сходятся почти всюду к разлагаемой в ряд функции $f(x)$, если только эта последняя удовлетворяет условию Липшица с показателем α , большим $1/2$. Нашей задачей является показать, что тот же результат справедлив для каждой функции, удовлетворяющей условию Липшица с произвольно малым положительным показателем α . Мы доказываем даже несколько больше; именно для сходимости почти всюду упомянутого выше ряда оказывается достаточным существование таких констант C и $\varepsilon > 0$, чтобы соотношение

$$|f(x'') - f(x')| \leq \frac{C}{|\lg |x'' - x'| |^{1+\varepsilon}} \quad (1)$$

было справедливо при любых $x'' \neq x'$.

Напомним сначала основные относящиеся к вопросу определения. Пусть на интервале $(0, 1)$ задана положительная суммируемая функция

$$p(x) > 0.$$

Тогда можно и притом единственным способом построить последовательность полиномов

$$\{\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x), \dots,$$

где $\omega_n(x)$ есть полином степени n , удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) \omega_i(x) \omega_j(x) dx &= 0, & i \neq j, \\ \int_0^1 p(x) \omega_i^2(x) dx &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждая функция $f(x)$, определенная на $(0, 1)$, для которой произведение $p(x)f(x)$ суммируемо, порождает ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(x), \quad (3)$$

* ДАН СССР, 1934, т. 1, № 6, с. 291—294.

где

$$c_n = \int_0^1 p(x) f(x) \omega_n(x) dx. \quad (4)$$

Т е о р е м а I. Если функция $f(x)$ удовлетворяет на $(0, 1)$ условию (1), то ряд (3) сходится к $f(x)$ почти всюду на $(0, 1)$.

Доказательство теоремы I будет основано на следующем предположении.

Т е о р е м а II. Ряд (3) сходится почти всюду, если только ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\lg n)^2 \quad (5)$$

сходится.

Теорема II справедлива для произвольных систем функций ω_i , удовлетворяющих соотношениям (2), хотя бы они и не были полиномами, и произвольных коэффициентов c_n независимо от того, получены ли они по формулам (4) исходя от какой-либо функции $f(x)$. Теорема эта является простым следствием известных результатов Г. Радемахера и Д. Е. Меньшова. В самом деле, положим

$$y = \int_0^x p(x) dx. \quad (6)$$

Без существенного ограничения общности можем предполагать, что

$$\int_0^1 p(x) dx = 1.$$

Тогда формула (6) определяет взаимно однозначное и непрерывное преобразование интервала $(0, 1)$ в самого себя. Важно отметить, что при этом преобразовании множества положительной меры на оси x переходят в множества положительной меры на оси y . Положим далее

$$\omega_n(x) = \varphi_n(y).$$

Легко вывести из соотношений (2) соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy &= 0, \quad i \neq j, \\ \int_0^1 \varphi_i^2(y) dy &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Мы видим, таким образом, что функции $\varphi_n(x)$ образуют ортогональную и нормированную систему функций на $(0, 1)$. Г. Радемахером [2] и Д. Е. Меньшовым [3] было указано, что из сходимости ряда

(5) вытекает сходимость почти всюду на $(0, 1)$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(y). \quad (8)$$

В силу сказанного выше отсюда следует непосредственно и сходимость почти всюду ряда (3). В самом деле,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(y),$$

и если бы ряд (3) расходился на множестве положительной меры на оси x , то ряд (8) расходился бы на множестве положительной меры на оси y , что, как сказано, невозможно. Таким образом, теорема II доказана.

Доказательство теоремы I. Если мы докажем, что в условиях теоремы ряд (3) сходится почти всюду, то из общих свойств ортогональных полиномов уже будет следовать, что ряд этот сходится почти всюду именно к функции $f(x)$. Следовательно, нам достаточно доказать в условиях теоремы I, что ряд (3) сходится почти всюду, а для этого по теореме II достаточно доказать сходимость ряда (5).

В силу условия (1) существует такая константа K , что для любого $n > 1$ существует полином $P_n(x)$ степени n , удовлетворяющий на $(0, 1)$ неравенству (см. [4])

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{K}{(\lg n)^{1+\varepsilon}}. \quad (9)$$

Так как сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \omega_k(x)$$

осуществляет наилучшее квадратическое приближение функции $f(x)$ на $(0, 1)$ при весе $p(x)$ среди всех полиномов n -й степени, имеем далее

$$\begin{aligned} R_n &= \int_0^1 p(x) \{f(x) - s_n(x)\}^2 dx \leq \int_0^1 p(x) \{f(x) - P_n(x)\}^2 dx \leq \\ &\leq \frac{K^2}{(\lg n)^{2+2\varepsilon}} \int_0^1 p(x) dx = \frac{K^2}{(\lg n)^{2+2\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из неравенства (10) вытекает непосредственно сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{(\lg n)^{1+\varepsilon}}{n}. \quad (11)$$

Заметим теперь, что

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2, \quad R_{n-1} - R_n = c_n^2.$$

Применяя к ряду (11) преобразование Абеля, заключаем поэтому, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \lambda_n, \quad (12)$$

где

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lg k)^{1+\varepsilon}}{k},$$

также сходится. Но так как λ_n возрастают быстрее, чем $(\lg n)^2$,

то из сходимости ряда (12) вытекает сходимость ряда (5). Этим в силу сказанного ранее и заканчивается доказательство теоремы I¹.

21 декабря 1933 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. К вопросу о разложении функций по ортонормированным полиномам. — Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат., 1933, т. 1, с. 85—88.
2. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. — Math. Ann., 1922, Bd. 87, S. 112—138.
3. Menchoff D. Sur les séries de fonctions orthogonales. — Fund. math., 1923, vol. 4, p. 82—105.
4. Jackson D. The theory of approximation. New York, 1930.

¹ Указание на связь, существующую между проблемой, поставленной И. П. Натансоном, и результатом Г. Радемахера, который использован в этой заметке, содержится также в рецензии на работу И. П. Натансона, данной Шохат (см.: Zbl. Math., 1933, Bd. 7, S. 17). Однако эта рецензия содержит ряд утверждений, с трудом поддающихся пониманию. Например, в ней утверждается, что для последовательности функций $\varphi_n(x)$ с интегрируемым квадратом из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 0$$

следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$$

почти всюду на (a, b) . Следующий пример противоречит этому утверждению

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= 0, & \text{если } x < i/2^k \text{ или } x \geq (i+1)/2^k, \\ \varphi_n(x) &= 1, & \text{если } i/2^k \leq x < (i+1)/2^k, \end{aligned}$$

где

$$n = 2^k + 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1.$$

26

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

1. Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Рассмотрим действительную вполне аддитивную функцию множества $F(A)$, определенную на всех B -измеримых подмножествах A пространства E . Для линейного функционала f всегда существует интеграл Лебега—Стилтьеса

$$H(f) = \int_E e^{if(x)} dF(E),$$

где x — переменная, по которой производится интегрирование в пространстве E . Функция $H(f)$ функционала f является по определению характеристической функцией для $F(A)$. Можно показать, что функция множества $F(A)$ полностью определяется соответствующей функцией $H(f)$. Было бы очень интересно найти простую аналитическую формулу, выражающую $F(A)$ через $H(f)$.

2. Обозначая $A + x$ множество точек вида $z = y + x$, где $y \in A$, можно доказать, что соотношение

$$F(A) = \int_E F_1(A - x) dF_2(E)$$

эквивалентно соотношению

$$H(f) = H_1(f) H_2(f).$$

Этот факт может иметь некоторые применения в теории вероятностей. В частности, отсюда можно получить обобщение на линейные пространства фундаментальной предельной теоремы Лапласа. Для этой цели в качестве нормальных рассматриваются распределения $F(A)$ с характеристической функцией

$$H(f) = e^{iM_1(f) - \frac{1}{2}M_2(f, f)},$$

где $M_1(f)$ — произвольная линейная форма, а $M_2(f, f)$ — некоторая квадратичная положительно (или неотрицательно) определенная и симметричная форма.†

3. Пусть теперь

$$M_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \int_E f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dF(E).$$

* La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. — C. r. Acad. sci. Paris, 1935, vol. 200, p. 1717—1718. Представлено Ж. Адамаром. Перевод А. В. Булинского.

Полилинейная форма M_n называется *моментной формой* n -го порядка распределения $F(A)$. В случае конечности интеграла

$$R_{n+1} = \int_E \|x\|^{n+1} d|F(E)|$$

легко получить разложение Тейлора

$$H(f) = 1 + M_1(f) + \frac{1}{2} M_2(f, f) + \frac{1}{6} M_3(f, f, f) + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} M_n(f, f, \dots, f) + \frac{1}{(n+1)!} \theta R_{n+1} \|f\|^{n+1} (|\theta| \leq 1).$$

4. Пусть, наконец,

$$y = Ux$$

— линейное преобразование пространства E и

$$G(A) = F\{U(A)\}.$$

Для моментов N_n распределения $G(A)$ имеет место формула

$$N_n(f) = M_n\{V(f)\}.$$

Здесь $N_n(f) = N_n(f, f, \dots, f)$, $M_n\{V(f)\} = M_n(V(f), V(f), \dots, V(f))$, V — преобразование, сопряженное к преобразованию U .

Таким образом, для последовательности линейных преобразований пространства E возможно изучать поведение моментов N_n различных порядков отдельно при каждом n . Вследствие этого общего факта в квантовой физике изучение распределений в линейных пространствах заменяют изучением моментов второго порядка (рассматриваемых обычно в виде линейных операторов). Если бы мы хотели создать нелинейную квантовую теорию, было бы необходимо рассматривать сами распределения, или их характеристические функции, или, наконец, всю совокупность моментов N_n .

20 мая 1935 г.

27

О ПОРЯДКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА РЯДОВ ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ*

Первая постановка вопроса. Рассмотрим класс всех периодических (с периодом 2π) функций $f(x)$, непрерывных вместе с их производной порядка p ($p \geq 1$), у которых производная $f^{(p)}(x)$ по абсолютной величине меньше или равна 1. Абсолютное

* Zur Größenordnung des restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen. — Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 524—526. Перевод С. А. Теляковского.

значение остаточного члена

$$R_n(f, x) = f(x) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье имеет для этого класса функций конечную не зависящую от x верхнюю грань $C_n^{(p)}$.

Для произвольной периодической p раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ непосредственно получаем неравенство

$$|R_n(f, x)| \leq C_n^{(p)} M_p(f), \quad (1)$$

где $M_p(f)$ — верхняя грань для $|f^{(p)}(x)|$. Константа $C_n^{(p)}$ в неравенстве (1), очевидно, не может быть понижена.

Вторая постановка вопроса. Можно рассматривать также более широкий класс всех периодических функций $f(x)$, непрерывных вместе со своей производной порядка $p-1$, у которых $(p-1)$ -я производная удовлетворяет условию Липшица

$$|f^{(p-1)}(x) - f^{(p-1)}(y)| \leq |x - y|. \quad (2)$$

Верхняя грань $C_n^{(p)}$ величин $|R_n(f, x)|$ для этого более широкого класса функций остается, однако, той же самой, как и при первой постановке задачи.

А. Лебег [1] ¹ показал в 1910 г., что $C_n^{(1)}$ имеет порядок $(\log n)/n$. Наша задача — показать, что вообще

$$C_n^{(p)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right). \quad (3)$$

В случае нечетных p мы докажем также точную формулу

$$C_n^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \right| dx. \quad (4)$$

§ 1

Дальнейшее изложение основывается на второй из указанных выше постановок вопроса. Так как производная $f^{(p-1)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица (2), то почти всюду существует также производная порядка p и $|f^{(p)}(x)| \leq 1$. Наоборот, произвольная измеримая определенная всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, функция $\varphi(x)$, для которой

$$|\varphi(x)| \leq 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0, \quad (5)$$

может быть выбрана в качестве $f^{(p)}(x)$.

¹ Здесь исправлена неточность в ссылке, имевшаяся в оригинале. — *Примеч. пер.*

После этих замечаний положим

$$D_n^{(0)} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin(x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx, \quad (6)$$

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{x-\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad (7)$$

$$D_n^{(2i)}(x) = (-1)^{i+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{2i}}, \quad i \geq 1, \quad (8)$$

$$D_n^{(2i+1)}(x) = (-1)^{i+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{2i+1}}, \quad i \geq 1. \quad (9)$$

Очевидно,

$$\frac{d}{dx} D_n^{(p)}(x) = D_n^{(p-1)}(x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad p \geq 1, \quad (10)$$

$$D_n^{(1)}(2\pi) - D_n^{(1)}(0) = \pi, \quad (11)$$

$$D_n^{(p)}(2\pi) - D_n^{(p)}(0) = 0, \quad p \geq 2. \quad (12)$$

Из известной формулы Дирихле

$$S_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n^{(0)}(x) dx.$$

получаем, повторяя интегрирование по частям, в силу (10)–(12)

$$\begin{aligned} S_n(0) &= f(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) D_n^{(1)}(x) dx = f(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f''(x) D_n^{(2)}(x) dx = \\ &= f(0) + \frac{(-1)^p}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) D_n^{(p)}(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_n(f, 0) = f(0) - S_n(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) D_n^{(p)}(x) dx, \quad p \geq 1. \quad (13)$$

Заметим еще, что $C_n^{(p)}$ является также верхней гранью для $R_n(f, 0)$, так что $C_n^{(p)}$ равняется верхней грани величин

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) D_n^{(p)}(x) dx \right| \quad (14)$$

для всевозможных измеримых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям (5). Отсюда непосредственно следует неравенство

$$C_n^{(p)} \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx. \quad (15)$$

В случае нечетных p в силу (7) и (9) $D_n^{(p)}(x)$ является нечетной функцией от x . Полагая в этом случае $\varphi(x) = +1$ во всех точках, в которых $D_n^{(p)} > 0$, и $\varphi(x) = -1$, если $D_n^{(p)} < 0$, получим функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям (5). Для этой функции $\varphi(x)$ имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) D_n^{(p)}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx.$$

Итак, мы видим, что в случае нечетных p

$$C_n^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx. \quad (16)$$

Таким образом, для нечетных p доказана формула (4).

§ 2

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ $C_n^{(p)}$

В СЛУЧАЕ $p = 2i + 1$ ($i \geq 0$)

Речь идет об асимптотической оценке интеграла (16). Положим

$$\Phi_k(x) = -\frac{\cos \frac{2k+1}{2}x}{2 \sin(x/2)}, \quad \Psi_k(x) = -\frac{\sin(k+1)x}{4(\sin x/2)^2},$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p},$$

$$\Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1).$$

При этом

$$\Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x) = \sin kx, \quad \Psi_k(x) - \Psi_{k-1}(x) = \Phi_k(x).$$

Преобразование Абеля приводит к соотношению

$$\begin{aligned} D_n^{(p)}(x) &= (-1)^{i+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} = (-1)^{i+1} \left[-\frac{1}{(n+1)^p} \Phi_n(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) \Phi_k(x) \right] = (-1)^{i+1} \left[-\frac{1}{(n+1)^p} \Phi_n(x) - \right. \\ &\quad \left. - \Delta(n+1) \Psi_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \Psi_k(x) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим теперь, что ²

$$|D_n^{(p)}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{1/n} |D_n^{(p)}(x)| dx + \int_{2\pi-1/n}^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx = O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

а также, что

$$\int_{1/n}^{2\pi-1/n} |\Psi_n(x)| dx = O(n),$$

$$\Delta(k) = O(1/k^{p+1}), \quad \Delta^2(k) = O(1/k^{p+2}),$$

поэтому из (17) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx - \frac{1}{(n+1)^p} \int_{1/n}^{2\pi-1/n} |\Phi_n(x)| dx \right| \leq \\ & \leq \int_0^{1/n} |D_n^{(p)}(x)| dx + \int_{2\pi-1/n}^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx + \\ & + \Delta(n+1) \int_{1/n}^{2\pi-1/n} |\Psi_n(x)| dx + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(x) \int_{1/k}^{2\pi-1/k} |\Psi_k(x)| dx = \\ & = O\left(\frac{1}{n^p}\right) + O\left(\frac{1}{n^p}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) O(n) + \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) O(k) = O\left(\frac{1}{n^p}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, подобно тому как для констант Лебега

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin(x/2)} \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(0)}(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1), \quad (19)$$

² При $p = 1$ оценка $|D_n^{(1)}(x)| = O(1)$ вытекает из (7) в силу равномерной ограниченности частных сумм ряда $\sum \frac{\sin kx}{k}$. — Примеч. пер.

доказывается, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{2\pi-1/n} |\Phi_n(x)| dx = \frac{1}{n} \int_{1/n}^{2\pi-1/n} \left| \frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin(x/2)} \right| dx = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1). \quad (20)$$

Из (18) и (20) получаем окончательно

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right). \quad (21)$$

Таким образом, в силу (21) и (16) соотношение (3) доказано для нечетных p .

§ 3
АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ $C_n^{(p)}$
В СЛУЧАЕ $p = 2i$ ($i \geq 1$)

Положим в этом случае

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin(x/2)} \right)^2$$

и заметим, что

$$D_k^{(0)}(x) - D_{k-1}^{(0)}(x) = \cos kx, \quad \sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x) = D_k^{(0)}(x).$$

Тогда с помощью преобразования Абеля получаем

$$\begin{aligned} D_n^{(p)}(x) &= (-1)^{i+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{2i}} = \\ &= (-1)^{i+1} \left[-\frac{1}{(n+1)^p} D_n^{(0)}(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) D_k^{(0)}(x) \right] = \\ &= (-1)^{i+1} \left[-\frac{1}{(n+1)^p} D_n^{(0)}(x) - \Delta(n+1) \sigma_n(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \sigma_k(x) \right] = \frac{(-1)^i}{(n+1)^p} D_n^{(0)}(x) + Q_n^{(p)}(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим теперь, что, как известно,

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)| dx = O(n).$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |Q_n^{(p)}(x)| dx &\leq \Delta(n+1) \int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)| dx + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \int_0^{2\pi} |\sigma_k(x)| dx = \\ &= O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) O(n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) O(k) = O\left(\frac{1}{n^p}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, из (15), (22), (19) и (23) следует оценка

$$\begin{aligned} C_n^{(p)} &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(p)}(x)| dx \leq \frac{1}{\pi(n+1)^p} \int_0^{2\pi} |D_n^{(0)}(x)| dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} |Q_n^{(p)}(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть, наконец, $\varphi(x) = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi/(2n+1)$ и $\varphi(x) = +1$ или $\varphi(x) = -1$ для $x > 2\pi/(2n+1)$, смотря по тому, является ли $\sin \frac{2n+1}{2}x$ положительным или отрицательным. Эта функция удовлетворяет условиям (5). При этом

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) D_n^{(0)}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/(2n+1)}^{2\pi} |D_n^{(0)}(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1)$$

и в силу (22) и (23)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) D_n^{(p)}(x) dx \right| &= \frac{1}{\pi(n+1)^p} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) D_n^{(0)}(x) dx \right| + O\left(\frac{1}{n^p}\right) = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует в силу определения $C_n^{(p)}$, что

$$C_n^{(p)} \geq \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right). \quad (26)$$

Вместе оценки (26) и (24) приводят к доказательству соотношения (3) также и в случае четных p .

Клязьма, близ Москвы, 30 ноября 1934 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz.— Bull. Soc. math. France, 1910, vol. 38, p. 184—210.

28

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ
ЗАДАННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КЛАССА *

1. Общая постановка вопроса. Мы предполагаем, что для рассматриваемых функций введено некоторое определение расстояния. Если рассмотреть задачу о приближении функции f линейными формами

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

с фиксированными функциями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, то возникнет задача (задача Чебышева): с помощью подходящего выбора коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$ сделать возможно малым расстояние $\rho(f, \varphi)$. Не обсуждая вопросов существования и единственности, обозначим через $E_n(f)$ нижнюю грань расстояний $\rho(f, \varphi)$. Для класса F функций f обозначим, далее, через $E_n(F)$ верхнюю грань величин $E_n(f)$ для всех f из F . Величина $E_n(F)$ определяется классом F и функциями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Мы ставим теперь новую задачу: для заданных F и n доставить минимум для $E_n(F)$ за счет выбора функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Независимо от существования этого минимума обозначим через $D_n(F)$ нижнюю грань $E_n(F)$.

Таким образом, каждому функциональному классу F соответствует последовательность вполне определенных неотрицательных (возможно, бесконечных) величин

$$D_1(F) \geq D_2(F) \geq \dots \geq D_n(F) \geq \dots$$

Если минимум $D_n(F)$ действительно достигается на $E_n(F)$, то можно поставить также вопрос о единственности, именно в следующем смысле: *определяются ли функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, которые доставляют минимум $D_n(F)$, с точностью до некоторого линейного преобразования однозначно или нет?*

2. Специализация. Далее мы рассматриваем только функции одного действительного переменного, определенные на отрезке $[0, 1]$. В качестве расстояния $\rho(f, \varphi)$ вводим

$$\rho(f, \varphi) = \left[\int_0^1 (f - \varphi)^2 dx \right]^{1/2}.$$

При этих предположениях нам удалось получить простые результаты для следующих классов функций:

* Ueber die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. — Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 107—110. Перевод С. А. Теляковского.

F_p ($p \geq 1$) состоит из всех p раз дифференцируемых функций f , для которых

$$\int_0^1 \{f^{(p)}\}^2 dx \leq 1,$$

F_p^* ($p \geq 1$) состоит из всех функций из F_p , которые удовлетворяют условиям периодичности $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$, $\dots$, $f^{(p-1)}(0) = f^{(p-1)}(1)$.

3. Результаты. В случае F_p^* имеем

$$D_{2m-1}(F_p^*) = D_{2m}(F_p^*) = \left(\frac{1}{2\pi m}\right)^p, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

при этом минимум $D_n(F_p^*)$ всегда достигается; наилучшие функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ в случае $n = 2m + 1$ определяются с точностью до линейного преобразования однозначно¹, а именно ими являются

$$1, \quad \sqrt{2} \sin 2\pi kx, \quad \sqrt{2} \cos 2\pi kx, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

В случае F_1 имеем

$$D_n(F_1) = \frac{1}{\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

причем наилучшие функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ при каждом n определяются с точностью до линейного преобразования однозначно, ими являются

$$1, \quad \sqrt{2} \cos \pi kx, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Результаты в случае F_p при произвольном p нельзя выразить так просто: они зависят от некоторой специальной, своей для каждого p ортонормированной системы функций

$$U_{p1}, U_{p2}, \dots, U_{pr}, \dots,$$

которая будет определена в п. 4. Будет доказано, что в случае F_p

$$D_n(F_p) = +\infty, \quad n = 1, 2, \dots, p - 1,$$

$$D_n(F_p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n-p+1}^{(p)}}}, \quad n = p, p + 1, p + 2, \dots,$$

где $\lambda_k^{(p)}$ — собственные числа, определяемые в п. 4. При этом асимптотически (при фиксированном p)

$$D_n(F_p) = \left(\frac{1}{\pi n}\right)^p + O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}.$$

¹ Предположения о единственности наилучших функций, высказанные в этой работе, не оправдались, см. комментарий к этой статье. — *Примеч. пер.*

В случае F_p наилучшие функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ при $n \geq p$ определяются с точностью до линейного преобразования однозначно, ими являются первые n функций U_{pk} , $k = 1, 2, \dots, n$. При $p = 1$ этот результат согласуется со сказанным выше, так как

$$U_{11} = 1, \quad U_{1n} = \sqrt{2} \cos \pi (n-1)x, \quad n = 2, 3, \dots$$

4. Определение и свойства функций U_{pn} . Для $n = 1, 2, \dots, p$ положим U_{pn} равными многочленам Лежандра степени $n-1$, нормированным условием

$$\int_0^1 U_{pn}^2 dx = 1.$$

Для $n = p + k$, $k > 0$, определим U_{pn} как таким же образом нормированное решение системы

$$(-1)^p y^{(2p)} - \lambda y = 0, \quad (A)$$

$$y_{x=0,1}^{(p)} = y_{x=0,1}^{(p+1)} = \dots = y_{x=0,1}^{(2p-1)} = 0,$$

соответствующее k -му отличному от нуля собственному числу $\lambda_k^{(p)}$ системы (A) (при этом мы, само собой разумеется, считаем, что $\lambda_k^{(p)}$ упорядочены в порядке их возрастания). Это определение предполагает, что все отличные от нуля собственные числа задачи (A) положительны и просты, что действительно имеет место².

Из свойств системы $\{U_{pn}\}$ (при фиксированном p) мы хотим отметить следующие:

1. Эта система ортонормирована и полна.
2. Производные порядка p

$$u_{pn} = \frac{d^p}{dx^p} U_{pn}$$

образуют ортогональную (хотя и не нормированную) систему функций

3. Для каждой p раз дифференцируемой функции f , для которой

$$\int_0^1 \{f^{(p)}\}^2 dx < +\infty,$$

из

$$f \sim \sum a_n U_{pn}$$

следует справедливость разложения

$$f^{(p)} \sim \sum a_n u_{pn}.$$

² См. работу М. Г. Крейна [1] (находившуюся тогда в печати. — Примеч. пер.). Я благодарю М. Г. Крейна за соответствующее письменное сообщение.

Отметим, что свойствами 1—3 система $\{U_{pn}\}$ определяется однозначно с точностью до замены многочленов Лежандра какими-либо другими p ортонормированными многочленами степени $< p$.

Наконец, упомянем еще, что при $n \leq p$ функции u_{pn} тождественно равны нулю, а при $n = p + k$, $k > 0$, u_{pn} является тем решением системы

$$(-1)^p y^{(2p)} - \lambda y = 0, \quad (B)$$

$$y_{x=0,1} = y'_{x=0,1} = \dots = y^{(p-1)}_{x=0,1} = 0,$$

которое соответствует k -му отличному от нуля собственному числу $\lambda_k^{(p)}$ (собственные числа задач (A) и (B), очевидно, совпадают). Вместо обычных условий нормировки здесь принимается условие

$$\int_0^1 u_{pn}^2 dx = \lambda_k^{(p)}.$$

5. Геометрический смысл доказательства. Сначала сделаем несколько замечаний к общей постановке вопроса. Множество функций $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$ при фиксированных функциях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ образует n -мерное линейное подпространство Φ_n пространства R всех рассматриваемых функций. $E_n(f)$ является расстоянием точки f от множества Φ_n . Величина $E_n(F)$ является, таким образом, естественной мерой уклонения множества F от линейного пространства Φ_n . Следовательно, нижнюю грань $D_n(F)$ величин $E_n(F)$ можно назвать n -м *поперечником* множества F .

Наши специальные рассуждения относятся к гильбертову пространству H всех интегрируемых с квадратом функций. Множества F_p и F_p^* можно понимать как эллиптические цилиндры этого пространства. Геометрически почти очевидно, что в этом случае минимум $D_n(F)$ величин $E_n(F)$ достигается, если рассмотреть n -мерное линейное пространство Φ_n , натянутое на n наибольших главных осей цилиндра F . Эти главные оси легко находятся с помощью классических приемов вариационного исчисления. В частности, в случае F_p направления главных осей совпадают с определенными выше функциями U_{pk} . Длины соответствующих полуосей при $k \leq p$ бесконечны, а при $k = p + i$, $i > 0$, равны величинам $1/\sqrt{\lambda_i^{(p)}}$.

1 мая 1935 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Об одном специальном классе дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1935, т. 2, с. 345—349.

29

О ЗАКОНАХ ДВОЙСТВЕННОСТИ
В КОМБИНАТОРНОЙ ТОПОЛОГИИ *

1. Граница r -мерного алгебраического комплекса является $(r - 1)$ -мерным алгебраическим комплексом [2]. Одновременно с операцией перехода к границе мы рассмотрим двойственную операцию, которая каждому r -мерному алгебраическому комплексу сопоставляет $(r + 1)$ -мерный. Полученная при этом теория, двойственная к обычной теории гомологий, дает новое понимание классических теорем двойственности Пуанкаре и Александера. Она верна не только для обычных комплексов, но и для более общих структур, которые мы вместе с А. В. Таккером [3] назовем *клеточными пространствами*. При этом мы ограничимся рассмотрением только конечных клеточных пространств. Такое пространство является по определению конечной системой элементов (клеток); каждой клетке соответствует целое число — ее размерность; выделены некоторые пары клеток, размерности которых отличаются на 1 и которые будут называться *взаимно инцидентными*. Инцидентность клеток x^r и x^{r-1} размерностей r и $r - 1$ будет обозначаться $x^r \rightarrow x^{r-1}$.

2. Клеточное пространство R называется *ориентируемым* [4], если каждой r -мерной клетке x^r из R соответствует другая r -мерная клетка этого пространства, обозначаемая $-x^r$, при этом: 1) $-(-x^r) = x^r$; 2) из $x^r \rightarrow x^{r-1}$ следует $-x^r \rightarrow -x^{r-1}$; 3) обозначения $x^r \rightarrow x^{r-1}$ и $x^r \rightarrow -x^{r-1}$ несовместны.

3. r -мерный алгебраический комплекс есть функция $f(x^r)$, которая каждой клетке x^r ориентированного клеточного пространства R ставит в соответствие элемент фиксированной абелевой группы J , называемой *областью коэффициентов*, причем должно выполняться условие $f(-x^r) = -f(x^r)$. Читатель сам заметит, что эта точка зрения идентична обычному пониманию алгебраического комплекса как линейной формы с клетками в качестве переменных и с коэффициентами из данной области [5]. Однако у нее есть преимущество большей логической простоты, которое является удобным, особенно в случае бесконечных клеточных пространств. Эти преимущества выявляются и в дальнейшем при написании индексов размерности и знаков функции; таким образом, r -мерный алгебраический комплекс (на данном ориентируемом клеточном пространстве) можно обозначить $f^r(x^r)$. Совокупность r -мерных алгебраических комплексов над данной областью коэффициентов образует абелеву группу, которую мы обозначим $F^r(R, J)$.

* Ueber die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie.— Mat. сб., 1936, т. 1, с. 97—102. Перевод О. В. Локуциевского. См. [1].

4. Определим теперь для произвольной $f^r = f^r(x^r)$:

$$g_u f^r = f^{r-1}(x^{r-1}) = \sum_{x^r \rightarrow x^{r-1}} f^r(x^r);$$

$$g_0 f^r = f^{r+1}(x^{r+1}) = \sum_{x^{r+1} \rightarrow x^r} f^r(x^r);$$

сумма в обоих случаях распространяется на те r -мерные клетки, которые инцидентны x^{r-1} или x^{r+1} . Ясно, что $g_u f^r$ является не чем иным, как границей алгебраического комплекса в обычном понимании этих слов [6].

5. Для дальнейшего построения теории введем следующие аксиомы:

AUJ. Для всех r и всех f^r :

$$g_u g_u f^r = 0.$$

AOJ. Для всех r и всех f^r :

$$g_0 g_0 f^r = 0.$$

Эквивалентность этих двух аксиом можно проверить простым подсчетом. Верно даже большее: если одна из этих аксиом выполняется для целочисленной области коэффициентов, то обе аксиомы верны для любой области коэффициентов.

6. Дадим обычные определения: если $g_u f^r = 0$, то f^r называется *u-циклом*; если $g_0 f^r = 0$, то f^r называется *0-циклом*. Совокупность r -мерных *u*-циклов, соответственно 0-циклов, образует подгруппу $Z_u^r(R, J)$, соответственно $Z_0^r(R, J)$, группы $F^r(R, J)$. Мы говорим, что f_1^r и f_2^r *u-гомологичны* или *0-гомологичны* между собой, если существуют f^{r+1} или f^{r-1} такие, что $g_u f^{r+1} = f_1^r - f_2^r$ или $g_0 f^{r-1} = f_1^r - f_2^r$. Гомологичность будет обозначаться $f_1^r \stackrel{u}{\sim} f_2^r$, соответственно $f_1^r \stackrel{0}{\sim} f_2^r$. Когда f^r гомологичен 0, мы говорим, что f^r «ограничивает», точнее «*u*-ограничивает», соответственно «0-ограничивает». Из AUJ или AOJ следует, что каждый *u*-ограничивающий комплекс является *u*-циклом, а каждый 0-ограничивающий комплекс — 0-циклом. Ограничивающие циклы назовем также границами (*u*-граница, 0-граница).

7. В группах $Z_u^r = Z_u^r(R, J)$ или $Z_0^r = Z_0^r(R, J)$ r -мерных *u*-циклов, соответственно 0-циклов, содержатся подгруппы H_u^r , соответственно H_0^r , границ. Фактор-группы $B_u^r = Z_u^r - H_u^r$ и $B_0^r = Z_0^r - H_0^r$ суть по определению r -мерные группы Бетти данного клеточного пространства по области коэффициентов J ; точнее, B_u^r есть *u*-группа Бетти, а B_0^r — 0-группа Бетти; *u*-группы являются, конечно, теми самыми группами, которые до сих пор обычно понимались под группами Бетти в комбинаторной топологии. Когда есть необходимость указать клеточное пространство или область коэффициентов, то пишем подробно $B_u^r(R, J)$, соответственно $B_0^r(R, J)$.

Без труда можно перейти к рассмотрению пар областей коэффициентов [7] $J' \supset J$ и определить группы $H_u^r(R, J, J')$ и $H_0^r(R, J, J')$, а также

$$B_u^r(R, J, J') = Z_u^r(R, J) - H_u^r(R, J, J')$$

и

$$B_0^r(R, J, J') = Z_0^r(R, J) - H_0^r(R, J, J').$$

8. Ориентированное клеточное пространство называется *клеточным комплексом*, если оно изоморфно (т. е. может быть взаимно однозначно отображено с сохранением размерности, ориентации и инцидентности) совокупности ориентированных клеток евклидова клеточного комплекса (т. е. разбиению на клетки полиэдра). При этом необходимо помнить, что вершины евклидовых клеточных, комплексов надо учитывать дважды — один раз со знаком плюс, а другой — со знаком минус. В соответствии с этим каждый одномерный элемент евклидова клеточного комплекса инцидентен одной положительной и одной отрицательной вершинам.

9. Как известно, u -группы Бетти, т. е. обычные группы Бетти разбитого на клетки полиэдра, топологически инвариантны (это означает, что разбиения на клетки гомеоморфных полиэдров имеют изоморфные группы Бетти). Такая же теорема об инвариантности верна и для 0-групп Бетти. Она выводится [8] из инвариантности u -групп при помощи теорем двойственности, рассматриваемых в п. 14.

10. Два ориентированных клеточных пространства R и R' называются n -двойственными друг другу, если они могут быть так взаимно однозначно отображены одна на другое, что каждая r -мерная клетка x^r одного пространства соответствует одной $(n - r)$ -мерной клетке другого; пары инцидентных клеток переходят в пары инцидентных клеток и, следовательно, если клетки x и x' соответствуют друг другу, то клетки $-x$ и $-x'$ тоже соответствуют. Очевидно существует только одно с точностью до изоморфизма клеточное пространство, которое n -двойственно данному клеточному пространству R ; мы обозначим его $D_n R$. Примем в дальнейшем, что при рассмотрении пары n -двойственных пространств выбирается обычно определенное взаимно однозначное соответствие между ними. Это дает возможность говорить о фиксированном соответствии клеток x и x' , двойственных друг другу.

11. Пользуясь классическим определением n -мерного замкнутого многообразия M^n , легко доказать, что *ориентированное клеточное* пространство R изоморфно разбиению на клетки ориентированного M^n , если и только если R и $D_n R$ являются клеточными комплексами. Если R есть разбиение на клетки M^n , то $D_n R$ — с точностью до изоморфизма двойственное ему в классическом смысле разбиение M^n .

12. Каждому алгебраическому комплексу $f^r(x^r)$ клеточного пространства R соответствует алгебраический комплекс $h^{n-r}(x^{n-r})$ пространства $D_n R$, т. е. функция, которая на клетках x^{n-r} , двойственных к x^r , принимает значения $f^r(x^r)$. Если при этом $f^r = g_u f^{r+1}$, то для только что введенных функций h^{n-r} и h^{n-r-1} верно двойственное соотношение

$$h^{n-r} = g_0 h^{n-r-1}.$$

Аналогично из равенства $f^{r+1} = g_0 f^r$ следует, что

$$h^{n-r-1} = g_u h^{n-r}.$$

Отсюда легко выводится изоморфизм

$$B_u^r(R, J) \approx B_0^{n-r}(D_n R, J).$$

Из этого изоморфизма и из п. 11 следует *первая теорема двойственности* для ориентированного M^n :

$$B_u^r(M^n, J) = B_0^{n-r}(M^n, J).$$

13. Для дальнейших рассуждений, которые в первую очередь будут посвящены связи между группами B_u^r и B_0^r , мы должны рассмотреть случай, когда область коэффициентов J является *топологической* абелевой группой. Тогда группа F^r всех алгебраических комплексов f^r тоже окажется топологической, как топологическое произведение конечного числа сомножителей, каждый из которых совпадает с J (число сомножителей при этом равно числу пар клеток $(x^r, -x^r)$ клеточного пространства R). Топология группы F^r порождает естественным образом топологию в подгруппах $Z_u^r, Z_0^r, H_u^r, H_0^r$, а также обычным путем — в фактор-группах B_u^r и B_0^r .

14. Пусть теперь A и B — две локально бикомпактные топологические абелевы группы, каждая из которых является группой характеров другой (в смысле Понтрягина [9]). Тогда группы $B_u^r(R, A)$ и $B_0^r(R, B)$ локально бикомпактны и удовлетворяют следующему закону взаимности: $B_u^r(R, A)$ и $B_0^r(R, B)$ являются группами характеров одна другой.

Мы наметим доказательство этого утверждения. Пусть a — любой элемент из A , b — любой элемент из B ; тогда b является гомоморфизмом группы A в группу K действительных чисел, приведенных по модулю 1; таким образом, $b(a)$ есть элемент группы K , который мы обозначим как произведение $a \times b$ элементов a и b . Это умножение дистрибутивно с обеих сторон. Алгебраический комплекс из R относительно A (т. е. функцию со значениями в A) обозначим $f^r = f^r(x^r)$, алгебраический комплекс относительно B через $h^r = h^r(x^r)$. Определим умножение комплекса f^r на комплекс

h^r по формуле

$$f^r \times h^r = \sum_{x^r \in R} f^r(x^r) \times h^r(x^r).$$

Это определение позволяет рассматривать f^r как линейный функционал от h^r (со значениями в K); и, конечно, наоборот можно рассматривать h^r как линейный функционал от f^r .

Оказывается (проверяется вычислениями), что всегда

$$f^r \times g_u h^{r+1} = g_0 f^r \times h^{r+1}, \quad (1)$$

$$f^r \times g_0 h^{r-1} = g_u f^r \times h^{r-1}. \quad (1')$$

Таким образом, операторы g_u и g_0 ведут себя как сопряженные в теории линейных операторов.

Дальнейший путь доказательства закона взаимности таков. Группу $F^r(R, B)$ всех h^r можно понимать как группу всех гомоморфизмов группы $F^r(R, A)$ в K , т. е. как группу характеров группы $F^r(R, A)$. Далее, используя (1), можно доказать, что $Z_0^r(R, B)$ является аннулятором [10] $H_u^r(R, A)$ в $F^r(R, B)$. Отсюда вытекает, что $Z_0^r(R, B)$ есть группа характеров фактор-группы $F^r(R, A) - H_u^r(R, A)$. Далее, $Z_u^r(R, A)$ есть аннулятор $H_0^r(R, B)$ в $F^r(R, A)$; следовательно, $H_0^r(R, B)$ является группой характеров $F^r(R, A) - Z_u^r(R, A)$. Из всего этого вытекает, что $B_0^r(R, B) = Z_0^r(R, B) - H_0^r(R, B)$ есть группа характеров группы

$$\begin{aligned} \{F^r(R, A) - H_u^r(R, A)\} - \{F^r(R, A) - Z_u^r(R, A)\} &\approx \\ &\approx Z_u^r(R, A) - H_u^r(R, A) = B_u^r(R, A). \end{aligned}$$

15. Рассмотрим теперь разбиение на клетки сферы S^n . Клетки этого разбиения обозначим через x , а клетки двойственного разбиения — через y . Пусть K — некоторый построенный из клеток x комплекс, а L — множество клеток x , которые не принадлежат K ; обозначим через K' множество клеток y , двойственных клеткам из L . Легко видеть, что K' является комплексом, тогда как L комплекса не образует, но удовлетворяет аксиомам АОJ и АУJ. Группа $B_u^r(K')$ есть не что иное [11], как обычная группа Бетти дополнительного пространства $S^n - K$; мы обозначим ее через $B_u^r(S^n - \bar{K})$.

Из дальнейших формул п. 16 и 17 можно заключить, что группы $B_u^r(L)$, $B_0^r(K')$ и $B_0^r(L)$ также являются топологическими инвариантами дополнительного пространства $S^n - \bar{K}$. Обозначим эти группы $*B_u^r(S^n - \bar{K})$, $B_0^r(S^n - \bar{K})$ и $*B_0^r(S^n - \bar{K})$. Группа $*B_u^r(S^n - \bar{K})$ есть при этом группа Бетти, полученная с помощью «открытых» циклов из $S^n - \bar{K}$ [12].

16. При $1 < r < n$ верна формула

$$B_u^{r-1}(K) \approx *B_u^r(S^n - \bar{K}) \approx B_0^{n-r}(S^n - \bar{K}).$$

Второй изоморфизм следует из двойственности L и K' в силу п. 12. Докажем [13] первый изоморфизм.

Любой u -цикл z^{r-1} из K ограничивает в S^n : $z^{r-1} = g_u f^r$. Функция f^r , рассматриваемая на L , есть, очевидно, цикл. Различные f^r , ограниченные одним и тем же циклом или циклами, гомологичными (на K) друг другу и данному циклу z^{r-1} , гомологичны на L .

Таким образом, каждый $(r-1)$ -мерный класс гомологий на K соответствует r -мерному классу гомологий на L . Так как эти соотношения двойственны, то $B_u^{r-1}(K)$ и $*B_u^r(S^n - K)$ изоморфны. Таким образом, мы доказали формулу (1). Изоморфизм между $B_u^{r-1}(K)$ и $B_0^{n-r}(S^n - K)$ назовем *второй теоремой двойственности*.

17. Пусть теперь снова A и B — группы характеров друг друга. Тогда группой характеров группы

$$B_u^{r-1}(K, A) \approx *B_u^r(S^n - \bar{K}, A) \approx B_0^{n-r}(S^n - \bar{K}, A)$$

является с точностью до изоморфизма группа

$$B_0^{r-1}(K, B) \approx *B_0^r(S^n - \bar{K}, B) \approx B_u^{n-r}(S^n - \bar{K}, B).$$

(Доказательство следует непосредственно из закона взаимности п. 14.)

В доказанном содержится теорема двойственности Александра: $B_u^{r-1}(K, A)$ и $B_u^{n-r}(S^n - \bar{K}, B)$ суть группы характеров друг друга.

18. В случае $r = 1$ аналогичным путем получим

$$B_u^0(K, A) \approx *B_u^1(S^n - \bar{K}, A) + A \approx B_0^{n-1}(S^n - \bar{K}, A) + A$$

есть группа характеров для группы

$$B_0^0(K, B) \approx *B_0^1(S^n - \bar{K}, B) + B \approx B_u^{n-1}(S^n - \bar{K}, B) + B.$$

Наконец, для $r = n$ находим, что

$$B_u^{n-1}(K, A) + A \approx *B_u^n(S^n - \bar{K}, A) \approx B_0^0(S^n - \bar{K}, A)$$

есть группа характеров группы

$$B_0^{n-1}(K, A) + B \approx *B_0^n(S^n - \bar{K}, B) \approx B_u^0(S^n - \bar{K}, B).$$

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Результаты этой работы применительно к обычным комплексам были получены автором весной и летом 1934 г. и частично доложены на Международной конференции по тензорному анализу (Москва) в мае 1934 г. Общая теория, представленная здесь, составила основу доклада, который автор прочел на Международной топологической конференции (Москва, сентябрь, 1935); в последнем докладе автор отметил, что большая часть этих результатов получена Александром. См. вышедшую за это время из печати заметку Александра:

Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1935, vol. 21, p. 509—512. Александр тоже доложил свои результаты на Московской топологической конференции. Обобщение на случай замкнутых множеств и конструкция колец гомологий для комплексов и замкнутых множеств, также предложенные автором на конференции по тензорному анализу в 1934 г., будут представлены в последующих публикациях. Эти дальнейшие конструкции, впрочем, также были найдены Александром и частично опубликованы в цитированной заметке.

2. По поводу терминологии и обозначений из комбинаторной топологии см.: *Alexandroff P. S.* Einfachste Grundbegriffe der Topologie. Berlin: Spring. Verl., 1932, и в особенности: *Alexandroff P., Hopf H.* Topologie. Berlin: Spring. Verl., 1935, Bd. 1, Tl. 4.

3. *Tucker A. W.* An abstract approach to manifolds.— Ann. Math., 1933, vol. 34, p. 191—243. Клеточные пространства составляют частный случай дискретных пространств в смысле П. С. Александрова (см. его заметку: Sur les espaces discrets.— С. г. Acad. sci. Paris, 1935, vol. 200, p. 1649—1650). Значительная часть представленных здесь результатов верна для более общих дискретных пространств, нежели клеточные; в частности, если предположить пространство частично упорядоченным и конечным. Мы определяем размерность (следуя Таккеру) как гомеоморфное отображение данного дискретного пространства (рассматриваемого как частично упорядоченное множество) в (упорядоченное) множество целых чисел, что отличается от специального определения по Александрову. См. также: *Rham A. de.* Sur l'Analysis situs des variétés à n -dimensions: These.— J. math. pures et appl. Sér. 9, 1931, vol. 10, p. 115—200.

4. См.: *Tucker A. W.*— Ibid.

5. *Alexandroff P., Hopf H.* Topologie. Bd. 1, S. 168—170. Следует при этом заметить, что если множество лежащих в R клеток размерности r пусто, то существует единственная функция f^r с пустой областью определения.

6. В случае симплициальных комплексов и в употребительных в наши дни обозначениях комбинаторной топологии определения звучат следующим образом. Пусть сначала комплекс $f^r = tx^r$ содержит только один симплекс x^r . Обозначим инцидентные x^r ($r-1$) (соответственно $(r+1)$)-мерные ориентированные симплексы $x_0^{r-1}, \dots, x_r^{r-1}$ (соответственно $x_0^{r+1}, \dots, x_r^{r+1}$).

Мы определяем

$$g_u f^r = \sum tx_i^{r-1}, \quad g_0 f^r = \sum tx_i^{r+1}.$$

Тогда для любого алгебраического комплекса $f^r = \sum t^k x^r = \sum f_r^k$ определены

$$g_u f^r = \sum g_u f_k^r, \quad g_0 f^r = \sum g_0 f_k^r.$$

7. *Alexandroff P., Hopf H.* Topologie. Bd. 1. S. 205.

8. Здесь мы рассматриваем дискретные 0-группы; соответствующие группы характеров, следовательно, являются бикомпактными.

9. *Pontrjagin L. S.* Topological commutative groups.— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 1—338; *Kampen E. R. van.* Locally bicomcompact Abelian groups and their character groups.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 448—463.

10. *Pontrjagin L. S.*— Ibid.

11. Ср.: *Pontrjagin L.* Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze.— *Math. Ann.*, 1931, Bd. 105, S. 165—205.

12. Ср.: *Tucker A. W.*— Ibid.

13. Ср.: *Lefschetz S.* *Topology.* New York, 1930. Chap. 4.

30

КОЛЬЦО ГОМОЛОГИЙ КОМПЛЕКСОВ И ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ*

§ 1

КОЛЬЦО ГОМОЛОГИЙ КОМПЛЕКСА

Первый параграф является продолжением моей работы «О законах двойственности комбинаторной топологии» (см. № 29 наст. изд.). Мы сохранили все обозначения этой работы, но рассматриваем лишь специальный случай построенной там общей теории: клеточное пространство R является симплициальным комплексом, а в качестве области коэффициентов J выбирается аддитивная группа рациональных чисел. Пусть два симплекса $x^r = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ и $x^s = (q_0, q_1, \dots, q_s)$ являются клетками R . Если каждая точка q_i отличается от всех точек p_j и симплекс $(p_0, p_1, \dots, p_r, q_0, q_1, \dots, q_s)$ есть клетка R , мы называем x^{r+s+1} произведением x^r и x^s и пишем

$$x^{r+s+1} = x^r x^s.$$

Ясно, что определенное выше умножение симплексов ассоциативно; коммутативность описывается следующим соотношением:

$$x^r x^s = (-1)^{(r+1)(s+1)} x^s x^r.$$

Под произведением двух алгебраических комплексов f^r и f^s мы понимаем алгебраический комплекс f^{r+s+1} , который определяется следующей формулой:

$$f^r f^s = f^{r+s+1} (x^{r+s+1}) = \frac{1}{2} \sum_{x^r x^s = x^{r+s+1}} f(x^r) f(x^s). \quad (1)$$

Умножение в правой части понимается в смысле обычного умножения рациональных чисел. Сумма распространяется на все возможные представления симплекса x^{r+s+1} в виде произведения $x^r x^s$. Эквивалентное определение произведения алгебраических комплексов было дано Александером [2]. В противоположность произведению сим-

* Homologisierung des Komplexes und des lokalbikompakten Räumes.— *Mat. сб.*, 1936, т. 1, с. 701—706. *Перевод О. В. Локуцкого.* См. [1].

плексов произведение алгебраических комплексов определено во всех случаях.

Если R не содержит $(r + s + 1)$ -мерных симплексов, то существует, это доказано в моей работе, цитированной выше, единственный $(r + s + 1)$ -мерный алгебраический комплекс и произведение любых f^r и f^s равно этому комплексу f^{r+s+1} . Можно легко видеть, что произведение алгебраических комплексов ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Закон коммутативности заменяется равенством

$$f^r f^s = (-1)^{(r+1)(s+1)} f^s f^r. \quad (2)$$

Отсюда вытекает при четных r

$$f^r f^s = (-1)^{(r+1)^2} f^r f^r = -f^r f^r = 0. \quad (3)$$

Каждая вершина комплекса R определяется (в соответствии с моей работой, цитированной выше) двумя нульмерными клетками $+(p)$ и $-(p)$. Мы введем специальный нульмерный алгебраический комплекс e^0 такой, что для любой точки p

$$e^0 (+ (p)) = +1, \quad e^0 (- (p)) = -1.$$

Из определения оператора g_0 мы немедленно получаем

$$g_0 f^r = e^0 f^r. \quad (4)$$

Так как согласно (3) $e^0 e^0 = 0$, то

$$g_0 (g_0 f^r) = e^0 e^0 f^r = 0,$$

что ранее было доказано непосредственно.

Для произвольного s -мерного симплекса x^s мы обозначим через $[x^s]$ комплекс (клеточное пространство), который состоит из всех его граней (включая сам симплекс x^s). Если x^s принадлежит R , то, очевидно, каждая функция $f^r(x^r)$, которая определена для всех x^r из R при $r \leq s$, определена и для всех x^r из $[x^s]$. Если при этом f^r является 0-циклом на R , то f^r остается 0-циклом, если эту функцию рассматривать как алгебраический комплекс на $[x^s]$.

Л е м м а. *Любой 0-цикл z^r ($r \leq s$) 0-гомологичен нулю на каждом $[x^s]$, т. е. существует такой комплекс f^{r-1} , определенный на $[x^r]$, что*

$$g_0 f^{r-1} = z^r \quad \text{на } [x^s].$$

Для доказательства достаточно выбрать какую-нибудь вершину p симплекса x^s ; тогда для каждого симплекса x^{r-1} из $[x^r]$ можно утверждать:

$$f^{r-1}(x^{r-1}) = z^r (+ (p) x^{r-1}), \quad \text{если } x^{r-1} \text{ не содержит точки } p;$$

$$f^{r-1}(x^{r-1}) = 0, \quad \text{если } p \text{ есть вершина } x^{r-1}.$$

Из леммы вытекает, что произведение двух циклов всегда равно нулю. Действительно, пусть

$$u^{r+s+1} = z^r z^s,$$

тогда на каждом $[x^{r+s+1}]$ справедливы равенства

$$z^r = e^0 f^{r-1}, \quad z^s = e^0 f^{s-1}$$

и, таким образом,

$$u^{r+s+1}(x^{r+s+1}) = e^0 f^{r-1} e_0 f^{s-1} = \pm e^0 e^0 f^{r-1} f^{s-1} = 0.$$

Введение второго умножения приводит к новым гомологическим инвариантам. Это второе умножение может быть определено формулой

$$[f^r f^s] = f^{r+s}(x^{r+s}) = \frac{1}{4(r+s+1)} \sum_{x^{r-1} x^0 x^{s-1} = x^{r+s}} f^r(x^{r-1} x^0) f^s(x^0 x^{s-1}). \quad (5)$$

Сумма в правой части распространяется на все возможные представления симплекса x^{r+s} в форме трех сомножителей указанных размерностей. Легко видеть, что второе умножение дистрибутивно по отношению к сложению и что выполняется соотношение

$$[f^r, f^s] = (-1)^{rs} [f^s, f^r]. \quad (6)$$

Основная формула, связывающая первое умножение со вторым, гласит:

$$(r+s+t+1)[f^r f^s, f^t] = (s+t+1) f^r [f^s, f^t] + (-1)^{(r+1)(s+1)} (r+t+1) f^s [f^r, f^t]. \quad (7)$$

Для доказательства положим $f^r f^s = w^{r+s+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} (r+s+t+2)[f^r f^s, f^t] &= (r+s+t+2)[w^{r+s+1}, f^t] = \\ &= u^{(r+s+t+1)}(x^{r+t+1}) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{x^{r+s} x^0 x^{t-1} = x^{r+s+t+1}} w^{r+s+1}(x^{r+s+1} x^0) f^t(x^0 x^{t-1}) = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{x^{r-1} x^0 x^s x^{t-1} = x^{r+s+t+1}} f^r(x^{r-1} x^0) f^s(x^s) f^t(x^0 x^{t-1}) + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{x^r x^{s-1} x^0 x^{t-1} = x^{r+s+t+1}} f^r(x^r) f^s(x^{s-1} x^0) f^t(x^0 x^{t-1}) = \\ &= (-1)^{(r+1)(s+1)} \frac{1}{2} \sum_{x^s x^{r+t} = x^{r+s+t+1}} f^s(x^s) \times \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{x^{r-1} x^0 x^{t-1} = x^{r+s}} f^r(x^{r-1} x^0) f^t(x^0 x^{t-1}) + \frac{1}{2} \sum_{x^r x^{s+t} = x^{r+s+t+1}} f^r(x^r) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{4} \sum_{x^{s-1}x^0x^{t-1}=x^{s+t}} f^s(x^{s-1}x^0)f^t(x^0x^{t-1}) = \\ & = (-1)^{(r+1)(s+1)}(r+t+1)f^s[f^r, f^t] + (s+t+1)f^r[f^s, f^t], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что

$$[e^0, f^r] = f^r. \quad (8)$$

Поэтому из (7) следует

$$\begin{aligned} (r+s+r)[e^0f^r, f^s] &= (r+s+1)e^0[f^r, f^s] + \\ &+ (-1)^{(r+1)}(s+1)f^rf^s. \end{aligned} \quad (9)$$

Дважды применяя (9), получим

$$[e^0f^r, e^0f^s] = e^0f^rf^s. \quad (10)$$

Формула (10) делает возможным новое определение второго умножения для 0-циклов. Пусть z^r и z^s — два 0-цикла и x^{r+s} — некоторый симплекс. По лемме, доказанной выше, на x^{r+s} выполнены соотношения

$$z^r = e^0f^{r-1} \quad \text{и} \quad z^s = e^0f^{s-1}.$$

Из формулы (10) следует

$$[z^r, z^s] = u^{r+s}(x^{r+s}) = e^0f^{r-1}f^{s-1}.$$

Ясно, что значение $e^0f^{r-1}f^{s-1}$ на симплексе x^{r+s} не зависит от выбора f^{r-1} и f^{s-1} . Это новое определение без труда приводит к ряду новых фактов. Во-первых, мы устанавливаем, что произведение $[z^r, z^s]$ двух 0-циклов является 0-циклом: пусть x^{r+s+1} — любой симплекс; для $[x^{r+s+1}]$ выполнены равенства

$$z^r = e^0f^{r-1} \quad \text{и} \quad z^s = e^0f^{s-1}.$$

Отсюда следует, что

$$e^0[z^r, z^s] = u^{r+s+1}(x^{r+s+1}) = e^0e^0f^{r-1}f^{s-1} = 0.$$

Во-вторых, докажем, что для циклов второе умножение ассоциативно: пусть z^r , z^s и z^t — циклы и x^{r+s+t} — любой симплекс. На $[x^{r+s+t}]$

$$z^r = e^0f^{r-1}, \quad z^s = e^0f^{s-1}, \quad z^t = e^0f^{t-1},$$

и мы получаем для симплекса x^{r+s+t}

$$[[z^r, z^s], z^t] = [z^r, [z^s, z^t]] = e^0f^{r-1}f^{s-1}f^{t-1}.$$

Приведем еще следующую формулу:

$$\begin{aligned} (r+s+1)e^0[f^r, f^s] &= (r+1)[e^0f^r, f^s] + \\ &+ (-1)^r(s+1)[f^r, e^0f^s], \end{aligned} \quad (11)$$

аналогичную формуле дифференцирования в кольцах Пуанкаре-кососимметрических дифференциальных форм.

Заметим, что из (9) вытекает

$$(-1)^r(r+s+2)[f^r, e^0 f^s] = (r+s+1)e^0[f^r, f^s] + (-1)^r(r+1)f^r f^s. \quad (9')$$

Умножая (9) на $(r+1)$, (9') на $(s+1)$ и складывая полученные равенства, получим после сокращения формулу (14).

Если z^s — 0-цикл, а z^r — гомологичный нулю 0-цикл, то $e^0 z^s = 0$ и $z^r = e^0 f^{r-1}$.

Далее, из формулы (11) следует

$$(r+s)e^0[f^{r-1}, z^s] = r[z^r, z^s],$$

т. е. что цикл $[z^r, z^s]$ гомологичен нулю.

Отсюда мы заключаем:

Если 0-циклы z_1^r и z_2^r , а также z_1^s и z_2^s попарно гомологичны, то циклы $[z_1^r, z_1^s]$ и $[z_2^r, z_2^s]$ также гомологичны. В самом деле,

$$[z_1^r, z_1^s] - [z_2^r, z_2^s] = [z_1^r, z_1^s - z_2^s] + [z_1^r - z_2^r, z_2^s] \sim 0,$$

так как $z_1^s - z_2^s \sim 0$ и $z_1^r - z_2^r \sim 0$. Из последних результатов, следует, что второе умножение 0-циклов z^r и z^s обычным путем индицирует умножение элементов групп Бетти $B_0^r(R)$ и $B_0^s(R)$, результатом которого является элемент группы Бетти $B_0^{r+s}(R)$. Элементы всех групп Бетти $B_0^r(R)$ с этим умножением образуют кольцо 0-гомологий комплекса R [3].

§ 2

КОЛЬЦО ГОМОЛОГИЙ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Результаты § 1 верны для произвольной совокупности вершин, причем под R можно понимать любую систему симплексов, удовлетворяющую единственному естественному требованию: все грани принадлежащего R симплекса x^r также принадлежат R . Отметим следующее преимущество 0-гомологий перед обычными u -гомологиями: теория последних применима лишь для таких алгебраических комплексов, которые на совокупности симплексов с общей вершиной имеют лишь конечное число коэффициентов, отличных от нуля.

Теперь рассмотрим в связи с моей заметкой «Группы Бетти локально бикомпактных пространств» (см. № 32 наст. изд.) локально бикомпактное пространство E и систему R всех симплексов всевозможных размерностей с вершинами из E . Каждая определенная на E функция $\tilde{f}^r(p_0, p_1, \dots, p_r)$ (в смысле цитированной заметки) соответствует вполне определенному алгебраическому комплексу

$f^r(x^r)$ системы R . При этом для двух функций $\bar{f}^r, \bar{f}^s$ определены произведения $\bar{f}^r \bar{f}^s = \bar{f}^{r+s+1}$ и $[\bar{f}^r, \bar{f}^s] = \bar{f}^{r+s}$. Легко убедиться, что эквивалентным функциям соответствуют эквивалентные произведения. Ясно, что определены первое и второе произведения алгебраических комплексов также в смысле цитированной выше заметки. Формулы (2)—(4), (6)—(11) из § 1 остаются в силе. Утверждения § 1 переносятся без изменения на соответствующие группы Бетти $B_0^r(E)$ и это дает кольцо 0-гомологий пространства E (см. [4]).

§ 3

СЛУЧАЙ ДВУСТОРОННИХ МНОГООБРАЗИЙ

Мы возвратимся к обозначениям § 1 и предположим что комплекс R является двусторонним многообразием размерности n . В этом случае группа Бетти $B_0^r(R)$ при любом $r \leq n$ изоморфно отображается на группу $B_0^{n-r}(R)$ вполне определенным способом, описанным в работе, цитированной выше (см. [1]). При этом в качестве коэффициентов также могут быть взяты рациональные числа. Мы обозначим через $\xi_u^r \times \eta_u^s = \zeta^{r+s-n}$ пересечение, элементов ξ_u^r и η_u^s групп $B_u^r(R)$ и $B_u^s(R)$. Второе умножение элементов ξ_0^r и η_0^s групп $B_0^r(R)$ и $B_0^s(R)$ определяется с помощью пересечений соответствующих элементов ξ_u^{n-r} и η_u^{n-s} групп $B_u^{n-r}(R)$ и $B_u^{n-s}(R)$ таким образом, что $\zeta_0^{r+s} = [\xi_0^r, \eta_0^s]$ есть элемент, соответствующий элементу $\zeta^{n-r-s} = \frac{(r+s)!}{r!s!} \xi_u^{n-r} \times \eta_u^{n-s}$.

Болшево — Комаровка, близ Москвы,
20 апреля 1936 г.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Содержание доклада, прочитанного автором на Московской конференции по топологии, лишь частично отражено в дальнейшем: не представленная здесь часть доклада была опубликована ранее (см. № 29 наст. изд.). Результаты § 2 настоящей статьи были изложены в докладе только для компактов; обобщение на произвольные локально бикомпактные пространства были получены позже (1936).

2. См.: Alexander J. W. On the ring of a compact metric space.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1935, vol. 21, p. 511—512. В этой работе Александер ошибочно допускает, что произведение двух 0-циклов может быть отлично от нуля.

3. См.: Hopf H.— J. reine und angew. Math., 1930, Bd. 163, S. 73—88, особенно § 1.

4. Первое умножение функции ($\bar{f}^r \bar{f}^s = \bar{f}^{r+s+1}$) было определено Александером в цитированной (см. [2]) работе для произвольных метрических пространств. На Московской топологической конференции (сентябрь, 1935) я узнал, что Александер нашел также второе умножение.

КОНЕЧНЫЕ ПОКРЫТИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ *

Совместно с П. С. Александровым

1. Пусть F — топологическое пространство. Конечная система $\mathfrak{S}$ замкнутых (соответственно открытых) подмножеств пространства F называется замкнутым (соответственно открытым) мультипликативным покрытием ¹ этого пространства, если, во-первых $F = \bigcup_{i=1}^s A_i$ и, во-вторых, каждое непустое пересечение $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ элементов системы $\mathfrak{S}$ также является элементом этой системы. Примером замкнутого мультипликативного покрытия служит клеточное (в частности, симплициальное) разбиение конечного полиэдра.

Наибольшее среди всех таких целых λ , для которых существует убывающая последовательность

$$A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \dots \supset A_{i_\lambda}$$

различных непустых элементов мультипликативного покрытия $\mathfrak{S}$, называется длиной этого покрытия. Если дано произвольное конечное покрытие $\mathfrak{U}$ пространства F (т. е. такая произвольная конечная система точечных множеств A_i , что $\bigcup_i A_i = F$), то, дополняя это покрытие всевозможными пересечениями его элементов, получим мультипликативное покрытие $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{U}$. Далее, очевидно, что длина покрытия $\mathfrak{S}$ не превосходит порядка покрытия $\mathfrak{U}$; однако она может оказаться и меньше: если F — квадрат, $\mathfrak{U}$ — покрытие этого квадрата, образованное его разбиением на меньшие квадраты ², и $\mathfrak{S}$ — отвечающее $\mathfrak{U}$ мультипликативное покрытие, то порядок $\mathfrak{U}$ равен четырем, тогда как длина $\mathfrak{S}$ — трем. Длина любого симплициального разбиения n -мерного полиэдра равна n ; порядок же покрытия, образованного основными ³ симплексами такого разбиения, может быть сколь угодно велик.

Цель настоящей заметки — уточнение соотношения между длиной и порядком покрытий и в особенности доказательство следующего утверждения, которое, по-видимому, само по себе ново даже

* Endliche Überdeckungen topologischer Räume.— Fund. math., 1936, vol. 26, p. 267—271. (П. 1 и 2 принадлежат П. С. Александрову, п. 3 и 4 — А. Н. Колмогорову.) Перевод О. В. Локуцкого.

¹ Терминология всюду та же, что в [1].

² Разбиение осуществляется проведением отрезков, соединяющих пары противоположных сторон квадрата.

³ Симплекс комплекса K называется свободным, если он является гранью единственного основного симплекса; симплекс называется основным, если он не является гранью никакого другого симплекса. При этом каждый симплекс считается своей (несобственной) гранью.

для n -мерного куба и является усилением теоремы Лебега — Брауэра о мостовых.

Т е о р е м а. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ длина каждого замкнутого и каждого открытого мультипликативного ε -покрытия n -мерного компакта F не меньше чем $n + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{S}$ — данное мультипликативное покрытие компакта F ; F можно рассматривать как ограниченное замкнутое подмножество пространства R^m . Через N обозначим нерв, а через λ — длину покрытия $\mathfrak{S}$.

Л е м м а. При $r \geq \lambda$ каждый свободный r -мерный симплекс нерва N содержит свободную $(r - 1)$ -мерную грань.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $x^r = (a_0, \dots, a_r)$ — свободный симплекс нерва N , являющийся свободной гранью основного симплекса

$$x^u = (a_0, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_u), \quad u \geq r.$$

Так как $r \geq \lambda$ и, следовательно, $r + 1 > \lambda$, то существует такое $p < r$, что

$$A_0 \cap \dots \cap A_p = A_0 \cap \dots \cap A_p \cap A_{p+1},$$

где A_i — элемент покрытия $\mathfrak{S}$, отвечающий вершине a_i нерва N . Тогда

$$x^{r-1} = (a_0, \dots, a_p, a_{p+2}, \dots, a_r)$$

— искомая грань симплекса x^r . Действительно, пусть

$$x^v = (a_0, \dots, a_p, a_{p+2}, \dots, a'_r, \dots, a'_v)$$

— основной симплекс нерва N , имеющий x^{r-1} своей гранью. Из определения числа p следует, что

$$x = (a_0, \dots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_r, a'_r, \dots, a'_v)$$

также является симплексом нерва N ; так как он содержит x^r в качестве грани, то $x = x^u$, т. е. все a'_h , $r \leq h \leq v$, содержится среди a_i , $0 \leq i \leq u$. Следовательно, x^v оказывается гранью симплекса x^u и, будучи основным симплексом, совпадает с x^u . Лемма доказана.

Пусть N реализован в качестве евклидова комплекса в R^m . Тогда из леммы следует возможность деформировать $\bar{N}$ путем последовательных вдавливаний⁴ свободных симплексов в некоторый полиэдр размерности $< \lambda$, причем так, что в процессе деформации каждая точка остается в содержащем ее основном симплексе. Если $\mathfrak{S}$ есть ε -покрытие, а N реализован⁵ вблизи $\mathfrak{S}$, то из доказанного вытекает, что F может быть посредством ε -сдвига отображен в полиэдр размерности $< \lambda$. Тем самым наша теорема доказана.

⁴ См. [2, с. 150—151] или [4, с. 382—383].

⁵ См. [1, с. 160—161 и гл. 9, § 3, с. 363 и далее].

2. Приведенное выше доказательство верно как для замкнутых, так и для открытых покрытий. В случае открытых покрытий можно поступить еще следующим образом.

Пусть снова $\mathfrak{S}$ есть ε -покрытие и N — его нерв, реализованный в качестве евклидова комплекса вблизи $\mathfrak{S}$. С помощью метода К. Кура-товского⁶ отображим F в $\bar{N}$. Это отображение мы обозначим через κ . Совокупность тех точек, которые отображаются во внутренность симплекса $x^r = (a_0, \dots, a_r)$, есть

$$A_0 \cap \dots \cap A_r \setminus \bigcup_i A_i,$$

где $\bigcup_i$ означает, что суммирование распространено на все индексы, отличные от $0, 1, \dots, r$.

Пусть теперь $x^n = (a_0, \dots, a_n)$ есть n -мерный симплекс нерва N , причем $n \geq \lambda$. Из равенства

$$A_0 \cap \dots \cap A_p = A_0 \cap \dots \cap A_p \cap A_{p+1}$$

следует, что

$$A_0 \cap \dots \cap A_p \setminus A_{p+1}$$

пусто. Значит, пусто и

$$A_0 \cap \dots \cap A_p \setminus \bigcup_i A_i.$$

Поэтому внутренность симплекса $(a_0, \dots, a_p)$ свободна от точек множества $\kappa(F)$. Иначе говоря, каждый симплекс x^n имеет грань, внутренность которой не содержит точек множества $\kappa(F)$. А так как $\kappa(F)$ замкнуто, то каждый x^n содержит открытое множество, не пересекающееся с $\kappa(F)$. Так как сказанное верно при любом ε , то $\dim F \leq \lambda - 1$, что и требовалось доказать.

3. Случай замкнутых покрытий может быть разрешен также с помощью нижеследующей простой конструкции. Для нашей цели, очевидно, достаточно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а. Компакт F , имеющий замкнутое мультипликативное ε -покрытие $\mathfrak{S}$ длины λ , имеет также замкнутое ε -покрытие порядка $\leq \lambda$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_1, \dots, A_s$ — элементы покрытия $\mathfrak{S}$. Под рангом элемента A_h из $\mathfrak{S}$ будем понимать длину той подсистемы $\mathfrak{S}_h$ покрытия $\mathfrak{S}$, которая состоит из элементов, содержащихся в A_h . Элементы ранга r покрытия $\mathfrak{S}$ обозначим через A_{ri} , $i = 1, \dots, s_r$. Два различных элемента ранга r имеют в качестве пересечения элемент ранга $< r$.

Мы положим теперь

$$B_{ri} = U(A_{ri}, d_r).$$

⁶ См. [3, с. 191] или [1, с. 366—368].

⁷ A_h также является элементом $\mathfrak{S}_h$.

где $d_r > 0$ определяются последовательно для $r = 1, \dots, \lambda$ так, как это описано далее. Число d_1 выбирается столь малым, что B_{1i} попарно не пересекаются. Если $d_{r'}, r' < r$, уже определены, то d_r выбираем столь малым, что для любых A_{ri}, A_{rj} , для которых $A_{ri} \cap \bigcap A_{rj} = A_{r'k}$, выполняются включения $\bar{B}_{ri} \cap \bar{B}_{rj} \subset B_{r'k}$. Пусть, наконец,

$$C_{ri} = \overline{B_{ri} \setminus \bigcup_{r' < r} B_{r'k}} \subset \bar{B}_{ri} \setminus \bigcup_{r' < r} B_{r'k}.$$

При $i \neq j$ имеем

$$C_{ri} \cap C_{rj} = \emptyset,$$

ибо если

$$A_{ri} \cap A_{rj} = A_{r'k},$$

то

$$C_{ri} \cap C_{rj} \subset \bar{B}_{ri} \cap \bar{B}_{rj} \setminus B_{r'k} \subset B_{r'k} \setminus B_{r'k} = \emptyset.$$

Таким образом, если точка принадлежит нескольким среди множеств C , то все эти множества имеют различные индексы r . Но r — это ранги элементов покрытия $\mathfrak{S}$ и поэтому могут принимать лишь λ различных значений, так что точка из F может принадлежать не более чем λ различным множествам C , т. е. порядок покрытия, образованного этими множествами, не превосходит λ .

4. Наша теорема может быть *mutatis mutandis* перенесена на случай произвольного нормального пространства R (без предположений о его компактности и метризуемости). А именно справедливо следующее:

Пусть $\mathfrak{U} = \{G_1, \dots, G_u\}$ — конечное открытое покрытие и $\mathfrak{S} = \{A_1, \dots, A_s\}$ — конечное замкнутое покрытие нормального пространства R , причем $\mathfrak{S}$ вписано в $\mathfrak{U}$ (т. е. каждый A_i содержится по меньшей мере в одном G_h). Тогда существует вписанное в $\mathfrak{U}$ замкнутое покрытие $\mathfrak{C} = \{C_1, \dots, C_v\}$, порядок которого не превосходит длины покрытия $\mathfrak{S}$.

Доказательство остается тем же, что и в п. 3. Только вместо $U(A_{ri}, d_r)$ надлежит рассмотреть такие открытые множества $U_{ri} \supset A_{ri}$, которые удовлетворяют условиям, высказанным в п. 3 относительно $U(A_{ri}, d_r)$; в частности если $A_{ri} \subset G_h$, то и $U_{ri} \subset G_h$.

Болшево — Комаровка, 1935 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandroff P., Hopf H. Topologie. Berlin., 1935. Bd. 1.
2. Alexandroff P. S. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. — Ann. Math., 1928—1929, vol. 30, p. 101—187. Рус. пер.: Исследования о форме и расположении замкнутых множеств произвольной размерности. — В кн.: Александров П. С. Общая теория гомотопий. М.: Наука, 1979, с. 68—176.
3. Kuratowski K. Sur un théoreme fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles. — Fund. math., 1933, vol. 20, p. 191—196.

ГРУППЫ БЕТТИ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ*

Пусть $^1 J$ — дискретная абелева группа и θ — бикомпактная абелева группа ^{2} . Пусть, далее, R — хаусдорфово локально бикомпактное пространство; я предполагаю дать здесь для каждого неотрицательного целого числа r определение двух групп Бетти $B_0^r(R, J)$ и $B_u^r(R, \theta)$, которые называют соответственно 0 -группой и u -группой пространства R относительно r (числа измерений) и области коэффициентов J и θ соответственно. В случае, когда R является компактом (метрическим компактным пространством), u -группы изоморфны группам Бетти относительно θ в смысле Вьеториса; 0 -группы изоморфны в этом случае группам, определенным в 1935 г. Александером ^{3} .

1. Определение групп $B_u^r(R, \theta)$. Назовем комплексом (точнее, r -мерным u -комплексом) каждую функцию $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$, удовлетворяющую следующим условиям:

а) $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$ однозначна и определена для всевозможных систем $r+1$ подмножеств $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r$ пространства R , бикомпактных в R ;

б) значения функции $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$ суть элементы группы θ ;

γ) φ^r является кососимметричной относительно всех своих аргументов;

δ) φ^r аддитивна по всем аргументам, т. е.

$$\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i + \varepsilon_i'', \dots, \varepsilon_r) = \varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i', \dots, \varepsilon_r) + \varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i'', \dots, \varepsilon_r);$$

ε) $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$ равно нулевому элементу группы θ , если замыкающие $\bar{\varepsilon}_0, \dots, \bar{\varepsilon}_r$ множеств $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r$ не содержат общей точки.

Комплексы φ^r образуют абелеву группу Φ^r относительно сложения. Эта группа допускает гомоморфное отображение в группу Φ^{r-1} , осуществляемое оператором g_u следующим образом. Если R бикомпактно, то мы определяем g_u формулой

$$g_u \varphi^r \equiv \varphi^{r-1}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{r-1}) = \varphi^r(R, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{r-1}).$$

* Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts.—C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1144—1147. Представлено Г. Жюлиа. *Перевод М. Б. Балагадзе.*

^{1} Обо всех понятиях общей топологии см.: Alexandroff P., Hopf H. Topologie. Berlin., 1935. Bd. 1. Понятие локально бикомпактного пространства принадлежит П. С. Александрову (см.: Math. Ann., 1924, Bd. 92, S. 294).

^{2} См.: Kampen E. R. van.—Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 448—463.

^{3} См.: Alexander J. W.—Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1935, vol. 21, p. 511—512.

Если R не бикомпактно, то мы заменяем в предыдущей формуле R на некоторое открытое множество $G \supset \bar{\varepsilon}_0 + \dots + \bar{\varepsilon}_{r-1}$, бикомпактное в R ; из ε следует, что такое определение не зависит от выбора множества G . Комплекс $\varphi^{r-1} = g_u \varphi^r$ называется *границей* φ^r . Комплексы, границы которых равны нулю, называются *циклами* (r -мерными и-циклами). Каждая граница является циклом, так как

$$g_u g_u \varphi^r (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{r-2}) = \varphi^r (G, G, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{r-2}) = 0.$$

В группе Z^r всех r -мерных циклов имеется подгруппа Γ^r всех циклов, гомологичных нулю (т. е. таких циклов, для которых существует φ^{r+1} с условием $g_u \varphi^{r+1} = \varphi^r$). Группа вычетов ⁴ Z^r — Γ^r есть по определению группа Бетти $B_u^r(R, \theta)$.

Определим в Φ^r окрестности; мы это сделаем так, что Φ^r окажется бикомпактной; таким образом, группы Z^r , Γ^r и $B_u^r(R, \theta)$ также будут бикомпактными ⁵. Окрестности каждого элемента φ^r группы Φ^r будут соответствовать некоторым конечным системам подмножеств пространства R , бикомпактных в R , следующим образом. Пусть $M_1, \dots, M_n$ — система, о которой идет речь. Каждой системе $r+1$ индексов $i_0, \dots, i_r$, ни один из которых не превосходит n , поставим в соответствие какую-либо окрестность $U_{i_0 \dots i_r}$ элемента $\varphi^r (M_{i_0}, \dots, M_{i_r})$ группы θ . Окрестность комплекса φ^r по определению будет состоять из всех комплексов ψ^r таких, что для произвольно выбранных $i_0, \dots, i_r$ среди чисел $1, 2, \dots, n$, элемент $\psi^r (M_{i_0}, \dots, M_{i_r})$ группы θ принадлежит $U_{i_0 \dots i_r}$.

2. Определение групп $B_0^r(R, J)$. Рассмотрим систему $\bar{F}^r$ всех функций $\bar{f}^r(p_0, \dots, p_r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- a) $\bar{f}^r(p_0, \dots, p_r)$ однозначна и определена для всех систем $r+1$ точек $p_0, \dots, p_r$ пространства R ;
- b) значения $\bar{f}^r$ суть элементы группы J ;
- c) $\bar{f}^r$ кососимметрична по всем своим аргументам;
- d) для каждой функции $\bar{f}^r$ существует конечная система $S_{\bar{f}^r}$ попарно не пересекающихся бикомпактных в R подмножеств таких, что

- 1°. $\bar{f}^r(p_0, \dots, p_r) = \bar{f}^r(p'_0, \dots, p'_r)$, если для любого i две точки p_i и p'_i принадлежат одному и тому же элементу системы $S_{\bar{f}^r}$;
- 2°. $\bar{f}^r(p_0, \dots, p_r) = 0$, если среди аргументов $p_0, \dots, p_r$ хотя бы один не принадлежит ни одному элементу системы $S_{\bar{f}^r}$.

Две функции $\bar{f}_1^r$ и $\bar{f}_2^r$ называются *эквивалентными*, если для каждой точки p пространства R существует окрестность $U(p)$ такая, что $\bar{f}_1^r(p_0, \dots, p_r) = \bar{f}_2^r(p_0, \dots, p_r)$, если все точки p_i принадлежат

⁴ Ныне употребляется термин «фактор-группа». — Примеч. пер.

⁵ См. упомянутый выше мемуар ван Кампена.

$U(p)$. Мы обозначим через f^r и назовем 0-комплексом размерности r классы эквивалентных между собой функций $\bar{f}^r$. Комплексы образуют группу F^r , которая есть не что иное, как группа вычетов $F^r = \bar{F}^r - O^r$. Мы определим теперь как 0-границу функции $\bar{f}^r$ функцию

$$g_0 \bar{f}^r \equiv \bar{f}^{r+1}(p_0, \dots, p_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \bar{f}^r(p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{r+1}).$$

Границы двух эквивалентных функций являются эквивалентными, поэтому граница $g_0 \bar{f}^r$ комплекса f^r определяется как комплекс границ функций, принадлежащих f^r . Комплекс f^r называется *циклом* (0-циклом размерности r), если его граница равна нулю (т. е. равна комплексу O^{r+1} , содержащему нулевую функцию $\bar{O}^{r+1}$). Комплексы, являющиеся границами (*гомологичные нулю*), образуют подгруппу H^r группы Z^r всех r -мерных циклов (поскольку $g_0 g_0 \bar{f}^r = \bar{O}^{r+2}$). Группа вычетов $Z^r - H^r$ есть по определению группа Бетти $B_0^r(R, J)$.

16 марта 1936 г.

33

СВОЙСТВА ГРУПП БЕТТИ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ *

1. 0- и u -группы произвольного локально бикомпактного пространства R находятся в следующем соотношении¹.

Пусть J — произвольная дискретная абелева группа и θ ее группа *характеров* в смысле Понтрягина²; θ является тогда абелевой бикомпактной группой, ее группа *характеров* дискретна и изоморфна группе J . Мы говорим вообще, что две абелевы группы, одна из которых дискретна, а другая бикомпактна, *взаимны*³, если одна из них изоморфна группе *характеров* другой.

Т е о р е м а в з а и м н о с т и. Группы $B_u^r(R, \theta)$ и $B_0^r(R, J)$ для каждого $r \geq 0$ взаимны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как θ является группой *характеров* группы J , произведение $a \times \alpha$ произвольного элемента a из J на произвольный элемент α группы θ есть определенный элемент

* Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts. — С. г. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1325—1327. Перевод М. Б. Балавадзе.

¹ Настоящая заметка существенно опирается на мою заметку (см. № 32 наст. изд.), которая в дальнейшем будет обозначаться (В1).

² Для ссылок на результаты, относящиеся к топологическим группам и в особенности их теории *характеров*, см. заметку (В1) и мемуар Л. С. Понтрягина: Topological commutative groups. — Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 361—388.

³ Двойственны в смысле теории *характеров* Понтрягина. — Примеч. пер.

α (a) непрерывной циклической группы K (группы действительных чисел, приведенных по модулю 1). Мы определяем для пары функций $\bar{f}^r$ и $\bar{\varphi}^r$, удовлетворяющих соответственно условиям $(\alpha) - (\delta)$ и $(a) - (d)$ из (BI), произведение $\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r$ следующим образом: пусть $M_1, \dots, M_n$ — элементы системы множеств $S_{\bar{f}^r}$, определенной в п. 2 из (BI) условием (d); положим

$$\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r = \sum \bar{f}^r(p_{i_0}, \dots, p_{i_r}) \times \bar{\varphi}^r(M_{i_0}, \dots, M_{i_r}), \quad (1)$$

где p_i — произвольная точка из M_i и индексы i_k независимо друг от друга пробегают все значения $1, \dots, n$. Произведение $\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r$, очевидно, не что иное, как n -кратный интеграл в смысле Радона — Стильтьеса

$$\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r = \int \dots \int \bar{f}^r(p_0, \dots, p_r) \bar{\varphi}^r(d_{p_0}R, \dots, d_{p_r}R), \quad (1')$$

Таким образом, каждая функция $\bar{\varphi}^r$ задает гомоморфное отображение группы $\bar{F}^r$ в группу K . Легко видеть, что, с другой стороны, каждое гомоморфное отображение $\bar{F}^r$ в K при надлежащем выборе $\bar{\varphi}^r$ можно определить таким образом. Отсюда следует, что группа $\bar{\Phi}^r$ всех функций $\bar{\varphi}^r$, удовлетворяющих условиям $(\alpha) - (\delta)$, с топологией, которая вводится следуя (BI), взаимна группе $\bar{F}^r$. Однако подгруппа Φ^r группы $\bar{\Phi}^r$ есть в точности аннулятор в $\bar{F}^r$ группы O^r функций $\bar{f}^r$, эквивалентных нулю. Следовательно, группы Φ^r и F^r комплексов φ^r и f^r также взаимны. Это позволяет определить произведение $f^r \times \varphi^r$ элементов групп F^r и Φ^r . Далее, доказывается основное соотношение

$$f^r \times g_u \varphi^{r+1} = g_o f^r \times \varphi^{r+1}. \quad (2)$$

Получается, что Γ^r является аннулятором группы Z^r в Φ^r , следовательно, $\Phi^r - \Gamma^r$ взаимна с Z^r . Получаем также, что Z^r является аннулятором группы H^r в группе Φ^r , следовательно, $\Phi^r - Z^r$ взаимна с H^r . Из этого вытекает, что группа $B_0^r(R, J) = Z^r - H^r$ взаимна с $Z^r - \Gamma^r = B_u^r(R, \theta)$.

2. Фундаментальные системы. Обозначим через Σ разбиение $R = \Sigma B_\alpha$ пространства R на конечное либо бесконечное семейство непересекающихся подмножеств B_α . Разбиение Σ называется *локально конечным*, если каждое бикомпактное в R множество пересекается лишь с конечным числом множеств B_α . Система S локально конечных разбиений называется *фундаментальной системой*, если она обладает следующими свойствами: 1°) если Σ' и Σ'' — два разбиения, принадлежащие данной системе S , то разбиение $\Sigma' \Sigma'' = \Sigma$, элементами которого являются пересечения произвольного элемента Σ' с произвольным элементом Σ'' , также принадлежит семейству S ; 2°) какова бы ни была конечная система $U_1, \dots, U_n$ открытых множеств, покрывающая какое-либо биком-

пактное в R подмножество A , среди разбиений пространства R , принадлежащих S , найдется по крайней мере одно, со свойством: его элементы, имеющие общие точки с A , содержатся каждый в некотором U_i .

Конечные объединения множеств, выбранных из разбиений Σ данной фундаментальной системы S , образуют тело множеств ⁴, которое мы обозначим через $T(S)$.

Первая теорема редукции. Для произвольной фундаментальной системы S и 0-цикла z^r существует цикл y^r , гомологичный z^r и постоянный⁵ по отношению к каждому своему аргументу, на элементах некоторого разбиения Σ , принадлежащего S .

Вторая теорема редукции. Пусть $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$ есть u -цикл; если $\varphi^r(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r) = 0$ всякий раз, когда $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r$ принадлежат телу $T(S)$ некоторой фундаментальной системы S , то цикл φ^r гомологичен нулю.

Обозначим через $\bar{f}_S^r$ функции, удовлетворяющие условиям (а) — (d) п. 2 из (BI) и постоянные на элементах хотя бы одного разбиения Σ фундаментальной системы S . Обозначим далее через φ_S^r функции, удовлетворяющие условиям (β) — (ε), но определенные только на множествах из $T(S)$. Функции f_S^r образуют группу $\bar{F}_S^r$. Все рассуждения из (BI) остаются в силе в этом случае и приводят к определению групп $B_u^r(R, \theta, S)$ и $B_o^r(R, J, S)$. Итак, в силу теорем редукции эти две группы соответственно изоморфны группам $B_u^r(R, \theta)$ и $B_o^r(R, J)$.

30 марта 1936 г.

34

ГРУППЫ БЕТТИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ *

В этой заметке ¹ мы изучаем, что происходит с нашей общей теорией групп Бетти в двух специальных случаях метрических пространств, а именно в случае компактов и в случае открытых многообразий.

1. Пусть R — произвольный компакт. Главная цель, которую мы преследуем при исследовании этого случая, это следующая

⁴ Система T множеств называется телом, если объединение, пересечение и разность двух множеств, принадлежащих T , есть снова множество, принадлежащее T .

⁵ Комплекс f^r называется постоянным на элементах некоторого разбиения, если он содержит функцию $\bar{f}^r$ с отмеченным свойством.

* Les groupes de Betti des espaces métriques. — C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1558—1560. Представлено Г. Жюлиа. Перевод М. Б. Балавадзе.

¹ Она опирается на мои заметки (см. № 32 и 33 наст. изд.), которые в дальнейшем будут обозначаться (BI) и (BII).

Т е о р е м а. *Группа $B_u^r(R, \theta)$ изоморфна обычной группе Бетти $B^r(R, \theta)$ пространства R (в смысле Вьеториса ²).*

Чтобы доказать эту теорему, прежде всего отметим, что в случае компактов вместо общих фундаментальных систем можно рассмотреть *фундаментальные последовательности* $S = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots\}$ последовательных подразбиений R на непересекающиеся множества:

$$R = B_1^k + \dots + B_{s_k}^k, \quad B_i^k B_j^k = 0 \quad (i \neq j), \quad (\Sigma_k)$$

при диаметрах B_i^k , стремящихся к нулю, когда k стремится к бесконечности. Тогда достаточно показать изоморфизм между $B_u^r(R, \theta, S)$ и $B^r(R, \theta)$. Итак, системе S соответствует проекционный спектр Π_S пространства R в смысле Александрова ³: достаточно в каждом B_i^k выбрать точку a_i^k и рассмотреть эти точки как вершины нерва N_k системы множеств $\bar{B}_1^k; \dots, \bar{B}_{s_k}^k$. Таким образом, имеем следующее предложение.

Л е м м а. *Существует изоморфизм, сохраняющий гомологию, между группой $Z^r(R, \theta, S)$ и группой всех истинных проекционных циклов c^r спектра Π_S .*

Пусть, в самом деле, $\varphi^r(E_0, \dots, E_r)$ есть u -цикл; положим для каждого r -мерного симплекса $(a_{i_0}, \dots, a_{i_r})$ из N_k

$$c_k^r(a_{i_0}, \dots, a_{i_r}) = \varphi^r(B_{i_0}, \dots, B_{i_r}).$$

Алгебраические подкомплексы c_k^r нерва N_k , которые получены таким образом, являются циклами и последовательность $\{c_k^r\}$ есть истинный проекционный цикл c^r . Легко усмотреть, что это соответствие между φ^r и c^r является искомым изоморфизмом. Имея истинный цикл Вьеториса, остается лишь показать, что, наоборот, произвольный цикл Вьеториса гомологичен истинному проекционному циклу. Доказательство этого предложения [принадлежащее Александрову ⁴ в случае когда θ — конечная группа] основывается на компактности области коэффициентов.

2. Пусть теперь R — открытое многообразие размерности n . Рассмотрим произвольное клеточное разбиение M^n пространства R . Тогда можно применить после легкой модификации теорию, которую я развил ранее ⁵. С этой целью мы рассмотрим нечетные функции $\varphi^r(x^r)$ ориентированных клеток x^r из M^n , значения которых суть элементы θ , т. е. *бесконечные* алгебраические подкомплексы в классическом смысле. Операторы g_u и g_0 определяются, как и в ци-

² Л. Вьеторис дал определения лишь для групп целых чисел и групп порядка 2 в качестве областей коэффициентов (Math. Ann., 1927, Bd. 97, S. 454—472). Общие области коэффициентов были введены П. С. Александровым (см.: Fund. math., 1933, vol. 20, p. 140—151).

³ См.: Ann. Math., 1928, vol. 30, p. 101—187, а именно с. 107.

⁴ Ibid., p. 162.

⁵ См.: Мат. сб., 1936, т. 1, № 1, с. 97—102 (см. № 29 наст. изд.).

тированном мемуаре, причем первый из этих операторов дает границу алгебраического комплекса $\varphi^*(x^r)$ в классическом смысле. Группы Z_u^r и Z_0^r u -циклов и 0-циклов, так же как и подгруппы Γ_u^r и Γ_0^r циклов, являющихся границами, определяются автоматически. Группы Бетти $B_u^r(M^n, \theta) = Z_u^r - \Gamma_u^r$ изоморфны тогда группам $B_u^r(R, \theta)$, определенным в (BI). Показывается, далее, что если M_1^n и M_2^n являются двумя клеточными разбиениями R , то группы $B_0^r(M_1^n, \theta)$ и $B_0^r(M_2^n, \theta)$ также изоморфны. Следовательно, мы сможем написать $B_0^r(R, \theta)$ вместо $B_0^r(M^n, \theta)$.

Рассмотрим, с другой стороны, *конечные* алгебраические подкомплексы M^n , т. е. нечетные функции $f^r(x^r)$ со значениями в J и отличными от нуля лишь для конечного числа x^r . Эти функции таким же образом, как и всегда, приводят нас к группам Бетти $B_u^r(M^n, J)$ и $B_0^r(M^n, J)$. Легко доказывается, что $B_0^r(M^n, J)$ изоморфна группе $B_0^r(R, J)$, определенной в (BI), и что $B_u^r(M^n, J)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора клеточного подразделения M^n , так что группу $B_u^r(M^n, J)$ можно рассматривать как группу $B_u^r(R, J)$; эта последняя, впрочем, является обычной группой Бетти M^n в классическом смысле комбинаторного Analysis situs. Используя два *взаимных* клеточных разбиения, наконец, доказывается *теорема двойственности Пуанкаре*, т. е. следующие изоморфизмы

$$B_u^r(R, \theta) \approx B_0^{n-r}(R, \theta), \quad (1)$$

$$B_u^r(R, J) \approx B_0^{n-r}(R, J). \quad (2)$$

Можно также заметить, что согласно теореме взаимности из (VII) группы (1) и (2) являются взаимными.

20 апреля 1936 г.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ АЛЕКСАНДЕРА *

1. Пусть $^1 R$ — локально бикомпактное пространство, θ — замкнутое множество в R . Мы скажем, что комплекс $\varphi^r(E_0, \dots, E_r)$, u -комплекс в смысле (VI), лежит на θ , если для любых $E_0, \dots, E_r$ имеем соотношение

$$\varphi^r(E_0, \dots, E_r) = \varphi^r(E_0 Q, \dots, E_r Q).$$

Комплекс называется следуя Лефшецу ², *относительным циклом по отношению к Q* или проще *циклом mod Q* , если его граница лежит на Q . Пусть ζ^r есть цикл mod Q . Мы скажем, что ζ^r есть граница mod Q или что ζ^r гомологичен нулю mod Q , если существует комплекс φ^{r+1} такой, что $g_u \varphi^{r+1} - \zeta^r$ лежит на Q . Циклы-границы mod Q образуют подгруппу Γ_Q^r группы Z_Q^r всех r -мерных циклов, mod Q . Группа

$$B_u^r(R, Q; \theta) = Z_Q^r - \Gamma_Q^r$$

есть u -группа Бетти mod Q пространства R .

Аннулятором группы Γ_Q^r в группе F^r является группа Z_Q^r всех r -мерных 0-циклов, равных нулю на Q (в том смысле, что $z^r(p_0, \dots, p_r) = 0$, если все точки p_i принадлежат Q). Аннулятором Z_Q^r в F^r является группа H_Q^r всех 0-циклов-границ, равных нулю на Q . Следуя рассуждениям, аналогичным имеющимся в (BII), можно заметить, что группы $Z_Q^r - H_Q^r = B_0^r(R, Q, J)$ и $B_u^r(R, Q, \theta)$ являются взаимными.

2. Т е о р е м а. Группы $B_0^r(R, Q, J)$ и $B_0^r(R - Q, J)$ изоморфны; изоморфны также группы $B_u^r(R, Q, \theta)$ и $B_u^r(R - Q, \theta)$.

Второй из этих изоморфизмов немедленно следует из первого. Последний может быть доказан с помощью следующей леммы.

Л е м м а. Произвольный 0-цикл, нулевой на Q , гомологичен циклу, отличному от нуля лишь на множестве, бикомпактном в $R - Q$.

3. Предыдущие рассуждения могут быть применены для доказательства следующих теорем.

* Cycles relatifs. Théorème de dualité de M. Alexander.— С. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1641—1643. Представлено Г. Жюлиа. Перевод М. Б. Балавадзе.

¹ Эта заметка опирается на мои заметки (см. § 32—34 наст. изд.), они будут обозначаться (VI), (VII) и (VIII).

² С. Лефшец дал это определение, разумеется, для относительных циклов в обычном смысле Вьеториса. Он также исследовал для этого случая понятия относительных гомологий и групп Бетти (см.: Lefschetz S. Topology. New York, 1930).

Первая теорема двойственности. Пусть R — локально бикомпактное пространство, группы $B_0^r(R, J)$ и $B_0^{r-1}(R, J)$ которого нулевые. Какое бы ни было множество $Q \subset R$, замкнутое в R , группы $B_0^{r-1}(Q, J)$ и $B_0^r(R - Q, J)$ изоморфны.

Вторая теорема двойственности. Пусть R — локально бикомпактное пространство, группы $B_u^r(R, \theta)$ и $B_u^{r-1}(R, \theta)$ которого нулевые. Какое бы ни было множество $Q \subset R$, замкнутое в R , группы $B_u^{r-1}(Q, \theta)$ и $B_u^r(R - Q, \theta)$ изоморфны.

Пусть теперь $R = R^n$ — евклидово пространство размерности n . В случае $1 < r < n$ условия теорем двойственности выполнены. Следовательно, в этом случае по формулам (1) и (2) из (VIII) получается, что *изоморфные группы*

$$B_0^{r-1}(Q, J) \approx B_0^r(R^n - Q, J) \approx B_u^{n-r}(R^n - Q, J)$$

взаимны с группами

$$B_u^{r-1}(Q, \theta) \approx B_u^r(R^n - Q, \theta) \approx B_0^{n-r}(R^n - Q, \theta).$$

В частности, имеем, что $B_u^{r-1}(Q, \theta)$ и $B_u^{n-r}(R^n - Q, J)$ взаимны, что в точности есть *теорема двойственности Александра* в той общей форме, которую недавно ей придал Понтрягин.

4 мая 1936 г.

36

ОБ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ *

В предлагаемой работе будет дан пример *открытого отображения*¹ одномерного континуума на двумерный.

1. Прежде всего сделаем замечание о топологическом предельном переходе в смысле Александрова — Фрейденшталя (см. [1, 2]). Пусть

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \quad (1)$$

— последовательность топологических пространств, и для каждого n задано непрерывное отображение φ_n из X_n в X_{n-1} ($n = 2, 3, \dots$). Тогда точками предельного пространства X служат по определению последовательности

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad (2)$$

где $x_n \in X_n$ и $x_{n-1} = \varphi_n(x_n)$. Для каждой точки вида (2) из X n -я «координата» x_n обозначается через $\Phi_n(x)$, так что Φ_n отобра-

* Ueber offene Abbildungen. — Ann. Math., 1937, vol. 38, p. 36—38. Перевод В. В. Успенского.

¹ Непрерывное отображение пространства X в пространство Y называется открытым, если образ каждого открытого в X множества открыт в Y .

жают X в X_n . Введем на X топологию, объявляя точку $x \in X$ точкой прикосновения подмножества $M \subset X$ тогда и только тогда, когда для каждого n точка $\Phi_n(x)$ есть точка прикосновения для $\Phi_n(M)$ в X_n .

Пусть теперь наряду с (1) задана еще одна последовательность

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots \quad (3)$$

топологических пространств вместе с отображениями ψ_n из Y_n в Y_{n-1} и предельным пространством Y . По аналогии с Φ_n мы строим отображения Ψ_n из Y в Y_n .

Наконец, предположим, что каждое X_n открыто отображено на Y_n ; соответствующие отображения обозначим через f_n . Пусть, кроме того, для каждого $x_n \in X_n$ выполняется равенство

$$\Psi_n f_n(x_n) = f_{n-1} \Phi_n(x_n). \quad (4)$$

Из (4) следует, как легко видеть, что отображение f из X в Y , возникающее из отображений f_n :

$$f(x) = f\{x_n\} = \{f_n(x_n)\}$$

есть открытое отображение X на Y . Действительно, если $G \subset X$ открыто в X и $x \in G$, то существует такое n , что $x_n = \Phi_n(x)$ не является точкой прикосновения для $\Phi_n(X - G)$. Поскольку отображение $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ открыто, $y_n = f_n(x_n)$ не является точкой прикосновения для $f_n \Phi_n(X - G) = \Psi_n f(X - G)$. Следовательно, точка $y = f(x)$, у которой n -я координата есть y_n , не является точкой прикосновения для $f(X - G) \supset Y - f(G)$, откуда вытекает открытость множества $f(G)$ и тем самым отображения f .

2. Мы переходим теперь к построению анонсированного примера. Пусть

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

— убывающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Мы строим шаг за шагом двумерные евклидовы полиэдры Y_n (их можно представлять, например, расположенными в R^4). За Y_1 примем квадрат. Предположим, что уже задана триангуляция полиэдра Y_{n-1} , причем диаметр любого треугольника этой триангуляции меньше, чем ε_n . В каждом таком треугольнике вырежем квадратную дыру и заклейм ее листом Мёбиуса. При этом листы Мёбиуса должны быть реализованы как триангулированные поверхности.

Отображение ψ_n заключается в том, что каждой точке из Y_n , которая в то же время является точкой из Y_{n-1} , сопоставляется эта же самая точка, а каждый добавленный лист Мёбиуса непрерывно отображается на внутренность соответствующей дыры так, что точки края остаются неподвижными. Предельное пространство Y , возникающее в результате такого построения, есть не что иное, как известная понтрягинская поверхность, и является, следовательно,

двумерным континуумом (в смысле Брауэровского определения размерности) [3].

3. Прежде чем перейти к построению одномерного континуума X и его открытого отображения на Y , сделаем краткое предварительное замечание. Оно относится к следующему факту:

Тор (имеется в виду поверхность) можно открыто отобразить на лист Мёбиуса таким образом, чтобы некоторая простая замкнутая кривая, не ограничивающая на торе (например, экватор), отображалась бы на край листа.

В самом деле, пусть u и v — географические координаты, $-\pi \leq u < +\pi$, $-\pi \leq v < +\pi$. Отождествляя точку (u, v) с точкой $(u + v, -v)$, получим искомое отображение поверхности тора на лист Мёбиуса (кривая $v = 0$ переходит в край листа). Очевидно, что отображение с указанными свойствами можно также определить как симплициальное отображение.

Теперь за X_1 примем снова квадрат, а за отображение f_1 из X_1 в Y_1 — тождественное отображение. Предположим, что триангулированная поверхность X_{n-1} и открытое симплициальное отображение $f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$ уже построены. Каждая дыра, которая была вырезана из некоторого треугольника в Y_{n-1} (для перехода к Y_n), служит образом при отображении f_{n-1} одной или нескольких дыр в X_{n-1} . Вырежем все эти дыры, и к краю каждой из них приклеим триангулированную поверхность тора вдоль экватора. Тем самым X_{n-1} переходит в X_n . Каждый тор открыто и симплициально отобразим на тот лист Мёбиуса, которым заклеивалась соответствующая дыра в Y_{n-1} . Возникающее открытое симплициальное отображение X_n на Y_n обозначим через f_n . Далее, определим отображение φ_n из X_n на X_{n-1} так, чтобы имело место равенство

$$f_{n-1}\varphi_n(x_n) = \varphi_n f_n(x_n);$$

очевидно, это возможно.

Поскольку отображения f_n по построению открыты и удовлетворяют условиям (4), они определяют открытое отображение X на Y . Наконец, нетрудно убедиться (проще всего, пожалуй, применить теорему Александрова об ε -отображениях), что X одномерно.

Отметим к тому же, что Y можно топологически вложить в четырехмерное евклидово пространство, а X (как всякую кривую) — в трехмерное.

Болшево — Комаровка, близ Москвы

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandroff P. Sur les suites des espaces topologique. — C. r. Acad. sci. Paris, 1935, vol. 200, p. 1708—1711.
2. Freudenthal H. Die R_n -adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. — Proc. Amsterdam Acad., 1935, vol. 38, p. 414—417.
3. Pontrjagin L. Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension. — C. r. Acad. sci. Paris, 1930, vol. 190, p. 1105—1107.

КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ *

Задачей автора является построение своеобразного разностного исчисления, с одной стороны могущего в результате предельного перехода привести к дифференциальным операциям над кососимметричными тензорами (поливекторами), с другой же стороны стоящего в тесных взаимоотношениях с понятиями комбинаторной топологии. В частности, при помощи этого разностного исчисления могут быть определены некоторые новые инварианты комплексов и замкнутых множеств и доказаны некоторые обобщения законов двойственности.

§ 1. Мы рассматриваем в дальнейшем кососимметричные функции ¹

$$f_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$n + 1$ аргументов $x_0, x_1, \dots, x_n$. Так как значение такой функции f_n не меняется при совершении над $x_0, x_1, \dots, x_n$ произвольной четной подстановки, то мы говорим, что f_n есть функция ориентированного симплекса

$$X^n = (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

При изменении ориентировки симплекса знак функции меняется:

$$f_n(-X^n) = -f_n(X^n).$$

Функции $f_n(X^n)$ будут в дальнейшем предполагаться определенными для всех n -мерных симплексов X^n , входящих в некоторое множество K симплексов разного числа измерений. Относительно этого множества K мы предполагаем в дальнейшем, что:

- 1) вместе с X^n и симплекс $-X^n$ входит в K ;
- 2) вместе с X^n и все его $(n - 1)$ -мерные грани входят в K .

Условия 1) и 2) являются обобщением требований, предъявляемых к *комплексам* в комбинаторной топологии. Чтобы K было комплексом, необходимо еще, чтобы каждая вершина x входила лишь в конечное число симплексов из K . Это последнее условие не предполагается в дальнейшем.

Умножение симплексов определяется формулой

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)(y_0, y_1, \dots, y_m) = X^n Y^m = Z^{n+m+1} = \\ = (x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_m).$$

* В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.; Л.: ГОНТИ, 1937, вып. 4, с. 345—347.

¹ Для простоты предполагаем, что значениями рассматриваемых функций являются действительные числа, хотя в приложениях к топологии существенны и некоторые другие случаи.

Умножение функций $f_n(X^n)$ определяется формулой

$$f_n f_m = f_{n+m+1}(X^{n+m+1}) = \frac{1}{2} \sum_{X^n X^m = X^{n+m+1}} f_n(X^n) f_m(X^m),$$

где суммирование совершается по всем парам симплексов X^n и X^m , дающих по умножении X^{n+m+1} .

Легко видеть, что умножение функций ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Вместо коммутативности имеет место соотношение

$$f_n f_m = (-1)^{(n+1)(m+1)} f_m f_n.$$

В частности, при четном n

$$f_n f_n = (-1)^{(n+1)^2} f_n f_n = -f_n f_n = 0.$$

Для того чтобы развиваемая теория была применима к симплексам нулевого измерения, следует допустить, что каждому элементу x_0 соответствуют два симплекса нулевого измерения $+(x_0)$ и $-(x_0)$. Условившись в этом, положим для любого элемента x_0

$$e_0(+(x_0)) = 1, \quad e_0(-(x_0)) = -1.$$

Функция $e_0(X^0)$ симплексов нулевого измерения удовлетворяет выдвинутому выше условию.

Определим теперь операцию rot равенством

$$\text{rot } f_n = e_0 f_n.$$

Операция $\text{rot } f_n$, очевидно, является некоторой функцией f_{n+1} симплексов $n+1$ измерения. В силу второго условия, наложенного на систему симплексов K , она определена для всех симплексов x^{n+1} , входящих в K . Из равенства

$$e_0 e_0 = 0$$

вытекает непосредственно, что

$$\text{rot}(\text{rot } f_n) = 0.$$

Кроме того, операция rot , очевидно, дистрибутивна относительно сложения.

Будем говорить, что f_n есть *цикл*, если

$$\text{rot } f_n = 0.$$

Цикл f_n называется, далее, *гомологичным нулю*, если существует функция f_{n-1} , для которой $\text{rot } f_{n-1} = f_n$.

Циклы образуют относительно сложения группу так же, как и циклы, гомологичные нулю. Фактор-группа группы всех циклов по группе циклов, гомологичных нулю, называется группой Бетти системы симплексов K . Отношение определенных таким образом

групп Бетти к группам Бетти, обычно рассматриваемым в комбинаторной топологии, будет освещено в другой моей работе.

§ 2. Произведение двух циклов всегда равно нулю. Для циклов оказывается полезным введение второго умножения. Второе умножение, обозначаемое

$$[f_n, f_m],$$

может быть определено для любых функций f_n и f_m рассматриваемого типа, однако только для циклов мной доказана его ассоциативность. Общее его определение доставляется формулой

$$[f_n, f_m] = f_{n+m}(X^{n+m}) = \frac{1}{4(n+m+1)} \sum_{X^{n-1}X^0X^{m-1}=X^{n+m}} f_n(X^{n-1}X^0) f_m(X^0X^{m-1}).$$

Второе умножение дистрибутивно относительно сложения. В случае, если f_n, f_m и f_k — циклы, имеет место ассоциативный закон

$$[[f_n, f_m], f_k] = [f_n, [f_m, f_k]].$$

Вместо коммутативности имеет место соотношение

$$[f_n, f_m] = (-1)^{nm} [f_m, f_n].$$

Операция rot связана со вторым умножением формулой

$$(n+m+1) \text{rot} [f_n, f_m] = (n+1) [\text{rot} f_n, f_m] + + (-1)^n (m+1) [f_n, \text{rot} f_m].$$

Произведение (в смысле второго умножения) цикла, гомологичного нулю, на произвольный цикл является циклом, гомологичным нулю. Это позволяет определить *кольцо гомологий* системы K точно так же, как оно определяется обычно для многообразий.

38

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ, СОЕДИНЕННОЙ С ВОЗРАСТАНИЕМ КОЛИЧЕСТВА ВЕЩЕСТВА, И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ*

Совместно с И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым

ВВЕДЕНИЕ

Мы исходим из уравнения диффузии для простоты в двух измерениях

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad k > 0, \quad (1)$$

x и y обозначают здесь координаты точки на плоскости, t — время, v — плотность вещества в точке (x, y) в момент времени t . Допустим теперь, что, кроме диффузии, имеет место возрастание количества вещества, скорость которого в данной точке и в данный момент времени зависит от уже имеющейся плотности. Мы получим тогда уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F(v). \quad (2)$$

Естественно, нас интересуют лишь значения $F(v)$ при $v \geq 0$. Мы будем предполагать, что $F(v)$ — непрерывная и нужное количество раз дифференцируемая функция v , удовлетворяющая, кроме того, условиям

$$F(0) = F(1) = 0; \quad (3)$$

$$F(v) > 0, \quad 0 < v < 1; \quad (4)$$

$$F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(v) < \alpha, \quad 0 < v \leq 1. \quad (5)$$

Таким образом, мы предполагаем, что при весьма малых v скорость $F(v)$ возрастания v пропорциональна v (с коэффициентом пропорциональности α) и что при приближении v к единице наступает состояние «насыщения» и возрастание v прекращается. В соответствии с этим мы будем рассматривать только решения уравнения (2), удовлетворяющие условию

$$0 \leq v \leq 1. \quad (6)$$

* Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937, т. 1, вып. 6, с. 1—26.

Произвольные начальные значения v при $t=0$, удовлетворяющие соотношению (6), определяют одно и только одно решение¹ нашего уравнения (2) при $t>0$, подчиненное тому же условию (6).

Мы будем далее предполагать, что плотность v не зависит от координаты y . В этом случае основное уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v), \quad (7)$$

Предположим теперь, что в начальный момент $t=0$ при $x < a$ плотность $v=0$, а при $x > b \geq a$ плотность достигает своего максимального возможного значения $v=1$. Естественно, что область плотностей, близких к единице, будет с возрастанием t распространяться

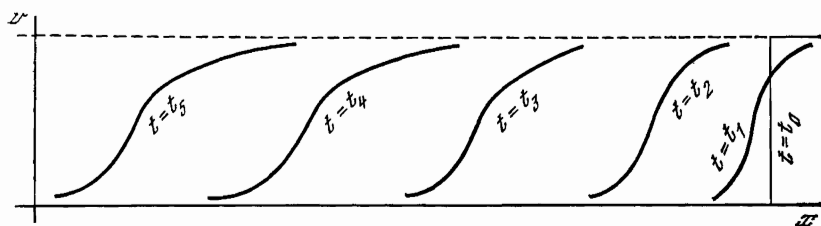


Рис. 1

справа налево, оттесняя область малых плотностей влево. В частном случае $a=b$ картина будет приблизительно такова, как изображено на рис. 1. Тот участок кривой плотности (как функции x), на который приходится основная часть падения плотности от единицы до нуля, с течением времени перемещается справа налево. По форме кривая плотности при $t \rightarrow \infty$ приближается к определенной предельной кривой. Задача заключается в том, чтобы определить эту предельную форму кривой плотности и предельную скорость ее перемещения справа налево. Оказывается, что искомая предельная скорость равна

$$\lambda_0 = 2 \sqrt{k\alpha}, \quad (8)$$

а предельная форма кривой плотности дается решением уравнения

$$\lambda_0 \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v), \quad (9)$$

обращающимся в нуль при $x = -\infty$ и в единицу при $x = +\infty$. Такое решение всегда существует и единственно с точностью до преобразования $x' = x + c$, не меняющего форму кривой.

Заметим, что уравнение (9) может быть получено следующим образом. Будем искать решение уравнения (7), обладающее тем свойст-

¹ Доказательство этого будет дано в § 3.

вом, что при изменении t форма кривой, изображающей зависимость v от x , не меняется, а сама эта кривая перемещается справа налево со скоростью λ . Такое решение имеет вид

$$v(x, t) = v(x + \lambda t). \quad (10)$$

Рассматривая теперь v как функцию одного переменного $z = x + \lambda t$, получим уравнение

$$\lambda \frac{dv}{dz} = k \frac{d^2v}{dz^2} + F(v).$$

Уравнение это, оказывается, имеет решения, удовлетворяющие условиям, поставленным выше для уравнения (9), при всевозможных $\lambda \geq \lambda_0$. Но только при $\lambda = \lambda_0$ мы получим интересующую нас предельную форму кривой плотности при указанных выше начальных условиях. Чтобы понять странное на первый взгляд явление наличия решений уравнения (7) вида (10) при $\lambda > \lambda_0$, т. е. решений, при которых расширение области больших (близких к единице) плотностей происходит со скоростью, большей λ_0 , разберем предельный случай $k = 0$. В этом случае диффузия отсутствует и уравнение (7) легко интегрируется. При наших начальных условиях в точках $x < a$, где плотность вначале была равна нулю, она останется равной нулю при любом $t > 0$. Однако нетрудно подсчитать, что при любом $\lambda > \lambda_0$ найдутся решения уравнения (7) вида (10), удовлетворяющие всем поставленным выше условиям. Кажущееся перемещение вещества справа налево будет здесь вызвано на самом деле ростом его плотности в каждой точке, происходящим совершенно независимо от течения процесса в других точках.

В § 1 изложенные во введении факты применяются к изучению биологических проблем, в § 2 и 3 будет дано доказательство этих фактов.

§ 1

Рассмотрим теперь некоторую территорию, заселенную каким-либо видом. Предположим сначала, что некоторый доминантный ген A распространен по изучаемой территории с постоянной концентрацией p ($0 \leq p \leq 1$). Предположим далее, что особи, обладающие признаком A (т. е. принадлежащие к генотипам AA и Aa), имеют преимущество в борьбе за существование над особями, не обладающими этим признаком (принадлежащими к генотипу aa); именно предположим, что отношение вероятности выживания особи, обладающей признаком A , к такой же вероятности для особи, им не обладающей, равно

$$1 + \alpha,$$

где α — малое положительное число. Тогда с точностью до членов порядка α^2 получим для приращения концентрации p за одно

поколение формулу (см. [1])

$$\Delta p = \alpha p (1 - p)^2. \quad (11)$$

Предположим теперь, что концентрация p различна в различных точках территории, занятой изучаемым видом, т. е. что p зависит от координат точки на плоскости x и y . Если бы при этом особи нашего вида оставались прикрепленными неподвижно к отдельным точкам территории, то соотношение (11) было бы по-прежнему справедливо. Допустим, однако, что в промежутке между рождением и размножением каждая особь перемещается в случайном направлении (все направления равновероятны) на то или иное расстояние. Пусть при этом $f(r) dr$ будет вероятность перемещения на расстояние, лежащее между r и $r + dr$, а

$$\rho = \sqrt{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr}$$

— среднеквадратичное перемещение. Тогда получим вместо (11) формулу

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \eta) \frac{f(r)}{2\pi r} d\xi d\eta - p(x, y) + \\ & + \alpha p(x, y) \{1 - p(x, y)\}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Мы предполагаем теперь, что p дифференцируемо по x , y и времени t (считая последнее в поколениях) и что α и ρ весьма малы, а третий момент

$$\rho^3 = \int_0^{\infty} r^3 |f(r) dr$$

мал по сравнению с ρ^2 . В этом случае, разлагая в (12) $p(\xi, \eta)$ в ряд Тейлора по $\xi - x$ и $\eta - y$ и ограничиваясь членами второго порядка (члены первого порядка исчезают), получаем² приближенно дифференциальное уравнение для p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \alpha p (1 - p)^2. \quad (13)$$

К этому уравнению применимы все рассуждения, относящиеся к общему уравнению (2).

Подчеркнем еще раз сделанные допущения. Мы предположили, что концентрация p плавно меняется в зависимости от места и време-

² По поводу перехода от (12) к (13) см. аналогичные рассуждения, например, у А. Я. Хинчина в его книге [2].

ни (дифференцируемость по x, y, t), что изменения эти вызваны отбором в отношении $(1 + \alpha)$: 1 в пользу доминантного признака A и беспорядочными перемещениями отдельных особей со среднеквадратичным перемещением одной особи за время от рождения до размножения ρ и, наконец, что α и ρ малы (ρ — по сравнению с расстояниями, на которых происходят значительные изменения концентрации p). В этом случае, принимая одно поколение за единицу времени, мы и получаем уравнение (13).

Обратимся теперь к тому случаю, когда обширная территория уже занята геном A с концентрацией p , близкой к единице. Вдоль границы этой области, естественно, должна лежать переходная полоса промежуточных концентраций. За пределами этой полосы будем предполагать p близкими к нулю. В силу положительного отбора область, занятая геном A , будет расширяться, иначе говоря, ее граница будет перемещаться в сторону территорий, еще не занятых геном A , вдоль же этой границы будет все время сохраняться полоса промежуточных концентраций. Нашей первой задачей является определение скорости наступления гена A , т. е. скорости перемещения границы области, заселенной геном A , в направлении нормали к этой границе. Формула (8) дает готовый ответ на этот вопрос: так как k в нашем случае равно $\rho^2/4$, то искомая скорость равна

$$\lambda = \rho \sqrt{\alpha}. \quad (14)$$

В качестве второй задачи естественно возникает задача определения ширины переходной области. В силу формулы (9) в направлении нормали к границе концентрация p удовлетворяет уравнению

$$\lambda \frac{dp}{dn} = \frac{\rho^2}{4} \frac{d^2p}{dn^2} + \alpha p(1-p)^2,$$

или после деления на α и замены λ с помощью формулы (14)

$$\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}} \frac{dp}{dn} = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\alpha} \frac{d^2p}{dn^2} + p(1-p)^2.$$

Вводя новое переменное v с помощью соотношения

$$n = (\rho/\sqrt{\alpha}) v, \quad (15)$$

получаем уравнение

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{4} \frac{d^2p}{dv^2} + p(1-p)^2, \quad (16)$$

уже не содержащее ни α , ни ρ . Граничные условия для этого уравнения таковы же, как и для (9):

$$p(-\infty) = 0, \quad p(+\infty) = 1.$$

Из соотношения (15) заключаем, что ширина переходной полосы пропорциональна

$$L = \rho/\sqrt{\alpha}. \quad (17)$$

Пусть, например, $\rho = 1$, $\alpha = 0,0001$, тогда $\lambda = 0,01$, $L = 100$.

§ 2

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$\lambda \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v), \quad (18)$$

где λ и k будем считать положительными, а относительно функции $F(v)$ предполагать, что она удовлетворяет условиям, перечисленным во введении.

Мы ставим сейчас целью установить те соотношения между λ , k и $\alpha = F'(0)$, при которых это уравнение имеет решение, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$0 \leq v(x) \leq 1,$$

$$v(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad v(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Положим $dv/dx = p$. Тогда

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dp}{dv} p.$$

Подставляя это в уравнение (18), найдем

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\lambda p - F(v)}{kp}. \quad (19)$$

Нас интересуют те интегральные кривые этого уравнения, которые на плоскости (p, v) проходят между прямыми $v = 0$ и $v = 1$. Вообще говоря, среди этих кривых могут быть кривые следующих типов:

1. Интегральные кривые, которые не подходят к одной из прямых $v = 0$, $v = 1$ ближе чем на некоторое $\varepsilon > 0$.

2. Интегральные кривые, которые бесконечно удаляются от оси v , приближаясь асимптотически к одной из прямых $v = 0$, $v = 1$.

3. Интегральные кривые, которые пересекают одну из этих прямых в некоторой конечной точке, не принадлежащей оси v .

4. Интегральные кривые, которые приближаются к точкам $v = 0$, $p = 0$ и $v = 1$, $p = 0$ и не принадлежат ни к одному из предыдущих типов.

Но легко видеть, что интегральным кривым первого типа не могут соответствовать решения уравнения (18), удовлетворяющие поставленным условиям, потому что для них v не может быть как угодно близко к 0 и 1.

Интегральных кривых второго типа вообще не существует, так как у кривых этого типа обязательно должны быть точки, для которых при очень больших $|p|$ величина $|dp/dv|$ очень велика. Но дробь $(\lambda p - F(v))/kp$ при больших значениях $|p|$ приблизительно равна λ/k (в силу ограниченности $F(v)$ на интервале $(0, 1)$).

Интегральным кривым третьего типа соответствуют решения уравнения (18), не остающиеся всегда между 0 и 1. Действительно, допустим, например, что какая-нибудь кривая этого типа приближается к точке $v = 1$, $p = p_1 \neq 0$. Вблизи прямой $v = 1$

$$\frac{dp}{dv} \approx \frac{\lambda}{k} \neq 0,$$

следовательно, здесь можно рассматривать p как функцию от v . Пусть $p = \varphi(v)$. Так как $\varphi(1) = p_1 \neq 0$, то и на некотором малом интервале $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ $|\varphi(v)|$ остается больше некоторой положительной постоянной C . Обозначим через x_0 значение x , при котором $v = 1 - \varepsilon$. Тогда, интегрируя уравнение $dv/dx = \varphi(v)$, находим

$$\int_{x_0}^x dx = x - x_0 = \int_{1-\varepsilon}^v \frac{dv}{\varphi(v)}.$$

Отсюда видно, что, когда v меняется от $1 - \varepsilon$ до $1 + \varepsilon$, изменение x по абсолютной величине не превосходит $2\varepsilon/C$. Поэтому v при изменении x от x_0 до $x_0 + 2\varepsilon/C$ обязательно переходит через единицу.

Остается рассмотреть интегральные кривые четвертого типа. Каждая из точек $v = 0$, $p = 0$ и $v = 1$, $p = 0$ есть особая точка дифференциального уравнения (19). Интегральная кривая четвертого типа должна приближаться к каждой из этих точек, не пересекая прямых $v = 0$ и $v = 1$, следовательно, не закручиваясь. Поэтому, чтобы такие кривые существовали, характеристическое уравнение для каждой из этих точек должно иметь действительные корни. Напишем $F(v)$ в форме

$$F(v) = \alpha v + \varphi_1(v).$$

Тогда, очевидно, $\varphi_1(v) = o(v)$. Поэтому характеристическое уравнение для точки $v = 0$, $p = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - \rho & -\alpha \\ k & -\rho \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\rho^2 - \lambda\rho + \alpha k = 0. \quad (20)$$

Это уравнение будет иметь действительные корни, если

$$\lambda^2 \geq 4\alpha k.$$

Чтобы получить характеристическое уравнение для точки $v = 1$, $p = 0$, сделаем замену переменных, положив $v = 1 - u$. Получаем

$$\frac{dp}{du} = \frac{-\lambda p + \Phi(u)}{kp},$$

где

$$\Phi(u) = F(1 - u).$$

Очевидно, $F'(1) \leq 0$ и $\Phi'(0) = -F'(1) = A \geq 0$. Следовательно, но,

$$\Phi(u) = Au + o(u)$$

и характеристическое уравнение для точки $v = 1$, $p = 0$ примет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \rho & A \\ k & -\rho \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\rho^2 + \lambda\rho - Ak = 0. \quad (21)$$

Это уравнение будет иметь действительные корни, если $\lambda^2 \geq -4Ak$.

Так как $\alpha > 0$, то уравнение (20) имеет действительные корни одного знака. Следовательно, точка $(0, 0)$ есть узел. Все интегральные кривые, попавшие в некоторую достаточно малую окрестность этой точки, проходят через эту точку. Уравнение же (21) имеет корни разных знаков, если $A > 0$. Поэтому если $A > 0$, то через точку $(1, 0)$ проходят только две интегральные кривые по строго определенным направлениям. Пусть эти направления даются уравнениями

$$m_1u + n_1p = 0, \quad m_2u + n_2p = 0. \quad (22)$$

Известно³, что коэффициенты m_1, n_1, m_2, n_2 определяются из уравнений

$$km_1 - \rho_1 n_1 = 0, \quad km_2 - \rho_2 n_2 = 0, \quad (23)$$

где ρ_1 и ρ_2 — корни характеристического уравнения (21). Так как корни разных знаков, то и угловые коэффициенты прямых (22) будут разных знаков⁴. Поэтому в каждом из углов, образованных пересечением прямых $v = 1$ и $p = 0$, находится только одна интегральная кривая уравнения (19), проходящая через точку $v = 1$, $p = 0$. На рис. 2 изображено примерное расположение этих кривых. Кривая II пересекает ось p ниже начала координат, потому что уравнение (19) показывает, что $dp/dv > 0$ в той части полосы, заключенной между прямыми $v = 0$ и $v = 1$, которая лежит ниже оси v . Поэтому кривую II надо исключить из рассмотрения. Остается исследовать⁵ кривую I.

³ См., например, Бендиксон [3] (или В. В. Степанов [4]. — *Примеч. ред.*).

⁴ Совершенно так же можно показать, что оба угловых коэффициента касательных в начале координат к интегральным кривым уравнения (19) положительны.

⁵ Если $A = 0$, то можно только утверждать, что существует по крайней мере одна интегральная кривая типа I, приближающаяся к точке $(1, 0)$ по некоторому определенному направлению, угловой коэффициент которого отрицателен (см. [5]).

Мы хотим доказать, что всякая кривая типа I пересекает ось p в начале координат. Докажем прежде всего, что эта кривая не может пересекать оси p ниже начала координат. Рассмотрим для этого изоклины уравнения (19). Уравнение семейства этих линий имеет вид

$$\frac{\lambda p - F(v)}{kp} = C. \quad (24)$$

Здесь C есть значение dp/dv в точке v, p . Отсюда

$$p = \frac{F(v)}{\lambda - Ck}. \quad (24')$$

Уравнение (24) представляет семейство кривых, проходящих через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. На рис. 3 схематически показано это

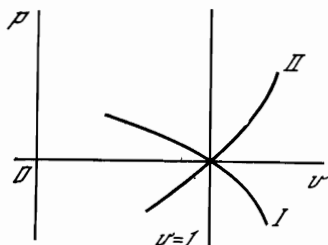


Рис. 2

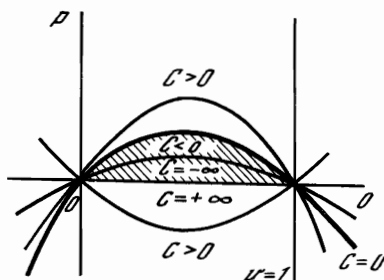


Рис. 3

семейство. Рядом с каждой кривой показано соответствующее ей значение C . Жирной линией начерчена кривая, соответствующая $C = 0$. По мере повышения вершин кривых соответственно увеличивается C , приближаясь к величине λ/k , которая соответствует прямым $v = 0$ и $v = 1$. В области, заключенной между кривой $C = 0$ и осью v (заштрихованной на рис. 3), $C < 0$, причем в точках, близких к оси v , C очень велико по абсолютной величине. Ниже оси v $C > 0$, при понижении вершины кривой от уровня оси v до $-\infty$ C уменьшается от $+\infty$ до λ/k .

Теперь уже легко видеть, что интегральная кривая I (см. рис. 2) не может пересекать оси Op ниже начала координат. Действительно, в этом случае кривая I должна была бы пересечь ось v . Так как $dp/dv = -\infty$ на верхней стороне этой оси и $dp/dv = +\infty$ на нижней ее стороне, то выпуклость интегральной кривой I в точке пересечения ее с осью v обращена к прямой $v = 1$. Поэтому, чтобы эта кривая попала в точку $(1, 0)$, необходимо, чтобы dp/dv обращалась в ∞ выше оси v , что невозможно. По этой же причине интегральная кривая I не может пересечь прямую $v = 1$ выше оси v .

Докажем теперь, что интегральная кривая I не может пересекать оси p выше начала координат. Для этого достаточно доказать, что

существует такая полупрямая, проходящая через начало координат в первом координатном угле, которую не пересекает ни одна из интегральных кривых, пересекающих ось p в ее положительной части. Из уравнения (24) мы получаем⁶.

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=0} = \frac{\alpha}{\lambda - Ck}.$$

Определим C так, чтобы $(dp/dv)_{v=0} = C$. Для этого имеем уравнение

$$\frac{\alpha}{\lambda - Ck} = C,$$

или

$$kC^2 - C\lambda + \alpha = 0,$$

откуда

$$C = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha k}}{2k}. \quad (25)$$

Так как мы предполагаем, что

$$\lambda^2 \geq 4\alpha k,$$

то оба значения C , даваемые равенством (25), действительны и положительны. Обозначим через C_0 одно из них и проведем прямую

$$p = C_0 v. \quad (26)$$

Легко видеть, что для всех тех точек полосы между прямыми $v = 0$ и $v = 1$, которые лежат выше прямой (26) или даже на самой этой прямой (за исключением начала координат)⁷,

$$\frac{dp}{dv} > C_0.$$

Поэтому ни одна интегральная кривая, проходящая через какую-нибудь точку оси p , лежащую выше начала координат, никогда не пересекает ту часть прямой (26), которая расположена выше оси v . Тем самым доказано, что всякая интегральная кривая типа I (см. рис. 2) проходит через начало координат.

Докажем, что существует только одна интегральная кривая типа I . (Это доказательство необходимо, конечно, только в случае $A = 0$.) Действительно, мы доказали, что все кривые типа I проходят через начало координат. С другой стороны, из равенства (19) следует, что при $p > 0$ и неизменном v производная dp/dv увеличи-

⁶ $\frac{dp}{dv}$ означает производную функции $p = p(v)$, определяемой уравнением (24').

⁷ Здесь p есть функция от v , определяемая уравнением (18).

вается вместе с p . Отсюда следует, что две интегральные кривые, выходящие из начала координат, не могут пройти через точку $(1, 0)$.

Докажем теперь, что кривой I соответствует решение уравнения (18), удовлетворяющее поставленным вначале условиям. Заметим прежде всего, что всякий перпендикуляр к оси v пересекает интегральную кривую I уравнения (19) только в одной точке, иначе выше оси v dp/dv обращалась бы в ∞ . Поэтому вдоль этой кривой p есть функция от v , $p = \varphi(v)$. Вспомним еще, что кривая I пересекает ось v в точке $(1, 0)$ под углом, тангенс которого отрицателен, а в начале координат — под углом, тангенс которого положителен. Поэтому при малых значениях v

$$p = k_1 v + o(v), \quad (27)$$

а при малых значениях $1 - v$

$$p = k_2 (1 - v) + o(1 - v), \quad (28)$$

где k_1 и k_2 положительны.

Вспомним теперь, что $p = dv/dx$. Поэтому $dv/dx = \varphi(v)$, или $dx = dv/\varphi(v)$. Интегрируя последнее равенство, получаем

$$x - x_0 = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\varphi(v)}, \quad 0 < v_0 < 1.$$

В силу соотношений (27) и (28) отсюда следует, что при $v \rightarrow 0$, $x \rightarrow -\infty$ и при $v \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

§ 3

Вместо уравнения (7), о котором говорилось во введении, мы будем в этом параграфе рассматривать уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(v), \quad (29)$$

где функция $F(v)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$F(0) = F(1) = 0; \quad (30)$$

$$F(v) > 0, \quad 0 < v < 1; \quad (31)$$

$$F'(0) = 1; \quad (32)$$

$$F'(v) < 1, \quad 0 < v \leq 1; \quad (33)$$

$F'(v)$ ограничена и непрерывна на интервале $(0, 1)$. Кроме того, мы будем предполагать, что $F(v)$ дифференцируема нужное число раз. Именно общее уравнение (7), данное во введении, можно всегда свести к виду (29) при помощи замены переменных

$$x = \sqrt{k/\alpha} \bar{x} \quad \text{и} \quad t = \bar{t}/\alpha.$$

Основной целью этого параграфа является доказательство того, что при $t \rightarrow \infty$ участок кривой плотности $v(x, t)$ (как функции от x), на который приходится основная часть падения от 1 до 0, с течением времени перемещается влево со скоростью, которая приближается к 2 (снизу), а сама форма кривой плотности приближается при этом к форме графика того решения $u(x)$ уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2 \frac{du}{dx} + F(v) = 0, \quad (34)$$

которое обращается в 0 при $x \rightarrow -\infty$ и в 1 при $x \rightarrow \infty$; существование такого решения было доказано в § 2.

Прежде чем приступить к доказательству основных утверждений этого параграфа, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t, v),$$

частным случаем которого является уравнение (29). Мы докажем существование решения, принимающего заданные значения при $t = 0$, и изучим ряд его свойств.

Т е о р е м а 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t, v), \quad (35)$$

где непрерывная и ограниченная функция $F(x, t, v)$ удовлетворяет условию Липшица по v и x , т. е.

$$|F(x_2, t, v_2) - F(x_1, t, v_1)| < k |v_2 - v_1| + k |x_2 - x_1|, \quad (36)$$

(k — постоянная, не зависящая от x, t, v). Пусть $f(x)$ — некоторая ограниченная функция, определенная для всех значений x . Для простоты будем предполагать, что $f(x)$ имеет только конечное число точек разрыва. Тогда существует одна и только одна ограниченная при ограниченных значениях t функция $v(x, t)$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (35) и при $t = 0$ принимает значение $f(x)$ во всех точках непрерывности этой функции. В дальнейшем, для краткости говоря, что $v(x, t)$ обращается в $f(x)$ при $t = 0$, мы будем всегда иметь в виду только точки непрерывности функции $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_0(x, t)$ — ограниченная функция, удовлетворяющая при $t > 0$ уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

и принимающая значения $f(x)$ при $t = 0$. Подставляя эту функцию вместо v в правую часть уравнения (35), мы по формуле

$$\tilde{v}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v_0(\xi, \eta)) d\xi \quad (38)$$

находим решение этого уравнения, принимающее значение 0 на оси x (см. [6]). Функция

$$v_1(x, t) = v_0(x, t) + \tilde{v}_1(x, t)$$

принимает при $t = 0$ значения $f(x)$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = F[x, t, v_0(x, t)].$$

Вообще по формуле

$$v_{i+1}(x, t) = v_0(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v_i) d\xi \quad (39)$$

находим функцию $v_{i+1}(x, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$\frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_{i+1}}{\partial x^2} = F(x, t, v_i) \quad (40)$$

и обращающуюся в $f(x)$ при $t = 0$.

Докажем, что последовательность функций $v_i(x, t)$ равномерно сходится. Действительно, принимая во внимание (36), мы находим из равенств (39)

$$\begin{aligned} M_{i+1}(t) &= \sup_{\eta \leq t} |v_{i+1}(x, \eta) - v_i(x, \eta)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} |F(\xi, \eta, v_i(\xi, \eta)) - \\ &- F(\xi, \eta, v_{i-1}(\xi, \eta))| d\xi \leq \int_0^t k M_i(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (41)$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} d\xi = 2\sqrt{\pi}$. Но, обозначая через M_0 верхнюю границу значений $|f(x)|$ и $F(x, t, 0)$, мы получаем

$$|v_0(x, t)| \leq M_0$$

и при помощи равенства (38)

$$M_1 \leq \int_0^t (k+1) M_0 dt = (k+1) M_0 t = M t.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (41), легко получаем

$$M_i \leq \frac{M k^{i-1} t^i}{i!},$$

из чего уже совсем просто получается равномерная сходимость v_i .

Положим

$$v(x, t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i(x, t).$$

Функция $v(x, t)$ обращается в $f(x)$ при $t = 0$. Кроме того, как легко видеть, она удовлетворяет уравнению

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(\xi, \eta, v(\xi, \eta)) d\xi. \quad (42)$$

Отсюда ясно, что $v(x, t)$ есть непрерывная функция x и t при $t > 0$. В цитированном уже мемуаре Жеврея [6, с. 343—344] доказывается, что при любой ограниченной функции F второе слагаемое правой части последнего равенства имеет ограниченную производную по x . В силу условия (36) отсюда следует, что функция $F(x, t, v(x, t))$ при $t > 0$ имеет ограниченные производные любого порядка по x и потому $v(x, t)$ (см. [6, с. 351]) удовлетворяет уравнению (35).

Единственность ограниченного решения доказывается следующим образом. Допустим, что существуют две ограниченные функции $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$, принимающие одинаковые значения при $t = 0$. Тогда они удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} v_2(x, t) - v_1(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(\xi, \eta, v_2) - F(\xi, \eta, v_1)] d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Положим

$$M(t) = \sup_{t \geq \eta} |v_2(x, \eta) - v_1(x, \eta)|.$$

Тогда из (43) при помощи (36) получим

$$M(t) \leq k \int_0^t M(\eta) d\eta,$$

что невозможно.

П р и м е ч а н и е. Для областей, ограниченных слева и справа некоторыми линиями $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$, а сверху и снизу — некоторыми прямыми $t = t_0$ и $t = t_1 > t_0$, в цитированном уже мемуаре Жеврея [6] доказаны существование и единственность ограниченной функции, удовлетворяющей внутри этой области уравнению (35) и принимающей на линиях $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$ и $t = t_0$ заданные непрерывные и ограниченные значения. Аналогично можно было бы доказать существование и единственность ограниченной функции, удовлетворяющей уравнению (35) внутри области G , ограниченной

только с одной стороны линией $x = \varphi(t)$, а сверху и снизу прямыми $t = t_0$ и $t = t_1 > t_0$ и принимающей заданные ограниченные и непрерывные значения на линии $x = \varphi(t)$ и на прямой $t = t_0$.

Теорема 2. При замене функции $F(x, t, v)$ новой функцией $F_1(x, t, v)$, для которой всегда

$$F_1(x, t, v) \geq F(x, t, v),$$

функция $v(x, t)$ не уменьшается, если начальные условия не изменились.

З а м е ч а н и е. Если уравнение (35) интерпретировать как уравнение распространения тепла, то функция $F(x, t, v)$ характеризует интенсивность зарождения теплоты, и физически теорема 2 делается очевидной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $v(x, t)$ и $v_1(x, t)$ удовлетворяют соответственно уравнению (35) и уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = F_1(x, t, v_1).$$

Вычитая почленно, получим, что функция

$$w(x, t) = v_1(x, t) - v(x, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F_1(x, t, v_1) - F(x, t, v).$$

Положим

$$w(x, t) = \bar{w}(x, t) e^{-kt},$$

где k — то же, что в неравенстве (36). Тогда

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = k\bar{w} + e^{kt} [F_1(x, t, v_1) - F(x, t, v)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{k\bar{w} + e^{k\eta} [F_1(\xi, \eta, v_1) - \\ &- F(\xi, \eta, v)]\} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{k\bar{w} + \\ &+ e^{k\eta} [F_1(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v_1) + F(\xi, \eta, v_1) - \\ &- F(\xi, \eta, v)] d\xi \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \{k\bar{w} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{k\eta} [F(\xi, \eta, v_1) - F(\xi, \eta, v)] d\xi \geqslant \\
& \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} (k\bar{w} - k|\bar{w}|) d\xi.
\end{aligned} \tag{44}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно 0, если $\bar{w} \geqslant 0$ и равно $-2k\bar{w}$, если $\bar{w} \leqslant 0$. Обозначим через $-m(t)$ нижнюю границу значений $\bar{w}(\xi, \eta) - |\bar{w}(\xi, \eta)|$ при $\eta \leqslant t$. Для доказательства нашей теоремы, очевидно, достаточно показать, что $m(t) \equiv 0$. А для этого заметим, что из неравенства (44) следует, что

$$\bar{w}(x, t) \geqslant -k \int_0^t m(\eta) d\eta$$

и потому

$$m(t) \leqslant k \int_0^t m(\eta) d\eta,$$

что возможно только при $m(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3. При увеличении $f(x)$ величина $v(x, t)$ не уменьшается.

Физически содержание этой теоремы так же ясно, как и содержание предыдущей, если уравнение (35) интерпретировать как уравнение распространения теплоты в стержне. Функция $f(x)$ представляет начальную температуру стержня. Когда эта температура повышается, то и последующая температура также повышается.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ удовлетворяют уравнению (35) и при $t = 0$ обращаются соответственно в $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $f_2(x) \geqslant f_1(x)$. Докажем, что $v_2 \geqslant v_1$.

Функция $w = v_2 - v_1$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F(x, t, v_2) - F(x, t, v_1).$$

В силу условия (36)

$$F(x, t, v_2) - F(x, t, v_1) \geqslant -k|w|.$$

Значит, по теореме 2 функция $w(x, t)$ не меньше функции $v^*(x, t)$, которая при $t = 0$ обращается в $f_2(x) - f_1(x)$, а при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = -k|v^*|.$$

Ограниченным при ограниченных t решением этого уравнения (единственным по теореме 1) является функция $e^{-kt}v^{**}$, где $v^{**}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (37) при начальном условии $v^{**}(x, 0) =$

$= f_2(x) - f_1(x)$ (очевидно, она неотрицательна). Следовательно,
 $w = v_2 - v_1 \geq 0$,

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если всюду $f(x) \geq 0$ и $F(x, t, 0) = 0$, то и
 $v(x, t) \geq 0$.

Доказательство. По теореме 3 при уменьшении $f(x)$ функция $v(x, t)$ не увеличивается. При $f(x) \equiv 0$ имеем $v(x, t) \equiv 0$. Следовательно, при $f(x) \geq 0$ будет $v(x, t) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если, кроме условия теоремы 4, выполняется еще условие, что $f(x) > 0$ на некотором интервале положительной длины, то при $t > 0$

$$v(x, t) > 0.$$

Доказательство получается из доказательства теоремы 3, если в нем положить $v_2 = v$ и $v_1 = 0$ и принять во внимание, что $v^{**}(x, t)$, представляемая интегралом Пуассона, обязательно положительна при $t > 0$.

Теорема 6. Если $F(x, t, 1) \equiv 0$ и $f(x) \leq 1$, то и $v(x, t) \leq 1$.

Доказательство. По теореме 3 при увеличении $f(x)$ функция $v(x, t)$ не уменьшается. При $f(x) \equiv 1$ функция $v(x, t) \equiv 1$. Отсюда следует доказываемая теорема.

Теорема 7. Если функция $v(x, t)$ при $t = 0$ принимает значения монотонно возрастающей дифференцируемой функции $f(x)$ и при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(t, v), \quad (45)$$

то $v(x, t)$ есть неубывающая функция от x при любом $t > 0$.

Доказательство. По теореме 1

$$v(x, t) = v_0(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\eta, v(\xi, \eta)) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} d\xi, \quad (46)$$

где $v_0(x, t)$ при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (47)$$

и обращается в $f(x)$ при $t = 0$. Если $f(x)$ дифференцируема, то $\partial v_0(x, t)/\partial x$ приближается к $f'(x)$, когда точка (x, t) приближается к $(x, 0)$ (см. [6, с. 330—331]). С другой стороны, частная производная по x от второго слагаемого правой части (46) по абсолютной величине не превосходит $(4/\sqrt{\pi}) M t^{1/2}$, если $|F| \leq M$ (см. [6, с. 344]). Следовательно, $\partial v(x, t)/\partial x$ приближается к $f'(x)$, когда $t \rightarrow 0$. Если предположить еще, что функция $v(x, t)$ имеет производные $\partial^2 v/\partial t \partial x$

и $\partial^3 v / \partial x^3$, что имеет место, если $F(t, v)$ трижды дифференцируема по v , то функция $w(x, t) = \partial v(x, t) / \partial x$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial v} w. \quad (48)$$

Тогда, применяя теорему 4, мы найдем, что $w(x, t) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 8. Если

$$f^{(e)}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f^{(0)}(x)$$

так, что при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(e)} - f^{(0)}| dx \rightarrow 0,$$

то при всяком $t > 0$ функция $v^{(e)}(x, t)$, удовлетворяющая при $t > 0$ уравнению (35) и обращающаяся в $f^{(e)}(x)$ при $t = 0$, приближается к функции $v^{(0)}(x, t)$, также удовлетворяющей уравнению (35) при $t > 0$ и обращающейся в $f^{(0)}(x)$ при $t = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем находить $v^{(e)}(x, t)$ и $v^{(0)}(x, t)$ методом последовательных приближений, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Функции $v_0^{(e)}$ и $v_0^{(0)}$ даются соответственно формулами

$$v_0^{(e)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(e)}(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} d\xi,$$

$$v_0^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(0)}(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} d\xi.$$

Отсюда сразу видно, что при $t > 0$

$$v_0^{(e)}(x, t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_0^{(0)}(x, t).$$

Величина $\tilde{v}_1^{(e)}(x, t) - \tilde{v}_1^{(0)}(x, t)$ (обозначения те же, что и в доказательстве теоремы 1) дается формулой

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(\xi, \eta, v_0^{(e)}) - F(\xi, \eta, v_0^{(0)})] d\xi.$$

Отсюда

$$v_1^*(x, t) = |\tilde{v}_1^{(e)}(x, t) - \tilde{v}_1^{(0)}(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} |v_0^{(e)}(\xi, \eta) - v_0^{(0)}(\xi, \eta)| d\xi.$$

Положим

$$v_0^*(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(\varepsilon)}(\xi) - f^{(0)}(\xi)| \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} d\xi.$$

Очевидно,

$$v_0^*(x, t) \geq |v_0^{(\varepsilon)}(x, t) - v_0^{(0)}(x, t)|$$

и потому

$$\begin{aligned} v_1^*(x, t) &\leq \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} v_0^*(\xi, \eta) d\xi = \\ &= k \int_0^t v_0^*(x, t) d\eta = ktv_0^*(x, t). \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из того, что $v_0^*(x, t)$ удовлетворяет уравнению (47). Таким образом,

$$v_1^*(x, t) \leq ktv_0^*(x, t).$$

Совершенно так же мы найдем, что

$$v_i^*(x, t) = |v_i^{(\varepsilon)}(x, t) - v_i^{(0)}(x, t)| \leq \frac{(kt)^i}{i!} v_0^*(x, t).$$

Отсюда следует, что, выбирая ε достаточно малым, мы можем сделать величину $\sum_{i=0}^{\infty} v_i^*(x, t)$, а следовательно и $|v^{(\varepsilon)}(x, t) - v^{(0)}(x, t)|$, как угодно малой, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 9. *Функция $v(x, t)$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (45), при $t = 0$ и $x < 0$ обращается в 0, а при $t = 0$ и $x > 0$ обращается в 1, есть неубывающая функция от x при любом $t > 0$, причем $\partial v(x, t)/\partial x > 0$ при $t > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно последней лемме функцию $v(x, t)$ можно рассматривать как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $v^{(\varepsilon)}(x, t)$, которая на оси x при $|x| \geq \varepsilon$ принимает такие же значения, как и $v(x, t)$, и на всей оси x непрерывна вместе со своей производной по x и монотонна. Но относительно функции $v^{(\varepsilon)}(x, t)$ только что было доказано (теорема 7), что при $t > 0$ она монотонно возрастает вместе с x . Значит, то же справедливо и для $v(x, t)$.

Докажем еще, что при $t > 0$ величина $\partial v(x, t)/\partial x > 0$. Для этого надо только показать, что при $t > 0$ не может быть $\partial v(x, t)/\partial x = 0$. Это же следует из таких соображений. Величина $\partial v(x, t)/\partial x$ удовлетворяет при $t > 0$ уравнению (48). Следовательно, величина $\bar{w}(x, t) = e^{Mt} \partial v(x, t)/\partial x$, где M — верхняя граница значений $|\partial F/\partial v|$,

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial F}{\partial v} + M \right] \bar{w}.$$

Так как

$$\partial F / \partial v + M \geq 0,$$

то на основании теоремы 2 функция $\bar{w}(x, t)$ при $t > t_0 > 0$ не меньше функции $\bar{w}(x, t)$, которая при $t = t_0$ совпадает с $\bar{w}(x, t)$, а при $t > t_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0.$$

Эта же последняя функция всюду при $t > t_0$ положительна, так как при $t = t_0$ функция $\bar{w}(x, t)$ не равна 0 тождественно, если t_0 достаточно мало.

Во всем дальнейшем мы будем обозначать через $v(x, t)$ функцию, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (29) и обращающуюся в 0 при $t = 0$ и $x < 0$ и в 1 при $t = 0$ и $x > 0$.

Т е о р е м а 10. При любом постоянном $x < 0$

$$v(x - 2t, t) \rightarrow 0.$$

$t \rightarrow +\infty$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\bar{v}(x, t) = v(x - 2t, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + F(\bar{v}).$$

Функция же $v^*(x, t) = v(x - 2t, t)e^{-x}$ удовлетворяет уравнению⁸

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = [F(\bar{v}) - \bar{v}]e^{-x}.$$

Согласно наложенным на $F(v)$ условиям (32) и (33) $F(v) - v \leq 0$. Следовательно, $v^*(x, t)$ меньше той функции, которая удовлетворяет уравнению (37) при $t > 0$, а при $t = 0$ принимает значение 0, когда $x < 0$, и значение e^{-x} , когда $x > 0$. Эта же последняя функция равномерно по x стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 11. Будем рассматривать величину $\partial v(x, t) / \partial x$ при постоянном t как функцию v . Это возможно на основании теоремы 9. Пусть

$$\partial v(x, t) / \partial x = \psi(v, t). \quad (49)$$

Тогда при возрастании t и неизменном v функция ψ не возрастает.

⁸ Легко видеть, что функция $v^*(x, t)$ остается ограниченной при ограниченном $t > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функции $v(x, t)$ и $v(x + c, t + t_0) = v_{t_0}(x, t)$, где c — некоторая константа и $t_0 > 0$. Положим $w(x, t) = v(x, t) - v_{t_0}(x, t)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество тех точек плоскости (x, t) , где $w(x, t) > 0$. Докажем прежде всего, что это множество ограничено только слева и притом такой линией, которая выходит из начала координат и вдоль которой координата t нигде не убывает. Для доказательства этого заметим, что $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(x, t)w, \quad (50)$$

где $k(x, t)$ есть некоторая ограниченная функция, именно

$$k(x, t) = F'(\bar{u}(x, t)),$$

и $\bar{u}(x, t)$ есть некоторое число, заключенное между $v(x, t)$ и $v_{t_0}(x, t)$. Поэтому множество $\mathfrak{M}$ не может содержать изолированных кусков⁹, не примыкающих к оси x . Значит, оно состоит только из одного куска, примыкающего, очевидно, к правой половине оси x . Чтобы доказать, что множество $\mathfrak{M}$ ограничено слева линией, вдоль которой t нигде не убывает, допустим противное, именно, что эта линия содержит кусок вида, изображенного на рис. 4. Пусть, например, начиная от точки A эта кривая опускается вниз. Тогда функция $w(x, t)$ принимала бы отрицательные значения правее линии OA , в то время как на самой линии OA она равна 0, а на оси x при $x > 0$ она принимает положительные значения. Но методами, совершенно сходными с теми, какими была доказана теорема 4, можно показать, что это невозможно.

Совершенно так же доказывается, что множество $\mathfrak{M}$ не ограничено справа.

После этих замечаний высказанная теорема доказывается уже совсем просто. Действительно, пользуясь произволом в выборе c , можно достичь того, чтобы при любом наперед заданном t при некотором $x = x_0$ величины $v(x_0, t)$ и $v_{t_0}(x_0, t)$ совпадали. А тогда на основании только что приведенных рассуждений будет при всех $x > x_0$.

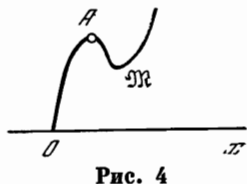
$$v(x, t) \geq v_{t_0}(x, t)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, t) \geq \frac{\partial v_{t_0}}{\partial x}(x_0, t),$$

что и требовалось доказать.

⁹ По поводу доказательства аналогичного утверждения для случая конечных кусков см. [7, с. 386—387]. Можно показать, что то же утверждение имеет место и для бесконечных кусков. Ср. примечание к теореме 1.



Т е о р е м а 12. При любом t

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \geq u'(x),$$

если $v(x, t) = u(x)$. Здесь $u(x)$ означает решение уравнения (34), о котором говорилось в начале этого параграфа.

Д о к а з а т е л ь с т в о совершенно такое же, как у предыдущей теоремы. Надо только вместо функции $v_{i_0}(x, t)$ взять функцию $u(x + c)$ и вместо прежней функции $w(x, t)$ рассматривать разность $v(x, t) - u(x + c)$.

Т е о р е м а 13. Пусть

$$v^*(x, t) = v(x + \varphi(t), t),$$

где функция $\varphi(t)$ подобрана таким образом, что постоянно

$$v^*(0, t) = c = \text{const.}$$

Тогда равномерно по x

$$v^*(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v^*(x)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (49) находим

$$x = \int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v, t)}. \quad (51)$$

При $t \rightarrow \infty$ согласно теореме 11 подынтегральная функция монотонно возрастает. Кроме того, согласно теореме 12 интеграл

$\int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v, t)}$ не возрастает бесконечно. Поэтому в равенстве (51) можно переходить к пределу под знаком интеграла. Пусть при $t \rightarrow \infty$

$$\psi(v, t) \rightarrow \psi(v).$$

Тогда в пределе равенство (51) обращается в

$$x = \int_c^{v^*} \frac{dv}{\psi(v)}.$$

Так как по теореме 12

$$\psi(v) > 0,$$

то это равенство определяет некоторую функцию v^* от x . Остается показать равномерность стремления $v^*(x, t)$ к $v^*(x)$. Для этого заметим, что из (51) следует равномерная сходимость $x(v^*, t)$ к $x(v)$ на всяком интервале $\varepsilon < v^* < 1 - \varepsilon$. Если теперь принять во внимание, что вследствие теоремы 11 функция $\psi(v^*, t)$ остается ограниченной на всяком таком интервале, то отсюда следует равномер-

ная сходимости $v^*(x, t)$ к $v^*(x)$ для значений x , где $v(x)$ заключено между числами ε и $1 - \varepsilon$ (ε произвольно мало). Вне же этого интервала значений x $v^*(x, t) \rightarrow v^*(x)$ равномерно потому, что там при достаточно больших t функция $v^*(x, t)$ вообще принимает значения, мало отличающиеся от 0 и 1.

Т е о р е м а 14. При $t_0 \rightarrow +\infty$ последовательность функций

$$v_{t_0}(x, t) = v[x + \varphi(t_0), t + t_0]$$

сходится к некоторому решению $\bar{v}(x, t)$ уравнения (29) равномерно области $t \leq T = \text{const}$. Функция $\varphi(t_0)$ определена так, что при t_0

$$v_{t_0}(0, 0) = c = \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$w(x, t) = v_{t_0}(x, t) - v_{t_0+T}(x, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F'(\bar{v})w, \quad (52)$$

где $\bar{v}(x, t)$ заключено между $v_{t_0}(x, t)$ и $v_{t_0+T}(x, t)$. Согласно теореме 13 при достаточно большом t_0

$$|w(x, 0)| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ как угодно мало. Согласно теоремам 2 и 3 $w(x, t)$ меньше, чем функция $\bar{w}(x, t) = \varepsilon e^{kt}$, где k есть верхняя граница значений $|F'(u)|$, потому что эта последняя функция при $t = 0$ принимает значение, не меньшее чем $w(x, 0)$, при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = k|\bar{w}|,$$

правая часть которого при $w = \bar{w}$ не меньше правой части уравнения (52). Совершенно так же доказывается, что

$$\bar{w}(x, t) > -\varepsilon e^{kt}.$$

Итак, показано, что последовательность функций $v_{t_0}(x, t)$ при $t_0 \rightarrow +\infty$ равномерно на некоторой области $t < T$ сходится к некоторой функции, которую обозначим через $\bar{v}(x, t)$. Покажем, что $\bar{v}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (29).

Воспользовавшись для этого равенством (42), напомним

$$v_{t_0}(x, t) = v_{t_0, 0}(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} F(v_{t_0}(\xi, \eta)) d\xi. \quad (53)$$

В этом равенстве можно переходить к пределу, поставив вместо v_{t_0} величину $\bar{v}$. Функция же, удовлетворяющая уравнению (53), удовлетворяет и уравнению (29) как было показано при доказательстве теоремы 1.

Теорема 15. При $t_0 \rightarrow +\infty$ частные производные первого порядка по x и t от $v_{t_0}(x, t)$ приближаются к соответствующим частным производным $\bar{v}(x, t)$ и притом равномерно во всякой области $\varepsilon < t < T$, где ε и T — любые положительные постоянные.

Доказательство. Равномерная сходимость $\partial v_{t_0}/\partial x$ доказывается на основании равенства (53). Действительно, равномерная сходимость при $t > \varepsilon$ частной производной по x от первого слагаемого правой части вытекает из того, что это слагаемое представляется интегралом Пуассона. Чтобы то же доказать при $t < T$ для второго слагаемого, составим разность его значений для двух значений t_0 : t'_0 и t''_0 ; она равна

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} [F(v_{t'_0}) - F(v_{t''_0})] d\xi. \quad (54)$$

По теореме 14 величина

$$F(v_{t'_0}(\xi, t)) - F(v_{t''_0}(\xi, t))$$

при достаточно больших t'_0 и t''_0 как угодно мала. В таком случае, применяя цитированный уже выше результат Жеврея, мы найдем, что частная производная по x от (54) при достаточно больших t'_0 и t''_0 делается равномерно по x как угодно малой, если $t < T$.

Функция $w_{t_0}(x, t) = \partial v_{t_0}(x, t)/\partial x$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w_{t_0}}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_{t_0}}{\partial x^2} = F'(v_{t_0}) w_{t_0}.$$

Мы уже доказали равномерную сходимость при $\varepsilon < t < T$ правой части этого уравнения, когда $t_0 \rightarrow \infty$. Поэтому тот же ход рассуждений, которым доказывалась равномерная сходимость $\partial v_{t_0}/\partial x$, применяется к доказательству равномерной сходимости $\partial w_{t_0}/\partial x = \partial^2 v_{t_0}/\partial x^2$. А так как функция v_{t_0} удовлетворяет уравнению (29), то этим доказывается и равномерная сходимость $\partial v_{t_0}/\partial t$.

Теорема 16. Пусть вдоль линии $x = \varphi_{t_0}(t)$ (соответственно $x = \varphi(t)$) функция $v_{t_0}(x, t)$ (соответственно $\bar{v}(x, t)$) остается постоянно равной c . Тогда равномерно по t при $\varepsilon < t < T$

$$\varphi'_{t_0}(t) \rightarrow \varphi'(t).$$

Доказательство. Величина $\varphi'_{t_0}(t)$ (соответственно $\varphi'(t)$) в точке $(\varphi_{t_0}(t), t)$ (соответственно $(\varphi(t), t)$) равна

$$\left(-\frac{\partial v_{t_0}/\partial t}{\partial v_{t_0}/\partial x} \right) \left(\text{соответственно } -\frac{\partial \bar{v}/\partial t}{\partial \bar{v}/\partial x} \right).$$

В силу теорем 12 и 14 при достаточно большом t_0 всюду на области $\bar{G}$ ($\varepsilon < t < T$)

$$[\varphi_{t_0}(t) - \varphi(t)] < \varepsilon_1,$$

где ε_1 произвольно мало. По теореме 15 равномерно на области $\bar{G}$ числители и знаменатели дробей

$$\frac{\partial v_{t_0}/\partial t}{\partial v_{t_0}/\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{v}/\partial t}{\partial \bar{v}/\partial x} \quad (55)$$

при одинаковых значениях аргументов отличаются друг от друга как угодно мало. Кроме того, в полосе $\varphi(t) - \varepsilon_2 < x < \varphi(t) + \varepsilon_2$ величина $\partial \bar{v}/\partial x$ превосходит некоторую положительную константу. Поэтому дроби (55) при одинаковых значениях аргументов и достаточно большом t_0 отличаются меньше чем на ε_3 на полосе

$$\varepsilon < t < T, \quad \varphi(t) - \varepsilon_2 < x < \varphi(t) + \varepsilon_2.$$

Если еще принять во внимание, что дробь $\frac{\partial \bar{v}/\partial t}{\partial \bar{v}/\partial x}$ равномерно непрерывна на этой полосе и потому ее значения в точках этой полосы, имеющих одинаковое t , при достаточно малом ε_3 отличаются как угодно мало, то отсюда и вытекает доказываемая теорема.

Т е о р е м а 17. При любом t

$$\bar{v}(x, t) = u(x + 2t) \text{ и } d\varphi/dt \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -2$$

(обозначения теоремы 14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$v^*(x, t) = \bar{v}(x + c_1(t), t),$$

где функция $c_1(t)$ подобрана так, что

$$v^*(0, t) \equiv c = \text{const.}$$

Тогда

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + c_1'(t) \frac{\partial v^*}{\partial x} + F(v^*).$$

Но, с другой стороны, по определению $\bar{v}(x, t)$ величина $v^*(x, t)$ ни при каком x не должна зависеть от t . Поэтому

$$\partial v^*/\partial t = 0 \text{ и } c_1'(t) = \text{const.}$$

Согласно § 2 эта постоянная не может быть больше -2 , а согласно теореме 10 эта постоянная не может быть меньшей -2 . Значит, она равна -2 , и согласно теореме 16

$$d\varphi/dt \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -2,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Допустим, что начальные значения $v(x, t)$ не такие, как предполагалось до сих пор, а именно:

- 1) $v(x, 0) = 1$ при $x \geq c_1$;
- 2) $v(x, 0) = 0$ при $x \leq c_2 < c_1$;
- 3) $v(x, 0)$ принимает при $c_2 < x < c_1$ какие угодно значения, заключенные между 0 и 1.

Тогда легко видеть, что скорость передвижения влево того участка, где происходит главная часть падения v от 1 до 0, все-таки при $t \rightarrow \infty$ стремится к 2, так как в этом случае

$$v(x - c_1, t) \leq \bar{v}(x, t) \leq v(x - c_2, t),$$

где $\bar{v}(x, t)$ означает решение уравнения (29), удовлетворяющее новым начальным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fisher R. A. The genetical theory of natural selection. Oxford: Univ. Press, 1930.
2. Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
3. Bendixon I. Sur les courbes définies par les equations differentielles.— Acta math., 1901, vol. 24, p. 1—88.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 468 с.
5. Petrowsky I. Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Nahe eines singularen Punktes.— Mat. сб., 1934, т. 41, с. 107—156.
6. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique.— J. math. pures et appl. Ser. 6, 1913, vol. 9, p. 305—471.
7. Petrowsky I. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung.— Comp. math., 1935, vol. 1, N 3, p. 383—419.

39

УПРОЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА — ХИНЧИНА *

§ 1

ВВЕДЕНИЕ

Интересующая нас теорема была сформулирована Биркгофом как теорема механики, или, если угодно, теорема, относящаяся к эволюции произвольной системы, состояние которой вполне определяется конечным числом параметров, а ход изменения — дифференциальными уравнениями, допускающими интегральный инвариант.

Пусть состояние изучаемой системы может быть изображено точкой P некоторого замкнутого n -мерного дифференциально-геометрического многообразия M^n . Пусть, далее, координаты $x_1, x_2, \dots$

* УМН, 1938, вып. 5, с. 52—56.

$\dots, x_n$ точки P подчинены дифференциальным уравнениям

$$dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

причем в правые части не входит явно t . Уравнения (1) в предположении (которое мы делаем) однозначности их решения определяют для каждого t преобразование любого подмножества E многообразия M^n :

$$T_t E = E',$$

где E' есть множество всех точек P' , в которые передвинутся точки P множества E за промежуток времени t . Интегральным инвариантом называется такая функция множества $I(E)$, для которой всегда

$$I(T_t E) = I(E). \quad (2)$$

Мы предполагаем, что существует определенный для всех измеримых подмножеств E многообразия M^n интегральный инвариант $I(E)$, подчиненный условию

$$I(M^n) = 1. \quad (3)$$

Теорема, доказанная самим Биркгофом в несколько более узких предположениях, гласит: *какова бы ни была суммируемая относительно $^1 I(E)$ действительная функция $f(P)$, определенная на M^n , предел*

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{C} \int_0^C f(T_t P) dt = \psi(P).$$

существует, за исключением самое большее множества U точек P , для которого $I(U) = 0$.

Эта теорема может рассматриваться как частный случай следующей, более общей теоремы. Пусть дан стационарный стохастический процесс в смысле Хинчина ², т. е. совокупность случайных величин x_t , зависящая от параметра t , $-\infty < t < +\infty$, подчиненная тому условию, что законы распределения систем

$$(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \quad \text{и} \quad (x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau})$$

при любых заданных $n, t_1, t_2, \dots, t_n$ и τ совпадают. Допустим, что величины $|x_t|$ имеют конечное математическое ожидание $E|x_t|$ (которое в силу стационарности одинаково для всех t) и с вероятностью

¹ Это означает, что интеграл

$$\int_{M^n} |f(P)| I(dM^n)$$

существует и конечен.

² Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов.— УМН, 1938, вып. 5, с. 42—51.

единица непрерывны³ по t . Тогда с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{C} \int_0^C x_t dt. \quad (4)$$

Это и есть общая теорема Биркгофа — Хинчина. Приведенная выше теорема Биркгофа действительно является ее частным случаем, так как если принять вероятность нахождения точки P в множестве E равной $I(E)$, то случайные величины

$$x_t = f(T_t P)$$

удовлетворяют всем условиям общей теоремы.

§ 2

РЕДУКЦИЯ К ДИСКРЕТНОМУ СЛУЧАЮ

В этом параграфе будет показано, что существование с вероятностью единица предела (4) вытекает из существования с той же вероятностью предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x_t dt, \quad (5)$$

где n пробегает лишь целые положительные значения. Вводя обозначение

$$\bar{x}_i = \int_i^{i+1} x_t dt$$

и замечая, что

$$E |\bar{x}_i| \leq E \int_i^{i+1} |x_t| dt = E |x_0|,$$

мы убеждаемся таким образом, что доказательство общей теоремы Биркгофа — Хинчина сводится к доказательству следующей теоремы, относящейся к дискретным последовательностям случайных величин.

Основная теорема. Пусть x_i ($-\infty < i < +\infty$) — стационарная⁴ последовательность случайных величин, для которой математическое ожидание $E |x_i|$ конечно. Тогда с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}}{n}.$$

³ Это допущение может быть ослаблено.

⁴ Определение стационарности остается дословно прежним, лишь t заменяется через i , принимающее только целые значения.

Итак, допустим, что предел (5) существует с вероятностью единица. Положим

$$y_n = \int_n^{n+1} |x_t| dt.$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}(y_0) = \int_0^1 \mathbf{E}|x_t| dt = \mathbf{E}|x_0| < +\infty.$$

Поэтому ряд вероятностей

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} y_n > \varepsilon \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} y_0 > \varepsilon \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{y_0 > n\varepsilon\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P} \{(m+1)\varepsilon \geq y_0 > m\varepsilon\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m \mathbf{P} \{(m+1)\varepsilon > y_0 \geq m\varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}(y_0) \end{aligned}$$

сходится при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что с вероятностью единица

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_n^{n+1} |x_t| dt = 0. \quad (6)$$

Из существования предела (5) вытекает существование предела

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{C} \int_0^{[C]} x_t dt,$$

где $[C]$ обозначает целую часть C , а C пробегает непрерывный ряд значений. В случае же наличия равенства (6) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow +\infty} \sup \left| \frac{1}{C} \int_0^C x_t dt - \frac{1}{C} \int_0^{[C]} x_t dt \right| &= \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \sup \left| \frac{1}{C} \int_{[C]}^C x_t dt \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \int_n^{n+1} |x_t| dt = 0. \end{aligned}$$

Поэтому при одновременном существовании предела (5) и справедливости (6), т. е. с вероятностью единица, существует и предел (4).

§ 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Положим

$$h_{ab} = \frac{x_a + x_{a+1} + \dots + x_{b-1}}{b - a}.$$

Требуется доказать, что h_{0b} при $b \rightarrow +\infty$ стремится с вероятностью единица к определенному пределу.

Л е м м а. Если вероятность существования предела h_{0b} при $b \rightarrow +\infty$ меньше единицы, то существуют два числа α и β , $\alpha < \beta$, для которых вероятность одновременного выполнения соотношений

$$\limsup_{b \rightarrow +\infty} h_{0b} > \beta, \quad \liminf_{b \rightarrow +\infty} h_{0b} < \alpha \quad (7)$$

положительна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$(\alpha_n, \beta_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

есть последовательность всех интервалов $\alpha_n < \beta_n$ с рациональными концами. Если $\lim h_{0b}$ не существует, то среди интервалов (α_n, β_n) найдется первый по порядку, для которого $\limsup h_{0b} > \beta_n$, $\liminf h_{0b} < \alpha_n$. Таким образом, случай K несуществования $\lim h_{0b}$ разбивается на счетное число случаев K_n . Но если вероятность $P(K)$ положительна, то найдется такое n , что и $P(K_n) > 0$. Тем самым лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о о с н о в н о й т е о р е м ы. Обозначим случай справедливости неравенств (7) через K . Будем теперь предполагать, что все x_i приняли какие-то определенные значения, и займемся более детальным изучением поведения средних h_{ab} . Будем называть сегмент (a, b) особым (относительно β), если $h_{ab} > \beta$, но $h_{ab'} \leq \beta$ при всех $b', a < b' < b$. Легко показать, что два особых сегмента (a, b) и (a_1, b_1) не могут перекрываться, т. е. не может быть положения, при котором $a < a_1 < b < b_1$. В самом деле, в случае такого перекрытия из

$$h_{ab} = \frac{(a_1 - a) h_{aa_1} + (b - a_1) h_{a_1b}}{b - a}$$

и $h_{ab} > \beta$ вытекает или $h_{aa_1} > \beta$, что невозможно, так как сегмент (a, b) особый, или $h_{a_1b} > \beta$, что невозможно, так как сегмент (a_1, b_1) особый.

Будем называть разность $b - a$ рангом сегмента (a, b) . Назовем, далее, сегмент (a, b) s -особым, если он является особым, имеет ранг, не превышающий s , и не заключен ни в каком большем особом сегменте ранга, не превышающего s . Очевидно, что каждый особый сегмент (a, b) ранга, не превышающего s , заключен в одном и только в одном s -особом сегменте. В самом деле, среди особых сегментов, заключающих в себе (a, b) , ранг которых не превышает s , должен найтись хотя

бы один наибольшей длины; если бы таких нашлось два, то они должны были бы перекрываться, что по доказанному невозможно. Что же касается двух s -особых сегментов, то такие два сегмента могут только лежать один вне другого.

Обозначим через K_s случай справедливости неравенств (7), соединенной с существованием такого $t \leq s$, что $h_{0t} > \beta$. Очевидно, что $\lim K_s = K$; поэтому

$$\lim P(K_s) = P(K). \quad (8)$$

Нашей задачей является, допустив, что $P(K) > 0$, прийти к противоречию. При $P(K) > 0$, очевидно, начиная с некоторого s все $P(K_s)$ также положительны. Мы рассматриваем далее только такие s .

В случае K_s существует s -особый сегмент (a, b) с $a \leq 0 < b$. В самом деле, среди тех $t \leq s$, для которых в случае K_s справедливо неравенство $h_{0t} > \beta$, существует наименьшее t' . Сегмент $(0, t')$ особый. Следовательно, он заключен в s -особом сегменте (a, b) . Обратно, если существует s -особый сегмент (a, b) с $a \leq 0 < b$, то существует такое $t \leq s$, что $h_{0t} > \beta$. В самом деле, если $a = 0$, то можно положить $t = b$, если же $a < 0$, то из

$$h_{ab} = \frac{-ah_{a0} + bh_{0b}}{b-a}$$

и $h_{ab} > \beta$, $h_{a0} \leq \beta$ вытекает $h_{0b} > \beta$ и, следовательно, также можно положить $t = b$. Итак, случай K_s всецело определяется неравенствами (7) и существованием s -особого сегмента (a, b) , $a \leq 0 < b$. При этом s -особый сегмент (a, b) , удовлетворяющий неравенству $a \leq 0 < b$, может существовать в каждом отдельном случае только один, так как два таких сегмента перекрывались бы в точке 0, что невозможно. Обозначая $-a$ через p и $b - a$ через q , получаем, таким образом, что случай K_s является суммой попарно несовместимых случаев K_{pq} , соответствующих наличию s -особых сегментов

$$K_s = \sum_{p, q} K_{pq}; \quad q = 1, \dots, s; \quad p = 0, 1, \dots, q-1. \quad (9)$$

Замена $i' = i + p$ переводит случай K_{0q} в случай K_{pq} ; поэтому в силу стационарности $P(K_{pq}) = P(K_{0q})$ и $E K_{pq}(x_0) = E K_{0q}(x_p)$. Мы получаем, следовательно, принимая во внимание, что в случае K_{0q} имеет место неравенство $h_{0q} > \beta$,

$$\begin{aligned} P(K_s) E K_s(x_0) &= \sum_{p, q} P(K_{pq}) E K_{pq}(x_0) = \sum_q P(K_{0q}) \sum_p E K_{0q}(x_p) = \\ &= \sum_q P(K_{0q}) E K_{0q}(q h_{0q}) > \sum_q (K_{0q})_q \beta = \sum_{p, q} P(K_{pq}) \beta = P(K_s) \beta, \end{aligned}$$

откуда

$$E K_s(x_0) > \beta.$$

Так как $K_s \rightarrow K$, то отсюда вытекает

$$EK(x_0) \geq \beta.$$

С другой стороны, можно было бы аналогично доказать, что

$$EK(x_0) \leq \alpha,$$

что и приводит к противоречию. Следовательно, $P(K) = 0$, а это и составляет утверждение доказываемой основной теоремы.

40

О НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ ВЕРХНИМИ ГРАНЯМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ *

§ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим функцию $f(x)$, первые n производных которой ограничены на всей действительной прямой. При этом ограниченность n -й производной будем понимать в том смысле, что $(n-1)$ -я производная имеет ограниченные производные числа ¹. Обозначим через $M_k(f)$ верхнюю грань абсолютной величины k -й производной функции $f(x)$:

$$M_k(f) = \sup |f^{(k)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что при этом $M_n(f)$ обозначает верхнюю грань абсолютных величин производных чисел $(n-1)$ -й производной. Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы, формулировка которой была сообщена мною в [1]:

Т е о р е м а I. *Для того чтобы тройке положительных чисел M_0, M_k, M_n ($0 < k < n$) соответствовала функция $f(x)$, для которой*

$$M_0 = M_0(f), \quad M_k = M_k(f), \quad M_n = M_n(f),$$

необходимо и достаточно соблюдение условия

$$M_k \leq C_{nk} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n}, \quad (1)$$

* Уч. зап. МГУ, 1939, т. 30. Математика, кн. 3, с. 3—16.

¹ Результаты не изменятся, если рассматривать лишь функции $f(x)$, имеющие непрерывную n -ю производную, или даже только аналитические функции: условие (1) нашей теоремы I останется необходимым и достаточным.

где

$$C_{nk} = K_{n-k} : K_n^{(n-k)/n}, \quad (2)$$

$$K_i = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} - \frac{1}{7^{i+1}} + \dots \right) \quad \text{при } i \text{ четном,}$$

$$K_i = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} + \frac{1}{7^{i+1}} + \dots \right) \quad \text{при } i \text{ нечетном.}$$

Неравенство (1) можно записать в виде

$$M_k^n \leq C_{nk}^n M_0^{n-k} M_n^k. \quad (1^*)$$

Такая запись имеет то преимущество, что все коэффициенты C_{nk}^n рациональны. Приведем значения C_{nk}^n для $n \leq 5$.

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
2	2			
3	$\frac{9}{8}$	3		
4	$\frac{512}{375}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{24}{5}$	
5	$\frac{1953125}{1572864}$	$\frac{125}{72}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{15}{2}$

Приведем еще приближенные значения констант C_{nk} при $n \leq 7$.

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
2	1,41421					
3	1,04004	1,44225				
4	1,08096	1,09545	1,48017			
5	1,04426	1,11665	1,11942	1,49631		
6	1,04298	1,08001	1,14520	1,14280	1,50892	
7	1,03451	1,07289	1,10472	1,16471	1,15137	1,51748

Сделаем еще несколько замечаний об асимптотическом поведении коэффициентов C_{nk} . Так как, очевидно,

$$K_i \rightarrow 4/\pi \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

то имеет место следующее:

1) при $n \rightarrow \infty$ и ограниченности $n - k$

$$C_{nk} = K_{n-k} + \varepsilon_{nk}, \quad \varepsilon_{nk} \rightarrow 0;$$

2) при $n \rightarrow \infty$ и $n - k \rightarrow \infty$

$$C_{nk} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{k/n} + \varepsilon'_{nk}, \quad \varepsilon'_{nk} \rightarrow 0.$$

В частности,

$$C_{n, n-1} \rightarrow K_1 = \pi/2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$C_{n, 1} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Интерес последних двух соотношений увеличивается тем, что при всех n и k ($0 < k < n$) выполняются неравенства ²

$$1 < C_{nk} < \pi/2. \quad (3)$$

Для случая $n = 2$, $k = 1$ теорема I была доказана в 1914 г. [2], для всех случаев $n < 5$ и для случая $n = 5$, $k = 2$ — Г. Е. Шиловым [3]. При доказательстве теоремы I мы используем тот факт, что экстремальное равенство

$$M_k(f) = C_{nk} M_0^{(n-k)/n}(f) M_n^{k/n}(f) \quad (4)$$

осуществляется, в частности, при заданном n и любом k ($0 < k < n$) для функции

$$f_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2m+1)x - \frac{\pi}{2}n\right)}{(2m+1)^{n+1}}. \quad (5)$$

Эти функции $f_n(x)$, графики которых изображены на рис. 1, рассматривались ранее по другому поводу Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [4].

Легко подсчитать, что из справедливости равенства (4) для функции $f_n(x)$ вытекает его справедливость для любой функции вида

$$\varphi_n(x) = a f_n(bx + c), \quad (6)$$

где $a > 0$, $b > 0$ и c — произвольные константы. Константы a и b можно подобрать так, чтобы $M_0(\varphi_n)$ и $M_n(\varphi_n)$ приняли произвольные наперед заданные положительные значения ³. Гипотеза о том, что функции вида (6) осуществляют экстремум $M_k(f)$ при заданных $M_0(f)$ и $M_n(f)$, была высказана Г. Е. Шиловым. В доказательстве этой гипотезы и заключается существенное содержание настоящей работы.

Функции $f_n(x)$ периодичны с периодом 2π и, кроме того, удовлетворяют равенству

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}m + x\right) = (-1)^{m+n+1} f_n\left(\frac{\pi}{2}m - x\right).$$

² Доказательство элементарно, мы его не приводим.

³ Что касается константы c , то ее изменение, очевидно, не влияет на величины $M_i(\varphi_n)$.

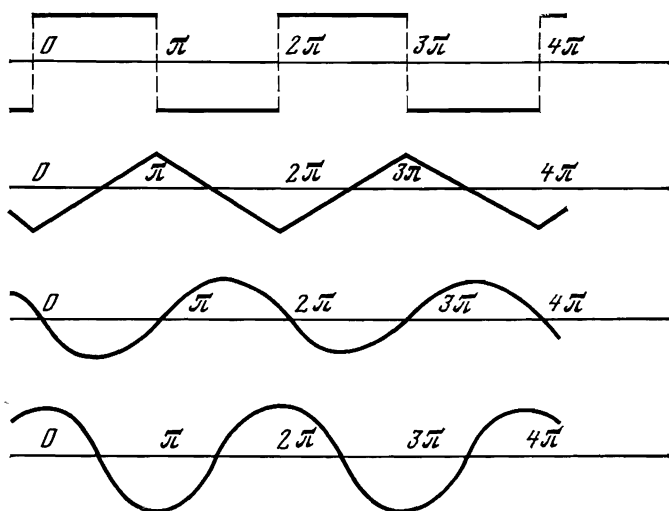


Рис. 1

В силу этого равенства поведение функции $f_n(x)$ на всей действительной прямой однозначно определяется ее значениями на каком-либо одном отрезке вида

$$m\pi/2 \leq x \leq (m+1)\pi/2.$$

При $n > 0$ на каждом таком отрезке $f_n(x)$ монотонно и непрерывно меняется от нуля на одном конце до $\pm K_n$ на другом конце. Аналогичными свойствами периодичности и симметрии обладают и функции вида (6). Из этих свойств периодичности и симметрии функций $\varphi_n(x)$ вида (6) легко вывести следующее: если, кроме $M_0(\varphi_n)$ и $M_n(\varphi_n)$, зафиксировать значение ξ функции $\varphi_n(x)$ в точке x_0 удовлетворяющее условию

$$|\xi| \leq M_0(\varphi_n),$$

то по этим трем данным из всех функций вида (5) выделятся ровно две в случае $|\xi| < M_0(\varphi_n)$ и одна в случае $|\xi| = M_0(\varphi_n)$. Если обозначить эти две функции (совпадающие в случае $|\xi| = M_0(\varphi_n)$) через $\varphi_{n,1}(x)$ и $\varphi_{n,2}(x)$, то

$$\varphi'_{n,1}(x_0) = -\varphi'_{n,2}(x_0)$$

и, следовательно,

$$|\varphi'_{n,1}(x_0)| = |\varphi'_{n,2}(x_0)|.$$

Пусть теперь дана какая-либо функция $f(x)$ с конечными $M_i(f)$ при $i \leq n$. Будем называть *функцией сравнения* порядка n для функ-

ции $f(x)$ в точке x_0 функцию вида (6), для которой

$$M_0(\varphi_n) = M_0(f), \quad M_n(\varphi_n) = M_n(f), \quad \varphi_n(x_0) = f(x_0).$$

Приняв это определение, мы сможем доказать следующую теорему.

Т е о р е м а II. Если функция $\varphi_n(x)$ есть функция сравнения порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 , то

$$|f'(x_0)| \leq |\varphi_n'(x_0)|. \quad (7)$$

Заметим, что в случае $n = 1$ производные $f'(x)$ и $\varphi_n'(x)$ могут не существовать; однако неравенство (7) сохраняется и в этом случае для производных чисел. Теорема II является усилением неравенства (4) для случая $k = 1$. В самом деле, из неравенства (7) вытекает, что для любой точки x_0

$$|f'(x_0)| \leq M_1(\varphi_n) = C_{n,1} M_0^{\frac{n-1}{n}}(\varphi_n) M_n^{\frac{1}{n}}(\varphi_n) = C_{n,1} M_0^{\frac{n-1}{n}}(f) M_n^{\frac{1}{n}}(f),$$

откуда следует,

$$M_1(f) \leq C_{n,1} M_0^{\frac{n-1}{n}}(f) M_n^{\frac{1}{n}}(f),$$

т. е. неравенство (4) для случая $k = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем I и II осуществляется следующим образом: в § 2 доказывается достаточность условия (1) теоремы I при помощи рассмотрения функций вида

$$\chi_n(x) = af_n(bx) + d;$$

в § 3 для случая $k = 1$ при помощи индукции по n одновременно доказывается необходимость условия (1) теоремы I и теорема II; в § 4 индукцией по k доказывается необходимость условия (1) в общем случае.

§ 2

ДОСТАТОЧНОСТЬ УСЛОВИЯ (1)

При любых положительных M_0 , M_k и M_n равенство

$$M_k^n = \gamma_{nk}^n M_0^{n-k} M_n^k$$

однозначно определяет при $0 < k < n$ множитель

$$\gamma_{nk} = \gamma_{nk}(M_0, M_k, M_n) > 0.$$

Обозначим еще для любой функции $f(x)$ с конечными $M_i(f)$, $i \leq n$,

$$\gamma_{nk}(f) = \gamma_{nk}(M_0(f), M_k(f), M_n(f)).$$

Будем говорить, что тройка положительных чисел (M_0, M_k, M_n) «возможна», если существует функция f с

$$M_0(f) = M_0, \quad M_k(f) = M_k, \quad M_n(f) = M_n.$$

Докажем такую лемму.

Л е м м а. Если «возможна» тройка (M_0, M_k, M_n) , то возможны и все тройки (M'_0, M'_k, M'_n) , для которых

$$\gamma_{nk}(M'_0, M'_k, M'_n) \leq \gamma_{nk}(M_0, M_k, M_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По допущению леммы существует функция $f(x)$, для которой

$$M_0(f) = M_0, \quad M_k(f) = M_k, \quad M_n(f) = M_n.$$

Легко подсчитать, что при любых $a > 0$ и $b > 0$ для функции

$$\varphi(x) = af(bx)$$

справедливо равенство

$$\gamma_{nk}(\varphi) = \gamma_{nk}(f).$$

Константы $a > 0$ и $b > 0$ можно подобрать так, что получится

$$M_k(\varphi) = M'_k, \quad M_n(\varphi) = M'_n.$$

Из этих равенств и из неравенства

$$\gamma_{nk}(M'_0, M'_k, M'_n) \leq \gamma_{nk}(M_0, M_k, M_n) = \gamma_{nk}(f) = \gamma_{nk}(\varphi)$$

вытекает, что

$$M'_0 \geq M_0(\varphi).$$

Положим теперь

$$\chi(x) = \varphi(x) + d,$$

где d — некоторая константа. Очевидно,

$$M_k(\chi) = M_k(\varphi) = M'_k, \quad M_n(\chi) = M_n(\varphi) = M'_n.$$

Подбирая константу d , можно произвольно увеличить $M_0(\chi)$ по сравнению с $M_0(\varphi)$, в частности, можно достигнуть того, чтобы было

$$M_0(\chi) = M'_0.$$

Мы видим, таким образом, что тройка (M'_0, M'_k, M'_n) действительно «возможна».

В силу доказанной сейчас леммы ясно, что достаточность условия (1) будет установлена, если будет при любых данных k и n ($0 < k < n$) найдена хотя бы одна функция $f(x)$, для которой

$$\gamma_{nk}(f) = C_{nk}.$$

Этому условию как раз и удовлетворяет функция $f_n(x)$, определяемая формулой (5). В самом деле, легко вычислить, что при $k = 1$,

2, . . . , n справедливы равенства

$$f_n^{(k)}(x) = f_{n-k}(x), \quad (8)$$

$$M_k(f_n) = \sup |f_{n-k}(x)| = K_{n-k}. \quad (9)$$

Из (8), (9) и (2) и вытекает, что $\gamma_{nk}(f_n) = C_{nk}$.

§ 3

СЛУЧАЙ $k = 1$

В этом параграфе мы докажем теорему II и необходимость условия (1) теоремы I в случае $k = 1$. Чтобы оба эти предложения были доказаны, достаточно установить следующее.

А) Теорема II верна при $n = 1$.

В) Если теорема II верна при $n = m$, то условие (1) теоремы I необходимо при $n = m + 1$.

С) Если теорема II верна при $n = m$ и условие (1) теоремы I необходимо при $n = m + 1$, то теорема II верна при $n = m + 1$.

Чтобы убедиться в правильности утверждения А, достаточно заметить, что при любом x

$$|f_1'(x)| = 1$$

и, следовательно, в случае $n = 1$ для функции сравнения

$$\varphi_1(x) = af_1(bx) + c$$

теоремы II абсолютная величина производной постоянна:

$$|\varphi_1'(x)| = M_1(\varphi_1) = M_1(\varphi).$$

Таким образом, при $n = 1$ все содержание теоремы II сводится к тривиальному неравенству

$$|f'(x_0)| \leq M_1(f).$$

Займемся теперь доказательством утверждения В. Будем называть *верхней функцией сравнения* порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 функцию вида

$$\bar{\varphi}_n(x) = af_n(bx + c),$$

для которой

$$M_0(\bar{\varphi}_n) > M_0(f), \quad M_n(\bar{\varphi}_n) = M_n(f), \quad \bar{\varphi}_n(x_0) = f(x_0).$$

Легко убедиться, что для верхней функции сравнения $|\bar{\varphi}_n'(x_0)|$ всегда больше, чем $|\bar{\varphi}_n'(x_0)|$ для соответствующей функции сравнения в собственном смысле слова. Ясно также, что верхнюю функцию сравнения $\bar{\varphi}_n(x)$ можно всегда подобрать так, чтобы в любом заданном конечном интервале, окружающем точку x_0 , сама функция $\bar{\varphi}_n(x)$ отличалась сколь угодно мало от $\varphi_n(x)$, а ее производная

отличалась сколь угодно мало от производной $\varphi'_n(x)$. Поэтому при каждом n утверждение теоремы II равносильно следующему:

Т е о р е м а II *. Если $\bar{\varphi}_n(x)$ есть верхняя функция сравнения порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 , то

$$|f'(x_0)| < |\bar{\varphi}'_n(x_0)|. \quad (10)$$

Предположим теперь, что теоремы II и II * установлены при $n = m$ и рассмотрим функцию $f(x)$ с конечными $M_i(f)$ вплоть до $i = m + 1$.

Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, можно выбрать такую точку x_0 , в которой

$$|f'(x_0)| > M_1(f) - \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $f'(x_0) > 0$. В противном случае следовало бы перейти от рассмотрения $f(x)$ к рассмотрению $-f(x)$. Построим для функции $f'(x)$ в точке x_0 две функции сравнения $\varphi_{m,1}(x)$ и $\varphi_{m,2}(x)$, подчиненные условиям

$$\varphi'_{m,1}(x_0) \geq 0, \quad \varphi'_{m,2}(x_0) \leq 0.$$

Обозначим через x_1 ближайший слева от x_0 нуль функции $\varphi_{m,1}(x)$ и через x_2 ближайший справа от x_0 нуль функции $\varphi_{m,2}(x)$ (см. рис. 2).

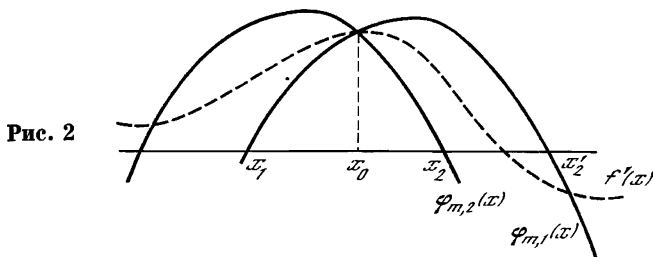


Рис. 2

Мы сейчас докажем, что на сегменте $[x_1, x_0]$ справедливо неравенство

$$f'(x) \geq \varphi_{m,1}(x), \quad (11a)$$

а на сегменте $[x_0, x_2]$ — неравенство

$$f'(x) \geq \varphi_{m,2}(x). \quad (11b)$$

Установим первое из этих неравенств. Для этого рассмотрим вместо самой функции $\varphi_{m,1}(x)$ какую-либо верхнюю функцию сравнения $\bar{\varphi}_{m,1}(x)$ порядка n для $f(x)$ в той же точке x_0 . Ближайший слева от x_0 нуль функции $\bar{\varphi}_{m,1}$ обозначим $\bar{x}_1$ и докажем, что в интервале $(\bar{x}_1, x_0)$ выполняется неравенство

$$f'(x) > \bar{\varphi}_{m,1}(x). \quad (12a)$$

В самом деле, если бы это неравенство нарушалось где-либо в интервале $(\bar{x}_1, x_0)$, то существовала бы первая влево от x_0 точка ξ интервала $(\bar{x}_1, x_0)$, в которой нарушается неравенство. В этой точке ξ , очевидно, выполняются соотношения

$$f'(\xi) = \bar{\varphi}_{m,1}(\xi), \quad (13)$$

$$f''(\xi) \geq \bar{\varphi}'_{m,1}(\xi) > 0. \quad (14)$$

Равенство (13) показывает, что $\bar{\varphi}_{m,1}(\xi)$ можно рассматривать как верхнюю функцию сравнения порядка m для $f'(x)$ в точке ξ . Следовательно, по теореме II (которая в случае $n = m$ считается уже установленной)

$$|f''(\xi)| < |\bar{\varphi}'_{m,1}(\xi)|. \quad (15)$$

Противоречие между (14) и (15) доказывает, что неравенство (12a) не может нарушаться в интервале $(\bar{x}_1, x_0)$.

Если выбрать $\bar{\varphi}_{m,1}(x)$ достаточно мало отличающимся от $\varphi_{m,1}(x)$, то и точка $\bar{x}_1$ будет сколь угодно близка к x_1 . Поэтому из (12a) переходом к пределу получается неравенство (11a) на сегменте $[x_1, x_0]$. Аналогично доказывается неравенство (11b).

Из неравенств (11a) и (11b) вытекает, что

$$f(x_2) - f(x_1) \geq \int_{x_1}^{x_0} \varphi_{m,1}(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} \varphi_{m,2}(x) dx. \quad (16)$$

Если выбрать ε достаточно малым, то $\varphi_{m,2}(x)$ будет отличаться на $[x_0; x_2]$ сколь угодно мало от $\varphi_{m,1}(x)$, а точка x_2 будет сколь угодно близка к ближайшему вправо от x_0 нулю x'_2 функции $\varphi_{m,1}(x)$ (см. рис. 2). Следовательно, правая часть неравенства (16) может быть сделана отличающейся сколь угодно мало от

$$\int_{x_1}^{x'_2} \varphi_{m,1}(x) dx. \quad (17)$$

Заметим теперь, что

$$\varphi_{m,1}(x) = af_m(bx + c)$$

является производной от функции

$$\varphi_{m+1}(x) = (a/b) f_{m+1}(bx + c).$$

Легко видеть, что интеграл (17), распространенный на промежуток между двумя соседними нулями функции $\varphi_{m,1}(x)$, в котором она положительна, равняется в точности

$$2M_0(\varphi_{m+1}).$$

Так как, с другой стороны,

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 2M_0(f),$$

то в силу (16) и произвольной близости правой части (16) к интегралу (17) получается

$$M_0(f) \leq M_0(\varphi_{m+1}).$$

Из этого последнего неравенства в соединении с равенствами

$$M_1(\varphi_{m+1}) = C_{m+1,1} M_0^{\frac{m}{m+1}}(\varphi_{m+1}) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(\varphi_{m+1}),$$

$$M_1(\varphi_{m+1}) = M_0(\varphi_{m,1}) = M_0(f') = M_1(f),$$

$$M_{m+1}(\varphi_{m+1}) = M_m(\varphi_{m,1}) = M_m(f') = M_{m+1}(f)$$

получаем окончательно

$$M_1(f) \leq C_{m+1,1} M_0^{\frac{m}{m+1}}(f) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(f),$$

чем и заканчивается доказательство утверждения В.

Докажем теперь утверждение С. Допустим, что необходимость условия (1) для $n = m + 1$ и $k = 1$ уже установлена и что теоремы II и II* уже доказаны для $n = m$. Предположим, что вопреки утверждению С теорема II* неверна при $n = m + 1$. Пусть, следовательно, для какой-либо функции $f(x)$ и какой-либо ее верхней функции сравнения $\bar{\varphi}_{m+1}(x)$ порядка $m + 1$ в точке x_0 имеет место неравенство

$$|f'(x_0)| \geq |\bar{\varphi}'_{m+1}(x_0)|.$$

Так как $M_0(\bar{\varphi}_{m+1}) > M_0(f)$, то точка x_0 не может быть максимумом $\bar{\varphi}_{m+1}$ и в ней, следовательно, $\bar{\varphi}'_{m+1}(x_0) \neq 0$ и $f'(x_0) \neq 0$. Не уменьшая общности, можно допустить, что $f(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) > 0$. Остальные случаи можно привести к этому, заменяя в случае надобности

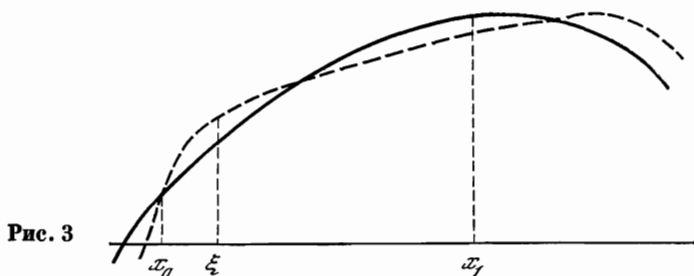


Рис. 3

$f(x)$ на $-f(x)$ и x на $-x$. Можно также выбрать функцию сравнения так, чтобы было $\bar{\varphi}'_{m+1}(x_0) > 0$ (см. рис. 3).

Пусть теперь x_1 есть ближайший вправо от x_0 максимум $\bar{\varphi}_{m+1}(x)$. Имеем

$$f(x_0) = \bar{\varphi}_{m+1}(x_0),$$

$$f(x_1) \leq M_0(f) < M_0(\bar{\varphi}_{m+1}) = \bar{\varphi}_{m+1}(x_1).$$

Следовательно, на сегменте $[x_0, x_1]$ разность

$$f(x) - \bar{\varphi}_{m+1}(x)$$

достигает максимума в какой-то точке ξ , отличной от x_1 . В точке ξ имеем

$$f'(\xi) = \bar{\varphi}'_{m+1}(\xi), \quad f''(\xi) \leq \bar{\varphi}''_{m+1}(\xi). \quad (18)$$

Дифференцируя функцию

$$\bar{\varphi}_{m+1}(x) = af_{m+1}(bx + c),$$

получим функцию

$$\bar{\varphi}_m(x) = \bar{\varphi}'_{m+1} = abf_m(bx + c).$$

Заметим теперь, что в силу определения верхней функции сравнения $\bar{\varphi}_{m+1}(x)$

$$M_0(f) < M_0(\bar{\varphi}_{m+1}), \quad (19)$$

$$M_m(f') = M_{m+1}(f) = M_{m+1}(\bar{\varphi}_{m+1}) = M_m(\varphi_m). \quad (20)$$

Неравенство (1), которое для случая $n = m + 1$ и $k = 1$ считается уже установленным, дает нам вместе с (19)

$$\begin{aligned} M_0(f') = M_1(f) &\leq C_{m+1,1} M_0^{\frac{m}{m+1}}(f) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(f) < \\ < C_{m+1,1} M_0^{\frac{m}{m+1}}(\bar{\varphi}_{m+1}) M_{m+1}^{\frac{1}{m+1}}(\bar{\varphi}_{m+1}) = M_1(\bar{\varphi}_{m+1}) = M_0(\bar{\varphi}_m). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20), (21) и равенства

$$\bar{\varphi}_m(\xi) = \bar{\varphi}'_{m+1}(\xi) = f'(\xi)$$

заключаем, что $\bar{\varphi}_m(x)$ есть верхняя функция сравнения порядка m для $f'(x)$ в точке ξ . По теореме II*, которая для $n = m$ считается уже доказанной, отсюда следует, что

$$|f''(\xi)| < |\bar{\varphi}'_m(\xi)| = |\bar{\varphi}''_{m+1}(\xi)|,$$

или, так как $\bar{\varphi}''_{m+1}(\xi) \leq 0$,

$$f''(\xi) > \bar{\varphi}''_{m+1}(\xi). \quad (22)$$

Противоречие между неравенствами (18) и (22) и доказывает утверждение С.

§ 4

НЕОБХОДИМОСТЬ УСЛОВИЯ (1) ПРИ ЛЮБОМ n

Допустим, что необходимость условия (1) уже доказана для всех n и для $k \leq m$ ($m \geq 1$). Докажем, что в этом случае оно выполняется и для $k = m + 1$. Для этого рассмотрим функцию $f(x)$ с конеч-

ными $M_0(f)$, $M_{m+1}(f)$ и $M_n(f)$ ($m+1 < n$). Очевидно,

$$M_0(f') = M_1(f), \quad M_m(f') = M_{m+1}(f), \quad M_{n-1}(f') = M_n(f).$$

Так как необходимость условия (1) при $k = m$ уже доказана, то

$$M_m(f') \leq C_{n-1, m} M_0^{\frac{n-1-m}{n-1}}(f') M_{n-1}^{\frac{m}{n-1}}(f'),$$

или, что то же самое,

$$M_{m+1}(f) \leq C_{n-1, m} M_1^{\frac{n-1-m}{n-1}}(f) M_n^{\frac{m}{n-1}}(f). \quad (23)$$

Кроме того, так как для случая $k = 1$ необходимость условия (1) доказана при любом n , имеем

$$M_1(f) \leq C_{n, 1} M_0^{(n-1)/n}(f) M_n^{1/n}(f). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$M_{m+1}(f) \leq C_{n-1, m} C_{n, 1}^{\frac{n-1}{n}} M_0^{\frac{n-1-m}{n}}(f) M_n^{\frac{m+1}{n}}(f),$$

а так как

$$C_{n-1, m} C_{n, 1}^{(n-1)/n} = C_{n, m+1},$$

то окончательно

$$M_{m+1}(f) \leq C_{n, m+1} M_0^{\frac{n-m-1}{n}}(f) M_n^{\frac{m+1}{n}}(f),$$

что и доказывает наше утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogorov A. N. Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction.— C. r. Acad. sci. Paris, 1938, vol. 207, p. 764—765.
2. Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées.— C. r. Soc. math. France, 1914, vol. 41, p. 68—72.
3. Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.). О неравенствах между производными.— Сб. работ. студ. науч. кружков МГУ, 1937, т. 1, с. 17—27.
4. Ахизер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.— ДАН СССР, 1937, т. 15, с. 107—112.

О КОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ *

Совместно с И. М. Гельфандом

Настоящая статья примыкает к исследованиям М. Стоуна [2] и к публикуемой выше статье Г. Е. Шилова ¹. В отличие от этой последней мы рассматриваем кольцо непрерывных функций, определенных на некотором топологическом пространстве, как чисто алгебраическое образование, не вводя в нем никаких топологических соотношений. Оказывается, что в случае бикompактных пространств, рассмотренном М. Стоуном, а также в значительно более общих случаях уже чисто алгебраическая структура кольца непрерывных функций определяет топологическое пространство с точностью до гомеоморфизма.

Для любого топологического пространства S мы будем рассматривать два кольца: кольцо $C(S)$ всех определенных на S действительных непрерывных функций и кольцо $C'(S)$ всех ограниченных функций из $C(S)$.

При изучении таких колец естественно ограничиться случаем вполне регулярных пространств S . Объясняется это тем, что кольца $C(S)$ и $C'(S)$ произвольного топологического пространства S соответственно изоморфны кольцам $C(\rho S)$ и $C'(\rho S)$ определенного, однозначно связанного с S , вполне регулярного пространства ρS , введенного Е. Чехом [1]. Вместе с пространством ρS в работе Е. Чеха вводится определенное непрерывное отображение $y = \rho(x)$ пространства S на пространство ρS , обладающее следующим свойством: действительные непрерывные функции на S совпадают с функциями вида

$$f(x) = \varphi[\rho(x)],$$

где $\varphi(y)$ — непрерывная действительная функция на пространстве ρS . Из этого последнего обстоятельства и вытекает, что кольцо $C(S)$ изоморфно кольцу $C(\rho S)$, а кольцо $C'(S)$ — кольцу $C'(\rho S)$.

Ввиду изложенного во всем дальнейшем мы будем предполагать само первоначальное пространство S вполне регулярным (в этом случае ρS совпадает с S).

Будем называть идеал кольца C максимальным, если он не совпадает со всем кольцом, но и не содержится ни в каком большем идеале, кроме самого кольца C . Образует из множества γ максимальных

* ДАН СССР, 1939, т. 22, № 1, с. 11—15. Представлено И. М. Виноградовым.

¹ Имеется в виду статья Г. Е. Шилова «Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций», помещенная на с. 7—10 того же выпуска журнала. — *Примеч. ред.*

идеалов кольца C топологическое пространство при помощи следующего определения: максимальный идеал α является точкой прикосновения множества максимальных идеалов $\mathfrak{M}$, если он содержит пересечение всех максимальных идеалов, входящих в $\mathfrak{M}$. Легко проверить, что для любого кольца C это определение точек прикосновения создает из множества γ пространство типа T_1 (по терминологии Александрова — Хопфа, *Topologie*, I). Заметим, что такой способ введения топологии в множестве максимальных идеалов употреблялся ранее М. Стоуном [2].

Будем обозначать пространство γ , соответствующее кольцу $C(S)$, через $\gamma(S)$, а пространство γ , соответствующее кольцу $C'(S)$, через $\gamma'(S)$.

1

СЛУЧАЙ БИКОМПАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Если пространство S бикомпактно, то кольца $C(S)$ и $C'(S)$ совпадают (все непрерывные функции на S ограничены) и необходимость их раздельного рассмотрения отпадает.

Т е о р е м а I. *Если пространство S бикомпактно, то оно гомеоморфно пространству $\gamma(S)$.*

Для доказательства этой теоремы установим сначала такую лемму.

Л е м м а. *Для любого идеала A кольца $C(S)$, не совпадающего со всем кольцом, существует точка a пространства S , в которой все функции, принадлежащие A , обращаются в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Допустим обратное. Тогда для каждой точки ξ пространства S можно найти по функции $f_\xi(x)$ из A , которая не равна нулю в точке ξ . Функция $f_\xi(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности $u(\xi)$ точки ξ . По теореме Бореля — Лебега можно выбрать конечное множество точек

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

так, что окрестности

$$u(\xi_1), u(\xi_2), \dots, u(\xi_n)$$

покрывают все пространство S . Функция

$$\varphi(x) = f_{\xi_1}^2(x) + f_{\xi_2}^2(x) + \dots + f_{\xi_n}^2(x)$$

принадлежит идеалу A и всюду отлична от нуля. Поэтому любая функция $f(x)$ кольца $C(S)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \psi(x) \varphi(x)$$

и, следовательно, тоже входит в A вопреки допущению. Полученное противоречие доказывает лемму.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I. Из установленной леммы вытекает, что любой идеал A , не совпадающий со всем кольцом

$C(S)$, содержится в некотором идеале $I(a)$, состоящем из всех функций, обращающихся в нуль в точке a . Значит, только идеалы этого последнего типа могут быть максимальными. Ясно также, что всякий идеал типа $I(a)$ действительно является максимальным. В силу полной регулярности пространства S максимальные идеалы $I(a)$ и $I(a')$, соответствующие двум различным точкам a и a' , различны: существует функция из $C(S)$, обращающаяся в нуль в точке a и отличная от нуля в точке a' . Таким образом, ставя каждой точке a пространства S в соответствие максимальный идеал $I(a)$, получаем взаимно однозначное соответствие между пространством S и множеством $\gamma(S)$ максимальных идеалов кольца $C(S)$.

Остается доказать, что полученное соответствие между S и $\gamma(S)$ является гомеоморфизмом.

Пусть множеству M точек пространства S соответствует множество $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов. Если точка a является точкой прикосновения множества M , то все функции, входящие в пересечение всех идеалов из $\mathfrak{M}$, т. е. обращающиеся в нуль во всех точках множества M , обращаются в нуль и в точке a , т. е. входят в идеал $I(a)$, что по определению обозначает, что $I(a)$ есть точка прикосновения множества $\mathfrak{M}$. Обратно, если точка a не является точкой прикосновения для M , то в силу полной регулярности S можно построить функцию $f(x)$ из $C(S)$, обращающуюся в нуль на M и отличную от нуля в точке a ; эта функция входит в пересечение всех идеалов из $\mathfrak{M}$, но не принадлежит $I(a)$; значит, в этом случае $I(a)$ не будет точкой прикосновения для $\mathfrak{M}$. Таким образом, гомеоморфизм пространств S и $\gamma(S)$ доказан.

Т е о р е м а II. *Для того чтобы два бикомпактных пространства S и S_1 были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C(S)$ и $C(S_1)$ были алгебраически изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна: всякий гомеоморфизм между S и S_1 автоматически порождает изоморфное отображение кольца $C(S)$ на кольцо $C(S_1)$. Достаточность условия вытекает из теоремы I: из изоморфизма $C(S)$ и $C(S_1)$ очевидным образом следует гомеоморфизм пространств $\gamma(S)$ и $\gamma(S_1)$, эти же последние по теореме I гомеоморфны пространствам S и S_1 .

2

КОЛЬЦО $C'(S)$ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Вопрос об устройстве кольца $C'(S)$ произвольного вполне регулярного пространства S сводится к случаю бикомпактного пространства. Для этого сведения следует воспользоваться введенным Е. Чехом [1] пространством βS . Именно по Е. Чеху каждому вполне регулярному пространству S соответствует определенное однозначно с точностью до гомеоморфизма пространство βS , характеризующееся следующими условиями:

- 1) βS бикомпактно;

- 2) βS содержит S ;
- 3) S плотно на βS ;
- 4) каждая непрерывная ограниченная действительная функция, определенная на S , может быть продолжена на βS с сохранением непрерывности.

Из того что S плотно на βS , вытекает, что продолжение непрерывных функций с S на βS производится однозначно. Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие между ограниченными непрерывными функциями, определенными на S и на βS . Легко видеть, что при этом кольцо $C'(S)$ отображается изоморфно на кольцо $C'(\beta S)$. Мы доказали, следовательно, такую теорему:

Т е о р е м а III'. *Кольцо $C'(S)$ изоморфно кольцу $C'(\beta S)$ (или, что то же самое, кольцу $C(\beta S)$).*

Из теорем I и III' вытекает

Т е о р е м а IV'. *Пространство $\gamma'(S)$ гомеоморфно пространству βS .*

В силу теоремы III' ясно, что два негомеоморфных пространства S и S_1 могут иметь изоморфные кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять за S любое некомпактное пространство и положить $S_1 = \beta S$; тогда по теореме III' кольцо $C'(S)$ изоморфно кольцу $C'(S_1)$. Однако справедлива такая

Т е о р е м а V'. *Для того чтобы два пространства S и S_1 , удовлетворяющие первой аксиоме счетности, были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$ были алгебраически изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия устанавливается так же, как в случае теоремы I. Необходимость условия вытекает из того факта, установленного Е. Чехом [1], что для двух пространств S и S_1 , удовлетворяющих первой аксиоме счетности, из гомеоморфизма βS и βS_1 следует гомеоморфизм исходных пространств S и S_1 . В самом деле, из изоморфизма $C'(S)$ и $C'(S_1)$ вытекает гомеоморфизм $\gamma'(S)$ и $\gamma'(S_1)$, т. е. по теореме IV' гомеоморфизм βS и βS_1 , а следовательно, в силу упомянутого сейчас результата Е. Чеха и гомеоморфизм между S и S_1 .

3

КОЛЬЦО $C(S)$ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Для кольца $C(S)$ теорема, аналогичная теореме III', относящейся к кольцу $C'(S)$, неверна. Например, если S есть пространство целых чисел (т. е. счетное множество изолированных точек), а $S_1 = \beta S$, то $C(S)$ и $C(S_1)$ неизоморфны (доказательство этого последнего факта мы опускаем). Однако теоремы, аналогичные теоремам IV' и V', остаются в силе.

Т е о р е м а IV. *Пространство $\gamma(S)$ гомеоморфно пространству βS .*

Т е о р е м а V. *Для того чтобы два пространства S и S_1 , удовлетворяющие первой аксиоме счетности, были гомеоморфны, необ-*

ходимо и достаточно, чтобы кольца $C(S)$ и $C(S_1)$ были алгебраически изоморфны.

Теорема V выводится из теоремы IV точно так же, как V' из IV'. Поэтому нам остается только доказать теорему IV.

Доказательство теоремы IV. Поставим в соответствие каждой функции $f(x)$ из $C(S)$ функцию

$$f_1(x) = (2/\pi) \operatorname{arctg} [f(x)].$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна и ограничена на S . Следовательно, она продолжается с сохранением непрерывности на пространство βS . Это позволяет в известном смысле распространить на все пространство βS и определение функции $f(x)$. Именно в любой точке множества $\beta S \setminus S$ мы полагаем

$$f(x) = \operatorname{tg} [(\pi/2) f_1(x)], \quad \text{если } |f_1(x)| \neq 1;$$

$$f(x) = +\infty, \quad \text{если } f_1(x) = +1;$$

$$f(x) = -\infty, \quad \text{если } f_1(x) = -1.$$

После того как функции $f(x)$ распространены на все пространство βS , доказательство теоремы IV протекает с некоторыми осложнениями параллельно доказательству теоремы I. Мы ограничимся сообщением лишь основных моментов этого доказательства. Сначала устанавливается следующая

Л е м м а 1. *Для любого идеала A кольца $C(S)$, не совпадающего со всем кольцом, существует точка a пространства βS , в которой все функции, принадлежащие A , обращаются в нуль.*

Любая точка a пространства βS определяет идеал $I(a)$ кольца $C(S)$, состоящий из всех функций $f(x)$ этого кольца, для которых все произведения

$$\varphi(x) = \psi(x) f(x)$$

с множителями $\psi(x)$ из $C(S)$ обращаются в нуль в точке a (если точка a принадлежит $\beta S \setminus S$, то при этом имеется в виду значение $\varphi(a)$ в смысле, определенном выше). На основе леммы 1 доказываем, что все идеалы типа $I(a)$ максимальны и никаких других максимальных идеалов в кольце $C(S)$ нет.

Л е м м а 2. *Если точка a принадлежит S , то идеал $I(a)$ состоит из всех функций $f(x)$ кольца $C(S)$, обращающихся в нуль в точке a . Если точка a принадлежит $\beta S \setminus S$, то идеал $I(a)$ состоит из всех функций $f(x)$ кольца $C(S)$, обращающихся в нуль на множестве точек N_f первоначального пространства S , имеющем точку a точкой прикосновения.*

Доказательства леммы 2 мы не приводим. Из этой леммы вытекает, что идеалы $I(a)$ и $I(a')$, соответствующие двум различным точкам a и a' , различны. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками a пространства βS и максимальными идеалами $I(a)$. Подобно тому как это было сделано в слу-

чае теоремы I, доказываем, что установленное соответствие между βS и $\gamma(S)$ является гомеоморфизмом.

З а м е ч а н и е. Из изоморфизма колец $C(S)$ и $C(S_1)$ вытекает (по теореме IV) гомеоморфизм пространств βS и βS_1 , а следовательно (по теореме III'), и изоморфизм колец $C'(S)$ и $C'(S_1)$. Обратно же, из изоморфизма колец $C'(S)$ и $C'(S_1)$, вообще говоря, еще не следует изоморфизма колец $C(S)$ и $C(S_1)$. Например, если S есть пространство целых чисел, а $S_1 = \beta S$, то кольца $C'(S)$ и $C'(S_1)$ изоморфны, кольца же $C(S)$ и $C(S_1)$ неизоморфны. Таким образом, кольцо $C(S)$ является более гибким аппаратом для исследования топологических свойств пространства S , чем кольцо $C'(S)$. Однако все же существуют пространства S и S_1 с изоморфными кольцами $C(S)$ и $C(S_1)$, негомеоморфные друг другу. Таковы, например, пространство S трансфинитных чисел $< \Omega$ и пространство S_1 трансфинитных чисел $\leq \Omega$, взятые с обычными в них предельными соотношениями ².

17 ноября 1938 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Čech E.— Ann. Math., 1937, vol. 38, p. 823—844.
2. Stone M. H.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 375—381.

42

КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ *

Движением в гильбертовом пространстве H мы будем называть любое преобразование

$$y = Kx$$

пространства H в себя, представимое в виде

$$Kx = a + Ux,$$

где a — фиксированный элемент пространства H , а U — унитарный оператор.

Непрерывной однопараметрической группой (НОГ) движений будем называть совокупность $\{K_t\}$ движений K_t , зависящих от дей-

² Здесь Ω обозначает первый несчетный трансфинит.— *Примеч. ред.*

* ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 6—9.

ствительного параметра t , пробегающего все значения между $-\infty$ и $+\infty$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых s и t

$$K_{s+t} = K_s K_t;$$

2) для любого элемента x пространства H из $t_n \rightarrow t$ вытекает

$$\|K_{t_n}x - K_t x\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Пусть дана НОГ движений K_t и какой-либо фиксированный элемент x_0 пространства H . Рассмотрим функцию действительного аргумента t

$$\xi(t) = K_t x_0.$$

Очевидно, что функция эта непрерывна (в смысле сильной сходимости в H).

С геометрической точки зрения точка

$$x = \xi(t)$$

описывает в пространстве некоторую кривую. Произвольное движение K преобразует функцию $\xi(t)$ в новую функцию

$$\xi_1(t) = K\xi(t).$$

Если движение $K = K_s$ принадлежит исходной НОГ движений, то

$$\xi_1(t) = \xi(t - s),$$

т. е. кривая $\xi(t)$ отображается преобразованием $K = K_s$ на самое себя. Иначе говоря, кривая $\xi(t)$ инвариантна по отношению к преобразованиям K_s исходной НОГ. Если K не принадлежит исходной НОГ, то кривая $\xi(t)$ переводится преобразованием K , вообще говоря, в новую конгруэнтную ей кривую. Не останавливаясь далее на разъяснении геометрической терминологии, связанной с понятием кривой, сформулируем задачу дальнейшего исследования в аналитической форме.

О п р е д е л е н и е. Функция $\xi(t)$ со значениями из H , определенная при всех действительных t , принадлежит классу $\mathfrak{K}$, если она может быть представлена в виде $\xi(t) = K_t x_0$, где x_0 — элемент H , а $\{K_t\}$ — НОГ движений пространства H .

Целью настоящей работы является изучение функций класса $\mathfrak{K}$ и, в частности, их свойств, инвариантных по отношению к движениям, т. е. свойств, которые остаются неизменными при переходе от функций $\xi(t)$ к функции

$$\xi_1(t) = K\xi(t),$$

каково бы ни было движение K .

Рассмотрим какую-либо функцию $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ и положим

$$B_{\xi}(\tau_1, \tau_2) = (\xi(t + \tau_1) - \xi(t), \xi(t + \tau_2) - \xi(t)). \quad (1)$$

(Очевидно, что $B_{\xi}(\tau_1, \tau_2)$ не зависит от t .) Обозначим через H_{ξ} минимальное замкнутое линейное подпространство пространства H , содержащее все разности $\xi(t + \tau) - \xi(t)$, через G_{ξ} пространство $H - H_{\xi}$, состоящее из всех элементов x , принадлежащих H , ортогональных к H_{ξ} , и через α_{ξ} размерность G_{ξ} (которая может равняться 0, 1, 2, ... или ∞).

При этих обозначениях имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ принадлежат классу $\mathfrak{K}$, то для существования движения K , преобразующего ξ_1 в ξ_2 , т. е. движения, для которого

$$\xi_2(t) = K\xi_1(t),$$

необходима и достаточна совокупность двух условий: 1) $\alpha_{\xi_1} = \alpha_{\xi_2}$; 2) $B_{\xi_1}(\tau_1, \tau_2) = B_{\xi_2}(\tau_1, \tau_2)$ для любых τ_1 и τ_2 .

Т е о р е м а 2. Для того чтобы данному α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$ или ∞) и данной функции $B(\tau_1, \tau_2)$ соответствовала хотя бы одна функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$.

$$\alpha_{\xi} = \alpha, \quad B_{\xi}(\tau_1, \tau_2) = B(\tau_1, \tau_2),$$

необходимо и достаточно, чтобы $B(\tau_1, \tau_2)$ было представимо в виде

$$B(\tau_1, \tau_2) = \oint_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda\tau_1} - 1)(e^{-i\lambda\tau_2} - 1) dF(\Delta_{\lambda}) + \theta\tau_1\tau_2, \quad (2)$$

где интеграл понимается в смысле

$$\oint_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty},$$

θ — произвольная константа, а функция интервала $F(\Delta_{\lambda})$ удовлетворяет следующим условиям:

А) она определена для всех Δ_{λ} , для которых нуль не принадлежит к числу внутренних и конечных точек, аддитивна и непрерывна справа относительно концов Δ_{λ} ;

В) $F(\Delta_{\lambda}) \geq 0$;

С) интегралы

$$\int_{-\infty}^{-1} dF(\Delta_{\lambda}), \quad \oint_{-1}^1 \lambda^2 dF(\Delta_{\lambda}), \quad \int_1^{\infty} dF(\Delta_{\lambda})$$

конечны.

Т е о р е м а 3. Функция $B(\tau_1, \tau_2)$, представляемая в виде (2) с соблюдением условий А), В), С), может быть представлена таким образом единственным способом.

Определенная таким образом однозначно функция $F(\Delta_\lambda)$ и константа θ , соответствующие $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ для данной функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$, обозначаются $F_\xi(\Delta_\lambda)$ и θ_ξ .

Из теорем 1—3 вытекает, что полную систему инвариантов относительно движений для кривой $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ образуют

$$\alpha_\xi, \theta_\xi \text{ и } F_\xi(\Delta_\lambda).$$

При этом для существования кривой класса $\mathfrak{K}$ с данными α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$ или ∞), θ (которое может быть любым комплексным числом) и $F(\Delta_\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы функция интервала $F(\Delta_\lambda)$ удовлетворяла условиям А), В), С) теоремы 2.

Спектральное представление (2) функции $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ связано со спектральным представлением самой функции $\xi(t)$, указываемым в следующей теореме:

Т е о р е м а 4. Каждая функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ может быть представлена единственным способом в виде

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t} - 1) d\Phi(\Delta_\lambda) + ut + v, \quad (3)$$

где u и v — элементы H , а $\Phi(\Delta_\lambda)$ — функция интервала Δ_λ со значениями из H , обладающая следующими свойствами:

1°. $\Phi(\Delta_\lambda)$ определена для всех интервалов Δ_λ , для которых нуль не принадлежит к числу концевых или внутренних точек, аддитивна и непрерывна справа относительно концов Δ_λ .

2°. Если Δ'_λ и Δ''_λ не пересекаются, то

$$(\Phi(\Delta'_\lambda), \Phi(\Delta''_\lambda)) = 0.$$

3°. Интегралы

$$\int_{-\infty}^{-1} dF(\Delta_\lambda), \quad \oint_{-1}^1 \lambda^2 dF(\Delta_\lambda), \quad \int_1^{\infty} dF(\Delta_\lambda),$$

где

$$F(\Delta_\lambda) = \|\Phi(\Delta_\lambda)\|^2, \quad (4)$$

конечны.

При этом интегралы $\oint$ понимаются в смысле, указанном в теореме 2, и

$$F(\Delta_\lambda) = F_\xi(\Delta_\lambda), \quad \|u\|^2 = \theta_\xi,$$

где $F_\xi(\Delta_\lambda)$ и θ_ξ имеют ранее определенный смысл.

Функцию $\Phi(\Delta_\lambda)$ и элементы u и v пространства H , соответствующую по теореме 4 функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$, будем обозначать

$$\Phi_\xi(\Delta_\lambda), \quad u_\xi, \quad v_\xi.$$

Т е о р е м а 5. Для того чтобы данным u и v из H и функции интервала $\Phi(\Delta_\lambda)$ со значениями из H соответствовала по формуле (3)

функция $\xi(t)$ из $\mathfrak{K}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\Delta_\lambda)$ удовлетворяла условиям 1°, 2° и 3° теоремы 4.

Отметим в заключение, что функция класса $\mathfrak{K}$ в том и только в том случае может быть представлена в виде

$$\xi(t) = U_t x_0, \quad (5)$$

где $\{U_t\}$ есть НОГ унитарных операторов, когда норма

$$\|\xi(t)\| = r$$

постоянна при всех t , т. е. в том и только в том случае, когда кривая $\xi(t)$ расположена на сфере

$$\|x\| = r.$$

Класс функций, представимых в виде (5), будем обозначать $\mathfrak{K}_0$. Для функций класса $\mathfrak{K}_0$ все предложения, аналогичные теоремам 1—5, выводятся непосредственно из спектрального представления соответствующей группы $\{U_t\}$ и иногда в несколько иной форме хорошо известны.

Рассмотрение произвольной функции класса $\mathfrak{K}$ может быть сведено к рассмотрению функций класса $\mathfrak{K}_0$ на основе следующего замечания: если $\xi(t)$ принадлежит $\mathfrak{K}$, то

$$\zeta_h(t) = [\xi(t+h) - \xi(t)]/h$$

принадлежит $\mathfrak{K}$. Функции $\zeta_h(t)$ представляются в виде

$$\zeta_h(t) = U_t \zeta_h(0),$$

где операторы

$$U_t = \int e^{i\lambda t} dE(\Delta_\lambda)$$

не зависят от h . Поэтому

$$\zeta_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Psi_h(\Delta_\lambda),$$

где

$$\Psi_h(\Delta_\lambda) = E(\Delta_\lambda) \zeta_h(0).$$

Доказывается существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Psi_h(\Delta_\lambda) = \Psi(\Delta_\lambda)$$

и полагается

$$\Phi(\Delta_\lambda) = \int \frac{d\Psi(\Delta_\lambda)}{i\lambda}.$$

Полученная таким образом функция Φ и есть функция Φ_ξ теоремы 2. Полные доказательства будут опубликованы в другом месте.

23 ноября 1939 г.

43

СПИРАЛЬ ВИНЕРА И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ИНТЕРЕСНЫЕ КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

Мы рассмотрим здесь некоторые частные случаи кривых, которым посвящена моя предыдущая заметка [1].

Преобразованием подобия в гильбертовом пространстве H будем называть любое преобразование A в самого себя, представимое в виде

$$A = a + qUx,$$

где a — фиксированный элемент пространства H , U — унитарный оператор, а q — действительное число, большее нуля.

О п р е д е л е н и е. Функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ принадлежит классу $\mathfrak{U}$, если при любом действительном $k \neq 0$ существует такое преобразование подобия A_k , что

$$\xi(kt) = A_k \xi(t)$$

для всех t .

Если заменить пространство Гильберта в наших определениях конечномерным унитарным пространством, то единственными функциями класса $\mathfrak{U}$ будут линейные функции вида

$$\xi(t) = ut + v$$

(где u и v — фиксированные элементы пространства). Тем более интересно, что в гильбертовом пространстве существуют другие типы функций класса $\mathfrak{U}$. Геометрически каждая функция класса $\mathfrak{U}$ определяет кривую в пространстве H , инвариантную по отношению к группе преобразований подобия, зависящих от двух параметров, которые позволяют отобразить кривую на самую себя так, что любая заданная пара ее точек x и $y \neq x$ перейдет в любую другую заданную пару точек x' и $y' \neq x'$, лежащих на той же кривой.

Т е о р е м а 6. Функция $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$, соответствующая функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{U}$, может быть представлена в виде

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2) = c [|\tau_1|^\gamma + |\tau_2|^\gamma - |\tau_1 - \tau_2|^\gamma],$$

где c и γ — действительные константы, удовлетворяющие неравенствам

$$c \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq 2.$$

* ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 115—118.

Очевидно, что в случае $B_{\xi}(\tau_1, \tau_2)$, нетождественно равного нулю, константы

$$c = c_{\xi} \text{ и } \gamma = \gamma_{\xi}$$

однозначно определяются по функции $B_{\xi}(\tau_1, \tau_2)$, а следовательно, и по самой функции $\xi(t)$. Ясно также, что $B_{\xi}(\tau_1, \tau_2)$ может быть тождественно равным нулю только в случае, если $\xi(t)$ постоянно. В дальнейшем мы отбрасываем этот исключительный случай и считаем, что

$$\gamma_{\xi} > 0, \quad c_{\xi} > 0.$$

Мы видим, таким образом, что функции класса $\mathcal{U}$ характеризуются с точностью до преобразований движения в пространстве H инвариантами α_{ξ} , c_{ξ} и γ_{ξ} . Что касается соответствующих кривых, то они определяются с точностью до конгруэнтности инвариантами α_{ξ} и γ_{ξ} (изменение же c_{ξ} не меняет вида кривой, изображаемой функцией $\xi(t)$), а связано лишь с изменением выбора параметра t .

Т е о р е м а 7. Любым α ($= 0, 1, 2, \dots$, или ∞), c ($c > 0$) и γ ($0 < \gamma \leq 2$) соответствует хотя бы одна функция $\xi(t)$ класса $\mathcal{U}$ с

$$\alpha_{\xi} = \alpha, \quad c_{\xi} = c, \quad \gamma_{\xi} = \gamma.$$

Для функции класса $\mathcal{U}$, соответствующей данным α , c и γ , имеем при $\gamma < 2$

$$\theta_{\xi} = 0, \quad F_{\xi}(\Delta_{\lambda}) = \frac{c}{D} \int_{\Delta_{\lambda}} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\gamma+1}},$$

где

$$D = 4 \int_0^{\infty} \frac{(\sin(\lambda/2))^2}{\lambda^{\gamma+1}} d\lambda.$$

В случае же $\gamma = 2$ имеем

$$\theta_{\xi} = 2c, \quad F_{\xi}(\Delta_{\lambda}) = 0.$$

В последнем случае ($\gamma = 2$) сама функция $\xi(t)$ линейна (т. е. геометрически изображает прямую в пространстве H).

Рассмотрим теперь специально класс $\mathfrak{B}$ функций $\xi(t)$ класса $\mathcal{U}$, для которых

$$\gamma_{\xi} = 1.$$

Кривые, соответствующие этому классу функций, назовем *спиралями Винера*. В соответствии с вышесказанным спираль Винера определяется с точностью до конгруэнтности единственным инвариантом α_{ξ} . Если же интересоваться лишь расположением кривой в соответствующем пространстве H_{ξ} , то можно сказать, что все спирали Винера конгруэнтны друг другу. Точно это обозначает следующее: для любых двух спиралей Винера, определяемых функциями ξ_1

и ξ_2 , существует взаимно однозначное соответствие между H_{ξ_1} и H_{ξ_2} вида

$$y = a + Ux,$$

где a — фиксированный элемент H_{ξ_1} , а U — изометричный линейный оператор, который преобразует первую кривую во вторую.

Т е о р е м а 8. Для того чтобы функция класса $\mathfrak{R}$ принадлежала классу $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух непересекающихся интервалов

$$s_1 < t < t_1, \quad s_2 < t < t_2$$

оси t имело место равенство

$$[\xi(t_1) - \xi(s_1), \xi(t_2) - \xi(s_2)] = 0.$$

На геометрическом языке теореме 8 можно выразить так: спирали Винера вполне характеризуются двумя следующими свойствами:

- 1) они инвариантны по отношению к некоторой НОГ движений;
- 2) их хорды, соответствующие двум неперекрывающимся дугам, ортогональны.

Откладывая доказательство перечисленных теорем до другой публикации, дадим здесь несколько дополнительных замечаний и примеров.

1. При $\gamma < 2$ функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{U}$ не дифференцируема (как в смысле сильной, так и в смысле слабой сходимости).

2. Если $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{U}$, то различным значениям t соответствуют различные ξ . Это свойство не обязательно для функций класса $\mathfrak{R}$, среди которых имеются, в частности, периодические.

3. Значения функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{U}$ неограничены по норме. Так как значения функции класса $\mathfrak{R}_0$ имеют постоянную норму, то отсюда вытекает, что классы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{R}_0$ не пересекаются.

4. *Пример реализации спирали Винера.* Рассмотрим гильбертово пространство H_0 комплексных функций $f(z)$ действительного аргумента z ($-\infty < z < \infty$) с конечным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz,$$

в котором скалярное произведение определено обычной формулой

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \bar{g}(z) dz.$$

При $t \geq 0$ положим $\xi(t)$ равным функции $f(z)$, которая равна 1, если $0 \leq z \leq t$, и равна 0 для остальных z .

Легко проверить, что $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 8.

5. *Применение функций класса $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ в теории вероятностей.* Пусть дано какое-либо поле вероятностей (для определений

см. [2]). Комплексные случайные величины x этого поля с конечным математическим ожиданием

$$E |x|^2$$

образуют, если их скалярное произведение определить формулой

$$(x, y) = E (x\bar{y}),$$

унитарное пространство R конечного или бесконечного числа измерений. Наиболее интересен случай бесконечномерного пространства со счетным базисом. В этом случае R удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства. Если каждому t поставлена в соответствие случайная величина $\xi(t)$, то говорят, что $\xi(t)$ есть случайная функция. Будем считать, что $\xi(t)$ при каждом t принадлежит R и непрерывна в смысле сходимости по норме в R . Тогда

а) Принадлежность $\xi(t)$ к классу $\mathfrak{K}_0$ совпадает со *стационарностью* случайной функции $\xi(t)$ в *широком смысле* (в теории вероятностей играет большую роль также другое понятие «стационарности в узком смысле», на котором мы здесь не останавливаемся). Стационарные в широком смысле случайные функции подробно изучены А. Я. Хинчиным [3].

б) Если случайная функция $\xi(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$, то ее естественно назвать *случайной функцией со стационарными* (в широком смысле) *приращениями*. Их детальное изучение являлось одной из очередных задач теории вероятностей и может быть проведено на основе изложенных нами в [1] результатов.

с) Требование

$$[\xi(t_1) - \xi(s_1), \xi(t_2) - \xi(s_2)] = 0$$

теоремы 8 на языке теории вероятностей обозначает равенство нулю коэффициента корреляции между приращениями $\xi(t)$ на двух непересекающихся интервалах оси t . Таким образом, случайные функции класса $\mathfrak{K}$ — это функции со стационарными (в широком смысле) и некоррелированными приращениями.

Частный случай такого рода случайных функций, встречающийся при изучении броуновского движения, и привел Винера еще в 1923 г. (см. [4]) к рассмотрению, которые в переводе на геометрический язык приводят к описанным выше спиральям Винера.

28 ноября 1939 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений.— ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 6—9.
2. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 80 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1974.
3. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов.— УМН, 1938, вып. 5, с. 42—51.
4. Wiener N. Differential-space.— J. Math. and Phys., 1923, vol. 11, N 3, p. 122—174.

ТОЧКИ ЛОКАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЧНОСТИ СЧЕТНОКРАТНЫХ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПАКТОВ*

Рассмотрим непрерывное однозначное отображение

$$y = f(x)$$

компакта X на компакт Y . Отображение f называется *открытым*, если образ любого открытого множества пространства X является открытым множеством в пространстве Y . Отображение f называется *счетнократным*, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки y пространства Y не более чем счетен. Точка x пространства X называется *точкой локальной топологичности* отображения f , если существует такая окрестность U точки x , которая отображается отображением f на свой образ $f(U)$ топологически. В дополнение к результатам П. С. Александрова [1] я доказываю далее следующую теорему.

Т е о р е м а. Если отображение f открыто и счетнократно, то множество T_f точек его локальной топологичности всюду плотно в X .

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно установить, что из существования непустого открытого множества $U \subset X$, не содержащего точек локальной топологичности открытого отображения f , вытекает существование в

$$V = f(U)$$

точки y^* с более чем счетным полным прообразом $f^{-1}(y^*)$. Чтобы найти такую точку y^* , мы построим точки

$$x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \in U, \quad y^{(n)} \in V \quad (n = 1, 2, \dots; \quad i_k = 0, 1)$$

и открытые множества

$$U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \subset U, \quad V^{(n)} \subset V \quad (n = 1, 2, \dots; \quad i_k = 0, 1),$$

обладающие следующими свойствами:

- 1) $f(x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}) = y^{(n)}$,
- 2) $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} \in U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$,
- 3) $y^{(n)} \in V^{(n)}$,
- 4) $\overline{U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n+1)}} \subset U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$,

* ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 477--479.

$$5) \quad \overline{V^{n+1}} \subset \overline{V^{(n)}},$$

$$6) \quad V^{(n)} \subset f(U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}),$$

$$7) \quad \overline{U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n+1)}} \cdot \overline{U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n+1)}} = 0,$$

8) диаметр множеств $V^{(n)}$ и $U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ меньше $1/n$.

Из 3), 5), 8) вытекает, что точки $y^{(n)}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторой предельной точке y^* . Из 2), 4) и 8) вытекает, что для любой последовательности

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \dots,$$

составленной из нулей и единиц, точки $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторой предельной точке

$$x_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}$$

Из 7) вытекает, что точки $x_{i_1 i_2 \dots i_n}$, соответствующие различным последовательностям $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, различны. Из непрерывности отображения f вытекает, что для любых $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$

$$f(x_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}) = y^*,$$

т. е. что полный прообраз $f^{-1}(y^*)$ точки y^* имеет мощность континуума.

Переходим к построению точек $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и $y^{(n)}$ и открытых множеств $U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и $V^{(n)}$.

а) При $n = 1$ в качестве точки $y^{(1)}$ выбираем любую точку из V , имеющую в U не менее двух различных прообразов $x_0^{(1)}$ и $x_1^{(1)}$. В силу отсутствия в U точек локальной топологичности такая точка $y^{(1)}$ существует. За $U_0^{(1)}$ и $U_1^{(1)}$ принимаются какие-либо окрестности точек $x_0^{(1)}$ и $x_1^{(1)}$, удовлетворяющие условиям

$$\overline{U_0^{(1)}} \subset U, \quad \overline{U_1^{(1)}} \subset U_1 \quad \text{и} \quad \overline{U_0^{(1)}} \cdot \overline{U_1^{(1)}} = 0.$$

Наконец, в качестве $V^{(1)}$ выбирается такая окрестность точки $y^{(1)}$, которая содержится вместе с своим замыканием в V , $f(U_0^{(1)})$ и в $f(U_1^{(1)})$. Такая окрестность точки $y^{(1)}$ существует в силу открытости отображения f .

б) Допустим, что точки $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и $y^{(n)}$ и открытые множества $U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и $V^{(n)}$ уже построены для $n = N$, и построим их для $n = N + 1$. Положим

$$v = i_1 + 2i_2 + 2^2 i_3 + \dots + 2^{N-1} i_N$$

и будем обозначать систему индексов $i_1 i_2 \dots i_n$ через $S(v)$. Системы индексов $i_1 i_2 \dots i_n 0$ и $i_1 i_2 \dots i_n 1$ обозначим соответственно через $S(v) 0$ и $S(v) 1$. В новых обозначениях множества $U_{i_1 i_2 \dots i_n i_{N+1}}^{(N+1)}$, которые нам предстоит построить, обозначаются символами $U_{S(v)0}^{(N+1)}$ и $U_{S(v)1}^{(N+1)}$, где

$$v = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1.$$

При построении этих множеств мы введем еще точки η_v , ξ'_v и ξ''_v и открытые множества W_v , обладающие следующими свойствами:

- 1) $\xi'_v \in U_{S(v)0}^{(N+1)}$, $\xi''_v \in U_{S(v)1}^{(N+1)}$,
- 2) $\eta_v \in W_v$,
- 3) $f(\xi'_v) = f(\xi''_v) = \eta_v$,
- 4) $W_v \subset f(U_{S(v)0}^{(N+1)})$, $W_v \subset f(U_{S(v)1}^{(N+1)})$,
- 5) $W_{v+1} \subset W_v$,
- 6) $W_0 \subset V^{(N)}$.

Построение точек η_v , ξ'_v и ξ''_v и открытых множеств $U_{S(v)0}^{(N+1)}$, $U_{S(v)1}^{(N+1)}$ и W_v производится индуктивно переходом от v к $v+1$:

b₁) При $v=0$ выбираем в $V^{(N)}$ точку η_0 , имеющую в $U_{S(0)}^{(N)}$ не менее двух различных прообразов ξ'_0 и ξ''_0 . В качестве $U_{S(0)0}^{(N+1)}$ и $U_{S(0)1}^{(N+1)}$ берем окрестности точек ξ'_0 и ξ''_0 , удовлетворяющие требованиям

$$\overline{U_{S(0)0}^{(N+1)}} \subset U_{S(0)}^{(N)}, \quad \overline{U_{S(0)1}^{(N+1)}} \subset U_{S(0)}^{(N)} \quad \text{и} \quad \overline{U_{S(0)0}^{(N+1)}} \cdot \overline{U_{S(0)1}^{(N+1)}} = 0.$$

В силу открытости f у точки η_0 найдется окрестность W_0 , содержащаяся в $V^{(N)}$, $f(U_{S(0)0}^{(N+1)})$ и $f(U_{S(0)1}^{(N+1)})$.

b₂) Допустим, что η_v , ξ'_v , ξ''_v , $U_{S(v)0}^{(N+1)}$, $U_{S(v)1}^{(N+1)}$ и W_v уже построены при $v=\beta$, и построим их для $v=\beta+1$. В качестве $\eta_{\beta+1}$ выберем точку из W_β , которая имеет в $U_{S(\beta+1)}^{(N)}$ не менее двух различных прообразов $\xi'_{\beta+1}$ и $\xi''_{\beta+1}$. В качестве $U_{S(\beta+1)0}^{(N+1)}$ и $U_{S(\beta+1)1}^{(N+1)}$ выберем какие-либо окрестности точек $\xi'_{\beta+1}$ и $\xi''_{\beta+1}$, удовлетворяющие требованиям

$$U_{S(\beta+1)0}^{(N+1)} \subset U_{S(\beta+1)}^{(N)}, \quad \overline{U_{S(\beta+1)0}^{(N+1)}} \subset U_{S(\beta+1)}^{(N)} \quad \text{и} \quad \overline{U_{S(\beta+1)0}^{(N+1)}} \cdot \overline{U_{S(\beta+1)1}^{(N+1)}} = 0.$$

В силу открытости f у точки $\eta_{\beta+1}$ найдется окрестность $W_{\beta+1}$, содержащаяся в

$$W_\beta, f(U_{S(\beta+1)0}^{(N+1)}) \text{ и } f(U_{S(\beta+1)1}^{(N+1)}).$$

Дойдя в описанном построении до $v=v_0=2^N-1$, положим $y^{(N+1)} = \eta_{v_0}$.

В силу свойств 4), 5) и 6) множеств W_v множество W_v содержится во всех $f(U_{S(v)0}^{(N+1)})$ и $f(U_{S(v)1}^{(N+1)})$.

Поэтому у точки $y^{(N+1)}$ найдется по прообразу

$$x_{S(v)0}^{(N+1)} \quad \text{и} \quad x_{S(v)1}^{(N+1)},$$

лежащему в каждом из множеств $U_{S(v)0}^{(N+1)}$ и $U_{S(v)1}^{(N+1)}$. В силу открытости f у $y^{(N+1)} \in W_v \subset V^{(N)}$ найдется окрестность $V^{(N+1)}$, содержащаяся вместе со своим замыканием в $V^{(N)}$, во всех $f(U_{S(v)0}^{(N+1)})$ и $f(U_{S(v)1}^{(N+1)})$.

Легко проверить, что построенные точки $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и открытые множества $U_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ и $V^{(n)}$ удовлетворяют условиям 1) — 8).

20 декабря 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. О счетнократных открытых отображениях. — ДАН СССР, 1936, т. 4, № 7, с. 283—287.

45

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОЧЕНЬ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА *

§ 1. Будем обозначать через

$$u_\alpha(P) = u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

компоненты скорости в момент времени t в точке с прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 . При изучении турбулентности естественно считать компоненты скорости $u_\alpha(P)$ в каждой точке $P = (x_1, x_2, x_3, t)$ изучаемой области G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) случайными величинами в смысле, принятом в теории вероятностей (см. по поводу такого подхода Миллионщиков [1]).

Обозначая через $\bar{A}$ математическое ожидание случайной величины A , предположим, что

$$\overline{u_\alpha^2} \quad \text{и} \quad \overline{(\partial u_\alpha / \partial x_\beta)^2}$$

конечны и ограничены в каждой ограниченной подобласти области G .

* ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.

Введем в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, t) новые координаты

$$y_\alpha = x_\alpha - x_\alpha^{(0)} - u_\alpha(P^{(0)})(t - t^{(0)}), \quad s = t - t^{(0)}, \quad (1)$$

где

$$P^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t^{(0)})$$

— некоторая фиксированная точка из области G . Заметим, что координаты y_α какой-либо точки P зависят от случайных величин $u_\alpha(P^{(0)})$ и поэтому сами являются случайными величинами. Компоненты скорости в новых координатах равны

$$w_\alpha(P) = u_\alpha(P) - u_\alpha(P^{(0)}). \quad (2)$$

Пусть при каких-либо фиксированных значениях величин $u_\alpha(P^{(0)})$ точки $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеющие в системе координат (1) координаты $y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$, лежат в области G . Тогда можно определить $3n$ -мерный условный закон распределения вероятностей F_n для величин

$$w_\alpha^{(k)} = w_\alpha(P^{(k)}), \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

при заданных

$$u_\alpha^{(0)} = u_\alpha(P^{(0)}).$$

Вообще говоря, закон распределения F_n зависит от параметров $x_\alpha^{(0)}, t^{(0)}, u_\alpha^{(0)}, y_\alpha^{(k)}, s^{(k)}$.

О п р е д е л е н и е 1. Турбулентность называется *локально однородной* в области G , если при любых фиксированных $n, y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$ закон распределения F_n не зависит от $x_\alpha^{(0)}, t^{(0)}$ и $u_\alpha^{(0)}$, пока все точки $P^{(k)}$ помещаются в G .

О п р е д е л е н и е 2. Турбулентность называется *локально изотропной* в области G , если она локально однородна и если, кроме того, указанные в определении 1 законы распределения инвариантны по отношению к вращениям и зеркальным отражениям исходной системы координатных осей (x_1, x_2, x_3) .

По сравнению с введенным Тейлором [2] понятием *изотропной турбулентности* наше определение локально изотропной турбулентности уже в том отношении, что в нашем определении требуется независимость законов распределения F_n от $t^{(0)}$, т. е. стационарность во времени, и *шире* в том отношении, что ограничения накладываются лишь на законы распределения разностей скоростей, а не самих скоростей.

§ 2. Гипотеза изотропности в смысле Тейлора хорошо подтверждается экспериментально в случае турбулентности, вызванной прохождением потока через решетку (см. [3]). В большинстве других

практически интересных случаев она может рассматриваться лишь как весьма грубое приближение к действительности даже для малых областей G и при очень больших числах Рейнольдса.

В отличие от этого автору представляется весьма правдоподобным, что в произвольном турбулентном потоке с достаточно большим числом Рейнольдса ¹

$$Re = LU/\nu$$

в достаточно малых областях G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) , не лежащих вблизи границ потока или других его особенностей, осуществляется с хорошим приближением гипотеза локальной изотропности. При этом под «малой областью» подразумевается область, линейные размеры которой малы по сравнению с L , а временные — по сравнению с

$$T = U/L.$$

Естественно, что в столь общей и несколько неопределенной формулировке выдвинутое сейчас предположение не может быть строго доказано ². Чтобы сделать возможной его экспериментальную про-

¹ Здесь L и U обозначают типичные масштабы длин и скоростей для потока в целом.

² Приведем здесь лишь некоторые общие соображения в пользу высказанной гипотезы. При очень больших Re турбулентный поток можно представлять себе следующим образом: на осредненный поток (характеризующийся математическими ожиданиями $\overline{u_\alpha}$) накладываются «пульсации первого порядка», состоящие в беспорядочном перемещении отдельных объемов жидкости с диаметрами порядка $l^{(1)} = l$ (где l — прандтлевский путь перемешивания) друг относительно друга; порядок скоростей этих относительных перемещений обозначим через $v^{(1)}$. Пульсации первого порядка оказываются при очень большом Re в свою очередь неустойчивыми и на них накладываются пульсации «второго порядка» с путем перемешивания $l^{(2)} < l^{(1)}$ и относительными скоростями $v^{(2)} < v^{(1)}$; такой процесс последовательного измельчения турбулентных пульсаций происходит до тех пор, пока для пульсаций какого-либо достаточно большого порядка n число Рейнольдса

$$Re^{(n)} = l^{(n)} v^{(n)} / \nu$$

не окажется достаточно малым, чтобы влияние вязкости на пульсации n -го порядка было уже ощутительно и предупреждало образование накладывающихся на них пульсаций $(n+1)$ -го порядка.

С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсациям более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости.

В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму. В пределах малых промежутков времени этот режим

верку для отдельных частных случаев, мы указываем далее ряд следствий из гипотезы локальной изотропности.

§ 3. Будем обозначать через y вектор с компонентами y_1, y_2, y_3 и рассмотрим случайные величины

$$w_\alpha(y) = w_\alpha(y_1, y_2, y_3) = u_\alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3)$$

В силу предположения локальной изотропности их законы распределения не зависят от x_1, x_2, x_3 и t . Для первых моментов величин $w_\alpha(y)$ из локальной изотропности вытекает, что

$$\overline{w_\alpha(y)} = 0. \quad (4)$$

Переходим поэтому к изучению вторых моментов³

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \overline{w_\alpha(y^{(1)}) w_\beta(y^{(2)})}. \quad (5)$$

Из локальной изотропности вытекает, что

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2} [B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(1)}) + B_{\alpha\beta}(y^{(2)}, y^{(2)}) - B_{\alpha\beta}(y^{(2)} - y^{(1)}, y^{(2)} - y^{(1)})]. \quad (6)$$

Эта формула позволяет ограничиться вторыми моментами вида $B_{\alpha\beta}(y, y)$. Для них

$$B_{\alpha\beta}(y, y) = \bar{B}(r) \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta + \delta_{\alpha\beta} B_{nn}(r), \quad (7)$$

где $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $y_\alpha = r \cos \theta_\alpha$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ при $\alpha = \beta$;

$$\bar{B}(r) = B_{dd}(r) - B_{nn}(r), \quad (8)$$

$$B_{dd}(r) = [\overline{w_1(r, 0, 0)}]^2, \quad B_{nn}(r) = [\overline{w_2(r, 0, 0)}]^2. \quad (9)$$

При $r = 0$ имеем

$$B_{dd}(0) = B_{nn}(0) = \frac{\partial}{\partial r} B_{dd}(0) = \frac{\partial}{\partial r} B_{nn}(0) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{dd}(0) = 2 \left(\overline{\frac{\partial w_1}{\partial y_1}} \right)^2 = 2a^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{nn}(0) = 2 \left(\overline{\frac{\partial w_2}{\partial y_1}} \right)^2 = 2a_n^2. \quad (11)$$

естественно считать приближенно стационарным даже в том случае, если поток в целом нестационарен.

Так как при очень больших Re разности]

$$w_\alpha(P) = u_\alpha(P) - u_\alpha(P^{(0)})$$

компонент скоростей в близких точках P и $P^{(0)}$ четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) определяются почти исключительно пульсациями высших порядков, то изложенная сейчас схема и приводит нас к гипотезе локальной изотропности в малых областях в смысле определений § 1 и 2.

³ Все результаты § 3 вполне аналогичны полученным в [1, 2, 4] для случая изотропной турбулентности в смысле Тейлора.

Формулы (6) — (11) были получены без использования предположения о несжимаемости жидкости. Из этого предположения вытекает уравнение

$$r \partial B_{dd} / \partial r = -2\bar{B}, \quad (12)$$

позволяющее выразить B_{nn} через B_{dd} . Из (12) и (11) вытекает, что

$$a_n^2 = 2a^2. \quad (13)$$

Легко далее вычислить, что (в предположении несжимаемости) среднее рассеяние энергии в единицу времени на единицу массы равно:

$$\bar{\epsilon} = \nu \left\{ 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_3}{\partial y_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y_2} + \frac{\partial w_2}{\partial y_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial y_1} \right)^2 \right\} = 15\nu a^2. \quad (14)$$

§ 4. Рассмотрим преобразование координат

$$y'_\alpha = y_\alpha / \eta, \quad s' = s / \sigma. \quad (15)$$

Скорости, кинематическая вязкость и среднее рассеяние энергии в новой системе координат выражаются следующими формулами:

$$w'_\alpha = w_\alpha \sigma / \eta, \quad \nu' = \nu \sigma / \eta^2, \quad \bar{\epsilon}' = \bar{\epsilon} \sigma^3 / \eta^2. \quad (16)$$

Примем теперь следующую гипотезу:

Первая гипотеза подобия. Распределения F_n для локально изотропной турбулентности однозначно определяются величинами ν и $\bar{\epsilon}$.

Преобразование координат (15) при

$$\eta = \lambda = \sqrt{\nu / a} = \nu^{1/4} / \bar{\epsilon}^{1/4}, \quad (17)$$

$$\sigma = 1/a = \sqrt{\nu / \bar{\epsilon}} \quad (18)$$

приводит величинам $\nu' = 1$, $\bar{\epsilon}' = 1$.

Поэтому в силу принятой гипотезы подобия соответствующая функция

$$B'_{dd}(r') = \beta_{dd}(r') \quad (19)$$

должна быть одинакова для всех случаев локально изотропной турбулентности. Формула

$$B_{dd}(r) = \sqrt{\nu \bar{\epsilon}} \beta_{dd}(r/\lambda) \quad (20)$$

показывает в соединении с выведенными ранее, что вторые моменты $B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)})$ в случае локально изотропной турбулентности однозначно выражаются через ν , $\bar{\epsilon}$ и универсальную функцию β_{dd} .

§ 5. Чтобы определить поведение функции $\beta_{dd}(r')$ при больших r' , введем еще одну гипотезу.

Вторая гипотеза подобия⁴. Если абсолютные величины векторов $y^{(k)}$ и их разностей $y^{(k)} - y^{(k')}$ (где $k' \neq k$) велики по сравнению с λ , то законы распределения F_n однозначно определяются величиной $\bar{\epsilon}$ и не зависят от ν .

Положим

$$y'_\alpha = y'_\alpha/k^3, \quad s' = s'/k^2, \quad (21)$$

где y'_α и s' определены в соответствии с формулами (15), (17) и (18). Так как при любом k

$$\bar{\epsilon}' = \bar{\epsilon}'' = 1,$$

то при r' большом по сравнению с $\lambda' = 1$ в силу принятой сейчас гипотезы

$$B''_{dd}(r'') \approx B'_{dd}(r'') = \beta_{dd}(r''/k^3).$$

С другой стороны, из формулы (20) вытекает, что

$$B''_{dd}(r'') = (1/k^2) B'_{dd}(r') = (1/k^2) \beta_{dd}(r').$$

Таким образом, при больших r'

$$\beta_{dd}(r'/k^3) \approx (1/k^2) \beta_{dd}(r),$$

откуда

$$\beta_{dd}(r') \approx C (r')^{2/3}, \quad (22)$$

где C — абсолютная константа. В силу (17), (20) и (22) при r , больших по сравнению с λ ,

$$B_{dd}(r) \approx C \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}. \quad (23)$$

Из (23) и (12) легко вывести, что при r , больших по сравнению с λ ,

$$B_{nn}(r) \approx 4/3 B_{dd}(r). \quad (24)$$

Заметим по поводу последней формулы, что при r , малых по сравнению с λ , в силу (13) имеет место соотношение

$$B_{nn}(r) \approx 2 B_{dd}(r). \quad (25)$$

28 декабря 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллионщиков М. Д. Врождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. — ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.

⁴ В терминах схематического представления о турбулентности, развитого в примечании 2, λ есть масштаб наиболее мелких пульсаций, энергия которых непосредственно рассеивается в тепловую благодаря вязкости. Смысл второй гипотезы подобия заключается в том, что механизм передачи энергии от более крупных пульсаций к более мелким для пульсаций промежуточных порядков, для которых $l^{(k)}$ больше чем λ , не зависит от вязкости.

2. Taylor G. I. Statistical theory of turbulence. I—IV.— Proc. Roy. Soc. London, 1935, vol. A151, N 874, p. 421—478.
3. Modern developments in fluid mechanics/Ed. S. Goldstein. Oxford: Univ. Press, 1938, vol. 1, § 95. Рус. пер.: Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Гольдштейна. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1.]
4. Karman Th. von. The fundamentals of the statistical theory of turbulence.— J. Aeronaut. Sci., 1937, vol. 4, N 4, p. 131—138.

46

К ВЫРОЖДЕНИЮ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ *

Будем, подобно [1, 2], считать компоненты

$$u_\alpha(P, t) = u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t)$$

скорости в момент времени t в точке $P = (x_1, x_2, x_3)$ случайными величинами и через $\bar{A}$ обозначать математическое ожидание случайной величины A .

В случае изотропной турбулентности в смысле Тейлора (см. [3, 4])

$$\bar{u}_\alpha = 0 \tag{1}$$

и вторые моменты

$$b_{\alpha\beta} = \overline{u_\alpha(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, t) u_\beta(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, t)} \tag{2}$$

выражаются формулами (см. [1, 5])

$$b_{\alpha\beta} = \bar{b}(r, t) \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta + \delta_{\alpha\beta} b_{nn}(r, t), \tag{3}$$

где

$$r^2 = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)})^2 + (x_3^{(2)} - x_3^{(1)})^2,$$

$$x_\alpha^{(2)} - x_\alpha^{(1)} = r \cos \theta_\alpha, \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ при } \alpha = \beta;$$

$$\bar{b}(r, t) = b_{dd}(r, t) - b_{nn}(r, t); \tag{4}$$

$$b_{dd}(r, t) = \overline{u_1(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1 + r, x_2, x_3, t)}; \tag{5}$$

$$b_{nn}(r, t) = \overline{u_2(x_1, x_2, x_3, t) u_2(x_1 + r, x_2, x_3, t)}; \tag{6}$$

$$\partial b_{dd} / \partial r = -(2/r) \bar{b}. \tag{7}$$

Формула (7) вместе с

$$b_{dd}(0, t) = b_{nn}(0, t) = \overline{[u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t)]^2} = b(t) \tag{8}$$

* ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.

позволяет определить b_{nn} через b_{dd} . Таким образом, все вторые моменты определяются через единственную функцию $b_{dd}(r, t)$.

Для $b_{dd}(r, t)$ Карман и Ховарт [5] получили уравнение

$$\frac{\partial b_{dd}}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial b_{nnd}}{\partial r} + \frac{4}{r} b_{nnd} \right) = 2\nu \left(\frac{\partial^2 b_{dd}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial b_{dd}}{\partial r} \right), \quad (9)$$

где

$$b_{nnd}(r, t) = \overline{u_2^2(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1 + r, x_2, x_3, t)}. \quad (10)$$

Лойцянский [6] из уравнения (9) вывел, что

$$\Lambda = \int_0^\infty b_{dd}(r, t) r^4 dr \quad (11)$$

не зависит от времени.

Примем за «масштаб турбулентности» длину

$$L = (\Lambda/b)^{1/5}. \quad (12)$$

По L и среднему значению компонент скорости

$$u = \sqrt{\bar{b}} \quad (13)$$

определим число Рейнольдса

$$Re = Lu/\nu = (\Lambda^{1/5}/\nu) u^{3/5}. \quad (14)$$

Так как $u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то из (14) вытекает, что при больших t число Рейнольдса Re мало. На этой заключительной стадии вырождения изотропной турбулентности законно применение теории, пренебрегающей третьими моментами. Как показано в [1], в этом случае

$$b_{dd}(r, t) = \frac{k}{(4\nu t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right), \quad (15)$$

$$b_{nn}(r, t) = \frac{k}{(4\nu t)^{3/2}} \left(1 - \frac{r^2}{8\nu t}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) \quad (16)$$

и, следовательно,

$$u = At^{-3/4}, \quad (17)$$

$$L = B\sqrt[5]{t}. \quad (18)$$

Легко вычислить, как k , A и B выражаются через ν и Λ .

Для больших Re Карман, допуская, что $b_{dd}(r, t)$ имеет вид

$$b_{dd}(r, t) = b\psi(r/L), \quad (19)$$

нашел (см. [5]), что ¹

$$u = u_0 (t - t_0)^{-p}, \quad L = L_0 (t - t_0)^{1-p}, \quad (20)$$

не определив, однако, показатель p .

Ниже приводится новый вывод формул (20), из которого следует, что

$$p = 5/7. \quad (21)$$

Установим сначала, что при достаточно большом Re из допущения (19) вытекает

$$db/dt = -Kb^{3/2}L^{-1}, \quad (22)$$

где K — абсолютная константа. Формула (22) может быть обоснована различными способами. Если принять допущения моей заметки [2], то можно рассуждать так. При изотропной турбулентности средняя энергия на единицу массы равна $(3/2)b$. Поэтому рассеяние энергии за единицу времени на единицу массы равно в среднем

$$\bar{\epsilon} = - (3/2) db/dt. \quad (23)$$

Так как, пользуясь обозначением $B_{dd}(r)$ из [2], имеем

$$b_{dd}(r) = b - (1/2) B_{dd}(r), \quad (24)$$

то в силу формулы (23) из [2] при r , малых по сравнению с L , но больших по сравнению с λ ,

$$b_{dd}(r) \approx b \left(1 - \frac{C}{2b} \bar{\epsilon}^2 r^{2/3} \right). \quad (25)$$

Для функции $\psi(\rho)$ из (25) при малых ρ получаем ²

$$\psi(\rho) \approx 1 - g\rho^{2/3}, \quad (26)$$

где

$$g = (C/2) \bar{\epsilon}^{3/2} L^{2/3} b^{-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{\epsilon} = (2g/C)^{2/3} L^{-1}. \quad (27)$$

Положив

$$K = (2/3) (2g/C)^{2/3}, \quad (28)$$

из (23) и (27) получаем формулу (22). Формула (28) показывает, как коэффициент K выражается через абсолютную константу C , введен-

¹ Уравнение (77) проинтегрировано в [6] ошибочно. В действительности показатель степени в формуле (78) должен равняться $AB/[5 + AB]$, а в формуле (81) — равняться $-5/[5 + AB]$. Значение $p = 5/7$ соответствует $AB = 2$.

² Мы принимаем, что соотношение (26) сохраняется для сколь угодно малых ρ . Однако реальный смысл оно имеет только при ρ , больших по сравнению с λ/L , так как само допущение (19) естественно лишь при r , больших по сравнению с λ .

ную в [2], и величину g , определяющуюся из (26) по виду функции $\psi(\rho)$.

Из (12) и (22) получаем

$$db/dt = -K\Lambda^{-1/3}b^{2/3}. \quad (29)$$

Интегрирование уравнения (29) приводит к результату

$$b = (10/7K)^{3/2}\Lambda^{1/2}(t - t_0)^{-3/2}. \quad (30)$$

Из (30), (13) и (12) вытекает

$$u = (10/7K)^{1/2}\Lambda^{1/2}(t - t_0)^{-1/2}, \quad (31)$$

$$L = (7K/10)^{1/2}\Lambda^{1/2}(t - t_0)^{1/2}. \quad (32)$$

Сопоставление (31) и (32) с (20) показывает, что действительно $p = 5/7$.

4 марта 1941 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. — ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.
2. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. — ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
3. Taylor G. I. Statistical theory of turbulence. I—IV. — Proc. Roy. Soc. London, 1935, vol. A151, N 874, p. 421—478.
4. Modern developments in fluid mechanics/Ed. S. Goldstein. Oxford: Univ. Press, 1938, vol. 1, § 91. Рус. пер.: Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости/Под ред. С. Гольдштейна М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1.
5. Karman Th. von, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. — Proc. Roy. Soc. London, 1938, vol. A164, N 917, p. 192—215.
6. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. — Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440, с. 3—23.

47

РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ *

В моей заметке [1] было определено понятие локальной изотропности и были введены величины

$$B_{dd}(r) = [\overline{u_d(M') - u_d(M)}]^2, \quad B_{nn}(r) = [\overline{u_n(M') - u_n(M)}]^2, \quad (1)$$

где r обозначает расстояние между точками M и M' , $u_d(M')$ и $u_d(M)$ — компоненты скорости в точках M и M' по направлению $\overline{MM'}$, а $u_n(M)$ и $u_n(M')$ — компоненты скорости в M и M' по какому-либо перпендикулярному к $\overline{MM'}$ направлению.

* ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 19—21.

Для дальнейшего нам понадобятся еще третьи моменты

$$B_{ddd}(r) = [\overline{u_d(M') - u_d(M)}]^3. \quad (2)$$

При локально изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости имеет место уравнение

$$4\bar{\epsilon} + \left(\frac{dB_{ddd}}{dr} + \frac{4}{r} B_{ddd} \right) = 6\nu \left(\frac{d^2 B_{dd}}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dB_{dd}}{dr} \right), \quad (3)$$

аналогичное известному уравнению Кармана для изотропной турбулентности в смысле Тейлора. Здесь $\bar{\epsilon}$ обозначает среднее рассеяние энергии в единицу времени на единицу массы. Уравнение (3) записывается в виде

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{4}{r} \right) \left(6\nu \frac{dB_{dd}}{dr} - B_{ddd} \right) = 4\bar{\epsilon} \quad (4)$$

и в силу условия $dB_{dd}(r)/dr|_{r=0} = B_{ddd}(0) = 0$ дает

$$6\nu dB_{dd}/dr - B_{ddd} = (4/5) \bar{\epsilon} r. \quad (5)$$

При малых r , как известно,

$$B_{dd} \approx (1/15\nu) \bar{\epsilon} r^2, \quad (6)$$

т. е.

$$6\nu dB_{dd}/dr \approx (4/5) \bar{\epsilon} r.$$

Таким образом, при малых r в левой части уравнения (5) второй член бесконечно мал по сравнению с первым. При больших r , наоборот, первым членом можно пренебречь по сравнению со вторым, т. е. считать

$$B_{ddd} \approx - (4/5) \bar{\epsilon} r. \quad (7)$$

Естественно допустить, что при больших r отношение

$$S = B_{ddd} : B_{dd}^{3/2}, \quad (8)$$

т. е. *асимметрия* распределения вероятностей для разности

$$\Delta u_d = u_d(M') - u_d(M),$$

остается постоянной. При этом допущении имеем для больших r

$$B_{dd} \approx C \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}, \quad (9)$$

где

$$C = (-4/5S)^{2/3}. \quad (10)$$

Соотношение (9) было выведено в [1] из несколько других соображений¹.

¹ А. М. Обухов независимо нашел соотношение (9) из подсчета баланса распределения энергии пульсаций по спектру (см. [2]).

В [1] был введен *локальный масштаб турбулентности*

$$\lambda = (v^3/\bar{\epsilon})^{1/4} \quad (11)$$

и обосновано допущение, что

$$B_{dd}(r) = \sqrt{v\bar{\epsilon}}\beta_{dd}(r/\lambda), \quad B_{nn}(r) = \sqrt{v\bar{\epsilon}}\beta_{nn}(r/\lambda), \quad (12)$$

где β_{dd} и β_{nn} — универсальные функции, для которых при малых ρ

$$\beta_{dd}(\rho) \approx (1/15)\rho^2, \quad \beta_{nn}(\rho) \approx (2/15)\rho^2, \quad (13)$$

а при больших ρ

$$\beta_{dd}(\rho) \approx C\rho^{2/3}, \quad \beta_{nn}(\rho) \approx (4/3)C\rho^{2/3}. \quad (14)$$

При изотропной турбулентности в смысле Тейлора закономерности локально изотропной турбулентности должны иметь место для расстояний, значительно меньших чем *интегральный масштаб* турбулентности L (см. по поводу его рационального определения мою заметку [3]). При этом коэффициенты корреляции

$$R_{dd}(r) = \overline{(u_d(M') u_d(M))}: b, \quad R_{nn}(r) = \overline{(u_n(M') u_n(M))}: b, \quad (15)$$

где b есть среднее значение квадрата компонент скорости, связаны с $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$ соотношениями

$$B_{dd} = 2b(1 - R_{dd}), \quad B_{nn} = 2b(1 - R_{nn}). \quad (16)$$

В силу (16) и (12) при r , малых по сравнению с L , должно быть

$$1 - R_{dd} \approx \frac{\sqrt{v\bar{\epsilon}}}{2b} \beta_{dd}\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad 1 - R_{nn} \approx \frac{\sqrt{v\bar{\epsilon}}}{2b} \beta_{nn}\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (17)$$

Если r мало по сравнению с L , но велико по сравнению с λ , то в силу (14) и (11)

$$1 - R_{dd} \approx (1/2) C \bar{\epsilon}^{2/3} b^{-1} r^{2/3}, \quad (18^1)$$

$$1 - R_{nn} \approx (2/3) C \bar{\epsilon}^{2/3} b^{-1} r^{2/3}. \quad (18^2)$$

Формулы (18) позволяют определить константу C из экспериментальных данных. Наиболее тщательные измерения коэффициентов корреляции R_{dd} и R_{nn} были произведены Драйденом, Шубауэром, Моком и Скэрмстадом [4]. Представив формулу (18²) в виде

$$1 - R_{nn} \approx 2C(kr)^{2/3}, \quad k = \bar{\epsilon} : (3b)^{3/2}, \quad (19)$$

я вычислил из эмпирической формулы (17) работы [4], полагая в обозначениях из [4] $b = \sqrt{\bar{u}^3}$, $\bar{\epsilon} = (3/2) U d \sqrt{\bar{u}^3} / dx$, значения коэффициента k , соответствующие турбулентности на расстоянии $40M$

M , дюйм	1	3,25	5
k , см ⁻¹	0,197	0,065	0,042

от решетки с размером ячейки M , равным 1", 3,25" и 5". С этими значениями для k кривые рис. 5 из [4], учитывающие поправку на длину проволок, хорошо укладываются для не слишком больших по сравнению с L значений r в формулу (19) при

$$C = 3/2. \quad (20)$$

Локальный масштаб λ в условиях опытов, описанных в [4], настолько мал, что отклонения от соотношений (18) при малых r не могут быть обнаружены².

Кривые рис. 28 из [4] не могут быть непосредственно использованы для определения C , так как в них не внесена поправка на длину проволок. Однако они с удовлетворительной точностью подтверждают при r , малых по сравнению с L , вытекающее из (18) соотношение

$$(1 - R_{nn})/(1 - R_{dd}) = 4/3. \quad (21)$$

С учетом поправки на длину проволок для отношения (21) в [4] получено значение 1,28 (см. [4, с. 29]), также достаточно близкое, если учесть ограниченную точность опыта, к теоретическому значению $4/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
2. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 22—24.
3. Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.
4. Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Scramstad H. K. Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres.— Nat. Adv. Com. Aeronaut., 1937, Rep. N 581.
5. Миллионщиков М. Д. Затухание пульсаций скорости в аэродинамических трубах.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 241—242.
6. Миллионщиков М. Д. О влиянии третьих моментов в изотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9, с. 615—617.

² Заметим в связи с этим, что попытку применения к наблюдениям из [4] теории изотропной турбулентности, пренебрегающей третьими моментами, принятую Миллионщиковым в [5], следует признать основанной на недоразумении. Легко обнаружить, что в обстановке наблюдений из [4] в уравнениях, связывающих вторые моменты с третьими (например, в уравнении (3)), члены со вторыми моментами несравненно меньше, чем члены с третьими моментами.

На рис. 3 из [5] сравнение с теоретической кривой для R_{nn} (полученной в пренебрежении третьими моментами) с опытными данными из [4] произведено ошибочно, так как: 1) использованные данные относятся к определенной спектральной компоненте пульсаций, а не к полным пульсациям; 2) опытные данные не соответствуют условию $8vt = 7,56$, которым определяется теоретическая кривая.

В более поздних работах [6] и еще неопубликованных (см.: Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1941, т. 5, № 4/5, с. 433—446.— *Примеч. ред. к наст. изд.*) сам Миллионщиков при помощи тонких рассмотрений, использующих третьи и четвертые моменты, дал оценку ошибки, происходящей от пренебрежения третьими моментами.

УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ *

Общую картину турбулентного движения можно представлять себе (в соответствии с Тейлором и Ричардсоном) следующим образом. На осредненный поток накладываются турбулентные пульсации различных масштабов, начиная от масштабов порядка «внешнего масштаба» турбулентности L («путь перемешивания») до наиболее мелких масштабов порядка величины тех расстояний λ , на которых делается существенным влияние вязкости («внутренний масштаб» турбулентности). В участках, размеры которых малы по сравнению с L , поле скоростей является плавным. Наиболее крупномасштабные пульсации черпают энергию от осредненного потока и передают ее пульсациям меньшего масштаба. Таким образом возникает поток энергии, непрерывно передаваемой от пульсаций больших к пульсациям меньших масштабов. Диссипация энергии, ее переход в тепло происходит в основном только в пульсациях масштаба λ . Величина w диссипируемой в единицу времени в единице объема энергии является основной характеристикой турбулентного движения во всех масштабах.

Наиболее характерными для турбулентности являются свойства движения в участках, размеры которых малы по сравнению с L . Локальную структуру турбулентности (т. е. структуру ее при масштабах $\ll L$) можно считать пространственно однородной и изотропной. Ее изучение проводится аналогично тому, как была изучена Тейлором и Карманом изотропная турбулентность. Однако при этом следует рассматривать моменты различных порядков, определяемые как средние значения от произведений компонент векторной разности скоростей в двух различных точках пространства. В силу изотропии эти моменты являются функциями только от расстояния r между точками (при $r \ll L$). Так, моменты второго порядка B_{dd} и B_{nn} суть средние значения квадратов разностей проекций скоростей в двух точках соответственно на линию соединения этих точек и на направление, ей перпендикулярное. При $r \ll L$ эти моменты оказываются пропорциональными r^2 , а при $r \gg \lambda$ (но $r \ll L$) B_{dd} и B_{nn} пропорциональны $r^{2/3}$ ¹. Сам внутренний масштаб турбулентности λ пропорционален $\nu^{3/4} (\rho/w)^{1/4}$, где ν — вязкость жидкости, ρ — ее плотность. Эти результаты находятся в хорошем согласии с измерениями корреляции скорости, выполненными Драйденом и др.

Несколько менее полному математическому исследованию может быть подвергнуто однородное и изотропное (во всех масштабах) тур-

* Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58. Краткое резюме доклада на Общем собрании Отделения физ.-мат. наук Академии наук СССР 26—28 января 1942 г. Казань.

¹ ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 299 (№ 45 наст. изд. — *Примеч. ред.*)

булентное движение, в котором осредненный поток отсутствует; такое движение непременно является затухающим со временем. В дополнение к результатам Тейлора и Кармана с помощью найденного Л. Г. Лойцянским² закона сохранения можно показать³, что пульсационная скорость движения затухает здесь обратно пропорционально $t^{3/2}$. Масштаб же L движения растет как $t^{1/2}$.

Исходя из изложенных локальных свойств турбулентности можно построить (при помощи некоторых допущений, несколько более грубо приближенных) полную систему уравнений турбулентного движения. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{D\bar{v}_i}{Dt} = F_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + b \right) + A \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{b}{\omega} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\frac{7}{11}\omega^2 + A' \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{b}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right], \quad (2)$$

$$\frac{Db}{Dt} = -b\omega + \frac{A}{3} \frac{b}{\omega} \bar{\varepsilon} + A'' \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{b}{\omega} \frac{\partial b}{\partial x_j} \right]. \quad (3)$$

Здесь D/Dt означает субстанциональную производную по времени, F_i есть внешняя сила, $\bar{v}_i$ — скорость осредненного движения, $\bar{p}$ — осредненное давление; $b = (1/3) \sum_j \bar{v}_j^2$ есть $1/3$ от среднего квадрата пульсационной скорости; ω — некоторая средняя «частота», определяемая как $\omega = c\sqrt{b}/L$, где c — константа, а посредством ε обозначено $\varepsilon = \sum_{j,i} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)^2$. Наконец, A , A' , A'' суть численные по-

стоянные, которые должны быть определены раз и навсегда сравнением какого-либо решения уравнений с экспериментальными данными. Отношение b/ω играет в уравнениях (1) — (3) роль некоторого «коэффициента диффузии» соответственно для осредненной скорости, «частоты» ω и пульсационной скорости b . Первый член в (3) представляет собой $2/3$ от турбулентной диссипации энергии, отнесенной к единице массы жидкости ($2\omega/3\rho$), а второй — $2/3$ от энергии, передаваемой турбулентным пульсациям от осредненного движения. Отношение коэффициентов первых членов в (1) и (2) определяется упомянутым уже соотношением Лойцянского. Уравнения (1) — (3) определяют вектор осредненной скорости $\bar{v}_i$, пульсационную скорость b и масштаб движения L .

Решение этих уравнений представляет большие трудности. В конечном виде они могут быть проинтегрированы для движения жидкости между движущимися параллельными плоскостями, причем получаемый результат находится в согласии с известными результатами Кармана.

² Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440, с. 3.

³ ДАН СССР, 1941, т. 31, с. 538 (№ 46 наст. изд. — *Примеч. ред.*).

В заключение доклада приведены предварительные результаты численного интегрирования уравнений (1) — (3) для турбулентного течения по трубе кругового сечения.

Д и с к у с с и я. Л. Д. Ландау отмечает, что А. Н. Колмогоров впервые дал правильное понимание локальной структуры турбулентного потока. Что касается уравнений турбулентного движения, то в них, по мнению Ландау, должен быть непременно учтен тот факт, что в турбулентном потоке наличие ротора скорости ограничено конечной областью пространства; качественно правильные уравнения должны приводить к такому характеру распределения вихрей.

В дискуссии принял участие также П. Л. Капица.

26 января 1942 г.

49

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ МНОГОЧЛЕНОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ *

В 1918 г. А. Хаару [1] удалось довести условия единственности многочлена наилучшего приближения до чрезвычайной общности. Результат Хаара не послужил, однако, в течение тридцати лет со времени его опубликования исходным пунктом каких-либо новых исследований конкретного аналитического характера. По-видимому, это объясняется тем, что не было обнаружено достаточно простых и аналитически естественных случаев применимости условий Хаара за пределами «систем Чебышева» в смысле С. Н. Бернштейна (см. [2, § 1—2 гл. I]). Работа Хаара, как и вся классическая теория наилучших приближений, относится к действительным функциям. В этой заметке я показываю, что теорема Хаара легко переносится на комплексные функции. Это делает ее применимой, например, к вопросу наилучшего приближения непрерывной комплексной функции на любом замкнутом ограниченном множестве комплексной плоскости обыкновенными многочленами (см. [4]).

Кроме перенесения на комплексный случай теоремы Хаара (см. далее теорему 3), я устанавливаю комплексный аналог данного еще Чебышевым характеристического свойства многочленов наилучшего приближения (см. далее теорему 1). Ввиду элементарного характера всех дальнейших результатов, примыкающих непосредственно к работам Чебышева, я привожу полностью все доказательства, хотя некоторые из них являются лишь небольшими видоизменениями § 44—45 из книги Н. И. Ахиезера [3]. Появление этой книги и послужило

* УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 216—221.

непосредственным поводом для моего интереса к данному кругу вопросов.

Мы будем рассматривать «многочлены» вида

$$P_{\alpha}(z) = \alpha_1 \varphi_1(z) + \alpha_2 \varphi_2(z) + \dots + \alpha_n \varphi_n(z),$$

где φ_k суть выбранные раз навсегда комплексные функции, которые предполагаются определенными и непрерывными на некотором компакте K .

Для любой заданной на K непрерывной комплексной функции $f(z)$ и любой системы

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

из n комплексных чисел обозначим

$$D_{\alpha, f}(z) = P_{\alpha}(z) - f(z).$$

Как и в действительном случае, существует

$$L(\alpha, f) = \max_{z \in K} |D_{\alpha, f}(z)|,$$

и минимум

$$\mathcal{E}(f) = \min_{\alpha} L(\alpha, f)$$

достигается хотя бы для одного многочлена $P_{\alpha}(z)$.

Множество тех $z \in K$, для которых

$$|D_{\alpha, f}(z)| = L(\alpha, f),$$

мы будем обозначать $M_{\alpha, f}$.

Т е о р е м а 1. *Для равенства*

$$L(\alpha, f) = \mathcal{E}(f)$$

необходимо и достаточно условие:

(Т) *Каков бы ни был многочлен $P_{\beta}(z)$*

$$\min_{z \in M_{\alpha, f}} \operatorname{Re} \{P_{\beta}(z) \overline{D_{\alpha, f}(z)}\} \leq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Допустим, что условие (Т) выполнено, и рассмотрим многочлен $P_{\alpha'}(z)$. Пусть

$$P_{\beta}(z) = P_{\alpha}(z) - P_{\alpha'}(z).$$

В силу условия (Т) существует $z_0 \in M_{\alpha, f}$, для которого

$$\operatorname{Re} \{P_{\beta}(z_0) \overline{D_{\alpha, f}(z_0)}\} \leq 0.$$

В этой точке

$$\begin{aligned} |D_{\alpha', f}(z_0)|^2 &= \{D_{\alpha, f}(z_0) - P_{\beta}(z_0)\} \overline{\{D_{\alpha, f}(z_0) - P_{\beta}(z_0)\}} = \\ &= D_{\alpha, f}(z_0) \overline{D_{\alpha, f}(z_0)} - P_{\beta}(z_0) \overline{D_{\alpha, f}(z_0)} - \overline{P_{\beta}(z_0)} D_{\alpha, f}(z_0) + \end{aligned}$$

$$+ P_{\beta}(z_0) \overline{P_{\beta}(z_0)} = |D_{\alpha, f}(z_0)|^2 - 2 \operatorname{Re} \{P_{\beta}(z_0) \overline{D_{\alpha, f}(z_0)}\} + \\ + |P_{\beta}(z_0)|^2 \geq L^2(\alpha, f).$$

Таким образом, при любом α'

$$L(\alpha', f) \geq L(\alpha, f),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство необходимости. Допустим, что условие (Т) нарушено, т. е. существует многочлен $P_{\beta}(z)$, для которого всюду на $M_{\alpha, f}$

$$\operatorname{Re} \{P_{\beta}(z) \overline{D_{\alpha, f}(z)}\} > 0.$$

Так как $M_{\alpha, f}$ замкнуто, то существует такое $\varepsilon > 0$ и такое открытое $G \supseteq M_{\alpha, f}$, что для всех $z \in G$

$$\operatorname{Re} \{P_{\beta}(z) \overline{D_{\alpha, f}(z)}\} \geq \varepsilon.$$

Положим

$$H = \max_{z \in K} |P_{\beta}(z)|,$$

$$h = L(\alpha, f) - \max_{z \in K} |D_{\alpha, f}(z)|,$$

где

$$F = K \setminus G.$$

Так как F замкнуто и на нем $|D_{\alpha, f}(z)|$ не достигает $L(\alpha, \beta)$, то $h > 0$.

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы было

$$\lambda \leq \varepsilon/H^2, \quad \lambda \leq h/2H,$$

и положим

$$P_{\alpha'}(z) = P_{\alpha}(z) - \lambda P_{\beta}(z).$$

Легко установить, что на G

$$|D_{\alpha', f}(z)|^2 = |D_{\alpha, f}(z)|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \{P_{\beta}(z) \overline{D_{\alpha, f}(z)}\} + \lambda^2 |P_{\beta}(z)|^2 \leq \\ \leq L^2(\alpha, f) - 2\lambda \varepsilon + \lambda \frac{\varepsilon}{H^2} H^2 = L^2(\alpha, f) - \lambda \varepsilon.$$

С другой стороны, на F

$$|D_{\alpha', f}(z)| \leq |D_{\alpha, f}(z)| + \lambda |P_{\beta}(z)| \leq L(\alpha, f) - h + \frac{h}{2H} H = \\ = L(\alpha, f) - \frac{h}{2}.$$

Из этих двух оценок ясно, что

$$L(\alpha', f) < L(\alpha, f),$$

т. е. $P_\alpha(z)$ не является многочленом наилучшего приближения, что и требовалось доказать. Теорема 1 полностью доказана.

Введем теперь в рассмотрение допущения:

(А) Функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z)$ линейно независимы на K .

(В) K содержит не менее $n + 1$ точек.

(Н) Любой многочлен $P_\beta(z)$, у которого не все коэффициенты β_k равны нулю, обращается на K в нуль не более чем в $n - 1$ точках.

Условия (А) и (В) исключают лишь тривиальные, неинтересные для рассмотрения случаи. Условие (Н), наоборот, существенно ограничивает класс допустимых систем функций $\varphi_k(z)$.

Т е о р е м а 2. При условиях (В) и (Н) из

$$L(\alpha, f) = \mathcal{E}(f)$$

вытекает, что

$$|D_{\alpha, f}(z)| = \mathcal{E}(f)$$

не менее чем в $n + 1$ точках.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что, вопреки утверждению теоремы, множество $M_{\alpha, f}$ состоит лишь из точек

$$z_1, z_2, \dots, z_q; \quad q \leq n.$$

Так как множество $M_{\alpha, f}$ в силу (В) не совпадает с K , то при $k = 1, 2, \dots, q$

$$|D_{\alpha, f}(z_k)| = L(\alpha, f) > 0.$$

Дополним произвольно систему точек $z_1, z_2, \dots, z_q$ (в случае $q < n$) до системы из n различных точек

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Из (Н) вытекает, что детерминант

$$|\varphi_k(z_m)|, \quad k, m = 1, 2, \dots, n,$$

отличен от нуля. Поэтому система уравнений

$$\beta_1 \varphi_1(z_k) + \beta_2 \varphi_2(z_k) + \dots + \beta_n \varphi_n(z_k) = D_{\alpha, f}(z_k),$$

$$k = 1, 2, \dots, q,$$

разрешима. Соответствующий любому решению этой системы многочлен $P_\beta(z)$ противоречит, как легко установить, условию (Т) теоремы 1. Таким образом, $P_\alpha(z)$ не может быть многочленом наилучшего приближения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Как было указано в начале заметки, нас будут интересовать условия, при которых имеет место теорема единственности:

(U) Для любой определенной на K непрерывной комплексной функции $f(z)$ имеется только один многочлен

$$P_\alpha(z) = T_f(z),$$

обладающий свойством

$$L(\alpha, f) = \mathcal{E}(f).$$

Теорема 3. Если выполнено условие (A), то утверждения (U) и (H) равносильны (т. е. (H) есть необходимое и достаточное условие для (U)).

Доказательство соотношения (H) $\rightarrow$ (U). Из (A) вытекает, что K содержит не менее n точек. Если число точек в K равно точно n , то любая функция $f(z)$ является многочленом и сама является своим единственным наилучшим приближением с $\mathcal{E}(f) = 0$. Остается рассмотреть случай, когда выполнено условие (B) и можно применить теорему 2.

Допустим, вопреки утверждению (U), что существует два различных многочлена $P_{\alpha'}(z)$ и $P_{\alpha''}(z)$, для которых

$$L(\alpha', f) = L(\alpha'', f) = \mathcal{E}(f).$$

Образует многочлен $P_{\alpha}(z)$, соответствующий

$$\alpha_k = (\alpha'_k + \alpha''_k)/2; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Легко видеть, что

$$L(\alpha, f) = \mathcal{E}(f).$$

По теореме 2 существует $n + 1$ точек

$$z_1, z_2, \dots, z_{n+1},$$

в которых

$$|D_{\alpha, f}(z_k)| = \mathcal{E}(f).$$

Обычным образом доказывается, что во всех этих точках

$$D_{\alpha', f}(z_k) = D_{\alpha'', f}(z_k) = D_{\alpha, f}(z_k),$$

что вместе с допущением (H) приводит к противоречию. Тем самым соотношение (H) $\rightarrow$ (U) доказано.

Доказательство соотношения (U) $\rightarrow$ (H). Допустим, вопреки утверждению, что условие (H) нарушается, т. е. существует система из n различных точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, для которой детерминант

$$|\varphi_k(z_m)|, \quad k, m = 1, 2, \dots, n,$$

равен нулю, т. е. существуют нетождественно равные нулю

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n,$$

удовлетворяющие при любом $k = 1, 2, \dots, n$ условию

$$\gamma_1 \varphi_k(z_1) + \gamma_2 \varphi_k(z_2) + \dots + \gamma_n \varphi_k(z_n) = 0.$$

Легко построить на K непрерывную комплексную функцию $g(z)$, обладающую свойствами:

(а) $g(z_m) = \bar{\gamma}_m / |\gamma_m|$ в тех точках z_m , где $\gamma_m \neq 0$,

(б) $|g(z)| \leq 1$ всюду на K .

Выбрав какую-либо такую рода функцию $g(z)$, положим

$$f(z) = g(z) \left\{ 1 - \frac{1}{H} |P_\gamma(z)| \right\},$$

где

$$H = \max_{z \in K} |P_\gamma(z)|.$$

Л е м м а. $\mathcal{E}(f) = 1$.

Для доказательства леммы допустим, вопреки утверждению, что существует многочлен $P_\alpha(z)$, удовлетворяющий неравенству

$$L(\alpha, f) < 1:$$

Тогда в точках z_m , в которых $\gamma_m \neq 0$,

$$f(z_m) = \bar{\gamma}_m / |\gamma_m|,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \gamma_m P_\alpha(z_m) \} &= \operatorname{Re} \{ \gamma_m f(z_m) + \gamma_m D_{\alpha, f}(z_m) \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ |\gamma_m| + \gamma_m D_{\alpha, f}(z_m) \} > 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{m=n} \gamma_m P_\alpha(z_m) > 0,$$

что противоречит равенству

$$\sum_{m=1}^{m=n} \gamma_m P_\alpha(z_m) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \sum_{m=1}^{m=n} \gamma_m \varphi_k(z_m) = 0.$$

Противоречие доказывает лемму.

Докажем теперь, что при

$$|\varepsilon| \leq 1/H$$

любой многочлен

$$P_\beta(z) = \frac{\varepsilon}{H} P_\gamma(z)$$

удовлетворяет равенству

$$L(\beta, f) = 1 = \mathcal{E}(f).$$

Это вытекает из оценки

$$\begin{aligned} |D_{\beta, f}(z)| &\leq |f(z)| + |P_\beta(z)| = \left| 1 - \frac{1}{H} P_\gamma(z) \right| + \left| \frac{\varepsilon}{H} P_\gamma(z) \right| = \\ &= 1 - \frac{1}{H} |P_\gamma(z)| + \frac{|\varepsilon|}{H} |P_\gamma(z)| \leq 1. \end{aligned}$$

Полученное противоречие с условием (U) доказывает соотношение (U) $\rightarrow$ (H). Теорема 3 полностью доказана.

Возврат к теории наилучших приближений действительных функций действительными многочленами можно произвести при помощи следующего предложения.

Теорема 4. Если функции $\varphi_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, и $f(z)$ действительны, то равенство

$$L(\alpha, f) = \mathcal{E}(f)$$

(где $\mathcal{E}(f)$ определено как минимум $L(\alpha, f)$ для комплексных многочленов $P_\alpha(z)$) заведомо достигается для какого-либо действительного многочлена $P_\alpha(z)$.

Доказательство теоремы 4 непосредственно вытекает из того простого замечания, что при сделанных в ней допущениях для любого комплексного многочлена $P_\alpha(z)$ многочлен

$$P_{\alpha'}(z) = 1/2 \{P_\alpha(z) + \overline{P_\alpha(z)}\}$$

действителен и удовлетворяет неравенству

$$L(\alpha', f) \leq L(\alpha, f).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Haar A. — Math. Ann., 1918, Bd. 78, S. 294—311.
2. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947.
4. Montel P. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. Paris, 1910, p. 66—71.

50

О ДРОБЛЕНИИ КАПЕЛЬ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ *

Публикуемая непосредственно перед моей заметкой заметка [1] М. К. Баранаева, Е. Н. Тевяровского и Э. Л. Трегубовой содержит интересный экспериментальный материал по вопросу о дроблении капель нерастворимых в воде жидкостей в турбулентном водном потоке. Явление это, помимо его самостоятельного интереса, может, по идее авторов заметки [1], служить и дополнительным средством проверки наших представлений о локальной структуре турбулентных пульсаций.

Теория локальной структуры турбулентных пульсаций была разработана мною и А. М. Обуховым. Она была проверена по данным непосредственных измерений пульсационных скоростей и нашла ряд подтверждений и применений при изучении рассеивания в

* ДАН СССР, 1949, т. 66, № 5, с. 825—828.

турбулентной атмосфере звука, ультракоротких радиоволн и света. В соответствии с этой теорией средний квадрат v_d^2 разности скоростей в двух точках, лежащих на расстоянии d , выражается формулой

$$v_d^2 = (\nu/\lambda_0)^2 f(d/\lambda_0), \quad (\alpha)$$

где ν — кинематическая вязкость, а f — универсальная функция с асимптотическим поведением:

$$f(k) \sim k^2 \quad \text{при малых } k, \quad (\beta)$$

$$f(k) \sim k^{1/3} \quad \text{при больших } k. \quad (\gamma)$$

(В обозначениях мы, по возможности, следуем заметке [1], а знак $\sim$ употребляем в смысле приближенной пропорциональности, причем коэффициент пропорциональности не пишем.)

В приведенных формулах λ_0 обозначает «внутренний масштаб» турбулентности. При спектральном разложении турбулентных пульсаций компоненты спектрального разложения масштаба, значительно меньшего λ_0 , должны быть ничтожно малы. Что касается разностей скоростей на расстояниях d , существенно меньших λ_0 , то их среднеквадратичное значение в соответствии с (β) убывает пропорционально d . Для многих физических процессов эти разности могут оказаться «достаточно большими» и при расстояниях d , значительно меньших, чем внутренний масштаб λ_0 . Поэтому обнаружение физических процессов, производимых этими разностями, еще совсем не означает необходимости какого-либо пересмотра нашей с А. М. Обуховым теории¹.

Введем теперь в турбулентный поток «первой» жидкости (в опытах [1] — воды) тонкую струйку «второй» жидкости с той же плотностью (это требование в опытах [1] выполнено с большой точностью) с кинематической вязкостью ν' и с поверхностным натяжением на границе с первой жидкостью σ .

Если бы σ равнялось нулю, а ν' равнялось ν , то с механической точки зрения струйка второй жидкости ничем не отличалась бы от выделенной чисто геометрической струйки потока первой жидкости. В заметке [1] не совсем точно описывается судьба такой струйки. Такая струйка должна в действительности не распадаться на капли диаметра порядка λ_0 , а деформироваться во все более тонкую извивающуюся и разветвляющуюся нить. Никакого предела размешивания струи в потоке в такой идеализированной схеме не получилось бы.

Предел этому размешиванию кладет только поверхностное натяжение. Благодаря нему струя распадается на капли, капли эти дробятся до некоторого предела, а капли достаточно малого диаметра d сохраняются, так как действующие на них разрывающим образом

¹ Попытка же, предпринятая в статье [2] Е. Н. Теверовским, обосновать необходимость применять при d , значительно меньших чем λ_0 , «закон двух третей» (γ) не может считаться достаточно убедительной. Описываемые им в [2] явления могут найти и совсем другое объяснение.

разности скоростей порядка v_d при малых d малы и уже не в состоянии преодолеть поверхностное натяжение.

Из гипотезы об универсальности безразмерной локальной структуры турбулентных потоков вытекает, что судьба капли диаметра d должна зависеть только от безразмерных отношений d/λ_0 и v'/v и числа Вебера

$$We_d = \sigma/v_d^2 d \rho.$$

Вместо отношений d/λ_0 и v'/v можно ввести два числа Рейнольдса

$$Re_d = v_d d / \nu, \quad Re_d' = v_d d / \nu'.$$

В области диаметров капель одного порядка с внутренним масштабом λ_0 число безразмерных характеристик процесса, по-видимому, нельзя уменьшить, их должно быть три:

$$(We_d, d/\lambda_0, v'/v)$$

или

$$(We_d, Re_d, Re_d'),$$

безразлично.

Но при d , значительно меньших чем λ_0 , мы попадаем в область значительного преобладания сил вязкости над силами инерции и безразмерных характеристик остается только две:

$$We_d \text{ и } v'/v.$$

В области d , значительно больших чем λ_0 , роль вязкости первой жидкости должна быть мала. Если вязкость ν' второй жидкости меньше или того же порядка, как и вязкость первой жидкости, то при d , значительно больших чем λ_0 , можно пренебрегать и той и другой вязкостью. Если вязкость второй жидкости значительно больше вязкости первой, то пренебрегать ею можно только для d , превосходящих масштаб

$$\lambda_0' = (\nu'/\nu)^{3/4} \lambda_0.$$

Таким образом, мы получаем таблицу (см. выше) безразмерных характеристик.

Опыты, описанные в заметке [1], имели дело с водой в качестве первой жидкости и двумя различными смесями в качестве второй жидкости. Поверхностное натяжение σ в обоих рассмотренных слу-

	$v' \ll \nu$ или $v' \approx \nu$	$v' \gg \nu$
$d \ll \lambda_0$	We_d и v'/ν	
$d \approx \lambda_0$	$We_d, d/\lambda_0$ и v'/ν	
$d \gg \lambda_0$	We_d	We_d и Re_d'
$d \gg \lambda_0'$	—	We_d

чаях было почти одинаковым. Отношение v'/v было различным в двух вариантах опыта, но все же не очень сильно отличалось от единицы. Как видно из рис. 2 заметки [1], влияние различия значений v' в двух вариантах опыта оказалось лежащим в пределах разброса точек для каждого варианта в отдельности. Оставляя поэтому пока в стороне обсуждение предлагаемой авторами заметки [1] формулы (3), первый член которой должен учитывать влияние изменений отношения v'/v (η обозначает в [1] вязкость $\eta = v'\rho$ второй жидкости), рассмотрим пока случай постоянного отношения v'/v , меньшего единицы или не очень много превышающего единицу.

В этом случае вместе с авторами заметки [1] естественно предположить, что максимальный диаметр d_0 капель, обладающих достаточной устойчивостью для длительного сохранения, должен соответствовать некоторому вполне определенному «критическому» числу Вебера We_{d_0} . Строго говоря, в силу указанного выше это допущение можно считать хорошо обоснованным лишь за пределами области значений d_0 одного порядка с λ_0 , а критическое число Вебера может оказаться в области $d_0 \ll \lambda_0$ и $d_0 \gg \lambda_0$ различным. Пользуясь формулами (β) и (γ), получаем окончательно:

$$d_0 = \left(\frac{\sigma}{We_{кр} v^2 \rho} \right)^{1/3} \lambda_0^{4/3} \quad \text{в случае } d_0 \ll \lambda_0,$$

$$d_0 = \left(\frac{\sigma}{We_{кр}^* v^2 \rho} \right)^{3/5} \lambda_0^{8/5} \quad \text{в случае } d_0 \gg \lambda_0.$$

В трубе диаметра D вне ламинарного пограничного слоя

$$\lambda_0 = g(r/D) (v^3 D / u_*^3)^{1/4},$$

где u_* — так называемая динамическая скорость, r — расстояние от оси трубы, а g — некоторая универсальная функция. Подставляя это выражение для λ_0 в предыдущие формулы для d_0 , получаем

$$d_0 \sim g^{4/3} \left(\frac{r}{D} \right) \left(\frac{\sigma v D}{We_{кр} \rho} \right)^{1/3} u_*^{-1} \quad \text{в случае } d_0 \ll \lambda_0, \quad (I)$$

$$d_0 \sim g^{3/5} \left(\frac{r}{D} \right) \left(\frac{\sigma}{We_{кр}^* \rho} \right)^{3/5} D^{3/5} u_*^{-6/5} \quad \text{в случае } d_0 \gg \lambda_0. \quad (II)$$

Так как отношение u/u_* средней скорости в трубе к динамической скорости меняется медленно, то формула (II) соответствует формулам (7) и (8) заметки [1]. Возможно, что уместнее было бы пользоваться при объяснении результатов опытов, изложенных в [1], не формулой (II), а формулой (I). Впрочем, при имеющейся пока точности опытов различие между показателем -1 в формуле (I) и показателем $-6/5$ в формуле (II) вряд ли может быть уловлено. Судя по рис. 2 из [1], непосредственная обработка опытов приводит к показателю, несколько меньшему единицы. Однако авторы [1] справедливо полагают, что это обстоятельство может быть связано с недоста-

точным временем пребывания капель в жидкости при больших скоростях для того, чтобы процесс дробления успел закончиться.

Далее авторы поднимают очень интересный вопрос: если v_d является лишь среднеквадратичным значением разности скоростей на расстоянии d , то не возникают ли изредка на том же расстоянии разности значительно большие?

Для ответа на этот вопрос надо было бы знать закон распределения разностей скоростей на заданном расстоянии d .

Если бы можно было поставить опыты с дроблением капель так, чтобы каждая капля достаточно долго могла находиться в области с постоянными характеристиками локальной структуры, то такие опыты могли бы оказаться существенными для дальнейшего развития наших представлений о локальной структуре турбулентности.

К сожалению, в трубе внутренний масштаб λ_0 значительно меняется в поперечном сечении. Те капли, которые заметно удалились от оси трубы, должны подвергаться дроблению до заметно меньших диаметров, чем те, которые все время оставались вблизи оси трубы.

Это заставляет пока отнестись с большой осторожностью к истолкованию данных заметки [1] о зависимости минимального размера капель от времени пребывания в потоке.

Развитие дальнейших работ по обсуждаемой теме должно, мне кажется, пойти по двум путям.

1. Развитая выше концепция наличия твердой нижней грани диаметров капель d_0 , дальше которой дробление в пределах области с заданными характеристиками локальной структуры потока не происходит, должна быть разработана в направлении учета влияния на размеры d_0 вязкости второй жидкости ν' . Эту теорию первого приближения надо попробовать применить к расчету различных специальных задач с неоднородными потоками.

2. Должны быть поставлены опыты для выяснения зависимости распределения размеров капель от времени пребывания в потоке со строго постоянными локальными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранев М. К., Теверовский Е. Н., Трегубова Э. Л. О размере минимальных пульсаций в турбулентном потоке.— ДАН СССР, 1949, т. 66, № 5, с. 821—824.
2. Теверовский Е. Н. О коагуляции частиц аэрозоля в турбулентной атмосфере.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, т. 12, № 1, с. 7—19.

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ НА ТОРЕ *

Рассматриваемые далее системы координат на торе T^2 будут относиться к точке P пару действительных чисел (x, y) , определенных по модулю 2π .

Под аналитичностью функции $f(x, y)$ от координат будет пониматься ее аналитичность при всех действительных x и y . Функция от координат $f(x, y)$, очевидно, лишь в том случае будет однозначной функцией $f(P)$ точки P , когда она периодична по каждому из переменных x и y с периодом 2π . Мы будем рассматривать динамическую систему на T^2 , определенную в некоторой системе координат системой уравнений

$$dx/dt = A(x, y), \quad dy/dt = B(x, y) \quad (1)$$

и обладающую интегральным инвариантом

$$I(g) = \iint_g U(x, y) dx dy. \quad (1')$$

Естественно, что при этом функции A , B и U предполагаются однозначными функциями точки P . Кроме того, мы предположим, что они аналитичны и удовлетворяют на всем T^2 условиям

$$A^2 + B^2 > 0, \quad U > 0.$$

При этих допущениях известные общие результаты Пуанкаре, Данжуа и Кнезера (см., например, [1, гл. 2, § 2]) могут быть дополнены следующим образом.

Т е о р е м а 1. *Существует аналитическое преобразование координат, которое приводит систему (1) к виду*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{F(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{F(x, y)}, \quad (2)$$

а интегральный инвариант $I(g)$ к виду

$$I(g) = \iint_g F(x, y) dx dy, \quad (2')$$

где γ — некоторая константа.

Случай рационального γ приводит к замкнутым траекториям и с качественной точки зрения вполне элементарен. Если γ иррационально, то хорошо известно, что все траектории всюду плотны на T^2 и динамическая система транзитивна (см. [1]). Введенные нами допущения об аналитичности функций A , B и U позволяют устано-

вить, что в известном смысле «общим» случаем здесь является случай динамической системы, записывающейся в надлежащей системе координат в виде

$$du/dt = \lambda_1, \quad dv/dt = \lambda_2, \quad (3)$$

где λ_1 и λ_2 — константы. Именно имеет место

Т е о р е м а 2. Если существуют такие $C > 0$ и $h > 0$, что при всех целых m и $n > 0$

$$|m - n\gamma| \geq Ch^n, \quad (4)$$

то существует аналитическое преобразование координат, которое переводит систему (2) в систему (3), причем

$$\lambda_2 = \gamma\lambda_1,$$

а интегральный инвариант $I(g)$ приобретает вид

$$I(g) = K \iint_g du dv, \quad (3')$$

где K — константа.

Условие (4) выполняется (при надлежащем выборе C и h , зависящих от γ) для всех γ , кроме множества лебеговской меры нуль (см., например, [2]).

Очевидно, что в случае применимости теоремы 2 динамическая система имеет дискретный спектр с собственными частотами

$$\lambda_{rs} = r\lambda_1 + s\lambda_2,$$

где r и s — целые числа, и соответствующими им собственными функциями φ_{rs} , которые по приведении системы к виду (3) записываются в виде

$$\varphi_{rs}(u, v) = e^{i(ru + sv)}. \quad (5)$$

В силу аналитичности преобразования координат, приводящего систему к виду (3), собственные функции являются аналитическими и в первоначальной системе координат.

Для иррациональных γ , не удовлетворяющих условию (4), имеется ряд других возможностей, полное обозрение которых требует перехода на точку зрения общей метрической теории динамических систем. При этом естественно допустить к рассмотрению не только неаналитические, но даже и разрывные преобразования координат, требуя только, чтобы отображение координатного тора (x, y) на координатный тор (u, v) , так же как и обратное отображение, были измеримы по Лебегу и переводили множества меры нуль в множества меры нуль (метрическая абсолютная непрерывность). Рассмотрения естественно вести с точностью до множеств меры нуль и называть, например, отображение аналитическим, данное число раз дифференцируемым или непрерывным в том случае, если оно совпадает с ана-

литическим, данное число раз дифференцируемым или непрерывным отображением, с точностью до множества меры нуль.

Формулируемая далее теорема 3 относится именно к измеримым абсолютно непрерывным (в метрическом смысле) преобразованиям, рассматриваемым с точностью до множества меры нуль.

Для правильного ее понимания следует заметить, что два такого рода преобразования, приводящие динамическую систему с иррациональным γ к виду (3), могут отличаться между собой лишь линейным преобразованием

$$u' = au + bv, \quad v' = cu + dv$$

с целыми коэффициентами и детерминантом ± 1 .

Т е о р е м а 3. При надлежащем выборе иррационального γ и аналитической функции $F(x, y)$ возможен каждый из следующих случаев:

- 1) система (2) приводится к виду (3) бесконечно дифференцируемым, но не аналитическим преобразованием координат;
- 2) система (2) приводится к виду (3) k -кратно дифференцируемым, но не дифференцируемым $(k+1)$ -кратно преобразованием;
- 3) приведение системы (2) к виду (3) возможно лишь при помощи всюду разрывного преобразования;
- 4) приведение системы (2) к виду (3) невозможно.

Очевидно, что в случаях 1), 2) и 3) система имеет дискретный спектр с системой собственных функций вида (5), но эти функции оказываются соответственно неаналитическими, недифференцируемыми $(k+1)$ -кратно или всюду разрывными.

Весьма вероятно, что в случае 4) спектр неизбежно непрерывен, но пока доказана только

Т е о р е м а 4. При надлежащем выборе иррационального γ и аналитической функции $F(x, y)$ спектр динамической системы непрерывен¹.

Преобразование координат, существование которого утверждает-ся в теореме 2 и в п. 1), 2), 3) теоремы 3, может быть получено следующим образом:

$$u = \frac{2\pi}{a_0} \{ \tau(x, y) + R(y - \gamma x) \}, \quad v = y + \gamma(u - x),$$

где

$$\tau(x, y) = \int_0^x F(\xi, y + \gamma(\xi - x)) d\xi, \quad S(y) = \tau(2\pi, y),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, y) dx dy,$$

¹ Т. е. не существует измеримой функции $\varphi(P)$, не равной с точностью до множества нуль константе, которая вдоль траекторий меняется по закону

$$\varphi(P_t) = e^{i\lambda t} \varphi(P_0).$$

а $R(y)$ — решение функционального уравнения

$$R(y - 2\pi\gamma) - R(y) = S(y) - a_0, \quad (6)$$

имеющее период 2π и удовлетворяющее условию

$$\int_0^{2\pi} R(y) dy = 0.$$

Если представить $S(y)$ в виде тригонометрического ряда

$$S(y) = a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n e^{iny},$$

то $R(y)$ формально пишется в виде

$$R(y) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{e^{i2\pi n\gamma} - 1} e^{iny}. \quad (7)$$

Условие (4) гарантирует сходимость ряда (7) к аналитической функции. Наличие в формуле (7) знаменателей, которые при надлежащей арифметической природе иррациональности γ могут быть очень малы, объясняет причины возникновения аномалий, отмеченных в теореме 3.

Если ряд

$$\sum_{n \neq 0} \left| \frac{a_n}{e^{i2\pi n\gamma} - 1} \right|^2 \quad (8)$$

сходится, то спектр дискретен и собственные функции имеют вид (5). При сделанном в самом начале допущении об аналитичности функции $F(x, y)$ коэффициенты a_n с возрастанием $|n|$ быстро убывают, малые же знаменатели в ряде (7) при любой иррациональности γ могут встречаться лишь по разреженной последовательности значений n . Поэтому в случае расходимости ряда (8) следует ожидать, что природа ряда (7) будет аналогична природе лакунарных рядов с расходящейся суммой квадратов коэффициентов, т. е. с рядом (7) нельзя будет связать естественным образом никакой измеримой функции $R(y)$. Поэтому вероятно, что в случае расходимости ряда (8) приведение динамической системы к виду (3) невозможно. Вероятно, в этом случае спектр неизбежно непрерывен, т. е. для рассматриваемых нами динамических систем исключен случай смешанного спектра, а дискретный спектр всегда имеет ровно две независимые частоты.

В заключение заметим, что роль «малых знаменателей», мешающих сходимости рядов, хорошо известна в небесной механике.

13 ноября 1953 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959.
2. Хинчин А. Я. Метрические задачи теории иррациональных чисел. — УМН, 1936, вып. 1, с. 7—32.

52

О СОХРАНЕНИИ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА *

Рассмотрим в $2s$ -мерном фазовом пространстве динамической системы с s степенями свободы область G , представленную в виде произведения s -мерного тора T на область S евклидова s -мерного пространства. Точки тора T будем характеризовать круговыми координатами $q_1, \dots, q_s$ (замена q_α на $q_\alpha + 2\pi$ не меняет точки q), координаты же точки p из S будем обозначать $p_1, \dots, p_s$. Будем предполагать, что в области G в координатах $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ уравнения движения имеют канонический вид

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q, p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q, p). \quad (1)$$

Функция Гамильтона H далее предполагается зависящей от параметра θ и определенной при всех $(q, p) \in G$, $\theta \in (-c; +c)$, но не зависящей от времени. По существу дальнейшие рассмотрения имеют действительный характер, но требуют довольно значительных ограничений на гладкость функции $H(q, p, \theta)$, более сильных, чем бесконечная дифференцируемость. Для простоты во всем дальнейшем предполагается, что функция $H(q, p, \theta)$ аналитична по совокупности переменных (q, p, θ) .

Суммирование по греческим индексам предполагается далее пространственным от 1 до s . Употребляются обычные векторные обозначения: $(x, y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$, $|x| = +\sqrt{(x, x)}$. Целочисленным вектором называется вектор, все компоненты которого целые числа. Множество точек (q, p) из G с $p = c$ обозначается T_c . В теореме 1 предполагается, что S содержит точку $p = 0$, т. е. $T_0 \subseteq G$.

Т е о р е м а 1. Пусть

$$H(q, p, 0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \quad (2)$$

где m и λ_α — константы, и при некотором выборе констант $c > 0$ и $\eta > 0$ для всех целочисленных векторов n выполняется неравенство

$$|(n, \lambda)| \geq c/|n|^2. \quad (3)$$

Пусть, кроме того, детерминант, составленный из средних значений

$$\Phi_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\alpha\beta}(q) dq_1 \dots dq_s$$

функций

$$\Phi_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}(q, 0, 0),$$

отличен от нуля:

$$|\Phi_{\alpha\beta}(0)| \neq 0. \quad (4)$$

Тогда существуют определенные для всех достаточно малых θ и для всех точек (Q, P) некоторой окрестности V множества T_0 аналитические функции $F_\alpha(Q, P, \theta)$ и $G_\alpha(Q, P, \theta)$, осуществляющие преобразование прикосновения

$$q_\alpha = Q_\alpha + \theta F_\alpha(Q, P, \theta), \quad p_\alpha = P_\alpha + \theta G_\alpha(Q, P, \theta)$$

V в $V' \subseteq G$, которое приводит H к виду

$$H = M(\theta) + \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha + O(P^2) \quad (5)$$

($M(\theta)$ не зависит от Q и P).

Легко понять значение теоремы 1 для механики. Она показывает, что s -параметрическое семейство условно периодических движений

$$q_\alpha = \lambda_\alpha t + q_\alpha^{(0)}, \quad p_\alpha = 0,$$

существующее при $\theta = 0$, не может при условиях (2) и (3) исчезнуть в результате малого изменения функции Гамильтона H : произойдет лишь смещение обтекаемого траекториями этих движений s -мерного тора T_0 в тор $P = 0$, который останется заполненным траекториями условно периодических движений с теми же частотами $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Преобразование

$$(Q, P) = K_\theta(q, p),$$

существование которого утверждается в теореме 1, может быть построено в виде предела преобразований

$$(Q^{(k)}, P^{(k)}) = K_\theta^{(k)}(q, p),$$

где преобразования

$$(Q^{(1)}, P^{(1)}) = L^{(1)}(q, p), \quad (Q^{(k+1)}, P^{(k+1)}) = L_\theta^{(k+1)}(Q^{(k)}, P^{(k)})$$

находятся при помощи «обобщенного метода Ньютона» (см. [1]). В этой заметке мы ограничимся построением преобразования $K_\theta^{(1)} = L_\theta^{(1)}$, что позволит уже понять роль условий (3) и (4) теоремы 1.

Зададим преобразование $L_{\theta}^{(1)}$ формулами

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{(1)} &= q_{\alpha} + \theta Y_{\alpha}(q), \\ p_{\alpha} &= P_{\alpha}^{(1)} + \theta \left\{ \sum_{\beta} P_{\beta}^{(1)} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} + \xi_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} X(q) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

(легко проверить, что это преобразование прикосновения) и будем искать константы ξ_{α} и ζ и функции $X(q)$ и $Y_{\beta}(q)$, исходя из требования, чтобы

$$\begin{aligned} H &= m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} p_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_{\alpha} p_{\beta} + \theta \{A(q) + \sum_{\alpha} B_{\alpha}(q) p_{\alpha}\} + \\ &+ O(|p|^3 + \theta |p|^2 + \theta^2) \end{aligned} \quad (7)$$

имело вид

$$H = m + \theta \zeta + \sum \lambda_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} + O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2). \quad (8)$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$\begin{aligned} H &= m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} + \theta \left\{ A + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left(\xi_{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial q_{\alpha}} \right) \right\} + \\ &+ \theta \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} \left\{ B_{\alpha} + \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) \left(\xi_{\beta} + \frac{\partial X}{\partial q_{\beta}} \right) + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right\} + \\ &+ O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2). \end{aligned}$$

Таким образом, наше требование (8) сводится к тому, чтобы выполнялись уравнения

$$A + \sum \lambda_{\alpha} \left(\xi_{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial q_{\alpha}} \right) = \zeta, \quad (9)$$

$$B_{\alpha} + \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta} \left(\xi_{\beta} + \frac{\partial X}{\partial q_{\beta}} \right) + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} = 0. \quad (10)$$

Введем функции

$$Z_{\alpha}(q) = \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} X(q). \quad (11)$$

Разложив функции $\Phi_{\alpha\beta}$, A , B_{α} , X , Y_{α} , Z_{α} в ряды Фурье вида

$$X(q) = \sum x(n) e^{i(n, q)}$$

и положив для определенности

$$x(0) = 0, \quad y_{\alpha}(0) = 0, \quad (12)$$

получим для остальных подлежащих определению коэффициентов Фурье $x(n)$, $y_\alpha(n)$, $z_\alpha(n)$ и констант ξ_α и ζ уравнения

$$a(0) + \sum \lambda_\alpha \xi_\alpha = \zeta, \quad (13)$$

$$a(n) + i(n, \lambda)(x(n) = 0 \quad \text{при } n \neq 0, \quad (14)$$

$$b_\alpha(0) + \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}(0) \xi_\beta + z_\alpha(0) = 0, \quad (15)$$

$$b_\alpha(n) + \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}(n) \xi_\beta + z_\alpha(n) + i(n, \lambda) y_\alpha(n) = 0 \quad \text{при } n \neq 0. \quad (16)$$

Легко видеть, что система (11) — (16) однозначно решается при условиях (3) и (4). Условие (3) существенно при определении $x(n)$ из (14) и при определении $y_\alpha(n)$ из (16). Условие (4) существенно при определении ξ_β из (15). Так как коэффициенты рядов Фурье аналитических функций $\Phi_{\alpha\beta}$, A и B_α при возрастании $|n|$ имеют порядок убывания не меньше $\rho^{|n|}$, $\rho < 1$, то из условия (3) вытекает не только формальная разрешимость уравнений (13) — (16), но и сходимость рядов Фурье для функций X , Y_α и Z_α и аналитичность этих функций. Построение дальнейших приближений не связано с новыми трудностями. Несколько тоньше лишь использование условия (3) для доказательства сходимости отображений $K_\theta^{(h)}$ к аналитическому предельному отображению K_θ .

Условие отсутствия «малых знаменателей» (3) следует считать, «вообще говоря», выполненным, так как при любом $\eta > s - 1$ для всех точек s -мерного пространства $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, кроме множества лебеговской меры нуль, можно найти $c(\lambda)$, при котором

$$|(n, \lambda)| \geq c(\lambda)/|n|^\eta,$$

каковы бы ни были целые $n_1, n_2, \dots, n_s$ (см. [2]). Условие (4) тоже естественно считать, «вообще говоря», выполненным. Так как

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial p_\alpha}(0),$$

где

$$\lambda_\beta(p) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{dq_\beta}{dt} dq_1 \dots dq_s$$

— «средняя частота» по координате q_β при фиксированных импульсах $p_1, \dots, p_s$, то условие (3) обозначает, что якобиан средних частот по импульсам отличен от нуля.

Перейдем теперь к рассмотрению того специального случая, когда $H(q, p, 0)$ зависит только от p , т. е. $H(q, p, 0) = W(p)$. В этом случае при $\theta = 0$ каждый тор T_p состоит из полных траекторий условно периодических движений с частотами

$$\lambda_\alpha(p) = \partial W / \partial p_\alpha.$$

Если якобиан

$$J = \left| \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial p_\beta} \right| = \left| \frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right| \quad (17)$$

отличен от нуля, то почти ко всем торах T_p можно применить теорему 1. Возникает естественное предположение, что при малых θ полученные в соответствии с теоремой 1 «сдвинутые торы» заполняют большую часть области G . Это и подтверждается указываемой далее теоремой 2. При формулировке этой теоремы будем считать область S ограниченной и введем в рассмотрение множество M_θ тех точек $(q^{(0)}, p^{(0)}) \in G$, для которых решение

$$q_\alpha(t) = f_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta), \quad p_\alpha(t) = g_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta)$$

системы уравнений (1) с начальными условиями

$$q_\alpha(0) = q_\alpha^{(0)}, \quad p_\alpha(0) = p_\alpha^{(0)}$$

приводит к траекториям, не выходящим при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ из области G , и условно периодически с периодами $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(q^{(0)}, p^{(0)}, \theta)$, т. е. имеет вид

$$f_\alpha(t) = \varphi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_s t}), \quad g_\alpha(t) = \psi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_s t}).$$

Т е о р е м а 2. Если $H(q, p, 0) = W(p)$ и детерминант (17) не равен нулю в области S , то при $\theta \rightarrow 0$ лебеговская мера множества M_θ стремится к полной мере области G .

По-видимому, в известном смысле слова «общим случаем» является такой, когда множество M_θ при всех положительных θ имеет всюду плотное дополнение. На такого рода осложнения, возникающие в теории аналитических динамических систем, указано по более специальному поводу в моей заметке [3].

31 августа 1954 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— УМН, 1948, т. 3, вып. 6, с. 163.
2. Koksma J. F. Diophantische approximationen. Berlin: Springer, 1936.
3. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— ДАН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 763—766.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА *

ВВЕДЕНИЕ

Для меня явилась неожиданностью необходимость сделать доклад на заключительном заседании Конгресса в этом большом зале, который был ранее мне известен более как место исполнения великих произведений мировой музыки под управлением Мендельберга. Доклад, который я подготовил, не учитывая перспективы столь почетного его положения в программе нашего Конгресса, будет посвящен довольно специальному кругу вопросов. Моей задачей будет выяснение путей применения основных концепций и результатов современной общей метрической и спектральной теории динамических систем к изучению консервативных динамических систем классической механики. Мне кажется, впрочем, что выбранная мною тема может иметь и более широкий интерес как один из примеров рождения новых неожиданных и глубоких связей между различными частями классической и современной математики.

В своем знаменитом докладе на Конгрессе 1900 г. Гильберт говорил, что единство математики, невозможность ее распада на независимые друг от друга ветви вытекают из самого существа нашей науки. Наиболее убедительным подтверждением правильности этой мысли является возникновение на каждом этапе развития математики новых узловых пунктов, где при решении вполне конкретных проблем оказываются необходимыми и вступают в новое переплетение понятия и методы самых различных математических дисциплин. Для математики XIX в. одним из таких узловых пунктов являлись вопросы интегрирования систем дифференциальных уравнений классической механики, где проблемы механики и теории дифференциальных уравнений органически переплетались с проблемами вариационного исчисления, многомерной дифференциальной геометрии, теории аналитических функций и теории непрерывных групп.

После работ Пуанкаре стала ясной фундаментальная роль для этого круга вопросов топологии. С другой стороны, теорема о возвращении Пуанкаре — Каратеодори послужила началом «метрической» теории динамических систем в смысле изучения свойств движений, имеющих место при «почти всех» начальных положениях системы. Развившаяся отсюда «эргодическая теория» получила различные обобщения и сделалась самостоятельным центром притяжения и узлом переплетения методов и проблем различных новейших отделов математики (абстрактная теория меры, теория групп линейных

* In: Proc. Intern. Congr. Math., 1954, vol. 1, p. 315—333; То же. — В кн.: Труды Междунар. математического конгресса. Амстердам, 1954 г.: Обзор. докл. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 187—208.

операторов в гильбертовом и других бесконечномерных пространствах, теория случайных процессов и т. д.). На предшествующем Международном конгрессе 1950 г. общим вопросам эргодической теории был посвящен большой доклад Какутани [23].

Топологические методы, как известно, получили существенные применения в теории колебаний, в частности при решении вполне конкретных проблем, возникающих при изучении систем автоматического регулирования, в электротехнике и т. д. Однако эти реальные физические и технические применения относятся главным образом к неконсервативным системам. Дело сводится здесь обычно к разысканию отдельных асимптотически устойчивых движений (в частности, устойчивых точек покоя и устойчивых предельных циклов) и изучению пучков интегральных кривых, притягивающихся к этим асимптотически устойчивым движениям.

В консервативных системах асимптотически устойчивые движения невозможны. Поэтому, например, разыскание отдельных периодических движений при всем его математическом интересе имеет в случае консервативных систем лишь весьма ограниченный реальный физический интерес. Основное значение в случае консервативных систем имеет метрическая точка зрения, позволяющая изучать свойства основной массы движений. Современная общая эргодическая теория подготовила для этой цели набор понятий, обладающих очень большой физической убедительностью по своему замыслу. Однако наши успехи в смысле анализа с этих современных точек зрения конкретных задач классической механики до настоящего времени более чем ограничены.

Дело идет в первую очередь о следующей проблеме. Допустим, что движение по s -мерному аналитическому многообразию V^s определяется канонической системой дифференциальных уравнений с аналитической функцией Гамильтона $H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$. Пусть при этом имеется k однозначных аналитических первых интегралов $I_1, \dots, I_k$ и условия

$$I_1 = C_1; \dots; I_k = C_k$$

выделяют из фазового пространства Ω^{2s} аналитическое многообразие M^{2s-k} . Как известно, при почти всех значениях $C_1, \dots, C_k$ на M^{2s-k} возникает естественным образом аналитическая инвариантная плотность, что дает возможность применить к движениям на M^{2s-k} общие принципы метрической теории динамических систем. Естественным образом обращаться к этим более современным средствам в случаях, когда, кроме, $I_1, \dots, I_k$, независимых от них однозначных аналитических первых интегралов нет или их нахождение представляется слишком трудным, а другие классические аналитические методы окончания интегрирования системы оказываются тоже неприменимыми. В таких случаях требуется при помощи тех или иных качественных рассмотрений решить вопрос о том, будет ли движение на M^{2s-k} транзитивным (т. е. будет ли почти все M^{2s-k} состоять из одного единственного

эргодического множества), в случае транзитивности — определить характер спектра, при отсутствии же транзитивности — изучить с точностью до множества меры нуль (или хотя бы с точностью до множества малой меры) характер разложения M^{2s-k} на эргодические множества и характер спектра на этих эргодических множествах.

Мне известны только две конкретные задачи классической механики, в которых эта программа в большей или меньшей степени уже выполнена.

1. Для движения по инерции по замкнутой поверхности V^2 всюду отрицательной кривизны¹ Хопф в 1939 г. установил, что движение на трехмерных многообразиях L_h^3 , выделяемых требованием постоянства энергии $H = h$, транзитивно, а спектр непрерывен (см. [8]).

2. Как будет указано далее, при движении по инерции по аналитическим поверхностям, достаточно близким к трехосному эллипсоиду, движение на L_h^3 нетранзитивно и с точностью до множества малой меры разбивается на двумерные торы T^2 , на каждом из которых движение транзитивно, а спектр дискретен (см. конец § 2).

Однако мне представляется, что как раз сейчас наступило время, когда окажется возможным значительно более быстрое движение вперед.

§ 1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ УСТОЙЧИВЫЕ СВОЙСТВА

Динамические системы классической механики являются частным случаем аналитических динамических систем с интегральным инвариантом. Носителем такой динамической системы является аналитическое n -мерное многообразие Ω^n (фазовое пространство системы). В соответствии с этим допустимые преобразования координат $x_1, \dots, x_n$ точки $x \in \Omega^n$ будут всегда аналитическими.

Правые части дифференциальных уравнений, определяющих движение,

$$dx_\alpha/dt = F_\alpha(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

и инвариантная плотность, порождающая инвариантную меру

$$m(A) = \int_A M(x) dx_1 \dots dx_n,$$

будут считаться аналитическими функциями координат².

¹ Быть может, небесполезно заметить, что в обычном евклидовом пространстве можно задать замкнутую поверхность V^2 рода два и разместить по соседству с ней конечное число центров притяжения или отталкивания, создающих на V^2 потенциал сил таким образом, что движение материальной точки по V^2 под действием введенных внешних сил будет математически эквивалентно движению по инерции в метрике, обладающей всюду отрицательной кривизной.

² Всяду, где мы говорим просто о «мере» без дальнейшей специализации, мы имеем в виду меру m .

В соответствии со сказанным во введении нас будут по преимуществу занимать канонические системы, т. е. системы с $n = 2s$, разделением координат точки $(q, p) \in \Omega^{2s}$ на две группы $q_1, \dots, q_s$ и $p_1, \dots, p_s$, преобразованиями прикосновения в качестве допустимых преобразований координат, уравнениями канонического вида

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (2)$$

и инвариантной плотностью

$$M(q, p) = 1.$$

Особое внимание будет уделено вопросу о том, какие свойства динамических систем являются при «произвольных» F_α и M (или «произвольной» функции $H(q, p)$ в случае канонических систем) «типичными» и какие могут проявляться лишь в виде «исключения». Вопрос этот, однако, весьма деликатен. Подход со стороны категории соответствующих множеств в функциональных пространствах систем функций $\{F_\alpha, M\}$ (или функций H), несмотря на известные успехи, полученные в этом направлении в общей теории абстрактных динамических систем, интересен более как средство для доказательств существования, чем как непосредственный ответ на сколь угодно стилизованные и идеализированные реальные запросы физиков или механиков. Подход со стороны меры, наоборот, представляется вполне здравым и естественным с физической точки зрения (как это подробно аргументировалось, например, Нейманом [1]), но наталкивается на отсутствие естественной меры в функциональных пространствах.

Мы будем следовать двумя путями. Во-первых, для получения положительных результатов о том, что тот или иной тип динамических систем должен быть признан одним из существенных, не «исключительных» и не подлежащих ни с какой разумной точки зрения «пренебрежению» (подобно тому как пренебрегают множествами меры нуль), мы будем пользоваться понятием устойчивости в смысле сохранения данного типа поведения динамической системы при малом изменении функций F_α и M или функции H . Любой тип поведения динамической системы, для которого существует хотя бы один пример его устойчивого осуществления, должен с этой точки зрения считаться существенным и непренебрегаемым. В соответствии с принятым подходом со стороны аналитических функций, «малость» изменения функции $f_0(x)$ будет пониматься в смысле перехода от функции $f_0(x)$ к функции

$$f(x) = f_0(x) + \theta \varphi(x, \theta)$$

при малом значении параметра θ и аналитичности функции φ по совокупности переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \theta$. Такой подход к делу может подвергаться критике, но при нем можно получить некоторые интересные результаты. Там, где можно ограничиться близостью функ-

ций f_0 и f в смысле близости их производных ограниченного порядка, это будет указано.

Для получения отрицательных результатов о несущественном, исключительном характере какого-либо явления мы будем применять только один несколько кустарный прием: если в классе K функций $f(x)$ можно ввести конечное число функционалов

$$F_1(f), F_2(f), \dots, F_r(f),$$

которые в том или ином смысле естественно считать принимающими, «вообще говоря, произвольные» значения

$$F_1(f) = C_1, \dots, F_r(f) = C_r$$

из некоторой области r -мерного пространства точек $C = (C_1, \dots, C_r)$, то мы будем считать любое явление, которое может иметь место только при C из множества, имеющего r -мерную лебеговскую меру нуль, исключительно и подлежащим «пренебрежению».

Я начну обзор конкретных результатов с применения этой идеи к исследованию динамических систем, фазовое пространство которых является двумерным тором.

§ 2

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ И НЕКОТОРЫХ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Как и всюду далее, точки тора T^2 будем считать заданными круговыми координатами x_1, x_2 (точка x не меняется при переходе от x_α к $x_\alpha + 2\pi$). Функции F_α , стоящие в правых частях уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2),$$

и инвариантную плотность $M(x_1, x_2)$ будем в соответствии с ранее сказанным считать аналитическими и, кроме того, подчиним условиям

$$F_1^2 + F_2^2 > 0, \quad M > 0 \tag{1}$$

и для простоты условию нормировки $m(T^2) = 1$. Введем средние частоты обращения

$$\lambda_1 = \int_{T^2} F_1(x) dm, \quad \lambda_2 = \int_{T^2} F_2(x) dm.$$

Небольшое усиление результатов Пуанкаре, Данжуа и Кнезера приводит в нашем случае к выводу, что аналитическим преобразованием координат уравнения движения можно привести к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 M(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 M(x_1, x_2).$$

Хорошо известно, что в случае иррационального отношения

$$\gamma = \lambda_1/\lambda_2$$

все траектории оказываются всюду плотными, а мера m транзитивной. Кроме того, следуя Маркову [2], легко доказывается, что при иррациональности γ динамическая система строго эргодична, т. е. содержит одно-единственное эргодическое множество E , точки которого имеют собственной мерой меру

$$\mu_E = cm,$$

где c — константа. Естественное утверждение, что движения на двумерном торе при условиях (1), «вообще говоря», обладают всеми перечисленными сейчас свойствами, уже является применением упомянутого принципа пренебрежения случаями, когда некоторая конечная система функционалов (в данном случае λ_1 и λ_2) принимает значения из некоторого множества меры нуль (в данном случае из множества точек (λ_1, λ_2) с рациональным отношением γ).

В заметке [3] мне удалось пойти несколько дальше. Именно я доказал, что в предположении существования таких $c > 0$ и $h > 0$, что для всех целых r и s имеет место неравенство

$$|r - s\gamma| \geq ch^s, \quad (2)$$

уравнения движения можно привести аналитическим преобразованием координат к виду

$$dx_1/dt = \lambda_1, \quad dx_2/dt = \lambda_2. \quad (3)$$

Как известно из теории диофантовых приближений, условие (2) выполнено (при надлежащих c и h) для почти всех иррациональностей γ . Таким образом, за исключением случаев, когда γ «ненормально хорошо» приближается дробями r/s , аналитическая динамическая система с интегральным инвариантом на торе T^2 при условиях (1) неизбежно оказывается допускающей только почти периодические и даже более специально «условно периодические» движения с двумя независимыми частотами λ_1 и λ_2 .

Известно много задач классической механики с двумя степенями свободы ($s = 2, n = 4$), в которых из-за наличия двух однозначных на всем Ω^4 первых интегралов I_1 и I_2 четырехмерное многообразие Ω^4 распадается, за исключением некоторых исключительных многообразий не более чем трех измерений, на двумерные многообразия

$$L^2_{C_1 C_2} = L^2(I_1 = C_1, I_2 = C_2).$$

Так как в точках покоя выполняются четыре уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0,$$

то в случае аналитической функции H их множество на Ω^4 не более чем счетно. Поэтому на многообразии L^2 они могут попасть лишь в ви-

де исключения. Отсюда получается вывод, что почти все компактные многообразия L^2 являются именно торами (как ориентируемые компактные двумерные многообразия, допускающие векторное поле без нулевых векторов).

Задачи классической механики рассматриваемого типа, как известно, всегда интегрируемы. Качественное исследование специальных задач такого рода (движение под действием силы тяжести по поверхности вращения, движение по инерции по поверхности трехосного эллипсоида и т. д., движение точки по плоскости под действием ньютоновского притяжения двух неподвижных центров и т. п.) и приводит к большому числу примеров распада пространства Ω^4 в основном на торы T^2 с заполняющими их всюду плотно обмотками из траекторий условно периодических движений с двумя независимыми частотами λ_1 и λ_2 .⁵ Между этими торами, вообще говоря, лежит всюду плотное множество торов, распадающихся из-за соизмеримости частот на замкнутые траектории, и, уже дискретным образом, не более чем трехмерные особые многообразия, на которых, в частности, помещаются точки покоя и так называемые асимптотические движения. Рассмотрение таких интегрируемых задач дает много интересных примеров довольно сложных разложений фазового пространства Ω на эргодические множества и остаток из «нерегулярных точек», которые лежат на траекториях асимптотических движений³.

В уже упомянутой моей заметке [3] указывается, что при исключительных (не удовлетворяющих условию (2)) иррациональных γ действительно имеется ряд новых возможностей, иногда достаточно неожиданных для аналитических систем (об этом будет сказано далее). Но в упомянутых задачах классической механики эти исключительные случаи не появляются по весьма простой причине: переход к круговым координатам ξ_1, ξ_2 на торах T^2 и к параметрам этих торов C_1, C_2 в этих задачах осуществляется преобразованиями прикосновения. Поэтому уравнения сохраняют канонический вид

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial C_\alpha} H, \quad \frac{dC_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} H,$$

и так как инвариантность торов T^2 получается только в случае

$$dC_1/dt = dC_2/dt = 0,$$

то H зависит только от C_1 и C_2 , что приводит на каждом торе T^2 без всяких исключений к уравнениям (3) с постоянными λ_1 и λ_2 .

Поэтому реальное значение для классической механики приведенного мною анализа динамических систем на T^2 зависит от того, имеются ли достаточно важные примеры канонических систем с дву-

³ В связи с этим замечу, что весьма поучительный качественный анализ задачи о притяжении двумя неподвижными центрами, проведенный в известном трактате Шарлье, оказался неполным и частично неверным и дважды исправлялся [4, 5].

мья степенями свободы, не интегрируемых классическими методами, в которых существенную роль играют инвариантные (по отношению к преобразованиям S^t) двумерные торы.

Чтобы убедиться в том, что такие примеры существуют, рассмотрим, примыкая к проведенному Биркхофом [6] исследованию окрестности эллиптического периодического движения, систему с круговыми координатами q_1, q_2 и импульсами p_1, p_2 , для которой

$$H(q, p) = W(p).$$

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0.$$

Очевидно, что торы T_c^2 , выделяемые условиями

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = c_2,$$

инвариантны и на каждом из них происходит условно периодическое движение

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha(c) = \frac{\partial}{\partial c_\alpha} W(c_1, c_2)$$

с двумя частотами, зависящими от c . Предположим, что якобиан частот λ_α по импульсам p_α отличен от нуля:

$$\left| \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial p_\beta} \right| = \left| \frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right| \neq 0. \quad (4)$$

Оказывается, что в этом случае разбиение рассматриваемой области четырехмерного пространства Ω^4 на двумерные торы T^2 в основном устойчиво по отношению к малым изменениям H вида

$$H(q, p, \theta) = W(p) + \theta S(q, p, \theta).$$

Чтобы получить точную формулировку, рассмотрим область $G \subseteq \Omega^4$, определяемую условием $p \in B$, где B — ограниченная область на плоскости точек p . В предположении аналитичности функций W и S и при условии (4) можно доказать следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|\theta| < \delta$ в динамической системе

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q, p, \theta), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q, p, \theta)$$

вся область G , кроме множества меры меньше ε , состоит из инвариантных двумерных торов T^2 , на каждом из которых в надлежащих (аналитически зависящих от q, p) круговых координатах движение определяется уравнениями

$$d\xi_1/dt = \lambda_1, \quad d\xi_2/dt = \lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 на каждом T^2 постоянны, т. е. являются условно периодическими с двумя периодами.

Метод доказательства заключается в том, что прослеживается судьба первоначальных торов T^2_c с частотами $\lambda_\alpha(c)$, удовлетворяющими условию (2), при изменении θ и устанавливается, что каждый такой тор при достаточно малом ε не разрушается, а лишь смещается в Ω , сохраняя на себе траектории условно периодических движений с постоянными частотами λ_α .

Вероятно, многие слушатели уже догадались, что дело идет по существу о некоторой переработке широко дискутировавшейся в литературе по небесной механике идеи о возможности избежать появления ненормально «малых знаменателей» при расчете возмущенных орбит. Однако в отличие от обычной теории возмущений я получаю точные результаты, а не вывод о сходимости рядов того или иного приближения конечного порядка (относительно θ). Это достигается благодаря тому, что вместо расчета возмущенного движения при фиксированных начальных условиях я сами начальные условия меняю так, чтобы при изменении θ все время попадать на движения с нормальными (в смысле условия (2)) частотами λ_α .

Сделаю еще три замечания по поводу сказанного.

1. Теорема о приводимости движений на T^2 к виду (3) может быть доказана и при условиях достаточно высокого порядка конечнократной дифференцируемости функций F_α и M (естественно, с соответствующим ослаблением заключения). Теорема о сохранении торов в Ω^4 , наоборот, по-видимому, необходимо требует, если не аналитичности $W(p)$ и $S(q, p, \theta)$, то существования у этих функций бесконечного числа производных, подчиненных некоторым ограничениям на порядок их роста.

2. Предусмотренное во второй теореме исключительное множество меры $< \varepsilon$ действительно может оказаться всюду плотным и, вероятно, положительной меры при сколь угодно малых θ . Это явление аналогично «зонам неустойчивости», обнаруженным Биркхофом при исследовании окрестностей эллиптических периодических траекторий [6].

3. В качестве одного из специальных случаев, к которым применимо все сказанное выше, можно указать на движение по инерции по аналитической поверхности, близкой к трехосному эллипсоиду.

§ 3

ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ, «ВООБЩЕ ГОВОРЯ», ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА КОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ТРАНЗИТИВНЫМИ И СЛЕДУЕТ ЛИ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР СЧИТАТЬ «ОБЩИМ» СЛУЧАЕМ, А ДИСКРЕТНЫЙ — «ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫМ»?

Гипотеза о преимущественном значении транзитивного случая и случая непрерывного спектра (перемешивания) неоднократно высказывалась в связи с «эргодическими» гипотезами в физике. В применении к каноническим системам обе эти гипотезы естественно от-

носить лишь к $(2s - 1)$ -мерным инвариантным многообразиям L_h^{2s-1} , которые выделяются требованием постоянства энергии

$$H = h,$$

и относить их только к случаю компактных L_h^{2s-1} , так как на некомпактных L_h^{2s-1} в самых простых задачах имеются (и обычно господствуют по мере) «уходящие» траектории, о которых речь будет идти далее (в § 4). В случае отказа от первой гипотезы вторую естественно относить уже не ко всему многообразию Ω^n (или L_h^{2s-1} в случае канонических систем), а к тем эргодическим множествам, на которые распадается Ω^n (разрешая, конечно, пренебрегать эргодическими множествами, сумма которых имеет меру нуль).

В применении к аналитическим каноническим системам на оба вопроса следует ответить отрицательно, так как теорема об устойчивости разбиения на торы, высказанная нами для систем с двумя степенями свободы, сохраняется и при любом числе степеней свободы. Если в $2s$ -мерном тороидальном слое G фазового пространства Ω^{2s}

$$H(q, p, \theta) = W(p) + \theta S(q, p, \theta),$$

то при $\theta = 0$ этот слой очевидным образом распадается на инвариантные s -мерные торы T_p^s , на каждом из которых движение условно периодически с s периодами, причем в случае

$$\left| \frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right| \neq 0$$

на почти всех торах T_p^s периоды независимы в смысле

$$(n, \lambda) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \lambda_{\alpha} \neq 0$$

при любых целых n_{α} и поэтому траектории обвивают тор всюду плотно, s -мерная лебеговская мера на T^s транзитивна и весь тор представляет собой одно эргодическое множество. Теоремы 1 и 2 моей заметки [22] утверждают, что в описанной обстановке при малых θ вся эта картина изменяется только в том отношении, что некоторые торы, соответствующие системам частот, для которых выражения (n, λ) убывают с возрастанием

$$|n| = \sqrt{\sum n_{\alpha}^2}$$

слишком быстро, могут исчезнуть, большинство же торов T_p^s , сохраняя характер происходящих на них движений, несколько смещаются в Ω^{2s} , продолжая при малых θ заполнять G с точностью до множества малой меры. Таким образом, при малых изменениях H динамическая система остается нетранзитивной, а область G с точностью до остатка малой меры остается распадающейся на эргодические множества с дискретным спектром (указанной специальной природы).

В связи с этим интересно отметить, что некоторыми физиками (см., например, [7]) высказывалась как раз гипотеза, что «общим случаем» канонической динамической системы без уходящих траекторий является как раз распадение Ω^{2s} на s -мерные торы T^s , несущие на себе условно периодические движения с s периодами. Идея эта, по-видимому, основана только на преимущественном внимании к линейным системам и к ограниченному набору интегрируемых классических задач, но во всяком случае следует отметить, что методы доказательства приведенной выше теоремы существенно привязаны именно к расслоению Ω^{2s} на торы T^s и неприменимы к расслоению на торы какой-либо иной размерности $r > s$ или $r < s$.

В общем виде указанная сейчас гипотеза вряд ли может быть поддерживаема, так как весьма вероятно, что при любом s имеются примеры канонических систем с s степенями свободы и устойчивыми транзитивностью и перемешиванием на многообразиях L_h^{2s-1} . Я имею в виду движение по геодезическим на компактных многообразиях V^s постоянной отрицательной кривизны, т. е. динамические системы

$$H(q, p) = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) p_{\alpha} p_{\beta}, \quad (1)$$

где q_{α} — координаты на компактном многообразии V^s постоянной отрицательной кривизны, а $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора на V^s .

Устойчивость отрицательной кривизны по отношению к малым изменениям функций $g_{\alpha\beta}(q)$ не требует пояснений. Затруднения заключаются лишь в том, что изменение функций $g_{\alpha\beta}(q)$ не является единственным возможным видом изменений функции $H(q, p)$, а транзитивность и перемешивание при $s > 2$ остаются доказанными лишь для случая постоянной кривизны, в то время как при варьировании $g_{\alpha\beta}$ кривизна перестает быть постоянной. Второе затруднение в случае $s = 2$, для которого транзитивность доказана и при переменной кривизне, отпадает. Первое же не существует, если ограничиться функциями $H(q, p)$ вида

$$H(q, p) = U(q) + \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) p_{\alpha} p_{\beta} \quad (2)$$

(которыми, собственно говоря, и занимается классическая механика), так как переходом к новой метрике системы вида (2) сводятся к системам вида (1).

Если вспомнить то, что было ранее сказано о движении по инерции по поверхностям, близким к трехосному эллипсоиду, то мы приходим к выводу, что уже в простейших задачах классической механики приходится считаться как с устойчивыми и поэтому имеющими право на равное и основное внимание по меньшей мере с двумя рассмотренными случаями, из которых один связан с транзитивностью на многообразиях постоянной энергии и непрерывным спектром, а

другой — с отсутствием транзитивности и по преимуществу дискретным спектром.

Аналогичных результатов об устойчивости того или иного общего типа поведения неканонических динамических систем с интегральным инвариантом и компактным Ω^n мне неизвестно.

§ 4

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О НЕКОМПАКТНОМ СЛУЧАЕ

Особенностью некомпактного случая является возможность существования траекторий, уходящих при $t \rightarrow \infty$ или при $t \rightarrow -\infty$ из всякой компактной части Ω . Я изложу здесь некоторые общие положения эргодической теории, пригодные для любых непрерывных потоков S^t в локально компактных пространствах Ω . Так как односторонний уход в бесконечность возможен лишь для траекторий, образующих множество меры нуль, то сразу определяют уходящую точку x требованием существования для любого компакта K такого T , что все точки $S^t x$ с $|t| > T$ лежат вне K . Через Ω^n обозначим множество всех уходящих точек. Для целей детального анализа конкретных классических динамических систем целесообразно строить «индивидуальную эргодическую теорию» не в чисто метрическом варианте, изложенном в книге Хопфа [9], а следуя более ранним работам Хопфа и Степанова [10, 11], а в некоторых пунктах непосредственно следуя изложению мемуара Крылова и Боголюбова [12], хотя в нем имеется в виду компактный случай.

При таком изложении основным остается, как и в компактном случае, понятие регулярной точки. Так называется точка x , если для нее существует инвариантная мера μ , обладающая следующими свойствами:

1. $\mu(\Omega - \bar{I}_x) = 0$, где $\bar{I}_x$ — замыкание траектории, проходящей через x .

2. $\mu(V_y) > 0$ для любой окрестности V_y точки $y \in \bar{I}_x$.

3. Для любых двух отличных от нуля лишь на компактных множествах непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_a^T f(S^t x) dt}{\int_a^T g(S^t x) dt} = \frac{\int_{\Omega} f d\mu}{\int_{\Omega} g d\mu},$$

если только

$$\int_{\Omega} g d\mu \neq 0.$$

4. Мера μ транзитивна.

Так как отсутствует требование нормировки, то мера μ определяется точкой лишь с точностью до постоянного множителя. Тем не менее мы ее будем обозначать μ_x и называть «индивидуальной мерой» точки x . Из-за этого в определение эргодических множеств вводится небольшое изменение: две точки x и x' относятся к одному эргодическому множеству, если их индивидуальные меры совпадают в смысле совпадения с точностью до постоянного множителя. Таким образом, все множество Ω' регулярных точек представляется в виде суммы эргодических множеств

$$\Omega' = \Sigma \varepsilon.$$

Меры μ_ε , естественно, теперь тоже определяются эргодическим множеством лишь с точностью до постоянного множителя.

Индивидуальная эргодическая теорема утверждает, что

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' + N, \quad \text{где } \lambda(N) = 0$$

в любой инвариантной мере λ . Для нас существенно, впрочем, главным образом лишь то, что всегда

$$m(N) = 0.$$

Любая транзитивная инвариантная мера μ является или мерой μ_ε некоторого эргодического множества ε , или имеет вид

$$\mu(A) = \nu_I(A \cap I),$$

где ν_I — «временная» мера на уходящей траектории I . В отличие от второго тривиального случая естественно меры первого типа называть эргодическими, так как им соответствует множество ε_μ с

$$\mu_{\varepsilon_\mu} = \mu.$$

Те соображения, которые в случае компактного Ω можно привести в пользу мнения, что «общего вида» компактная динамическая система транзитивна, в применении к некомпактным динамическим системам приводят к гипотезе, что, «вообще говоря», имеет место один из двух случаев: или система диссипативна (т. е. почти все ее точки уходящие), или мера m эргодична (очевидно, что во втором случае уходящие точки образуют лишь множество меры нуль).

Иногда эту гипотезу применяют и к отдельным классическим задачам в такой форме: если у данной задачи имеется некоторое число первых интегралов и нет основания ожидать открытия новых, то считают правдоподобным, что на многообразиях, определяемых указанием значений известных первых интегралов, имеет место транзитивность. В подтверждение такой практики можно привести то замечание, что, по исследованиям Хедлунда и Хопфа, эта альтернатива всегда имеет место для движений по геодезическим постоянной отрицательной кривизны.

Если заведомо известно, что существует множество положительной меры из уходящих точек, то в соответствии со сказанным возник-

кает гипотеза о том, что система диссипативна. По-видимому, на такого рода соображениях основано предположение Биркгофа о диссипативном характере задачи трех тел.

Однако представляется вероятным, что указанными в [22] методами для канонических систем можно построить примеры устойчивого одновременного нахождения в Ω^{2s} диссипативной части положительной меры и положительной области G , заполненной в основном s -мерными инвариантными торами.

Замечу, что из более элементарных вопросов специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений мало занимаются конкретными задачами об уходящих траекториях различных специальных типов. Ярким примером этого является то обстоятельство, что опровержение утверждений Шази о невозможности «обмена» и «захвата» в задаче трех тел [17, 18] было сначала достигнуто тяжелым (и без точных оценок ошибок логически неубедительным!) путем численного интегрирования (Беккер [19], Шмидт [20]) и лишь недавно пример «захвата» был построен Ситниковым весьма просто и почти без вычислений [21].

§ 5

ТРАНЗИТИВНЫЕ МЕРЫ, СПЕКТРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Назовем меру μ в Ω^n аналитической, если она может быть задана в виде

$$\mu(A) = \int_{V^k \cap A} f(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_k,$$

где V^k — некоторое локально замкнутое в Ω^n аналитическое многообразие какого-либо числа измерений $k \leq n$, а функция f от координат ξ_α на V^k (зависящих аналитически от координат x_α в Ω^n) аналитическая.

Многообразие V^k однозначно определяется мерой μ (если она не тождественный нуль). Число k поэтому может быть названо и размерностью меры μ .

Нас будут особенно интересоваться транзитивные меры. В этом случае многообразие V^k должно быть инвариантным. Инвариантные многообразия одной и той же размерности не пересекаются, а разной размерности могут только целиком включаться одно в другое (меньшей размерности в большую). Каждое инвариантное многообразие несет на себе не более одной транзитивной меры. В силу сказанного система аналитических транзитивных мер имеет сравнительно обзоримую структуру.

До последнего времени в аналитических системах были известны только аналитические транзитивные меры. Лишь недавно Грабарь [13] построил аналитический аналог примера Маркова (аналитическую неприводимую, но не строго эргодическую динамическую си-

стему) и тем самым дал пример неаналитической транзитивной меры в аналитической системе. Возможно, однако, что сумма всех неаналитических эргодических множеств всегда пренебрегаема в смысле основной меры m .

Эргодические множества однозначно определяются своими мерами μ_ε , которые по самому определению транзитивны.

Что касается эргодических множеств, соответствующих аналитическим транзитивным мерам (не сводящимся к мере μ_ε одной траектории), то заметим только, что в случае аналитичности меры μ_ε эргодическое множество лежит на носителе V^s меры μ_ε , будучи на нем всюду плотным, но уже в некоторых простых классических примерах разность $V^r - \varepsilon$ может быть тоже всюду плотной на V^r .

Спектральные свойства транзитивных мер на аналитических системах мало изучены.

Дискретные спектры пока получены только с конечным базисом независимых частот

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,$$

причем для аналитических мер число независимых частот совпадает во всех известных случаях с размерностью.

Непрерывный спектр полностью определен лишь недавно Гельфандом и Фоминим [14, 15] для некоторых случаев движений по геодезическим на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. В этих случаях он оказался счетнократным лебеговским.

Не исключена возможность, что только эти случаи (дискретный спектр с конечным числом независимых частот и счетнократный лебеговский) являются возможными для аналитических транзитивных мер или что только они являются в том или ином смысле общими, типичными случаями.

Для неаналитических транзитивных мер представляется более вероятным их совершенно произвольное строение. Это было бы несомненным, если бы был установлен аналитический аналог теоремы Какутани [16] об изометрическом вложении произвольного потока в поток непрерывной динамической системы.

По поводу собственных функций остановимся только на примере аналитической динамической системы на двумерном торе T^2 с дискретным спектром и всюду разрывными собственными функциями. Правда, пример этот, связанный с ненормально хорошо приближаемым рациональными дробями r/s отношением $\gamma = \lambda_1/\lambda_2$ средних частот, по самому своему происхождению указывает скорее на то, что мы имеем дело не с типичным, а исключительным явлением.

Чтобы выснить вопрос подробнее, рассмотрим вновь уравнения движения по двумерному тору, введя в них параметр θ , изменяющийся в каких-либо пределах $[\theta_1; \theta_2]$:

$$dx_\alpha/dt = F_\alpha(x_1, x_2, \theta).$$

Будем предполагать функции $F_\alpha(x_1, x_2, \theta)$ аналитическими. Очевидно, что аналитически зависеть от θ будет и отношение средних частот $\gamma(\theta)$. Если $\gamma(\theta)$ непостоянно, то множество R тех θ , для которых систему можно преобразовать аналитически к виду

$$d\xi_\alpha/dt = \lambda_\alpha,$$

будет занимать почти весь отрезок $[\theta_1, \theta_2]$. Собственные функции

$$\varphi_{mn} = e^{i(m\xi_1 + n\xi_2)}$$

при возвращении к первоначальным координатам x_1, x_2 будут для $\theta \in R$ аналитическими функциями от x_1 и x_2 . Но, вообще говоря, даже на R они будут на этом множестве по θ всюду разрывными, причем эту разрывность нельзя будет уничтожить выкидыванием из R множества меры нуль. Эти обстоятельства значительно существеннее, чем то, что $\varphi_{mn}(x_1, x_2, \theta)$ можно определить и в некоторых точках остаточного множества $[\theta_1, \theta_2] - R$ меры нуль за счет допущения их неаналитичности и разрывности по x_1 и x_2 .

Возможно, что зависимость $\varphi_{mn}(x_1, x_2, \theta)$ от параметра θ на R относится к классу функций типа моногенных функций Бореля [24] и допускает, несмотря на всюду разрывный характер, исследование надлежащими аналитическими средствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Я буду считать свою цель достигнутой, если мне удалось убедить слушателей в том, что, несмотря на большие трудности и ограниченный характер уже полученных результатов, поставленная задача использования общих понятий современной эргодической теории для анализа качественного характера движения в аналитических и специально канонических динамических системах заслуживает большого внимания исследователей, способных охватить те многообразные связи, которые здесь обнаруживаются с самыми различными отделами математики. В заключение мне хочется поблагодарить организационный комитет Конгресса за предоставленную мне возможность прочесть этот доклад и за любезную помощь в размножении конспекта с формулами и литературными ссылками, а всех собравшихся за внимание, оказанное мне в этот последний день наших занятий, когда все уже и без того перенасыщены огромным материалом докладов предшествующих дней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, 1932.
2. Марков А. А. Почти периодичность и гармонизируемость. — В кн.: Труды второго Всесоюз. математического съезда Л.; М.: Изд-во АН СССР, 1935, т. 2, с. 227—231.
3. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. — ДАН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 763—766.

4. *Tallqvist H. J.* Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird.— *Acta Soc. sci. fenn.* A, NS, 1927, vol. 1, N 5.
5. *Бадалян Г. К.* О форме траекторий в проблеме двух неподвижных центров.— В кн.: Труды второго Всесоюз. математического съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1935, т. 2, с. 239—241.
6. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems. New York, 1927. Рус. пер.: *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.: Гостехтеориздат, 1941.
7. *Ландау Л., Лифшиц Л.* Механика. М.; Л.: Гостехиздат.
8. *Hopf E.* Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung.— *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 1939, Bd. 91, N 3, S. 261—304. Рус. пер.: *Хопф Э.* Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны.— *УМН*, 1949, т. 4, вып. 2, с. 129—170.
9. *Hopf E.* Ergodentheorie. Berlin: Springer, 1937. Рус. пер.: *Хопф Э.* Эргодическая теория.— *УМН*, 1949, т. 4, вып. 1, с. 113—182.
10. *Hopf E.* Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme.— *Math. Ann.*, 1930, Bd. 103, S. 710—719.
11. *Stepanoff W.* Sur une extension du théorème ergodique.— *Comp. math.*, 1936, N 1, p. 239.
12. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire.— *Ann. Math.*, 1937, vol. 38, p. 65—113.
13. *Грабарь М. И.* О строгой эргодичности динамических систем.— *ДАН СССР*, 1954, т. 95, № 1, с. 9—12.
14. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Унитарные представления групп Ли и потоки геодезических на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.— *ДАН СССР*, 1951, т. 76, с. 771—774.
15. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны.— *УМН*, 1952, т. 7, вып. 1, с. 118—137.
16. *Kakutani S.* Representation of measurable flow in euclidean 3-space.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1942, vol. 28, N 1, p. 16—21.
17. *Chazy I.* Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.— *J. Math.*, 1929, vol. 8, p. 353—380.
18. *Chazy I.* Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.— *Bull. Astron.*, 1952, vol. 8, p. 403—436.
19. *Bekker L.* On capture orbits.— *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 1920, vol. 80, N 6, p. 590—597.
20. *Шмидт О. Ю.* О возможности захвата в небесной механике.— *ДАН СССР*, 1947, т. 58, № 2, с. 213—216.
21. *Ситников К. А.* О возможности захвата в задаче трех тел.— *Мат. сб.*, 1953, т. 32, № 3, с. 693—705.
22. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— *ДАН СССР*, 1954, т. 98, № 4, с. 527—530.
23. *Kakutani S.* Ergodic theory.— In: *Proc. Intern. Congress Math.*, 1950, vol. 2, p. 128—142.
24. *Borel E.* Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Paris, 1917.

НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННОГО И ТОЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ *

1. Вопрос о трудности указания с точностью до ε функции f из некоторого класса F может рассматриваться с точки зрения содержания в таком указании «количества информации». Естественной характеристикой класса F с этой точки зрения является функция

$$I_F^a(\varepsilon) = \log N_F^a(\varepsilon),$$

где $N_F^a(\varepsilon)$ есть минимальное число точек в ε -сети на F . В докладе собраны опубликованные ранее и полученные вновь оценки роста функции $I_F^a(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для некоторых классов аналитических функций и функций, обладающих заданным числом производных.

Дальнейшее развитие подобных исследований представляется существенным, в частности, с точки зрения выработки правильных представлений о принципиальных возможностях различных употребительных в вычислительной математике способов приближенного задания функций, их введения в машины и сохранения в памяти машин.

При оценке пропускной способности каналов связи, передающих сигналы в виде непрерывных функций времени, принадлежащих классу F , естественно возникает вопрос о максимальном числе $N_F^c(\varepsilon)$ «хорошо отличимых сигналов», т. е. функций класса F , находящихся в надлежащей метрике попарно на расстоянии $>\varepsilon$. Асимптотическое поведение функции $N_F^c(\varepsilon)$ в рассмотренных случаях вполне аналогично асимптотическому поведению функции $N_F^a(\varepsilon)$. Достаточно далеко продвинутое исследование асимптотического поведения

$$I_F^c(\varepsilon) = \log N_F^c(\varepsilon),$$

по-видимому, может привести к выяснению некоторых трудных вопросов теории передачи информации по каналам связи (например, вопроса о реальном содержании так называемой теоремы Котельникова) даже без обращения к понятиям теории вероятностей.

2. Вторая часть доклада посвящена ряду специальных задач приближенного и точного представлений функций нескольких переменных при помощи различного вида формул, в которые входят лишь произвольные функции меньшего числа переменных. Одной из таких проблем является проблема приближения функций двух переменных

* В кн.: Труды III Всесоюз. мат. съезда. М.: Изд-во МГУ, 1956, т. 2, с. 28—29.

«номографируемыми» функциями, т. е. функциями

$$z = \varphi(x, y),$$

которые могут быть заданы соотношением

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) & 1 \\ c(y) & d(y) & 1 \\ e(z) & f(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Описаны различные возможные подходы к такого рода задачам и систематизированы полученные разными авторами результаты. В виде примера скрывающихся здесь даже в простейших задачах неожиданностей можно привести два недавних результата В. И. Арнольда, относящихся к представлению функций двух переменных функциями вида

$$\chi(\varphi(x) + \psi(y)) \quad (1)$$

с непрерывными χ , φ и ψ . Пусть

$$E(f) = \inf_{\chi, \varphi, \psi} \sup_{x, y} |f(x, y) - \chi(\varphi(x) + \psi(y))|.$$

В. И. Арнольд доказывает, что существуют: а) непрерывные функции с $E(f) > 0$; б) непрерывные функции с $E(f) = 0$, но тем не менее не представимые в виде (1).

3. К специальным задачам из п. 2 примыкает выдвинутая Гильбертом проблема существования функций нескольких переменных, не представимых никакими конечными, хотя бы и сколь угодно сложными суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. В применении к функциям *четырёх* переменных получен неожиданный результат: любая непрерывная функция *четырёх* переменных представима в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^{r=4} \chi_r(x_4, \varphi_r(x_1, x_2, x_3), \psi_r(x_1, x_2, x_3)),$$

где функции χ_r , φ_r и ψ_r непрерывны. Возможно ли представление произвольной функции трех переменных в виде суперпозиции конечного числа непрерывных функций двух переменных — неизвестно (если бы такая возможность была доказана, то это означало бы полное решение так называемой 13-й проблемы Гильберта). Доказано лишь, что любая непрерывная функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть с любой точностью аппроксимирована функцией вида

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=1}^{r=2} \theta_r(x_3, \chi_r(\varphi_r(x_3, x_1), \psi_r(x_3, x_2))),$$

где функции θ_r , χ_r , φ_r и ψ_r непрерывны.

Остается неизвестным положение в случае, если на входящие в суперпозиции функции наложить ограничения характера сущест-

ования у них заданного числа производных. А. Г. Витушкиным было доказано существование лишь таких функций, что при их представлении суперпозициями функций меньшего числа переменных происходит неизбежная потеря степени их гладкости. Результаты А. Г. Витушкина нашли прозрачное объяснение с точки зрения оценок роста функций $N_F^a(\varepsilon)$, которым посвящена первая часть доклада.

55

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ *

Из сообщаемой далее теоремы 3 вытекает такое несколько неожиданное следствие: *любая непрерывная функция сколь угодно большого числа переменных представима в виде конечной суперпозиции непрерывных функций не более чем трех переменных*. Для произвольной функции четырех переменных такое представление имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^4 h^r[x_4, g_1^r(x_1, x_2, x_3), g_2^r(x_1, x_2, x_3)].$$

Вопрос о возможности представления любой непрерывной функции *трех* переменных в виде суперпозиции непрерывных функций *двух* переменных остается открытым. Доказательство возможности такого представления обозначало бы полное решение 13-й проблемы Гильберта [1] в смысле опровержения высказанной Гильбертом гипотезы. Теорема 2 показывает лишь, что представление любой непрерывной функции трех переменных в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных становится заведомо возможным, если в качестве вспомогательных переменных допустить переменные, пробегающие *одномерное* образование, несколько более сложное, чем отрезок числовой прямой, а именно: *универсальное дерево* (деревом называется локально связный континуум, не содержащий в себе гомеоморфного образа окружности; как показал Менгер [2], существует универсальное дерево Ξ , содержащее в себе гомеоморфные образы всех деревьев).

В дальнейшем k, m, n, r — натуральные числа; $a, b, c, C, d, M, R, x, y, u, v, f, F, g, h, \varepsilon, \delta, \rho$ — действительные числа; ξ, φ, ψ —

элементы деревьев; E^n — единичный n -мерный куб; $0 \leq x_i \leq 1$; $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. а) При любом $n \geq 2$ существуют такие заданные на E^n непрерывные функции

$$\varphi^1, \dots, \varphi^{n+1}$$

со значениями из универсального дерева Ξ , что любая непрерывная заданная на E^n действительная функция f представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^{n+1} h_f^r[\varphi^r(x_1, \dots, x_n)],$$

где действительные функции $h_f^r(\xi)$ определены и непрерывны на Ξ .

б) При этом функции h_f^r могут быть выбраны так, что они будут непрерывно зависеть от f в смысле топологии равномерной сходимости в пространствах непрерывных функций на E^n и на Ξ .

Из теоремы 1 почти непосредственно вытекает

Теорема 2. При любом $n \geq 3$ существуют такие заданные на E^n непрерывные функции

$$\varphi^1, \dots, \varphi^n$$

со значениями из Ξ , что любая непрерывная заданная на E^n функция f представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^n h^r[x_n, \varphi^r(x_1, \dots, x_{n-1})],$$

где действительные функции $h^r(x, \xi)$ определены и непрерывны на произведении $E^1 \times \Xi$.

Универсальное дерево Ξ можно (см. [2]) считать реализованным в виде континуума, расположенного в единичном квадрате E^2 . Обозначая через g_1^r и g_2^r координаты точки φ^r , получаем в виде непосредственного следствия теоремы 2 предложение:

Теорема 3. При любом $n \geq 3$ существуют такие заданные на E^{n-1} непрерывные действительные функции

$$g_1^1, \dots, g_1^n; \quad g_2^1, \dots, g_2^n,$$

что любая непрерывная заданная на E^n функция f представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^n h^r[x_n, g_1^r(x_1, \dots, x_{n-1}), g_2^r(x_1, \dots, x_{n-1})],$$

где функции h^r заданы и непрерывны на E^3 .

Теорема 3 при $n = 3$ тривиальна; реальный интерес она имеет лишь при $n \geq 4$.

Остается указать вкратце путь доказательства теоремы 1. Исходным пунктом этого доказательства является следующая лемма.

Основная лемма. При любом $n \geq 2$ на E^n можно определить систему функций

$$u_{kt}^r(x_1, \dots, x_n)$$

с индексами r, k, t , пробегающими значения в пределах

$$1 \leq r \leq n+1, \quad 1 \leq k < \infty, \quad 1 \leq t \leq m_k,$$

которая обладает следующими свойствами:

- 1) $u_{kt}^r \geq 0$;
- 2) $u_{kt}^r \neq 0$ лишь на множестве G_{kt}^r диаметра d_k , где $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- 3) два множества G_{kt}^r и $G_{k't'}^r$ с общими индексами r и k при $t' \neq t$ не пересекаются;
- 4) при любом k в каждой точке $P \in E^n$

$$c \leq \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{m_k} u_{kt}^r \leq C,$$

где c и C не зависят от k ;

- 5) функция u_{kt}^r постоянна на каждом $G_{k't'}^r$ с тем же индексом r при $k' > k$ и произвольном t' .

Построение системы функций u_{kt}^r не может быть изложено в рамках этой заметки. Далее эта система функций предполагается заданной.

Лемма 1. а) Любая непрерывная заданная на E^n функция f может быть представлена в виде

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{m_k} a_{kt}^r(f) u_{kt}^r(P), \quad (1)$$

где коэффициенты $a_{kt}^r(f)$ не зависят от P .

б) Коэффициенты $a_{kt}^r(f)$ могут быть выбраны в виде непрерывных функционалов от f и притом так, что на каждом семействе $\mathfrak{F}$ равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций f

$$|a_{kt}^r(f)| \leq a(\mathfrak{F}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathfrak{F}) < \infty.$$

Доказательство леммы 1 основано на свойствах 1), 2) и 4) системы u_{kt}^r и начинается с оценки остаточного члена R в представлении

$$f(P) = \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{m_k} b_m^r u_{kt}^r(P) + R,$$

где

$$b_m^r = \frac{1}{C} f(P_{km}^r),$$

а P_{km}^r — произвольные точки, принадлежащие соответствующим множествам G_{km}^r . Легко показать, что при надлежащем выборе коэффициентов b_m^r

$$|R| \leq (|1 - c/C| + \delta_k) M,$$

где

$$M = \sup_{P \in E^n} |f(P)|, \quad \delta_k = \sup_{\rho(P, P') \leq d_k} |f(P) - f(P')|.$$

Полное доказательство леммы 1 выходит за рамки этой заметки. Запишем теперь разложение (1) в виде

$$f(P) = \sum_{r=1}^{n+1} f^r(P), \quad f^r(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r u_{km}^r(P). \quad (2)$$

Из свойств 2), 3) и 5) системы u_{km}^r легко выводится следующее свойство функций f^r .

Л е м м а 2. *Функция $f^r(P)$ постоянна на каждой компоненте любого множества уровня функции*

$$F^r(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(P).$$

Заметим теперь, что, как было показано А. С. Кронродом [3], компоненты множеств уровня любой непрерывной функции в некоторой естественной топологии образуют дерево. Дерево компонент множеств уровня функции F^r обозначим через Ξ^r , а эти деревья $\Xi^1, \dots, \Xi^{n+1}$ отобразим гомеоморфизмами

$$\psi_r(\Xi^r) = \Xi_0^r \subseteq \Xi$$

на попарно не пересекающиеся подмножества универсального дерева Ξ . Положим

$$\varphi^r(P) = \psi_r(\xi^r),$$

если $P \in \xi^r \in \Xi^r$, и определим на Ξ непрерывные функции $h^r(\xi)$ так, чтобы для $\xi \in \Xi^r$

$$h^r(\xi) = y, \quad \text{если} \quad f^r(P) = y \quad \text{при} \quad P \in \psi_r^{-1}(\xi).$$

Легко проверить, что

$$f^r(P) = h^r[\varphi^r(P)]. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) и приводят нас к доказательству утверждения а) теоремы 1. Утверждение б) теоремы 1 доказывается на основе утверждения б) леммы 1.

В заключение отметим еще без доказательства следующее предложение.

Т е о р е м а 4. При любых $n \geq 2$ и $\varepsilon > 0$ для каждой функции f , заданной и непрерывной на E^n , существуют такие многочлены

$$b(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad a_r(x), c_r(x); \quad r = 1, \dots, n+1,$$

что во всех точках $P \in E^n$

$$|f(P) - \tilde{f}(P)| < \varepsilon,$$

где

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1,2} a_r(x_n) b[c_r(x_n) + x_1, \dots, c_r(x_n) + x_{n-1}]. \quad (4)$$

В случае $n = 3$, положив

$$d(u, v) = u + v, \quad g_r(x, y) = a_r(x) y, \quad h_r(x, x') = c_r(x) + x',$$

получим из (4)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \\ = d(g_1\{x_3, b[h_1(x_3, x_1), h_1(x_3, x_2)]\}, \\ g_2\{x_3, b[h_2(x_3, x_1), h_2(x_3, x_2)]\}). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу теоремы 4 любая непрерывная функция трех переменных аппроксимируется с любой точностью выражением вида (5), где d , g_r , b и h_r — многочлены от двух переменных. Это замечание тоже освещает с несколько новой стороны круг задач, примыкающий к 13-й проблеме Гильберта.

5 мая 1956 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1935, Bd. 3, N 17. Рус. пер. Проблемы Гильберта/Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
2. Menger K. Kurventheorie. Berlin; Leipzig, 1932. Kap. 10, § 6.
3. Кронрод А. С.— УМН, 1950, т. 5, вып. 1, с. 24—134.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО И СЛОЖЕНИЯ*

Целью заметки является краткое изложение доказательства следующей теоремы:

Т е о р е м а. При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\psi^{p,q}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{p,q}(x_p) \right], \quad (1)$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

При $n = 3$, положив

$$\varphi_q(x_1, x_2) = \psi^{1q}(x_1) + \psi^{2q}(x_2), \quad h_q(y, x_3) = \chi_q[y + \psi^{3q}(x_3)],$$

получаем из (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q=1}^7 h_q[\varphi_q(x_1, x_2), x_3], \quad (2)$$

что является небольшим усилением результата В. И. Арнольда [2], который показал, что любая непрерывная функция трех переменных представима в виде суммы *девяти* слагаемых того же вида, как слагаемые, входящие в формулу (2) в числе *семи*. Результаты моей заметки [1] не вытекают из сообщаемой сейчас новой теоремы в их точных формулировках, но принципиальное их содержание (в смысле возможности представления функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и их приближения суперпозициями фиксированного вида из многочленов от одного переменного и сложения) очевидным образом содержится в новой теореме. Метод доказательства новой теоремы элементарнее методов работ [1, 2] и сводится к прямым конструкциям и подсчетам. Исчезла, в частности, необходимость употребления деревьев из компонент линий уровня. Фактически, однако, конструкции, употребленные в этой заметке, были найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в [1, 2], и отбрасывания в них деталей, излишних для получения конечного результата.

§ 1

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ψ^{pq}

Индексы p, q, k, i всюду далее пробегает целые значения

$$1 \leq p \leq n, \quad 1 \leq q \leq 2n + 1, \quad k = 1, 2, \dots, 1 \leq i \leq m_k = (9n)^k + 1.$$

При суммировании и перемножении в этих пределах пределы не обозначаются.

Рассмотрим сегменты

$$A_{k,i}^q = \left[\frac{1}{(9n)^k} \left(i - 1 - \frac{q}{3n} \right), \quad \frac{1}{(9n)^k} \left(i - \frac{1}{3n} - \frac{q}{3n} \right) \right].$$

Сегменты $A_{k,i}^q$ имеют длину $\frac{1}{(9n)^k} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)$, а при фиксированных k и q получаются один из другого при переходе от i к $i' = i + 1$ с помощью сдвига вправо на расстояние $\frac{1}{(9n)^k}$, т. е. расположены не только без перекрытий, но с промежутками длины $\frac{1}{3n (9n)^k}$, с точностью же до наличия этих промежутков покрывают весь единичный отрезок E^1 . В соответствии с этим кубики

$$S_{k, i_1 \dots i_n}^q = \prod_n A_{k, i_p}^q$$

с ребрами длины $\frac{1}{(9n)^k}$ при фиксированных k и q покрывают единичный куб E^n с точностью до разделяющих их щелей ширины $\frac{1}{3n (9n)^k}$.

Легко проверяется следующая

Л е м м а 1. Система всех кубиков $S_{k, i_1 \dots i_n}^q$ с постоянным k и переменными q и $i_1, \dots, i_n$ покрывает единичный куб E^n так, что каждая точка из E_n оказывается покрытой не менее $n + 1$ раз.

При помощи индукции по k может быть доказана следующая

Л е м м а 2. Можно подобрать константы $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ε_k так, что будут выполнены условия:

$$1) \quad \lambda_{k,i}^{pq} < \lambda_{k,i+1}^{pq} \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \frac{1}{2^k};$$

2) $\lambda_{k,i}^{pq} \leq \lambda_{k+1,i'}^{pq} \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$, если сегменты $A_{k,i}^q$ и $A_{k+1,i'}^q$ пересекаются;

3) сегменты $\Delta_{k, i_1 \dots i_n}^q = \left[\sum_p \lambda_{k,i_p}^{pq}, \sum_p \lambda_{k,i_p}^{pq} + n\varepsilon_k \right]$ при фиксированных k и q попарно не пересекаются.

Легко заметить, что из 1) и 3) вытекает

$$4) \quad \varepsilon_k \leq 1/2^k.$$

На основе указанных ранее свойств сегментов $A_{k,i}^q$ и свойств 1), 2) и 4) констант $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ϵ_k без большого труда доказывается следующая

Л е м м а 3. При фиксированных p и q требования

5) $\lambda_{k,i}^{pq} \leq \psi^{pq}(x) \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \epsilon_k$ при $x \in A_{k,i}^q$ однозначно определяют на E^1 непрерывную функцию ψ^{pq} .

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что по построению функции ψ^{pq} оказываются монотонно возрастающими. Это их свойство могло бы быть включено в формулировку нашей теоремы.

Из 5) и 3) вытекает

$$6) \sum_p \psi^{pq}(x_p) \in \Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in S_{k,i_1 \dots i_n}^q.$$

§ 2

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ χ^q

Установив существование функций ψ^{pq} и констант $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ϵ_k , обладающих свойствами 1) — 6), переходим к доказательству основной теоремы. Искомые функции $\chi^q(y)$ будут построены в виде

$$\chi^q = \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r^q,$$

где $\chi_0^q \equiv 0$, а χ_r^q для $r > 0$ будут определены с помощью индукции по r одновременно с натуральными k_r .

Мы будем при этом употреблять обозначения

$$f_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_q \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right], \quad (3)$$

$$M_r = \sup_{E^n} |f - f_r|. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$f_0 \equiv 0, \quad M_0 = \sup_{E^n} |f|.$$

Допустим, что непрерывные функции χ_{r-1}^q и номер k_{r-1} уже определены. Тем самым определена на E^n и непрерывная функция f_{r-1} . Так как диаметры кубиков $S_{k,i_1 \dots i_n}^q$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, то можно выбрать k_r столь большим, чтобы колебание разности $f - f_{r-1}$ на любом $S_{k_r,i_1 \dots i_n}^q$ не превосходило $\frac{1}{2n+2} M_{r-1}$.

Пусть $\xi_{k,i}^q$ — произвольные точки из соответствующих сегментов $A_{k,i}^q$. На сегменте $\Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q$ положим

$$\chi_r^q(y) = \chi_{r-1}^q(y) + \frac{1}{n+1} [f(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q)]. \quad (5)$$

Очевидно, что фиксированные таким образом значения функции χ_r^q подчинены неравенству

$$|\chi_r^q(y) - \chi_{r-1}^q(y)| \leq \frac{1}{n+1} M_{r-1}. \quad (6)$$

Вне сегментов $\Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q$ доопределим функцию χ_r^q произвольно, но с соблюдением этого же неравенства (6) и непрерывности.

Оценим теперь $f - f_r$ в произвольной точке $(x_1, \dots, x_n)$ из E^n . Очевидно, что

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f_r(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \dots, x_n) - \\ &- \sum_q \{ \chi_r^q [\sum_p \psi^{pq}(x_p)] - \chi_{r-1}^q [\sum_p \psi^{pq}(x_p)] \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сумму $\sum_q$ в (7) представим в виде $\Sigma' + \Sigma''$, где сумма Σ' распространена на некоторые $n+1$ значений q , для которых точка $(x_1, \dots, x_n)$ входит в какой-либо из кубиков $S_{k,i_1 \dots i_n}^q$ (такие существуют по лемме 1), а сумма Σ'' распространена на остающиеся n значения q . Для каждого слагаемого из Σ' получаем в силу (5)

$$\begin{aligned} \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] - \chi_{r-1}^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] &= \\ &= \frac{1}{n+1} [f(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \dots, \xi_{k,i_n}^q)] = \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x_1, \dots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \dots, x_n)] + \frac{\omega^q}{n+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$|\omega^q| \leq \frac{1}{2n+2} M_{r-1}. \quad (9)$$

Слагаемые из Σ'' оцениваются при помощи (6). Из (5) вместе с (8), (9) и (6) получаем

$$\begin{aligned} |f - f_r| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum' \omega^q + \sum'' (\chi_r^q - \chi_{r-1}^q) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2n+2} M_{r-1} + \frac{n}{n+1} M_{r-1} = \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как неравенство (10) справедливо в любой точке $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, то

$$M_r \leq \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}, \quad M_r \leq \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^r M_0. \quad (11)$$

Из (6) и (11) вытекает, что разности $\chi_r^q - \chi_{r-1}^q$ не превосходят по

абсолютной величине соответствующих членов абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{r'} \frac{1}{n+1} M_{r-1}.$$

Поэтому функции χ_r^q при $r \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к непрерывным предельным функциям χ^q .

Из соотношений (3) и (4) и оценки (11) предельным переходом при $r \rightarrow \infty$ получаем равенство (1), чем и заканчивается доказательство теоремы.

20 июня 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных.— ДАН СССР, 1956, т. 108, № 2, с. 179—182.
2. Арнольд В. И. О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных.— ДАН СССР, 1957, т. 114, № 4, с. 679—681.

57

О ЛИНЕЙНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ *

Два топологических векторных пространства E и E' называются изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное линейное и в обе стороны непрерывное соответствие.

Хорошо известно, что все топологические векторные пространства одной и той же конечной размерности n изоморфны между собой. В этом тривиальном случае размерность пространства $d(E)$ удовлетворяет требованиям:

а) если E изоморфно замкнутому линейному подпространству пространства E' , то $d(E) \leq d(E')$;

б) если E' линейно и непрерывно отображается на E , то $d(E) \leq d(E')$.

Банах в гл. XII своей известной монографии [1] дал обобщение понятия размерности на случай бесконечномерных векторных пространств, исходя из желания сохранить при этом свойство а). В § 1 настоящей заметки мы вводим линейную размерность $\delta(E)$, удовлетворяющую обоим требованиям а) и б). Классификация пространств по размерности получается при этом, естественно, несколько более бедной, чем у Банаха, но в некоторых отношениях более естествен-

* ДАН СССР, 1958, т. 120, с. 239—241.

ной. Для простоты и непосредственной связи с определением Банаха мы будем все рассматриваемые далее пространства предполагать пространствами типа F (см. [1, гл. III]).

Можно считать общеизвестным, как вводится метрика типа F в следующих пространствах, которые будут далее рассмотрены в качестве примеров:

$C_n^{(p)}$ — пространство действительных функций $f(x_1, \dots, x_n)$, определенных на n -мерном единичном кубе, имеющих непрерывные частные производные до порядка p включительно, с топологией равномерной сходимости вместе с частными производными до порядка p включительно;

$B_n^{(\infty)}$ — пространство действительных функций $f(x_1, \dots, x_n)$ от n действительных переменных $x_1, \dots, x_n$, периодических с периодом 2π по каждому переменному и имеющих непрерывные частные производные всех порядков, с топологией равномерной сходимости как самих функций, так и их частных производных любого порядка;

A_n^G — пространство функций $f(z_1, \dots, z_n)$ от n комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$, аналитических в ограниченной открытой области G комплексного n -мерного пространства, с топологией равномерной сходимости на каждом компакте $K \subseteq G$.

Традиции и опыт классического анализа заставляют считать, что пространства функций от большего числа переменных должны быть «богаче» элементами, чем пространства функций от меньшего числа переменных: если решение задачи зависит от «произвольной» функции одного переменного, то считают, что «произвол» в выборе решения меньше, чем если решение зависит от произвольной функции двух переменных, и т. д. Мы увидим далее, что в случае аналитических функций такие представления находят себе опору в соответствующих неравенствах линейных размерностей (теоремы 4 и 10). Этот результат мы и рассматриваем как наиболее интересный в настоящей заметке. Наоборот, для пространства функций конечной гладкости указанное ожидание, основанное на опыте классического анализа, не находит себе подтверждения в свойствах линейной размерности. Например, из результатов, изложенных в гл. XII монографии Банаха [1], легко извлечь, что все пространства $C_n^{(p)}$ имеют независимо от значений n и p одну и ту же банахову размерность $\dim_l$. Так как из равенства $\dim_l(E) = \dim_l(E')$ всегда вытекает $\delta(E) = \delta(E')$, то то же самое относится и к вводимой нами размерности $\delta(E)$.

Обращение к пространствам бесконечно дифференцируемых функций не меняет дела. Например, все пространства $B_n^{(\infty)}$ имеют одну и ту же размерность $\dim_l$ и одну и ту же размерность δ , так как верна следующая

Т е о р е м а 1. Все пространства $B_n^{(\infty)}$, $n = 1, 2, \dots$, изоморфны (см. [5]).

§ 1

ЛИНЕЙНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ $\delta(E)$

Следуя Банаху, мы введем функцию δ , определив смысл неравенства

$$\delta(E) \leq \delta(E'). \quad (1)$$

Этим функция δ определяется с точностью до сохраняющего порядок взаимно однозначного отображения частично упорядоченного множества ее значений Δ на новое частично упорядоченное множество Δ' . По определению (1) обозначает, что существует замкнутое линейное подпространство E'' пространства E' , отображимое линейно и непрерывно на пространство E . Необходимая для корректности определения функции транзитивность определенного таким образом отношения (1) легко доказывается.

Отметим здесь одно из свойств размерности $\delta(E)$, отсутствующее у банаховой размерности $\dim_l(E)$.

Теорема 2. Если пространства E и E' банаховы (типа B) и рефлексивные, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$\delta(\bar{E}) \leq \delta(\bar{E}') \quad (2)$$

между размерностями сопряженных пространств.

Из теоремы 2 и результатов гл. XII монографии Банаха [1] можно легко извлечь ряд результатов, относящихся к размерности $\delta(E)$ банаховых пространств, на которых мы не останавливаемся. Вместо этого мы сформулируем здесь несколько теорем о размерности δ пространств аналитических функций.

Теорема 3. Если G и G' — две ограниченные конечносвязные области на комплексной плоскости, то

$$\delta(A_1^G) = \delta(A_1^{G'}).$$

Обобщение теоремы 3 на функции многих переменных пока доказано только в следующей форме. Пусть $G_1, \dots, G_n$ — ограниченные конечносвязные области на комплексной плоскости и $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$; тогда имеет место следующая

Теорема 3а. Размерность $\delta(A_n^G) = \alpha_n$ не зависит от выбора областей $G_1, G_2, \dots, G_n$.

Для введенной в теореме 3а размерности α_n верна

Теорема 4. Если $n < n'$, то $\alpha_n < \alpha_{n'}$.

Размерность $\delta(E)$ занимает крайнее положение среди всех линейных размерностей, удовлетворяющих условиям а) и б).

Теорема 5. Любая функция $d(E)$, удовлетворяющая условиям а) и б), представима в виде

$$d(E) = f[\delta(E)],$$

причем из $\delta(E) \leq \delta(E')$ вытекает $d(E) \leq d(E')$.

Среди таких функций $d(E)$, подчиненных $\delta(E)$ и более бедных в смысле возможности различения пространств по размерности, мы рассмотрим лишь одну, которую назовем «аппроксимативной размерностью». При ее помощи и доказывается теорема 4, являющаяся непосредственным следствием теоремы 3а и приводимой далее теоремы 10.

§ 2

АППРОКСИМАТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ $d_a(E)$

Каждому пространству E типа F поставим в соответствие класс $\Phi(E)$ функций $\varphi(\varepsilon)$, определенных для $\varepsilon > 0$ при помощи условия $\varphi \in \Phi(E)$, если для любого компакта $K \subset E$ и любой открытой окрестности U нулевого элемента θ в E существует такое ε_0 , что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно найти $N \leq \varphi(\varepsilon)$ точек $x_1, \dots, x_N$ пространства E так, что $K \subset \bigcup_{1 \leq m \leq N} (x_m + \varepsilon U)$.

Два пространства E и E' имеют одну и ту же аппроксимативную размерность $d_a(E) = d_a(E')$, если $\Phi(E) = \Phi(E')$.

По определению имеет место неравенство $d_a(E) < d_a(E')$, если $\Phi(E) \supset \Phi(E')$.

Аналогично определяются отношения $>$, $\leq$, $\geq$, $\parallel$ (несравнимость).

Аппроксимативная размерность может быть во многих случаях вычислена при помощи методов, примыкающих к работам, посвященным ε -энтропии и ε -емкости метрических пространств (см. [2—4]). Приводим некоторые простейшие результаты в этом направлении.

Т е о р е м а 6. Для n -мерного пространства E^n при конечном n множество Φ определяется условием $\varphi \in \Phi$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\varepsilon^n \varphi(\varepsilon)) = \infty.$$

Т е о р е м а 7. Для бесконечномерного банахова пространства E множество Φ пусто.

Таким образом, все бесконечномерные банаховы пространства имеют общую размерность $d_a(E) = z$, которая является максимальной среди размерностей $d_a(E)$. Нам кажется, что этот результат не должен рассматриваться как обстоятельство, компрометирующее размерность d_a . Она является содержательным понятием для пространств, в известном смысле более близких к конечномерным, какими являются приобретающие все большее значение в анализе счетнонормированные пространства такого типа, как $B_n^{(\infty)}$ и A_n^G .

Т е о р е м а 8. Аппроксимативная размерность пространства $B_n^{(\infty)}$ не зависит от n и определяется условием $\varphi \in \Phi$, если существует такое $q > 0$, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\varepsilon^q \log \varphi(\varepsilon)) = 0.$$

Т е о р е м а 9. *Аппроксимативная размерность a_s пространства A_s^G (G — произвольная ограниченная открытая область s -мерного комплексного пространства) не зависит от выбора области G и определяется условием $\varphi \in \Phi$, если*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \varphi(\varepsilon)}{(\log(1/\varepsilon))^{s+1}} = \infty.$$

Из теоремы 9 непосредственно вытекает

Т е о р е м а 10. *Если $s < s'$, то $a_s < a_{s'}$.*

18 февраля 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach S. Operations linéaires. Paris, 1933.
2. Колмогоров А. Н. — ДАН СССР, 1956, т. 108, № 3, с. 385—388.
3. Тихомиров В. М. — ДАН СССР, 1957, т. 117, № 2, с. 191—194.
4. Витушкин А. Г. — ДАН СССР, 1957, т. 117, № 5, с. 745—747.
5. Grothendieck A. — Mem. Amer. Math. Soc., 1955, N 16.

58

УТОЧНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА *

В программу примыкающего к нашему коллоквиуму симпозиума включен доклад А. М. Обухова ¹. Один из разделов этого доклада посвящен уточнению представлений о локальной структуре турбулентности и имеет более широкий интерес для всех специалистов в области статистической теории турбулентности. По просьбе некоторых участников коллоквиума я хочу изложить здесь более подробно происхождение этих уточнений и дать изложение последних результатов А. М. Обухова в этой области.

Разработанные в 1939—1941 гг. мною [1—3] и А. М. Обуховым [4, 5] представления о локальном строении турбулентности при больших числах Рейнольдса имели своей наглядной основой идею Ричардсона о существовании в турбулентном потоке вихрей всех возможных масштабов

$$l < r < L$$

* In: Mécanique de la turbulence; Colloq. Intern. CNRS, Marseille, août — sept. 1961/На рус. и фр. яз. Paris, 1962, p. 447—458.

¹ Some specific features of atmospheric turbulence. — J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, N 1, p. 77—81.

между «внешним масштабом» L и «внутренним масштабом» l и некоторого единообразного механизма передачи энергии от вихрей более крупного масштаба к вихрям более мелкого масштаба.

Эти представления, к которым пришли независимо и ряд других авторов, получили весьма широкое распространение. Однако еще вскоре после их возникновения Л. Д. Ландау заметил, что они не учитывают одного обстоятельства, которое непосредственно вытекает из предположений о существенно случайном, хаотическом характере механизма передачи энергии от более крупных вихрей к более мелким: с возрастанием отношения $L : l$ изменчивость диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2$$

должна неограниченно возрастать. Более точно, естественно предположить, что дисперсия логарифма величины ε имеет при $L : l \gg 1$ асимптотику вида

$$\sigma_{\log \varepsilon}^2 \sim A + k' \log (L/l), \quad (1)$$

где k' — некоторая универсальная константа.

Лишь недавно А. М. Обухов наметил путь к уточнению результатов [1–5] с учетом замечания Л. Д. Ландау. Этот путь опирается на рассмотрение диссипации

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|\mathbf{h}| \leq r} \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{h}, t) d\mathbf{h},$$

осредненной по сфере радиуса r , и допущение, что при большом отношении $L : r$ логарифм величины $\varepsilon_r(\mathbf{x}, t)$ имеет нормальное распределение. Естественно считать, что дисперсия логарифма $\varepsilon_r(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\sigma_r^2(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) + 9k \log (L/r), \quad (2)$$

где k — универсальная константа, а $A(\mathbf{x}, t)$ зависит от макроструктуры потока.

Мое изложение концепции А. М. Обухова будет примыкать непосредственно к [1] и опираться на соответствующее видоизменение двух гипотез подобия из [1]. В виде третьей гипотезы будет использована уже сформулированная гипотеза нормальности распределения логарифма ε_r с формулой (2) для дисперсии этого логарифма.

Известная формула

$$B_{dd}(r) = Cr^{2/3} \bar{\varepsilon}^{-2/3}$$

из [1] при новых допущениях заменяется формулой

$$B_{dd}(r) = C(\mathbf{x}, t) r^{2/3} \bar{\varepsilon}^{-2/3} (L/r)^{-k}, \quad (3)$$

где k — константа из (2), а множитель $C(x, t)$ зависит от макроструктуры потока. Вместо предложения о постоянстве асимметрии

$$S(r) = \frac{B_{add}(r)}{[B_{dd}(r)]^{3/2}}$$

при $l \ll r \ll L$, сформулированного в [2], получим теперь

$$S(r) = S_0 (L/r)^{(1/2)k}, \quad (4)$$

где коэффициент S_0 тоже зависит от макроструктуры потока.

Свяжем с масштабом длины r и точкой (x, t) масштабы времени и скорости

$$T_r = r^{2/3} \varepsilon_r^{-1/3}, \quad U_r = r^{1/3} \varepsilon_r^{1/3}$$

и «внутренний масштаб» длины

$$l_r = \nu^{3/4} \varepsilon_r^{-1/4}.$$

Очевидно, что образованное из U_r и r число Рейнольдса выражается через отношение $r : l_r$ по формуле

$$Re = U_r r / \nu = (r/l_r)^{4/3}. \quad (5)$$

Координаты x'_α, t' точки (x', t') из окрестности точки (x, t) выразим через безразмерные ξ_α и τ :

$$x'_\alpha = x_\alpha + \xi_\alpha r, \quad t' = t + \tau T_r.$$

Введем безразмерные относительные скорости

$$V_\alpha(\xi, \tau) = \frac{U_\alpha(x + \xi r, t + \tau T_r) - U_\alpha(x, t)}{U_r}.$$

Первая гипотеза подобия. Если $r \ll L$, то при заданных $\xi_\alpha^{(k)}, \tau^{(k)}$, $\alpha = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, n$, условное распределение $3n$ величин

$$V_\alpha(\xi_\alpha^{(k)}, \tau^{(k)})$$

при фиксированном значении

$$Re_r = Re$$

зависит только от Re и одинаково во всех турбулентных потоках.

Вторая гипотеза подобия. При

$$Re \gg 1$$

указанные в первой гипотезе распределения не зависят от Re .

Безусловные математические ожидания (средние) будем обозначать чертой сверху. Так как $\bar{\varepsilon}$ почти постоянно в областях, малых по сравнению с внешним масштабом L , то при $r \ll L$ можно считать

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon.$$

Рассмотрим разность продольных компонент скоростей в двух точках на расстоянии r :

$$\Delta_{dd}(r) = U_1(x+r, x_2, x_3, t) - U_1(x_1, x_2, x_3, t).$$

Легко видеть, что

$$\Delta_{dd}(r) = V_1(1, 0, 0, 0) r^{1/2} \varepsilon_r^{1/2}. \quad (7)$$

Если

$$r \gg l,$$

где l верхняя грань (за исключением случаев пренебрегаемо мало вероятных) внутреннего масштаба l_r , то из (6), (7) и гипотез I и II вытекает, что

$$[\overline{\Delta_{dd}(r)}]^3 = C r \bar{\varepsilon}, \quad (8)$$

где C — абсолютная константа.

Теперь следует воспользоваться отмеченной А. М. Обуховым формулой, выражающей моменты величин, имеющих логарифмически нормальный закон распределения. Эта формула такова

$$\bar{\xi}^p = \exp(p m + p^2 \sigma^2 / 2), \quad (9)$$

где m и σ^2 — среднее и дисперсия $\log \xi$. Из (2) и (7)–(9) вытекает

$$[\overline{\Delta_{dd}(r)}]^p = C_p(\mathbf{x}, t) (r \bar{\varepsilon})^{p/3} (L/r)^{kp(p-3)/2}; \quad (10)$$

в частности, при $p = 2$

$$\overline{\Delta_{dd}^2(r)} = C_2(\mathbf{x}, t) (r \bar{\varepsilon})^{2/3} (L/r)^{-k},$$

т. е. формула (3).

Так как сохраняет силу указанная в [2] формула

$$B_{ddd}(r) = - (4/5) \bar{\varepsilon} r,$$

то из (3) вытекает (4).

Возможно освободить наше изложение от специального выбора лежащей в основе рассмотрений А. М. Обухова величины $\varepsilon_r(\mathbf{x}, t)$. Две гипотезы подобия формулируются тогда так:

Первая гипотеза подобия. Если $|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}| \ll \ll L$, $k = 0, 1, \dots, n$, то условное распределение $3n$ величин

$$\frac{U_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) - U_\alpha(\mathbf{x})}{U_\alpha(\mathbf{x}^{(0)}) - U_\alpha(\mathbf{x})}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

зависит только от числа Рейнольдса

$$Re = \frac{|U(\mathbf{x}^{(0)}) - U(\mathbf{x})| |\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}|}{\nu}.$$

Вторая гипотеза подобия. При
 $Re \gg 1$

указанные в первой гипотезе распределения не зависят от Re .

Существенное содержание дополнительных допущений А. М. Обухова может быть сформулировано так:

Третья гипотеза. Две группы величин (11) стохастически независимы, если в первой группе

$$|x^{(k)} - x| \geq r_1,$$

во второй

$$|x^{(k)} - x| \leq r_2$$

и $r_1 \gg r_2$.

Естественно, что при желании извлечь из третьей гипотезы строго математически нужную нам логарифмическую нормальность распределений разностей скоростей и формулу для дисперсий логарифмов этих разностей, аналогичную (1), (2), необходимо уточнить формулировку этой гипотезы.

1 сентября 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
2. Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.
3. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 19—21.
4. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 22—24.
5. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1941, т. 5, № 4—5, с. 453—466.

П. С. АЛЕКСАНДРОВ И ТЕОРИЯ δs -ОПЕРАЦИЙ*

Множества точек числовой прямой, допускающие сколько-нибудь простое определение, либо конечны, либо счетны, либо имеют мощность континуума. Вопрос о том, будет ли это верно в применении к любому подмножеству числовой прямой, составляет, как известно, *проблему континуума*. В начале XX в. казалось естественным искать решение проблемы континуума, рассматривая все более

* УМН, 1966, т. 21, вып. 4, с. 275—278.

О п р е д е л е н и е 1. Операция

$$E = \Phi (E_1, \dots, E_s, \dots)$$

называется *аналитической*, если из равносильности включений

$$x \in E_s \Leftrightarrow y \in E_s!$$

(при любом s) вытекает равносильность включений

$$x \in E \Leftrightarrow y \in E,$$

т. е. если принадлежность точки x к множеству E полностью определяется номерами тех E_s , в которые входит точка x .

О п р е д е л е н и е 2. Операция

$$E = \Phi (E_1, \dots, E_s, \dots)$$

называется *положительной*, если из

$$E'_s \subset E_s \quad (\text{при всех } s)$$

вытекает

$$\Phi (E'_1, \dots, E'_s, \dots) \subset \Phi (E_1, \dots, E_s, \dots).$$

Любая аналитическая операция может быть заменена аналитической положительной операцией над множествами E_s и их дополнениями. Класс же аналитических положительных операций совпадает с классом δs -операций, т. е. операций, которые могут быть записаны в виде

$$\Phi (E_1, \dots, E_s, \dots) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \bigcap_{s \in S} E_s,$$

где $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств натурального ряда.

В пространстве подмножеств натурального ряда существует естественная топология¹. Рассмотрения, проведенные П. С. Александровым в заметке [1], по существу обозначают следующее.

1. При записи конструкции (1) в виде δs -операции

$$E = \Phi (F_1, \dots, F_s, \dots) = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} \bigcup_{s \in S} F_s \quad (2)$$

множество $\mathfrak{S}$ оказывается (при наиболее естественном его построении) замкнутым.

2. Если множество последовательностей в формуле (2) замкнуто, то операция Φ из замкнутых множеств F_s производит множество E , которое либо конечно, либо счетно, либо содержит совершенное множество.

¹ Эта топология задается, например, расстоянием

$$\rho (E_1, E_2) = \sum_{n \in E_1 \Delta E_2} \frac{1}{n^2},$$

где $E_1 \Delta E_2$ обозначает симметрическую разность множеств E_1 и E_2 .

Естественно возникает вопрос, какие множества можно получить, применяя δ -операции с замкнутым $\mathfrak{S}$ к: а) замкнутым множествам, б) открытым множествам, в) борелевским множествам? Ответ во всех случаях один: *суслинские множества и только их*. При этом нет необходимости пользоваться всеми возможными δ -операциями с замкнутыми множествами $\mathfrak{S}$. Можно указать одну такого рода стандартную δ -операцию, которая из замкнутых (открытых) множеств производит все суслинские множества. Хорошо известно, что такую операцию можно записать более обозримым образом, если нумеровать исходные множества не натуральными числами, а «кортежами» из натуральных чисел

$$s = \{s_1, \dots, s_n\}.$$

Интересующая нас A -операция определяется формулой

$$A\{E_s\} = \bigcup E_{s_1} \cap E_{s_1 s_2} \cap E_{s_1 s_2 s_3} \dots$$

где суммирование распространяется на все последовательности $s_1 s_2 s_3 \dots$. По этой операции суслинские множества называют также A -множествами.

Определение A -операции по существу содержится в той же заметке П. С. Александрова [1]. Произвольное борелевское множество E получается в этой заметке «с точностью до счетного множества» из «канонических множеств» μ . Так как эти канонические множества, являясь конечными пересечениями исходных множеств $E_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$, замкнуты, а пренебрежение счетным множеством несущественно (легко избегается), то тем самым было установлено, что любое борелевское множество получается A -операцией из замкнутых множеств. К сожалению, более систематического изложения с явным определением A -операции и формулировкой теоремы о том, что каждое борелевское множество является A -множеством, П. С. Александров не опубликовал. Естественно возник вопрос о том, является ли класс A -множеств более широким, чем класс борелевских множеств, или же он существенно шире. В том же 1916 г. вопрос был решен М. Я. Суслиным, который показал, что существуют A -множества, не являющиеся борелевскими, что и привело к развитию самостоятельной теории суслинских множеств. М. Я. Суслиным, в частности, было установлено, что, вообще суперпозиция A -операции по схеме

$$E = A\{E_s\}, \quad E_s = A\{E_s^r\}$$

приводит только к множествам E , которые могут быть получены из множества E_s^r (взятыми с новыми номерами и с повторениями) однократной A -операцией. В общей теории δ -операций такие операции называются *нормальными*.

В работе [2] П. С. Александров ввел еще одну δ -операцию над множествами, названную им Γ -операцией. Чтобы компактно высказать

ее определение, следует заметить, что каждому кортежу

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

соответствует множество Δ_s числовых последовательностей

$$s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} \dots,$$

имеющих начало $s_1 s_2 \dots s_n$. Множество кортежей $\mathfrak{S}$ называется Γ -цепью, если соответствующие множества Δ_s покрывают все множество числовых последовательностей (которое в такого рода вопросах принято называть *бэровским пространством*). Γ -операция определяется формулой

$$E = \bigcup_{\mathfrak{S} \in \Gamma} \bigcap_{s \in \mathfrak{S}} E_s,$$

где Γ -множество всех Γ -цепей.

П. С. Александров устанавливает формулу

$$\overline{A \{E_s\}} = \Gamma \{\bar{E}_s\}, \quad (3)$$

где $\bar{E}$ обозначает дополнение к множеству E . По существу здесь П. С. Александров для частного случая A -операции вводит «дополнительную» к ней Γ -операцию. Общее определение δs -операции $\bar{\Phi}$, дополнительной к данной δs -операции Φ , и обобщающая (3) формула

$$\overline{\Phi(E_1, \dots, E_s, \dots)} = \bar{\Phi}(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_s, \dots)$$

лежат в основе моей работы [6].

В заметке [3] П. С. Александров пользуется тем, что Γ -операция приводит к «положительному» определению множеств, дополнительных к A -множествам, и доказывает топологическую инвариантность этого класса множеств.

Теория δs -операций далее разрабатывалась мною, Хаусдорфом (второе издание «Оснований теории множеств»), Канторовичем, Ливенсоном, Ляпуновым и многими другими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandroff P. Sur la puissance des ensembles mesurables B .— C. r. Acad. sci. Paris, 1916, vol. 162, p. 323—325.
2. Alexandroff P. Sur les ensembles complémentaires aux ensembles (A) .— Fund. math., 1924, vol. 5, p. 160—165.
3. Alexandroff P. Sur l'invariance topologique des ensembles complémentaires aux ensembles (A) .— Mat. сб., 1924, т. 31, с. 310—318.
4. Hausdorff F. Die Mächtigkeit der Borelscher Mengen.— Math. Ann., 1916, Bd. 77, S. 430—437.
5. Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets.— Fund. math., 1932, vol. 18, p. 234—279.
6. Колмогоров А. Н. Об операциях над множествами.— Mat. сб., 1928, т. 35, с. 415—421.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ *

§ 1

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Просматривая литературу последних лет по математическому моделированию динамики популяций, я убедился в том, что при большом развитии этого направления исследований в одном отношении работы последних лет остаются на уровне знаменитого первого опыта Вольтерра: все исследование ставится в зависимость от специального и неизбежным образом произвольного выбора математических выражений для закономерностей, управляющих динамикой популяции. Между тем в других областях применений математики давно понята возможность и важность получения качественных результатов из качественных предпосылок. Попытка переработать в этом направлении вольтерровскую теорию борьбы за существование между двумя видами (хищниками и жертвами) была предпринята в моей работе [1], опубликованной еще в 1936 г. Ссылки на эту мою работу, опубликованную как отклик на одну публикацию Вольтерра в том же мало-распространенном итальянском журнале, где появилась статья Вольтерра, я встречал в позднейшей литературе, но сама идея получения содержательных выводов из чисто качественных предпосылок осталась неиспользованной. Это побуждает меня дать новое, переработанное изложение работы [1].

Хорошо известно, что сам замысел схематического описания временной эволюции численностей $N_i(t)$, $i = \overline{1, s}$, взаимодействующих видов при помощи системы дифференциальных уравнений

$$dN_i/dt = F_i(N_1, \dots, N_s), \quad i = \overline{1, s}, \quad (1)$$

весьма несовершенен. Аппарат дифференциальных уравнений типа (1) в динамике популяций плох уже в силу того обстоятельства, что обычно значительные изменения численностей $N_i(t)$ происходят за промежутки времени, соизмеримые с длительностью жизни отдельных особей, что делает неизбежным учет возрастного состава популяций. Например, как бы мы ни усовершенствовали вольтерровскую теорию в рамках описания динамики популяции уравнениями типа (1), применение ее к объяснению трех-четырёхлетних циклов колебания численности птиц, отмеченных в наблюдениях Северцева, остается не вполне оправданным из-за только что указанного обстоятельства. Но начинать надо с простого. Если данная публикация будет содей-

* Проблемы кибернетики, 1972, т. 25, вып. 2, с. 101—106.

ствовать появлению работ, где аналогичному качественному исследованию подвергнутся более близкие к действительности схемы, то ее назначение будет выполнено.

§ 2

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Для численности жертв $N_1(t)$ и численности хищников $N_2(t)$ Вольтерра предложил уравнения

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2. \quad (2)$$

Условный характер сделанных допущений виден хотя бы из того, что коэффициент размножения хищников $K_2 = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$ возрастает до бесконечности с возрастанием числа жертв: при наличии достаточного числа зайцев численность волков будет удваиваться каждый день или даже каждый час. По существу уравнения (2) являются лишь простейшим с математической точки зрения примером уравнений вида

$$\frac{dN_1}{dt} = K_1(N_1, N_2) N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = K_2(N_1, N_2) N_2, \quad (3)$$

где коэффициент размножения жертв K_1 убывает с возрастанием числа хищников, меняя знак с положительного на отрицательный, а коэффициент размножения хищников K_2 растет с ростом числа жертв, меняя знак с отрицательного на положительный.

К сожалению, наиболее интересный качественный вывод теории Вольтерра о том, что, за исключением стационарного случая $N_1 = \varepsilon_2/\gamma_2$, $N_2 = \varepsilon_1/\gamma_1$, любые начальные условия $N_1(0)$, $N_2(0)$ приводят к *периодическим* колебаниям численностей $N_1(t)$ и $N_2(t)$ с амплитудой, зависящей от начальных условий, является следствием именно выбранной Вольтерра специальной формы уравнений (2). В работе [1] я сделал попытку исследования поведения решений системы (3) при некоторых *качественных* предположениях о характере функций $K_1(N_1, N_2)$ и $K_2(N_1, N_2)$. Более подробно в § 3 мы исследуем поведение решений системы

$$\frac{dN_1}{dt} = K_1(N_1) N_1 - L(N_1) N_2, \quad \frac{dN_2}{dt} = K_2(N_1) N_2, \quad (4)$$

которая мне представляется достаточно реалистической моделью возможных соотношений между двумя видами. Переход от общих уравнений (3) к уравнениям (4) интерпретируется содержательно следующим образом.

1) Предполагается, что хищники не «взаимодействуют» друг с другом, т. е. коэффициент размножения хищников K_2 и число жертв L , истребляемых в единицу времени одним хищником, не зависят от N_2 .

2) Предполагается, что прирост за малые промежутки времени числа жертв при наличии хищников равен приросту в отсутствие хищников минус число жертв, истребленных хищниками. Относительно входящих в уравнение функций $K_1(N_1)$, $K_2(N_1)$, $L(N_1)$ мы сделаем лишь весьма естественные допущения относительно качественного характера их зависимости от N_1 .

§ 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (4)

Ради возможности применения без лишних осложнений теории дифференциальных уравнений мы будем предполагать, что функции $K_1(N_1)$, $K_2(N_1)$, $L(N_1)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Естественно считать их определенными на положительной полуоси $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$. Необходимо, однако, одна оговорка. При $N_2 = 0$ первое уравнение (4) переходит в естественное уравнение $dN_1/dt = K_1(N_1)N_1$ эволюции численности жертв в отсутствие хищников. Но при $N_1 = 0$ первое из уравнений (4) привело бы в случае $L(0) > 0$ к нелепому выводу, что число жертв после перехода через нуль должно становиться отрицательным. Естественно считать, что по достижении точки квадранта, лежащей на оси N_2 , первое уравнение (4) перестает действовать, число жертв остается постоянно равным нулю, а эволюция числа хищников продолжает следовать второму уравнению (4).

Сформулируем теперь еще три ограничения, которые мы накладываем на выбор функций $K_1(N_1)$, $K_2(N_1)$, $L(N_1)$.

3) $dK_1/dN_1 < 0$, $K_1(0) > 0 > K_1(\infty) > -\infty$. В существенном это ограничение состоит в том, что коэффициент размножения жертв в отсутствие хищников монотонно убывает с возрастанием численности жертв, переходя от положительных значений к отрицательным. Такое допущение, отражающее ограниченность пищевых и иных ресурсов, необходимых для существования жертв, кажется достаточно естественным.

4) $dK_2/dN_1 > 0$, $K_2(0) < 0 < K_2(\infty)$. Это ограничение в существенном состоит в том, что с ростом численности жертв коэффициент размножения хищников возрастает, переходя от отрицательных значений (в обстановке, когда нечем питаться) к положительным.

5) $L(N_1) > 0$ при $N_1 > 0$.

Что касается предельного значения $L(N_1)$ при $N_1 = 0$, мы предполагаем сохранить обе возможности: $L(0) = 0$ и $L(0) > 0$. Первая из них отражает в идеализированном виде такую обстановку, когда небольшое число жертв может укрываться в местах, недоступных для охоты за ними хищников, и там пережить период чрезмерного размножения хищников. Заметим, что в случае Вольтерра $K_1(N_1) = \varepsilon$, $K_2(N_1) = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, $L(N_1) = \gamma_1 N_1$, т. е. нарушено наше требование отрицательности $K_1(N_1)$ при достаточно больших N_1 .

Найдем особые точки системы (4) в положительном квадранте. Легко видеть, что их две или три: 1) точка $(0, 0)$; 2) точка $(A, 0)$, где A определяется из уравнения $K_1(A) = 0$; 3) точка (B, C) , где B и C определяются из уравнений $K_2(B) = 0$, $K_1(B)B - L(B)C = 0$. Последняя третья точка помещается в положительном квадранте и отлична от второй лишь в случае $K_1(B) > 0$, т. е. $B < A$.

Обычным способом исследуем характер этих особых точек, составляя линеаризованные уравнения для $\zeta = N_1 - N_1^0$, $\eta = N_2 - N_2^0$, где N_1^0 , N_2^0 — координаты особой точки.

I) В точке $(0, 0)$ получим

$$\frac{d\zeta}{dt} = K_1(0)\zeta - L(0)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = K_2(0)\eta.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = K_1(0)$, $\lambda_2 = K_2(0)$ действительные и разных знаков, так что точка является седлом. Угловые коэффициенты сепаратрис находятся из уравнения $L(0)\kappa^2 - [K_1(0) - K_2(0)]\kappa = 0$. Одна сепаратриса (с $\kappa_1 = 0$) заранее ясна — это ось N_1 , вторая имеет угловой коэффициент $\kappa_2 = [K_1(0) - K_2(0)]/L(0)$. Если $L(0) = 0$, то это ось N_2 . Первая сепаратриса входит в седло, вторая — выходит из него.

II) В точке $(A, 0)$ линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = K_1'(A)A\zeta - L(A)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = K_2(A)\eta.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = K_1'(A)A$, $\lambda_2 = K_2(A)$.

IIa) Если $B < A$, то $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$ и особая точка есть седло.

Угловые коэффициенты сепаратрис равны $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = [K_1'(A)A - K_2(A)]/L(A) < 0$. С угловым коэффициентом κ_2 из седла выходит сепаратриса, направляющаяся внутрь нашего квадранта.

IIб) Если $B > A$, то $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$ и особая точка есть устойчивый узел.

III) В точке (B, C) при $B < A$ получаем линеаризованные уравнения

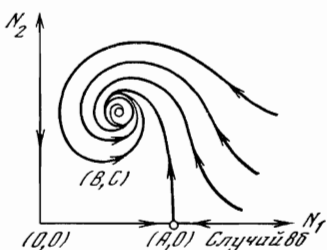
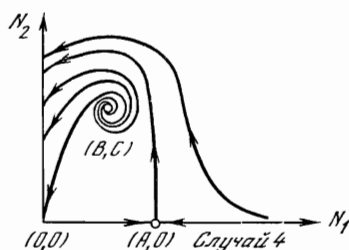
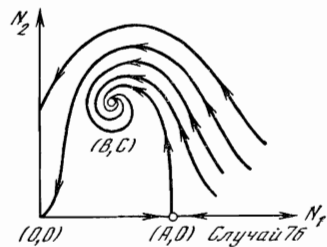
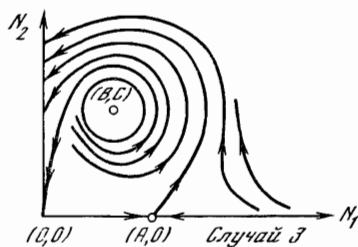
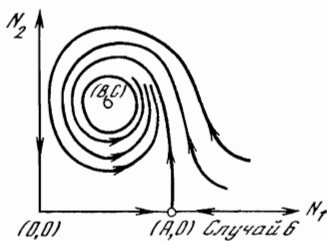
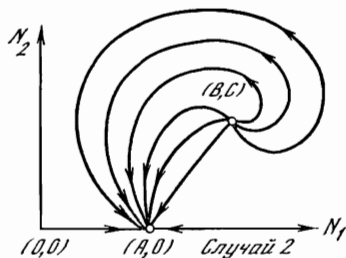
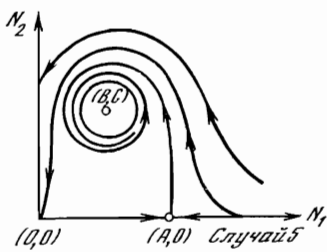
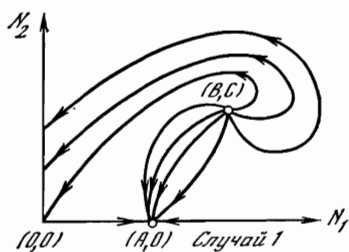
$$\frac{d\zeta}{dt} = -\sigma\zeta - L(B)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = CK_2'(B)\zeta,$$

где $\sigma = -K_1(B) - K_1'(B)B + L'(B)C$. Детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sigma & -L(B) \\ CK_2'(B) & 0 \end{vmatrix} = CK_2'(B)L(B)$$

положителен. Поэтому особая точка есть фокус или узел. Устойчивость зависит от знака σ : если $\sigma > 0$, то точка устойчива, если $\sigma < 0$, то неустойчива. Фокус появляется в случае комплексных корней уравнения $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$, а узел — в случае действительных.

В предположении $B < A$ исследуем еще судьбу сепаратрисы, выходящей вверх из точки $(A, 0)$. Легко видеть, что при наших допу-



щениях траектории не могут уходить в бесконечность. Поэтому возможны в существенном три случая: интересующая нас сепаратриса α) пересекает ось N_2 , β) наматывается на предельный цикл, γ) входит в точку (B, C) . В случае α) следует еще проследить происхождение сепаратрисы, входящей в точку $(0, 0)$. Она может: α_1) сматываться с предельного цикла, α_2) выходить из точки (B, C) . В случаях β) и γ) сепаратриса, входящая в $(0, 0)$, должна приходить из беско-

нечности. В предположении $L(0) = 0$ случай α) отпадает. В итоге получаем такую классификацию:

$B > A$		$L(0) > 0$ $L(0) = 0$	
		1	2
$B < A$	$\alpha 1$	3	—
	$\alpha 2$	4	—
	β	5	6
	γ	7	8

с узлом в точке (B, C) . Легко понять, что в случае 4 точка (B, C) неустойчива, а в случаях 7 и 8 — устойчива. Случаи 3, 5 и 6, исходя из наших допущений, не анализируются до конца: поведение траекторий внутри предельного цикла может быть довольно сложным. Но весьма вероятно, что практически достаточно ограничиться случаем, когда внутри обнаруженного нашим анализом предельного цикла *нет других предельных циклов и вообще замкнутых траекторий*. В этом

случае остается еще указать, будет точка (B, C) фокусом (подслучаи 3а, 5а, 6а) или узлом (подслучаи 3б, 5б, 6б). Восемь случаев различного качественного поведения решений изображены на рисунках, соответствующих прилагаемой таблице. Кроме оговоренных выше случаев наличия внутри основного предельного цикла дополнительных замкнутых траекторий, мы пропустили еще переходные (не «грубые» в смысле Андронова — Понтрягина) случаи, которые могут возникнуть лишь в исключительных обстоятельствах. Например, сепаратриса, выходящая из $(A, 0)$, может случайно при своем продолжении оказаться сепаратрисой, входящей в точку $(0, 0)$. Если это так, то качественная картина остается похожей на случаи 1 и 2.

15 апреля 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A. N. Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza.— G. Ist. ital. attuar., 1936, vol. 7, p. 74—80.

К РАБОТАМ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ*А. Н. Колмогоров*

Наиболее живые и требующие разработки разделы теории множеств и теории функций распадались по Николаю Николаевичу Лузину на «метрику» и «дескрипцию». К «метрике» относились теория интеграла, тригонометрические ряды, граничные свойства аналитических функций и т. п. К «дескрипции» относились классификация функций по классам Бэра, классификация множеств по Борелю, аналитические множества и т. д. вплоть до самой континуум-проблемы. В применении к своим ученикам Н. Н. Лузин имел определенное представление о том, кто из них предназначен для работ по «метрике» и кто — для работ по «дескрипции». Мне было предназначено заниматься «метрикой». Это свое предназначение я и выполнил с некоторой широтой в следующие годы (см. работы № 1—8, 10—12, 14, 16, 21 и др. наст. изд.).

В 1921—1923 гг. Вячеслав Васильевич Степанов вел семинар по теории тригонометрических рядов, в котором в качестве самых младших участников занимались мы с Глебом Александровичем Селиверстовым. Естественно, что особое внимание обращалось на проблемы, поставленные Николаем Николаевичем Лузиным. Среди таких проблем находилась и задача о том, сколь медленно могут убывать коэффициенты ряда Фурье — Лебега. Решение (см. работу № 2 наст. изд.) оказалось очень простым для рядов по косинусам, так что мне неясно, почему оно не было найдено еще до меня. Однако, узнав об этом моем достижении, Н. Н. Лузин с некоторой торжественностью пригласил меня в число своих учеников, и я стал приходить к нему еженедельно в часы, отведенные для одной из групп учеников.

Все направление моей работы по тригонометрическим и ортогональным рядам выросло из занятий в семинаре В. В. Степанова. С точки зрения преодоления трудностей, по-видимому, первое место принадлежит работе, где построен расходящийся почти всюду ряд Фурье — Лебега (см. работу № 1 наст. изд.). Довольно долго я работал надвое, стараясь поочередно то построить пример, то доказать его невозможность. Последним этапом была неделя непрерывных размышлений, закончившаяся возникшей внезапно конструкцией. Немного позднее без больших усилий возник аналитический вариант первоначальной чисто геометрической идеи, что позволило усилить первоначальный результат и построить ряд, расходящийся всюду.

От всего периода занятий тригонометрическими и ортогональными рядами у меня остались самые светлые воспоминания о дружной работе коллектива, возглавлявшегося (после того как Н. Н. Лузин отошел от этой тематики) Дмитрием Евгеньевичем Меньшовым. Час-

то вспоминаю я и о совместной работе с моим безвременно погибшим другом Глебом Александровичем Селиверстовым.

Параллельно в 1921—1922 гг. у меня возник широкий план исследований по дескриптивной теории множеств, шедший в направлении, совсем не предусмотренном Н. Н. Лузиным. Этот план был частично реализован в моей работе «Об операциях над множествами», завершенной в начале 1922 г. и опубликованной в 1928 г. (см. работу № 13 наст. изд.). К этой работе примыкала оставшаяся неопубликованной рукопись «Об R -операциях»¹. Результаты, содержащиеся в этой рукописи, получили дальнейшее развитие в работах Л. В. Канторовича — Е. М. Ливенсона и А. А. Ляпунова.

Отмечу здесь лишь несостоявшийся и, вероятно, неосуществимый замысел: продолжить классификацию, начинающуюся с классов B -множеств, продолжающуюся классами C -множеств, RC -множеств, RRC -множеств и т. д. по трансфинитам второго класса.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

(П. Л. Ульянов)

По этому направлению А. Н. Колмогоровым написано (1922—1926) около десяти работ, и каждая из них фактически явилась началом больших исследований, которые продолжаются и ныне. Мы остановимся здесь лишь на некоторых результатах, непосредственно связанных с работами А. Н. Колмогорова, развивающих его идеи и характеризующих направления исследований.

А. РАСХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В 1922 г., девятнадцати лет, А. Н. Колмогоров получил один из наиболее ярких результатов по теории тригонометрических рядов. Именно в работе № 1 он построил пример 2π -периодической интегрируемой функции, тригонометрический ряд Фурье которой расходится почти всюду. Идейная глубина в сочетании с геометрической наглядностью и ясностью этого примера поразительны. В 1926 г. им же был построен в работе № 11 всюду расходящийся ряд Фурье.

Конструкции этих примеров явились отправным пунктом дальнейших многочисленных исследований других авторов. В 1936 г. Марцинкевич [1] построил почти всюду расходящийся ряд Фурье, частные суммы которого ограничены в каждой точке некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $mE = 2\pi$. Обратим внимание на то, что здесь уже невозможен случай множества $E = [0, 2\pi]$.

В 1953 г. Сунуоти [2] отметил, что существует почти всюду расходящийся ряд Фурье, сопряженный к которому также является рядом Фурье.

Хорошо известно, что если при $\varepsilon > 0$ интегральный модуль непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = O \left\{ \frac{1}{(\log(1/\delta))^{1+\varepsilon}} \right\} \text{ при } \delta \rightarrow +0, \quad (1)$$

¹ Эта рукопись была обнаружена после сдачи в набор настоящей книги. Статья будет опубликована во 2-й книге «Избранных трудов» А. Н. Колмогорова. — *Примеч. ред. при корректуре.*

то ряд Фурье от $f(t)$ сходится почти всюду. В связи с этим и был поставлен Зигмундом (см. [4, т. 2, с. 258]) вопрос о справедливости сформулированного выше утверждения и при $\varepsilon = 0$. Ответ на этот вопрос остается открытым.

Далее, на основе конструкции А. Н. Колмогорова Прохоренко [5] (см. также Тандори [6]) был построен пример функции $f(t)$ с почти всюду расходящимся рядом Фурье и модулем непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = O \left\{ \frac{1}{\log \log (1/\delta)} \right\} \quad \text{при } \delta \rightarrow +0. \quad (2)$$

Из (2) вытекает в силу одной нашей теоремы вложения, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \{ \ln^+ \ln^+ |f(t)| \}^\alpha dt < \infty \quad \text{при любом } \alpha \in (0, 1). \quad (3)$$

Как ни удивительно, но пока нет принципиально лучших результатов, чем (2) и (3), касающихся гладкости и класса интегрирования функций с расходящимися рядами Фурье. Из сравнения (1) и (2) видна «лакуна неизвестности».

Другое направление исследований касается точной характеристики множеств расходимости рядов Фурье. Известно, что множество точек расходимости любого ряда из непрерывных функций имеет тип $G_{\delta\sigma}$ (см., например, [3, с. 433]). На основе примера А. Н. Колмогорова всюду неограниченно расходящегося ряда Фурье было доказано Целлером [7], что всякое множество $E \subset [0, 2\pi)$ типа G_δ является множеством расходимости некоторого ряда Фурье. Это утверждение теряет силу для некоторых множеств E типа F_σ (см. Кёрнер [8]). Таким образом, остается открытым вопрос описания множеств расходимости рядов Фурье от функций того или иного класса.

Б. РАСХОДИМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Основным утверждением работы № 12 является теорема I о том, что существуют ортонормированная (ОН) на отрезке $[0, 1]$ система функций $\{\varphi_n(t)\}$ с $|\varphi_n(t)| \equiv 1$ и ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (4)$$

который расходится всюду на $[0, 1]$, хотя $\{a_n\} \in l_2$.

Более того, в этом утверждении числа $\{a_n\}$ и систему $\{\varphi_n\}$ можно выбрать (см. теорему II) по заданной последовательности $W(n) = o(\log n)$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n) < \infty. \quad (5)$$

Эти результаты обобщались в разных направлениях. В частности, в 1938 г. Меньшов [12] доказал, что:

1) для любого числа $K > 1$ существует ОН-система $\{\varphi_n\}$, для которой $|\varphi_n(t)| \leq K$ при $t \in [0, 1]$ и $n = 1, 2, \dots$;

2) последовательность $\{\log^2 n\}$ является точным множителем Вейля, т. е. выполнение неравенства (5) с $W(n) = \log^2 n$ влечет сходимость почти всюду рядов (4), тогда как для всякой $W(n) = o(\log^2 n)$ это уже не так.

Меньшов же построил [13] ОН-систему алгебраических полиномов, которые ограничены в совокупности и для которых последовательность $\{\log^2 n\}$ является точным множителем Вейля.

Сказанное означает, что для всего класса ОН-систем, ограниченных в совокупности (и даже для алгебраических полиномов), точный множитель Вейля такой же, как и для всего класса ОН-систем.

Далее, в 1960 г. было показано Ульяновым [9], что в теореме I в качестве $\{\varphi_n(t)\}$ можно взять некоторую переставленную систему Уолша. Что касается теоремы II, то наиболее сильное ее обобщение было установлено в 1975 г. Кашиным [10], построившим ОН-систему $\{\varphi_n(t)\}$ с $|\varphi_n(t)| \equiv 1$, для которой последовательность $\{\log^2 n\}$ является точным множителем Вейля. Более простое доказательство этого факта было потом предложено Тандори [11].

В той же работе № 12 сформулирована теорема III, принадлежащая А. Н. Колмогорову и состоящая в том, что тригонометрическая система после соответствующей перенумерации $\{\cos n_m t, \sin n_m t\}$ становится системой расходимости почти всюду, т. е. найдется последовательность $\{a_m, b_m\} \in l_2$, такая, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos n_m t + b_m \sin n_m t \quad (6)$$

расходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Это утверждение стало впоследствии отправным пунктом многочисленных исследований по безусловной сходимости почти всюду (Загорский, Ульянов, Олевский, Тандори, Талалай, Лейндлер, Арутюнян, Гарсия, Кашин, Мориц, Полещук и др.). Так Загорский [14] впервые привел в 1960 г. краткую схему построения соответствующего примера расходящегося ряда вида (6). Подробное же и полное доказательство этого факта было дано в работе [15]. Здесь же Ульяновым [15] было доказано аналогичное утверждение для рядов по системе Хаара. Опираясь на этот результат, Ульянов [15] и Олевский [16] показали, что любую полную ОН-систему можно перенумеровать так, чтобы она стала системой расходимости почти всюду.

В п. А был сформулирован результат А. Н. Колмогорова о том, что существует расходящийся на множестве $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $mE = 2\pi$ тригонометрический ряд Фурье. Для ОН-систем, ограниченных в совокупности на отрезке $[0, 1]$ некоторый аналог этого результата был установлен Бочкаревым [17] для множеств $E \subset [0, 1]$ положительной меры. Однако полного аналога здесь быть не может, так как Казарян [18] построил полную ОН-систему, ограниченную в совокупности и по которой всякий ряд Фурье сходится на некотором множестве положительной меры.

В. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть функция $f \in L(0, 2\pi)$ и $S_n(t, f)$ — частные суммы тригонометрического ряда Фурье от f .

В работе № 3 сначала доказывается теорема I о том, что последовательность $\{S_{n_k}(t, f)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится почти всюду, если функция $f \in L^2(0, 2\pi)$, целые числа

$n_{k+1} > \lambda n_k$, где $\lambda > 1$ и $k = 1, 2, \dots$, а потом устанавливается теорема II — всякий лакунарный ряд Фурье сходится почти всюду.

Теорема I была распространена в 1931 г. Литтлвудом и Пэли [19] на случай функций $f \in L^p(0, 2\pi)$ с $p > 1$. Госселин же отметил [20], что при $p = 1$ аналогичного типа утверждение не имеет места.

Что касается теоремы II, то она оказалась следствием теоремы I, ибо всякий лакунарный ряд Фурье обязан быть рядом Фурье от некоторой функции $f \in L^2(0, 2\pi)$ (Зигмунд [21]; см. также [3, с. 684]).

Теоремы I и II явились толчком к активному изучению свойств рядов с лакунами, а также выяснению взаимосвязей между сходимостью подпоследовательностей частичных сумм ряда и его суммируемостью тем или иным методом (см. [3, 22], а также обзор Гапошкина [23]).

В работе № 4 доказано, в частности, что при любом $\varepsilon > 0$ последовательность $\{(\log n)^{1+\varepsilon}\}$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду тригонометрических рядов. Используя метод этой работы, как ее авторы А. Н. Колмогоров и Г. А. Селиверстов (см. еще работу № 10), так и Плесснер [24] вскоре установили, что сформулированное выше утверждение остается в силе и при $\varepsilon = 0$. Эта теорема Колмогорова — Селиверстова и Плесснера сорок лет была лучшим результатом в вопросах сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье функций $f \in L^2$. Лишь в 1966 г. Карлесон (см. [25, 26]) доказал, что ряды Фурье от функций $f \in L^2(0, 2\pi)$ сходятся почти всюду. Развивая метод Карлесона, Хант [27] показал, что сходятся почти всюду ряды Фурье функций из каждого пространства $L^p(0, 2\pi)$ с $p > 1$. Наиболее же сильное утверждение в этом направлении принадлежит Шёлину [28]: если интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \{ \log^+ |f(t)| \} \{ \log^+ \log^+ |f(t)| \} dt < \infty, \quad (7)$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится почти всюду. Обратим внимание на то, что отличие в интегрируемости функции f в «положительном» результате и в «отрицательном» (см. (7) и (3)) состоит пока из множителя $\log^+ |f(t)|$.

Доказательство теоремы Карлесона (см. [25, 26]) весьма сложно и потому Фефферман [29] предложил новое (подробное его изложение дано Лукашенко [30]). Однако сложность доказательства Феффермана также значительна и потому поиски более простого доказательства представляют несомненный интерес.

Наконец, отметим большое влияние работы № 10, особенно в части развитого в ней метода доказательства, на исследование вопросов сходимости ортогональных рядов. В частности, этим методом было доказано Качмажем [31] (см. также [22, гл. V]), что если для ОН-системы $\{\varphi_n(t)\}$ функции Лебега

$$L_n(t) \leq W(n) \uparrow \infty \text{ при } t \in E \text{ и } n = 1, 2, \dots,$$

то последовательность $\{W(n)\}$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду на множестве E рядов Фурье по системе $\{\varphi_n\}$. И, как показал Тандори [32], этот результат не улучшаем во всем классе ОН-систем.

Наконец, отметим работу № 25, в которой А. Н. Колмогоров рассматривает ряды Фурье по ортонормированной (относительно веса $p(t) \in L(a, b)$) системе полиномов $\{\omega_n(t)\}_{n=0}^\infty$, где степень полинома $\omega_n(t)$ равна n и $p(t) > 0$

при $t \in (a, b)$. Он установил, что если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{C}{|\ln |t_1 - t_2||^{1+\varepsilon}} \quad \text{при } a \leq t_1 < t_2 \leq b \quad (C = \text{const}),$$

то ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \omega_n(t), \quad a_n(f) = \int_a^b f(t) p(t) \omega_n(t) dt,$$

сходится почти всюду на (a, b) .

Этот результат стал принципиально новым фактом, так как ранее было лишь известно (см. Натансон [52]), что если для некоторого $\alpha > 1/2$ модуль

$$|f(t_1) - f(t_2)| < C |t_1 - t_2|^\alpha \quad \text{при } t_1 \neq t_2,$$

то ряд Фурье от f по системе $\{\omega_n\}$ сходится почти всюду.

Сформулированная теорема А. Н. Колмогорова послужила толчком к появлению ряда работ, относящихся к вопросам сходимости рядов Фурье по общим ортонормированным полиномам (Алексич, Ульянов, Чен Киен Квонг и др.).

Г. О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ—ЛЕБЕГА

Будем предполагать, что $a_n \rightarrow 0$ и накладываемые ниже условия на $\{a_n\}$ обеспечивают сходимость ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \quad (8)$$

всюду на $(-\infty, \infty)$, кроме, быть может, точек $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$, к некоторой функции $f(t)$. В работе № 2 доказано, что коэффициенты Фурье—Лебега могут стремиться к нулю как угодно медленно¹. Попутно А. Н. Колмогоров устанавливает, что если последовательность $\{a_n\}$ квазивыпукла, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\Delta^2 a_n| < \infty, \quad (9)$$

где $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$ и $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, то функция $f(t) \in L(0, 2\pi)$ и ряд (8) является рядом Фурье f . Кроме того, показывается, что при выполнении неравенства (9) условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \log n = 0 \quad (10)$$

необходимо и достаточно для сходимости ряда (8) по метрике пространства $L(0, 2\pi)$ к функции $f(t)$.

Эти утверждения А. Н. Колмогорова обобщались и распространялись на различные случаи (Мур [33, 34], Чезари [35], Сидон [36], Боас [37], Теляков-

¹ С другой стороны, Литтлвуд показал (см. [41; 3, с. 226]), что любое условие, накладываемое лишь на $|a_n|$ и допускающее, что $\{a_n\} \notin l_2$, не может быть достаточным, чтобы ряд (8) был рядом Фурье.

ский [38, 39], Фомин [40] и др.). Мы сформулируем здесь лишь наиболее общий известный нам результат Теляковского [38] о том, что ряд (8) является рядом Фурье — Лебега, если

$$\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty \quad \text{и} \quad \beta \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{m=2}^{[n/2]} \frac{\Delta a_{n-m} - \Delta a_{n+m}}{m} \right| < \infty. \quad (11)$$

При этом существует постоянная C такая, что интеграл

$$\int_0^{\pi} |f(t)| dt \leq C(\alpha + \beta).$$

Условия (11) весьма громоздки (из-за второго неравенства), но из них вытекают достаточно общие и легко проверяемые условия. Например, если последовательность $\{a_n\}$ такова, что

$$|\Delta a_n| \leq A_n \downarrow \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty, \quad (S)$$

то верно и (11). Условия (S) эквивалентны условиям Сидона (см. [36, 39]) и при их выполнении ряд (8) сходится по метрике L к f тогда и только тогда, когда выполнено (10) (см. [39]).

Отметим, что вопрос об интегрируемости функции $f(t)$, представимой рядом вида (8), а также оценка нормы этой функции через последовательность $\{a_n\}$ тесно связаны с изучением суммируемости рядов Фурье линейными методами (см., например, [38]).

Д. СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ И РЯДЫ

В работе № 8 сначала доказывается теорема I о том, что если функция $f \in L(0, 2\pi)$, а $g(t)$ — сопряженная с $f(t)$ функция, то

$$mE\{t: t \in [0, 2\pi], |g(t)| > R\} \leq \frac{C}{R} \|f\|_1, \quad (12)$$

где $C = \text{const}$, а $R > 0$ — любое число.

Из этого соотношения совсем просто выводится неравенство (теорема II)

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^{1-\varepsilon} dt \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)| dt \right\}^{1-\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1), \quad (13)$$

на основе которого устанавливается (теорема III), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t, f)|^{1-\varepsilon} dt = 0, \quad (14)$$

где $S_n(t, f)$ — частные суммы тригонометрического ряда Фурье $\sigma(f)$ функции $f(t)$.

Именно в работе № 8 была впервые предложена идея представления частных сумм $S_n(t, f)$ через некоторые сопряженные функции, применение к кото-

рым неравенства (13) сразу же приводит к равенству (14). Эта идея впоследствии многократно использовалась при изучении вопросов сходимости рядов Фурье и их сопряженных рядов от функций из тех или иных пространств.

Что касается неравенства (13), то различные варианты его доказательства были предложены, например, Литтлвудом [45], Харди [46], Титчмаршем [44] и др.

Особенно важную роль в анализе (а не только в теории тригонометрических рядов) стали играть неравенства типа (12). Прямые доказательства этого неравенства (т. е. без использования теоремы Привалова) были даны, в частности, Титчмаршем [44] и Люмисом [47] (см. также [3, гл. 8; 4, гл. 7]).

Далее, обратим внимание на то, что неравенство (12) послужило, вероятно, толчком к установлению Марцинкевичем [48] интерполяционных теорем для некоторого класса операторов слабого типа (см. также [4, гл. 12]). Об этом говорит Зигмунд в статье, посвященной Марцинкевичу (см. [49, с. 19]). Более того, само введение понятия операторов слабого типа навеяно, по-видимому, также работой Колмогорова № 8. Все это, к сожалению, не отмечается должным образом в соответствующей литературе.

Заметим еще, что неравенство (12) выводится Колмогоровым из одного лишь предположения существования сопряженного оператора $g = Af$, т. е. одно существование оператора A автоматически влечет количественную оценку (12). Это указывает на определенную связь с работой № 8 последующих результатов Стейна об оценках слабого типа для операторов, инвариантных относительно сдвига, их последующих обобщений (Никишин [50]) и др.

Наконец, упомянем книгу Жижиашвили [51], специально посвященную сопряженным функциям и рядам, изложение в которой начинается с неравенства А. Н. Колмогорова (13) и его обобщения.

Теперь отметим еще одну теорему Колмогорова (см. работу № 14) о том, что если функция $f(t) \in L(0, 2\pi)$, то функция $^2 g(t)$ является B -интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, а сопряженный к $\sigma(f)$ ряд $\bar{\sigma}(f)$ является рядом Фурье от $g(t)$ в смысле B -интеграла, где B означает интеграл Данжуа — Бокса (см. еще [3, гл. 8] и [4, гл. 7]). Из этого результата сразу же вытекает, что

$$\bar{\sigma}(f) = \sigma(g), \quad (15)$$

как только функции f и g принадлежат пространству $L(0, 2\pi)$.

Равенство (15) было также получено Смирновым [43] и Титчмаршем [44].

Далее, в монографии [42] А. Н. Колмогоров ввел (см. там с. 73—75) понятие обобщенного математического ожидания, которое повлекло за собой определение A -интеграла³. Именно, функция $\varphi(t)$ является A -интегрируемой на отрезке $[a, b]$ ($\varphi \in A(a, b)$), если мера

$$\text{mes } E \{t : t \in [a, b], |\varphi(t)| > n\} = o(1/n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi(t)]_n dt = I,$$

² Функция $g(t)$, вообще говоря, неинтегрируема по Лебегу на $[0, 2\pi]$.

³ Название A -интеграла также было предложено А. Н. Колмогоровым.

где $[\varphi(t)]_n = \varphi(t)$ при $|\varphi(t)| \leq n$ и $[\varphi(t)]_n = 0$ при $|\varphi(t)| > n$. Число I и называется по определению A -интегралом функции $\varphi(t)$ по отрезку $[a, b]$:

$$(A) \int_a^b \varphi(t) dt = I.$$

A -интеграл нашел применение и развитие в работах многих авторов (Ульянов, Церетели, Наканисхи, Очан, Виноградова, Хускивадзе, Бонди, Окан, Рубинштейн, Лукашенко и др.), относящихся к изучению разнообразных вопросов теории функций (тригонометрические ряды, граничные свойства аналитических функций, теория интегрирования и др.). Так, например, было показано (см. Титчмарш [44] и Бари [3, гл. 8]), что если функция $f \in L(0, 2\pi)$, то сопряженная к ней функция $g \in A(0, 2\pi)$ и сопряженный ряд (к ряду Фурье от f) является рядом Фурье от g в смысле A -интегрирования. Далее, Ульянов [53] установил, что если область G ограничена достаточно гладкой замкнутой кривой Γ , то всякий интеграл типа Коши — Лебега

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} (L) \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in G, f(\zeta) \in L(\Gamma))$$

является A -интегралом Коши, т. е.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_{\Gamma} \frac{\Phi_i(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{при } z \in G,$$

где $\Phi_i(\zeta)$ — предельные угловые значения $\Phi(z)$ изнутри области G при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$. С другой стороны, Хускивадзе [54] показал, что этот результат теряет силу, если контур Γ недостаточно гладок (например, содержит угловые точки).

ЛИТЕРАТУРА¹

1. Marcinkiewicz J. Sur les séries de Fourier.— Fund. math., 1936, vol. 27, p. 38—69.
2. Sunouchi G. Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere.— Kodai Math. Sem. Rep., 1953, vol. 1, p. 27—28.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
4. Зимунд А. Тригонометрические ряды/Пер. с англ. М.: Мир, 1965, Т. 1, 2.
5. Прохоренко В. И. О расходящихся рядах Фурье.— Мат. сб., 1968, т. 75, с. 185—198.
6. Tandori K. Ein Divergenz für Fourierreihen.— Acta sci. math., 1969, vol. 30, p. 43—48.
7. Zeller K. Über Konvergenzmengen von Fourierreihen.— Arch. Math., 1955, Bd. 6, S. 335—340.
8. Körner T. W. Sets of divergence for Fourier series.— Bull. London Math. Soc., 1971, vol. 3, p. 152—154.
9. Ульянов П. Л. Расходящиеся ряды Фурье класса L^p ($p \geq 2$).— ДАН СССР, 1961, т. 137, с. 786—789.

¹ Список всех работ, содержание которых тесно связано с исследованиями А. Н. Колмогорова по теории тригонометрических и ортогональных рядов, просто необозрим. Рискованно даже назвать примерную цифру. Цитируемые же здесь статьи и книги составляют незначительную часть из общего их количества.

10. *Kašin B. S.* On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series.— *Anal. math.*, 1976, vol. 2, p. 249—266.
11. *Tandori K.* Einfacher Beweis eines Satzes von B. S. Kašin.— *Acta sci. math.*, 1977, vol. 39, p. 175—178.
12. *Menchoff D.* Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble.— *Mat. сб.*, 1938, т. 3, с. 103—120.
13. *Menchoff D.* Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynomes orthogonaux.— *Mat. сб.*, 1936, т. 1, с. 27—52.
14. *Zahorski Z.* Une série de Fourier permutée d'une fonction de classe L^2 divergente presque partout.— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1960, vol. 251, p. 501—503.
15. *Ульянов П. Л.* Расходящиеся ряды Фурье.— *УМН*, 1961, т. 16, вып. 3, с. 61—142.
16. *Олевский А. М.* Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам.— *ДАН СССР*, 1961, т. 138, с. 545—548.
17. *Бочкарев С. В.* Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы.— *Mat. сб.*, 1975, т. 98, с. 436—449.
18. *Казарян Р. С.* О некоторых вопросах теории ортогональных рядов.— *Mat. сб.*, 1982, т. 119, № 2, с. 278—294.
19. *Littlewood J. E., Paley R. E. A. C.* Theorems on Fourier series and power series.— *J. London Math. Soc.*, 1931, vol. 6, p. 230—233.
20. *Gosselin R. P.* On the divergence of Fourier series.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 9, p. 278—282.
21. *Zygmund A.* On the convergence of lacunary trigonometric series.— *Fund. math.*, 1930, vol. 16, p. 90—107.
22. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов/Пер. с нем. М. Физматгиз, 1958.
23. *Гапошкин В. Ф.* Лакунарные ряды и независимые функции.— *УМН*, 1966, т. 21, вып. 6, с. 3—82.
24. *Plessner A.* Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen.— *J. reine und angew. Math.*, 1925, Bd. 155, S. 15—25.
25. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series.— *Acta math.*, 1966, vol. 116, p. 135—157.
26. *Карлесон Л.* О сходимости рядов Фурье и о росте их частичных сумм.— *Математика*, 1967, т. 4, с. 113—132.
27. *Hunt R.* On the convergence of Fourier series.— In: *Orthog. Expan. and their Contin Anal.* : Proc. Conf. Carbondale: Illinois Press, 1968, p. 235—255.
28. *Sjölin P.* An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh—Fourier series.— *Ark. för mat.*, 1969, vol. 7, p. 551—570.
29. *Fefferman C.* Pointwise convergence of Fourier series.— *Ann. Math.*, 1973, vol. 98, p. 551—571.
30. *Лукашенко Т. П.* Сходимость почти всюду рядов Фурье функций, суммируемых с квадратом. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 3—109.
31. *Kaczmarz S.* Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux.— *Stud. math.*, 1929, vol. 1, p. 87—121.
32. *Tandori K.* Genaue Weylsche Multiplikatorfolgen.— *Acta sci. math.*, 1959, vol. 20, p. 1—13.
33. *Moore C. H.* On criteria for Fourier constants of L integrable functions.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1933, vol. 19, p. 846—848.
34. *Moore C. H.* On the use of Cesaro means in determining criteria for Fourier constants.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, p. 907—913.
35. *Cesari L.* Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier.— *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, 1934, vol. 3, p. 105—134.
36. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen für den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe.— *J. London Math. Soc.*, 1939, vol. 14, p. 158—160.
37. *Boas R. P.* Absolute convergence and integrability of trigonometric series.— *J. Rational Mech. and Anal.*, 1956, vol. 5, p. 621—632.
38. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и

- их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, с. 1209—1236.
39. Теляковский С. А. Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов.— Мат. заметки, 1973, т. 14, с. 317—328.
 40. Фомин Г. А. Об одном классе тригонометрических рядов.— Мат. заметки, 1978, т. 23, с. 213—222.
 41. Littlewood J. E. On the mean values of power series.— Proc. London Math. Soc., 1924, vol. 25, p. 328—337; J. London Math. Soc., 1930, vol. 5, p. 179—182.
 42. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936; 2-е изд. М.: Наука, 1974.
 43. Smirnov V. Sur les valeurs limites des fonctions analytiques.— C. r. Acad. sci. Paris, 1929, vol. 188, p. 131—133.
 44. Titchmarsh E. C. On conjugate functions.— Proc. London Math. Soc., 1929, vol. 29, p. 49—80.
 45. Littlewood J. E. On a theorem of Kolmogoroff.— J. London Math. Soc., 1926, vol. 1, p. 229—231.
 46. Hardy G. H. Remarks on there recent notes in the Journal.— J. London Math. Soc., 1928, vol. 3, p. 166—169.
 47. Loomis L. A note of Hilbert's transform.— Bull. Amer. Math. Soc., 1946, vol. 52, p. 1082—1084.
 48. Marcinkiewicz J. Sur l'interpolation d'operations.— C. r. Acad. sci. Paris, 1939, vol. 208, p. 1272—1273.
 49. Marcinkiewicz J. Collected papers. Warszawa, 1964.
 50. Нукишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы.— УМН, 1970, т. 25, вып. 6, с. 129—191.
 51. Жижиншвили Л. В. Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси: Изд. Тбил. гос. ун-та, 1969.
 52. Натансон И. П. К вопросу о разложении функций по ортонормированным полиномам.— Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат., 1933, т. 1, с. 85—88.
 53. Ульянов П. Л. Об A -интегралах Коши для контуров.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 3, с. 383—385.
 54. Хускидзе Г. А. О сопряженных функциях и особых интегралах Коши.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 6, с. 1270—1273.

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

(И. И. Парсвиченко)

Работа № 13 заложила начала общей теории операций над множествами. Предыстория вопроса восходит к французской математической школе начала века. Тогда в исследованиях Бореля, Бэра, Лебега и других возникла задача описания таких процедур, которые из исходной совокупности множеств простой структуры — в первую очередь на числовой прямой — приводили бы к содержательному описанию более сложных множеств.

Эта задача благодаря Н. Н. Лузину перекочевала в нашу страну. Вскоре был получен замечательный результат. В связи с решением проблемы о мощности борелевских множеств, или, как их называют, B -множеств, Александровым [10] была введена A -операция, а Суслиным [14] было доказано, что если применить A -операцию к замкнутым множествам на прямой, то могут получиться множества, дополнения к которым нельзя построить тем же способом. Отсюда следовало существование A -множеств, не являющихся B -множествами.

В комментируемой работе А. Н. Колмогоров вводит понятие δs -операции. δs -операция Φ задается некоторой совокупностью подмножеств $\mathfrak{B}_0 = \{\mathfrak{z}\}$, $\mathfrak{z} =$

$= \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ натурального ряда (числовых цепей) и некоторой совокупностью множеств $e = \{e(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Каждому $z \in \mathfrak{B}_0$ соответствует цепь множеств $\{e(n_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $n_i \in z$, и ядро этой цепи $\bigcap_i e(n_i)$. Сумма ядер всех цепей, соответствующих данной совокупности числовых цепей, и есть результат применения данной операции Φ к данной совокупности множеств e . Таким образом,

$$\Phi(e) = \bigcup_{z \in \mathfrak{B}_0} \bigcap_{n \in z} e(n), \quad (1)$$

где $e: I \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$, $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{P}(I)$, I — счетное множество. Автор доказывает, что существует Φ -множество, т. е. множество, получаемое с помощью некоторой δs -операции из замкнутых множеств на прямой, дополнение к которому не является Φ -множеством. (Заключение этой теоремы назовем K -свойством соответствующего пространства).

Общей теории операций над множествами, исходный пункт которой — комментируемая работа, посвящена недавно выпущенная монография [5]. Ниже мы рассказываем о некоторых работах, относящихся к данной теории.

В [12] δs -операции были обобщены до *теоретико-множественных операций* (ТМО), задаваемых булевыми многочленами в совершенной дизъюнктивной нормальной форме:

$$\Phi(e) = \bigcup_{z \in \mathfrak{B}} \left(\bigcap_{n \in z} e(n) \cap \bigcap_{n \in I \setminus z} (Y \setminus e(n)) \right), \quad (1^*)$$

где I произвольно. $\mathfrak{B}$ называется *базой* операции, а среди ТМО δs -операции характеризуются *экстенсивностью* базы [12]:

$$\forall A \forall B, \quad A \in \mathfrak{B} \ \& \ A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathfrak{B}.$$

При этом систему $\mathfrak{B}_0$ из (1) называют *подбазой* $\mathfrak{B}$, так как наименьшая экстенсивная система, содержащая $\mathfrak{B}_0$, есть как раз база $\mathfrak{B}$ для Φ в смысле (1*). Из класса абстрактных функционалов $e \rightarrow \Phi(e) \subseteq Y$, $e: I \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$, ТМО выделяются аксиомой: для всех Y, Z и $f: Z \rightarrow Y$ имеет место формула: $\Phi(h \circ e) = h(\Phi(e))$, где $h: A \rightarrow f^{-1}[A]$, а для таких функционалов соответствующая им база выражения (1*) получается по формуле: $\mathfrak{B} = \Phi(e_0)$, где $e_0: I \rightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(I))$ и $\forall n, e_0(n) = \{B \mid n \in B \subseteq I\}$, что, в частности, дает метод приведения к совершенной дизъюнктивной нормальной форме любого булева многочлена (см. [4, 5]).

Основная теорема работы остается без изменений и для ТМО. В этом виде она впоследствии обобщалась. Прежде всего было замечено, что для наличия K -свойства в пространстве X достаточно, чтобы там топологически содержался канторов дисконтинуум $D^{\aleph_0}$ (до работы [3] здесь фигурировало ненужное требование замкнутости $D^{\aleph_0}$ в X). Другое обобщение начинается с замены $\text{card } I = \aleph_0$ на $\text{card } I = \aleph_\alpha$; такую ТМО назовем $\aleph_\alpha$ -операцией. В [9] Шнейдером было доказано, что для $\aleph_\alpha$ -операции K -свойство выполнено в тихоновской степени $D^{\aleph_\alpha}$. Затем в [3, 4] при условии $\aleph_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} 2^{\aleph_\beta}$ K -свойство было доказано для

$\aleph_\alpha$ -операции в трансфинитно арифметическом континууме C_α (см. [2]). C_α — трансфинитное обобщение числовой прямой, которое получается дедекндовым пополнением линейно упорядоченного множества нормального типа η_α Хаус-

дорфа (см. первое издание его монографии [11]). Наконец, в [8] для $\aleph_\alpha$ -операции Чобаном было доказано, что для выполнения K -свойства в пространстве X достаточно наличие в X регулярного подпространства X_0 веса $\aleph_\alpha$, которое непрерывно отображается на $D^{\aleph_\alpha}$ или $J^{\aleph_\alpha}$ ($J = [0, 1]$) — теорема, обобщающая предшествующие и дающая нечто новое даже в классическом случае $\alpha = 0$.

В [6] Пономаревым теорема Суслина и теорема о непустоте классов борелевских множеств впервые были доказаны в принципиально новой ситуации: для совершенно нормальных бикомпактов. В [3] для указанных пространств теорема о непустоте классов была доказана в формулировке комментируемой работы. Наконец, в [7] эта теорема была обобщена на $\aleph_\alpha$ -операции.

В заключение приведем определение R -операции и одну теорему о ней, принадлежащие А. Н. Колмогорову, которые им не были опубликованы, но с его согласия были включены Канторовичем и Ливенсоном в их работу [13]. Пусть $\Phi_{\mathfrak{B}_0}$ есть δs -операция с натуральным рядом в качестве индексного множества и подбазой $\mathfrak{B}_0$. R -операцией над $\Phi_{\mathfrak{B}_0}$, обозначаемой $R\Phi_{\mathfrak{B}_0}$, называется δs -операция, индексным множеством для которой служит множество K всех кортежей из натуральных чисел, а подбазой — система всех множеств $M \subseteq K$, для которых выполнена совокупность следующих условий для каждого $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K$:

- (1) $\forall i \leq n, (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n) \in M \Rightarrow (s_1, s_2, \dots, s_i) \in M$,
- (2) $\{s_1 \mid (s_1) \in M\} \in \mathfrak{B}_0$ и $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in M \Rightarrow \{s_{n+1} \mid (s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}) \in M\} \in \mathfrak{B}_0$.

Например, A -операция есть R -операция над операцией счетного суммирования.

Т е о р е м а. Если операция $\Phi_{\mathfrak{B}_0^+}$ мощнее операции $\Phi_{\mathfrak{B}_0}$, то $R\Phi_{\mathfrak{B}_0^+}$ мощнее $R\Phi_{\mathfrak{B}_0}$.

R -операции впоследствии изучались (см., например, [1, 5]). В частности, цитируемая теорема недавно передоказывалась и обобщалась в [5].

Работа № 59 была посвящена семидесятилетию академика П. С. Александрова.

В качестве дополнения сделаем несколько замечаний к определению Γ -операции. База операции, дополнительной к данной δs -операции, состоит из всех множеств, пересекающих каждое множество базы исходной операции (ср. § 2 работы № 13). Отсюда легко следует характеристическое свойство Γ -цепей П. С. Александрова, приведенное в работе, в выражении через интервалы Бэра Δ_s , так как дополнительная A -операция имеет по определению в качестве подбазы систему множеств вида $\{(s_1), (s_1, s_2), (s_1, s_2, s_3), \dots\}$ для всех последовательностей $s_1, s_2, s_3, \dots$ натуральных чисел («регулярные цепи кортежей»). Интервалы Бэра либо не пересекаются, либо содержатся друг в друге, причем $\Delta_{s^+} \subset \Delta_s$, если кортеж s^+ продолжает s . Поэтому максимальные интервалы любого покрытия пространства последовательностей интервалами Бэра, соответствующего Γ -цепи $\mathfrak{S}$, образуют дизъюнктивное и потому минимальное подпокрытие, которому соответствует минимальная Γ -цепь $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$. Минимальные Γ -цепи образуют подбазу Γ -операции, формулу для которой можно поэтому записать более экономно: с использованием лишь Γ -цепей $\mathfrak{S}_0$, соответствующих дизъюнктивным покрытиям интервалами Бэра. Подбаза δs -операции называется жесткой

если ее множества не содержатся друг в друге. Кроме Γ -операции, жесткой подбазой обладает и A -операция: ею служит система всех регулярных цепей кортежей исходного определения, что здесь очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. А. R -множества.— Тр. МИАН СССР, 1953, т. 40, с. 1—68.
2. Паровиченко И. И. К теории множеств, не удовлетворяющих аксиомам счетности.— Уч. зап. Кишинев. ун-та. Сер. физ.-мат., 1957, т. 29, с. 15—24.
3. Паровиченко И. И. К дескриптивной теории множеств в топологических пространствах.— ДАН СССР, 1971, т. 196, № 5, с. 1024—1027.
4. Паровиченко И. И. О теоретико-множественных операциях.— ДАН СССР, 1971, т. 201, № 1, с. 40—43.
5. Паровиченко И. И. Теория операций над множествами. Кишинев: Штиинца, 1981.
6. Пономарев В. И. О борелевских множествах в совершенно нормальных бикompактах.— ДАН СССР, 1966, т. 170, № 3, с. 520—523.
7. Чобан М. М. Модификация топологий и непустота классов.— Сердика (Булг. мат. списание), 1973, т. 1, с. 133—143.
8. Чобан М. М. Об операциях над множествами.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 6, с. 1332—1351.
9. Шнейдер В. Е. Дескриптивная теория множеств в топологических пространствах.— Уч. зап. МГУ. Сер. мат., 1949, т. 135, № 2, с. 37—85.
10. Alexandroff P. Sur la puissance des ensembles mesurables B .— C. r. Acad. sci. Paris, 1916, vol. 162, p. 323—325.
11. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
12. Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets (1).— Fund. math., 1932, vol. 18, p. 234—279.
13. Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets (2).— Fund. math., 1933, vol. 20, p. 55—97.
14. Souslin M. Sur une definition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.— C. r. Acad. sci. Paris, 1917, vol. 164, p. 88—91.

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

(В. А. Скворцов)

К СТАТЬЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА»

Введенные в работе № 16 варианты определения интеграла вошли в литературу под названием «интеграл Колмогорова» для конечных или для счетных разбиений [1]. Конструкция интеграла Колмогорова излагается в учебнике [2] и в монографиях [3, 4]. Значение интеграла Колмогорова в развитии теории интеграла отмечается в монографиях [5, 6] и в статьях [7, 8]. Конструкция интеграла Колмогорова явилась результатом синтеза и глубокого обобщения многочисленных, но разрозненных до того момента исследований по теории интеграла типа Стильеса для функций на абстрактных множествах, в частности идей Шреппе, Мура и Беркилля.

В дальнейшем интеграл Колмогорова и его обобщения изучались, например, в работах [3, 4, 9—23]. В частности, взаимосвязь двух вариантов интеграла Колмогорова (для конечных или счетных разбиений) и связь этих интегралов с другими интегралами рассматривались в [3, 13, 17, 23]. Интеграл Колмогорова успешно применялся для получения с его помощью новых важных свойств раз-

личных интегралов, являющихся частным случаем интеграла Колмогорова [12]. В [3] изучаются двойные и повторные интегралы Колмогорова и устанавливается соответствующий вариант теоремы Фубини. В [3] также рассмотрены некоторые приложения интеграла Колмогорова к функциональному анализу: показано, что для некоторых пространств общие виды линейных операторов и функционалов имеют интегральные представления в форме соответствующих интегралов Колмогорова; доказаны теоремы существования и единственности некоторых нелинейных интегральных уравнений, в записи которых участвуют эти интегралы. Этот интеграл нашел применение и в математической физике [20, 24]. Интеграл Колмогорова рассматривался и для случая функций со значениями в топологической группе [22].

Большую роль в дальнейшем развитии теории дифференцирования аддитивных функций множества сыграло Добавление II к работе № 16 (см. [4]). Здесь устанавливается возможность дифференцирования одной аддитивной функции множества относительно другой независимо от каких бы то ни было геометрических свойств пространства. При этом, по-видимому, впервые отмечена возможность определить дифференцирование через интегрирование, т. е. положить в основу определения производной для некоторой функции множества интегральное представление последней. В современной литературе производная в указанном смысле часто именуется производной Радона — Никодима [25].

Высказанные во введении к работе № 16 (см. также работу № 6) мысли о неизбежном возникновении принципиальных трудностей при попытках объединить единой схемой «абсолютные» интегралы и интегралы, связанные с отношением порядка на числовой прямой, нашли в дальнейшем подтверждение и развитие во многих работах, посвященных взаимосвязи различных понятий интеграла. В связи с этим упомянем многочисленные работы, посвященные A -интегралу, определение которого (в форме обобщенного математического ожидания) также принадлежит Колмогорову [26]. Именно на том обстоятельстве, что A -интеграл не зависит от сохраняющей меру замены аргумента (хотя и не является абсолютным), основаны примеры, показывающие, что он может противоречить интегралам Данжуа и другим упорядоченным интегралам (см. [27—29]). Отметим, что и в теории упорядоченного интегрирования в последние десятилетия возник для решения различных задач теории функций ряд определений обобщенных интегралов, которые также принципиально не поддаются объединению в единую схему, так как они могут приводить к разным значениям интеграла на пересечении тех классов функций, для интегрирования которых они введены [30—32].

К СТАТЬЕ «О ГРАНИЦАХ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА»

В работе № 6, публикуемой впервые в настоящем издании, не только доказываются утверждения, сформулированные без доказательства в № 5, но содержится ряд результатов, нигде ранее не публиковавшихся. Содержащееся в № 6 (см. § 6) описание класса обобщений широкого интеграла Данжуа, основанных на введении обобщения понятия плотности множества, было бы интересно сравнить с многочисленными обобщениями интеграла Данжуа в современной литературе (см., например, [33]). Сделанные во введении к работе № 6 замечания о важности

для некоторых разделов математики рассмотрения разрывных примитивных, высказывавшиеся ранее и Н. Н. Лузиным [34], нашли подтверждение, в частности, в многочисленных работах по применению теории интегрирования в теории ортогональных рядов [32, 35—37]. Однако при этом до сих пор не предпринималось попыток построить аксиоматизацию таких интегралов, сходную с осуществленной в № 5 и № 6.

К кругу идей о границах возможного расширения понятия интеграла, развитых во введении к № 6, примыкает также работа № 7 настоящего издания.

К СТАТЬЕ «О ПРОЦЕССЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДАНЖУА»

Результат статьи излагается в монографии [38]. Сходные вопросы рассматривались в [39—41]. См. также [42—46] и комментарий П. Л. Ульянова «Тригонометрические и ортогональные ряды».

К СТАТЬЕ «К ТЕОРИИ МЕРЫ»

Значение работы № 21 для общей теории меры отмечалось во многих обзорах и монографиях (см. [8, 47, 48]).

Особенностью комментируемой работы является то, что в ней вопросы теории меры рассматриваются с геометрической, а не только лишь с теоретико-множественной точки зрения. А. Н. Колмогоров накладывает на функции множеств, лежащих в евклидовом пространстве R^n , помимо стандартных требований полуаддитивности и σ -аддитивности (требования I и II), а также требования нормировки (IV), следующее геометрическое требование (III): при отображениях без растяжения мера множества не возрастает. Это обстоятельство приводит к существованию при $k \leq n$ двух мер — верхней меры $\bar{\mu}^k$ и нижней меры $\underline{\mu}^k$ таких, что любая k -мерная мера μ удовлетворяет для любого A -множества $E \subset R^n$ неравенству $\underline{\mu}^k(E) \leq \mu(E) \leq \bar{\mu}^k(E)$ и при этом оказывается, что $\underline{\mu}^k(E) = \bar{\mu}^k(E)$, если E есть отображение без растяжения некоторого множества из R^k .

Идеи и методы, развитые в этой работе, широко использовались в дальнейших исследованиях. Функция меры, удовлетворяющая условиям I—IV, сформулированным во введении к № 21, получила в последующей литературе название меры Колмогорова, а сами условия — аксиоматики Колмогорова. Эта аксиоматика обсуждается, в частности, в монографиях [48—50].

Безикович [51] изучал природу класса множеств, для которых мера Колмогорова однозначна в случае одномерной меры для множеств на плоскости. Он же дал в [51] отрицательный ответ на высказанную в конце § 6 работы № 21 гипотезу о совпадении длины множества по Хаусдорфу с минимальной линейной мерой по Колмогорову. Усилением этого результата является построенный Витушкиным, Ивановым и Мельниковым [52] пример множества на плоскости конечной положительной длины по Хаусдорфу и нулевой минимальной линейной меры по Колмогорову. Таким образом, рассматриваемые меры не только не совпадают, но и несоизмеримы.

Поставленные в работе № 21 вопросы единственности k -мерной меры в n -мерном пространстве рассматривались затем в [53, 49, 55, 56].

Взаимоотношение колмогоровской меры с другими мерами изучал Небеллинг [53, 54]. Он доказал, что для поверхностей ограниченного растяжения мно-

тие меры совпадают с колмогоровской, хотя и не удовлетворяют, вообще говоря, аксиоматике Колмогорова.

Некоторые из дальнейших исследований в направлении изучения k -мерных мер в n -мерном пространстве были связаны со стремлением ввести такую аксиоматизацию функции меры, чтобы охватить меры, связанные с проектированием и могущие возрастать при отображениях, не увеличивающих расстояния. Одна из таких аксиоматик была сформулирована Витушкиным [57].

К СТАТЬЕ «ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО»

О роли обобщенной формы среднего, найденной в № 17, см. в статье А. Я. Хинчина [47] (см. также [59, 60]). Результаты, близкие к теореме статьи № 17, были получены Нагумо [58]. Дальнейшее продолжение тематики см. в цикле работ Акцеля [61, 62].

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. Т. 5.
3. Глиенко В. И. Интеграл Стильтьеса. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
4. Гогоадзе Д. Ф. Об интегралах Колмогорова и их некоторых приложениях. Тбилиси: Мецниереба, 1979.
5. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974.
6. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1966.
7. Бари Н. К., Ляпунов А. А., Меньшов Д. Е., Толстов Г. П. Метрическая теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет.: М.; Л. Гостехиздат, 1948.
8. Александров П. С., Хинчин А. Я. Андрей Николаевич Колмогоров (К 50-летию со дня рождения).— УМН, 1953, т. 8, вып. 3, с. 194—200.
9. Глиенко В. И. Опыт общего определения интеграла.— ДАН СССР, 1937, т. 14, с. 61—64.
10. Лейфман Л. Я. Об условиях существования интеграла Колмогорова и понятия дифференциальной эквивалентности.— УМН, 1957, т. 12, вып. 3, с. 343—352.
11. Лейфман Л. Я. О предельном переходе под знаком интеграла Колмогорова.— Изв. вузов. Математика, 1958, № 2, с. 182—196.
12. Лейфман Л. Я. Предельный переход под знаком интеграла с общей точки зрения теории интеграла Колмогорова.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 1, с. 139—153.
13. Kotlar M., Frenkel Y. Sobre la intégral de Kolmogoroff.— Contrib. cient. Ser. A (Univ. Buenos Aires), 1950, vol. 1, N 3, p. 48—63.
14. Паливец Б. С. Об обобщенном понятии интеграла.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1968, № 5, с. 31—40.
15. Паливец Б. С. О пространстве J -интегрируемых функций.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1968, № 6, с. 28—35.
16. Паливец Б. С. О понятии диагональной эквивалентности счетно-аддитивных функций с параметром.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1969, № 5, с. 37—43.
17. Проценко Д. Ф. К взаимоотношению между двумя типами интеграла Колмогорова.— УМН, 1965, т. 20, вып. 5, с. 237—242.
18. Getchel B. C. On the equivalence of two methods of defining Stieltjes integral.— Bull. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 41, p. 413—418.
19. Maeda F. Space of differential set functions.— J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1936, vol. 6, p. 19—45.

20. *Maeda F.* Representation of linear operators by differential set functions.— J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1936, vol. 6, p. 115—137.
21. *Hilbrandt T. H.* Definitions of Stieltjes integrals of the Riemann type.— Amer. Math. Mon., 1938, vol. 49, p. 265—278.
22. *Черняевский И. Я.* Мультипликативный интеграл в топологической группе.— Изв. вузов. Математика, 1961, № 5, с. 102—111.
23. *Черняевский И. Я.* Об условиях совпадения интегралов Беркила и Колмогорова.— Волж. мат. сб., 1965, № 3, с. 339—342.
24. *Destouches J. L.* Corpuscules et systèmes de corpuscules. Paris, 1941. Т. 1.
25. *Barra G. de.* Measure theory and integration. London, 1981.
26. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
27. *Виноградова И. А.* О неопределенном А-интеграле.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 1, с. 113—142.
28. *Виноградова И. А.* О представлении измеримой функции неопределенным А-интегралом.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 4, с. 581—604.
29. *Церетели О. Д.* Интегральный аналог теоремы Римана об условно сходящихся рядах.— Сообщ. АН ГССР, 1963, т. 30, № 4, с. 385—392.
30. *Скворцов В. А.* Теорема дю-Буа-Реймона для обобщенных интегралов и тригонометрических рядов, суммируемых методом Абеля—Пуассона.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1964, № 4, с. 16—20.
31. *Скляренок В. А.* Об интегрируемых по Данижуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов.— ДАН СССР, 1973, т. 240, № 3, с. 533—536.
32. *Виноградова И. А., Скворцов В. А.* Обобщенные интегралы и ряды Фурье.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970 г. М.: ВИНТИ, 1974, с. 65—107.
33. *Sarkhel D. N., De A. K.* The proximally continuous integrals.— J. Austral Math. Soc. Ser. A, 1981, vol. 31, p. 26—45.
34. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951.
35. *Denjoy A.* Leçons sur le calcul des coefficients d'une séries trigonométrique. Paris, 1941—1949.
36. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.— Fund. math., 1936, vol. 26, p. 1—43.
37. *Burkill J. C.* Integrals and trigonometrical series.— Proc. London Math. Soc., 1951, vol. 1, N 1, p. 46—57.
38. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды / Пер. с англ. М.: Мир, 1965. Т. 1.
39. *Titchmarsh E. C.* On conjugate functions.— Proc. London Math. Soc., 1929, vol. 29, p. 49—80.
40. *Смирнов В. И.* Sur les valeurs limites des fonctions analytiques.— C. r. Acad. sci. Paris, 1929, vol. 188, p. 131—133.
41. *Смирнов В. И.* Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle.— Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 1929, т. 2, № 2, с. 22—37.
42. *Лукашенко Т. П.* Сопряженные функции и узкий интеграл Данижуа.— Мат. сб., 1977, т. 104, № 1, с. 89—139.
43. *Лукашенко Т. П.* Интегралы Данижуа и сопряженные функции.— В кн.: Современные проблемы теории функций: Матер. Всесоюз. школы по теории функций. Баку, 1977. Баку: Изд. Азерб. гос. ун-та, 1980, с. 163—166.
44. *Лукашенко Т. П.* Сопряженные функции и интегралы.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 2, с. 435—449.
45. *Лукашенко Т. П.* Интегрируемые по Боксу неизмеримые функции.— Мат. заметки, 1975, т. 17, № 1, с. 49—56.
46. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
47. Математика в СССР за 15 лет. М.: Гостехтеориздат, 1932.
48. *Хадвицер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии / Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
49. *Иванов Л. Д.* Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975.
50. *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.

51. Besicovitch A. S. On the Kolmogoroff maximum and minimum measures.— Math. Ann., 1936, Bd. 113, N 3, S. 416—423.
52. Витушкин А. Г., Иванов Л. Д., Мельников М. С. Несомизмеримость минимальной линейной меры с длиной множества.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 6, с. 1256—1259.
53. Nöbeling G. Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen.— Math. Ztschr., 1942, Bd. 48, S. 747.
54. Nöbeling G. Über die Flächenmaße in Euklidischen Raum.— Math. Ann., 1943, Bd. 118, S. 687—701.
55. Federer H. The (ϕ, k) rectifiable subsets of n space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 62, N 1, p. 114—142.
56. Жильцов В. А. О единственности гипермер в евклидовых пространствах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, № 6, с. 1428—1436.
57. Витушкин А. Г. Доказательство полунепрерывности сверху вариации множества.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 5, с. 1022—1026.
58. Nagumo M. Über eine Klasse der Mittelwerte.— Jap. J. Math., 1930, vol. 7, p. 71—79.
59. Finetti B. de. Sul concetto di media.— G. Ist. ital. Attu. Ann., 1931, vol. 2, p. 369—396.
60. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства/ Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
61. Aczél J. The notion of mean values.— Kgl. norske vid. selsk. forh., 1946, bd 19, N 23, s. 83—86.
62. Aczél J. A generalization of the notion of convex functions.— Kgl. norske vid. selsk. forh., 1946, bd 19, N 24, s. 87—90.

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

(Е. П. Долженко)

В работах № 22, 24 обнаружены тонкие метрические свойства произвольных ограниченных разрывных функций. Здесь впервые установлена основная теорема о контингенциях плоских множеств: каково бы ни было множество на плоскости, множество точек, в которых контингенция этого множества не является либо плоскостью, либо полуплоскостью, либо прямой, имеет длину нуль, причем все точки, в которых контингенция не является плоскостью, располагаются на счетном числе спрямляемых кривых. Она получается в качестве простого следствия главного результата указанных работ, утверждающего, что множество не нормальных точек функции располагается на счетном числе спрямляемых кривых, а множество нелинейных не нормальных точек на каждой из этих кривых имеет длину нуль. В том же 1934 г. был опубликован результат А. С. Безикевича о том, что точки плоского множества, в каждой из которых у этого множества имеется касательная (т. е. контингенция является прямой или лучом), представляют собой объединение не более чем счетного числа множеств конечной длины.

Основная теорема о контингенциях является наглядным и чрезвычайно важным инструментом в исследовании геометрических свойств множеств, теории дифференцирования функций. В частности, эта теорема дает весьма простую геометрическую интерпретацию теореме Данжуа о производных числа. Несколько позже и независимо Ф. Роже доказал основную теорему о контингенциях для плоских и пространственных множеств. Позже исследования И. Я. Верченко и А. Н. Колмогорова были продолжены в работах И. Я. Верченко и Ф. И. Шмидова

(1935), У. Хаслам-Джонса (1936). Так называемые метрические контингенции рассматривались Ф. И. Шмидовым (1943). В дальнейшем идеи, использованные при доказательстве теорем о контингенциях, применялись в геометрической теории меры, теории многомерных вариаций, теории дифференцирования функций, теории моногенных функций и отображений.

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(С. А. Теляковский, В. М. Тихомиров)

1. Работа № 27 вызвала к жизни большое число исследований, приведших к созданию целого направления в теории приближений функций.

Обобщение работы А. Н. Колмогорова велось в разных направлениях. Изучались верхние грани уклонений не только частных сумм рядов Фурье, но и других средних, построенных с помощью рядов Фурье или интерполяционных полиномов. Верхние грани уклонений брались по другим классам функций, рассматривались уклонения в других метриках. Эта задача рассматривалась также для приближений алгебраическими многочленами, для функций многих переменных и т. п.

Первым значительным продолжением работы А. Н. Колмогорова был цикл работ С. М. Никольского, опубликованных в 1940—1946 гг. Поэтому изучение асимптотического поведения верхних граней уклонений

$$C_n(\mathfrak{M}, u) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - u_n(x, x)\| \quad (1)$$

иногда называют задачей Колмогорова — Никольского или говорят о константах Колмогорова — Никольского.

Укажем здесь только результаты, непосредственно продолжающие работу А. Н. Колмогорова, относящиеся к приближению частными суммами рядов Фурье $s_n(f, x)$.

Пусть W^p обозначает класс периодических функций f , у которых производная порядка $p - 1$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f^{(p-1)}(x) - f^{(p-1)}(y)| \leq |x - y|, \quad p = 1, 2, \dots$$

С. М. Никольский [1, 2] распространил оценку Колмогорова на классы $\overline{W}^p$, сопряженные с функциями класса W^p :

$$C_n(\overline{W}^p, s) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Он доказал также [3], что обе эти оценки справедливы и для приближений соответствующих классов функций в метрике L .

С. М. Никольский [4] рассмотрел также приближение функций класса H_ω , модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ которых удовлетворяет условию $\omega(f, \delta) \leq \omega(\delta)$, где $\omega(\delta)$ — некоторый выпуклый модуль непрерывности, и доказал оценку

$$C_n(H_\omega, s) = \frac{2 \log n}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ефимов [5] показал, что для многих классов $\mathfrak{M}$ выделение главного члена асимптотики величин $C_n(\mathfrak{M}, s)$ можно свести к нахождению верхней грани n -го коэффициента Фурье функций некоторого класса.

Изучался также вопрос, в какой мере верхние грани уклонений $C_n(\mathfrak{M}, s)$ могут достигаться на индивидуальной функции $f \in \mathfrak{M}$. Доронин [6] доказал, например, что в классе W^1 существует функция f такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f - s_n(f)\|}{C_n(W^1, s)} = 1,$$

а Осолков [7] показал, что верхний предел здесь нельзя заменить на предел. Точнее, он установил, что

$$\max_{f \in W^1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f - s_n(f)\|}{C_n(W^1, s)} = \frac{1}{2}.$$

Выяснялся характер зависимости от параметра p остаточного члена в асимптотической формуле Колмогорова. Соколов [8] установил оценку

$$C_n(W^p, s) \leq \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^p} + \frac{A}{n^p}$$

с абсолютной постоянной A . Теляковский [9] показал, что справедливо асимптотическое равенство

$$C_n(W^p, s) = \frac{4}{\pi^2 n^p} \log \frac{n}{\min(p, n)} + O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

равномерное по p и n . Эта оценка дает главный член асимптотики величин $C_n(W^p, s)$ при условии $p = o(n)$ и показывает, что если это условие не выполнено, то $C_n(W^p, s) = O(1/n^p)$ равномерно по n и p . Главный член асимптотики в указанном случае нашел Стечкин [10].

Приближение функций многих переменных прямоугольными частными суммами рядов Фурье изучали Бугаец, Степанец и др.

2. Работа № 28 определила новое направление исследований в теории приближений. Здесь была введена новая характеристика аппроксимативных свойств классов функций, получившая впоследствии название n -поперечника по Колмогорову или колмогоровского поперечника. Начиная с 60-х годов к поперечникам классов функций привлечено значительное внимание.

Если воспользоваться геометрическим языком, то можно сказать, что в работах Чебышева и его последователей изучались расстояния от конкретных функций до конкретных множеств (алгебраических или тригонометрических полиномов, рациональных функций). В работах Валле Пуссена, С. Н. Бернштейна, Джексона, Фавара и многих других изучались величины уклонений заданных функциональных классов от конкретных множеств.

В работе № 28 А. Н. Колмогоров предложил исследовать для заданного класса функций те множества, для которых соответствующие уклонения являются наименьшими. Точнее, в этой работе поставлен и для двух частных случаев решен вопрос о нахождении наилучших аппроксимирующих подпространств заданной размерности. Впоследствии стали изучать и другие подобные

характеристики, другие поперечники. В этом комментарии мы ограничиваемся только колмогоровскими поперечниками.

В своей работе А. Н. Колмогоров исследует вопрос о поперечниках классов функций, получивших сейчас название соболевских классов. Соболевским классом F_p^{q*} ($q \geq 1$, $p > 0$) называется класс периодических функций, у которых p -я производная в пространстве L^q ограничена единицей (производная понимается по Вейлю). Соответствующий непериодический класс обозначается F_p^q . В работе № 28 исследуются поперечники классов F_p^{2*} и F_p^2 для целых p . Было обнаружено, что в периодическом случае наилучшим аппроксимирующим подпространством размерности $2n + 1$ является пространство тригонометрических полиномов степени n , а в непериодическом случае — некоторое специальное подпространство функций, являющихся решением дифференциального уравнения порядка $2p$.

Естественность появления тригонометрической системы для приближений в периодическом случае [в пространстве L^2 была настолько велика, что А. Н. Колмогоров высказывает в работе № 28 предположение о единственности (с точностью до линейного преобразования) этого классического аппроксимирующего аппарата. Но здесь ситуация оказалась сложнее. Оказалось, что в задаче о поперечниках существенна неоднозначность решения, о чем будет сказано ниже.

После работы № 28 и до конца 50-х годов поперечникам по Колмогорову было посвящено немного работ. Рудин [11] исследовал поперечники классов F_1^1 в метрике L_2 . В работах [12, 13] был вычислен поперечник n -мерного октаэдра в гильбертовом пространстве, результаты этих работ были приложены Стечкиным [14] для вычисления порядка поперечников классов F_p^∞ в C и F_p^1 в L_2 .

В конце 50-х годов появились работы, которые возбудили новый интерес к проблематике.

В работах [15, 16] и ряде последующих (некоторые итоги этих исследований подведены в [17]) Бабенко стал исследовать поперечники классов функций многих переменных и связывать эти вопросы с задачами вычислительной математики.

В работах Тихомирова [18, 19] с помощью впервые примененных в этом круге вопросов топологических методов были вычислены точные значения поперечников по Колмогорову классов F_p^∞ и $F_p^{\infty*}$ в пространстве C .

При этом была обнаружена существенная неоднозначность наилучшего аппроксимирующего аппарата и, в частности, установлено, что даже в периодическом случае наряду с классическим аппаратом приближения — пространством тригонометрических полиномов — столь же точно приближают соболевские классы пространства сплайнов.

В дальнейшем была полностью исследована задача о порядке поперечников соболевских классов F_p^{q*} в метрике $L^{q'}$. При этом было установлено, что при $q \geq q'$ и при $q < q'$, $1 \leq q' \leq 2$, решение задачи дают тригонометрические полиномы (см. об этом в монографии [20]). Исмагилов [21] впервые установил, что существуют пары F_p^{q*} , $L^{q'}$, для которых тригонометрическое приближение неоптимально по порядку. Полное решение задачи о порядке поперечников собо-

левских классов было дано Капиным [22]. Впоследствии было выяснено, что во многих случаях наилучший порядок дают не тригонометрические полиномы, а подпространства, натянутые на экспоненты с разбросанными гармониками. Точное решение находили Митчелли, Пинкус и др. (см. [27]).

Корнейчуком [23] была точно решена принципиальная задача о поперечниках в пространстве C класса периодических функций с заданной оценкой модуля непрерывности производной порядка p .

Были найдены также поперечники некоторых классов аналитических функций. При этом постановка задачи о поперечниках привела здесь к принципиально новым методам (Ерохин [24]).

Описание всех экстремальных подпространств эллипсоида (частным случаем эллипсоидов являются классы, изучаемые в работе № 28) дал Карлович [25]. Подробная библиография содержится в книге [27].

3. Работа № 49 посвящена перенесению некоторых теорем теории равномерных приближений с функций действительного переменного на комплексные функции. Рассматриваются приближения полиномами по системе функций $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ и даются обобщения теоремы Чебышева о характеристическом свойстве полинома наилучшего приближения и теоремы Хаара о единственности.

Характеристическое свойство полинома наилучшего приближения, содержащееся в теореме 1, для приближений классическими многочленами, т. е. для $\varphi_k(z) = z^{k-1}$, было известно (Тонелли [26]).

После этой работы А. Н. Колмогорова появились исследования характеристических свойств элементов наилучшего приближения и вопросов единственности в более общей ситуации. Рассматривались функции со значениями в абстрактных пространствах, приближения элементов банаховых пространств.

Например, В. Н. Никольский [28] нашел критерий элемента наилучшего приближения при приближении в комплексном банаховом пространстве элементами произвольного подпространства. Этот критерий формулируется в терминах, близких к теореме 1 работы № 49, но вместо значений функций в точках участвуют значения линейных функционалов на элементах банахова пространства. Вопрос о том, какое множество функционалов здесь нужно брать, изучали Зингер [29], Шоке [30], Гаркави [31].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье.— ДАН СССР, 1941, т. 32, с. 386—389.
2. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.— Тр. МИАН СССР, 1945, т. 15.
3. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, с. 207—256.
4. Никольский С. М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности. ДАН СССР, 1945, т. 52, с. 191—194.
5. Ефимов А. В. Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, с. 115—134.
6. Доронин Г. Я. Некоторые неравенства для приближений тригонометрическими полиномами.— ДАН СССР, 1949, т. 69, с. 487—490.
7. Осолоков К. И. Оценка приближения непрерывных функций подпоследовательностями сумм Фурье.— Тр. МИАН СССР, 1975, т. 134, с. 240—253.

8. Соколов И. Г. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций.— ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 23—26.
9. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье.— Мат. заметки, 1968, т. 4, с. 291—300.
10. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций.— Тр. МИАН СССР, 1980, т. 145, с. 126—151.
11. Rudin W. L_2 -approximation by partial sums of orthogonal developments.— Duke Math. J., 1952, vol. 19, N 1, p. 1—4.
12. Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, с. 561—566.
13. Мальцев А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов».— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, с. 587—588.
14. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении заданных классов любыми полиномами.— УМН, 1954, т. 9, вып. 1, с. 133—134.
15. Бабенко К. И. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами.— ДАН СССР, 1960, т. 132, с. 247—250.
16. Бабенко К. И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, с. 982—985.
17. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики/Под ред. К. И. Бабенко. М.: Наука, 1979.
18. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений.— УМН, 1960, т. 15, вып. 3, с. 81—120.
19. Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования в пространстве $C([-1, 1])$.— Мат. сб., 1967, т. 80, № 2, с. 290—304.
20. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
21. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами.— УМН, 1974, т. 29, вып. 3, с. 161—178.
22. Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т. 41, с. 334—351.
23. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971, т. 35, № 1, с. 93—124.
24. Ерохин В. Д. О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитически продолжаемых с данного континуума в данную область.— УМН, 1968, т. 23, вып. 1, с. 91—119.
25. Karlovitz L. On a class of Kolmogorov n -width problems.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat., 1973, vol. 53, N 3—4, p. 241—245.
26. Tonelli L. I polinomi d'approssimazione di Tchebychev.— Ann. mat., 1908, vol. 15, N 3, p. 47—119.
27. Pinkus A. n -widths in approximation theory. Berlin, Spring-Verl., 1985.
28. Никольский В. Н. Наилучшее приближение элементами выпуклых множеств в линейных нормированных пространствах.— Уч. зап. Калинин. гос. пед. ин-та, 1963, т. 29, с. 85—119.
29. Singer I. Choquet spaces and best approximation.— Math. Ann., 1962, Bd. 148, N 4, S. 330—340.
30. Choquet G. Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés.— Rev. math. pures et appl. (RPR), 1963, vol. 8, N 4, p. 541—542.
31. Гаркави А. Л. О критерии элемента наилучшего приближения.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 2, с. 472—476.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

(В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев)

Первые результаты, относящиеся к исследованию неравенств для производных вида

$$\|x^{(k)}\|_{L_q(I)} \leq K \|x\|_{L_p(I)}^\alpha \|x^{(n)}\|_{L_r(I)}^\beta \quad (1)$$

($0 \leq k < n$ — целые, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\alpha, \beta \geq 0$ и $I = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$), были получены в работах Ландау [1] и Адамара [2]. Там были найдены точные константы в (1) при $k = 1$, $n = 2$, $p = q = r = \infty$ в случаях $I = \mathbb{R}_+$ (Ландау) и $I = \mathbb{R}$ (Адамар).

В конце 30-х годов А. Н. Колмогоров поставил перед своим курсовиком, впоследствии замечательным математиком Шиловым, задачу распространить неравенство Адамара на произвольные k и n . Шилов доказал ряд частных результатов (составивших его первую научную публикацию) и сформулировал верную гипотезу относительно общего случая. Гипотеза состояла в том, что при $p = q = r = \infty$, $I = \mathbb{R}$ экстремальной функцией в неравенстве (1) (т. е. функцией, на которой неравенство обращается в равенство) является периодическая функция, n -я производная которой принимает одинаковые по модулю значения, чередуя знаки на равных интервалах. Такие функции изучал еще Эйлер, а незадолго до описываемых событий интерес к этим функциям был вновь возрожден известными работами Фавара, Ахизера и Крейна. Доказать свою гипотезу Шилов не смог. А. Н. Колмогоров сам увлекся этой задачей и получил ее полное решение. Этот результат и поныне остается наиболее ярким во всей проблематике, связанной с неравенствами вида (1).

В комментируемой работе № 40 сформулирована более общая задача, а именно задача о неравенствах между произвольными конечными наборами норм в $L_\infty(\mathbb{R})$ последовательных производных. Такая постановка возможна и на других многообразиях, а не только на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$. Некоторые частные результаты в этом направлении для $L_\infty(\mathbb{R})$ получены Родовым [3] и Дзядыком и Дубовиком [4, 5]. В работе Динь Зунга и Тихомирова [6] указанная задача полностью решена для функций из $L_2(\mathbb{R}^N)$ и $L_2(\mathbb{T}^1)$ и дробных производных. Важнейший частный случай, когда $I = \mathbb{R}^N$, $p = q = r = 2$, был изучен ранее в диссертации Субботина [7]. По-видимому, случай $p = q = r = 2$ единственный, когда в общей постановке задача может быть исследована до конца.

При доказательстве основной теоремы А. Н. Колмогоровым был установлен ряд вспомогательных утверждений, которые впоследствии многократно использовались при доказательстве некоторых результатов теории приближений и в других вопросах (Корнейчук, Тайков, Габушин и др.).

Стечкин [8] обнаружил тесную связь между задачей о вычислении точной константы в (1) и задачей о наилучшем приближении оператора дифференцирования на соответствующем классе функций. Эти исследования вызвали новый интерес к проблематике, связанной с неравенствами (1).

Результаты по своей завершенности, подобные колмогоровскому (т. е. когда вычислена точная константа в (1) для всех k и n и некоторых p, q и r), получены еще всего лишь в трех случаях на прямой: Харди — Литтлвуд — Поляна

[9] ($p = q = r = 2$); Штейн [10] ($p = q = r = 1$); Тайков [11] ($q = \infty, p = r = 2$) и в двух случаях на полупрямой: Любич [12], Купцов [13] ($p = q = r = 2$); Габушин [14] ($q = \infty, p = r = 2$). Некоторые качественные и количественные аспекты в задаче при $p = q = r = \infty, I = R_+$ были получены Шенбергом и Кавареттой и Тихомировым. Кроме того, нам известно порядка 20 частных случаев. Арестов: $I = R$ или $R_+, k = 1, n = 2, p = \infty, q$ и r любые; $I = R$ или $R_+, k = 1, 2, n = 3, p = q = \infty, r$ любое; Бердышев: $I = R_+, k = 1, n = 2, p = q = r = 1$; Габушин: $I = R, k = 0, 1, n = 2, p$ любое, $q = r = \infty$; Магарил-Ильяев: $I = R_+, k = 0, 1, n = 2, p$ любое, $q = r = \infty$; $I = R$ или $R_+, k = 0, 1, n = 2, p = 1, q = \infty, r > 1$; Маторин: $I = R_+, k = 1, 2, n = 3, p = q = r = \infty$; Надь: $I = R$ или $R_+, k = 0, n = 1, p, q, r$ любые; Соляр: $I = R, 2k = n, q = 2, p$ любое, $r = p/(p - 1)$. Ссылки на все эти результаты содержатся в [15]. В работе [16] доказана одна теорема двойственности для неравенства (1), когда $q = \infty$. Из этой теоремы получаются следующие точные результаты: $I = R$ или $R_+, k = 0, n = 2, p$ любое, $q = \infty, r = 1$; $I = R$ или $R_+, k = 1, n = 3, p$ любое, $q = \infty, r = 1$. Отметим еще работу [17], где разобран один случай неравенства (1), когда k дробное, а n целое.

Буслаев получил точные неравенства в случаях: $I = R, 0 < k < n, n = 2, 3, n/q = (n - k)/p, r = \infty$ [18]. Здесь нет теоремы существования, однако наилучшая константа в неравенстве достигается на последовательности функций, сходящихся в пределе к функции, являющейся экстремалью в собственном колмогоровском неравенстве ($I = R, p = q = r = \infty, 0 < k < n$).

Подобные точные неравенства представляют несомненный интерес для теории экстремальных задач — это ее полигон. Почти все неравенства могут быть установлены непосредственным применением стандартных методов теории или незначительными их модификациями (частично об этом см. Алексеев, Галеев, Тихомиров [19, § 12]). По нашему мнению, число точных результатов не может значительно увеличиться в будущем, поскольку это связано с необходимостью решать трудные нелинейные уравнения. Поэтому интересны разного рода качественные вопросы, которые могут заложить основы общей теории нелинейных уравнений, подобных тем, которые возникают как уравнения Эйлера соответствующих экстремальных задач. Среди работ, относящихся к этой тематике, укажем работы Арестова [20], Габушина [21, 22] (в [21] получен критерий существования неравенства (1)), Буслаева, Магарил-Ильяева и Тихомирова [23] (где доказана теорема существования экстремальных функций в неравенстве (1)), Квонга и Зетгла [24].

Мультипликативные неравенства вида (1) для функций многих переменных играют важную роль в теории уравнений с частными производными и в теории вложения классов гладких функций. Вопросы существования такого сорта неравенств рассмотрены, например, в работах Бесова [25], Бесова, Ильина и Никольского [26], Магарил-Ильяева [27]. Что касается точных результатов, то, помимо уже цитированных работ [6, 7], отметим работы Коновалова [28] и Буслаева и Тихомирова [29].

Аналогичную роль играют неравенства (1) и для периодических функций. Вопросам существования посвящены работы [25, 26] и работа Клоца [39]. Ряд точных неравенств установлен в работах Лигуна.

Классическое неравенство Колмогорова послужило отправным моментом для

осмысления вообще функционально аналитической природы мультипликативного неравенства. В частности, изучались такие неравенства для степеней операторов, определенных на абстрактных гильбертовых и банаховых пространствах. Здесь следует указать на пионерскую работу Любича [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differentzierbare Funktionen.— Proc. London Math. Soc., 1913, vol. 2, № 13, p. 43—49.
2. Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees.— C. r. séances Soc. math., 1914, vol. 41, p. 68—72.
3. Родов А. М. Зависимость между верхними гранями производных функции действительного переменного.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, с. 257—270.
4. Дзядык В. К., Дубовик В. А. К проблеме А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси.— Укр. мат. журн., 1974, т. 26, № 3, с. 300—317.
5. Дзядык В. К., Дубовик В. А. К неравенствам А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси.— Укр. мат. журн., 1975, т. 27, № 3, с. 291—299.
6. Динь Зунг, Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в метрике $\mathcal{L}_2$.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1979, № 2, с. 7—11.
7. Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами: Докт. дис. Свердловск, 1973.
8. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов.— Мат. заметки, 1967, т. 1, № 2, с. 137—148.
9. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства / Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
10. Stein E. M. Functions of exponential type.— Ann. Math., 1957, vol. 65, № 3, p. 582—592.
11. Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования.— Мат. заметки, 1968, т. 4, № 2, с. 233—238.
12. Любич Ю. И. О неравенствах между степенями линейного оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, с. 825—864.
13. Купцов Н. П. Колмогоровские оценки для производных в $L_2 [0, \infty)$.— Тр. МИАН СССР, 1975, т. 138, с. 94—117.
14. Габушин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой.— Мат. заметки, 1969, т. 6, № 5, с. 573—582.
15. Магарил-Ильяев Г. Г. Вложение обобщенных соболевских классов и неравенства для производных: Канд. дис. М.: МГУ, 1980.
16. Магарил-Ильяев Г. Г. Неравенства для производных и двойственность.— Тр. МИАН СССР, 1983, т. 161, с. 183—194.
17. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенстве Колмогорова для дробных производных на полупрямой.— Anal. math., 1981, vol. 7, N 1, p. 37—47.
18. Буслаев А. П. О точных константах и неравенствах для производных.— В кн.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. Минск, 1982, с. 29.
19. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1983.
20. Арестов В. В. О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования.— Мат. заметки, 1969, т. 5, № 3, с. 273—284.
21. Габушин В. Н. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p .— Мат. заметки, 1967, т. 1, № 3, с. 291—298.
22. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах.— Мат. заметки, 1970, т. 8, № 5, с. 551—562.
23. Буслаев А. П., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О существовании эк-

- стремальных функций в неравенствах для производных.— Мат. заметки, 1982, т. 32, № 6, с. 823—833.
24. *Kwong M. K., Zettl A.* Ramifications of Landau's inequality.— Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1980, vol. 86A, p. 175—212.
25. *Бесов О. В.* Мультипликативные оценки для интегральных норм дифференцируемых функций многих переменных.— Тр. МИАН СССР, 1974, т. 131, с. 3—15.
26. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
27. *Магариш-Ильяев Г. Г.* Задача о промежуточной производной.— Мат. заметки, 1979, т. 25, № 1, с. 81—96.
28. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных.— Мат. заметки, 1978, т. 23, № 1, с. 67—78.
29. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных в многомерном случае.— Мат. заметки, 1979, т. 25, № 1, с. 59—74.
30. *Клоц Б. Е.* Приближения дифференцируемых функций функциями большей гладкости.— Мат. заметки, 1977, т. 21, № 1, с. 21—32.

КОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Е. А. Горин)

Работа № 41 явилась одной из первых, где по существу обсуждается тезис: «если X — топологическое пространство с достаточно благополучной топологией и $C(X)$ — совокупность всех действительных (или комплексных) непрерывных функций на X , то снабженное достаточно богатой алгебраической или топологической структурой $C(X)$ определяет X с точностью до гомеоморфизма». Существуют (хаусдорфовы и регулярные) топологические пространства вообще без непрерывных действительных функций, кроме констант. В этой связи по соображениям, приведенным в работе, пространство X разумно предполагать вполне регулярным и, более того, хотя бы сначала — компактом (не обязательно метризуемым).

Разумеется, дополнительные операции и структуры на $C(X)$ предполагаются согласованными с естественными поточечными. Имея это в виду и считая для простоты X компактом, мы можем наделить $C(X)$ структурой аддитивной группы, векторного пространства, мультипликативной полугруппы, решетки, метрического пространства с метрикой, порожденной $\sup$ -нормой, банахова пространства, кольца, алгебры, топологического векторного пространства, топологической (банаховой) алгебры и т. д. Часть из названных структур слаба для идентификации компакта X . Например, аддитивные группы всех сепарабельных банаховых пространств изоморфны. В качестве векторного пространства $C(X)$ позволяет отличить бесконечные метрические компакты от конечных и в последнем случае определить число элементов. Первые примеры негомеоморфных метрических компактов X с топологически изоморфными векторными пространствами $C(X)$ указывали Банах и Борсук еще в начале 30-х годов, а в 1951 г. Милютин установил, что все пространства $C(X)$, где X — несчетный метрический компакт, линейно топологически изоморфны между собой. С другой стороны, класс изометрии $C(X)$ определяет X с точностью до гомеоморфизма (Банах, 1932; предположение о метризуемости X в этой теореме в даль-

нейшем было снято Стоуном). $C(X)$ определяет X и как векторная решетка (Какутани, 1941).

В первой части данной работы устанавливается, что алгебраический изоморфизм $C(X)$ и $C(Y)$ влечет за собой гомеоморфность компактов X и Y . По нашему мнению, значение этой части работы не столько в том, что данный результат является формальным усилением предшествующей теоремы Стоуна — Шилова, которые предполагали наличие топологического изоморфизма между алгебрами $C(X)$ и $C(Y)$, сколько в методе, основанном на идентификации максимальных идеалов с точками компакта. Во второй части, где речь идет об алгебрах $C'(X)$ ограниченных непрерывных функций на произвольном вполне регулярном пространстве, существенно используются чеховские расширения. И здесь, на наш взгляд, важнее доказанных теорем соображения, позволяющие в алгебраических терминах описать чеховское расширение. В дальнейшем эти идеи развивались: беря вместо $C'(X)$ ту или иную подалгебру, в качестве «пространства максимальных идеалов» можно получать различные полезные компактификации исходного пространства X . Безусловный интерес представляют и схемы доказательств, различные модификации которых в дальнейшем применялись при исследовании максимальных идеалов других симметричных алгебр функций.

Названная в начале предыдущего абзаца теорема фактически сводится к рассмотрению топологического изоморфизма алгебр. Действительно, если, например, основное поле — действительные числа, то неотрицательность функции равносильна представимости ее в виде квадрата, а это свойство сохраняется при изоморфизме. Поэтому сохраняются соотношения $f \geq g$, откуда вытекает непрерывность. Сам по себе факт автоматической непрерывности изоморфизма сохраняется для алгебраических изоморфизмов и комплексных алгебр всех непрерывных функций. Более того, в дальнейших исследованиях Гельфанда было обнаружено, что каждый гомоморфизм из банаховой алгебры в полупростую коммутативную банахову алгебру автоматически непрерывен. Это, конечно, влечет за собой автоматическую непрерывность изоморфизмов полупростых коммутативных банаховых алгебр. Оказалось (Джонсон, 1967), что и коммутативность здесь не важна: каждый эпиморфизм из банаховой алгебры на полупростую банахову алгебру непрерывен. С другой стороны, в допущении континуум-гипотезы для каждого бесконечного компакта X имеются разрывные мономорфизмы из $C(X)$ в некоторую банахову алгебру (так что норма на $C(X)$ допускает разрывное усиление; Далес, Эстерль, 1977).

Если компакт X обладает дополнительной структурой, например является гладким или аналитическим многообразием с краем, то вместо всего $C(X)$ имеет смысл рассматривать его подпространства и подалгебры. Пусть для простоты X — выпуклый компакт в комплексном евклидовом пространстве C^n и $A(X)$ состоит из непрерывных функций, аналитических внутри X . Относительно естественных операций и нормы $A(X)$ является замкнутой подалгеброй в $C(X)$ и, как и в случае $C(X)$, максимальные идеалы $A(X)$ соответствуют точкам. Алгебраический изоморфизм между двумя такими алгебрами $A(X)$ и $A(Y)$ оказывается топологическим и индуцирует гомеоморфизм между X и Y , сохраняющий аналитическую структуру внутри. Этот факт по существу есть легкое следствие общих теорем теории банаховых алгебр. В частности, если X — шар, Y — полидиск и $n \geq 2$, то ввиду теоремы Пуанкаре $A(X)$ и $A(Y)$ неизоморфны. Более тон-

кий результат принадлежит Хенкину (1968): в последнем случае $A(X)$ и $A(Y)$ неизоморфны даже как банаховы пространства.

В последней части работы рассматривается алгебра $C(X)$ всех непрерывных функций на произвольном вполне регулярном пространстве X . Такую алгебру, вообще говоря, не удастся снабдить какой-либо топологией с хорошими свойствами, и поэтому принятый в работе подход, связанный с рассмотрением $C(X)$ как чисто алгебраической структуры, в этой ситуации выглядит особенно естественно. Результаты последней части данной работы получили непосредственное дальнейшее развитие в исследованиях Хьюитта, Нагаты, Сироты и многих других. Если от произвольных пространств X перейти, например, к многообразиям Штейна и взять совокупность $A(X)$ голоморфных функций, то возникают вопросы типа обсуждавшихся выше, но за пределами банаховых пространств.

Снабдим $A(X)$ топологией равномерной сходимости на компактах. Топологический изоморфизм векторных пространств $A(X)$ и $A(Y)$, вообще говоря, не приводит к (биголоморфной) эквивалентности многообразий, например, такие пространства в шаре и полидиске той же размерности изоморфны. Однако для полидисков различной размерности изоморфизма пространств уже нет, и первые доказательства были основаны на оценках ε -энтропии компактов в этих пространствах (А. Н. Колмогоров, 1958). Заметим, кстати, что алгебраический изоморфизм алгебр $A(X)$ непрерывен и порождает биголоморфную эквивалентность многообразий.

Таким образом, данная небольшая по объему работа может рассматриваться в качестве одного из источников многочисленных и разнообразных исследований. Наряду с работами Стоуна и Шилова она явилась одной из первых работ, где общеалгебраическая идея максимального идеала и новая концепция пространства максимальных идеалов были с успехом привлечены к проблемам теоретико-множественной топологии. С неменьшим успехом в применении к проблемам математического анализа эта концепция проявляется в возникшей в конце 30-х годов гильбертовской теории коммутативных банаховых алгебр над полем комплексных чисел (в этом, кстати, ее отличие от общей теории коммутативных колец, где главную роль играют не максимальные, а простые идеалы; в отличие от простых идеалов максимальные идеалы банаховой алгебры замкнуты). Впрочем, не лишне, быть может, отметить, что в успехе этой теории принципиальную роль сыграл выбор в качестве основного именно поля комплексных чисел, что позволило не только установить естественное биективное соответствие между максимальными идеалами и комплексными гомоморфизмами, но и привлечь аппарат комплексного анализа для изучения алгебр, весьма далеких от $C(X)$, что зачастую приводит к глубоким результатам, не имеющим простых вещественных аналогов.

КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Ю. А. Розанов)

В работах № 42 и 43 рассматриваются функции $t \rightarrow \xi(t)$ действительного переменного t со значениями $\xi(t) \in H$ в гильбертовом пространстве, для которых преобразования сдвига и подобия в пространстве переменного t индуцируют аналогичные преобразования в пространстве H над $\xi(t)$. При реализации H как

гильбертова пространства (типа L_2) случайных величин речь идет о случайных процессах со стационарными приращениями и их подклассах (стационарных процессах, процессах со стационарными ортогональными приращениями, винеровском процессе) с точки зрения их корреляционной и спектральной структуры. Непосредственным продолжением работ № 41 и 42 явились многочисленные исследования различных авторов, посвященные случайным функциям на группах и однородных пространствах, а также обобщенным случайным функциям, соответствующие классы которых (случайные поля с однородными приращениями и др.) были охарактеризованы с точки зрения их корреляционной и спектральной структуры, что потребовало, в частности, соответствующей характеристики положительно определенных функций, обобщающей известную теорему Бохнера — Хинчина (основные результаты и библиографию можно найти, например, в книге [1]). Нужно отметить, что классы случайных функций $\xi(t)$, те или иные вероятностные свойства которых подобно-инвариантны относительно преобразования подобия над переменным t , оказались важными в различных приложениях, в частности в статистической физике (см. по этому поводу, например, книгу [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. М.: Физматгиз, 1961.
2. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.

К РАБОТАМ ПО ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКЕ

А. Н. Колмогоров

Работа № 9 (ПТНД) мыслилась мной как вводная часть более широкого замысла. Построение в рамках интуиционистской математики моделей различных разделов классической математики должно было служить для обоснования их непротиворечивости (непротиворечивость интуиционистской математики при этом считалась следствием ее интуитивной убедительности). Для обоснования непротиворечивости классической логики высказываний такой путь, конечно, излишен, но предполагалось, что метод окажется применимым и к обоснованию непротиворечивости классической арифметики (ср. работу Гёделя 1933 г.).

Работа № 19 (ТИЛ) писалась в надежде на то, что логика решения задач делается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

(В. А. Успенский, В. Е. Плиско)

Обе логико-математические работы А. Н. Колмогорова — «О принципе *tertium non datur*»¹ (№ 9 наст. изд.) [9] и «К толкованию интуиционистской логики» (№ 19 наст. изд.) [10] (в дальнейшем будем обозначать их ПТНД и ТИЛ) — посвящены интуиционистской логике. Они были написаны в то время, когда изучение неклассических логических систем только начиналось. Многие вопросы, впервые рассмотренные в этих работах, впоследствии были исследованы другими авторами. Известный специалист в области математической логики Ван Хао в своем предисловии [42] к английскому переводу ПТНД в [30] пишет: «Эта статья в большой степени предвосхитила не только гейтингову формализацию интуиционистской логики, но и результаты о переводимости классической математики в интуиционистскую. Она устанавливает важную связь между интуиционизмом и другими исследованиями по основаниям математики». В предисловии к хрестоматии [30] ее составитель отмечает, что ПТНД представляет собой первое систематическое исследование интуиционистской логики.

Цель настоящего комментария — проследить развитие идей, выдвинутых А. Н. Колмогоровым в его логико-математических работах.

Текст статьи ПТНД перепечатывается в настоящем издании без существенных изменений (исправлены только замеченные опечатки). Статья ТИЛ переведена с немецкого. При переводе несколько изменена запись логических формул: вместо принятой в оригинале точечной системы записи (см. [24, § 11]), ныне редко употребляемой, используется более привычная для современного читателя скобочная система. Эта же скобочная система принята и в ПТНД, и в настоящем комментарии.

При записи пропозициональных формул мы придерживаемся символики, которая использована в ТИЛ. Она несколько отличается от символики, принятой в ПТНД. Именно мы пишем $\supset$ вместо $\rightarrow$ для обозначения импликации, $\neg A$ вместо $\bar{A}$ для обозначения отрицания; в качестве пропозициональных переменных мы используем строчные латинские буквы (в ПТНД используются прописные буквы). Квантор всеобщности в ПТНД и ТИЛ записывается в виде (x) , а квантор существования в ПТНД — в виде (Ex) (в ТИЛ квантор существования не встречается); мы пользуемся современными формами записи: $\forall x$ и $\exists x$.

I

Интуиционистское направление в математике (называемое в ПТНД «интуитивистским») возникло в начале XX в. благодаря работам Брауэра, Вейля и др. Философские и методологические предпосылки интуиционизма изложены, например, в книге Гейтинга [3], где, в частности, говорится:

«К интуиционистам мы относим тех математиков, которые принимают следующие два принципа:

1. Математика обладает не только чисто формальным, но и содержательным значением.

¹ *Tertium non datur* (лат.) — третьего не дано.

2. Математические предметы непосредственно постигаются мыслящим духом; следовательно, математическое познание не зависит от опыта».

Первый принцип противопоставляет интуиционизм формалистской точке зрения, принятой в качестве рабочего методологического принципа гильбертовой школой обоснования математики. Как отмечается в ПТНД, гл. I, формалистская (называемая в ПТНД «формальной») точка зрения на математику утверждает, что математика представляет собой совокупность предложений определенного формализованного языка, выводимых из некоторой системы аксиом, причем выбор аксиом произволен и подчиняется лишь более или менее условным соображениям практического удобства, а также обязательному требованию непротиворечивости. Вопрос об истинности или ложности математических суждений с формалистской точки зрения не имеет смысла. Можно говорить лишь об их доказуемости или опровержимости на основе аксиом.

Таким образом, первый из перечисленных принципов интуиционизма признает за математикой существование предмета ее исследования, однако второй принцип объясняет его исключительно продуктом мышления, отрицая какой бы то ни было объективный, независимый от мышления характер математических предметов.

Отвергая связь истинности математических суждений с опытом, в качестве единственного критерия истинности в математике Брауэр провозглашает интуицию. При этом, как указывает Гейтинг [3, с. 20], брауэровскую интуицию не следует понимать в каком-то «мистическом» смысле. Речь идет лишь о том, что согласно концепции Брауэра математические объекты рождены человеческой мыслью и потому истинность суждений о них полностью определяется представлениями (об этих объектах) того математика, в сознании которого сложились эти объекты. Строго говоря, с точки зрения интуиционизма сколько математиков — столько и математик. Однако в силу каких-то общих свойств человеческого мышления возможно образование в сознании разных людей сходных математических понятий. К ним относится, например, понятие натурального числа. Отправляясь от этого понятия, на основе интуиционистских представлений может быть развита своеобразная математическая теория.

Исходные философские предпосылки интуиционизма оказались неприемлемыми для значительной части математиков и были подвергнуты обоснованной критике. Так, А. Н. Колмогоров в предисловии к книге [3] пишет: «Мы не можем согласиться, что математические объекты являются продуктом конструктивной деятельности нашего духа. Для нас математические объекты являются абстракциями реально существующих форм независимой от нашего духа действительности». Однако и интуиционистская критика классической теоретико-множественной математики оказалась весьма плодотворной для математики в целом, так как привлекла внимание к проблемам конструктивного образования абстрактных математических понятий и к вопросу о границах применимости классической логики.

С точки зрения интуиционизма как конструирование математических объектов, так и рассуждения о них должны подчиняться критерию интуитивной ясности и убедительности. Касаясь отношений между математикой и логикой, Гейтинг [3, с. 22] указывает, что в интуиционистской математике умозаключения не производятся по заранее установленным правилам (как в формалистской концеп-

дии Гильберта), т. е. не фиксируется какая-либо априорная логическая система. Убедительность каждого логического шага должна проверяться непосредственно в соответствии с интуицией. Это, однако, не исключает существования общих правил, по которым из одних истинных математических предложений интуитивно ясным путем получаются другие истинные математические предложения. Таким образом, имеет смысл говорить об интуиционистской логике как о совокупности интуитивно приемлемых способов математических умозаключений. Основоположник интуиционизма Брауэр предпринял анализ принципов аристотелевой логики и пришел к выводу, что применимость закона исключенного третьего (*tertium] non datur*), выражаемого логической формулой $a \vee \neg a$, не во всех случаях можно считать очевидной.

II

В работе ПТНД впервые предпринимается попытка построения формальной логической системы, которая содержала бы только интуиционистски приемлемые законы логики высказываний. С этой целью подвергается критическому анализу система аксиом классической логики, предложенная Гильбертом. В результате формулируется следующая система аксиом интуиционистской логики, обозначаемая $\mathfrak{B}$:

1. $a \supset (b \supset a)$;
2. $(a \supset (a \supset b)) \supset (a \supset b)$;
3. $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$;
4. $(b \supset c) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$;
5. $(a \supset b) \supset ((a \supset \neg b) \supset \neg a)$.

Другие законы логики высказываний разрешается получать из этих аксиом с помощью правила подстановки и правила заключения, или правила «модус поненс», позволяющего от формул $A \supset B$ и A перейти к формуле B .

Система $\mathfrak{B}$ (как и рассматриваемая в ПТНД гильбертова система аксиом для классической логики высказываний) содержит логические законы, касающиеся импликации и отрицания, в то время как, скажем, дизъюнкция и конъюнкция остаются вне поля зрения. В этом заключается некоторая ограниченность предлагаемой системы. Однако заметим, что связи $\supset$ и $\neg$ выражают наиболее важные с логической точки зрения отношение следования и операцию отрицания, а дополнительные аксиомы, разъясняющие смысл конъюнкции и дизъюнкции (например, упоминаемые в ПТНД аксиомы Аккермана для дизъюнкции), могут быть без изменений перенесены из классической логики в интуиционистскую. Кроме того, именно ограниченность системы $\mathfrak{B}$ делает результаты о возможности погружения в нее классической логики особенно сильными.

Пополненная естественными логическими законами для дизъюнкции и конъюнкции система $\mathfrak{B}$ превращается в так называемое минимальное исчисление. Это исчисление и термин «минимальное» были введены Иогансоном [33]. Чёрч [24, § 26] называет минимальное исчисление «минимальным пропозициональным исчислением Колмогорова и Иогансона». Оправданием такой терминологии служит не только основополагающая роль А. Н. Колмогорова в формировании минимального исчисления, но и следующий факт: всякая формула, выводимая в минимальном исчислении и содержащая лишь знаки импликации и отрицания, выводима и в колмогоровской системе $\mathfrak{B}$.

В § 3 главы V работы ПТНД рассматриваются интуитивно очевидные предикатные аксиомы:

$$I. \forall x (A(x) \supset B(x)) \supset (\exists x A(x) \supset \forall x B(x));$$

$$II. \forall x (A \supset B(x)) \supset (A \supset \forall x B(x));$$

$$III. \forall x (A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C);$$

$$IV. A(x) \supset \exists x A(x)$$

и правило вывода P , позволяющее от формулы A перейти к формуле $\forall x A$. После присоединения этих аксиом и правила P к системе $\mathfrak{B}$ возникает некоторый вариант интуиционистского исчисления предикатов. Аналогичным путем из минимального пропозиционального исчисления получается минимальное исчисление предикатов.

Таким образом, система $\mathfrak{B}$, введенная в работе ПТНД, является первой аксиоматизацией интуиционистской логики высказываний, а ее предикатное расширение — первой аксиоматизацией интуиционистской логики предикатов. Позднее другие системы интуиционистской логики (с более широким запасом вводимых формул) были предложены Гливенко [28], Гейтингом [31], Генценом [27]. Все они оказались эквивалентными в том смысле, что в них выводимы одни и те же логические принципы. Особенностью системы $\mathfrak{B}$ и минимального исчисления, отличающей их от системы Гейтинга и эквивалентных ей систем, является неприятие логического принципа

$$\neg a \supset (a \supset b).$$

По мнению А. Н. Колмогорова, эта формула не имеет интуитивных оснований «как утверждающая нечто о последствиях невозможного: мы обязаны признать B , если признали ложным истинное суждение A » (ПТНД, гл. II, § 4).

Невозможно доказать адекватность представления интуиционистской логики посредством какой-нибудь системы аксиом, если сама эта логика не имеет точной семантики. Все же, независимо от каких-либо семантических уточнений, наибольшее признание получила система аксиом, предложенная Гейтингом (как и в ТИЛ, мы сохраняем нумерацию аксиом, назначенную Гейтингом [31]):

$$2.1 \ a \supset a \wedge a$$

$$2.11 \ a \wedge b \supset b \wedge a$$

$$2.12 \ (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$$

$$2.13 \ (a \supset b) \wedge (b \supset c) \supset (a \supset c)$$

$$2.14 \ b \supset (a \supset b)$$

$$2.15 \ a \wedge (a \supset b) \supset b$$

$$3.1 \ a \supset a \vee b$$

$$3.11 \ a \vee b \supset b \vee a$$

$$3.12 \ (a \supset c) \wedge (b \supset c) \supset (a \vee b \supset c)$$

$$4.1 \ \neg a \supset (a \supset b)$$

$$4.11 \ (a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset \neg a$$

Эта и эквивалентные ей системы и получили в дальнейшем название интуиционистского исчисления высказываний. Были найдены разрешающие процедуры для этого исчисления, т. е. алгоритмы, позволяющие для произвольной формулы установить, выводима ли она в этом исчислении (Генцен [27], Яськовский [32], Пильчак [15], [16], Воробьев [2] и др.). Обнаружены алгебраические и топологические интерпретации интуиционистской логики высказываний, естест-

венным образом обобщающие интерпретации классической логики посредством булевых алгебр (Стоун [40], Тарский [41], Маккинси и Тарский [36, 37], Расева [38]). Наиболее близкой к собственно логическому содержанию интуиционистского исчисления высказываний (и исчисления предикатов) оказалась семантика этого исчисления, предложенная Крипке [35]. Детальное изложение различных интерпретаций интуиционистской логики содержится в книгах [5, 20].

III

Выше мы отмечали, ссылаясь на Гейтинга [3], что фиксирование интуиционистской логики в виде какой-либо системы аксиом не имеет принципиального значения для интуиционизма. Однако построение такой системы позволяет сделать интуиционистскую логику предметом математического исследования, уже не зависящего от методологических принципов интуиционизма. После того как интуиционистское исчисление высказываний явно сформулировано, сам термин «интуиционистское» свидетельствует лишь об истории возникновения его и не должен вводить в заблуждение при оценке подлинной сущности этого исчисления как логико-математического объекта.

Таким образом, систему $\mathfrak{B}$ из работы ПТНД можно характеризовать как подсистему интуиционистского исчисления высказываний и одновременно как имплицитивно-негативный фрагмент минимального исчисления Йогансона. Именно в таком контексте основные результаты этой работы и формулируются в книге Чёрча [24]. А именно результаты главы III из ПТНД сформулированы в [24] (упражнение 26.20) следующим образом: если в некоторой теореме классического исчисления высказываний, в которой нет связок, отличных от импликации и отрицания, заменить все вхождения каждой переменной на ее двойное отрицание, то получающаяся формула будет теоремой минимального исчисления. Результаты главы IV в несколько обобщенной форме сформулированы в [24] (упражнение 38.12) так. Для каждой формулы A исчисления предикатов следующим образом определим формулу A^* («перевод» формулы A): если A есть элементарная формула, то A^* есть $\neg\neg A$; $(A \wedge B)^*$ есть $\neg\neg (A^* \wedge B^*)$; $(A \vee B)^*$ есть $\neg\neg (A^* \vee B^*)$; $(A \supset B)^*$ есть $\neg\neg (A^* \supset B^*)$; $(\neg A)^*$ есть $\neg A^*$; если A есть $\forall xB$, то A^* есть $\neg\neg \forall xB^*$; если A есть $\exists xB$, то A^* есть $\neg\neg \exists xB^*$. Формула A является теоремой классического исчисления предикатов тогда и только тогда, когда A^* есть теорема минимального исчисления предикатов.

В действительности в работе ПТНД «перевод» классических теорем на язык интуиционистской системы осуществляется не только для логических формул. По существу там намечена схема получения для широкого класса математических теорий следующего метаматематического результата: если в некоторой классической теории с использованием закона исключенного третьего или эквивалентных ему принципов доказано некоторое утверждение, то некоторое равносильное ему (с классической точки зрения) утверждение может быть доказано и без закона исключенного третьего, а именно в рамках минимальной логики. В частности, если в некоторой теории с помощью закона исключенного третьего получено противоречие, то противоречивое суждение может быть доказано и без использования этого закона. Таким образом, использование закона исключенного

третьего нельзя считать подлинной причиной противоречий в классической математике, в частности причиной теоретико-множественных антиномий.

Результаты работы ПТНД можно резюмировать и таким образом. Пусть аксиомы математической теории таковы, что описанные выше их «переводы» признаны истинными с интуиционистской точки зрения. Тогда перевод всякой теоремы этой теории также должен быть признан истинным с интуиционистской точки зрения. Этот вывод имеет принципиальное значение. Он показывает, что та часть классической математики, которая имеет дело только с интуиционистски допустимыми объектами (например, арифметика), может быть истолкована интуиционистски с полным сохранением ее классического содержания. Таким образом, ограничение интуиционистской логикой не является существенным и различие интуиционистской и классической математики проявляется главным образом в способах образования абстрактных математических понятий.

Погружение классических логических и логико-математических теорий в соответствующие теории, основанные на интуиционистской логике, стало в дальнейшем важным инструментом исследования интуиционистских теорий, ибо оно часто позволяет без лишних усилий перенести результаты, полученные при исследовании классических теорий, на интуиционистские. Шаниным [25] проведено детальное исследование различных погружений классической арифметики в интуиционистскую. Им введен термин «погружающая операция» для обозначения такого алгоритма, который по каждому арифметическому предложению A строит другое арифметическое предложение A^* , обладающее тем свойством, что A доказуемо в классической арифметике тогда и только тогда, когда A^* доказуемо в интуиционистской арифметике.

Таким образом, в работе ПТНД построен исторически первый пример погружающей операции. Несколько позднее сходное погружение классической логики в интуиционистскую было предложено Гёделем [29]. В [25] доказано, что погружающие операции Колмогорова и Гёделя эквивалентны в том смысле, что результаты их применения к любой формуле интуиционистски эквивалентны.

IV

Если в работе ПТНД построена погружающая операция, которая позволяет дать интуиционистское истолкование для значительной части классической математики, то работа ТИЛ посвящена решению в известном смысле обратной задачи: дать толкование интуиционистской логики в рамках обычных математических понятий, независимое от философских и методологических установок интуиционизма. Это удастся сделать, трактуя логические формулы не как схемы суждений, а как схемы типов задач. При этом общезначимость или «истинность» логической формулы понимается как существование общего метода решения всех задач данного типа. Таким образом, например, «опровергается» закон исключенного третьего: общезначимость формулы $a \vee \neg a$ означала бы существование общего метода, позволяющего для любой конкретной задачи либо найти ее решение, либо привести к противоречию предположение о существовании ее решения. Поскольку такой метод вряд ли возможен, формулу $a \vee \neg a$ нельзя признать общезначимой. В то же время все формулы, выводимые в интуиционист-

ском исчислении высказываний, оказываются общезначимыми. Тем самым получена интерпретация этого исчисления как логика задач.

Найденная интерпретация интуиционистской логики имела важное методологическое значение. В рамках хотя и не вполне точных, но все же понятных любому математику понятий «задачи» и «решения задачи» была обоснована необходимость рассмотрения логических систем, не содержащих закона исключенного третьего. П. С. Новиков указывает в [14, с. 54—55]: «В 1932 г. Колмогоровым [10] была предложена интересная интерпретация этого [интуиционистского.— В. У., В. П.] исчисления, не связанная с какими-то новыми специфическими принципами в основаниях математики. Согласно Колмогорову, наряду с традиционной логикой, систематизирующей схемы доказательств теоретических истин, возможна также логика, систематизирующая схемы решения задач (например, геометрических задач на построение). При этом понятия «задачи» и «решения задачи» считаются первоначальными».

Свободное от философских установок интуиционизма, новое истолкование интуиционистской логики, сделало осмысленным исследование ее как исчисления задач. Характерно, что в 50-е годы сам термин «исчисление задач» употреблялся в советской логико-математической литературе для обозначения интуиционистского исчисления высказываний (см., например, [15, 16]).

Таким образом, в работе ТИЛ изложена в достаточно развернутом виде идея истолкования логических формул с помощью задач. Эта идея впоследствии получила различные конкретные воплощения, характеризующиеся выбором того или иного точно очерченного класса задач. Первое математическое развитие идеи А. Н. Колмогорова об истолковании интуиционистской логики как исчисления задач было дано его учеником Медведевым [12] (см. также [21, § 13.7]). Каждая из задач, рассматриваемых Медведевым, является задачей нахождения всюду определенной функции с заданными свойствами. Такие задачи названы в [12] «массовыми проблемами». Массовая проблема называется алгоритмически разрешимой (или просто «разрешимой»), если среди ее решений имеется общерекурсивная функция. Центральное место в развиваемой теории занимает понятие сводимости одной массовой проблемы к другой, которое носит алгоритмический характер. Удастся определить логические операции над массовыми проблемами, отражающие идеи, высказанные А. Н. Колмогоровым. Оказалось, что все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, являются схемами алгоритмически разрешимых массовых проблем.

Несколько позднее Медведевым [13] была предложена другая интерпретация логических формул посредством задач. При этом в качестве ограничения и уточнения понятия задачи использовались так называемые финитные задачи. Финитная задача определяется непустым конечным множеством возможных решений, в котором выделено некоторое (возможно, пустое) подмножество фактических решений. Задаются логические операции над финитными задачами. При этом, например, $A \supset B$ есть финитная задача, возможными решениями которой служат произвольные отображения множества всех возможных решений задачи A в множество возможных решений задачи B , а фактические решения — это те отображения, которые переводят фактические решения задачи A в фактические решения задачи B . Пусть теперь $A(p_1, \dots, p_n)$ — какая-либо пропозициональная формула с переменными $p_1, \dots, p_n$. Зафиксируем непустые конечные мно-

жества $X_1, \dots, X_n$ и будем подставлять в формулу A вместо переменных $p_1, \dots, p_n$ всевозможные финитные задачи $F_1, \dots, F_n$, множества возможных решений которых суть множества $X_1, \dots, X_n$, варьируя множества фактических решений. Формула A называется финитно общезначимой, если при любом выборе множеств $X_1, \dots, X_n$ всегда найдется общее фактическое решение у всех задач A ($F_1, \dots, F_n$), полученных из формулы A подстановкой указанного вида. Иными словами, пропозициональная формула A ($p_1, \dots, p_n$) является финитно общезначимой, если можно указать фактическое решение задачи A ($F_1, \dots, F_n$), зная лишь множества возможных решений задач $F_1, \dots, F_n$.

Логика финитных задач оказалась устроенной довольно сложно. Она не совпадает с интуиционистским исчислением высказываний. Например, формула $(\neg a \supset \supset b \vee c) \supset (\neg a \supset b) \vee (\neg a \supset c)$ финитно общезначима, но невыводима в этом исчислении. Неизвестно, является ли эта логика разрешимой. Доказано лишь, что она не может быть задана конечным множеством аксиом (см. [11]).

В последнее время Сворцовым рассматривались некоторые естественные обобщения понятия финитной задачи и соответствующие интерпретации логических формул (см. [22, 23]). Одно обобщение состоит в рассмотрении не только финитных задач, но задач с произвольным множеством возможных и фактических решений. Доказано, что получающаяся при этом логика не совпадает с интуиционистским исчислением высказываний, но может быть задана посредством рекурсивной системы аксиом.

Другое обобщение понятия финитной задачи, введенное Сворцовым [22], связано с рассмотрением задач, возможными и фактическими решениями которых являются натуральные числа, а логические операции носят алгоритмический характер. Так, фактическим решением задачи $A \supset B$ является всякое натуральное число, которое служит гёделевым номером частично рекурсивной функции, отображающей возможные решения задачи A в возможные решения задачи B , причем фактические решения задачи A отображаются в фактические решения задачи B . Эта интерпретация, называемая рекурсивной общезначимостью, распространяется и на предикатные формулы.

Рассмотренные выше интерпретации логических формул возникли как прямое развитие идей А. Н. Колмогорова, высказанных в работе ТИЛ. Заметим, что интерпретацию формул с помощью задач не следует рассматривать непосредственно как разъяснение интуиционистского смысла формул. Речь идет как раз о *независимом от интуиционистских представлений* истолковании логических формул, которое приводит к логике без закона исключенного третьего. Однако в § 2 работы ТИЛ А. Н. Колмогоров показывает, что интуиционистский смысл экзистенциального утверждения естественным образом может быть связан с некоторой задачей. С другой стороны, согласно Гейтингу, «математическое высказывание утверждает тот факт, что было выполнено некоторое математическое построение» [4, с. 11], и вопрос об истинности высказывания заключается в существовании такого построения, т. е. имеет экзистенциальный характер. Поэтому идеи исчисления задач оказываются применимыми к истолкованию интуиционистского смысла произвольных математических суждений.

В математически точной форме восходящая к Гейтингу идея трактовки математического предложения как требования некоторого построения была осуществлена Клини по отношению к арифметическим суждениям [34] (см. также [8, 14]).

С каждым арифметическим предложением связывается некоторое (возможно, пустое) множество натуральных чисел, называемых реализациями этого предложения. Грубо говоря, реализация кодирует информацию об интуиционистской истинности предложения. Так, элементарное предложение вида $s = t$ имеет реализацию только в случае, когда оно истинно в обычном смысле. Число e является реализацией предложения вида $A \supset B$, если частично рекурсивная функция с гёделевым номером e применима к любой реализации формулы A и переводит ее в некоторую реализацию формулы B . Формула называется реализуемой, если существует число, реализующее ее. Рекурсивная реализуемость обычно рассматривается как аналог интуиционистской (точнее, конструктивной) истинности. Можно, например, построить предложение вида $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$, которое не будет истинным в этом смысле.

Связь рекурсивной реализуемости с исчислением задач состоит в том, что установление реализуемости арифметического суждения можно рассматривать как задачу в колмогоровском смысле. (Более явно идея сопоставления каждому арифметическому предложению некоторой задачи осуществлена в предложенном Шаниным [26] алгоритме конструктивной расшифровки математических суждений.) Можно развивать соответствующую логику решения таких задач, рассматривая в качестве общезначимых или реализуемых так логические формулы, которые являются схемами реализуемых арифметических предложений. Возникающая при этом логика высказываний впервые исследовалась Роузом [39]. Им было установлено, что не все реализуемые пропозициональные формулы доказуемы в интуиционистском исчислении высказываний. В дальнейшем логика рекурсивной реализуемости исследовалась в работах [1, 6, 7] и др. Однако до сих пор не получено какой-либо характеристики класса реализуемых пропозициональных формул. В частности, неизвестно, является ли этот класс разрешимым или хотя бы перечислимым.

Наибольший прогресс достигнут в исследовании логики предикатов, основанной на понятии реализуемости. Установлено [19], что эта логика не может быть задана в виде исчисления и даже не является арифметической, т. е. класс всех реализуемых предикатных формул не может быть определен арифметической формулой. Попутно удалось показать [17], что если вместо языка формальной арифметики взять некоторый более богатый язык и определить для него понятие реализуемости, то соответствующий ему класс реализуемых предикатных формул окажется существенно более узким, чем в случае клинцевской реализуемости. Таким образом, семантика предикатных формул оказывается зависящей от исходного логико-математического языка. В работе [18] Плиско, основываясь на идеях рекурсивной реализуемости, предложил понятие абсолютно реализуемой предикатной формулы, не зависящее от какого-либо конкретного языка. Понятие абсолютной реализуемости близко упоминавшемуся выше понятию рекурсивной реализуемости.

V

В заключение обратимся к поставленному в конце § 2 главы II работы ПТНД вопросу о полноте системы аксиом 1—4 для формул без отрицания: всякая ли формула, выводимая в классическом исчислении высказываний и содер-

жащая лишь символы импликации, выводима на основе аксиом 1—4 системы Гильберта? Отрицательный ответ дает Ван Хао [42, с. 416]. А именно формула $((a \supset b) \supset a) \supset a$ выводима в классическом исчислении высказываний, так как является тавтологией. В то же время она невыводима из аксиом 1—4, так как она невыводима в интуиционистском исчислении высказываний. Действительно, подставив в указанную формулу $\neg a$ вместо переменной b , мы получим формулу, эквивалентную закону двойного отрицания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варпаховский Ф. Л. О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 6, с. 1257—1258.
2. Воробьев Н. Н. Новый алгоритм выводимости в конструктивном исчислении высказываний.— Тр. МИАН СССР, 1958, т. 52, с. 193—225.
3. Гейтинг А. Обзор исследований по основаниям математики / Пер. с нем. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
4. Гейтинг А. Интуиционизм / Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
5. Драгалин А. Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.]
6. Кипнис М. М. Об одном свойстве пропозициональных формул.— ДАН СССР, 1967, т. 174, № 2, с. 277—278.
7. Кипнис М. М. О реализациях предикатных формул.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1971, т. 20, с. 40—48.
8. Клини С. К. Введение в метаматематику / Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
9. Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur.— Мат. сб., 1925, т. 32, с. 646—667. Англ. пер.: Kolmogorov A. N. On the principle of excluded middle.— In: Heijenoort J. van. From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879—1931. Cambridge, 1967, p. 446—437.
10. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 58—65.
11. Максимова Л. Л., Скворцов Д. П., Шехтман В. Б. Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева.— ДАН СССР, 1979, т. 245, № 5, с. 1051—1054.
12. Медведев Ю. Т. Степени трудности массовых проблем.— ДАН СССР, 1955, т. 104, № 4, с. 501—504.
13. Медведев Ю. Т. Финитные задачи.— ДАН СССР, 1962, т. 142, № 5, с. 1015—1018.
14. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.
15. Пильчак Б. Ю. О проблеме разрешимости для исчисления задач.— ДАН СССР, 1950, т. 75, № 6, с. 773—776.
16. Пильчак Б. Ю. Об исчислении задач.— Укр. мат. журн., 1952, т. 4, № 2, с. 174—194.
17. Плиско В. Е. Рекурсивная реализуемость и конструктивная логика предикатов.— ДАН СССР, 1974, т. 214, № 3, с. 520—523.
18. Плиско В. Е. Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул.— ДАН СССР, 1976, т. 226, № 1, с. 61—64.
19. Плиско В. Е. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т. 41, № 3, с. 483—502.
20. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
21. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
22. Скворцов Д. П. Два обобщения понятия финитной задачи.— В кн.: Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 1979, с. 201—240.

23. Скворцов Д. П. Логика бесконечных задач и модели Крипке на атомных полурешетках множеств.— ДАН СССР, 1979, т. 245, № 4, с. 798—801.
24. Черч А. Введение в математическую логику/Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. Т. 1.
25. Шанин Н. А. О некоторых логических проблемах арифметики.— Тр. МИАН СССР, 1955, т. 43, с. 1—10.
26. Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений.— Тр. МИАН СССР. 1958, т. 52, с. 226—311.
27. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. I, II.— Math. Ztschr., 1934—1935, Bd. 39, S. 176—210, 405—431. Рус. пер.: Генцен Г. Исследование логических выводов.— В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 9—76.
28. Glivenko V. I. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.— Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. Sér. 5, 1929, vol. 15, p. 183—188.
29. Gödel K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.— Ergeb. math. Kolloq., 1933, Bd. 4, S. 34—38.
30. Heijenoort J. van. From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879—1931. Cambridge, 1967.
31. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl., 1930, S. 42—52.
32. Jaskowski S. Recherches sur le système de la logique intuitioniste.— Actes Congrès Intern. Philos. Sci., VI. Philos. math., Actual. sci. industr., 1936, vol. 393, p. 58—61.
33. Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus.— Compos. math., 1936, vol. 4, p. 119—136.
34. Kleene S. C. On the interpretation of intuitionistic number theory.— J. Symbol. Log., 1945, vol. 10, N 1, p. 109—124.
35. Kripke S. A. Semantical analysis of intuitionistic logic. I.— In: Formal systems and recursive functions. Amsterdam, 1965, p. 92—129.
36. McKinsey J. C. C., Tarski A. On closed elements in closure algebras.— Ann. Math., 1946, vol. 47, p. 122—162.
37. McKinsey J. C. C., Tarski A. Some theorems about the sentential calculi on Lewis and Heyting.— J. Symbol. Log., 1948, vol. 13, N 1, p. 1—15.
38. Rasiowa H. Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis.— Fund. math., 1951, vol. 38, p. 99—126.
39. Rose G. F. Propositional calculus and realizability.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 75, p. 1—19.
40. Stone M. H. Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics.— Cas. Pešt. Mat. a Fys., 1937, vol. 65, p. 1—25.
41. Tarski A. Der Aussagenkalkül und die Topologie.— Fund. math., 1938, vol. 31, p. 103—134.
42. Wang Hao. [The introductory notes to the English translation of [9].] — In: Heijenoort J. van. From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879—1931. Cambridge, 1967, p. 414—416.

К РАБОТАМ ПО ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

А. Н. Колмогоров

Первоначальным толчком для создания этих работ было чтение мемуара де Пама (*Sur l'Analyse situs des variétés à n -dimensions: These*). — *J. math. pures et appl. Sér. 9, 1931, vol. 10, p. 115—200*), в котором устанавливалась двойственность между группами Бетти дифференцируемых многообразий и группами Бетти, порожденных потоками на этих многообразиях.

После 30-х годов я не занимался этой тематикой, но идея, изложенная в четырех заметках в «*C. r. Acad. sci. Paris*» (№ 32—35 наст. изд.), положить в основу двойственности между группами кососимметричных функций n точек и кососимметричных аддитивных функций n множеств кажется мне и сейчас представляющей хотя бы педагогический интерес.

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

(Г. С. Чогошвили)

Работы А. Н. Колмогорова по алгебраической топологии ответили на многие важные вопросы в своей области и открыли новые перспективы ее развития. В этих работах было введено понятие когомологии — понятие, которому суждено было занять центральное место в дальнейшем развитии топологии.

К понятию когомологии А. Н. Колмогоров пришел, исходя из задач анализа, имея в виду «построение своеобразного разностного исчисления, с одной стороны могущего в результате предельного перехода привести к дифференциальным операциям над кососимметричными тензорами (поливекторами), с другой же стороны стоящего в тесных взаимоотношениях с понятиями комбинаторной топологии». Первоначальный вариант теории был доложен на конференции по тензорному анализу и изложен в работе № 27.

К тем же идеям одновременно пришел и американский тополог Дж. Александер [1, 2]. Сообщения об открытии новых понятий топологии были доложены обоими авторами на топологической конференции, проходившей в Москве в 1935 г. Отметим, что Александер ставил перед собой более узкую задачу — он хотел построить непосредственным путем (без применения теории характеров Л. С. Понтрягина) ту дискретную группу, группой характеров которой является группа гомологии компактного метрического пространства. В статье № 29 А. Н. Колмогоров дает параллельное взаимосвязанное изложение как теории гомологии, так и теории когомологии (соответствующие группы называются u - и o -группами Бетти). Рассмотрение n -мерных многообразий, n -двойственных пар клеточных разбиений и топологических (локально компактных) групп коэффициентов приводят к доказательству теорем двойственности Пуанкаре—Александера и теорем двойственности для гомологий — когомологий.

Оба автора — и Колмогоров (в статье № 31) и Александер — определили операцию произведения в группе когомологий, сыгравшую в дальнейшем исключительно важную роль, и тем самым превратили эту группу в кольцо.

Четыре статьи (№ 32—35), опубликованные в «Докладах Парижской академии», составляют отдельный фрагмент в исследованиях А. Н. Колмогорова, посвященных этим вопросам. Здесь идет речь о теории гомологий и когомологий локально бикompактных пространств, в частности законов двойственности. Работам А. Н. Колмогорова предшествовала публикация Александра [1], где группа когомологий определялась для метрических компактов. В статье № 32 дается определение групп гомологий и когомологий для локально компактных пространств. Определения групп когомологий были впоследствии усовершенствованы многими топологами и приобрели вид, который был назван когомологиями Александра—Спеньера (см. [3—7]). Когомологии Александра—Спеньера определены для произвольных хаусдорфовых пространств. Балавадзе [8] показал, что когомологии Александра—Спеньера изоморфны модифицированным когомологиям Колмогорова (нужно только из аксиоматики Колмогорова удалить требование d в статье № 32). Связями между когомологиями Колмогорова и Александра занимался Клайн [9]. Дальнейшие усовершенствования когомологии Александра—Спеньера претерпели в книге Масси [7] (см. также Кисси [10]).

В хорошо разработанных теориях, например в сингулярной теории и в спектральной теории Александрова — Чеха, определены как гомологии, так и когомологии, причем они построены общим методом и связаны отношением двойственности. Эти теории, кроме того, имеют спектральное представление, например, сингулярная теория на основе отображений полиэдров в исследуемое пространство представляет гомологии как пределы прямых, а когомологии как пределы обратных спектров, в то время как спектральная теория, наоборот, на основе отображений исследуемого пространства в полиэдры представляет гомологии и когомологии в виде пределов обратных и соответственно прямых спектров. Александр в соответствии с поставленной перед собой задачей построить когомологии, двойственные гомологиям Вьеториса, применяет те средства, которые использует Вьеторис при построении своих гомологий — начала комбинаторной топологии и предельные соотношения (см. [2, 11]). Опираясь на введенные им с этой целью понятия, последующие авторы установили (см. [12, 3]), что гомология Вьеториса и когомология Александра являются обратным и соответственно прямым пределом групп гомологий и соответственно когомологий одного и того же спектра комплексов (эти комплексы являются аналогами нервов из теории Александрова—Чеха). Они, таким образом, составляют одну теорию (ко)гомологии в том смысле, что построены аналогичными средствами и двойственны одна другой. Когомологии Александра при дальнейшем развитии были определены проще и прямо — без явного использования понятий комбинаторной топологии и предельных соотношений (см. [13, 3, 14]). Но при этом новом подходе была утрачена возможность аналогично строить ассоциированную гомологию, как отмечают Стинрод и Эйленберг [15]: «Недостатком его является отсутствие аналогичной простой двойственной конструкции для цепей и групп гомологий». Колмогоров в первой же статье (№ 32) вместе с когомологиями определяет и двойственные им гомологии, причем это определение простое и прямое — оно не использует первичные понятия комбинаторной топологии и предельные процессы. В этом смысле — это совершенно новое изложение теории гомологии. Оно аналогично определению когомологии и в том смысле, что исходит из общематематического понятия функции — функции точки в случае

когомологии и функции множеств в случае гомологий. Оно двойственно когомологии в смысле теории характеров. Именно в статье № 33 доказывается, что группы гомологий и когомологий одного и того же пространства и одной и той же размерности (первая над компактной, а вторая над дискретной группой коэффициентов) двойственны, если двойственны группы коэффициентов. Это есть новый, третий вид законов двойственности в алгебраической топологии — закон, связывающий гомологии и когомологии. (Первым двум законам — закону Пуанкаре и закону Александра, имеющему истоки в теоретико-множественной топологии — в теореме Жордана — посвящены статьи № 34 и № 35.) Верный своему аналитическому подходу, Колмогоров подчеркивает, что произведением при этом является n -кратный интеграл в смысле Радона — Стильтьеса от произведения соответствующих функций. Простота его определения проявляется и в том, что, излагая гомологии, ассоциированные с его же когомологиями, он не использует какое-либо из них при определении другого. Этим он отличается от многих последующих авторов, например от Масси, который важным, давно искомым и окончательным достижением считает введение гомологий через когомологии Александра — Спеньера посредством функтора Hom (см. [7, 16]). Напомним, что сам Александр свою цель при введении когомологий видел [2] в «потребности построить полученную дискретную группу более непосредственным путем», чем «сложный путь» ее определения через группу характеров, который ведь тоже представляет собой Hom .

Статья № 34 посвящена связям гомологической теории автора с другими теориями и законом Пуанкаре. Однако она не менее ценна привлечением тех методов, которые Колмогоров использует при исследовании указанных вопросов. Это — теории гомологий и когомологий второго рода, как их теперь часто называют. Разбиения приводят (см. [17, 18]) к той разновидности теории гомологии Александрова — Чеха, которая в отличие от самой теории Александрова — Чеха является точной и которая естественно ассоциируется с теорией (ко)гомологий Колмогорова. Бесконечные циклы и их гомологии, как будет указано ниже, вскоре привлекли внимание и нашли разнообразные приложения [21]. Конечные коцепи дали те когомологии, к которым пришла, как было отмечено выше, теория Александра — Спеньера в результате ее долгого развития (см. [10, 7]).

Разбиения Колмогоров использует для сравнения своей теории гомологий с теорией Вьеториса — с наиболее разработанной к тому времени теорией гомологий. Гомологии Вьеториса были определены в то время для компактных метрических пространств. Поэтому Колмогорову достаточно было рассмотреть лишь последовательности разбиений, хотя свои гомологии он определил для широкого класса локально компактных пространств. Он доказывает, что его группы гомологий в случае компактных метрических пространств и при компактной группе коэффициентов изоморфны группам гомологий Вьеториса, более того, что изоморфизм имеет место на уровне цепных комплексов. Он это делает, привлекая теорию проекционных циклов П. С. Александрова. Впоследствии, пользуясь произвольными (квазиупорядоченными) спектрами, основанными на всех (конечных) разбиениях, Чогошвили показал, что группы гомологий Колмогорова любых локально компактных пространств при компактной группе коэффициентов изоморфны группам гомологий Александрова, взя-

тым относительно так называемых особых подкомплексов и, следовательно, группам гомологий Александрова — Чеха для компактных пространств (см. [17, 18]). Лефшец показал, что гомологическая теория Александера — Колмогорова представима в виде проекционной теории однозначного решеточного спектра [19]. Доукер доказал, что гомологические группы Александрова — Чеха и Вьеториса изоморфны для любых пространств [20]. Из этих изоморфизмов следует, что группа гомологий Колмогорова изоморфна группе гомологий Стиррода [21] (и, следовательно, изоморфной ей группе гомологий Ситникова, см. [22, 23]) в случае компактных метрических пространств (для которых и построена группа Стиррода), так как сам Стиррод показал, что его группы изоморфны группам Вьеториса при компактной группе коэффициентов. Отметим далее, что из изоморфизма групп гомологий, конечно, следует изоморфизм и двойственных им групп когомологий (ср. [24]).

Теория гомологий Колмогорова обладает рядом замечательных свойств. Остановимся подробнее на одном из них, на так называемом свойстве точности — желательного соотношения между множествами циклов и ограничивающих циклов определенных родов — понятия, введенного в 40-х годах [15]. Теория Александрова — Чеха в отличие от сингулярной не обладает свойством точности. Компактность группы коэффициентов, несколько раз упомянутая выше, требуется потому, что при ней гомологии Александрова — Чеха и Вьеториса, взятые, кроме того, для компактных пространств, обладают как раз свойством точности. Долго велись поиски усовершенствованных вариантов [теорий Александрова — Чеха и Вьеториса, обладающих при тех или иных дополнительных условиях свойствами, аналогичными свойству точности. Истинные циклы Александрова, проекционные циклы Лефшеца, компактификации Понтрягина группы коэффициентов и группы гомологии Вьеториса были основными моментами в процессе этих исканий. (Правда, точность обычно приобреталась за счет потери какого-либо хорошего свойства, например непрерывности [15].) Цель была достигнута, когда в 1940 г. Стиррод для компактных метрических пространств построил теорию гомологий, существенно опирающуюся на теорию бесконечных циклов, которая является точной при любой группе коэффициентов. В 1951 г. изоморфную теорию построил Ситников (см. [22, 23]). Чогошвили построил группы гомологий, изоморфные группам А. Н. Колмогорова и дающие их спектральное представление [17]. Однако Балавадзе в своей диссертации [25], имеющей целью аксоиматическое исследование (ко)гомологий Колмогорова и рассмотрение случая с замененной группой коэффициентов (дискретные гомологии и компактные когомологии, а не наоборот, как у А. Н. Колмогорова), ввел недостававшие для этого понятия (индуцированные гомоморфизмы и т. п.) и в числе других теорем (например теоремы двойственности между гомологиями и когомологиями) доказал, что теория Колмогорова удовлетворяет всем аксиомам Стиррода — Эйленберга, в частности аксиоме точности. Мдзинаришвили (см. [26, 27]) показал, что эта теория удовлетворяет условиям теоремы единственности Милнора и, следовательно, изоморфна теории Стиррода при дискретной (а не только при компактной) группе коэффициентов. Таким образом, оказалось, что искомая точная теория была найдена в виде теории Колмогорова на четыре года раньше Стиррода и притом для более широкого класса локально компактных пространств. Отметим, что теории (ко)гомологии

локально компактных пространств, в том числе со значениями в (ко)пучках, посвящено большое число работ (см., например, [28—30]). Отдельный раздел под названием «Гомологии Стиррода—Ситникова» (а фактически это — гомологии Колмогорова) имеется в предметной классификации за 1980 г. Американского математического общества, чем признается актуальность этой тематики на 80-е годы. Эта тематика и указанные работы непосредственно касаются теории Колмогорова.

Теорема Пуанкаре доказывается (№ 34) для групп гомологий и когомологий с конечными и бесконечными (ко)цепями клеточного разложения открытого n -мерного многообразия. Группы коэффициентов дискретные в случае конечных и компактных v_i в случае бесконечных (ко)цепей. Соотношения выражены в изоморфизмах и двойственностях. Представление закона двойственности Пуанкаре одновременно в гомологиях и когомологиях придает ему особую ясность, полноту и естественность.

В последней статье (№ 35) доказывается, что обе группы Колмогорова — когомологическая и гомологическая — являются объектами закона двойственности Александра. Закон Александра служил в то время показателем целесообразности и полезности введенного гомологического понятия и в этом смысле закон Александра выполнял те функции, которые сейчас выполняют аксиомы (ко)гомологий. Это понятно, так как аксиомы (ко)гомологий в основном и представляют собой главные моменты доказательства законов двойственности. Например, аксиома вырезания, являющаяся характерным свойством функтора (ко)гомологий, отдельно приведена Колмогоровым в ее сильной форме. Сам вид теорем Колмогорова, соотносящий (ко)гомологии соседних, а не дополнительных размерностей, выражает основное звено (ко)гомологической последовательности — так называемый связывающий гомоморфизм.

П. С. Александров в рамках своей теории (ко)гомологий с особыми подкомплексами доказал теоремы двойственности колмогоровского вида и дал их обобщения в различных направлениях (см. [31, 32]). Вместо бесконечных циклов здесь берутся их конечные аналоги — циклы относительно того подкомплекса нерва конечного замкнутого покрытия, замыкания вершин которого не компактны. Автор их называет теоремами Колмогорова. Некоторые дальнейшие обобщения рассматриваемых теорем в терминах этих же циклов дали Бокштейн (см. [33, 34]) и Чогошвили (см. [35—38]). Скляренко исследовал теоремы колмогоровского вида с помощью так называемых канонических гомологий [39] для любой группы коэффициентов. Мдзинаришвили в теоремах Колмогорова снял условие компактности с группы коэффициентов и показал, что теорема двойственности Стиррода (следовательно, Ситникова) есть следствие этой обобщенной теоремы в случае компактных метрических пространств (см. [40, 41]). Различные вопросы теории (ко)гомологий Колмогорова в связи с теорией (ко)гомологий Александра рассмотрены Бокштейном [42]. Наконец, и после создания — в середине 40-х годов — теории спектральных (ко)гомологий для произвольных (некомпактных) пространств и обобщения теорем двойственности с замкнутых подмножеств на любые подмножества Колмогоров указал на такую форму этой двойственности, которая, опираясь на когомологии, выражена в изоморфизмах и свободна от применения прямых спектров компактных и вообще топологизированных групп [43].

Кольца когомологий для локально бикompактных пространств вводятся в статье № 30, специально посвященной исследованию вопроса о произведениях (ко)цепей и групп когомологий в комплексах, многообразиях и локально бикompактных пространствах.

За последнее время усиленно ищется такая теория гомологий, которая была бы наиболее целесообразной и с педагогической точки зрения (см., например, книгу Масси [7] и предисловие и комментарии к ней Скляренко). Теория Колмогорова и с этой точки зрения обладает рядом преимуществ перед другими теориями. Ее преимущество перед сингулярной теорией — в отсутствии известных аномалий, перед спектральными теориями Александрова—Чеха и Александрова с особыми подкомплексами — в наличии точности, перед теорией Стинрода—Ситникова — в наличии ассоциированной теории когомологий, перед теорией Масси — в возможности прямого определения гомологии, независимого от коцепного комплекса, перед теорией Куроша и Скляренко, основанной на канонических покрытиях, — в простоте выбора исходных множеств, определения индуцированного гомоморфизма и т. п. Эти преимущества дополняются наглядностью, приложимостью к исследованию различных вопросов, близостью к другим математическим теориям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexander J. W.* On the chains of a complex and their duals. On the ring of a compact metric space.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1935, vol. 21, p. 509—512.
2. *Alexander J. W.* On the connectivity ring of an abstract space.— *Ann. Math.*, 1936, vol. 37, p. 698—708. Рус. пер.: *Александр Дж. В.* Кольцо связности абстрактного пространства.— *УМН*, 1947, т. 2, вып. 1, с. 156—165.
3. *Spanier E. H.* Cohomology theory for general spaces.— *Ann. Math.*, 1948, vol. 49, p. 407—427.
4. *Spanier E. H.* Tautness for Alexander—Spanier cohomology.— *Pac. J. Math.*, 1978, vol. 75, p. 561—563.
5. *Godement R.* Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann, 1958. Рус. пер.: *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
6. *Bredon G. E.* Sheaf theory. New York: McGraw-Hill, 1967.
7. *Massey W. S.* Homology and cohomology theory. New York: M. Dekker, 1978. Рус. пер.: *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
8. *Балавадзе М. Б.* О теории гомологий А. Н. Колмогорова.— *Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР*, 1972, т. 41, с. 5—40.
9. *Kline M.* Note on homology theory for locally bicomact spaces.— *Fund. math.*, 1939, vol. 32, p. 64—68.
10. *Keesee J. W.* Finitely-valued cohomology groups.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, p. 418—422.
11. *Alexander J. W.* A theory of connectivity in terms of gratings.— *Ann. Math.*, 1938, vol. 39, p. 883—912.
12. *Hurewicz W., Dugundji J., Dowker C. H.* Continuous connectivity groups in terms of limit groups.— *Ann. Math.*, 1948, vol. 49, p. 391—406.
13. *Alexander J. W.* Gratings and homology theory.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, vol. 53, p. 201—233.
14. *Spanier E. H.* Algebraic topology. New York: McGraw-Hill, 1966. Рус. пер.: *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
15. *Eilenberg S., Steenrod N.* Foundations of algebraic topology. Princeton: Univ. Press, 1952. Рус. пер.: *Стинрод Н., Эйленберг С.* Основания алгебраической топологии. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

16. Massey W. S. How to give an exposition of the Čech—Alexander—Spanier type homology theory.— Amer. Math. Mon., 1978, vol. 85, p. 75—83.
17. Чогошвили Г. С. On the homology theory of topological spaces.— Сообщ. АН ГССР, 1940, т. 1, с. 337—340.
18. Чогошвили Г. С. Об эквивалентности функциональной и спектральной теории гомологий.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, с. 421—438.
19. Lefschetz S. Algebraic topology. New York, 1942. Рус. пер.: Лefшец С. Алгебраическая топология. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
20. Dowker C. H. Homology groups of relations.— Ann. Math., 1952, vol. 56, p. 84—95.
21. Steenrod N. E. Regular cycles of compact metric spaces.— Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 833—851. Рус. пер.: Стинрод Н. Е. Регулярные циклы компактных метрических пространств.— УМН, 1947, т. 2, вып. 2, с. 56—78.
22. Ситников К. А. Закон двойственности для незамкнутых множеств.— ДАН СССР, 1951, т. 18, с. 359—362.
23. Ситников К. А. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. I. Первый закон двойственности; спектральная двойственность.— Мат. сб., 1954, т. 34, с. 3—54.
24. Kelley J. L. Descriptions of Čech cohomology.— In: General topology and its relations to modern analysis and algebra: Proc. Symp. Prague, 1961, p. 235—237.
25. Балавадзе М. Б. О теории гомологий Колмогорова: Автореф. канд. дис. Тбилиси, 1975.
26. Мдинаришвили Л. Д. О связи гомологических теорий Колмогорова и Стинрода.— ДАН СССР, 1972, т. 203, № 3, с. 528—531.
27. Мдинаришвили Л. Д. Об эквивалентности гомологических теорий Колмогорова и Стинрода.— Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1972, т. 41, с. 143—163.
28. Borel A., Moore J. C. Homology theory for locally compact spaces.— Mich. Math. J., 1960, vol. 7, p. 137—160.
29. Borel A. Cohomologie des espaces localment compact.— Lect. Notes Math., 1964, N 2.
30. Bredon G. E. Co-homology and Homology.— Pacif. J. Math., 1968, vol. 25, N 1, p. 1—32.
31. Александров П. С. Общая теория гомологий.— Уч. зап. МГУ, 1940, т. 45, с. 1—60.
32. Александров П. С. Гомологические свойства расположения комплексов и замкнутых множеств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, с. 227—282.
33. Бокиштейн М. Ф. О теореме двойственности Александра—Колмогорова.— ДАН СССР, 1948, т. 59, с. 631—633.
34. Бокиштейн М. Ф. Теорема двойственности для локально бикомпактных пространств.— Уч. зап. МГУ, 1949, т. 146, с. 131—164.
35. Чогошвили Г. О соотношениях двойственности в топологических пространствах.— ДАН СССР, 1945, т. 46, № 4, с. 143—145.
36. Чогошвили Г. О законе двойственности в нормальных пространствах.— ДАН СССР, 1945, т. 48, № 4, с. 249—252.
37. Чогошвили Г. С. Об основных гомоморфизмах двойственности.— Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1951, т. 18, с. 1—52.
38. Чогошвили Г. С. О гомологических аппроксимациях и законах двойственности для произвольных множеств.— Мат. сб., 1951, т. 28, с. 89—118.
39. Скляренко Е. Г. Теория гомологий и аксиома точности.— УМН, 1969, т. 24, вып. 5, с. 87—140.
40. Мдинаришвили Л. Д. О законе двойственности Колмогорова.— ДАН СССР, 1974, т. 216, с. 502—504.
41. Мдинаришвили Л. Д. Функциональные гомологии.— Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1978, т. 59, с. 98—118.
42. Бокиштейн М. Ф. Эквивалентность некоторых гомологических определений в топологии.— Изв. вузов, 1960, т. 3, с. 62—80.
43. Александров П. С. Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств.— Мат. сб., 1947, т. 21, с. 161—232.

К РАБОТЕ ОБ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А. Н. Колмогоров

Проблема возможности повышения размерности при открытых отображениях (работа № 36) горячо интересовала П. С. Александрова. Некоторое время мы вместе трудились над доказательством невозможности повышения размерности. В этих поисках постепенно выяснились причины наших неудач. Этот анализ неудач и привел в конце концов к контрпримеру.

ТОПОЛОГИЯ

(А. В. Архангельский)

К СТАТЬЕ «КОНЕЧНЫЕ ПОКРЫТИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ»

Результаты п. 3 и 4 статьи № 31, принадлежащие А. Н. Колмогорову, носят исчерпывающий характер. Они означают, что подход к опеределению размерности в терминах кратности замкнутых покрытий (т. е. подход Лебега) и подход к определению размерности через длины замкнутых покрытий, указанный в данной статье, дают один и тот же результат для всех нормальных пространств. При этом А. Н. Колмогоров приводит совсем простую, элементарную конструкцию, позволяющую переходить от длин к кратностям и обратно. Поэтому в дальнейшем понятие длины покрытия не играло особенной роли в развитии теории размерности — исследования велись на основе понятия кратности и классического определения размерности $\dim$, данного Лебегом (см. [2]).

К СТАТЬЕ «ОБ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ»

1. Построенный в статье № 36 пример открытого отображения одномерного континуума на двумерный континуум явился первым примером непрерывного открытого отображения одного компакта на другой, при котором повышалась размерность. Заслуживают внимания дополнительные свойства построенного отображения: его нульмерность (образ каждой точки является нульмерным пространством) и то, что связанные отображением пространства являются компактными.

В связи с построенным примером целесообразно отметить следующие простые факты. Не составляет труда представить произвольное пространство как образ нульмерного при непрерывном отображении: на каждое пространство отображается непрерывно дискретное пространство. Несколько сложнее доказывается, что каждое тихоновское пространство является образом некоторого нульмерного пространства при непрерывном открытом отображении (см. [2]). Однако в классе компактов последнее утверждение перестает быть верным. Действительно, непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство всегда замкнуто, а образ нульмерного пространства при непрерывном, открытом и замкнутом отображении, очевидно, является нульмерным простран-

ством. В частности, при непрерывных открытых отображениях нульмерных компактов размерность не повышается. Таким образом, компактность пространств, участвующих в примере Колмогорова, является принципиально важной чертой примера и размерность единица — наименьшая, для которой повышение размерности при открытом отображении компакта оказывается возможным.

Тема повышения размерности при открытых отображениях далеко не была исчерпана примером Колмогорова; напротив, данная статья послужила стимулом к ряду дальнейших исследований. В частности, обращает на себя внимание довольно специальный характер компакта-образа в примере Колмогорова. Новый важный шаг сделала Л. В. Келдыш: в 1959 г. она построила открытое и нульмерное отображение некоторого одномерного компакта на квадрат (см. [1, 2]). Отправляясь от факта существования такого отображения, Пасынков получил в данном направлении окончательный результат (см. [3, 2]): любой бикомпакт положительной размерности является образом некоторого бикомпакта размерности 1 (в смысле $\dim$, т. е. в смысле определения Лебега) при непрерывном открытом нульмерном отображении.

Весьма тонкие результаты были получены Л. В. Келдыш в отношении поведения размерности при открытых монотонных отображениях (отображение называется монотонным, если прообраз каждой точки связан; очевидно, требование монотонности «противоположно» требованию нульмерности.) Ею был построен замечательный пример открытого монотонного отображения трехмерного куба на куб произвольной размерности $n > 3$ (см. [4, 5]). Здесь, таким образом, повышение размерности при открытом непрерывном отображении происходит, несмотря на отсутствие какой-либо экзотики как в отображаемом пространстве, так и в пространстве-образе.

Идейную сторону конструкции примера Колмогорова ярко осветил в недавней своей работе Козловский (см. [6]). Замечая, что в основе примера Колмогорова лежит открытое и двукратное отображение двумерного тора на лист Мёбиуса, которое в естественном смысле несущественно, он развивает общий метод, позволяющий с помощью обратных спектров из открытых и несущественных в смысле П. С. Александрова отображений строить r -мерные прообразы любых n -мерных полиэдров (где $n \geq r \geq 1$) как при открытых монотонных, так и при открытых нульмерных отображениях.

2. Повышение размерности при открытом отображении является косвенным признаком достаточно сложного строения этого отображения. В частности, можно сказать, что такое отображение устроено принципиально иначе (даже локально), чем отображение проектирования произведения пространств на сомножитель.

Важный случай открытых отображений составляют гомоморфизмы топологических групп на их фактор-группы. Работа Колмогорова была продолжена в направлении исследования поведения размерности при таких гомоморфизмах. Выяснено, что если группа локально бикомпактна, то размерность любой ее фактор-группы не превосходит размерности всей группы (см. [7]). В то же время каждая топологическая группа представима как фактор-группа некоторой нульмерной топологической группы — этот результат получен недавно в [8].

3. Построение примера описано в статье точно и достаточно подробно. Однако при обсуждении его свойств проведено не совсем корректное рассуждение. А именно в п. 1° ошибочно утверждается, что предел счетного обратного спектра открытых отображений $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ является открытым отображением предельного пространства X на предельное пространство Y . В обозначениях п. 1° статьи Колмогорова, чтобы искомое заключение имело место требуется, чтобы дополнительно выполнялось условие:

$$f_n(\varphi_n^{-1}(x_{n-1})) = \psi_{n-1}^{-1}(f_{n-1}(x_{n-1})).$$

В терминологии Пасынкова это соотношение выражает заполненность отображения f_{n-1} отображением f_n (см. [2, с. 465]). Существенна также компактность участвующих в спектре пространств. Не составляет большого труда проверить, что в примере Колмогорова указанное дополнительное условие соблюдается, откуда и следует открытость построенного им отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш Л. В. Нульмерные открытые отображения. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, с. 165—184.
2. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
3. Пасынков Б. А. Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность. — УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 183—190.
4. Келдыш Л. В. Монотонное отображение куба на куб большей размерности. — Мат. сб., 1957, т. 41, № 2, с. 129—158.
5. Келдыш Л. В. Преобразование монотонно неприводимого отображения в монотонно открытое и монотонно открытые отображения куба, повышающие размерность. — Мат. сб., 1957, т. 43, № 2, с. 187—226.
6. Козловский И. М. Повышающие размерность открытые отображения компактов на полиэдры как спектральные пределы несущественных отображений полиэдров. — В кн.: Ленингр. Междунар. топологическая конф. Л.: Наука, 1982.
7. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
8. Архангельский А. В. Классы топологических групп. — УМН, 1981, т. 36, вып. 3, с. 127—146.

АКСИОМАТИКА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(А. В. Михалев)

Пусть K — тело, M есть $(n + 1)$ -мерное векторное пространство, $\mathfrak{B}(M) = (G_0, G_1, \dots, G_n)$ — n -мерная проективная геометрия над телом K , т. е. структура подпространств пространства M (здесь G_k — множество всех $(k + 1)$ -мерных подпространств в M).

На рубеже XIX и XX вв. Гильберт (см. [4]) показал, что все абстрактные конечномерные дезарговы проективные геометрии $\mathcal{P}^n = (G_0, G_1, \dots, G_n)$ исчерпываются системами линейных подпространств конечномерных векторных пространств над телами, т. е. изоморфны n -мерным проективным геометриям $\mathfrak{B}(M)$. В дальнейшем этот раздел математики, связанный с аксиоматизацией геометрии или введением координат в аксиоматически заданную геометрию,

активно развивался (см. [1—3, 6, 10]), что позволило связать проективную геометрию со многими частями алгебры (теорией групп, теорией структур, теорией колец) и привело к созданию новой ветви алгебры, которую Курош называл «проективной алгеброй».

В 30-е годы А. Н. Колмогоров одним из первых в нашей стране начал исследования по топологической алгебре, т. е. предложил изучать множества, на которых определены алгебраические операции и топология, причем алгебраические операции непрерывны. На этом пути в 1932 г. им и была опубликована работа [5] (№ 20 наст. изд.), посвященная аксиоматике проективных геометрий. Именно если теперь K — топологическое тело, векторное пространство M наделено топологией произведения $(n+1)$ -го экземпляра топологической абелевой группы K , множества G_k топологизированы с помощью естественной процедуры «шевеления» базиса k -мерного подпространства, то плоскость $a \in \in G_k$, проходящая через линейно независимые точки $a_0, a_1, \dots, a_k \in G_0$, зависит от них непрерывно. Если же тело K непрерывно (т. е. локально компактно и недискретно), то все пространства G_k компактны, а если тело K вполне несвязно, то все пространства G_k вполне несвязны. Далее А. Н. Колмогоров называет абстрактную проективную геометрию $\mathcal{P}^n = \{G_0, G_1, \dots, G_n\}$ непрерывной, если множества G_0 точек и G_1 прямых являются компактными бесконечными топологическими пространствами, а прямая является непрерывной функцией от пар точек, через которые она проходит. В [5] было доказано, что всякая непрерывная проективная геометрия $\mathcal{P}^n$ изоморфна некоторой проективной геометрии $\mathfrak{B}(M)$ над некоторым непрерывным телом K (а если пространство точек связно, то топологическое тело K также связно). В связи с этим А. Н. Колмогоров поставил проблему об описании связных локально компактных тел, которая была решена Л. С. Понтрягиным (см. [7, 8]): ими оказались лишь поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов.

Эта работа А. Н. Колмогорова сыграла важную роль в дальнейшем развитии топологической алгебры. В частности, характеристика всех локально компактных связных дезарговых плоскостей на основе приведенных результатов А. Н. Колмогорова и Л. С. Понтягина явилась стартовой точкой теории топологических геометрий (см., например, обзор [9] по топологическим проективным плоскостям). В диссертации автора комментария (1967), в частности, было отмечено, что при некоторых предположениях структура подпространств топологического векторного пространства над топологическим телом с топологизированным множеством одномерных подпространств полностью определяет топологическое векторное пространство и, таким образом, в теореме А. Н. Колмогорова топологическое тело K и топологическое пространство M определены однозначно (с точностью до топологического полулинейного отображения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 283 с.
2. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 407 с.
3. Бэр Р. Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.
4. Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 497 с.
5. Kolmogoroff A. Zur Begründung der projektiven Geometrie.— Ann. Math., 1932, vol. 33, N 1, p. 175—176.

6. Neumann J. Continuous geometry. Princeton: Univ. Press, 1960. 299 p.
7. Pontrjagin L. Über stetige algebraische Körper.— Ann. Math., 1932, vol. 33, N 1, p. 163—174.
8. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. 519 с.
9. Salzmann H. R. Topological planes.— Adv. Math., 1967, vol. 2, N 1, p. 1—60.
10. Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.: Гостехиздат, 1961. 198 с.

К РАБОТЕ ОБ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ

А. Н. Колмогоров

Постановка задачи принадлежит мне, как и интуитивный прогноз ожидаемых качественных результатов. Вместе с некоторыми другими моими работами, которые войдут во вторую книгу моих трудов, настоящая работа (№ 38) своим возникновением обязана моим длительным контактам с А. С. Серебровским и группой его сотрудников Н. П. Дубининым, А. А. Малиновским и Д. Д. Ромашовым. Наиболее глубокие моменты в математическом решении проблемы принадлежат И. Г. Петровскому.

Тогда же мной была намечена программа дальнейших исследований, из которой я здесь отмечу лишь следующие пункты:

- 1) исследование «фронта наступления» для рецессивного гена (такой фронт «расползается», неограниченно расширяясь);
- 2) исследование судьбы «островка», заполненного носителями, дающего преимущество гена (такой островок будет «растворяться», если он слишком мал, и будет неограниченно расти, если он достаточно велик).

В комментарии Г. И. Баренблатта сказано, как и кем эта программа к настоящему времени выполнена.

В биологической литературе работа не вызвала особенно широкого отклика. Более актуальной она оказалась во многих разделах физики, о чем подробно рассказано в комментарии Г. И. Баренблатта.

УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

(Г. И. Баренблатт)

1. Математическое содержание комментируемой работы № 38 (мы будем называть ее далее работа I) кратко сводится к следующему. Рассматривалось уравнение диффузии с нелинейной правой частью

$$\partial v / \partial t - k \partial^2 v / \partial x^2 = F(v), \quad (1)$$

где $F(v)$ — достаточно гладкая функция, определенная на интервале $0 \leq v \leq 1$ и такая, что $F(0) = F(1) = 0$; $F(v) > 0$ при $0 < v < 1$; $F'(0) = \alpha > 0$, $F'(v) < \alpha$ при $v > 0$, $k = \text{const} > 0$. Было показано, что это уравнение имеет

инвариантные решения типа бегущей волны

$$v = V(x + \lambda t + c), \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям $v(\infty, t) = 1$, $v(-\infty, t) = 0$ с любыми скоростью λ , удовлетворяющими неравенству $\lambda \geq \lambda_0 = 2\sqrt{k\alpha}$. Константа c при непосредственном построении инвариантного относительно группы сдвига решения (2) остается неопределенной. Далее, было установлено, что решение задачи Коши для уравнения (1) с произвольными начальными данными, такими, что $v(x, 0) \equiv 0$ при $x < a$, $0 < v(x, 0) < 1$ при $a < x < b$, $v(x, 0) \equiv 1$ при $x > b$, стремится при $t \rightarrow \infty$ к решению вида (2), отвечающему $\lambda = \lambda_0$ и некоторому единственному образом определяемому значению константы c .

Научное долголетие работы I связано с тем, что именно в этой работе впервые появились математически законченная постановка и метод решения проблемы «промежуточной асимптотики» нелинейной задачи математической физики: инвариантного асимптотического поведения решений, когда время стремится к бесконечности, но система еще не пришла в состояние равновесия. В самом деле, на промежуточно асимптотической стадии процесс продолжается, но зависимость от деталей начальных условий (распределения $v(x, 0)$) исчезает, поскольку процесс описывается инвариантным решением вида (2). При этом система еще далека от состояния равновесия $v(x, \infty) = 1$.

Вслед за работой I в различных областях математической физики появилось изобилие инвариантных промежуточно асимптотических решений. Вся возникшая здесь громадная литература существенно опирается на идеи, впервые высказанные в работе I. Общность и внутренняя связь этих инвариантных промежуточных асимптотик выяснилась в основном в последнее время.

2. Идея промежуточно асимптотических режимов типа бегущей волны оказалась прежде всего очень плодотворной в математической теории горения. Спустя год после выхода работы I появилась статья Зельдовича и Франк-Каменецкого [1] (более подробное изложение было дано в [2]), где та же идея была применена для построения тепловой теории распространения пламени. В простейших предположениях эта задача также сводилась к построению решений типа бегущей волны для уравнения (1), но в отличие от работы I здесь не выполнялось условие $F'(v) < F'(0)$ при $0 < v < 1$. В работах [1, 2] предполагалось в соответствии с физикой задачи, что функция $F(v)$ — скорость химической реакции — быстро возрастает с ростом v вплоть до v , близких к единице, после чего спадает до нулевого значения при $v = 1$. Для получения решения типа бегущей волны в работах [1, 2] было сделано дополнительное предположение о том, что $F(v) \equiv 0$ при $0 \leq v \leq \beta < 1$. При таком предположении в отличие от работы I значение скорости распространения пламени — параметра λ_0 — определилось единственным образом. Поэтому актуальный для работы I вопрос о выборе скорости распространения бегущей волны здесь не возникал. В связи с этим доказательство того, что и в таком предположении о $F(v)$ решение вида бегущей волны, соответствующее $\lambda = \lambda_0$, действительно является асимптотикой при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши было дано лишь много позже в работе [3]; оно существенно опиралось на идеи и методы, развитые в работе I.

Такие доказательства важны и для самой теории горения: в более сложных задачах этой теории λ_0 определяется неоднозначно и выбор надлежащего значения становится нетривиальным. Сравнительно недавно в математической теории горения удалось избавиться [4, 5] от сильного предположения о том, что функция $F(v)$ тождественно равна нулю на некотором интервале вблизи $v = 0$. Было показано, что и при отказе от этого предположения промежуточная асимптотика решения задачи Коши описывается решением (2) типа бегущей волны. Замечательно, что несмотря на то, что в задачах теории горения условие $F'(v) < F'(0)$ не выполняется, оказалась справедливой основная формула работы I: $\lambda_0 = 2\sqrt{kF'(0)}$. Это обстоятельство было сперва обнаружено численными расчетами, а затем получило аналитическое объяснение [5].

К настоящему времени литература по математической теории горения насчитывает тысячи названий (большой, хотя и далеко не полный список литературы, можно найти в книге [6]). Однако идея промежуточно асимптотических режимов типа бегущей волны с неизвестной заранее и определяемой в ходе решения скоростью распространения нашла применение и во многих других областях математической физики, помимо теории горения. Отметим среди них знаменитую проблему о распространении импульса возбуждения по нерву [7] и, в частности, ее электрохимическую модель [8]. Исследование последней модели, непосредственно опирающееся на идеи работы I, было дано в [9]. Отметим также, что в последнее время были исследованы различные процессы, включающие в себя эффекты распространения плазменных фронтов в электрических, электромагнитных, световых (лазерных) полях, так называемые волны распространения разрядов [10—13]. Эти процессы также приводят к рассмотрению решений типа бегущей волны с заранее неизвестной и определяемой в ходе решения задачи скоростью распространения. Их исследование полностью основано на идеях, впервые сформулированных в работе I.

3. Исчезновение из промежуточной асимптотики параметров, характеризующих детали начального условия — линейных размеров и времен, и структура основного уравнения (1) обеспечили для рассмотренной в работе I задачи о распространении гена, имеющего преимущество в борьбе за существование, инвариантность промежуточного асимптотического режима относительно некоторой подгруппы группы преобразований сдвига.

Существует обширный класс задач, в котором промежуточные асимптотические режимы инвариантны относительно некоторой подгруппы группы преобразований подобия и представляются так называемыми автомодельными решениями. При исследовании таких задач идеи, высказанные впервые в работе I, также оказались фундаментальными.

Действительно, перейдем в задаче, рассмотренной в работе I, к новым независимым переменным $\xi = e^x$, $\tau = e^{-t}$ и обозначим $A = e^{-c}$. Тогда решение вида бегущей волны (2) записывается в автомодельной форме

$$v = V(\ln \xi - \lambda \ln \tau + c) = U(\xi/A\tau^\lambda), \quad (3)$$

причем оказывается заранее неизвестным и подлежащим определению показатель степени λ . Константа A при непосредственном построении автомодельного решения не определяется, она находится сплыванием решения вида (3) с решением задачи Коши, асимптотикой которого является автомодельное решение

(3). После появления работы I автомодельные решения такого типа появились во многих областях, они получили название автомодельных решений второго рода. Первой по времени задачей такого типа была газодинамическая задача о сходящейся ударной волне, рассмотренная Гудерлеем [14], Ландау и Станюковичем (см. [15]). Построенное в этих работах решение представляет собой автомодельную асимптотику решения задачи о движении газа, возникающем внутри сферы под действием сильного взрыва на ее поверхности. Эта асимптотика применима в некоторой области $r_0(t) < r < r_1(t)$ вблизи сильной ударной волны $r = r_0(t)$ (r — расстояние от центра сферы). Для автомодельного асимптотического решения функции

$$P = \frac{p}{\rho_0 r^2 / t^2}, \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V = \frac{v}{r/t} \quad (4)$$

(p — давление газа, ρ — его плотность, v — скорость, ρ_0 — начальная плотность газа) зависят от переменной

$$\zeta = r/A t^\lambda, \quad (5)$$

где показатель λ находится из условия существования сингулярного автомодельного решения (4) уравнений газодинамики в целом. Константа A остается неопределенной и может быть найдена лишь сращиванием автомодельной промежуточной асимптотики с исходным неавтомодельным решением — ситуация, в точности аналогична рассмотренной в работе I.

Подчеркнем, что задача о сходящейся сильной ударной волне не допускает использования для определения показателя степени λ закона сохранения энергии. В самом деле, энергия E , заключенная в области $r_0(t) < r < r_1(t)$, где применима автомодельная асимптотика, стремится к нулю одновременно с радиусом ударной волны. Однако E убывает медленнее, чем r_0 , и концентрация энергии, а также давление газа на фронте волны стремятся к бесконечности. Здесь проявляется специфический для газодинамических задач принцип отбора показателя λ из условия на характеристике, т. е. на линии $dr/dt = v - c$, где c — скорость звука, приходящей в центр $r = 0$ одновременно с фронтом волны. Для системы обыкновенных уравнений, получающейся для функций $P(\zeta)$, $R(\zeta)$, $V(\zeta)$, из уравнений газодинамики характеристика соответствует особой точке типа седла, через которую интегральная кривая проходит только при избранном значении показателя λ . Замечательно, что при показателе адiabаты γ , большем некоторого критического значения $\gamma_{cr} \approx 1,87$, как и в задаче работы I, возникает непрерывный спектр возможных значений показателя λ , а при $\gamma < \gamma_{cr}$ показатель λ определяется единственным образом. Гельфанд (см. [16]) высказал гипотезу, что в случае $\gamma > \gamma_{cr}$ дело обстоит так же, как и в задаче работы I, т. е. осуществляется всегда наименьшее значение λ , однако этот вопрос пока остается открытым.

Другая такая же газодинамическая задача, также приводящая к автомодельным решениям второго рода и привлекающая широкое внимание — «задача о коротком ударе» [17, 18, 16, 19]. Здесь рассматривалось построение автомодельной промежуточной асимптотики вблизи ударной волны с заранее неизвестным и определяемым в ходе решения показателем степени для движе-

ния газа, возникающего при ударе жесткой стенки по полупространству, заполненному газом и граничащему с вакуумом.

В последнее время автомодельные решения второго рода появились и во многих других областях математической физики; литературные указания можно найти в книге [20]. Широкое развитие подхода, основанного на промежуточно асимптотических инвариантных решениях, постоянное использование в новых задачах идей, впервые сформулированных в работе I, обуславливают неувядающую фундаментальную значимость этой основополагающей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. К теории равномерного распространения пламени. — ДАН СССР, 1938, т. 19, № 9, с. 693—697.
2. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. — ЖФХ, 1948, т. 22, № 1, с. 27—48.
3. Канель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения. — Мат. сб., 1962, т. 59, с. 245—288.
4. Зельдович Я. Б. Распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре: Препр. ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1978. 10 с.
5. Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Худяев С. И. Распространение пламени по реагирующей газовой смеси: Препр. ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1979. 28 с.
6. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
7. Ходжкин А. Нервный импульс. М.: Мир, 1965.
8. Bohnhoeffter K. F. Modelle der Nervenregung. — Naturwissenschaften, 1953, Bd. 40, N 11, S. 301—311.
9. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л. О распространении импульса возбуждения в электрохимической диффузионной модели нерва. — ПММ, 1965, т. 29, № 6, с. 977—992.
10. Велихов Е. П., Дыно А. М. Волна неравновесной ионизации в газе. — В кн.: Труды VII Междунар. симпоз. по ионизированным явлениям в газах. Белград, 1965, с. 47—60.
11. Бункин Ф. В., Конев В. И., Прохоров А. М., Федоров В. Б. Лазерная искра в режиме медленного горения. — Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, № 11, с. 609—612.
12. Райзер Ю. П. Высокочастотный разряд высокого давления в потоке газа как процесс медленного горения. — ЖПМТФ, 1968, № 3, с. 3—10.
13. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.
14. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. — Luftfahrt-Forschungsber., 1942, Bd. 19, Lfg. 9, S. 302—312.
15. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
16. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. — УМН, 1963, т. 18, вып. 2, с. 3—24.
17. Weizsäcker C. P. Genäherte Darstellung starker instationärer Stosswellen durch Homologie-Lösungen. — Ztschr. Naturforsch., 1954, Bd. 9a, H. 4, S. 269—275.
18. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). — Акуст. журн., 1956, т. 2, вып. 1, с. 28—38.
19. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. 2-е изд. М.: Наука, 1966.
20. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 206 с.

К РАБОТАМ ПО ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Н. Колмогоров

Интерес к изучению турбулентных потоков жидкостей и газов возник у меня в конце 30-х годов. Мне сразу стало ясно, что основным математическим аппаратом исследований призвана стать теория случайных функций многих переменных (случайных полей), которая в то время только зарождалась. Кроме того, вскоре мне стало ясно, что трудно надеяться на создание замкнутой в себе чистой теории. За отсутствием такой теории придется опираться на гипотезы, получаемые из обработки экспериментальных данных. Важно было и получить талантливых сотрудников, способных работать в таком смешанном плане, сочетая разработку теории с экспериментом.

В этом последнем отношении мне повезло: А. М. Обухов, переведенный из Саратовского университета в Московский, сделался моим дипломником в 1939 г., а затем стал моим аспирантом; примерно в те же годы М. Д. Миллиончиков начал работать под моим руководством в качестве аспиранта МАИ. Позднее моими аспирантами стали также А. С. Монин и А. М. Яглом.

В 1946 г. О. Ю. Шмидт предложил мне работать в качестве завсудующего лабораторией турбулентности в Институте теоретической геофизики АН СССР (в 1949 г. руководство этой лабораторией перешло к А. М. Обухова). Непосредственной экспериментальной работой я не занимался, но потратил много энергии на расчетную и графическую обработку данных других исследователей.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

(А. М. Яглом)

Общее число опубликованных А. Н. Колмогоровым статей по механике турбулентных течений жидкостей и газов сравнительно невелико и ни одна из них не занимает много места. Однако эти несколько небольших статей совершенно преобразили лицо современной теории турбулентности и оказали огромное влияние и на все дальнейшее развитие указанной теории, и на постановку экспериментальных исследований широких классов турбулентных течений.

Как известно, турбулентность — это явление, наблюдаемое в громадном большинстве течений жидкостей и газов, встречающихся как в природе, так и в технических устройствах или лабораторных установках. Оно заключается в наличии беспорядочных пульсаций (т. е. хаотических изменений в пространстве и во времени) скорости u , давления p и других гидродинамических характеристик рассматриваемых течений, делающих соответствующие гидродинамические поля $u(x, t)$, $p(x, t)$ и др. резко изменчивыми и крайне нерегулярными. По этой причине изучение индивидуальных гидродинамических полей турбулентных течений оказывается практически неосуществимым и интерес представляет

лишь статистическое описание таких течений, опирающееся на изучение каких-то их сглаженных характеристик, изменяющихся уже гораздо более плавно и закономерно.

Необходимость перехода к сглаженным характеристикам была ясна уже основоположнику всей теории турбулентности Рейнольдсу [1], еще в конце прошлого века предложившему разбить поле скорости $u(x, t)$ турбулентного течения на среднюю скорость $\bar{u}(x, t)$, определяемую при помощи осреднения значений $u(x, t)$ по некоторому интервалу времени, и пульсационную скорость $u' = u - \bar{u}$, а затем рассмотреть динамические уравнения для средней скорости u (ныне называемые уравнениями Рейнольдса). При этом, однако, оказалось, что простейшее осреднение по заданному интервалу времени (или же по некоторой области пространства) на самом деле не очень удобно, так как для получения достаточно простых уравнений для среднего поля $\bar{u}$ операция осреднения должна удовлетворять некоторым общим условиям, лишь приближенно (но не точно) выполняющимся и для временного, и для пространственного осреднения. Гораздо более удобным оказалось вместо того или иного осреднения индивидуальных гидродинамических полей рассмотреть сразу ансамбль всевозможных турбулентных течений, допустимых при фиксированных внешних условиях, и затем использовать вероятностные средние значения по ансамблю аналогичных течений, т. е. считать, что поля гидродинамических характеристик турбулентных течений представляют собой случайные функции трех пространственных координат и времени в смысле, принятом в современной теории вероятностей. Такой «статистический поход» к механике турбулентности впервые был использован в работах А. Н. Колмогорова и его учеников (см., например, первый абзац статьи № 45 и цитированную там более раннюю статью Миллионщикова [2]); в настоящее время он является общепринятым.

Перейдем теперь к основному содержанию очень важных статей № 45 и 47, посвященных формулировке общих законов, определяющих статистический режим мелкомасштабных пульсаций любой развитой турбулентности с достаточно большим числом Рейнольдса $Re = UL/\nu$ (где U и L — характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемом течении, а ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости). До появления этих работ никто и не подозревал, что беспорядочные турбулентные пульсации подчиняются некоторым простым количественным закономерностям, имеющим совершенно универсальный характер, т. е. справедливым для всех течений, далеких от ламинарного режима (т. е. характеризваемым значением Re , намного превосходящим наименьшее значение Re_{cr} числа Рейнольдса, при котором еще возможна турбулентность.) Существенно, однако, что еще в 20-х годах нашего столетия английским ученым Ричардсоном (см., например, [3, с. 66]) была предложена качественная схема развитого турбулентного течения как иерархии вихрей (т. е. возмущений или неоднородностей) различных порядков, в которой наиболее крупные «вихри первого порядка» заимствуют свою энергию из осредненного течения и затем передают ее «вихрям второго порядка», те — «вихрям третьего порядка» и т. д. вплоть до мельчайших вихрей, энергия которых рассеивается под действием молекулярной вязкости (т. е. переходит в теплоту в результате вязкого трения). Очень ясное описание «схемы Ричардсона» дано в первых двух абзацах подстрочного примечания 2 статьи № 45; следующие же два абзаца того же примечания существенно

но дополняют эту схему, углубляя наши представления о характере поведения той нелинейной системы с очень большим числом степеней свободы, какой является развитое турбулентное течение, и позволяя уже извлечь из этих представлений вполне конкретные количественные выводы.

Из числа конкретных результатов, содержащихся в работах № 45 и № 47, наиболее широкую известность приобрел так называемый «закон двух третей» механики турбулентности, описываемый формулами (23) и (24) работы № 45 (см. также формулу (9) в № 47). В работе № 47 Колмогоров описал первую попытку сопоставления этого найденного им закона с имевшимися в то время экспериментальными данными измерений поперечной корреляционной функции скорости $R_{nn}(r)$ в турбулентности, возникающей за решеткой, помещенной в аэродинамическую трубу. Позже аналогичную проверку «закона двух третей» на материале специально поставленных измерений характеристик турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе произвел Таунсенд [4], который, так же как и Колмогоров, нашел, что результаты измерений более или менее удовлетворительно согласуются с предсказаниями теории. Еще позже, однако, было выяснено, что некоторые выводы Таунсенда являются ошибочными и что вообще значения Re , при которых производилось большинство измерений за решеткой в аэродинамических трубах, слишком малы для существования заметного интервала значений r , на котором выполняется «закон двух третей» (см., например, Монин и Яглом [5, § 16.6 и 23.3]). Тем самым стало ясным, что наиболее удобны для проверки «закона двух третей» данные измерений в природных турбулентных течениях в атмосфере, морях и океанах, характеризующиеся обычно гораздо большими числами Рейнольдса, чем течения, осуществляемые в лабораторных условиях. И действительно, первое достаточно убедительное подтверждение справедливости «закона двух третей» было получено Обуховым [6], обработавшим сравнительно старые, но весьма тщательные измерения Гедеке [7] разностей скоростей в ряде пар точек приземного слоя атмосферы (на высоте 1 м над поверхностью луга). В дальнейшем введенные в рассмотрение А. Н. Колмогоровым функции $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$ (называемые *продольной* и *поперечной структурными функциями скорости*) многократно измерялись и в атмосфере, и в море (см. сводку таких измерений в § 23.3 книги [5] и ее расширенного английского издания [8], в обзорной статье [9], а также недавнюю работу [10]). При этом в полном согласии с предсказаниями А. Н. Колмогорова во всех случаях было обнаружено, что обе функции $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$ пропорциональны $r^{2/3}$ на значительном интервале значений r (см., в частности, типичный рис. 1 заимствованный из работы Ван Атта и Чена [11]); также и равенство $B_{nn}(r) = (4/3) B_{dd}(r)$, предсказанное в статье № 45, оказалось неплохо согласующимся с данными большинства измерений.

Более сложной оказалась проверка равенства (7) статьи А. Н. Колмогорова № 47, следующего из полученного в этой статье динамического уравнения (5), связывающего продольные структурные функции второго и третьего порядков $B_{dd}(r)$ и $B_{ddd}(r)$. Дело в том, что надежное определение среднего куба разности скоростей $B_{ddd}(r)$ предъявляет более высокие требования к точности измерений и требует использования заметно большего осреднения, чем определение с той же относительной ошибкой соответствующего среднего квадрата B_{dd} ; помимо того, одновременное определение также и значения $\bar{\epsilon}$, входящего в формулу (7), возможно лишь при наличии аппаратуры, регистрирующей без искажения наибо-

лее мелкомасштабные пульсации скорости, отвечающие масштабам порядка «колмогоровского микромасштаба длины» (определяемого формулой (17) статьи № 45). С другой стороны, равенство (7) замечательно в том отношении, что в отличие, например, от упоминавшегося выше «закона двух третей» оно не включает никаких неопределенных численных множителей; это обстоятельство делает его проверку особенно привлекательной. Поэтому неудивительно, что за последние годы несколько групп экспериментаторов осуществило и в атмосфере, и в некоторых лабораторных турбулентных течениях при больших значениях Re

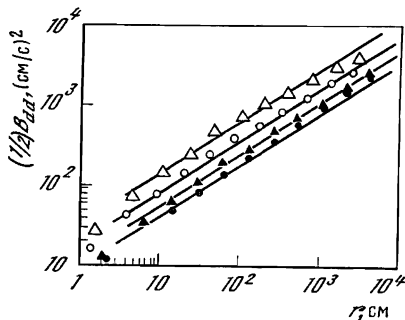


Рис. 1. Продольная структурная функция скорости ветра $B_{dd}(r)$ по данным измерений в атмосфере над морем

Значки отвечают разным сериям измерений, проводившихся на разных высотах над уровнем моря (в пределах от 3 до 31 м) и при разной средней скорости ветра. Прямые линии отвечают «закону двух третей»

измерения структурной функции третьего порядка $B_{ddd}(r)$ вместе с измерениями $\bar{\epsilon}$ специально с целью проверки равенства (7); полученные при этом результаты во всех случаях оказались прекрасно согласующимися с предсказанием А. Н. Колмогорова (см., например, [10—12] и типичный рис. 2, заимствованный из работы [10]).

Отметим еще, что основное уравнение (5) статьи № 47 выводится в этой статье из модифицированного уравнения Кармана — Ховарта (3), непосредственно следующего из результатов работы [13] только в случае, когда турбулентные возмущения всех масштабов предполагаются однородными и изотропными. Так как, однако, в силу выводов работы № 45 статистический режим мелкомасштабных пульсаций при больших значениях Re не должен зависеть от характера крупномасштабных движений, то сделанное в работе № 47 предположение о том, что уравнения (3) и (5) при $r \ll L$ должны быть справедливыми для любой (а не только для изотропной) турбулентности с достаточно большим значением Re , представляется вполне оправданным (см. в этой связи предложенный Мониным [14] и изложенный также в [5, § 22.1] вывод уравнения (5), который не использует предположения об изотропности турбулентности в целом). Заметим, кроме того, что равенство (6) работы № 45 (от которого не зависят все остальные содержащиеся здесь результаты), приведенное без доказательства, на самом деле не является вполне очевидным (это обстоятельство было отмечено, в частности, в статье Бэтчелора [15], сыгравшей большую роль в популяризации результатов А. Н. Колмогорова за рубежом); для его доказательства следует привлечь спектральное представление локально однородных и локально изотропных случайных полей (см. [16, с. 334—335] или [5, § 13.3]).

В работе № 46 рассматривается одна более специальная задача механики турбулентности, касающаяся вырождения (т. е. затухания во времени) полностью

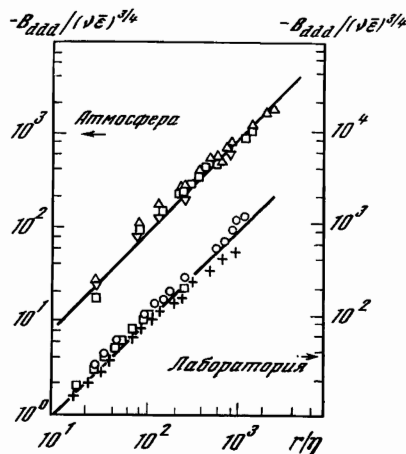
однородной и изотропной турбулентности в безграничном пространстве. В этой работе существенно используется сделанное Лойцянским [17] заключение о том, что в изотропной турбулентности сохраняет постоянное значение величина Λ , определенная формулой (11); кроме того, здесь используется также выдвинутое Карманом предположение об автомодельности корреляционной функции (см. формулу (19)) и «закон двух третей» (25). При этом «закон двух третей» в статье № 46 играет лишь второстепенную роль и на самом деле все ее результаты можно обосновать, используя только гипотезы о кармановской автомодельности и

Рис. 2. Зависимость нормированных продольных структурных функций скорости третьего порядка

$B_{ddd}(r)/(\bar{\epsilon}\nu)^{3/4} = \beta_{ddd}(r)$ от безразмерного расстояния $r/\eta = \rho$ по данным измерений в атмосфере и в нескольких лабораторных турбулентных течениях

Значки отвечают различным сериям измерений; прямые линии — предсказание Колмогорова:

$$\beta_{ddd}(\rho) = -0,8 \rho$$



о постоянстве величины Λ (см., например, [5, § 16.2]). С другой стороны, если принять, что «закон двух третей» является справедливым (т. е. ограничиться случаем очень больших значений Re), то все основные результаты статьи № 46 можно получить, исходя только из допущения о конечности и постоянстве инварианта Лойцянского Λ , но вовсе не привлекая требования об автомодельности корреляционных функций (см. Конт-Белло и Корсин [18]). Следует, впрочем, отметить, что играющее основную роль в работе № 46 предположение о конечности и постоянстве во времени величины Λ в настоящее время уже представляется далеко не бесспорным (см. по этому поводу Бэтчелор и Праудмен [19] или Монин и Яглом [5, § 15.5, 15.6]; ср. также работы Сафмана [20, 21], где предположение о постоянстве Λ заменяется совсем другой гипотезой).

Вернемся теперь снова к общей теории локально изотропной турбулентности, изложенной в работах № 45 и 47. Результаты, эквивалентные основному «закону двух третей» этой теории, были почти одновременно с А. Н. Колмогоровым совсем иначе получены Обуховым [22, 23]; несколько позже практически к тем же результатам независимо пришли также Онзагер [24, 25], Вейцзеккер [26] и Гейзенберг [27] (об этом вкратце упоминается в статье № 58). Однако в статьях № 45 и 47 А. Н. Колмогорова выводы о локальной структуре турбулентности при очень больших значениях Re сформулированы в наиболее общей форме: здесь используются лишь некоторые наглядные и физически очень естественные допущения о природе развитой турбулентности, на основе которых формулируют-

ся две фундаментальные гипотезы подобия, справедливые для любого развитого турбулентного течения и могущие иметь множество различных приложений. Рассмотрению целого ряда таких приложений и подтверждающих их экспериментов посвящены обширная глава 8 книг Мони́на и Ягло́ма [5, 8] и недавняя обзорная статья [9], содержащие большое число дополнительных ссылок на литературу; с весьма важными приложениями теории Колмогорова к исследованию распространения в турбулентной среде света, звука и радиоволн можно ознакомиться, например, по монографии Татарского [28]. В настоящем же комментарии достаточно будет остановиться лишь на немногих простых примерах приложений гипотез подобия А. Н. Колмогорова.

Приложение второй гипотезы подобия к высшим моментам продольной разности скоростей $\Delta_{dd}(\mathbf{r}) = u_d(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_d(\mathbf{x}, t)$ (где u_d — проекция вектора $\mathbf{u}$ на направление вектора $\mathbf{r}$ длины $r = |\mathbf{r}|$), очевидно, приводит к формуле

$$|\Delta_{dd}(\mathbf{r})|^p = C_p (\bar{\epsilon} r)^{p/3} \quad \text{при } L \gg r \gg \eta = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}, \quad (1)$$

обращающейся в «закон двух третей» при $p = 2$ и согласующейся с формулой (7) статьи № 47 при $p = 3$. Обе гипотезы А. Н. Колмогорова могут быть также приложены к спектральной плотности кинетической энергии турбулентности (или короче — к спектру турбулентности) $E(k, t)$, где k — волновое число, и к соответствующим продольному и поперечному одномерным спектрам $E_1(k, t)$ и $E_2(k, t)$. Спектр $E(k, t)$ определяется исходя из разложения случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ в трехмерный интеграл Фурье, обобщающего аналогичное разложение случайных функций одного переменного, впервые указанное в работе А. Н. Колмогорова № 42, а одномерные спектры $E_1(k, t)$ и $E_2(k, t)$ отвечают разложению компонент $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$ вектора $\mathbf{u}$ в одномерный интеграл Фурье по координате x_1 или соответственно по x_2 (или по x_3); все эти три спектра просто связаны со структурными функциями $B_{dd}(r, t)$ и $B_{nn}(r, t)$ (см., например, [16] или [5, § 13.3]). В силу первой гипотезы подобия А. Н. Колмогорова спектры E, E_1 и E_2 при $k \gg 1/L$ не зависят от t и задаются формулами

$$\begin{aligned} E(k) &= (\nu^5 \bar{\epsilon})^{1/4} \varphi(\eta k), \\ E_1(k) &= (\nu^5 \bar{\epsilon})^{1/4} \varphi_1(\eta k), \quad E_2(k) = (\nu^5 \bar{\epsilon})^{1/4} \varphi_2(\eta k), \end{aligned} \quad (2)$$

где φ, φ_1 и φ_2 — универсальные функции одного переменного, любые две из которых (а также и функция β_{dd} работы № 45) просто выражаются через третью из этих функций. Аналогично этому вторая гипотеза подобия влечет за собой соотношения

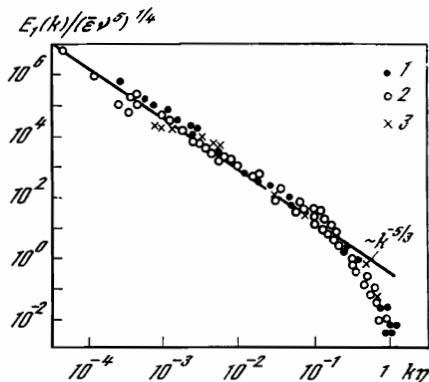
$$E(k) = A \bar{\epsilon}^{-2/3} \nu k^{-5/3}, \quad E_1(k) = A_1 \bar{\epsilon}^{-2/3} \nu k^{-5/3}, \quad E_2(k) = A_2 \bar{\epsilon}^{-2/3} \nu k^{-5/3}, \quad (3)$$

справедливые при $1/\eta \gg k \gg 1/L$; здесь A, A_1 и A_2 — универсальные постоянные, причем, как нетрудно показать, $A = [55/27 \Gamma(1/3)] C \approx 0,76 C, A_1 = (18/55) A \approx C/4, A_2 = (24/55) A \approx C/3$, где C — коэффициент формулы (23) работы № 45 этой книги. Результаты (2) и (3) были впервые получены (в применении к трехмерному спектру $E(k)$) Обуховым [22, 23] с помощью исследования построенного им спектрального уравнения баланса турбулентной энергии. Каждое из трех соотношений (2) точно эквивалентно формуле (20) работы № 45 А. Н. Колмо-

рова, а соотношения (3) (выражающие так называемый «закон пяти третей») эквивалентны «закону двух третей» (23).

Отметим еще, что Обуховым [29] и Корсином [30] результаты работ А. Н. Колмогорова были перенесены также на структуру поля температуры $T(x, t)$ (или концентрации $\theta(x, t)$ произвольной пассивной, т. е. не влияющей на динамику, примеси к жидкости) в развитом турбулентном течении; при этом оказалось, что для скалярного поля T (или θ) также справедливы и «закон двух третей» и «закон пяти третей» (а кроме того, выполняется и родственное уравнению (5) работы № 47 уравнение для структурных функций; см. [31]).

Рис. 3. Результаты измерений одномерного продольного спектра скорости течения воды в океанском проливе (1); ветра в атмосфере вблизи Земли (2); течения воздуха в пограничном слое на стенке большой аэродинамической трубы (3)



Спектральная формулировка (2) и (3) фундаментальных законов мелкомасштабной турбулентности, впервые указанных А. Н. Колмогоровым, очень удобна для экспериментальной проверки, так как измерения спектров беспорядочных флуктуаций широко распространены в современной науке и технике и методы их проведения детально разработаны. Наиболее просто измеряются продольные (в направлении средней скорости течения) одномерные спектры, которые могут быть выражены через частотные спектры пульсаций скорости в одной фиксированной точке. В качестве типичного примера на рис. 3, заимствованном из [5], сведены вместе данные измерений одномерного продольного спектра $E_1(k)$ скорости трех весьма различных турбулентных течений — течения воды в океанском проливе, ветра в атмосфере вблизи Земли и течения воздуха в большой аэродинамической трубе вблизи от ее стенки. Мы видим, что данные всех трех измерений, поделенные на значение $(E v^5)^{1/4}$ и представленные в виде функции от $k\eta$, достаточно точно укладываются на одну кривую, т. е. хорошо согласуются с теоретической формулой (2); также и «закон пяти третей» (3) убедительно подтверждается этими данными.

Экспериментальные результаты, представленные на рис. 3, могут быть непосредственно использованы для определения значения коэффициента C «закона двух третей» (просто выражающегося через коэффициенты законов (3)). Первая попытка определения значения этого коэффициента была предпринята еще самим А. Н. Колмогоровым в работе № 47, в которой для этой цели были привлечены данные измерений в аэродинамической трубе за решеткой и было найдено, что $C \approx 1,5$. Однако выше мы уже отмечали, что числа Рейнольдса,

характеризующие использовавшиеся в статье № 47 эксперименты, были все же недостаточно большими для того, чтобы «закон двух третей» здесь выполнялся на значительном интервале значений r ; поэтому и приведенная в № 47 первая оценка C теперь уже не представляется надежной. В дальнейшем экспериментальные определения значения C многократно производились целым рядом исследователей, использовавших с этой целью и измерения структурных функций $B_{dd}(r)$ и $B_{nn}(r)$, сопровождающиеся также аккуратными измерениями значения $\bar{\epsilon}$, и измерения спектров и значений $\bar{\epsilon}$, и одновременные измерения структурных функций $B_{dd}(r)$ и $B_{ddd}(r)$, позволяющие использовать формулы (10) и (8) работы А. Н. Колмогорова № 47. Сводка данных о значении C , охватывающая результаты 37 работ, включена в обзорную статью [9]; помимо того, можно указать еще на две более поздние работы [10, 32] на ту же тему. Любопытно, что почти все измерения приводят к результатам, не очень сильно отличающимся от самой первой оценки значения коэффициента C , принадлежащей А. Н. Колмогорову: согласно имеющимся в настоящее время данным $C \approx 2$, причем ошибка этой оценки вряд ли превосходит 10—15%.

Наблюдающийся разброс экспериментальных значений коэффициента C вероятно в заметной степени объясняется просто неточностью измерений, но в какой-то мере он может быть связан и с влиянием изменчивости поля скорости диссипации энергии $\epsilon(x, t)$, о которой говорится в статье № 58 А. Н. Колмогорова. Эта статья (представляющая собой изложение доклада, сделанного на Международном коллоквиуме по механике турбулентности в Марселе в 1961 г.) тесно примыкает к работе Обухова [33] и вместе с этой последней знаменует собой дальнейшее развитие теории локально изотропной турбулентности, основы которой были заложены статьями № 45 и 47. В последующие годы изучению уточненной теории локальной структуры турбулентности, намеченной в работах № 58 и [33], было посвящено очень большое число теоретических и экспериментальных исследований, лишь частично отраженных в специально посвященном этим вопросам § 25 книги [5] (см. также [8]).

В работе № 58 предлагается заменить первую и вторую гипотезы подобия статьи № 45 двумя уточненными гипотезами подобия, относящимися уже к нормированным разностям скоростей $V(\xi, \tau)$, и дополнить их еще третьей гипотезой, постулирующей логнормальность распределения вероятностей осредненной по сфере радиуса r скорости диссипации энергии ϵ_r и линейность зависимости дисперсии $\log \epsilon_r$ от $\log(L/r)$. Исходя отсюда, для общей структурной функции скорости $[\Delta_{dd}(r)]^p$ произвольного порядка p получается указанная в статье № 58 этой книги формула (10), обобщающая выписанную выше формулу (1), отвечающую значению $k = 0$, и показывающая, что функция $[\Delta_{dd}(r)]^p$ должна хорошо приближаться степенной функцией на значительном интервале значений $r = |r|$, но с показателем степени, вообще говоря, отличным от $p/3$ и с коэффициентом $C_p(x, t) L^{p(p-3)k/2}$, не являющимся универсальной константой, а зависящим также и от характера крупномасштабных движений (в частности, от числа Re).[†]

В краткой статье № 58 опущены аргументы, объясняющие естественность используемой здесь третьей гипотезы подобия, касающейся нормальности распределения вероятностей величины $\log \epsilon_r$ и вида ее дисперсии. Однако позже в статье [34] было показано, что рассмотрение простой модели каскадного про-

цесса последовательного «дробления» турбулентных возмущений, учитывающей автомодельность этого процесса, позволяет просто обосновать эту гипотезу (см. также [35] и [5, § 25.3]). В [34] было показано, что постоянная $\mu = 9k$, где $9k$ — коэффициент в формуле (2) (см. № 58), входит и в формулу $E_{\varepsilon\varepsilon}(k) \sim k^{-1+\mu}$, описывающую поведение одномерного спектра пульсаций скорости диссипации энергии ε на значительном интервале значений волнового числа k , после чего данные измерений спектра $E_{\varepsilon\varepsilon}(k)$ здесь были использованы для получения первой оценки $\mu \approx 0,4$ значения постоянной μ . В дальнейшем попытки экспериментально оценить значение μ предпринимались также многими другими авторами: сначала большинство из этих попыток приводило к согласующемуся с результатом статьи [34] выводу о том, что $\mu \approx 0,4 \div 0,5$ (см., например, [11, 36, 37]), но в самые последние годы ряд исследователей пришел к заключению, что, по-видимому, более ранние оценки μ были все же завышенными и что более правдоподобной представляется оценка $\mu \approx 0,2$ (см., например, [38, 57]).

В целом ряде экспериментальных работ (в частности, в [11, 35, 36, 39—43]) измерялись распределения вероятностей величины ε (точнее говоря, родственных ей величин $\varepsilon^{(1)} = 15\nu(\partial u_1/\partial x_1)^2$ и $\varepsilon_2 = 7,5\nu(\partial u_2/\partial x_1)^2$) или тех же величин, осредненных по некоторой области размера r , с целью проверки предположения статьи № 58 о логнормальности этих распределений. При этом во всех случаях было обнаружено, что соответствующая функция распределения хорошо согласуется с логарифмически нормальной функцией распределения на широком интервале умеренных значений аргумента, но на «хвостах» (т. е. при очень малых или очень больших значениях аргумента) эмпирическое распределение вероятностей все же отклоняется от логарифмически нормального. Эти отклонения, как оказалось, существенно влияют на моменты высших порядков распределений вероятностей, так что высшие моменты ε_r уже не могут быть аккуратно вычислены с помощью относящейся к логарифмически нормальному распределению формулы (9) (см. № 58). С этим фактом связано замечание Мандельброта [44] о том, что из асимптотического приближения при $Re \rightarrow \infty$ распределения вероятностей ε_r к логарифмически нормальному распределению вовсе еще не следует, что моменты ε_r при больших значениях Re будут близки к моментам этого предельного распределения. Позже Новиков [45] показал, что, постулируя только автомодельность каскадного процесса дробления турбулентных вихрей, можно уже получить формулу вида $\varepsilon_r^{p/3}/\varepsilon_r^{p/3} \sim (L/r)^{\mu p}$, где μp — некоторые постоянные, которые, однако, с ростом r не могут возрастать быстрее, чем некоторая линейная функция p (т. е. должны возрастать заметно медленнее, чем показатели степени $\mu_p^{(0)} = p(p-3)\mu/18$, отвечающие логарифмически нормальному распределению вероятностей величины ε_r). Объединив формулу Новикова с первой и второй гипотезами подобия А. Н. Колмогорова, приведенными в статье № 58, мы получим результат

$$\overline{[\Delta_{dd}(\mathbf{r})]^p} = C_p(x, t) (r\bar{\varepsilon}_r)^{p/3} (L/r)^{\mu p}, \quad (4)$$

обобщающий формулу (10) (см. № 58). Результаты измерений структурных функций скорости $\overline{[\Delta_{dd}(\mathbf{r})]^p}$ различных порядков p (вплоть до $p = 8, 9$ или даже 12) в турбулентных течениях с большими значениями Re описаны в работах [38, 46, 47]; согласно всем этим работам функции $\overline{[\Delta_{dd}(\mathbf{r})]^p}$ на значительном интервале

значений $r = |r|$ неплохо аппроксимируются степенными функциями вида $a_p r^{p/3 - \mu_p}$, где $\mu_p > 0$ при всех p (т. е. $[\Delta_{dd}(r)]^p$ возрастает с ростом r медленнее, чем предсказывает формула (1)), и при возрастании значения показателя степени p значение μ_p также увеличивается, причем $\mu_p \approx \mu_p^{(0)} = (p(p-3)\mu)/18$ при сравнительно небольших значениях p , но при дальнейшем возрастании p значения μ_p уже явно отстают от значений $\mu_p^{(0)}$.

Работа № 48 А. Н. Колмогорова стоит особняком среди всех других его работ по механике турбулентности. Эта работа посвящена уже не исследованию одной лишь мелкомасштабной структуры турбулентности, но попытке построить полную (разумеется, приближенную) систему уравнений турбулентного движения, пригодную для расчетов характеристик реальных течений, очень важных для многих областей современной науки и техники. Первые еще очень грубые методы расчета были предложены в промежутке между 1915 и 1935 гг. Прандтлем, Тейлором и Карманом; в их основу были положены строгие (но незамкнутые) уравнения Рейнольдса для средней скорости, которые затем искусственно замыкались с помощью гипотезы о коэффициенте турбулентной вязкости и привлечения понятия «пути перемешивания» для определения значений этого коэффициента (см., например, [48, § 5.8]). В самом конце 30-х и начале 40-х годов были предложены первые более совершенные модели замкнутых уравнений механики турбулентности, опирающиеся уже не только на уравнения Рейнольдса, но также и на динамические уравнения для каких-то вторых моментов пульсаций скорости и для некоторых других характеристик турбулентности. Одной из самых ранних таких систем уравнений была предложенная А. Н. Колмогоровым в работе № 48 система, включающая уравнения для средней скорости $\bar{v}_i$, интенсивности турбулентности (т. е. энергии пульсаций) b и «типичной частоты» ω (или, что эквивалентно, масштаба турбулентности $L = b^{1/2}/\omega$). Уравнения А. Н. Колмогорова оказались достаточно удачными (т. е. хорошо описывающими данные измерений) и удобными для конкретных расчетов; см. в этой связи выполненные под руководством Колмогорова прикладные работы Моница [49] и Баренблатта [50, 51], в которых используется немного модифицированная форма этих уравнений. Позже близкая система уравнений турбулентного движения была независимо предложена также Прандтлем [52]; на этом основании замкнутые уравнения относительно переменных $\bar{v}_i$, b и L в настоящее время в литературе часто называются уравнениями Колмогорова — Прандтля (см., например, [53, гл. 8]). В последующие годы замкнутые системы уравнений различной степени сложности, приближенно описывающие турбулентные течения жидкостей и газов, получили очень широкое распространение и им посвящена огромная литература, представление о которой могут дать, например, книги [54, 55], а также гл. 5 книги [56] и гл. 8 и 9 книги [53].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.— Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1894, vol. 186, p. 123—161. Рус. пер. в кн.: Проблемы турбулентности. М.: ОНТИ, 1936, с. 185—227.
2. Миллионщиков М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, с. 236—240.

3. *Richardson L. F.* Weather prediction by numerical process. Cambridge: Univ. Press, 1922. 236 p.
4. *Townsend A. A.* Experimental evidence for the theory of local isotropy.— *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1948, vol. 44, N 4, p. 560—565.
5. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
6. *Обухов А. М.* Локальная структура атмосферной турбулентности.— *ДАН СССР*, 1949, т. 67, № 4, с. 643—646.
7. *Gödecke K.* Messungen der atmosphärischen Turbulenz in Bodennähe mit einer Hitzdrahtmethode.— *Ann. hydrogr.*, 1935, N 10, p. 400—410.
8. *Monin A. S., Yaglom A. M.* Statistical fluid mechanics. Cambridge (Mass.): MIT-Press, 1975. Vol. 2.
9. *Яглом А. М.* Закономерности мелкомасштабной турбулентности в атмосфере и океане (К 40-летию теории локально изотропной турбулентности).— *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1981, т. 17, № 12, с. 1235—1257.
10. *Antonia R. A., Chambers A. J., Satyaprakash B. R.* Kolmogorov constants for structure functions in turbulent shear flows.— *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1981, vol. 107, N 453, p. 579—589.
11. *Van Atta C. W., Chen W. Y.* Structure functions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean.— *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 44, pt 1, p. 145—159.
12. *Park J. T., Van Atta C. W.* Hot- and cold-wire sensitivity corrections for moments of fine scale turbulence in heated flows.— *Phys. Fluids*, 1980, vol. 23, N 4, p. 701—705.
13. *Kármán Th. von, Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1938, vol. A164, N 917, p. 192—215.
14. *Монин А. С.* К теории локально изотропной турбулентности.— *ДАН СССР*, 1959, т. 125, № 3, с. 515—518.
15. *Batchelor G. K.* Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence.— *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947, vol. 43, N 4, p. 533—559.
16. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n -мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— *Теория вероятностей и ее применения*, 1957, т. 2, № 3, с. 292—337.
17. *Лойцянский Л. Г.* Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока.— *Тр. ЦАГИ*, 1939, вып. 440, с. 3—23.
18. *Comte-Bellot G., Corrsin S.* The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 25, N 4, p. 657—682.
19. *Batchelor G. K., Proudman I.* The large-scale structure of homogeneous turbulence.— *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 1956, vol. A248, N 949, p. 369—405.
20. *Saffman P. G.* The large scale structure of homogeneous turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, N 3, p. 581—593.
21. *Saffman P. G.* Note on decay of homogeneous turbulence.— *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, N 6, p. 1349.
22. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— *ДАН СССР*, 1944, т. 32, № 1, с. 22—24.
23. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, 1941, т. 5, № 4—5, с. 453—466.
24. *Onsager L.* The distribution of energy in turbulence (abstr.). — *Phys. Rev.*, 1945, vol. 68, N 11—12, p. 286.
25. *Onsager L.* Statistical hydrodynamics.— *Nuovo cimento*, 1949, vol. 6, Suppl., N 2, p. 279—287.
26. *Weizsäcker C. F. von.* Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen.— *Ztschr. Phys.*, 1948, Bd. 124, N 7—12, S. 614—627.
27. *Heisenberg W.* Zur statistischen Theorie der Turbulenz.— *Ztschr. Phys.*, 1948, Bd. 124, N 7—12, S. 628—657.
28. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

29. *Обухов А. М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 1, с. 58—69.
30. *Corrsin S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence.— J. Appl. Phys., 1951, vol. 22, N 4, p. 469—473.
31. *Яглом А. М.* О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке.— ДАН СССР, 1949, т. 69, № 6, с. 743—746.
32. *Dyer A. J., Hicks B. B.* Kolmogoroff constants at the 1976 ITCE. Boundary-Layer Meteor., 1982, vol. 22, N 2, p. 137—150.
33. *Obukhov A. M.* Some specific features of atmospheric turbulence.— J. Geophys. Res., 1962, vol. 67, N 8, p. 3011—3014; J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, N 1, p. 71—81.
34. *Яглом А. М.* О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 1, с. 49—52.
35. *Gurvich A. S., Yaglom A. M.* Breakdown on eddies and probability distributions for small-scale turbulence.— Phys. Fluids, 1967, Suppl. (Proc. Kyoto Sympos. on Boundary Layers and Turbulence), p. S59—S65.
36. *Gibson C. H., Stegen G. R., McConnell S.* Measurements of the universal constant in Kolmogoroff's third hypothesis for high Reynolds number turbulence.— Phys. Fluids, 1970, vol. 13, N 10, p. 2448—2451.
37. *Gibson C. H., Masiello P. J.* Observations of the variability of dissipation rates of the turbulent velocity and temperature fields.— Lect. Notes Phys., 1972, vol. 12, p. 427—453. (Proc. Sympos. San Diego, July 1971).
38. *Antonia R. A., Sathyaprakash B. R., Chambers A. J.* Reynolds number dependence of velocity structure functions in turbulent shear flows.— Phys. Fluids, 1982, vol. 25, N 1, p. 29—37.
39. *Stewart R. W., Wilson J. R., Burling R. W.* Some statistical properties of small scale turbulence in an atmospheric boundary layer.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, N 1, p. 141—152.
40. *Gibson C. H., Stegen G. R., Williams R. B.* Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, N 1, p. 153—167.
41. *Кuo A. Y-S., Corrsin S.* Experiments of internal intermittency and fine-structure distribution function in fully turbulent fluid.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, N 2, p. 285—320.
42. *Холмянский М. Э.* Измерения микротурбулентных пульсаций производной скорости ветра в приземном слое атмосферы.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 8, № 8, с. 818—828.
43. *Frenkiel F. N., Klebanoff P. S.* On the lognormality of the small-scale structure of turbulence.— Boundary-Layer Meteor., 1975, vol. 8, N 2, p. 173—200.
44. *Mandelbrot B.* Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence.— Lect. Notes Phys., 1972, vol. 12, p. 333—351. (Proc. Sympos. San Diego, July 1971).
45. *Новиков Е. А.* Переमेжаемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока.— ПММ, 1971, т. 35, № 2, с. 266—277.
46. *Van Atta C. W., Park J.* Statistical self-similarity and inertial subrange turbulence.— Lect. Notes Phys., 1972, vol. 12, p. 402—426. (Proc. Sympos. San Diego, July 1971).
47. *Василенко В. М., Любимцев М. М., Озмидов Р. В.* О флуктуациях скорости диссипации турбулентной энергии и структурных функциях высших порядков поля скорости в океане.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 9, с. 926—932.
48. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 639 с.
49. *Монин А. С.* Динамическая турбулентность в атмосфере.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1950, т. 14, № 3, с. 232—254.
50. *Баренблатт Г. И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке.— ПММ, 1953, т. 17, № 3, с. 261—274.

51. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины. — ПММ, 1955, т. 19, № 1, с. 61—88.
52. Prandtl L. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 1945, S. 6—19; Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Spring.-Verl., 1961, Tl. 2, S. 874—887.
53. Турбулентность: Принципы и применения/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980.
54. Computation of turbulent boundary layers/Eds S. J. Kline, M. V. Morkovin, G. Sovran, D. J. Cockrell: Proc. 1968 AFOSR-IFP Stanford Conf. Stanford: Univ. Press, 1969. Vol. 1. 590 p.
55. Launder B. E., Spalding D. E. Lectures on mathematical models of turbulence. London: Acad. Press, 1972. 169 p.
56. Турбулентность/Под ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
57. Antonia R. A., Satyaprakash B. R., Hussain A. K. M. F. Statistics of fine-scale velocity in turbulent plane and circular jets. — J. Fluid Mech., 1982, vol. 119, p. 55—89.

К РАБОТАМ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

А. Н. Колмогоров

Мои работы по классической механике возникли под влиянием работ Дж. Неймана по спектральной теории динамических систем (см. [1] к статье № 53) и в особенности под влиянием классической работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова 1937 г. (см. [12] к статье № 53).

Меня остро заинтересовал вопрос, какие могут быть эргодические множества (в смысле Боголюбова — Крылова) в динамических системах классической механики и какие из их типов могут заполнять множества положительной меры (вопрос этот остается нерешенным и до настоящего времени). Для накопления конкретного материала был организован семинар, посвященный изучению отдельных примеров. Мои размышления на эти и близкие к ним темы нашли широкий отклик у молодых московских математиков.

Подробнее об этом сказано в комментарии В. И. Арнольда.

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(В. И. Арнольд)

Влияние классических работ № 52 и № 53 А. Н. Колмогорова на все дальнейшее развитие теории динамических систем было исключительно велико, и сегодня одно лишь количество книг, развивающих или излагающих эти работы, исчисляется десятками. В этом комментарии невозможно охватить все их приложения, поэтому мы ограничимся лишь перечислением некоторых усовершенствований, внесенных в теорию после 1954 г.

1. ОСНОВНАЯ ПРОБЛЕМА ДИНАМИКИ

Постановка задачи о движении систем, близких к интегрируемым системам классической механики, в том числе задачи об эволюции орбит в проблеме трех тел, восходит к Ньютону [1]. Лаплас [2] уже явно формулирует теорему об устойчивости больших полуосей кеплеровых эллипсов, являющуюся прообразом теоремы Колмогорова о сохранении торов, но доказывает ее лишь в постановке приближенной теории возмущений. Пуанкаре [3], проанализировав многочисленные попытки обоснования и усовершенствования рассуждений Лапласа, дает проблеме современную формулировку (исследовать движение системы с функцией Гамильтона $W(p) + \theta S(q, p, \theta)$, периодической по q) и называет ее основной проблемой динамики (см. [3, гл. 1, п. 13]). Комментируемые работы А. Н. Колмогорова решают эту проблему для большинства начальных условий в случае общего положения ($\det \partial^2 W / \partial p^2 \neq 0$).

2. ТВЕРДОЕ ТЕЛО И ПЛАНЕТОИД

Из многочисленных задач механики, к которым непосредственно применима теорема А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений, отметим следующие две классические проблемы:

а) задача о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки;

б) плоская ограниченная круговая задача трех тел о плоском движении планетоида пренебрежимой массы под влиянием притяжения тяжелого тела S (Солнце) и обращающегося около него по круговой орбите тела J (Юпитера) малой конечной массы.

В задаче а) из теоремы Колмогорова следует, что квадрат полного кинетического момента мало меняется в течение бесконечного времени, если в начальный момент тело вращается достаточно быстро (кинетическая энергия велика по сравнению с потенциальной) (см. [4]).

Что касается планетоида, то его мгновенная эллиптическая кеплерова орбита будет под влиянием «планеты» J лишь медленно поворачиваться в своей плоскости, если в начальный момент она не пересекается с круговой орбитой «планеты» J и отношение масс тел J и S достаточно мало.

Из теоремы А. Н. Колмогорова непосредственно вытекает также устойчивость большинства магнитных поверхностей относительно малого изменения магнитного поля в тороидальных системах типа токамак при ненулевом «шире» (производной отношения частот по номеру тора).

3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Для изучения нелинейных колебаний гамильтоновых систем вблизи положений равновесия или периодических движений теорема А. Н. Колмогорова непосредственно неприменима (из-за вырождения, которое Борн [5] называет предельным: торы стягиваются в точку). Однако небольшое видоизменение этой теоремы доставляет инвариантные торы и в случае предельного вырождения. Таким образом, колмогоровские торы решают, например, проблему Бирк-

гофа об устойчивости общих эллиптических точек сохраняющих площади отображений плоскости на себя [6].

Наиболее законченный результат в этой проблеме принадлежит Мозеру [7]: неподвижная точка 0 сохраняющего площади гладкого отображения, заданного в полярных координатах формулой

$$(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi + \alpha + \beta r^2) + O(r^4),$$

устойчива, если $\alpha \neq 2\pi k/3, 2\pi k/4$; $\beta \neq 0$.

Из относящегося к предельному вырождению варианта теоремы Колмогорова следует, что колеблющаяся точка вечно остается вблизи устойчивого по линейному приближению положения равновесия или периодического движения для большинства начальных условий, близких к нему, если только рассматриваемая колебательная гамильтонова система удовлетворяет некоторым («вообще говоря» выполненным) условиям невырожденности.

В случае, когда размерность фазового пространства можно понизить до трех, двумерные торы, гарантируемые обобщенной теоремой Колмогорова, делят фазовое пространство и потому обеспечивают настоящую устойчивость положений равновесия или периодических движений по Ляпунову. Из классических проблем, решенных таким образом, упомянем две:

а) доказательство устойчивости лагранжевых периодических решений плоской круговой ограниченной задачи трех тел [8, 9];

б) доказательство устойчивости перевернутого нелинейного маятника без трения при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса в вертикальном направлении.

4. СОБСТВЕННОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Часто встречается ситуация, в которой невозмущенное движение описывается меньшим числом частот, чем число степеней свободы (собственное вырождение в смысле Борна, примеры — кеплерова задача и задача о движении заряженной частицы в сильном магнитном поле).

Перенесение теории А. Н. Колмогорова на этот случай [10] позволило, в частности, доказать вечную адиабатическую инвариантность переменной действия в нелинейных системах с одной степенью свободы при медленно периодически меняющейся функции Гамильтона [11], а также вечное удержание заряженных частиц в аксиально-симметричных магнитных ловушках [12].

Комбинация этих результатов с исследованием колебаний вблизи положения равновесия (п. 3) приводит к доказательству вечной малости изменений больших полуосей планетных орбит для большинства начальных условий, при которых начальные кеплеровы эллипсы мало отличаются от непересекающихся окружностей, лежащих в одной плоскости и пробегаемых в одном направлении, при условии, что массы планет достаточно малы по сравнению с массой центрального тела [12].

Исключительные начальные условия, приводящие в конце концов к существенному изменению больших полуосей кеплеровых эллипсов, образуют предположительно множество положительной меры, всюду плотное в фазовом пространстве.

5. ДИФФУЗИЯ

Если инвариантные торы, доставляемые теоремой Колмогорова, не делят фазовое пространство (редуцированное с учетом первых интегралов), то фазовая кривая, начавшаяся в щели между ними, может в принципе за большое время уйти далеко от того инвариантного тора невозмущенной системы, где находилась ее начальная точка. В этом случае значения переменных действия (интегралов невозмущенной системы) уходят далеко от своих начальных значений.

Примеры такого ухода в невырожденной системе были построены в [13]. Средняя скорость ухода в этом примере была экспоненциально малой (порядка $e^{-1/\sqrt{\theta}}$, где θ — величина возмущения). Экспоненциально медленный уход не улавливается никаким приближением теории возмущений, в которой рассматриваются ряды по степеням θ и которая действует на больших временах порядка отрицательных степеней θ — за такие времена значение действия не успевает далеко уйти от своего начального значения. Но поскольку этот уход совершается в непредсказуемом (сильно зависящем от начальных условий) направлении и носит характер блуждания между колмогоровскими торами, физики его назвали диффузией [14].

Нехорошев [15—17] получил для средней скорости эволюции переменных действия экспоненциальную оценку сверху: изменение действия остается малым (порядка θ^a , $0 < a < 1$) в течение экспоненциально большого времени (порядка e^{1/θ^b}).

Теорема Нехорошева объясняет, почему эволюция переменных действия не обнаруживается ни в каком приближении теории возмущений, в частности — в теоремах Лапласа и его последователей.

Числа a и b оценены Нехорошевым через некоторые геометрические характеристики искривленности поверхностей уровня невозмущенной функции Гамильтона, так называемые показатели крутизны. Эти показатели в настоящее время вычислены для систем общего положения с не более чем тремя степенями свободы [18].

6. МЕРА ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Теорема Колмогорова утверждает, что (в ограниченной области фазового пространства) мера дополнения к инвариантным торами, не разрушившимся при возмущении величины θ , мала вместе с θ . Более внимательный анализ позволяет получить для этой меры оценку сверху величиной $C\sqrt{\theta}$ (Лазуткин [19], Сванидзе [20], Пёшель [21]). Для аналитической системы с двумя степенями свободы с собственным вырождением (одна из частот пропорциональна θ) Нейштадт оценил сверху меру дополнения к инвариантным торами экспоненциально малой величиной $e^{-C/\theta}$.

Оценки меры исключительного множества существенны для применений колмогоровских торов к построению квазиклассических асимптотик большинства собственных чисел оператора Лапласа в областях, близких к интегрируемым биллиардам (например, эллипсоидам), см. [22].

Неулучшаемость оценки $C\sqrt{\theta}$ ясна уже из появления $\sqrt{\theta}$ во всех асимптотиках, относящихся к случайному вырождению (по терминологии Борна [5]):

уже Пуанкаре [3] знал, что при рассепании резонансного тора невозмущенной задачи образуется зона его влияния ширины порядка $\sqrt{\epsilon}$ по переменной действия. В этом легко убедиться, усреднив возмущение по тору на единицу меньшей размерности и проинтегрировав полученную систему с одной степенью свободы (описывающую так называемые фазовые колебания при резонансе). Мы увидим, что амплитуда фазовых колебаний имеет порядок $\sqrt{\epsilon}$, а период — порядок $1/\sqrt{\epsilon}$.

Впрочем, некоторые фазовые кривые в указанной зоне снова ложатся на торы полной размерности (так называемые острова в щелях между торами, близкими к невозмущенным). Вопрос о том, положительна ли в случае общего положения мера начальных условий, соответствующих не условно периодическим движениям, остается открытым (предположительно ответ положителен). Само существование таких начальных условий, приводящих к «квазислучайным» движениям, доказано Алексеевым [23].

7. ГЛАДКОСТЬ

Теорема о сохранении торов была доказана Колмогоровым для аналитических систем, и он не предполагал, что ее можно перенести хотя бы на бесконечно дифференцируемые системы. Однако вскоре после опубликования первого подробного изложения метода Колмогорова [24] Мозеру удалось, объединив метод Колмогорова с методом сглаживания Нэша [25], доказать теорему о сохранении торов в системе конечной гладкости [26, 27]. В первых работах Мозера порядок используемых производных функции Гамильтона был очень велик (334 для $s = 2$), но впоследствии [28, 29] он был снижен до $r > 2s$, где s — число степеней свободы!

Зависимость торов от частоты движения по ним в аналитическом случае, как и указывал Колмогоров, оказалась в некотором смысле моногенной по Борелю (дифференцируемой на множестве, выходящем в вещественную область канторовским континуумом) [24]. В гладком случае Пёшель [21] доказал гладкость в смысле Уитни зависимости торов от частоты на канторовском множестве в предположении r -гладкости возмущения функции Гамильтона, если $r > 3s - 1$.

С другой стороны, Такенс [30] построил пример 1-гладкого отображения кольца, сохраняющего площади и близкого к повороту на переменный угол, однако не имеющего инвариантных кривых (4-гладкость была бы достаточной для их существования). Точное число необходимых для существования колмогоровских торов производных неизвестно ни в одном случае.

Мазеру [31, 32] принадлежит интерполяция семейства инвариантных кривых отображения кольца до однопараметрического семейства, в котором реализуются сплошь все числа вращения от максимально возможного до минимально возможного (а не только числа из канторова множества, как в теореме Колмогорова). Некоторые из его «инвариантных кривых» на самом деле гомеоморфны не окружности, а канторову множеству. Однако все они находятся из единого вариационного принципа, введенного Персивалем [33] для приближенного численного отыскания колмогоровских торов.

8. НЕГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Метод, при помощи которого А. Н. Колмогоров строит свои торы, заодно доказывает многочисленные варианты теорем о неявной функции во всех областях анализа, где решение линеаризованного уравнения приводит к потере гладкости (см. [26, 34, 35]). Две теоремы такого рода были доказаны еще в 40-х гг.: это теорема Зигеля об эквивалентности голоморфного векторного поля или отображения своей линейной части в особой точке с нормально несоизмеримыми собственными числами [36—38] и теорема Картана о факторизации голоморфных матриц [39].

Простейший негамильтонов аналог теоремы А. Н. Колмогорова доставляется теорией дифференциальных уравнений на двумерном торе (или теорией диффеоморфных отображений окружности на себя). Наиболее законченные результаты в этой области получил Эрман [40]: для почти всякого числа вращения аналитический диффеоморфизм окружности аналитически сопряжен повороту.

В многомерном случае доказана лишь выпрямляемость большинства близких к трансляциям диффеоморфизмов торов [24].

Метод А. Н. Колмогорова успешно применялся и для отыскания инвариантных торов в негамильтоновых системах (Боголюбов [41], Мозер [42]). Эти результаты особенно важны в теории потери устойчивости автоколебаний, так как бифуркация рождения тора из цикла (а также торов большей размерности из торов меньшей размерности) — одно из типичных явлений на пути к «стохастизации» движения динамической системы (например, в теории гидродинамической устойчивости — на пути от ламинарного течения к турбулентному). Применения методов Колмогорова в теории бифуркаций торов разбираются Шенсине в [43].

9. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

После появления теоремы А. Н. Колмогорова была предпринята большая серия вычислительных экспериментов по ее проверке, главной целью этих экспериментов был анализ максимальной величины возмущений, еще не разрушающих колмогоровские торы, определение меры дополнительного к колмогоровским торам множества и исследование эргодических свойств движения по этому множеству [14, 44].

Все вычисления подтверждают: 1) сохранение большинства торов при малых возмущениях; 2) быстрый рост меры дополнительного множества, начиная с момента перекрытия зон влияния соседних резонансов (до этого момента мера дополнительного множества столь мала, что систему трудно отличить от интегрируемой); 3) стохастический характер движения в дополнительных к торам областях, а именно экспоненциальное расхождение соседних траекторий.

Грин и Персиваль [45] исследовали численно границу аналитичности колмогоровских торов (при комплексных значениях угловых переменных) и обнаружили связь этой границы с эргодическими свойствами системы в комплексной области и с асимптотикой близких периодических движений.

Величина возмущений, при которых сохраняются колмогоровские торы, по данным численных экспериментов оказывается совсем не столь малой, как

гарантируемые строгими доказательствами оценки этой величины сверху. Хорошее согласие с экспериментальными данными дает критерий перекрытия резонансов [14, 44].

10. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Системы с устойчивой транзитивностью и перемешиванием на поверхностях уровня энергии, которые А. Н. Колмогоров обсуждает в конце § 3 доклада в Амстердаме (работа № 53), действительно существуют: Синай и Аносов доказали, что геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной (по каждому двумерному направлению) кривизны обладают этими свойствами (а также другими стохастическими свойствами, вплоть до установленной Орнштейном и Вейсом метрической изоморфности «системе Бернулли», индуцируемой бросанием монеты) [46—48]. Более того, эти свойства сохраняются при малом возмущении не только в классе гамильтоновых систем, но также и в классе общих динамических систем¹. Сохраняется при возмущениях и топологическое строение системы: несмотря на всюду плотное множество долгопериодических траекторий и на всюду плотность почти всякой траектории, малое возмущение задающего систему векторного поля оставляет ее гомеоморфной себе (гипотеза Смейла, доказанная Аносовым [49]).

Открытие систем такого рода сделало эргодическую теорию классических динамических систем остро актуальной не только для гамильтоновой механики, но и для анализа явлений в системах с диссипацией энергии, которые, как оказалось, тоже способны обнаруживать устойчиво стохастическое поведение. Примером таких систем являются, между прочим, гидродинамические системы (в которых, правда, ситуация осложняется бесконечномерностью фазового пространства). А. Н. Колмогоров уже в 1958—1959 гг. посвятил свой семинар «Избранные вопросы анализа» [50] объединению концепций эргодической теории классических динамических систем, с одной стороны, и теории гидродинамической неустойчивости — с другой.

Программа семинара, вывешенная на доске объявлений механико-математического факультета Московского университета, предусматривала анализ с точки зрения эргодической теории «хотя бы сколь угодно идеализированных моделей гидродинамической неустойчивости». Здесь имелась в виду прежде всего модель Ландау возникновения турбулентности путем последовательных бифуркаций от ламинарного течения к периодическому и условно периодическим движениям по торо, размерности которых растут с числом Рейнольдса.

Предпочтение именно торов с условно периодическими движениями другим динамическим системам А. Н. Колмогоров связывал с тем, что системы с перемешиванием (вроде геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны) не были известны Ландау (см. § 3 доклада в Амстердаме). При обсуждении модели Ландау А. Н. Колмогоров подчеркивал, что устанавливающийся

¹ С инвариантной гладкой мерой. У системы с экспоненциальной неустойчивостью может не быть гладкой инвариантной меры, а эргодических негладких мер, вообще говоря, много. В случае дискретного времени среди всех этих мер выделяется одна «гиббсовская мера максимальной энтропии». Обзор вопроса об инвариантных мерах см. в [61].

после потери устойчивости режим движения может возникать «в стороне» от бифурцирующего «ламинарного» движения и еще до того, как оно потеряет устойчивость (так что переход к сложному, «турбулентному» движению может происходить скачком, путем «жесткой», а не «мягкой» потери устойчивости). Это открывает возможность для появления движений, не связанных с торами; уже в те годы А. Н. Колмогоров предсказывал также возможность притягивающих множеств (как теперь говорят, аттракторов), не являющихся многообразиями, а представляющих патологии на теоретико-множественном уровне (численные эксперименты Лоренца [51] появились лишь через несколько лет и, к сожалению, не сразу сделали известными математикам).

Впрочем, наряду с конечномерными аттракторами А. Н. Колмогоров выдвигал и модель с аттрактором в виде бесконечномерного тора, появляющегося после бесконечного числа бифуркаций в духе модели Ландау — спектр с бесконечным базисом частот в эксперименте воспринимается как сплошной, а движение — как перемешивающее, турбулентное.

Смелая гипотеза Смейла (1961) о структурной устойчивости диссипативных систем с экспоненциальным разбеганием траекторий явилась в этой области полной неожиданностью, а ее доказательство [49] в 1962 г. — сильным доводом в пользу выбора модели с конечномерным притягивающим множеством. С тех пор этим вопросам было посвящено очень много работ (Юдович, Ладыженская, Малле-Паре, Фояш и др.). Сегодня конечномерность аттрактора при любом числе Рейнольдса доказана в двумерной гидродинамике (сперва Ильяшенко оценил размерность аттрактора сверху четвертой степенью числа Рейнольдса для модели А. Н. Колмогорова (см. [60]) гидродинамики на двумерном торе, а затем Вишик и Бабин — червертой степенью числа Рейнольдса для гидродинамики на двумерном компактном многообразии с краем). Для трехмерного же случая вопрос о том, остается ли аттрактор конечномерным при любом числе Рейнольдса, остается открытым.

11. ОБМЕН, ЗАХВАТ И ОСЦИЛЛЯЦИЯ

Вопрос о финальных движениях в задаче трех тел, обсуждаемый в конце § 4 доклада в Амстердаме, был подробно исследован позже учениками А. Н. Колмогорова Ситниковым и Алексеевым.

Ситников [52] первым построил осциллирующие движения, т. е. подобрал начальные условия так, что одно из тел временами уходит сколь угодно далеко от двух других, остающихся на конечном расстоянии друг от друга, а временами возвращается к ним. В его примере осцилляция происходит как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$.

Алексеев [23, 53] с помощью построенной им теории квазислучайных динамических систем нашел движения всех типов, существование которых оставалось еще сомнительным после работ Шмидта и Ситникова (и отрицалось Шази): пришедшее издалека тело может быть захвачено двойной системой так, что образуется тройная система (хотя вероятность этого и нуль), а может начать осциллировать, временно уходя сколь угодно далеко от двух других. Осцилляции при $t \rightarrow +\infty$ могут возбудиться и в такой системе, которая при $t \rightarrow -\infty$

остается ограниченной. Нерешенными остались лишь вопросы о мере множества начальных условий, приводящих к осцилляциям (предположительно она положительна).

12. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Гипотеза А. Н. Колмогорова (§ 5 доклада в Амстердаме) об устойчивости непрерывного (а именно счетнократного лебеговского) спектра доказана Синаем и Аносовым [46, 47]. Гипотеза о преимущественной типичности дискретного спектра с конечным числом независимых частот (не превосходящим размерности фазового пространства) и счетнократного лебеговского спектра не опровергнута для аналитических систем. Однако в бесконечно дифференцируемом случае Аносов и Каток [54] построили диффеоморфизмы с гладкой инвариантной мерой (например, на круге), имеющие: а) дискретный спектр с любым наперед заданным (конечным или бесконечным) числом базисных частот; б) простой непрерывный сингулярный спектр при отсутствии перемешивания; в) комбинацию того и другого. Эти примеры, впрочем, носят характер исключений: построенные диффеоморфизмы принадлежат нигде не плотному множеству в функциональном пространстве всех диффеоморфизмов, снабженном топологией C^∞ или C^n .

Утверждение из заметки № 51 о возможности непрерывного спектра у аналитического потока на торе доказано в [55]. При непрерывной скорости спектр может быть и смешанным [56]. Перемешивания в строгом смысле, а значит и лебеговского спектра, у потока на торе не бывает [57].

Гипотеза из заметки № 51 о том, что из расходимости суммы квадратов коэффициентов Фурье формального решения уравнения с малыми знаменателями следует отсутствие измеримого решения и непрерывность спектра, оказалась неверной: Аносовым [58] построены аналитические системы, для которых измеримое решение есть, но нет ни суммируемого с квадратом, ни просто суммируемого решения (измеримое решение положительно, так что обобщения интеграла не помогают).

С другой стороны, найдены условия типа лакуарности ряда Фурье, достаточные для несуществования измеримых решений. Из них следует, например, что при любой правой части уравнения с малыми знаменателями, не являющейся тригонометрическим полиномом, существует такое иррациональное число вращения, что уравнение не имеет измеримых решений [59].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Newton I. Philosophicae naturalis principia mathematica. London, 1686.* Рус. пер.: *Ньютон И. Математические начала натуральной философии.* — В кн.: *Собрание трудов академика А. Н. Крылова.* М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936, т. 7, предложение LXV, с. 225.
2. *Laplace P. S. de. Traité de mécanique céleste. Paris, 1799. Т. 1.*
3. *Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris, 1892. Т. 1.* Рус. пер.: *Пуанкаре А. Избранные труды. Новые методы небесной механики.* М.: Наука, 1971, т. 1, с. 34.
4. *Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.* — УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.

5. *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков, 1934.
6. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 255—257.
7. *Moser J.* New results on the stability of periodic motions.— Proc. Intern. Cong. Math., 1962. Uppsala, 1963.
8. *Леонтович А. М.* Об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 3, с. 525—528.
9. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел.— ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 112—116.
10. *Арнольд В. И.* О рождении условно-периодического движения из семейства периодических движений.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 13—15.
11. *Арнольд В. И.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1962, т. 142, № 4, с. 758—761.
12. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике.— УМН, 1963, т. 18, вып. 6, с. 92—192.
13. *Арнольд В. И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 1, с. 9—12.
14. *Заславский Г. М., Чуриков Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— УФН, 1971, т. 105, вып. 1, с. 3—40.
15. *Нехорошев Н. Н.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.— Функционал. анализ и его приложения, 1971, т. 5, № 4, с. 82—83.
16. *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. I.— УМН, 1977, 32, вып. 6, с. 5—66.
17. *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1979, т. 5, с. 5—50.
18. *Ландис Е. Е.* Тангенциальные особенности.— Функционал. анализ и его приложения, 1981, т. 15, № 2, с. 36—49.
19. *Лазуткин В. Ф.* Существование каустик для бильярдной задачи в выпуклой области.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, № 1, с. 188—223.
20. *Сванидзе Н. В.* Малые возмущения интегрируемой динамической системы с интегральным инвариантом.— Тр. МИАН СССР, 1980, т. 147, с. 124—146.
21. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. Zürich, 1981.
22. *Лазуткин В. Ф.* Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: Изд. ЛГУ, 1981.
23. *Алексеев В. М.* Квазислучайные динамические системы. I—III.— Мат. сб., 1968, т. 76, № 1, с. 72—134; т. 77, № 4, с. 545—601; 1969, т. 78, № 1, с. 227—228.
24. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 1, с. 21—86.
25. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds.— Ann. Math., 1956, vol. 63, p. 20—63. Рус. пер.: *Нэш Дж.* Проблема вложения для римановых многообразий.— УМН, 1971, т. 26, вып. 4, с. 173—216.
26. *Moser J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1961, vol. 47, p. 1824—1831. Рус. пер.: *Мозер Ю.* Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.— Математика, 1962, т. 6, № 4, с. 3—10.
27. *Moser J.* On invariant curves of area preserving mappings of an annulus.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 1962, S. 1—20. Рус. пер.: *Мозер Ю.* О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.— Математика, 1962, т. 6, № 5, с. 51—67.
28. *Rüssmann H.* Kleine Nenner I. Über invariante Kurven differenzierbaren Abbildungen eines Kresrings.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 1970, N 5, S. 67—103.

29. *Pöschel J.* Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen. Bonn, 1980.
30. *Takens F.* A C^1 counterexample to Moser's twist theorem.— *Indag. Math.*, 1971, vol. 33, N 4, p. 379—386. Рус. пер.: *Такенс Ф.* Контрпример класса C^1 к теореме Мозера о кольце.— В кн.: Гладкие динамические системы. М.: Мир, 1977, с. 242—253. (Математика; Т. 4).
31. *Mather J.* Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus: Prepr. Princeton Univ., 1981.
32. *Mather J.* Area preserving twist homeomorphism of the annulus.— *Comment. math. helv.*, 1979, vol. 54, p. 397—404.
33. *Percival I. C.* Variational principles for invariant Tori and Cantori.— In: Symposium on Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interactions: Amer. Inst. Phys. Conf. Proc., 1980, N 37, p. 302—310.
34. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений.— *УМН*, 1968, т. 23, вып. 1, с. 3—44.
35. *Zehnder E.* Generalized implicit function theorems with applications to some small divisors problem. I.— *Communs Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, N 1, p. 91—140.
36. *Siegel C. L.* Iteration of analytic functions.— *Ann. Math.*, 1942, vol. 43, p. 607—612.
37. *Siegel C. L.* Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.— *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1952, S. 21—30. Рус. пер.: *Зигель К. Л.* О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия.— *Математика*, 1961, т. 5, № 2, с. 119—128.
38. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, с. 194—199.
39. *Cartan H.* Sur les matrices holomorphes de n variables complex.— *J. math. pures et appl.*, 1940, vol. 19, p. 1—26.
40. *Herman M. R.* Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.— *Publ. Math. IHES*, 1979, vol. 49, p. 5—234.
41. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики.— В кн.: Труды 1-й летней математической школы. Киев: Наук. думка, 1964, т. 1, с. 11—101.
42. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations. I, II.— *Ann. scuola norm. sup. Pisa*, 1966, vol. 20, p. 265—315, 499—535. Рус. пер.: *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— *УМН*, 1968, т. 23, вып. 4, с. 179—238.
43. *Chenciner A.* Courbes invariantes non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de R^2 .— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1981, vol. 292, N 10, p. 507—510.
44. *Casati G., Chirikov B. V., Ford J., Izrailev F. M.* Stochastic behaviour in classical and quantum Hamiltonian systems.— *Lect. Notes Phys.*, 1979, vol. 93.
45. *Greene J. M., Percival I. C.* Hamiltonian maps in the complex plane.— *Physica*, 1981, vol. 3D, № 3, p. 530—548.
46. *Синай Я. Г.* Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II.— *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1966, т. 30, № 1, с. 15—68.
47. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— *Тр. МИАН СССР*, 1967, т. 90.
48. *Ornstein D.* Ergodic theory, randomness and dynamical systems. New Haven: Univ. Press, 1974. Рус. пер.: *Орнштейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978. (Математика; Т. 8).
49. *Аносов Д. В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны.— *ДАН СССР*, 1962, т. 145, № 4, с. 707—709.
50. *Арнольд В. И., Мецаалкин Л. Д.* Семинар А. Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958—1959).— *УМН*, 1960, т. 15, вып. 4, с. 247—250.

51. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow.— J. Atmos. Sci., 1963, vol. 20, p. 130—141.
52. Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 2, с. 303—306.
53. Alekseev V. M. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème de trois corps.— Act. Congrès Intern. Math. Nice, 1970. Paris, 1971. Рус. пер.: Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика.— УМН, 1981, т. 36, вып. 4, с. 161—176.
54. Аносов Д. В., Каток А. Б. Новые примеры в гладкой эргодической теории. Эргодические диффеоморфизмы.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1970, т. 23, с. 3—36.
55. Шкловер М. Д. О классических динамических системах на торе с непрерывным спектром.— Изв. вузов. Математика, 1967, № 10, с. 113—124.
56. Крыгин А. Б. Пример непрерывного потока на торе со смешанным спектром.— Мат. заметки, 1974, т. 15, № 2, с. 235—240.
57. Кочергин А. В. Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и у потоков на двумерном торе.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 3, с. 515—518.
58. Аносов Д. В. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, с. 1259—1274.
59. Гордон А. Я. Достаточное условие неразрешимости аддитивного гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности.— Функцион. анализ и его приложения, 1975, т. 9, № 4, с. 71—72.
60. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости.— ПММ, 1961, № 6, с. 1140—1143.
61. Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории.— УМН, 1971, т. 27, вып. 4, с. 22—64.

К РАБОТАМ О СУПЕРПОЗИЦИЯХ

А. Н. Колмогоров

Две основные работы этого цикла (№ 55 и 56) возникли в результате ведения мной студенческого семинара 1955 г. Из числа участников семинара студентов я вспоминаю второкурсников В. И. Арнольда, А. А. Кириллова и третьекурсника С. А. Смоляка. Семинар был посвящен теории приближенного представления функций нескольких переменных, в том числе задачам приближенного номографирования. Тринадцатая проблема Гильберта была сформулирована мной уже во вводной лекции в качестве далекой перспективы, которая почти наверное не будет достигнута. Небезынтересно заметить, что в связи с номографической проблематикой некоторая доля внимания была с самого начала привлечена к номографируемым функциям двух переменных, т. е. функциям вида $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$. Функции этого вида оказались существенным элементом в окончательном выражении функций многих переменных через функции одного переменного и операцию сложения. Однако первым появилось решение проблемы Гильберта, основанное на совершенно других идеях и использующее технику, разработанную А. С. Кронродом. На этом последнем пути я пришел к теореме, составляющей содержа-

ние работы, в которой было доказано, что любая непрерывная функция $n \geq 4$ переменных представима в виде суперпозиции функций трех переменных.

Усовершенствовав методы этой работы, В. И. Арнольд дал окончательное решение проблемы Гильберта в виде теоремы, согласно которой любая непрерывная функция $n \geq 3$ переменных представима в виде суперпозиции функций двух переменных.

Лишь несколькими месяцами позже мне удалось при помощи совершенно других конструктивных приемов доказать теорему заметки № 56, являющуюся усилением теоремы Арнольда, в силу которой любая непрерывная функция любого числа переменных представима в виде суперпозиции функций одного переменного и сложения.

СУПЕРПОЗИЦИИ

(В. И. Арнольд)

Доказательство представимости каждой непрерывной функции n переменных в виде суперпозиции

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \varphi^{pq}(x_p) \right] \quad (1)$$

непрерывных функций одного переменного и операции сложения А. Н. Колмогоров называл наиболее трудным в техническом отношении своим достижением. В этом комментарии перечислены основные усовершенствования представления (1) и лишь очень коротко упомянуты другие аспекты задачи о представлении функций суперпозициями (ср. [1—3]).

В разложении Колмогорова (1) внутренние функции φ^{pq} фиксированы и лишь внешние χ_q зависят от разлагаемой функции f .

1. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВИМОСТИ

Работе А. Н. Колмогорова № 56 предшествовала работа № 55, в которой было доказано, что любая непрерывная функция четырех переменных представима суперпозицией непрерывных функций трех переменных. Вопрос о представимости непрерывных функций трех переменных суперпозициями функций двух переменных метод работы № 55 сводит к некоторой задаче о представлении функций, заданных на универсальных деревьях трехмерного пространства. Этот последний вопрос был решен в работе Арнольда [34] и тем самым было впервые получено представление непрерывной функции трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных. Разложение (1), сводящее все непрерывные функции конечного числа переменных к суперпозициям непрерывных функций одной переменной и сложения, было получено вскоре после этого А. Н. Колмогоровым. При этом он отметил, что «конструкции, употребляемые в этой заметке (№ 56), были найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в № 55 и [34], и отбрасывания в них деталей, излишних для получения конечного результата».

Подробные доказательства теоремы Колмогорова и содержащихся в его заметке 1957 г. лемм были опубликованы Тихомировым [4], Лоренцем [2], Шпрехером [5], Хедбергом [43] и другими. Лоренц [2] заметил, что внешние функции χ_q можно заменить одной-единственной функцией χ . Шпрехер [5] свел все внутренние функции к сдвигам и растяжениям одной-единственной: существуют $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$, такие, что любая непрерывная функция n переменных представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi \left[\sum_{p=1}^n \lambda^p \psi(x_p + \varepsilon q)' + q \right]. \quad (2)$$

Фридман [6] доказал, что внутренние функции φ^{pq} в разложении Колмогорова (1) можно выбрать удовлетворяющими условию Липшица; Шпрехер [7] перенес этот результат на разложение (2) (функцию ψ можно выбрать удовлетворяющей условию Липшица).

Из теоремы Бари [8] о представлении любой непрерывной функции одного переменного суммой трех суперпозиций абсолютно непрерывных функций $\Sigma f_k \circ g_k$ и теоремы А. Н. Колмогорова (1) следует представимость всех непрерывных функций любого числа переменных суперпозициями абсолютно непрерывных функций одного переменного и операции сложения.

Досс [11] получил из усовершенствованного им разложения Колмогорова и работ Кахана [42, 44] набор непрерывных функций одного переменного f_k , g_k , через которые любая непрерывная на квадрате функция выражается в виде ряда

$$\sum a_k e^{if_k(x)g_k(y)}$$

с $\sum |a_k| < \infty$. Он показал, что если заменить в (1) внутреннюю сумму произведением, то φ можно брать «почти любые» (в смысле категорий Бэра), а χ — не зависящей от q функцией с абсолютно сходящимся преобразованием Фурье.

Остранд [39] распространил разложение (1) на функции на n -мерном компакте, а Досс [12] — на неограниченные (в R^n).

2. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕДСТАВИМОСТИ

Бассалыго доказал, что, каковы бы ни были три непрерывные на квадрате функции ψ_k , найдется непрерывная функция f , не представимая в виде $\Sigma \chi_k \circ \psi_k$ ни при каких непрерывных χ_k [9].

Аналогичное разложение в сумму пяти слагаемых (1) возможно по теореме Колмогорова. Досс [10] показал, что четырех слагаемых вместо пяти уже недостаточно для разложения всякой непрерывной функции двух переменных в сумму вида (1), если (фиксированные) внутренние функции φ^{pq} монотонны.

Витушкин и Хенкин доказали, что:

1) каковы бы ни были непрерывные на квадрате функции φ_k и непрерывно дифференцируемые функции ψ_k , найдется аналитическая на квадрате функция, не представимая в виде суммы произведений $\Sigma \varphi_k \cdot (g_k \circ \psi_k)$ ни при каком выборе непрерывных внешних функций одного переменного g_k ; более того,

2) множество таких сумм (со всевозможными непрерывными g_k) замкнуто и нигде не плотно (в равномерной метрике);

3) существует многочлен $(x_1 + vx_2)^\mu$, ему не принадлежащий.

Эти результаты переносятся на функции, заданные на кубе любой размерности (см. [13—15]).

Фридман доказал нигде не плотность в L^2 множеств функций двух переменных, представимых в виде $\sum g_k \circ \psi_k$ с фиксированными внутренними непрерывно дифференцируемыми функциями ψ_k , а также множества функций трех переменных, представимых в виде $\sum g_k \circ \psi_k$, где $\psi_k : R^3 \rightarrow R^2$ дважды непрерывно дифференцируемы, $g_k : R^2 \rightarrow R$ непрерывны [35, 36].

3. ТРИНАДЦАТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Точная формулировка проблемы Гильберта, на которую А. Н. Колмогоров ссылается в своих заметках, такова (см. [1]): «показать, что уравнение седьмой степени

$$f' + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0 \quad (3)$$

неразрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов».

Исследованию вопроса о представимости функций суперпозициями функций меньшего числа переменных, удовлетворяющими тем или иным дополнительным условиям (алгебраичность, аналитичность, гладкость), посвящено много работ. Гильберт, конечно, знал, что суперпозиции *разрывных* функций двух переменных представляют *все* функции большего числа переменных.

Существование *аналитических* функций трех переменных, не представимых никакими конечными суперпозициями *аналитических* функций двух переменных, также было известно Гильберту (на это он указывает в [1]).

Островский [16] доказал, что функция

$$h(x, y) = \sum x^k / k^y$$

непредставима в виде конечной суперпозиции бесконечно дифференцируемых функций одного переменного и алгебраических функций любого числа переменных.

Витушкин [17] доказал, что существуют p раз непрерывно дифференцируемые функции n переменных, не представимые конечными суперпозициями $q \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $k < n$ переменных, если $q/k > p/n$.

А. Н. Колмогоров высказал гипотезу [3], что существуют аналитические функции трех переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций двух переменных, и аналитические функции двух переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций одного переменного и сложения.

Вопрос о представимости корня уравнения 7-й степени (3) суперпозицией аналитических или алгебраических функций остается открытым.

4. ПРОБЛЕМА РЕЗОЛЬВЕНТ

При формулировке своей проблемы Гильберт исходил из результата Чирнгаузена [18], согласно которому корень алгебраического уравнения степени $n > 5$, т. е. функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная уравнением

$$f^n + x_1 f^{n-1} + \dots + x_n = 0, \quad (4)$$

выражается суперпозицией алгебраических функций $n - 4$ переменных. Гильберт предполагал, что число $n - 4$ нельзя уменьшить при $n = 6, 7, 8$; он же доказал, что при решении уравнения степени $n = 9$ можно обойтись функциями $n - 5$ переменных [19]. Виман [20] распространил последний результат на $n > 9$, а Чеботарев [21] понизил число переменных, входящих в представление функций, до $n - 6$ при $n \geq 21$ и до $n - 7$ при $n \geq 121$.

Чеботареву принадлежат первые попытки найти топологические препятствия к представимости алгебраической функции суперпозициями алгебраических функций, однако его доказательства не были убедительными (см. [22—24]). В настоящее время топологическими соображениями (связанными с поведением многозначной алгебраической функции на многообразии ветвления и вблизи него) удается доказывать невозможность представления алгебраических функций полными суперпозициями целых алгебраических функций (*полнота* означает, что разлагаемая функция должна включать *все ветви* суперпозиции многозначных функций, а не одну из них, как, например, в формулах для решений уравнений 3-й и 4-й степени).

На этом пути построены некоторые топологические препятствия к представлению в виде полной суперпозиции алгебраических функций (классы когомологий в дополнении к многообразию ветвления, инвариантные относительно преобразований Чирнгаузена, см. [25] — [29]). Наиболее законченный результат принадлежит Лину [29]: для любого $n \geq 3$ корень $f(x_1, \dots, x_n)$ уравнения (4) ни в какой окрестности начала координат не является полной суперпозицией целых алгеброидных функций меньшего чем $n - 1$ числа переменных и однозначных голоморфных функций любого числа переменных.

Таким образом, с точки зрения *полных* суперпозиций *целых* алгебраических функций уже уравнение четвертой степени не решается без привлечения функций трех переменных.

Доказательство теоремы Лина можно рассматривать как модернизацию и своего рода реабилитацию соображений Чеботарева [23] и предпринятой Морозовым [24] попытки их исправить.

Допущение нецелых функций расширяет возможности представления примерно на один аргумент. Например, корень уравнения $f^2 + xf + y = 0$ представляется суперпозицией алгебраических функций одного переменного и арифметических операций, если включить в их число деление, и не представим ни в какой окрестности нуля суперпозицией аналитических функций любого числа переменных и алгеброидных функций одного переменного (Хованский [45]).

Было бы интересно проверить, не дают ли теоремы Делиня о поведении смешанных структур Ходжа при алгебраических отображениях новых препятствий к представлению функции суперпозициями алгебраических.

5. ПРИБЛИЖЕНИЯ

Возвращаясь к работам А. Н. Колмогорова о суперпозициях, отметим еще поставленные им вопросы о замкнутости классов функций, представимых суперпозициями, в равномерной метрике. Цитируемая в докладе на III Всесоюзном математическом съезде теорема о непреставимости в виде $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$ функции xu на квадрате $0 \leq x, y \leq 1$, аппроксимируемой представимыми в этом виде функциями $(x + \varepsilon)(y + \varepsilon)$, доказана в [30].

Крейнес и Вайнштейн [31] доказали, что равномерный предел последовательности представимых в таком виде функций представим в таком же виде, если он монотонен по каждому переменному. Незамкнутость и нигде не плотность класса всех функций, номографируемых в однозначных функциях, доказана Мухиным [32], замкнутость некоторых линейных суперпозиций в I^2 обсуждается Фридманом [36, 37]. Наилучшее приближение непрерывной функции на прямоугольнике суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ всегда достигается (ср. [32]).

Вопрос о представимости в таком виде функций на плоских кривых был поставлен А. Н. Колмогоровым для деревьев и решен в [34]; этот же вопрос для замкнутых кривых немедленно приводит к «малым знаменателям» (см. [35]).

Вопрос о представлении функций на кривой $x_k = u_k(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \varphi_k(u_k(t))$$

(с фиксированными коэффициентами A_k) важен в теории особенностей дифференцируемых отображений. Типичный пример — разложение функций на полукубической параболе

$$f(t) = \varphi(t^2) + \psi(t^2 + t^3).$$

Если гладкая функция f допускает такое представление на уровне формальных рядов, то существует и гладкое (класса C^∞) представление (Ж. П. Дюфур). Но если при этом f голоморфна, то голоморфное представление, как правило, не существует (Воронин [47]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969, с. 163—170.
2. Lorenz G. G. Metric entropy, width, and superpositions of functions.— Amer. Math. Mon., 1962, vol. 69, p. 469—485.
3. Sprecher D. A. A survey of solved and unsolved problems on superpositions of functions.— J. Approxim. Theory, 1972, vol. 6, N 2, p. 123—134.
4. Тихомиров В. М. Работы А. Н. Колмогорова по ε -энтропии классов функций и суперпозициям функций.— УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 55—92.
5. Sprecher D. A. On the structure of continuous functions of several variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, vol. 115, с. 340—355.
6. Фридман Б. Л. Повышение гладкости функций в теореме А. Н. Колмогорова о суперпозициях.— ДАН СССР, 1967, т. 177, с. 1019—1022.
7. Sprecher D. A. An improvement in the superposition theorem of Kolmogorov.— J. Math. Anal. and Appl., 1972, vol. 38, p. 208—213.
8. Bari N. C. Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues.— Math. Ann., 1930, Bd. 103, S. 185—248, 598—653.
9. Бассалыго Л. О. О представлении непрерывных функций двух переменных при помощи непрерывных функций одного переменного.— Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех., 1966, т. 21, с. 58—63.

10. *Doss R.* On the representation of continuous functions of two variables by means of addition and continuous functions of one variable.— *Colloq. math.*, 1963, vol. 10, p. 219—259.
11. *Doss R.* Representations of continuous functions of several variables.— *Amer. J. Math.*, 1976, vol. 98, N 2, p. 375—383.
12. *Doss R.* A superposition theorem for unbounded continuous functions.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 233, p. 197—203.
13. *Витушкин А. Г.* Доказательство существования аналитических функций многих переменных, не представимых линейными суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных.— *ДАН СССР*, 1964, т. 156, № 6, с. 1258—1261.
14. *Хенкин Г. М.* О линейных суперпозициях непрерывно дифференцируемых функций.— *ДАН СССР*, 1964, т. 157, № 2, с. 288—290.
15. *Витушкин А. Г., Хенкин Г. М.* Линейные суперпозиции функций.— *УМН*, 1967, т. 22, вып. 1, с. 77—124.
16. *Ostrowski A.* Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen.— *Math. Ztschr.*, 1920, Bd. 8, N 3—4, S. 241—298.
17. *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. М.: Гостехтеориздат, 1955.
18. *Tschirngausen W.* Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione.— *Acta Eruditorum*, 1683.
19. *Hilbert D.* Über die Gleichung neunten Grades.— *Math. Ann.*, 1927, Bd. 97, S. 243—250.
20. *Wiman A.* Über die Anwendung der Tschirngausen Transformation auf die Reduktion algebraischer Gleichungen.— *Nova Acta R. Soc. Sci. Uppsaliensis*, 1927, vol. extra ordin. editum, p. 3—8.
21. *Чеботарев Н. Г.* К проблеме резольвент.— *Уч. зап. Казан. ун-та*, 1954, т. 114, № 2, с. 189—193.
22. *Чеботарев Н. Г.* Проблема резольвент и критические многообразия.— *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1943, т. 7, с. 123—146.
23. *Чеботарев Н. Г.* Проблема резольвент.— *Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР*, 1949, т. 1, с. 327—340.
24. *Морозов В. В.* О некоторых вопросах проблемы резольвент.— *Уч. зап. Казан. ун-та*, 1954, т. 114, № 2, с. 173—187.
25. *Арнольд В. И.* О классах когомологий алгебраической функции, инвариантных относительно преобразований Чирнгаузена.— *Функцион. анализ и его приложения*, 1970, т. 4, № 1, с. 84—85.
26. *Арнольд В. И.* Топологические инварианты алгебраических функций. II.— *Функцион. анализ и его приложения*, 1970, т. 4, № 2, с. 1—9.
27. *Лин В. Я.* О суперпозициях алгебраических функций.— *Функцион. анализ и его приложения*, 1972, т. 6, № 3, с. 77—78.
28. *Лин В. Я.* Алгебраические функции с универсальным дискриминантным многообразием.— *Функцион. анализ и его приложения*, 1972, т. 6, № 1, с. 81—82.
29. *Лин В. Я.* Суперпозиции алгебраических функций.— *Функцион. анализ и его приложения*, 1976, т. 10, № 1, с. 37—45.
30. *Арнольд В. И.* О представлении непрерывных функций двух переменных в виде $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$.— *УМН*, 1957, т. 12, вып. 2, с. 119—121.
31. *Вайнштейн И. А., Крейнс М. А.* Последовательности функций вида $f(X(x) + Y(y))$.— *УМН*, 1960, т. 15, вып. 4, с. 123—128.
32. *Мухин О. Н.* Некоторые свойства класса поверхностей, номографируемых в однозначных функциях.— *Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех.*, 1962, т. 17, № 1, с. 24—29.
33. *Офман Ю. П.* О наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$.— *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1961, т. 25, № 2, с. 239—252.
34. *Арнольд В. И.* О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных.— *Мат. сб.*, 1959, т. 48, с. 3—74; 1962, т. 98, с. 392.

35. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 1, с. 21—86.
36. Фридман Б. Л. Нигде не плотность пространства линейных суперпозиций функций нескольких переменных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, № 4, с. 814—846.
37. Фридман Б. Л. Оценка размерности пространства нулей линейных суперпозиций.— Мат. сб., 1970, т. 82, № 1, с. 111—126.
38. Lorenz G. G. Approximations of functions. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966.
39. Ostrand P. A. Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13.— Bull. Amer. Math. Soc., 1965, vol. 71, p. 619—622.
40. Sternfeld J. Dimension theory and superposition of continuous functions.— Israel J. Math., 1975, vol. 20, p. 300—310.
41. Kaufman R. Linear superposition of smooth functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 46, p. 360—362.
42. Kahane J. P. Sur les rearrangement du fonctions de la classe A.— Stud. math., 1968, vol. 31, p. 287—293.
43. Hedberg T. Appendix II B.— In: Shapiro H. S. Topics in approximation theory.— Lect. Notes Math., 1971, vol. 187.
44. Kahane J. P. Sur le théorème de superposition de Kolmogorov.— J. Approxim. Theory, 1975, vol. 13, p. 229—234.
45. Хованский А. Г. О представимости алгеброидных функций суперпозициями аналитических функций и алгеброидных функций одной переменной.— Функцион. анализ и его приложения, 1970, т. 4, N 2, с. 74—79.
46. Marshall D. E., O'Farrell A. G. Approximation by a sum of two algebras: The lightning bolt principle: Prepr. 1—23. Maynooth College. CoKildare (Ireland), 1982.
47. Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения.— Функцион. анализ и его приложения, 1982, т. 16, № 2, с. 7—15.

СПИСОК ТРУДОВ А. Н. КОЛМОГорова ¹

1923

- * Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout.— *Fund. math.*, 1923, vol. 4, p. 324—328.
- * Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier—Lebesgue.— *Bull. Acad. pol. sci.* A, 1923, p. 83—86.

1924

- * Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier.— *Fund. math.*, 1924, vol. 5, p. 96—97.
- * Sur la convergence des séries de Fourier.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1924, vol. 178, p. 303—306. Совм. с Г. А. Селиверстовым.

1925

- * La définition axiomatique de l'intégrale.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1925, vol. 180, p. 110—111.
- * Sur les bornes de la généralisation de l'intégrale. 1925.— *Настр. изд.*, № 6. Печатается впервые.
- * Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée, de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1925, vol. 180, p. 362—364.
- * Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier.— *Fund. math.*, 1925, vol. 7, p. 24—29.
- * О принципе tertium non datur.— *Мат. сб.*, 1925, т. 32, № 4, с. 646—667.
- ** Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden.— *Мат. сб.*, 1925, т. 32, № 4, с. 668—677. Совм. с А. Я. Хинчиным.

1926

- * Sur la convergence des séries de Fourier.— *Atti Accad. naz. Lincei. Rend.*, 1926, vol. 3, p. 307—310. Совм. с Г. А. Селиверстовым.
- * Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1926, vol. 183, p. 1327—1329.

1927

- ** Sur la loi des grands nombres.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1927, vol. 185, p. 917—919.
- * Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales.— *Math. Ztschr.*, 1927, Bd. 26, H. 2/3, S. 432—441.— Совм. с Д. Е. Меньшовым.

1928

- * Об операциях над множествами ².— *Мат. сб.*, 1928, т. 35, № 3/4, с. 414—422.
- ** Sur une formule limite de М. А. Khintchine.— *C.r. Acad. sci. Paris*, 1928, vol. 186, p. 824—825.
- * Sur un procédé d'intégration de М. Denjoy.— *Fund. math.*, 1928, vol. 11, p. 27—28.
- ** Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.— *Math. Ann.*, 1928, Bd. 99, S. 309—319.

¹ Звездочкой отмечены труды, вошедшие в 1-ю книгу настоящего издания «Избранных трудов», двумя звездочками — во 2-ю книгу.— *Примеч. ред.*

² Вторая часть работы будет опубликована во 2-й книге.— *Примеч. ред.*

1929

- ** Bemerkungen zu meiner Arbeit «Ueber die Summen zufälliger Grössen».— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 484—488.
- ** Общая теория меры и исчисление вероятностей.— В кн.: Труды Коммунистической академии. Разд. мат., 1929, т. 1, с. 8—21.
- Современные споры о природе математики.— Науч. слово, 1929, № 6, с. 41—54.
- ** Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus.— Math. Ann., 1929, Bd. 101, S. 126—135.
- ** Sur la loi des grands nombres.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1929, vol. 9, N 6, p. 470—474.

1930

- ** Sur la loi forte des grands nombres.— C.r. Acad. sci. Paris, 1930, vol. 191, p. 910—912.
- * Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Fachgr. 1 (Mathematik), 1930, Bd. 8, S. 208—210.
- * Untersuchungen über den Integralbegriff.— Math. Ann., 1930, Bd. 103, S. 654—696.
- * Sur la notion de la moyenne.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1930, vol. 12, N 9, p. 388—391.

1931

- ** Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.— Math. Ann., 1931, Bd. 104, S. 445—458.
- ** Sur la problème d'attente.— Mat. сб., 1931, т. 38, № 1/2, с. 101—106.
- ** Метод медианы в теории ошибок.— Mat. сб., 1931, т. 38, № 3/4, с. 47—50.
- ** Eine Verallgemeinerung des Laplace—Liapounoffschen Satzes.— Изв. АН СССР. ОМЕИ, 1931, с. 959—962.
- * Ueber Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1931, Bd. 9, S. 60—63.

1932

- Теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 15 лет. М.; Л.: ГТТИ, 1932, с. 37—48.
- ** Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. (Un problema di Bruno de Finetti).— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1932, vol. 15, p. 805—808.
- ** Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo.— Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1932, vol. 15, p. 866—869.
- * Zur Deutung der intuitionistischen Logik.— Math. Ztschr., 1932, Bd. 35, S. 58—65.
- * Zur Begründung der projektiven Geometrie.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 175—176.
- Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л.: ГТТИ, 1932. 270 с. Совм. с П. С. Александровым.

1933

- Введение в теорию функций действительного переменного. 2-е изд. М.; Л.: ГТТИ, 1933. 270 с. Совм. с П. С. Александровым.
- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Spring.-Verl., 1933. 62 S.
- * Beiträge zur Maßtheorie.— Math. Ann., 1933, Bd. 107, S. 351—366.
- ** Zur Berechnung der mittleren Brounschen Fläche.— Phys. Ztschr. Sow., 1933, Bd. 4, N 1, S. 1—13. Совм. с М. Леонтовичем.
- ** Sulla determinazione empirica di una legge di distre buzione.— G. Ist. ital. attuar., 1933, vol. 4, p. 83—91.
- ** Ueber die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.— Изв. АН СССР. ОМЕИ, 1933, с. 366—372.
- ** Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse.— Math. Ann., 1933, Bd. 108, S. 149—160.

Sur la détermination empirique d'une loi de distribution.— Уч. зап. МГУ, 1933, т. 1, с. 9—10.

** К вопросу о пригодности найденных статистическим путем формул прогноза.— Журн. геофиз., 1933, т. 3, № 1, с. 78—82.

1934

* О точках разрыва функций двух переменных.— ДАН СССР, 1934, т. 1, № 3, с. 105—106. Совм. с И. Я. Верченко.

* Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes.— Stud. math., 1934, vol. 5, p. 29—33.

* Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных.— ДАН СССР, 1934, т. 4, № 7, с. 361—362. Совм. с И. Верченко.

* О сходимости рядов по ортогональным полиномам.— ДАН СССР, 1934, т. 1, № 6, с. 291—294.

Quelques remarques sur l'approximation des fonctions continues.— Mat. сб., 1934, т. 41, № 1, с. 99—103.

О некоторых новых течениях в теории вероятностей: Тезисы докл.— В кн.: Бюллетень второго Всесоюз. съезда математиков в Ленинграде, 24—30 июня 1934 г. Л.: Изд. АН СССР, 1934, с. 8.

Современная математика.— Фронт науки и техники, 1934, № 5/6, с. 25—28.

Институт математики и механики Московского государственного университета.— Фронт науки и техники, 1934, № 5/6, с. 75—78.

** Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung).— Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 116—117.

1935

О некоторых современных течениях в теории вероятностей.— В кн.: Труды второго Всесоюз. математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г. Л.; М.: Изд. АН СССР, 1935, т. 1, с. 349—358.

** Уклонения от формул Харди при частичной изоляции.— ДАН СССР, 1935, т. 3, № 3, с. 129—132.

* La transformation de Laplace dans les espaces linéaires.— C.r. Acad. sci. Paris, 1935, vol. 200, p. 1717—1718.

* Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 521—526.

1936

* Ueber die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 107—110.

Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 80 с. Пер. с нем.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer-Verl., 1933. Уравнение.— БСЭ, 1936, т. 56, с. 163—165.

Современная математика.— В кн.: Сборник статей по философии математики. М.: ОНТИ, 1936, с. 7—13.

Теория и практика в математике.— Фронт науки и техники, 1936, № 5, с. 39—42.

* Ueber die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie.— Mat. сб., 1936, т. 1, с. 97—102.

Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen.— Mat. сб., 1936, т. 1, с. 607—610.

* Homologisierung des Komplexes und des lokalbikompakten Räumes.— Mat. сб., 1936, т. 1, с. 701—706.

** Zur Theorie der Markoffschen Ketten.— Math. Ann., 1936, Bd. 112, S. 155—160.

К условию А. И. Плеснера для закона больших чисел.— Mat. сб., 1936, т. 1, с. 847—849.

* Endliche Überdeckungen topologischer Räume.— Fund. math., 1936, vol. 26, p. 267—271. Совм. с П. С. Александровым.

- * Les groupes de Betti des espaces localement bicomacts.— C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1144—1147.
 - * Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicomacts.— C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1325—1327.
 - * Les groupes de Betti des espaces métriques.— C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1558—1560.
 - * Cycles relatifs. Théorème de dualité de M. Alexander.— C. r. Acad. sci. Paris, 1936, vol. 202, p. 1641—1643.
- Предисловие к кн.: Гейтинг А. Обзор исследований по основаниям математики. М.; Л.: ОНТИ, 1936, с. 3—4.
- Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza.— G. Ist. ital. attuar., 1936, vol. 7, p. 74—80.

1937

- * Ueber offene Abbildungen.— Ann. Math., 1937, vol. 38, p. 36—38.
 - * Кососимметричные величины и топологические инварианты.— В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.; Л.: ГОНТИ, 1937, вып. 4, с. 342—347.
 - ** Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний.— Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937, т. 1, вып. 3, с. 1—16.
 - * Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме.— Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937, т. 1, вып. 6, с. 1—26. Совм. с И. Г. Петровским, Н. С. Пискуновым.
 - ** К статистической теории кристаллизации металлов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 3, с. 355—360.
- Ein vereinfachter Beweis der Birkhoff—Khintchineschen Ergodensatzes.— Mat. сб., 1937, т. 2, с. 367—368.
- ** Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze.— Math. Ann., 1937, Bd. 113, S. 766—772.
- Ред. и доп. к кн.: Хаусдорф Ф. Теория множеств / Пер. с нем. М.; Л.: ГОНТИ, 1937. 304 с. Совм. с П. С. Александровым.
- Континуум.— БСЭ, 1937, т. 34, с. 139—140.

1938

- Введение в теорию функций действительного переменного. 3-е изд. (перераб.). М.; Л.: ГОНТИ, 1938. 268 с. Совм. с П. С. Александровым. (1-е изд. М.; Л., 1932).
- Марков Андрей Андреевич.— БСЭ, 1938, т. 38, с. 152—153.
- Математика.— БСЭ, 1938, т. 38, с. 359—402.
- Математическая индукция.— БСЭ, 1938, т. 38, с. 405—406.
- Мера.— БСЭ, 1938, т. 38, с. 831—832.
- Многомерное пространство.— БСЭ, 1938, т. 39, с. 577—578.
- Теория вероятностей и ее применения.— В кн.: Математика и естествознание в СССР. М.; Л.: ГОНТИ, 1938, с. 51—61.
- Об отделе информации в первом выпуске «Успехов математических наук».— УМН, 1938, вып. 4, с. 326—327.
- Одно замечание по поводу оснований геометрии (К вопросу о необходимости нового перевода «Оснований геометрии» Д. Гильберта).— УМН, 1938, вып. 4, с. 347—348.
- От редакции (Цикл статей по теории случайных процессов).— УМН, 1938, вып. 5, с. 3—4.
- ** Об аналитических методах в теории вероятностей.— УМН, 1938, вып. 5, с. 5—41. Пер. с нем.: Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.— Math. Ann., 1931, Bd. 104, S. 415—458.
- * Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина.— УМН, 1938, вып. 5, с. 52—56. Пер. с нем.: Ein vereinfachter Beweis der Birkhoff—Khintchineschen Ergodensatzes.— Mat. сб., 1937, т. 2, с. 367—368.

- Несколько проблем теории функций действительного переменного.— УМН, 1938, вып. 5, с. 232—234. Совм. с Г. М. Фихтенгольцем и И. М. Гельфандом.
- ** К решению одной биологической задачи.— Изв. НИИ мат. и мех. Томск. ун-та, 1938, т. 2, вып. 1, с. 7—12.
- Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction.— C. r. Acad. sci. Paris, 1938, vol. 207, p. 764—765.
- Ред. и предисл к кн.: Лебег А. Об измерении величин / Пер. с франц. М.: Учпедгиз, 1938. 208 с.

1939

- Алгебра. М.: Учпедгиз, 1939. Ч. 1. 192 с. Совм. с П. С. Александровым.
- Ориентация.— БСЭ, 1939, т. 43, с. 342—344.
- * О неравенствах между верхними границами последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале.— Уч. зап. МГУ, 1939, вып. 30. Математика, кн. 3, с. 3—16.
- * О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 1, с. 11—15. Совм. с И. М. Гельфандом.
- Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires.— C. r. Acad. sci. Paris, 1939, vol. 208, p. 2043—2045.

1940

- Поверхность.— БСЭ, 1940, т. 45, с. 746—748.
- * Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений.— ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 6—9.
- * Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве.— ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 115—118.
- К шестидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, с. 249—260. Совм. с В. Л. Гончаровым.
- Валерий Иванович Гливенко (1897—1940) [Некролог].— УМН, 1940, вып. 8, с. 379—383.
- Рец. на кн.: Романовский В. И. Математическая статистика.— УМН, 1940, вып. 7, с. 327—329.
- ** Об одном новом подтверждении законов Менделя.— ДАН СССР, 1940, т. 27, с. 38—42.

1941

- ** Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.— Бюл. МГУ. Математика, 1941, т. 2, вып. 6, с. 1—10.
- ** Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, с. 3—14.
- * Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов.— ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 477—479.
- * Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 299—303.
- ** О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении.— ДАН СССР, 1941, т. 31, с. 99—101.
- * К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1941, т. 31, с. 538—541.
- * Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 1, с. 19—21.
- Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях.— Математика в школе, 1941, № 2, с. 1—12. Совм. с П. С. Александровым.
- Иррациональные числа.— Математика в школе, 1941, № 3, с. 1—15. Совм. с П. С. Александровым.
- Confidence limits for an unknown distribution function.— Ann. Math., Stat., 1941, vol. 12, N 4, p. 461—463.

1942

- Определение центра рассеяния и меры точности по ограниченному числу наблюдений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, с. 3—32.
- * Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58.

1943

- Николай Иванович Лобачевский. 1793—1843. М.; Л.: Гостехиздат, 1943. 100 с. Совм. с П. С. Александровым.
- Великий русский ученый-новатор: К 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского.— Известия, 1943, 2 сент.

1945

- Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы.— Тр. МИАН СССР, 1945, т. 12, с. 7—25.
- Искусственное рассеивание в случае поражения одним попаданием и рассеивания в одном измерении.— Тр. МИАН СССР, 1945, т. 12, с. 26—45.

1946

- К вопросу о законе сопротивления при турбулентном течении в гладких трубах.— ДАН СССР, 1946, т. 52, с. 669—671.
- ** К обоснованию метода наименьших квадратов.— УМН, 1946, т. 1, вып. 1, с. 57—70.
- К обоснованию теории вещественных чисел.— УМН, 1946, т. 1, вып. 1, с. 217—219.
- Ньютон и современное математическое мышление.— В кн.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона, 1643—1943. М.: Изд-во МГУ, 1946, с. 27—43.
- Дискуссия по статье члена-корреспондента АН СССР М. А. Великанова «Перенос взвешенных насосов турбулентным потоком».— Изв. АН СССР. ОТН, 1946, № 5, с. 781—784.

1947

- Развитие математики в СССР.— БСЭ, 1947, том «СССР», с. 1318—1323.
- Средние величины.— БСЭ, 1947, т. 52, с. 508—509.
- ** Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, с. 561—566. Совм. с А. А. Петровым и Ю. М. Смирновым.
- ** Ветвящиеся случайные процессы.— ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 7—10. Совм. с Н. А. Дмитриевым.
- ** Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов.— ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 783—786. Совм. с Б. А. Севастьяновым.
- ** Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром.— В кн.: Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. 1, с. 242—252.
- Роль русской науки в развитии теории вероятностей.— В кн.: Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. М.: Изд-во МГУ, 1947, т. 1, кн. 1, с. 53—64 (Уч. зап. МГУ; Вып. 91).

1948

- Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром.— В кн.: Общее собрание Академии наук СССР, посвященное тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948, с. 465—472.
- Теория вероятностей.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 701—727. Совм. с Б. В. Гнеденко.
- О двух теоремах относительно вероятностей: Комментарии.— В кн.: *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч. Т. 3. Математический анализ. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 404—409.

- Строение полных метрических алгебр Буля.— УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 212.
- * Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции.— УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 216—221.
- Евгений Евгеньевич Слуцкий [Некролог].— УМН, 1948, т. 3, вып. 4, с. 143—151.
- Ред. и предисл. к кн.: *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 632.
- Algèbres de Booll métriques complètes.— VI Zjazd Matematyków Polskich. Warszawa, 1948, с. 22—30.

1949

- Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 264 с. Совм. с Б. В. Гнеденко.
- К вопросу о «геометрическом отборе» кристаллов.— ДАН СССР, 1949, т. 65, с. 681—684.
- ** Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования.— ДАН СССР, 1949, т. 65, с. 793—796.
- ** О суммах случайного числа случайных слагаемых.— УМН, 1949, т. 4, вып. 4, с. 168—172. Совм. с Ю. В. Прохоровым.
- ** Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, с. 281—300.
- Основные задачи теоретической статистики: Тр. Второго Всесоюз. совещ. по математической статистике, Ташкент, 27 сент.— 2 окт. 1948 г.— Ташкент: Узбекгосиздат, 1949, с. 216—220.
- Реальный смысл результатов дисперсионного анализа: Тр. Второго Всесоюз. совещ. по математической статистике, Ташкент, 27 сент.— 2 окт. 1948 г. Ташкент: Узбекгосиздат, 1949, с. 240—268.
- * О дроблении капель в турбулентном потоке.— ДАН СССР, 1949, т. 66, № 5, с. 825—828.
- Абсолютная величина.— БСЭ-2, 1949, т. 1, с. 32.
- Адамар Жак.— БСЭ-2, 1949, т. 1, с. 388.
- Аддитивные величины.— БСЭ-2, 1949, т. 1, с. 394.
- Аксиома.— БСЭ-2, 1949, т. 1, с. 613—616.
- Аксометрия.— БСЭ-2, 1949, т. 1, с. 617.

1950

- ** Несмещенные оценки.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, с. 303—326.
- К вопросу об определении коэффициента температуропроводности почвы.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1950, т. 14, № 2, с. 97—98.
- Алгебра в средней школе.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 61—62.
- Алгебраическое выражение.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 64.
- Алгоритм.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 65.
- Алгоритм Евклида.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 65—67.
- Александров Александр Данилович.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 83.
- Александров Павел Сергеевич.— БСЭ-2, 1950, т. 2, с. 84.
- Асимптота.— БСЭ-2, 1950, т. 3, с. 238—239.
- Асимптотические выражения.— БСЭ-2, 1950, т. 3, с. 239.
- Ахизер Наум Ильич.— БСЭ-2, 1950, т. 3, с. 565.
- Банах Стефан.— БСЭ-2, 1950, т. 4, с. 183.
- Бари Нина Карловна.— БСЭ-2, 1950, т. 4, с. 245.
- Бернштейн Сергей Натанович.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 52.
- Бесконечно большие.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 66—67.
- Бесконечно малые.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 67—71. Совм. с В. Ф. Каганом.
- Бесконечно удаленные элементы.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 71—72. Совм. с Б. Н. Делоне.
- Бесконечность (в математике).— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 73—74.
- Бигармонические функции.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 159.
- Билинейная форма.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 167.
- Больших чисел закон.— БСЭ-2, 1950, т. 5, с. 538—540.

1951

- ** К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний.— Уч. зап. МГУ, 1951, т. 148, Математика, т. 4, с. 53—59.
- ** Обобщение формулы Пуассона на случай выборки из конечной совокупности.— УМН, 1951, т. 6, вып. 3, с. 133—134.
- Иван Георгиевич Петровский.— УМН, 1951, т. 6, вып. 3, с. 161—164.
- Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю. Л., 1951, с. 1—24. (Всесоюз. о-во по распространению полит. и науч. знаний. Ленинград. дом науч.-техн. пропаганды).
- Брауэр Лейтзен Эгберт Ян.— БСЭ-2, 1951, т. 6, с. 62. Совм. с С. А. Яновской.
- Вариационный ряд.— БСЭ-2, 1951, т. 6, с. 641.
- Вейль Герман.— БСЭ-2, 1951, т. 7, с. 106. Совм. с С. А. Яновской.
- Величина.— БСЭ-2, 1951, т. 7, с. 340—341.
- Вероятное отклонение.— БСЭ-2, 1951, т. 7, с. 507.
- Вероятность.— БСЭ-2, 1951, т. 7, с. 508—510.
- Выборочный метод.— БСЭ-2, 1951, т. 9, с. 417—418. Совм. с Т. И. Козловым.
- Вводная статья и комментарии к кн.: *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1951, т. 5, с. 329—332; 342—348. Совм. с А. Н. Хованским.

1952

- К вопросу о сопротивлении в профиле скоростей при турбулентном течении в трубах.— ДАН СССР, 1952, т. 84, с. 20—30.
- Гаусса распределение.— БСЭ-2, 1952, т. 10, с. 275.
- Геодезическая кривизна.— БСЭ-2, 1952, т. 10, с. 481.
- Гильберт Давид.— БСЭ-2, 1952, т. 11, с. 370—371.
- Гистограмма.— БСЭ-2, 1952, т. 11, с. 447.
- Гнеденко Борис Владимирович.— БСЭ-2, 1952, т. 11, с. 545.
- Гомеоморфизм.— БСЭ-2, 1952, т. 12, с. 21.
- Гомотопия.— БСЭ-2, 1952, т. 12, с. 35.
- Движение (в геометрии).— БСЭ-2, 1952, т. 13, с. 447.
- Двучлен.— БСЭ-2, 1952, т. 13, с. 518.
- Действительные числа.— БСЭ-2, 1952, т. 13, с. 570.
- Деление.— БСЭ-2, 1952, т. 13, с. 628.
- Дискретность.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 425.
- Дисперсия.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 438.
- Дистрибутивность.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 479.
- Дистрибутивный оператор.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 479.
- Дифференциал.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 498—499.
- Дифференциальные уравнения.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 520—526.
- Совм. с Б. П. Демидовичем и В. В. Немыцким.
- Доверительная вероятность.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 616.
- Доверительные границы.— БСЭ-2, 1952, т. 14, с. 617.
- Знаки математические.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 115—119. Совм. с И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевичем.
- Значащие цифры.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 135.
- Изоморфизм.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 478—479. Совм. с В. И. Битюковым.
- Изотропные прямые.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 509.
- Именованное число.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 557.
- Имшенецкий Василий Григорьевич.— БСЭ-2, 1952, т. 17, с. 607.
- О профессии математика: В помощь поступающим в вузы. М.: Сов. наука, 1952. 22 с.

1953

- О понятии алгоритма.— УМН, 1953, т. 8, вып. 4, с. 175—176.
- ** Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей.— Вестн. МГУ, 1953, т. 10, с. 29—38.
- * О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— ДАН СССР, 1953, т. 93, с. 763—766.

- Индукция математическая.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 146.
 Интеграл.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 250—253. Совм. с В. И. Гливенко.
 Интеграл вероятности.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 253.
 Интерполяция.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 304—305.
 Интуиционизм.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 319.
 Исключение неизвестных.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 483.
 Испытание.— БСЭ-2, 1953, т. 18, с. 604.
 Исчерпывания метод.— БСЭ-2, 1953, т. 19, с. 50—51.
 Квадрант.— БСЭ-2, 1953, т. 20, с. 434.
 Компакт.— БСЭ-2, 1953, т. 22, с. 282.
 Константа.— БСЭ-2, 1953, т. 22, с. 416.
 Континуум.— БСЭ-2, 1953, т. 22, с. 454—455.
 Координаты.— БСЭ-2, 1953, т. 22, с. 524—525.
 Корреляция.— БСЭ-2, 1953, т. 23, с. 55—58.

1954

- * О сохранении условно периодических движений при малом изменении функций Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 527—530.
 * Общая теория динамических систем и классическая механика.— In: Proc. Intern. Congr. Math., 1954, vol. 1, p. 315—333; То же.— В кн.: Труды Междунар. математического конгресса. Амстердам, 1954 г.: Обзор. докл. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 187—208.
 Линия.— БСЭ-2, 1954, т. 25, с. 167—170.
 Малых чисел закон.— БСЭ-2, 1954, т. 26, с. 168.
 Марков Андрей Андреевич.— БСЭ-2, 1954, т. 26, с. 294.
 Математика.— БСЭ-2, 1954, т. 26, с. 464—483.
 Математическая статистика.— БСЭ-2, 1954, т. 28, с. 485—490.
 Математическая физика.— БСЭ-2, 1954, т. 26, с. 490.
 Мизес Рихард.— БСЭ-2, 1954, т. 27, с. 414.
 Многомерное пространство.— БСЭ-2, 1954, т. 27, с. 660.
 Множеств теория.— БСЭ-2, 1954, т. 28, с. 14—17. Совм. с П. С. Александровым.
 Элементы теории функций и функционального анализа: Курс лекций. Вып. 1. Метрические и нормированные пространства. М.: Изд-во МГУ, 1954. 155 с. Совм. с С. В. Фоминым.

1955

- Оценки минимального числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных.— УМН, 1955, т. 10, вып. 1, с. 192—194.
 Ориентация.— БСЭ-2, 1955, т. 31, с. 188—189.
 Основания геометрии.— БСЭ-2, 1955, т. 31, с. 296.
 Поверхность.— БСЭ-2, 1955, т. 33, с. 346—347. Совм. с Л. А. Скорняковым.
 Порядковые числа.— БСЭ-2, 1955, т. 34, с. 238.
 Приемочный статистический контроль.— БСЭ-2, 1955, т. 34, с. 498—499.
 Оценки минимального числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их приложение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозиций функций меньшего числа переменных.— ДАН СССР, 1955, т. 101, с. 192—194.
 ** О сходимости А. В. Скорохода.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, с. 239—247.
 ** Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, с. 426—436.
 ** Zufällige Funktionen und Grenzverteilungssätze.— In: Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin, 1956, S. 113—126. Совм. с Ю. В. Прохоровым.
 * Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных.— В кн.: Труды III Всесоюз. мат. съезда. М.: Изд-во МГУ, 1956, т. 2, с. 28—29.

- On the Shannon theory of information transmission in the case of continuons sig-
nales.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1956, vol. IT-2, p. 102—108.
- * О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпо-
зициями непрерывных функций меньшего числа переменных.— ДАН СССР,
1956, т. 108, № 2, с. 179—182.
- О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метричес-
ких пространств.— ДАН СССР, 1956, т. 108, с. 385—388.
- ** К общему определению количества информации.— ДАН СССР, 1956, т. 111,
с. 745—748. Совм. с И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом.
- Теория вероятностей.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение.
М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 252—284.
- С. М. Никольский: К 50-летию со дня рождения.— УМН, 1956, т. 11, вып. 2,
с. 239—244. Совм. с С. Б. Стечкиным.
- Слущкий Евгений Евгеньевич.— БСЭ-2, 1956, т. 39, с. 378.
- Смирнов Николай Васильевич.— БСЭ-2, 1956, т. 39, с. 406.

1957

- ** Теория передачи информации.— В кн.: Сессия Академии наук СССР по на-
учным проблемам автоматизации производства, 15—20 окт. 1956 г.: Пле-
нар. заседания. М.: Изд-во АН СССР, 1957, с. 66—99.
- * О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде
суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения.—
ДАН СССР, 1957, т. 114, № 5, с. 953—956.
- К обоснованию теории вещественных чисел.— Мат. просвещение, 1957, т. 2,
с. 169—173.

1958

- О профессии математика. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1958. 60 с.
- ** Количество информации и энтропия для непрерывных распределений.—
В кн.: Труды III Всесоюз. мат. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 3,
с. 300—320. Совм. с И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом.
- Достаточная статистика.— БСЭ-2, 1958, т. 51, с. 106.
- Информация.— БСЭ-2, 1958, т. 51, с. 129—130.
- Кибернетика.— БСЭ-2, 1958, т. 51, с. 149—151.
- ** Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и авто-
морфизмов пространств Лебега.— ДАН СССР, 1958, т. 119, с. 861—864.
- ** Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy.— Ann. Inst.
Henry Poincaré, 1958, vol. 16, N 1, p. 27—34.
- * О линейной размерности топологических векторных пространств.— ДАН
СССР, 1958, т. 120, с. 239—241.
- К определению алгоритма.— УМН, 1958, т. 13, вып. 4, с. 3—28. Совм. с В. А. Ус-
пенским.

1959

- Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.—
ДАН СССР, 1959, т. 124, с. 754—755.
- ** ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах.— УМН,
1959, т. 14, вып. 2, с. 3—86. Совм. с В. М. Тихомировым.
- ** Переход ветвящихся процессов в диффузионные и примыкающие задачи
генетики.— Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. 4, с. 233—236.
- Замечания о работах Р. А. Минлоса и В. В. Сазонова.— Теория вероятностей
и ее применения, 1959, т. 4, с. 237—239.
- Теория вероятностей.— В сб.: Математика в СССР за 40 лет. М.: Физматгиз,
1959, т. 1, с. 781—795.
- Предисловие к кн.: Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Изд-во иностр.
лит., 1959, с. 5—8.

1960]

- О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, с. 215—221. Совм. с О. В. Сармановым.
- ** О классах $\Phi^{(n)}$ Форте и Блан-Лапьерра.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, с. 373.
- ** Случайные функции нескольких переменных, почти все реализации которых периодичны.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, с. 374.
- О работах Н. В. Смирнова по математической статистике: К 60-летию со дня рождения.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, с. 436—440. Совм. с Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоровым, О. В. Сармановым.
- ** Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, с. 222—227. Совм. с Ю. А. Розановым.
- Александр Яковлевич Хинчин [Некролог].— УМН, 1960, т. 15, вып. 4, с. 97—110. Совм. с Б. В. Гнеденко.
- О профессии математика. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1960, 60 с.
- Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. 2. Мера, интеграл Лебега, гильбертово пространство.— М.: Изд-во МГУ, 1960. 119 с. Совм. с С. В. Фоминым.

1961

- Автоматы и жизнь: Тез. докл., прочитанного на методол. семинаре мех.-мат. фак-та МГУ 5 апреля 1961 г.— Маш. пер. и прикл. лингвист., 1961, вып. 6, с. 3—8.
- Автоматы и жизнь.— Техника молодежи, 1961, № 10, с. 16—19; № 11, с. 30—33.
- Замечание к докладу В. К. Лезерсона.— Теория вероятностей и ее применения, 1961, т. 6, с. 367.
- Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях. Иррациональные числа.— В кн.: Вопросы преподавания математики в средней школе. М.: Учпедгиз, 1961. Совм. с П. С. Александровым.

1962

- ** Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.— ДАН СССР, 1962, т. 146, с. 747—750. Совм. с М. Арато и Я. Г. Синаем.
- Ритмика поэм Маяковского.— Вопр. языкознания, 1962, № 3, с. 62—74. Совм. с А. М. Кондратовым.
- Об одной вероятностной задаче оптимального управления.— ДАН СССР, 1962, т. 145, с. 993—995. Совм. с Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко.
- О работах Б. В. Гнеденко по теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, с. 323—329.
- * Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.— In: *Mécanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, août-sept. 1961*/На рус. и фр. яз. Paris, 1962, p. 447—458.
- A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number.— *J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 13, N 1, с. 82—85.

1963

- ** О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, т. 12, с. 437—451.
- Дискретные автоматы и конечные алгоритмы.— В кн.: Труды 4-го Всесоюз. мат. съезда. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963, т. 1, с. 120.
- ** Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций.— In: *Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963*, p. 369—376.

- ** On tables of random numbers.— Ind. J. Stat. Ser. A, 1963, vol. 25, N 4, p. 369—376.
- О дольнике современной русской поэзии: Общая характеристика.— Вопр. языкознания, 1963, N 6, с. 84—95. Совм. с А. В. Прохоровым. К изучению ритмики Маяковского.— Вопр. языкознания, 1963, № 4, с. 64—71.
- Статистика и теория вероятностей в исследовании русского стихосложения.— В кн.: Тез. и аннот. симпоз. по комплексному исследованию художественного творчества. Л.: Наука, 1963, с. 23. Совм. с А. В. Прохоровым.
- Как я стал математиком.— Огонек, 1963, № 48, с. 12—13.
- Предисловие к кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

1964

- О дольнике современной русской поэзии: Статистическая характеристика дольника Маяковского, Багрицкого, Ахматовой.— Вопр. языкознания, 1964, № 1, с. 75—94. Совм. с А. В. Прохоровым.
- О метре пушкинских «Песен западных славян».— Рус. литература, 1964, № 1, с. 98—111.
- Предисловие к кн.: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. 2-е изд. М.: Мир, 1964, с. 5—6.

1965

- ** Три подхода к определению понятия «количество информации».— Проблемы передачи информации, 1965, т. 1, № 1, с. 3—11.
- Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии.— Математика в школе, 1965, № 2, с. 24—29.
- О содержании школьного курса математики.— Математика в школе, 1965, № 4, с. 53—62. Совм. с И. М. Ягломом.
- Функции, графики, непрерывные функции.— Математика в школе, 1965, № 6, с. 12—21.
- Замечания по поводу анализа ритма «Стихов о советском паспорте» Маяковского.— Вопр. языкознания, 1965, № 3, с. 70—75.

1966

Введение в анализ. М.: Изд-во МГУ, 1966. 56 с.

- * П. С. Александров и теория δ -операций.— УМН, 1966, т. 21, вып. 4, с. 275—278.
- О школьном определении тождества.— Математика в школе, 1966, № 2, с. 33—35.
- Геометрия на сфере и геология.— Наука и жизнь, 1966, № 2, с. 32.

1967

- ** О реализации сетей в трехмерном пространстве.— Проблемы кибернетики 1967, т. 19, с. 261—268. Совм. с Я. М. Барdziном.
- Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе.— Математика в школе, 1967, № 2, с. 4—13.

1968

- Несколько теорем об алгоритмической энтропии и алгоритмическом количестве информации.— УМН, 1968, т. 21, вып. 2, с. 201.
- К изучению показательной функции и логарифмов в восьмилетней школе.— Математика в школе, 1968, № 2, с. 23—25.
- Обобщение понятия степени и показательная функция.— Математика в школе, 1968, № 1, с. 24—32.
- Введение в теорию вероятностей и комбинаторику.— Математика в школе, 1968, № 2, с. 63—72.
- Элементы теории функций и функционального анализа. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1968. 495 с. Совм. с С. В. Фоминым.

К основам русской классической метрики.— В кн.: Содружество наук и тайны творчества. М.: Искусство, 1968, с. 397—432. Совм. с А. В. Прохоровым.
Пример изучения метра и его ритмических вариантов.— В кн.: Теория стиха. Л.: Наука, 1968, с. 145—167.

1969

** К логическим основам теории информации и теории вероятностей.— Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, № 3, с. 3—7.
Сергей Натанович Бернштейн.— УМН, 1969, т. 24, вып. 3, с. 211—218.
Научные основы школьного курса математики.— Математика в школе, 1969, № 3, с. 12—17; № 5, с. 8—17.
Новое в школьной математике.— Наука и жизнь, 1969, № 3, с. 62—66.

1970

Засухин Виктор Николаевич: Памяти математиков, погибших в Великой Отечественной войне.— УМН, 1970, т. 25, вып. 3, с. 243.
Селиверстов Глеб Александрович [Некролог].— УМН, 1970, т. 25, вып. 3, с. 244—245.
Обобщение понятия числа, неотрицательного рационального числа.— Математика в школе, 1970, № 4, с. 27—32.
Что такое функция? — Квант, 1970, № 1, с. 27—36.
Что такое график функций? — Квант, 1970, № 2, с. 3—13.
Паркет из правильных многоугольников.— Квант, 1970, № 3, с. 24.

1971

Величина.— БСЭ-3, 1971, т. 4, с. 456—457.
Винер Норберт.— БСЭ-3, 1971, т. 5, с. 72.
Гильберт Давид.— БСЭ-3, 1971, т. 6, с. 519.
О системе основных понятий и обозначений школьного курса математики.— Математика в школе, 1971, № 2, с. 17—22.
Современная математика и математика в современной школе.— Математика в школе, 1971, № 6, с. 2—3.
Курс математики для физико-математических школ. М.: Изд-во МГУ, 1971. 223 с. Совм. с В. А. Гусевым, А. Б. Сосинским и А. А. Шершевским.
Летняя школа на Рубском озере. М.: Просвещение, 1971. 160 с.

1972

Сложность задания и сложность построения математических объектов.— УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 159.
Интеграл.— БСЭ-3, 1972, т. 10, с. 300—302.
Исчерпывающий метод.— БСЭ-3, 1972, т. 10, с. 586.
Элементы теории функций и функционального анализа. 3-е изд., перераб. М.: Физматгиз, 1972. 469 с. Совм. с С. В. Фоминим.
Научный руководитель.— В кн.: Нейман Л. Радость открытия. М.: Дет. лит., 1972.
Учителя не заменить.— Комс. правда, 1972, 19 янв.
* Качественное изучение математических моделей динамики популяций.— Проблемы кибернетики, 1972, т. 25, вып. 2, с. 101—106.

1973

Континуум.— БСЭ-3, 1973, т. 13, с. 64.
Полулогарифмическая и логарифмическая сетка.— Квант, 1973, № 4, с. 2.
О профессии математика.— Квант, 1973, № 4, с. 12.

1974

Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974. 119 с.
Памяти Ивана Георгиевича Петровского (18 января 1901 г.— 15 января 1974 г.).— Тр. Моск. мат. о-ва, 1974, т. 31, с. 5—16. Совм. с П. С. Александровым, О. А. Олейник.

- Иван Георгиевич Петровский.— УМН, 1974, т. 29, вып. 2, с. 3—5.
 Марков Андрей Андреевич.— БСЭ-3, 1974, т. 15, с. 379.
 Математика.— БСЭ-3, 1974, т. 15, с. 467—478.
 Математическая статистика.— БСЭ-3, 1974, т. 15, с. 480—484. Совм. с Ю. В. Прохоровым.
 Многомерное пространство.— БСЭ-3, 1974, т. 16, с. 372.
 Ориентация.— БСЭ-3, 1974, т. 18, с. 509—510.
 Заняться о достойном пополнении.— Вестн. высш. школы, 1974, № 6, с. 26—33. Совм. с И. Т. Тропиным и К. В. Чернышевым.
 Новые программы: Специализированные школы.— В кн.: Математическое образование сегодня. М.: Просвещение, 1974, с. 5—12.
 Решето Эратосфена.— Квант, 1974, № 10, с. 2.
 Приемочный статистический контроль.— БСЭ-3, 1975, т. 20, с. 572—573. Совм. с Ю. К. Беляевым.
 Элементы комбинаторики.— Математика в школе, 1975, № 2, с. 16—25.
 Действительные числа, бесконечные последовательности и их пределы.— Математика в школе, 1975, № 2, с. 25—35. Совм. с О. С. Ивашевым-Мусатовым.

1976

- Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд., перераб. М.: Наука, 1976. 543 с. Совм. с С. В. Фоминым.
 Тригонометрические функции, их графики и производные в учебном пособии для 10 класса.— Математика в школе, 1976, № 1, с. 10—25. Совм. с С. И. Шварцбурдом.
 XXXVIII Московская математическая олимпиада (февраль — март 1975 г.).— Математика в школе, 1976, № 4, с. 68—72. Совм. с Г. А. Гальпериним.
 Интеграл в учебном пособии для 10 класса.— Математика в школе, 1976, № 6, с. 15—17.
 Группы преобразований.— Квант, 1976, № 10, с. 2—5.

1977

- Бесконечность.— Мат. энци., 1977, т. 1, с. 455—458.
 Величина.— Мат. энци., 1977, т. 1, с. 651—653.
 Вероятность.— Мат. энци., 1977, т. 1, с. 667—669.
 Физико-математическая школа при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.— Квант, 1977, № 1, с. 56—57. Совм. с В. В. Вавиловым.

1978

- О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения.— Математика в школе, № 3, с. 6—9.
 ** Оценки спектральных функций случайных процессов: Докл. на 11 Европейском совещ. по статистике. Осло, 14—18 авг. 1978 г. Abstr. of Paper. Oslo, 1978, p. 36. Совм. с И. Г. Журбенко.

1979

- Линейные выборочные оценки сумм.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, с. 241—251. Совм. с А. В. Булинским. ФМШ при МГУ — 15 лет.— Квант, 1979, № 1, с. 55—57. Совм. с В. В. Вавиловым и И. Т. Тропиным.

1980

- Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики.— Квант, 1980, № 4, с. 15—18.

1981

- Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. М.: Наука, 1981. 542 с. Совм. с С. В. Фоминым.

- Физико-математическая школа при МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1981 (Математика, кибернетика, № 5). Совм. с В. В. Вавиловым и И. Т. Тропиным.
- Геометрия для 6—8 классов: Учебное пособие. 3-е изд. М.: Просвещение, 1981. Совм. с А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым; 1-е изд. М., 1979.
- О понятии вектора в курсе средней школы.— Математика в школе, 1981, № 3, с. 7—8.

1982

- Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982. 120 с. Совм. с А. Г. Драгалиным.
- Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 159 с. (Библиотечка «Квант»; Вып. 23). Совм. с И. Г. Журбенко и А. В. Прохоровым.
- Математика.— Мат. энци., 1982, т. 3, с. 560—564.
- Математическая статистика.— Мат. энци., 1982, т. 3, с. 576—581. Совм. с Ю. В. Прохоровым.
- Ньютон и современное математическое мышление.— Математика в школе, 1982, № 6, с. 58.

1983

- Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. 4-е изд. М.: Просвещение, 1983. Совм. с А. М. Абрамовым, Б. Е. Вейцем, О. С. Ивашевым-Мусатовым и С. И. Шварцбурдом; 1-е изд. 1980.
- Об учебном пособии «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова.— Математика в школе, 1983, № 2, с. 45.
- ** Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей.— УМН, 1983, т. 38, вып. 4, с. 27—36.;

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	3
Андрей Николаевич Колмогоров (Биографическая справка) . .	4
1. Ряд Фурье — Лебега, расходящийся почти всюду	8
2. О порядке величины коэффициентов ряда Фурье — Лебега	12
3. Замечания к исследованию сходимости рядов Фурье	15
4. О сходимости рядов Фурье	16
5. Аксиоматическое определение интеграла	19
6. О границах обобщения интеграла	21
7. О возможности общего определения производной, интеграла и суммирования расходящихся рядов	39
8. О гармонически сопряженных функциях и рядах Фурье . .	40
9. О принципе <i>tertium non datur</i>	45
10. О сходимости рядов Фурье	69
11. Ряд Фурье — Лебега, расходящийся всюду	73
12. О сходимости ортогональных рядов	75
13. Об операциях над множествами	85
14. О процессе интегрирования Данажуа	93
15. О тополого-теоретико-групповом обосновании геометрии	94
16. Исследование понятия интеграла	96
17. Об определении среднего	136
18. О компактности множеств функций при сходимости в среднем	139
19. К толкованию интуиционистской логики	142
20. К обоснованию проективной геометрии	149
21. К теории меры	150
22. О точках разрыва функций двух переменных	167
23. О нормируемости общего линейного топологического пространства	168
24. Продолжение исследования о точках разрыва функции двух переменных	171
25. О сходимости рядов по ортогональным полиномам	174
26. Преобразование Лапласа в линейных пространствах	178
27. О порядке остаточного члена рядов Фурье дифференцируемых функций	179
28. О наилучшем приближении функций заданного функционального класса	186
29. О законах двойственности в комбинаторной топологии . . .	190
30. Кольцо гомологий комплексов и локально бикompактных пространств	197
31. Конечные покрытия топологических пространств	203
32. Группы Бетти локально бикompактных пространств	207

33. Свойства групп Бетти локально бикомпактных пространств	209
34. Группы Бетти метрических пространств	211
35. Относительные циклы. Теорема двойственности Александера	214
36. Об открытых отображениях	215
37. Кососимметричные величины и топологические инварианты	218
38. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме	221
39. Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина	246
40. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале	252
41. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах	264
42. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений	269
43. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве	274
44. Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов	278
45. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса	281
46. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости	287
47. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности	290
48. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости	294
49. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции	296
50. О дроблении капель в турбулентном потоке	302
51. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе	307
52. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона	311
53. Общая теория динамических систем и классическая механика	316
54. Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных	333
55. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных	335
56. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения	340
57. О линейной размерности топологических векторных пространств	344

58. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса	348
59. П. С. Александров и теория δs -операций	352
60. Качественное изучение математических моделей динамики популяций	357

КОММЕНТАРИИ

А. Н. Колмогоров. К работам по теории функций и теории множеств	363
Тригонометрические и ортогональные ряды (П. Л. Ульянов)	364
Дескриптивная теория множеств (И. И. Паровиченко)	373
Теория меры и интеграла (В. А. Скворцов)	376
Точки разрыва функций (Е. П. Долженко)	381
Теория приближений (С. А. Теляковский, В. М. Тихомиров)	382
Неравенства для производных (В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев)	387
Кольца непрерывных функций (Е. А. Горин)	390
Кривые в гильбертовом пространстве (Ю. А. Розанов)	392
А. Н. Колмогоров. К работам по интуиционистской логике	393
Интуиционистская логика (В. А. Успенский, В. Е. Плиско)	394
А. Н. Колмогоров. К работам по теории гомологий	405
Теория гомологий (Г. С. Чогошвили)	405
А. Н. Колмогоров. К работе об открытых отображениях	412
Топология (А. В. Архангельский)	412
Аксиоматика проективной геометрии (А. В. Михалев)	414
А. Н. Колмогоров. К работе об уравнении диффузии	416
Уравнение диффузии (Г. И. Баренблатт)	416
А. Н. Колмогоров. К работам по турбулентности	421
Турбулентность (А. М. Яглом)	421
А. Н. Колмогоров. К работам по классической механике	433
Классическая механика (В. И. Арнольд)	433
А. Н. Колмогоров. К работам о суперпозициях	444
Суперпозиции (В. И. Арнольд)	445
Список трудов А. Н. Колмогорова	452

*Андрей Николаевич
Колмогоров*

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Избранные труды

Утверждено к печати
Отделением математики Академии наук СССР

Редактор В. И. Битюцков
Редактор издательства Н. Н. Лезнова
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор С. А. Литвак
Технический редактор О. М. Гуськова
Корректоры Г. Н. Лаш, К. П. Лесева

ИБ № 27963

Сдано в набор 12.10.84 Подписано к печати 24.01.85
Формат 60×90¹/₁₆.

Бумага книжно-журнальная импортная
Гарнитура обыкновенная Печать высокая
Усл. печ. л. 29,75. Уч.-изд. л. 32,1. Усл. кр. отт. 30,75.

Тираж 3100 экз. Тип. зак. 707

Цена 3 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука» 117864 ГСП-7,
Москва В-45, Профсоюзная ул., 90.

2-я типография издательства «Наука»
121099. Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА» ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГА

А. Н. КОЛМОГОРОВ

Избранные труды

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

В книгу войдут следующие статьи:

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ЧЛЕНЫ КОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ СЛУЧАЕМ

О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФОРМУЛЕ А. ХИНЧИНА

О СУММАХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРОБЛЕМА ОЖИДАНИЯ

МЕТОД МЕДИАНЫ В ТЕОРИИ ОШИБОК

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА — ЛЯПУНОВА

ОБ ОБЩЕЙ ФОРМЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА
(ПРОБЛЕМА БРУНО ДЕ ФИНЕТТИ)

К ВЫЧИСЛЕНИЮ СРЕДНЕЙ БРОУНОВСКОЙ ПЛОЩАДИ

ОБ ЭМПИРИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

К ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

К ВОПРОСУ О ПРИГОДНОСТИ

НАЙДЕННЫХ СТАТИСТИЧЕСКИМ ПУТЕМ ФОРМУЛ ПРОГНОЗА
СЛУЧАЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ (К ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ);

УКЛОНЕНИЯ ОТ ФОРМУЛ ХАРДИ ПРИ ЧАСТИЧНОЙ ИЗОЛЯЦИИ

К ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ

ЦЕПИ МАРКОВА СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ

ОБ ОБРАТИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ ПРИРОДЫ

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ,

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДТВЕРЖДЕНИИ ЗАКОНОВ МЕНДЕЛЯ

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ

СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

О ЛОГАРИФИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОМ ЗАКОНЕ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ ПРИ ДРОБЛЕНИИ

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ОДНА ФОРМУЛА ГАУССА ИЗ ТЕОРИИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

О СУММАХ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ
ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА
РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,
СВЯЗАННОЙ С ВОПРОСОМ О МЕХАНИЗМЕ СЛОЕОБРАЗОВАНИЯ
НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ

К ВОПРОСУ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
В ОДНОРОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ПРОЦЕССАХ МАРКОВА
СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА НА СЛУЧАЙ ВЫБОРКИ
ИЗ КОНЕЧНОЙ СОВОКУПНОСТИ

НЕКОТОРЫЕ РАБОТЫ ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ В ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О СХОДИМОСТИ А. В. СКОРОХОДА
ДВЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
К ОБЩЕМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ И ЭНТРОПИЯ
ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

НОВЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ТРАНЗИТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
И АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ П. ЛЕВИ
ПЕРЕХОД ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ
В ДИФФУЗИОННЫЕ И ПРИМЫКАЮЩИЕ ЗАДАЧИ ГЕНЕТИКИ
(ОБЗОРНЫЙ ДОКЛАД)

ε -ЭНТРОПИЯ И ε -ЕМКОСТЬ МНОЖЕСТВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О КЛАССАХ $\Phi^{(n)}$ ФОРТЕ И БЛАН-ЛАПЬЕРРА
ОБ УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ
ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА
СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ,
ПОЧТИ ВСЕ РЕАЛИЗАЦИИ КОТОРЫХ ПЕРИОДИЧНЫ

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ
КОМПЛЕКСНОГО СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА
О ПРИБЛИЖЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ
НЕОГРАНИЧЕННО ДЕЛИМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ ТРУДНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗАДАНИЯ
И ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

О ТАБЛИЦАХ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

ТРИ ПОДХОДА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ «КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ»
О РЕАЛИЗАЦИИ СЕТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ
К ЛОГИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

КОМБИНАТОРНЫЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ
И ИСЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД МНОЖЕСТВАМИ. II

А.Н. КОЛМОГОРОВ

Избранные
труды

МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА