Дж. Литлвуд

Математическая смесь

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. И. ЛЕВИНА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

Оглавление

Предисловие переводчика

Предлагаемая читателю небольшая книга одного из крупнейших современных английских математиков Джона Иденсора Литлвуда (1885—1977) принадлежит к редкому жанру собрания математических очерков-миниатюр. Некоторые из составляющих ее очерков были впервые опубликованы в других изданиях, остальные написаны автором специально для этого сборника. Само название книги (в английском оригинале — «Разные заметки одного математика») указывает на непринужденный характер подбора материала и его изложения.

Тематика очерков весьма разнообразна. Она включает математические анекдоты, моменты математической автобиографии, небольшие историко-математические исследования, интересные задачи, оригинальные и неожиданные доказательства, вопросы баллистики и небесной механики и т. д.

Профессору Литлвуду принадлежит много важных и глубоких результатов в теории функций, аналитической теории чисел и других областях математики. Он известен также как остроумный собеседник с широким кругом интересов, живо реагирующий на любой математический вопрос.

Стиль Литлвуда нельзя назвать легким, он всегда предъявляет высокие требования к логическому мышлению читателя и умеет лаконичный сам по себе английский язык конденсировать до предела.

При переводе я стремился сохранить свежесть и оригинальность стиля автора, и если это мне не всегда удавалось, то, во всяком случае, не из-за отсутствия желания воздать должное автору или недостатка старания. Большую помощь при редактировании перевода мне оказал М. А. Иглицкий.

В. И. Левин

Предисловие автора

Смесь — это коллекция без естественного упорядочивающего отношения. Я не делаю попытки добиться видимости единства введением какого-либо искусственного порядка. Я надеюсь, что этот недостаток компенсируется разнообразием рассмотренных вопросов, во всяком случае, с точки зрения тех, кто не принадлежит к числу непримиримых, требующих во что бы то ни стало внешнего единства и одинаковой глубины.

Каждый, кого привлекает мысль о популярной математической книге, которую можно было бы бегло просмотреть, будет в состоянии справиться с этой книжкой. К такому читателю я буду иногда обращаться, называя его «любителем». Я постоянно встречаю людей, сомневающихся, в большинстве случаев без достаточных оснований, в своих возможностях. Первым показателем является отношение к школьному курсу геометрии: вызывал он интерес или нет? Отсутствие интереса к другим математическим предметам или плохие успехи при их изучении еще не обязательно что-либо означают; прежде чем может возникнуть интерес к этим предметам, необходима скучная предварительная работа и утомительная тренировка, а плохое преподавание может сделать эти предметы непонятными даже для прирожденного математика. Если ваше образование закончилось изучением «Элементов математического анализа» или непосредственно перед этим, то вы можете считать себя стоящим высоко в классе любителей.

Книга содержит ряд вопросов, рассмотрение которых требует математической техники, местами доступных только для специалиста-математика; эти вопросы были включены, чтобы дать полную картину того, что сегодня видит профессионал, однако при чтении их можно пропустить без ущерба для понимания остального текста, так как изложение остается связным и без них. Разделы, которые любитель, вероятно, пропустит (но он не должен отчаиваться слишком рано), выделяются звездочками. В тексте, не выделенном этими звездочками, я стремился вести изложение на уровне, приемлемом для любителя (и здесь уже математик-профессионал будет иногда пропускать страницы).

При отборе материала я руководствовался двумя требованиями. Первое из них — относительно малая известность, даже в кругу математиков. Поэтому некоторые вещи затрагиваются только вскользь, хотя они, быть может, заслуживают большего внимания. Они дополняют картину (подобно упомянутым выше вопросам, требующим математической техники), но не являются существенными для любителя (существенное рассматривается полностью). Любитель не должен ни в коем случае пугаться незнакомых ему мест (и я, как правило, указываю соответствующую литературу). Такое место есть в самом начале: п. (1) § 2 и следующий параграф. «Известность» означает здесь «известность в кругу математиков». Правда, опыт показывает, что некоторые любители знают доказательство Евклида [1]; если это так, то они должны также знать, что оно настолько распространено, что мне не следует его подробно рассматривать [2]; с другой стороны, опыт показывает, что некоторые его не знают; это не должно их огорчать.

Другим требованием являлась доступность, хотя отдельные трудные места все же имеются; моей целью является занимательность, а не повышение уровня знаний читателей. Забота об этом является уже их личным делом, но я буду считать, что потерпел неудачу там, где они найдут что-либо малоинтересное или тривиальное. Хорошая математическая шутка лучше дюжины посредственных работ; она также является лучшей математикой.

Дж. И. Литлвуд

---

[1]) Речь идет о содержащемся в «Началах» Евклида доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел; это доказательство можно найти в любом курсе теории чисел.— *Примеч. пер.*

[2]) Для профессионала на с. 22 приведено все же доказательство в одну строчку.

Математика с минимумом «сырого материала»

1. Какие вопросы настоящей математики могут попасть в такой раздел? Условием *sine qua non* несомненно является то, что *результат* должен быть понятен любителю. Мы не должны настаивать на том, чтобы и *доказательство* было доступно (см., например, п. (15), (16), (19)), хотя чаще всего и это имеет место. Я начинаю с бесспорных случаев; дальше выбор становится уже более трудным, и последние примеры включены потому, что по разным причинам они мне нравятся. Некоторые вопросы, необходимые для полноты картины, только «упоминаются» или же рассмотрение их откладывается.

(1) «Общеизвестное» евклидово доказательство бесконечности множества простых чисел может, конечно, претендовать на первое место (см., например, H a r d y G. H. A mathematician's apology, с. 32—34 или с. 22 ниже).

В этом пункте могли бы найти себе место и «известные» вещи из § 3, но для того, чтобы сделать их понятными для любителя, потребовалось бы прервать изложение.

Первое место я все же отвожу хорошо известной задаче-шутке, покорившей Европу много лет назад и опубликованной в той или иной форме во многих книгах. Я обращаюсь к ее первоначальной формулировке, согласно которой внезапная мысль, возникающая у A, порождается эмоциональным стимулом.

(2) Три дамы A, B и C сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными лицами и все три смеются. Внезапно A соображает: почему B не понимает, что C смеется над ней? — О боже! Они смеются надо мной. (Формально: если я, A, не выгляжу смешной, то B должна рассуждать так: если я, B, не выгляжу смешной, то C не над чем смеяться. Так как B так не рассуждает, то, следовательно, я, A, выгляжу смешной.)

Это — настоящее математическое рассуждение, и, уж несомненно, с минимумом материала. Но, более того,— что, насколько мне известно, не попало ни в какие книги,— в принципе возможно обобщение на случай n дам с испачканными лицами и смеющихся.

По индукции: в $(n+1)$-ситуации A рассуждает: если я не выгляжу смешной, то B, C, ... образуют n-ситуацию и B должна была бы перестать смеяться, но этого, однако, не происходит.

Сравните с правилом поджаривания трех кусков хлеба на сковородке, вмещающей только 2 куска: A_1, B_1; затем B_2, C_1; затем C_2, A_2. Это не дотягивает до математики.

(3) Следующий пример, вероятно, не выдерживает строгой критики, но при доброжелательном отношении занимателен.

Имеется неограниченное количество карт, на противоположных сторонах которых написаны числа 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и т. д. Берут произвольную карту и держат между двумя игроками A и B так, что каждый из них видит только одну сторону карты. Каждый игрок имеет право спасовать (т. е. отказаться от игры). Если же оба игрока соглашаются играть, то выигрывает тот из них, который видит большее число. В этой игре каждый раз один из игроков должен пасовать: если A видит 1, то на обратной стороне стоит 2, и он должен пасовать; если он видит 2, то на обратной стороне 1 или 3; если там 1, то B должен пасовать; если же он этого не делает, то пасовать должен A. И так далее по индукции.

(4) Аналогичным примером является следующий (Шрёдингер). Имеется бесконечное количество таких же карт, как в (3), но на этот раз для каждого n карт типа $(n, n+1)$ имеется 10^n, и выигрывает тот из игроков, который видит меньшее число. Предположим, что A и B делают одинаковые денежные ставки. В этой ситуации A «должен» играть, что бы он ни видел на обращенной к нему стороне карты; то же самое, разумеется, справедливо относительно B, причем шанс каждого из них на выигрыш составляет 9 к 1. Это в высшей степени странное заключение вытекает из того, что, какое бы число n ни видел A, в 10 раз вероятнее, что на другой стороне стоит $n+1$, чем то, что там стоит $n-1$. (Кстати, какое бы число N ни было задано до того, как карта

минута, бесконечно вероятнее, что на ней будут числа, бо́льшие N.)

(5) *Парадокс бесконечности.* Шары, занумерованные числами 1, 2, ... (для математика — сами эти числа), кладутся в ящик следующим образом. За одну минуту до полудня кладутся числа от 1 до 10, и число 1 вынимается обратно. За 1/2 минуты до полудня кладутся числа от 11 до 20, и число 2 вынимается обратно. За 1/3 минуты до полудня кладутся числа от 21 до 30, и число 3 вынимается обратно, и т. д. Сколько чисел останется в ящике в полдень? Ответ: ни одного. Какое бы число мы ни назвали, например 106, оно отсутствует в ящике, так как оно вынимается при 106-й операции.

* Аналитик постоянно встречается с таким положением вещей; посмотрев на множество точек

$$P_1+P_2+\ldots+P_{10}-P_1+P_{11}+P_{12}+\ldots+P_{20}-P_2+\ldots,$$

он сразу скажет, что оно «пустое», не видя в этом ничего парадоксального.*

В связи с парадоксами я хотел бы сделать экскурс в небесную механику. Предположим, что n тел, рассматриваемых как точки, движутся по законам ньютоновского тяготения. Системы, в которых рано или поздно произойдет простое столкновение (столкновение только двух точек-тел), бесконечно редки [1]). Ни в чем нельзя быть более уверенным, чем в том, что то же имеет место для кратных столкновений (т. е. столкновений трех или более точек-тел). (В самом деле, в то время как простые столкновения являются нормальным явлением для закона обратных кубов, кратные столкновения, несомненно, бесконечно редки при любом законе.) Тем не менее доказательства нет.

Это, конечно, парадокс относительно доказательств, а не относительно фактов. Можно также его объяснить. При простых столкновениях аналитический характер поведения обобщенных соответствующим образом систем сохраняется, а отсюда можно усмотреть, что простое столкновение (как бы поздно оно ни произошло) влечет за собой два аналитических соотношения между начальными условиями, что и делает эти условия бесконечно редкими.

---

[1]) На математическом языке: множество «точек-представителей» (в пространстве начальных условий) систем, в которых возможны простые столкновения, имеет меру 0.

2. (6) 4 корабля A, B, C, D плывут в тумане с постоянными и различными скоростями на прямолинейных и различных курсах. Пять пар A и B, B и C, C и A, B и D, C и D чуть не столкнулись; назовем это «столкновениями». Большинство людей находят неожиданным математическое следствие, что при этих условиях A и D также должны обязательно «столкнуться». Рассмотрим трехмерные графики положений в системе координат плоскость движения — время (так называемые «мировые линии»), причем ось времени будем представлять себе вертикальной. Мировые линии a, b, c попарно пересекаются, следовательно, они лежат в одной плоскости, скажем, плоскости p; d пересекается с b и с c, так что она тоже лежит в плоскости p, и поэтому должна пересечь a. (Кратные столкновения по условию исключаются. Параллельность двух мировых линий не может иметь места вследствие различия скоростей.)

(7) *Эксперимент, доказывающий вращение Земли.* Стеклянная трубка, имеющая форму кольца, наполнена водой и расположена горизонтально, для простоты, на северном полюсе. Трубка внезапно поворачивается на 180° вокруг горизонтальной оси. Вода теперь течет по трубке (со скоростью один оборот в 12 часов) и ее движение может быть обнаружено. Это могло бы быть изобретено Архимедом, но должно было ждать своего открытия до 1930 г. (A. H. Compton). Интересно отметить, что многие экспонаты из моей коллекции возникли сравнительно недавно. Для разнообразия: дата открытия следующего факта — 1605 г.

(8) *Стевин и сила тяжести на наклонной плоскости.* Цепь $ABCD$, висящая, как показано на рис. 1, должна находиться в равновесии (иначе мы имели бы вечное движение). Симметричная нижняя часть ADC может быть отброшена, так как она оказывает одинаковое воздействие на AB и BC. ABC остается в равновесии. Этот факт равносилен закону синуса. (Интересное обсуждение этого вопроса имеется в книге: Mach E. Science of Mechanics, с. 24—31.)

(9) Чтобы определить орбиту планеты или кометы, достаточно трех наблюдений, каждое из которых дает две (угловые) координаты и время t. Фактически *любой* системе наблюдений (направьте как угодно телескоп в любые 3 момента времени) соответствует орбита [1]). Представим себе

[1]) Коническое сечение с Солнцем в фокусе.

пятнышко на объективе телескопа; оно дает такие же результаты наблюдений и также описывает орбиту (Земли). Но уравнения для элементов орбиты сводятся (если опустить некоторые технические детали) к уравнению 8-й степени. Это уравнение должно иметь вещественный корень. Но так как его степень четная, то оно должно иметь и второй вещественный корень.

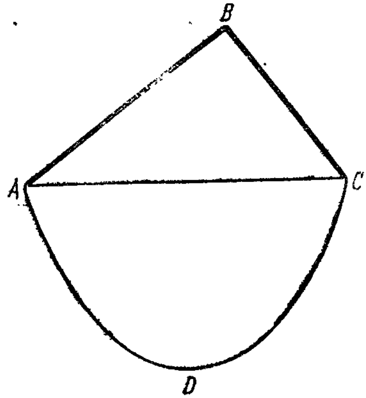

Рис. 1

Это, по всей видимости, строгое рассуждение является пробой математического вкуса. Между прочим, шутка здесь не только по поводу математики, ее соль — в самой математике.

(10) *Разбиение квадратов и кубов на конечное число квадратов и кубов, среди которых нет равных.* Разбиение квадрата возможно бесконечным множеством различных способов (простейший из них очень сложен); разбиение куба невозможно. (По этому вопросу см. Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T. The Dissection of Rectaugles into Squares // Duke Hath. J.— 1940.— V. 7.— P. 312.) Поразительное доказательство первого результата очень сложно. Авторы дают следующее элегантное доказательство второго утверждения. В разбиении квадрата наименьший квадрат не может быть у стороны разбиваемого квадрата (очевидно). Предположим теперь, что разбиение куба существует. Кубы, стоящие на нижней грани, производят разбиение этой грани и наименьший из этих кубов стоит на квадрате, лежащем целиком внутри грани. Верхняя грань этого куба окружена стенами, на ней должны стоять кубы, возьмем из них наименьший и т. д.— процесс продолжается без конца. (Если, однако, мы спросим, может ли куб быть полностью окружен бо́льшими неравными кубами, то ответ будет положительным.)

(11) *Парадокс с голосованием*[1]. Если человек не принимает участия в голосовании на том основании, что его

[1]) Здесь речь идет о выборах членов палаты общин английского парламента.— *Примеч. пер.*

шансы повлиять на результат пренебрежимо малы, то обычно его упрекают, говоря «а допустим, что все поступят так». То, что этот упрек принципиально ошибочен, является неприятной истиной, к счастью, скрытой от большинства человечества. Рассмотрим соответствующие величины в случае, когда результат голосования относительно проблематичен. Шанс, что голос данного избирателя приведет к избранию его кандидата, равен примерно 1 к 5000; есть также дальнейший шанс порядка 1 к 50, что этот результат приведет к смене правительства. Полный шанс последнего события не меньше, чем 1 к 250 000. Так как мы имеем 30 000 000 голосующих с одинаковыми возможностями, то может показаться, что здесь что-то не так; объяснение заключается в том, что когда это событие вызвано голосованием данного избирателя, то приблизительно 20 000 [1]) других избирателей этого округа находятся в таком же положении.

В 1909 г. было внесено предложение, чтобы две партии, поделившие голоса в отношении p к q, были представлены в отношении p^3 к q^3; это предложение было возобновлено журналом *Economist* в январе 1950 года, так как ряд предшествовавших выборов хорошо подтверждал это правило. То, что отношение представительства будет, скорее всего, больше отношения голосов, ясно потому, что меньшинство в 49 к 51, разбросанное по округам, не получает ни одного места в парламенте. Таким образом, представительство в парламенте — это вопрос местного распределения сил, а не результат действия какой-либо загадочной причины.

Я готов оспаривать предлагаемое правило. Прежде всего, оно может быть заменено более простым правилом: процент поданных голосов $50 \pm x$ должен давать процент представительства $50 \pm cx$, где c — константа. При $c=3$ оба правила практически совпадают до $x=6$, а затем начинают расходиться. (При 600 местах большинство в 56 : 44 дает по правилу кубов 404 места, а по «3-правилу» — 408; при 57 : 43 получается соответственно 420 и 426.) Этого, вероятно, достаточно для всех практически встречающихся случаев. (Для больших различий в числе голосов следует ожидать в каком-то месте полного исчезновения меньшинства;

[1]) Половина 70% от 60 000. [Расчет ведется на среднее число лиц, имеющих право голоса в одном округе, избирающем члена палаты общин, и на средний процент участия в выборах.— *Примеч. пер.*]

«3-правило» предсказывает это при отношении 67 : 33.) Далее, разумно предположить, что при данном распределении сторонников партий в округах увеличение процента с $50 \pm x$ для голосов до $50 \pm cx$ для представительства имеет место в пределе при $x \to 0$, и это предельное соотношение может быть распространено на значения x от 0 до 6, причем c надо, очевидно, подобрать так, чтобы получить соответствие с действительностью на дальнем конце интервала. Изменение в распределении сил партий может изменить c (это было написано до выборов в феврале 1950 г., которые показали новое соотношение сил и новое c). Число 3 привлекательно своей простотой, но оно не обязательно. Легко может оказаться, например, что $c=2{,}9$; но все же скорость света и постоянная всемирного тяготения начинаются с цифр 300 и 666.

(12) *Задача о взвешивании монет.* Эта привлекательная и «по-настоящему математическая» задача была исчерпывающим образом рассмотрена несколько лет назад, и я ограничусь только ее упоминанием (см., в частности, блестящий анализ Смита: S m i t h C. A. B. // Math. Gaz.— 1947.— V. 31.— P. 31—39.)

3. Как я уже объяснял в п. 1, существуют вещи более «математические» и с более высокими заявками, чем большинство предшествующих, но мы их пропускаем ввиду их «известности». Из топологии назовем (13) лист Мёбиуса, (14) бутылку Клейна, (15) задачу о четырех красках и (16) теорему о жордановой кривой (последние два примера являются весьма крайними случаями, в которых результат почти очевиден, тогда как доказательство очень трудно). Теоремы, доказываемые при помощи «принципа неподвижной точки», также заслуживают упоминания здесь (они рассмотрены в § 5). В книге *Что такое математика* Куранта и Роббинса [1]) (*KP* в последующих ссылках) есть очень интересная глава о топологии, к которой можно отослать заинтересованного читателя.

Упомяну также, опять-таки без обсуждения, два открытия Кантора: (17) несчетность континуума и (18) тот факт, что точки линии и точки квадрата образуют «эквивалентные

---

[1]) Русский перевод: К у р а н т Р., Р о б б и н с Г. Что такое математика.— М.: Гостехиздат, 1947. Страницы далее указаны по этому изданию.— *Примеч. пер.*

множества», т. е. что они могут быть соединены в пары, иначе говоря, что между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (*KP*, с. 134).

(19) Теорема (Шредера — Бернштейна): если множество A эквивалентно своему подмножеству A_1, то оно эквивалентно и любому «промежуточному» подмножеству, содержащему A_1. В этом случае не только формулировка результата не использует никакого сырого материала, кроме понятия множества, но существует и доказательство, которое не вводит никаких новых понятий (кроме понятий типа «все», опирающихся только на здравый смысл); в нем не упоминаются ни числа, ни последовательности, оно не апеллирует даже к понятию «конечный» (или его отрицанию — «бесконечный»). Тем не менее, доказательство оперирует с этим простейшим сырым материалом с виртуозностью, недоступной для любителя.

Сюда же относятся «рефлексивные парадоксы». Относительно первого парадокса Рассела см. *KP*, с. 137—138, два других приведены далее на с. 43 (где они фигурируют под рубрикой «шуток»!).

Теперь мы будем все чаще терять компанию любителя, и я прекращаю нумерацию.

*4. *Изопериметрическая задача*: площадь фигуры, (наибольший) диаметр которой не превосходит 1, не может превышать $\pi/4$.

Существуют различные доказательства. Нетрудно видеть, что мы можем предположить фигуру выпуклой и лежащей по одну сторону от какой-либо ее «касательной». Вводя полярные координаты, как показано на рис. 2, найдем, что

$$\text{площадь} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left\{r^2(\theta)+r^2\left(\theta-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}d\theta.$$

Подынтегральная функция есть $OP^2+OQ^2=PQ^2\leqslant 1$.

Предположим, что $a_n>0$ для всех n. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e,$$

и результат является наилучшим.*

Стержень шарнирно прикреплен к полу железнодорожного вагона и предоставлен самому себе; тогда существует малая, но отличная от нуля вероятность того, что он не упадет в течение двух недель: вероятность равна примерно $1 : 10^{10^5}$. (Поезд не предполагается «идеальным»: например, он отправляется со станции Кингс Кросс в 3.15, проходит через туннель, где он 5 минут стоит, а затем, после ряда дальнейших остановок, прибывает в Кембридж в 5.35. Я припоминаю, что мне сообщили, что гений, впервые задавший этот вопрос, не был в состоянии ответить на него.) Доказательство имеется в *KP*, с. 421—423.* Иной способ доказательства (с разумной свободой интерпретации) состоит в следующем. Рассмотрим начальное положение

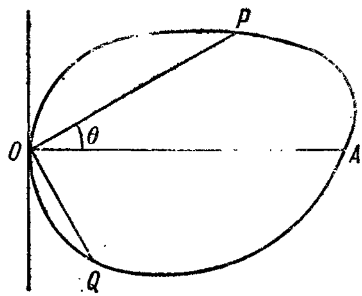

Рис. 2

стержня в относительном покое, составляющее угол θ с *левым* горизонтальным положением. Пусть S будет множеством начальных θ, при которых стержень рано или поздно упадет налево. Основной факт при очень слабых предположениях относительно обстоятельств путешествия и взаимосвязи поезда и стержня (нам нет необходимости детально устанавливать эти предположения) состоит в том, что *множество S открыто*. Пусть θ_0 — точная верхняя грань углов θ из S. Тогда θ_0 не входит в S, и из начального положения θ_0 стержень никогда не упадет налево. Если же он упадет направо, то он сделает это и для всех θ, несколько меньших θ_0; однако это неверно, так как некоторые (в действительности все) из этих θ принадлежат S. Таким образом, из положения θ_0 стержень никогда не упадет. А для некоторого, достаточно малого угла вокруг θ_0 он не упадет в течение двух недель.

Поучительно рассмотреть, почему из этого рассуждения не вытекает, что стержень, соответствующим образом установленный в начальный момент, не будет отклоняться, скажем, более чем на 0,5° от исходного положения.*

Это рассуждение моментально убеждает математика. Из всех возможных вариантов избранный мною представляется наиболее подходящим для объяснения любителю.

Допустим, что мы имеем некий набор S (вообще говоря, бесконечный) чисел, или точек прямой, «ограниченный справа»; это значит, что существуют точки P (расположенные достаточно далеко справа) такие, что ни одна из точек S не лежит справа от P (в этой формулировке намеренно учтена возможность *совпадения* точки из S с P). Любое такое P называется верхней гранью (короче, *в. г.*) множества S. Если это имеет место для P, то это (тем более) имеет место и при сдвиге P вправо. Если это имеет место для P_0, *но уже не имеет места ни при каком сдвиге* P_0 *влево*, как бы мал он ни был, то P_0 называется *точной* верхней гранью (*т. в. г.*) S. (Например, 1 является *т. в. г.* множества чисел, лежащих между 0 и 1, причем безразлично, *включается* 1 в это множество *или нет*, а также *т. в. г.* множества рациональных чисел, лежащих между 0 и 1, с включением числа 1 или без него. Если 1 не включается в эти множества, то *т. в. г.* не входит в S, если же 1 включается в них, то *т. в. г.* является элементом множества S.) После небольшого мысленного эксперимента должно стать интуитивно ясным, что *каждое множество* S, *ограниченное справа, имеет т. в. г.* Отметим, что имеются два определяющих свойства *т. в. г.*: (1) она является *в. г.*, (2) ни одна из точек, лежащих слева от нее, не является *в. г.*

До сих пор задача о стержне не входила в наши рассмотрения (читатель, дочитавший до этого места, познакомился с важным математическим понятием и важной теоремой). Каждый шаг последующего рассуждения может с успехом проверяться на частном случае стоящего поезда: здесь мы знаем ответ — стержень, в начальный момент расположенный вертикально, остается в покое.

Предположим, что в начальный момент стержень находится в состоянии относительного покоя и образует угол θ с *левой* горизонталью; назовем это «начальным положением θ». Рассмотрим множество S начальных положений θ, из которых стержень рано или поздно упадет налево. Если это происходит с ним при каком-нибудь θ, то то же самое будет *иметь место также для всех достаточно близких по обе стороны начальных положений*; любое положение θ, принадлежащее к S, находится, следовательно, внутри целого сектора значений θ, принадлежащих к S (на математическом языке: «S открыто»). Этот интуитивный факт, на котором все основано, имеет место при весьма общих условиях, уточнять которые нет необходимости.

Пусть θ_0 будет *т. в. г.* множества S. Тогда θ_0 не будет элементом S, так как в противном случае значения θ, находящиеся справа от θ_0 и достаточно близкие к нему, также принадлежали бы к S, и θ_0 не могло бы быть *в. г.* множества

S. Итак, стержень при начальном положении θ_0 не упадет налево. Но, с другой стороны, если он упадет направо, то он будет падать направо и при *всех* достаточно близких начальных положениях θ *слева* от θ_0 (принцип «открытости»), так что никакое из этих начальных положений не может быть элементом S; но это означает, что θ_0 может быть сдвинуто влево, оставаясь при этом *в. г.* S, что противоречит свойству (2) *т. в. г.* Следовательно, из исходного положения θ_0 стержень никогда не упадет. А из достаточно малого сектора вокруг θ_0 он не упадет в течение двух недель.

Аналогичный результат верен и при замене обычного шарнира сферическим (позволяющим стержню наклоняться во все стороны). Но в этом случае нам пришлось бы ссылаться уже на значительно более сложную «теорему о неподвижной точке» (*KP*, с. 335).

Типичной теоремой о неподвижной точке является следующая. Тонкая резиновая оболочка, обтягивающая сферическую поверхность, подвергается деформации без разрывов и складок. Допустим, далее, что никакая точка P при этом не перемещается в положение P', диаметрально противоположное исходному. Теорема тогда утверждает, что должна существовать по крайней мере одна «неподвижная точка» (т. е. такое P, для которого P' — «образ» P — совпадает с P).

Любитель, вероятно, согласится с тем, что это — изящное утверждение (математик назовет его «красивым»). Трудно, однако, ожидать, чтобы любитель представлял себе, насколько неожиданные приложения (например, в небесной механике) имеет эта важная сама по себе теорема. Важность *плюс* простота (имеется в виду простота *результата*) ставят теоремы о неподвижных точках на очень высокое место. Вопросами доказательств, однако, мы еще совсем не занимались. Во-первых, эти доказательства очень нелегко было найти; Пуанкаре, который впервые ввел само понятие неподвижной точки, хотя и сформулировал некоторые теоремы, отдавая себе полный отчет в их перспективной значимости, ничего *не доказал*. В то же время доказательства, *когда они были найдены*, оказались не за пределами понимания любителя (одно из них можно найти в *KP*).

Является ли теорема о сфере интуитивно очевидной? Я думаю, что ее можно сделать такой. Допустим, что не существует ни одной неподвижной точки (так начинается большинство доказательств). Тогда для каждой точки P

существует (единственная) дуга PP' большого круга сферы, соединяющая точку P с ее образом P', причем направление этой дуги (считая от P) непрерывно изменяется при перемещении точки P по сфере. (Заметим, между прочим, что здесь мы *используем* предположение об отсутствии P', диаметрально противоположных P, иначе дуга PP' не была бы единственной.) Представим себе теперь, что сфера покрыта волосами. Если волос с корнем в точке P положить вдоль PP', то нам удастся гладко причесать сферу без «особых» точек «раздела» или «встречи»: однако мы интуитивно понимаем, что это невозможно. Поэтому должна быть по крайней мере одна особая точка, не снабженная волосом. Вопреки первому впечатлению, нет необходимости в существовании *более чем одной* такой точки, которая является одновременно и точкой раздела и точкой встречи. На рис. 3 показано, как ложатся волосы около этой точки. Собака, представляющая собой, грубо говоря, топологическую сферу, устроена в этом смысле мало экономно: она имеет целую линию раздела на спине и линию встречи внизу.

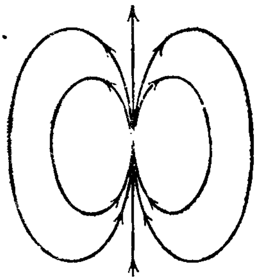

Рис. 3

Каждая выпуклая замкнутая аналитическая поверхность должна иметь по крайней мере две омбилические точки [1]) (существуют поверхности, имеющие ровно две омбилические точки, причем возможен случай, когда в этих точках $R_1=R_2=\infty$). Эта теорема обладает замечательной особенностью: единственное известное ее доказательство занимает 180 страниц.

5. Свободный конец нерастяжимой пленки, скатанной в ролик, горизонтально прикреплен к наклонной плоскости и разматывается под действием силы тяжести (рис. 4). Линия соприкосновения всегда имеет скорость нуль, и кинетическая энергия в процессе движения не уничтожается; когда же пленка полностью размоталась, произошла потеря потенциальной энергии, кинетическая же энергия стала равной нулю. Куда девалась энергия?

---

[1]) Омбилической называется точка, вблизи которой поверхность приближенно сферическая (или плоская): два главных «радиуса кривизны» равны между собой.

Аналогичное явление представляет собой хлопо́к кнута. В «идеальном» кнуте движение кончика завершается воздействием конечной силы на массу, равную нулю, что приводит к бесконечной скорости. Практически же эта скорость превышает скорость звука, и вследствие этого возникает хлопо́к. Это, быть может, ближайшая реализация бесконечности в повседневной жизни.

Некоторая масса прикреплена к невесомому обручу, который затем катится, оставаясь в вертикальной плоско-

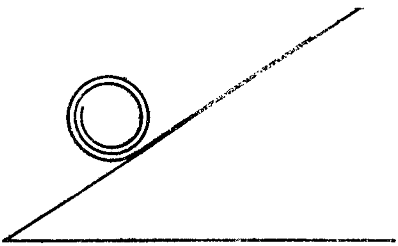

Рис. 4

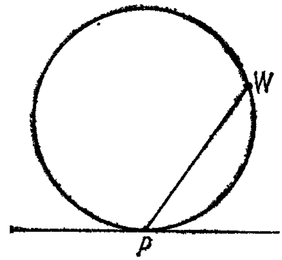

Рис. 5

сти, начиная с положения, близкого к положению неустойчивого равновесия. Что произойдет, и можно ли это интуитивно предвидеть?

Обруч подскакивает, когда радиус-вектор массы становится горизонтальным. Я не нахожу отрыв обруча от грунта непосредственно очевидным; можно, однако, «усмотреть», что движение эквивалентно гладкому скольжению массы под действием силы тяжести по циклоиде, которую масса описывает, и тогда уже интуитивно ясно, что рано или поздно масса должна покинуть эту траекторию. (Но указанное «усмотрение» требует понимания того, что мгновенным центром вращения W является P (рис. 5).)

Г. А. Уэбб ежегодно ставит этот вопрос своим студентам технических факультетов, но я не нашел его в книгах.

Практически обруч сначала скользит.

Предположим, что по некоторому маршруту автобусы ходят приблизительно с десятиминутными интервалами. Если бы каждый интервал составлял в точности 10 минут, то среднее время ожидания случайного пассажира, подошедшего к остановке, было бы равно 5 минутам. Если автобусы не вполне точны, то среднее время ожидания больше; существует такое расписание движения, при котором среднее время ожидания равно 10 минутам и, более того, при котором среднее время от ухода одного автобуса до прибытия следующего также равно 10 минутам. Существует другое расписание, при котором оба времени становятся *бесконечными* (долгие ожидания доминируют несмотря на то, что они редки).

Перехожу к следующим двум задачам, похожим друг на друга в том отношении, что первая догадка в каждой из них почти наверное ошибочна (вследствие чего они опасны в недобросовестных руках). Первой могут быть приданы различные формы (одна из таких форм — письма в несоответствующих конвертах); более поздняя форма такая: имеются две хорошо перетасованные колоды карт; в каждой из них открывается верхняя карта, затем открывается пара следующих карт и т. д.; откроются ли когда-либо одновременно одинаковые карты (например, семерки пик)? Результат достаточно широко известен, но большинство из тех, кто его не знает, согласится на большие ставки против этого; в действительности шансы «за» приблизительно равны 17 : 10 (фактически $(e-1):1$).

Во второй задаче мы имеем группу в 23 человека; какова вероятность того, что какие-либо 2 из них родились в один и тот же день (год рождения во внимание не принимается)? Большинство считает, что эта вероятность очень невелика, в действительности же она равна примерно 1/2.

Задача Какейя. Найти область наименьшей площади, в которой отрезок единичной длины может непрерывно повернуться на 360° (минимизировать заметенную площадь). Долгое время считалось, что ответ дается рис. 6 и что, следовательно, искомая площадь равна $\pi/8$. В 1930 г., однако, А. С. Безикович (Besicovitch A. S. // Math. Z.— 1928.— V. 27.— S. 312—320) показал, что ответом является область нулевой площади (не достижимая): как бы мало ни было данное число $\varepsilon>0$, заметенную площадь можно сделать меньше ε. Когда ε стремится к 0, движения отрезка становятся все более и более сложными и включают путешествия в бесконечность во всех направлениях.

Задача Крама. Каково наибольшее число выпуклых многогранников, каждые 2 из которых имеют общую грань (или часть грани)? Для аналогичной задачи в двух измерениях ответ легко находится: 4; для трех измерений естественно ожидать, что ответом будет 10 или 12. Ответ был найден в 1905 г. Титце и переоткрыт Безиковичем в 1947 г. (J. London Math. Sec.— 1947.— V. 22 — P. 285—287). В этой задаче Безикович компенсировал свой предыдущий результат: раньше он нечто уничтожил, а теперь достиг противоположного — ответом является бесконечность.

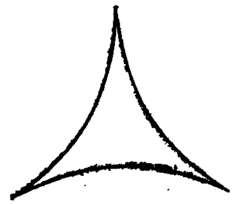

Рис. 6

В одном разговоре недавно возник вопрос: может ли работа в 2 строки быть признана диссертационной? Я давно уже знаю ответ: в математике — да.

*Бесспорным примером является проективное определение длины, данное Кэли, если исходить из разумного понимания слов «2 строчки». Для теоремы Пикара можно придерживаться буквального понимания: одна строка для утверждения, другая — для доказательства.

(Теорема.)

Целая функция, не принимающая значений 0 *и* 1, *постоянна.*

(Доказательство.)

exp $\{i\Omega(f(z))\}$ — ограниченная целая функция [$\tau=\Omega(w)$ — функция, обратная к $w=k^2(\tau)$].

Последняя скобка нужна только потому, что обозначение функции Ω в отличие от обратной ей функции $k^2(\tau)$ не является общепринятым.*

В случае Кэли важность идеи ясна с первого взгляда. В случае Пикара ситуация достаточно ясна сегодня (в связи с теоремой Пикара возникли бесчисленные работы). Но я могу представить себе рецензию оппонента: «Исключительно удачная и весьма оригинальная идея. Но сколь бы она ни была блестяща, она представляется скорее забавной, чем важной; получен изолированный результат, который ни с чем не связан и, скорее всего, никуда не ведет».

*Евклидово доказательство бесконечности множества простых чисел может быть для профессионала сжато в одну строчку:

«Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ простые, то $1+p_1p_2\ldots p_n$ не делится ни на одно p_m».

Доказательство Г. Бора того, что «$\zeta(s)$ неограничена для $\sigma>1$ для больших t» также может быть сжато в одну строку:

$$\text{«}\ \varlimsup_{\sigma>1,\ t\to\infty} \operatorname{Re}\zeta(\sigma+it) \geqslant \varlimsup_{\sigma\to 1+0} \lim_{t\to\infty} \sum n^{-\sigma}\cos(n\ln t) = \varlimsup_{\sigma} \sum n^{-\sigma} = \infty\text{»}$$ [1]).

Моим последним примером является одна сложная теорема высшего анализа. Все же любой математик, признающий важность результата, должен попытаться, не останавливаясь на деталях, усмотреть основную идею ее доказательства [2]): эта смелая идея принесла блестящие успехи. Вот эта важная теорема (М. Рисса).

При $\alpha,\ \beta>0$ *обозначим* $M_{\alpha,\beta}$ *точную верхнюю грань* (*т. в. г.*) *выражения*

$$|L(x,\ y)| = \left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu\right|$$

с постоянными комплексными $a_{\mu\nu}$ *и переменными комплексными* x_μ, y_ν, *подчиненными условиям*

$$\sum |x_\mu|^{1/\alpha} \leqslant 1, \qquad \sum |y_\nu|^{1/\beta} \leqslant 1.$$

Тогда $\ln M_{\alpha,\beta}$ *является выпуклой функцией* α, β (*в квадранте* $\alpha>0$, $\beta>0$).

Выпуклая функция одной переменной имеет график, для которого (в широком смысле) «дуга лежит под хордой». Выпуклая функция нескольких переменных α, β,... по определению должна быть выпуклой функцией σ на любой прямой l: $\alpha=\alpha_0+\lambda_1\sigma$, $\beta=\beta_0+\lambda_2\sigma$,... Для целей приложений теорема формулируется в несколько более общей форме, имеющей иной внешний вид и очень трудно доказуемой, которую для краткости обозначим буквой T; приведенная формулировка составляет ее основу. В T область значений α и β расширяется путем включения нуля, и тогда теорема позволяет «интерполировать» между двумя известными теоремами, что дает сильный результат. Так, неравенство Юнга — Хаусдорфа

$$\left(\sum |c_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\, d\theta\right)^{1/p}$$

---

[1]) Предпоследний шаг вынуждает читателя заключить, что здесь используется «теорема Дирихле», и применить соответствующее ее обобщение. [См., например, Титчмарш Е. К. Дзета-функция Римана.— М.: ИЛ, 1947.— С. 14—15.— *Примеч. пер.*]

[2]) Оно приведено ниже, лемму читатель-математик может пропустить.

для коэффициентов Фурье c_n функции $f(\theta)$ из L^p справедливо для $1 \leqslant p \leqslant 2$ (для $p=1$ при соответствующей интерпретации [1])). T позволяет нам утверждать, что справедливо общее неравенство, если оно имеет место для $p=1$ и $p=2$ [2]). При $p=2$ оно сводится к неравенству Бесселя, а при $p=1$ (настолько сильна формулировка T) нам достаточно его знать лишь в приведенной в сноске тривиальной форме. Таким образом, T дает глубокий результат «из ничего»; мы испытываем нечто похожее на легкое опьянение первых дней метода проектирования конических сечений в окружности.

До последнего времени не существовало доказательства $M_{\alpha,\beta}$-теоремы, которое не было бы действительно очень трудным. Приводимое мной доказательство принадлежит Торину (T h o r i n G. Convexity theorems // Communications du séminaire mathématique de l'Université de Lund.— V. 9).

Мы применяем три непосредственно очевидных принципа:

(a) *т. в. г.* семейства (возможно, бесконечного) выпуклых функций выпукла,

(b) предел семейства выпуклых функций является выпуклой функцией,

(c) находя *т. в. г.* чего-либо при ряде независимых условий, наложенных на переменные, мы можем эти условия принимать во внимание в любом порядке (или одновременно); например,

$$\underset{0 \leqslant x,\, y \leqslant 1}{\text{т. в. г.}} |f(x, y)| = \underset{0 \leqslant x \leqslant 1}{\text{т. в. г.}} \left(\underset{0 \leqslant y \leqslant 1}{\text{т. в. г.}} |f(x, y)|\right).$$

Таким образом, если мы можем представить $M_{\alpha,\beta}$ в виде

$$\text{т. в. г.} (\text{т. в. г.} (\ldots (\text{т. в. г.} |L(x, y)|) \ldots))$$

так, что «самая внутренняя» *т. в. г.* (при фиксированных значениях всех переменных во внешних *т. в. г.*) выпукла относительно α и β, то из (a) и (c) будет вытекать, что наша теорема верна. Торин использует это, беря самую внутреннюю *т. в. г. по переменной, которая вообще там не фигурирует*!

---

[1]) Именно: «*т. в. г.* $|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int |f| \, d\theta$».

[2]) Соответствующая прямая l соединяет точки (1/2, 1/2) и (1, 0), $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{p-1}{p}$.

Начнем с леммы.

Лемма. *Предположим, что $b_1, b_2, \ldots, b_N$ действительны и что $f(s)$ является конечной суммой $\sum a_r e^{b_r s}$ (или, в более общем виде, целой функцией аргументов $e^{b_1 s}, \ldots, e^{b_N s}$), где $s=\sigma+it$. Пусть*

$$m(\sigma) = m.\,в.\,г.\,|f(s)|.$$

Тогда $\ln\ m(\sigma)$ — *выпуклая функция аргумента* σ.

По принципу (b) достаточно доказать это утверждение для случая рациональных $b=\beta'/\beta$. Тогда, если D есть $Н.\,О.\,К.$ β, f является целой функцией $z=e^{s/D}$. «Теорема о трех окружностях» Адамара, утверждающая, что $\ln M(r)$ является выпуклой функцией $\ln r$, дает теперь все, что нам нужно.

Переходим к нашей теореме. Мы должны доказать, что $\ln M_{\alpha,\beta}$ является выпуклой функцией на любом интервале прямой l: $\alpha=\alpha_0+\lambda_1\sigma$, $\beta=\beta_0+\lambda_2\sigma$, содержащемся в квадранте $\alpha>0$, $\beta>0$. Для таких α и β мы можем положить

$$x_\mu = \xi_\mu^\alpha e^{i\varphi_\mu}, \qquad y_\nu = \eta_\nu^\beta e^{i\psi_\nu}, \qquad \xi,\ \eta \geqslant 0,$$

и затем, варьируя (действительные) φ и ψ и (действительные) ξ и η, подчиненные условиям

$$\sum \xi \leqslant 1, \qquad \sum \eta \leqslant 1, \qquad \xi,\ \eta \geqslant 0\text{[1]},$$

получить, что

$$M_{\alpha,\beta} = \underset{(\varphi,\,\psi,\,\xi,\,\eta)}{m.\,в.\,г.} \left(\left|\sum\sum a_{\mu\nu}\xi_\mu^{\alpha_0+\lambda_1\sigma}\eta_\nu^{\beta_0+\lambda_2\sigma}e^{i(\varphi_\mu+\psi_\nu)}\right|\right).$$

Если мы здесь заменим σ на $s=\sigma+it$ (с произвольным действительным t), то т. в. г. не изменится (экстремальные $\varphi+\psi$ будут только «сдвинуты»). *Мы теперь можем добавить операцию «т. в. г. относительно t». По принципу (c) мы можем сделать ее самой внутренней; в результате, переходя к логарифмам, находим*

$$\ln M_{\alpha,\beta} = \underset{(\varphi,\,\psi,\,\xi,\,\eta)}{m.\,в.\,г.}\ \ln m(\sigma,\ \varphi,\ \psi,\ \xi,\ \eta),$$

где

$$m(\sigma) = \underset{(t)}{m.\,в.\,г.}\ |f(s)|,$$

$$f(s) = f(s;\ \varphi,\ \psi,\ \xi,\ \eta) = \sum\sum a\xi^{\alpha_0+\lambda_1 s}\eta^{\beta_0+\lambda_2 s}e^{i(\varphi+\psi)}.$$

---

[1]) Эти условия не зависят от α и β.

Для интересующего нас участка прямой l (где показатели положительны) и для фиксированных φ, ψ, ξ, η мы можем опустить в сумме f любые члены, в которых ξ или η равно 0; *измененное таким образом f имеет вид f из леммы*, $\ln m(\sigma)$ *является, следовательно, выпуклой функцией для всех σ и, в частности, для интересующего нас участка прямой по принципу* (*a*). $\ln M_{\alpha, \beta}$ *является, таким образом, выпуклой функцией* σ.*

6. *Шифры*. Многие лица, которые должны были бы лучше понимать, о чем идет речь, все еще считают, что любой шифр может быть разгадан. Я приведу достаточный пример, не очень заботясь о степени его осуществимости. Допустим, что мы имеем пятизначное число N. В семизначной таблице логарифмов, начиная со строки N, возьмем последовательность пар последних знаков d_1d_1', d_2d_2', ... Возьмем остаток от деления двузначного числа d_nd_n' на 26. Это дает «сдвиг» s_n; правило кодирования состоит в сдвиге [1] первой буквы сообщения на s_1, второй — на s_2, и т. д.

Совершенно очевидно, что отдельное сообщение не может быть расшифровано, даже если известна система кодирования и тайной является только число N (в действительности втройне случайный характер s_n излишне сложен). Один и тот же шифр, применяющийся в ряде сообщений, мог бы быть разгадан, но лишь при неизменном N. Число N можно сделать зависящим от даты, которая сообщается открыто, без зашифровывания; ключ может, например, состоять в том, что N записывается первыми 5 знаками «тангенса» даты (читаемой в градусах, минутах и секундах: 28°12′52″ вместо 28-го декабря 1952 г.). Правило можно держать в памяти, чтобы не делать записей, которые могут быть похищены или скопированы. Если кто-либо думает, что существует возможность раскрытия и этого шифра, то он может заменить 28 на 21 и использовать дату, на неделю более раннюю, чем сообщаемая.

---

[1]) Сдвиг $s = 2$ переводит «*k*» в «*m*», «*z*» — в «*b*». [Английский алфавит имеет 26 букв.— *Примеч. пер.*]

Из экзаменационных билетов по математике

7. Всегда приятно наблюдать, как другие совершают глупости, которые когда-то делал сам. Следующий вопрос был включен в один из билетов в 1924 г.

(*a*) [1]) Эллипсоид, окруженный идеальной однородной жидкостью, начинает двигаться в произвольном направлении со скоростью V. Показать, что если внешняя граница жидкости — неподвижный софокусный эллипсоид, то количество движения, приобретаемое жидкостью, равно $-MV$, где M — масса жидкости, вытесненной эллипсоидом.

Позже этот результат был распространен на другие пары поверхностей, в частности на две соосные поверхности вращения.

Каковы бы ни были две поверхности, о которых идет речь в задаче, мы всегда можем представить себе внутреннюю заполненной той же жидкостью; тогда центр масс будет неподвижен.

Опубликованные сборники экзаменационных вопросов содержат (и не случайно) не те вопросы, которые были фактически заданы, а те, которые должны были бы быть заданы; редкий год обходится без поправок. Однажды один из вопросов был так безнадежно неверен, что мы заменили его безобидным пустяком.

В прошлом в экзаменационных билетах по второй части экзамена были задачи «со звездочками» (современный стиль), указывавшими на их легкость и на то, что очки, полученные за их решение, не засчитываются при распределении первых мест. Был случай, когда одна задача со звездочкой была предложена, отвергнута, вновь предложена и вновь отвергнута как слишком трудная для включения ее даже без звездочки. В конце концов она вошла в билеты по третьей, наиболее трудной, части экзамена.

[1]) Пусть любитель смело читает дальше.

Однажды, присутствуя на письменных экзаменах, я заметил, что розданные таблицы логарифмов не содержат значений e и $\lg e = 0{,}4343$, тогда как в билете требовалось доказать, что нечто имеет численное значение 4,343 (в действительности речь шла о значении $10 \lg e$). Должен ли был я сообщить недостающую информацию, учитывая, что такое сообщение было в данном случае явно наводящим? После некоторого колебания я все же сделал соответствующее объявление, но по недосмотру совершил несправедливость, забыв передать его в другой зал, где писали работу студентки.

8. Я унаследовал старые «Экзаменационные книги» Роуза Болла, относящиеся к началу 80-х годов прошлого столетия. Кое-что в них может представить интерес. В январе на 4 курсах проводился экзамен, состоявший из 18 трехчасовых работ. В один из этих годов максимальное возможное число очков составляло 33541; первое место было получено за 16368 очков, второе — за 13188, последнее призовое место — за 3123 очка. Последний в списке (за номером девяносто с чем-то) получил 247 очков. Первый вопрос был оценен в 21 очко, во второй работе (по решению задач) был вопрос в 500 ($>2 \cdot 247$) очков.

Будучи упорным противником старой экзаменационной системы, я был несколько раздосадован, когда обнаружил, что в ней есть много разумного. Для меня было неожиданностью, что студент, занимавшийся только «зубрежкой» (в почти современном объеме), не мог подняться выше 23-го места, хотя экзаменаторы 80-х гг. и поддавались иногда соблазну ставить вопросы, требовавшие лишь непосредственного приложения книжных знаний. Две работы по решению задач, за выполнение которых можно было получить большое число очков, были для такого студента очень серьезным препятствием; если ему удавалось получить по ним, скажем, четверть того числа очков, которое присуждалось за их лучшее решение, то он уже продвигался примерно до 20-го места. (Около 1905 г. соответствующие цифры были такими: 14-е призовое место из 26 за чисто книжные знания, причем в случае получения 7 % очков за работы по решению задач студент продвигался до 11-го места, опережая при этом мистера Д. М. Кейнса [1]).)

[1]) Известный английский буржуазный экономист.— *Примеч. пер.*

9. Рассматривая задачи, в особенности повышенной трудности, с точки зрения требуемой для их решения виртуозности (в поисках задач с каким-либо подвохом), я опять-таки был разочарован тем, что их оказалось немного. Однако две задачи остались в моей памяти.

(*b*) Сфера, вращающаяся с трением на верхней образующей горизонтального цилиндра, находится в равновесии; легким толчком ее выводят из состояния равновесия; доказать, что точка касания сферы и цилиндра начнет описывать на цилиндре винтовую линию.

*Развивая эту идею, в следующем году (утренний экзамен 18 января 1881 г.) экзаменатор предложил доказать следующее утверждение (привожу его в моей формулировке):

(*c*) Если распределение масс в сфере, вращающейся на образующей горизонтального цилиндра, обладает центральной симметрией, т. е. плотность зависит только от расстояния до центра, то траекторией точки касания цилиндра и выведенной из равновесия сферы является винтовая линия на цилиндре до самой точки отрыва. [200 очков; вторая часть вопроса, требовавшая некоторых дальнейших уточнений, была оценена дополнительно в 105 очков.]*

Относительно задачи (*b*) возникает вопрос, нельзя ли ее так же «убить», как задачу (*a*). Выйдя на прогулку вскоре после ознакомления с задачами (*b*) и (*c*), я присел отдохнуть на бревно. В результате некоторого процесса ассоциации в моей голове возникла задача (*b*) и блеснула следующая мысль. Утверждение «точка касания начнет описывать винтовую линию» означает, что кривизна и кручение стационарны в наивысшей точке P; продолжим траекторию назад; так как она симметрична относительно точки P, то кривизна и кручение должны быть стационарны в точке P. Теперь я спрашиваю: является ли это доказательством или, быть может, основой возможного доказательства, сколько очков я получил бы за него, и как скоро вы дадите ответ на эти вопросы?

*10. Перейдем к (*c*). Я не считаю, что эта задача[1]) содержит подвох: ее решение требует лишь применения об-

[1]) В оригинальной формулировке закон распределения масс был задан, причем требовалось вычислить момент инерции и некоторые другие детали.

ших теорем относительно движущейся системы координат, причем одно любопытное совпадение приводит к тому, что окончательное уравнение решается; все это легко усмотреть, если ответ дан. Этот чрезвычайно изящный результат, по-видимому, недостаточно широко известен.

Возьмем движущуюся систему координат с началом в центре сферы с осью Oy по нормали в точке касания и осью Oz параллельно образующей цилиндра. Пусть ось Oy образует с вертикалью угол θ. Исключая силы реакции в точке касания (см. Lamb, Higher Mechanics, с. 165—166), мы получим

$$(I+Ma^2)b\ddot{\theta}=Ma^2g\sin\theta,\qquad (I+Ma^2)\dot{w}=Ia\dot{\theta}q,$$
$$a\dot{q}+\dot{w}\dot{\theta}=0,$$

или, полагая $a=1$,

$$\lambda^2\ddot{\theta}=\sin\theta,\qquad \mu^2\dot{w}=\dot{\theta}q,\qquad \dot{q}=-w\dot{\theta}.$$

Второе и третье уравнения дают

$$q=n\cos\left(\frac{\theta}{\mu}\right),\qquad \mu w=n\sin\left(\frac{\theta}{\mu}\right),$$

где $n=q|_{\theta=0}$. Если $\mu=2$, то комбинация этих результатов с первым уравнением приводит к $w=\frac{1}{4}n\lambda\dot{\theta}$ и, следовательно, к $z=\frac{1}{4}n\lambda\theta$.*

Предположим, что сфера начинает катиться внутри вертикального цилиндра (сила тяжести учитывается, но диссипативные силы отсутствуют); что произойдет? Единственной разумной догадкой является спиральный спуск возрастающей крутизны; в действительности же сфера будет двигаться вверх и вниз между двумя фиксированными горизонтальными плоскостями. Игрокам в гольф не так уж не везет, как они думают.

Около 1911 г. экзаменатор A предложил вопрос: E и W — партнеры в бридже; допустим, что E не имеет на руках туза, но получил информацию, что у W есть туз; какова тогда вероятность p того, что у W по крайней мере 2 туза? Коллега B, проверяя ответ A, получил другое значение вероятности. Выяснилось, что B вычислил вероятность q того, что W имеет по крайней мере два туза в предположении, что у W туз пик. Вероятности p и q различны, и $q>p$.

Предполагая все время, что у E на руках нет ни одного туза, заметим, что $1-q$ есть вероятность того, что W имеет одного только туза пик, деленная на вероятность того, что W имеет по крайней мере туза пик: в то же время $1-p$ есть вероятность того, что W имеет только одного туза, деленная на вероятность того, что W имеет по крайней мере одного туза. Второй числитель в 4 раза больше первого. Следовательно,

$$\frac{1-p}{1-q}=\frac{\begin{pmatrix}\text{вероятность по крайней}\\ \text{мере туза пик}\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}\text{вероятность по край-}\\ \text{ней мере туза червей}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{вероятность по крайней мере}\\ \text{одного туза}\end{pmatrix}}.$$

Так как события, фигурирующие в числителе, не исключают друг друга, то это отношение больше 1.

Кажущаяся очевидность ошибочного заключения «$p=q$» возникает из рассуждения: «W имеет туза; мы можем предположить, что это туз пик». Но этого «это» не существует; если W имеет более одного туза, то тот, кто дает информацию игроку E, должен *выбирать* одного из тузов, чтобы его можно было принять за «это». Ситуация становится яснее, когда играющему сдают 2 карты из колоды, состоящей из 3 карт: туза пик, туза червей и двойки бубен. Здесь мы уже во всяком случае знаем, что один туз должен быть на руках, и вероятность двух тузов равна 1/3. Если же мы знаем, что на руках есть туз пик, то вероятность двух тузов равна 1/2.

Недоразумения, неосознанные предпосылки, вопиющие ошибки, опечатки и т. п.

11. Я однажды возражал против неправильного употребления моим учеником фразы «предположим для простоты». Она должна означать, что автор может сделать то, что требуется, и без упрощения, но щадит читателя; оказалось же, что мой ученик должен был упростить задачу, чтобы он сам мог ее решить.

Конечно, почти невозможно полностью избежать неосознанных предпосылок. Я помню одно место из книги Ламба *Higher Mechanics*: «Ox и Oy как в двух измерениях, Oz вертикальна». Для меня это совершенно неверно; Oz горизонтальна (я работаю всегда, откинувшись в кресле и подняв ноги).

Как читатель изобразил бы замкнутую кривую (например, окружность), лежащую целиком по одну сторону от одной из своих касательных? Существует 4 школы; я принадлежу к той, для которой кривая лежит справа от вертикальной касательной; однажды мне пришлось описывать эту конфигурацию без чертежа, но то, что я говорил, оказалось непонятным для представителей 3 остальных школ.

Как не надо. Один блестящий, но небрежный математик однажды сформулировал теорему в двух частях и добавил: «часть 2, принадлежащая Харди и Литлвуду, тривиальна». Тривиальная часть 2 должна была фигурировать в формулировке «для полноты», Харди и Литлвуд включили ее по этой же причине. Автор чересчур скрупулезно старался не нарушить правила, согласно которому ничего из уже опубликованного не должно приводиться без соответствующей ссылки.

При изложении математического рассуждения мастерство заключается в умении дать образованному читателю возможность сразу, не заботясь о деталях, схватить основную идею; последовательные дозы должны быть такими, чтобы их можно было глотать «с ходу»; в случае неудачи, или если бы читатель захотел что-либо проверить, перед ним должна стоять четко ограниченная маленькая задача (например, проверить тождество; две пропущенные тривиальности могут в совокупности образовать непреодолимое препятствие). Неопытный автор не предоставляет своему читателю такой возможности; даже если у читателя и возникает первое смутное представление, он не успевает осознать существа дела, пробираясь через лес символов, в котором даже самый мелкий индекс не может быть опущен. Ниже я привожу пример (из анализа, где встречаются наибольшие трудности). Этот пример далеко не экстремальный, он может встретиться в любой рукописи до того, как ее просмотрит какой-либо заслуживающий сочувствия редактор. Кроме того, этот пример обрисовывает преступление в слишком мягком свете, так как основную идею доказательства здесь очень трудно затушевать. Но не так-то легко заинтересовать читателя скучным текстом, и за отсутствием в настоящий момент образца натурального продукта, это — лучшее, что я могу предложить.

*Знаменитая теорема Вейерштрасса утверждает, что любая непрерывная в прямоугольнике R функция $f\ (x_1, x_2)$ может быть равномерно приближена последовательностью многочленов от x_1 и x_2. Теорема справедлива и в n измерениях; начинающий автор даст приведенное ниже доказательство, и к тому же еще в n измерениях, вводя обозначения $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Доказательство является смелой комбинацией идей, и состоит из двух частей; вторая часть не может быть сильно испорчена, и я даю ее в конце. Вот изложение первой части доказательства начинающим автором. Несколькими удачными ухудшениями я обязан д-ру Флетту. Для дополнительного реализма я оставляю неисправленными несколько случайных опечаток.

Пусть $c>0$, и функция $f_1(x_1, x_2)$, непрерывная в прямоугольнике $(-a \leqslant x_1 \leqslant a,\ -b \leqslant x_2 \leqslant b)$, определена следующим образом:

$$
f_1(x_1, x_2) =
$$

$$
= \begin{cases}
f(-a, b)(-c-a \leqslant x_1 \leqslant -a, & b \leqslant x_2 \leqslant b+c), \\
f(x_1, b)(-a \leqslant x_1 \leqslant a, & b \leqslant x_2 \leqslant b+c), \\
f(a, b)(-a \leqslant x_1 \leqslant a+c, & b \leqslant x_2 \leqslant b+c), \\
f(-a, x_2)(-a-c \leqslant x_1 \leqslant -a, & -b \leqslant x_2 \leqslant b), \\
f(x_1, x_2)(-a \leqslant x_1 \leqslant a, & -b \leqslant x_2 \leqslant b), \\
f(a, x_2)(a \leqslant x_1 \leqslant a+c, & -b \leqslant x_2 \leqslant b), \\
f(a, -b)(-a-c \leqslant x_1 \leqslant a, & -b-c \leqslant x_2 \leqslant -b), \\
f(x_1, -b)(-a \leqslant x_1 \leqslant a, & -b-c \leqslant x_2 \leqslant -b), \\
f(-a, -b)(-a-c \leqslant x_1 \leqslant -a, & -b-c \leqslant x_2 \leqslant -b).
\end{cases}
$$

Легко видеть, что $f_1(x_1, x_2)$ непрерывна в прямоугольнике
$$(-a-c \leqslant x_1 \leqslant a+c, \quad -b-c \leqslant x_2 \leqslant b+c).$$

Для точек (x_1, x_2) из R положим

$$\varphi_n(x_1, x_2) =$$
$$= \frac{n}{\pi} \int_{-a-c}^{a+c} dx_1' \int_{-b-c}^{b+c} f_1(x_1', y_1') \exp[-n\{(x_1'-x_1)^2 + (y_1'-y_1)^2\}]\, dx_2'.$$

Покажем [это и будет первой частью доказательства], что
$$\varphi_n(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) \text{ при } n \to \infty \tag{1}$$
равномерно относительно (x_1, x_2) из R.

Существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что
$$|f_1(x_1'', x_2'') - f_1(x_1', x_2')| < \varepsilon$$
при условии, что (x_1', x_2') и (x_1'', x_2'') принадлежат прямоугольнику
$$(-a-c \leqslant x_1' \leqslant a+c, \quad -b-c \leqslant x_2' \leqslant b+c)$$
и удовлетворяют неравенствам
$$|x_1'' - x_1'| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |x_2'' - x_2'| < \delta(\varepsilon).$$
Пусть
$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \max([c^3]+1, \ [\delta^{-3}(\varepsilon)]+1)$$
и $n > n_0$. Тогда
$$-a-c < x_1 - n^{-1/3} < x_1 + n^{-1/3} < a+c,$$
$$-b-c < x_2 - n^{-1/3} < x_2 + n^{-1/3} < b+c,$$
и мы имеем
$$\varphi_n(x_1, x_2) = \frac{n}{\pi}\Bigg[\int_{-a+c}^{a+c} dx_1' \int_{x_2+n^{1/3}}^{b+c} dx_2' +$$
$$+ \int_{-a-c}^{a+c} dx_1' \int_{x_2-n^{-1/3}}^{x_2+n^{-1/3}} dx_2' + \int_{x_1-n^{-1/3}}^{x_1+n^{-1/3}} dx_1' \int_{x_2-n^{-1/3}}^{x_2+n^{-1/3}} dx_2' +$$
$$+ \int_{x_1+n^{-1/3}}^{a+c} dx_1' \int_{x_2-n^{-1/3}}^{x_2+n^{-1/3}} dx_2' + \int_{-a-c}^{a+c} dx_1' \int_{-b-c}^{x_2-n^{-1/3}} dx\cdot\Bigg] \times$$
$$\times f_1(x_1', x_2') \exp[-n\{(x_1'-n_1)^2 + (x_2'-x_2)^2\}] =$$
$$= T_1 + T_2 + \ldots + T_5. \tag{2}$$

В T_1 мы имеем

$$|f_1(x_1', x_2')| < K, \quad \exp[\ldots] \leqslant \exp(-n \cdot n^{-2/3})$$

и, следовательно,

$$|T_1| < \varepsilon\,(n > n_1(\varepsilon)). \tag{3}$$

Аналогично [1])

$$|T_2| < \varepsilon, \quad |T_4| < \varepsilon, \quad |T_5| < \varepsilon\,(n > n_2(\varepsilon)). \tag{4}$$

В T_3 положим $x_1' = x_1 + x_1''$, $x_2' = x_2 + x_2''$. Так как $|x_1''| < n^{-1/3}$, $|x_2''| < n^{-1/3}$, то в рассматриваемом интервале мы имеем

$$|f_1(x_1 + x_1'', x_2 + x_2'') - f_1(x_1, x_2)| < \varepsilon\,(n > \delta^{-3}(\varepsilon)). \tag{5}$$

Но в T_3 $f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)$. Поэтому

$$T_3 = T_{3,1} + T_{3,2}, \tag{6}$$

где

$$T_{3,1} = \frac{n}{\pi} f(x_1, x_2) \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} dx_1'' \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} \exp[-n(x_1''^2 + x_2''^2)]\,dx_2'', \tag{7}$$

$$T_{3,2} = \frac{n}{\pi} \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} dx_1'' \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} \varepsilon\{f_1(x_1 + x_1'', x_2 + x_2'') - f_1(x_1, x_2)\} \times$$
$$\times \exp[-n(x_1''^2 + x_2''^2)]\,dx_2''. \tag{8}$$

Для $n > \max(n_0, n_1, n_2)$ мы имеем

$$|T_{3,2}| \leqslant \frac{n}{\pi} \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} dx_1'' \int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} \varepsilon \exp[-n(x_1''^2 + x_2''^2)]\,dx_2'' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{\pi} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx_1'' \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-n(x_1''^2 + x_2''^2)]\,dx_2'' = \varepsilon. \tag{9}$$

Двойной интеграл в (7) равен

$$\left(\int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} e^{-nu^2}\,du \right)^2. \tag{10}$$

---

[1]) Открою в этом месте, что в T_2 есть опечатка:

вместо $\int\limits_{-a-c}^{a+c}$ должно быть $\int\limits_{-a-c}^{x_1 - n^{-1/3}}$.

Математический текст такого стиля (вдохновленный, несомненно, дьяволом) не может не содержать опечаток.

Но

$$\int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} e^{-nu^2}\,du = 2\int_0^{n^{-1/3}} e^{-nu^2}\,du =$$

$$=2\int_0^{\infty} e^{-nu^2}\,du - 2\int_{n^{-1/3}}^{\infty} e^{-nu^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{n}} - 2\int_0^{\infty} e^{-n(n^{-1/3}+t)^2}\,dt =$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(e^{-n^{1/3}}\int_0^{\infty} e^{-2n^{2/3}t}\,dt\right) = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(1+O\left(n^{-1/3}e^{-n^{1/3}}\right)\right).$$

Поэтому легко видеть, что

$$\left|\left(\int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}} e^{nu^2}\,du\right)^2 - \frac{\pi}{n}\right| = \left|\frac{\pi}{n}\{1+O(n^{-1/3}e^{-n^{1/3}})\} - \frac{\pi}{n}\right| < \varepsilon$$

$$(n > n_2(\varepsilon)).$$

Из (10) и (7) теперь следует, что

$$|T_{3,1} - f(x_1,\ x_2)| < K\varepsilon\,(n > \max(n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3)). \qquad (11)$$

Из (2)—(11) же следует, что

$$|\varphi_n(x_1,\ x_2) - f(x_1,\ x_2)| < K\varepsilon\,(n > \max(n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3)),$$

и (1) доказано.

«Цивилизованное» доказательство выглядит так.

Распространим определение $f(x,\ y)$ на бо́льший прямоугольник R_+; пусть, например, на AB (рис. 7) f равно $f(A)$, а в заштрихованном квадрате $f=f(C)$. Новая функция f непрерывна в прямоугольнике R_+.

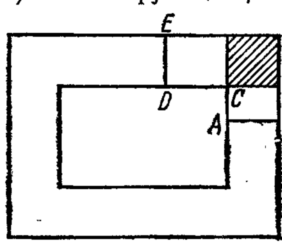

Рис. 7

Для $(x,\ y)$ из R положим

$$\varphi_n(x,\ y) = \frac{\iint\limits_{R+} f(\xi,\ \eta)\,E\,d\xi\,d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E\,d\xi\,d\eta}, \qquad (12)$$

где $E=\exp[-n\{(\xi-x)^2+(\eta-y^2)\}]$. Знаменатель есть постоянная πn^{-1} (не зависящая от $x,\ y$); следовательно, (12) записывается в виде

$$\varphi_n(x,\ y) = \pi^{-1}n\iint\limits_{R+} f(\xi,\ \eta)\,E\,d\xi\,d\eta. \qquad (13)$$

Вклады в числитель и знаменатель правой части формулы (12), вносимые областями, лежащими вне квадрата $S = S(x, y)$ со стороной $n^{1/3}$ вокруг точки (x, y), экспоненциально малы. Так как сам знаменатель равен πn^{-1}, то мы имеем (все o равномерны)

$$\varphi_n(x, y) = \left(\frac{\iint\limits_S f(\xi, \eta) E \, d\xi \, d\eta}{\iint\limits_S E \, d\xi \, d\eta} \right) + o(1).$$

Так как S мало, то $f(\xi, \eta)$ в последнем числителе равно $f(x, y) + o(1)$; итак, окончательно, φ_n, определенное в (12), представимо в виде $\varphi_n(x, y) = f(x, y) + o(1)$, что и требовалось доказать.

Вторая часть доказательства теоремы Вейерштрасса проводится так. Для подходящего $N = N(n)$ мы при всех (x, y) из R и всех (ξ, η) из R_+ имеем

$$|E - \Sigma| < n^{-2},$$

где

$$\Sigma = \sum_{m=0}^{N} \frac{[-n\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}]^m}{m!}.$$

Тогда

$$\varphi_n(x, y) = \Pi + o(1),$$

где

$$\Pi = \pi^{-1} n \iint\limits_{R_+} \Sigma \, d\xi \, d\eta,$$

очевидно, является многочленом от x, y.

Старые авторы работали с аппаратом и обозначениями, которые мы находим невыносимо неуклюжими. Типичным примером является данное Коши доказательство теоремы, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень. Современный вариант, который может быть сжат до полстраницы, дан в книге Харди Г. Х. Курс чистой математики.— М.: ИЛ, 1949. Приложение II. Идеи все принадлежат Коши, но ссылка на него должна выглядеть так: Exercises.— Т. 4.— P. 65—128—64 страницы (и все существенны, хотя Коши попутно дает много нового). Чтение текста Коши не облегчается тем обстоятельством, что то, что мы бы сейчас обозначили $\sum_{m=0}^{n} b''_m z^m$, имеет вид

$$(D''_0+E''_0\sqrt{-1})+(D''_1+E''_1\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})+\ldots$$
$$\ldots+(D''_n+E''_n\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})^n.$$

Постскриптум о чертежах. «Картинное» определение на рис. 7, являясь естественным *источником* идеи, может быть с той же непосредственностью дано словами: «определим f вне R так, чтобы она имела значение, равное ее значению в ближайшей точке R»; словесное определение можно использовать в печатном тексте с целью уменьшить стоимость типографских работ, но в лекционном изложении необходим чертеж. Он служит здесь «текстом для проповеди». Мои ученики упорно не хотят пользоваться чертежами даже в неофициальном порядке, когда это для них не связано ни с какими затратами. Эта практика распространяется; недавно я обнаружил, что она существует уже более

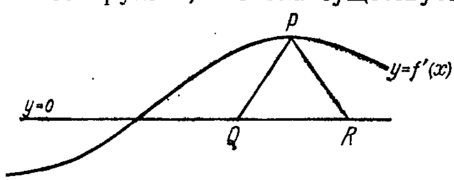

Рис. 8

30 лет, а также открыл ее причину. Было принято делать серьезное предупреждение [1]), что чертежи не должны использоваться в строгих рассуждениях; этот блеф никогда не подвергался проверке, и его жертвы по вине перестраховщиков остались напуганными навсегда. Конечно, некоторые чертежи не могут служить основанием для строгих рассуждений, но я бы сказал, что большинство чертежей может (и я использую такие чертежи, когда только возможно). Использование графика для определения неприятной функции (например, ведущей себя по-разному на разных отрезках) является, очевидно, законным; недавно мне пришлось прокладывать себе дорогу через определение, вполне сравнимое с данным выше «плохим» определением, тогда как график рассказал бы всю историю в несколько секунд. Этот способ использования чертежей не отличается по существу от таких принятых условностей, как «юго-западный

[1]) Чтобы отучить от «школьной математики».

угол». Но, более того, *рассуждения*, основанные на графиках, хотя и не столь признаны, также могут быть вполне законными. Возьмем теорему[1]: *из* $f(x)=o(1)$ *при* $x\to\infty$ *и* $f''=O(1)$ *следует, что* $f'=o(1)$. Если $f'\neq o(1)$, график $y=f'(x)$ будет иметь для произвольно больших x «пики» (над или под $y=0$), содержащие треугольники типа PQR (рис. 8), в которых высота P не мала, наклоны сторон PQ и PR не велики и, следовательно, площадь PQR не мала. Тогда $f(Q)-f(R)$ не мало, а это противоречит тому, что $f=o(1)$. Это рассуждение строго (и достойно печатного текста) в том смысле, что при переводе его в символы мы не встретим ни одного шага, который не был бы однозначно определен и тривиален. Я сам всегда думаю так, когда материал это позволяет.

Одним из лучших графических рассуждений является доказательство одномерной теоремы о неподвижной точке: *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и возрастает для* $0\leqslant x\leqslant 1$, *причем* $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, *и пусть* $f_2(x)=f\{f(x)\}$, $f_n(x)=f\{f_{n-1}(x)\}$. *Тогда при итерациях* f *либо каждая точка является неподвижной, либо стремится к неподвижной точке.*

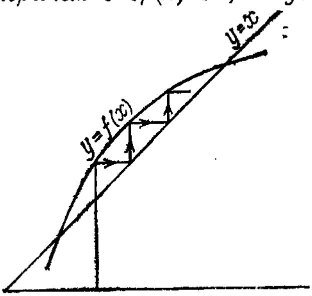

Рис. 9

Для профессионала все, что нужно для доказательства, имеется на рис. 9.*

(Сообщено д-ром А. Е. Уэстерном.) Начиная с 1914 г. действовал парламентский акт о домовладениях, содержавший следующее определение (мои обозначения в скобках). «Стандартная плата» (R) была определена как плата, взимавшаяся в 1914 году (R_0), если эта последняя не была меньше определенной суммы (V); в противном случае стандартная плата должна была совпадать с этой суммой. «Дом подпадает под действие акта, если либо стандартная плата, либо эта сумма меньше 105 фунтов стерлингов». Было много судебных дел, которые разбирались по отдельности в каждом случае. Положение определялось фундаментальной теоремой, неизвестной законодателям.

---

[1]) Увы, не Дж. И. Литлвуда, хотя я ее переоткрыл, и это было важным моментом в моей карьере. Я упоминаю о ней потому, что я получил ее, используя графическое рассуждение.

Теорема. *Дом подпадает под действие акта тогда и только тогда, когда $V \leqslant 105$.*

Это следует из леммы[1]:

Лемма. $\min\{\max(R_0, V), V\} = V$.

12. *Опечатки.* Недавний номер журнала *Observatory* содержал следующую очаровательную «типичную заметку»:

«Профессор Оффорд и я недавно пропустили забавную опечатку (Annals of Mathematics (2), 49, 923, 1.5). В доказательстве знак плюс превратился в знак умножения. Получившаяся неверная формула послужила основой следующего за ней ошибочного рассуждения. (В свое оправдание заметим, что справедливость окончательного результата была известна.)»

В Mathematical Gazette.— V. 14.— P. 23 помещена заметка У. П. Милна «Noether's Canonical Curves», в которой он ссылается на «статью G u y a e l f // Proc. London Math. Soc., Ser. 2.— V. 21, Part 5». Guyaelf — автор-призрак; указанная статья принадлежит У. П. Милну.

Однажды я предложил Харди найти опечатку на одной странице нашей общей работы. Он не мог ее найти. Ошибка была в его собственном имени: «G. H. Hardy».

В докладной записке, которую я написал (около 1917 года) для Баллистического управления, в конце была фраза «Таким образом, σ следует сделать сколь возможно малым». В печатном тексте записки этой фразы не было. Но П. Дж. Григг сказал: «Что это такое?» Едва заметное пятнышко на пустом месте в конце оказалось миниатюрнейшим σ, которое я когда-либо видел (наборщики, вероятно, обыскали весь Лондон).

В музыке[2]) проблеск гения может показаться простой опечаткой (быть может, *ля-диез* в 224 такте первой части сонаты оп. 106 Бетховена?). Может ли это произойти в математике? Я могу предложить гипотетический случай. Было время, когда никто не думал о возможности рассмотрения бесконечных систем интервалов и под «системой интервалов» всегда понимали конечную систему. Вообразим определение «содержания» точечного множества E как «точной

---

[1]) $\min(a, b)$ — меньшее, $\max(a, b)$ — большее из чисел a и b.

[2]) Или литературе: «Light falls from the (h)air»?

нижней грани суммарной длины системы интервалов, содержащих E». Допустим, что некий ригорист, придравшись к отсутствию слова «конечной», спросил бы себя «а что, если допустить бесконечные системы»? Он сделал бы первый шаг по пути, неукоснительно ведущему к мере Лебега.

13. *Фразеология.* Недавно была опубликована статья, в начале которой имеется фраза: «Целью настоящей статьи является доказательство [чего-то весьма важного]» [1]. Только в конце читатель с некоторым трудом уясняет себе, что «цель» эта остается недостигнутой [2].

Из одной прекрасной книги по астрономии: «Многие из спиральных галактик, в отличие от эллиптических, показывают яркие линии благодаря, несомненно, присутствию или отсутствию газообразных туманностей».

[Этот богатый комплекс несуразностей заслуживает внимательного анализа. В основном он является незаконной комбинацией корректной фразы: «спирали показывают яркие линии благодаря присутствию...» и некорректной фразы: «эллипсоидальные галактики не показывают ярких линий благодаря отсутствию...».]

Литературный обычай передавать словами числа, меньшие 10, оказывается в математике часто весьма неудобным (хотя здесь можно проводить тонкие различия). В настоящее время злоупотребление словесной формой, к сожалению, весьма распространено. Недавно я обнаружил (у весьма наивного автора) фразу: «функции, никогда не приинимающие значений нуль или единица». Сам я предпочитаю почти всегда применять цифры (и следую этому в настоящей книге).

Лингвист с ужасом узнает, что если множество не замкнуто, то это еще не означает, что оно открыто, или же, что «E плотно в E» — не то же самое, что «E плотно в себе».

---

[1]) Я часто думал о том, каким интересным было бы литературное соревнование по составлению сочинения, по прочтении которого вначале казалось бы, что автор совершает множество ошибок, связанных с неправильным словоупотреблением, но где в действительности все было бы верно (причем установление этого требовало бы известного труда).

[2]) Автор не имел никаких неблаговидных намерений, он просто вкладывал в свои слова не совсем обычный смысл.

«Где X большое очень мало» [1]).

Я хотел было включить несколько эффектных парадоксов, связанных со словом «ничего», но затем решил, что они слишком легковесны.

Устное слово опасно. Одна знаменитая лекция была совершенно непонятна большинству аудитории потому, что «Ханю»,— несомненно, важное действующее лицо в драме — не сразу отождествлялось слушателями с $h\nu$.

Мне приходилось читать вслух фразу «где E' — любое штрихованное множество» [2]).

14. *Шутки и т. п.* Все рефлексивные парадоксы являются, конечно, превосходными шутками. Я начну с двух классических парадоксов, хотя они хорошо известны.

(*a*) (Ришар). Должны существовать (положительные) целые числа, которые не могут быть заданы фразами, состоящими менее, чем из шестнадцати [3]) слов. Любое множество положительных целых чисел содержит наименьшее число, и поэтому существует число N, «наименьшее целое число, которое не может быть задано фразой, состоящей из менее, чем шестнадцати слов» [4]). Но эта фраза содержит 15 слов и определяет N.

(*b*). (Вейль). Большинство английских прилагательных не *обладает* качеством, которое они *обозначают*; прилагательное «красный» само не красное. Однако некоторые прилагательные обладают тем качеством, которое они обозначают; например, прилагательное «adjectival» [5]). Назовем прилагательное первого типа гетерологическими, а второго — гомологическими. «Гетерологический» — прилагательное; к какому типу оно принадлежит?

---

[1]) В одном распространенном учебнике математического анализа есть такая фраза: «Проинтегрируем это выражение по x от $x = a$ до $x = x$».— *Примеч. пер.*

[2]) В английском тексте игра слов: «dashed» одновременно означает «снабженное штрихом» и «проклятое».— *Примеч. пер.*

[3]) Не «16» в силу вполне достаточных, хотя и весьма тонких причин.

[4]) Пример, естественно, пришлось заменить.— *Примеч. пер.*

[5]) Или, скажем, русское прилагательное «выразительный».— *Примеч. пер.*

В журнале *Spectator* был объявлен конкурс на тему: «Что бы Вы с наибольшим удовольствием прочли, раскрыв утреннюю газету?». Первый приз получил ответ:

> «Наш второй конкурс
>
> Первый приз во втором конкурсе этого года присужден мистеру Артуру Робинсону, остроумный ответ которого без натяжки должен быть признан наилучшим. Его ответ на вопрос: «Что бы Вы с наибольшим удовольствием прочли, раскрыв утреннюю газету?» был озаглавлен «Наш второй конкурс», и состоял в следующем: «Первый приз во втором конкурсе этого года присужден мистеру Артуру Робинсону, остроумный ответ которого без натяжки должен быть признан наилучшим. Его ответ на вопрос: «Что бы Вы с наибольшим удовольствием прочли, раскрыв утреннюю газету?» был озаглавлен «Наш второй конкурс», но из-за лимитирования бумаги мы не можем напечатать его полностью».

Следующая идея возникла слишком поздно (не помню кому она пришла в голову), но *должно* было случиться вот что. Я написал работу для *Comptes Rendus*, которую проф. М. Рисс перевел для меня на французский язык. В конце было три подстрочных примечания. Первое (на французском языке) гласило: «Я весьма признателен проф. Риссу за перевод настоящей статьи». Второе гласило: «Я признателен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания». Третье гласило: «Я признателен проф. Риссу за перевод предыдущего примечания» и так, казалось бы, нужно продолжать до бесконечности. В действительности я законно ограничился примечанием № 3: сколь плохо я ни знаю французский язык, я в состоянии *переписать* французскую фразу.

Учитель: «Предположим, что *x* есть число овец в задаче». Ученик: «Но, господин учитель, предположим, что *x не* есть число овец». Я спросил проф. Виттгенштейна, не имеет ли эта шутка глубокого философского смысла, и он ответил, что имеет.

(А. С. Безикович.) Репутация математика основывается на числе плохих доказательств, которые он придумал. (Работы первооткрывателей неуклюжи.)

«Я хотел бы сказать, насколько я обязан мистеру Смиту в связи с этой работой». Так скажите!

Эквивалентность и тождественность. Сколько математиков применяет символ $O(1)$, не отдавая себе отчета в том, что с ним связана одна подразумеваемая условность? Верно, что $\sin x = O(1)$, но нельзя сказать, что $O(1) = \sin x$.

Начиная с 1910 г. время от времени ставится вопрос об исключении задач по оптике и астрономии из экзаменационных билетов. Было обнаружено, что в течение ряда лет ни один из студентов, занявших первые места, не пытался решать задачи по этим предметам. Этому утверждению можно придать эквивалентную форму: никто из студентов, решавших эти задачи, не смог занять первого места.

«Мы все знаем, что люди иногда делают лучшие вещи, чем все, что они делали раньше, но г-н N сделал лучшую вещь, чем все, что он может сделать». [Фактическая цитата, причем специалисты соглашаются с ней по всем пунктам.]

Один слишком старательный аспирант спросил, необходимо ли прочитать всю литературу прежде, чем начать писать работу. «*Ничто* не является необходимым или достаточным». Вторая часть (содержащая горькую истину: глубокий эрудит может быть лишен творческого начала) возникает просто по инерции в связи с чисто словесной ассоциацией.

«Не делай недовольной мины при звуках сонаты какого-нибудь великого князя: ты никогда не знаешь, кто в действительности написал ее» (Гайдн). (По поводу одной отвергнутой докторской диссертации.)

Один слишком навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: «Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 [1]) сторонами». Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением (которое хранится в архивах в Геттингене).

---

[1]) $65\,537 = 2^{16} + 1$.

Лет 25 назад я слышал не столь печальную историю, за истинность которой, впрочем, ручаться не могу. В ней рассказывалось о том, что первое применение кристалла как дифракционной решетки явилось результатом принятой всерьез шутки. (Помню, как я по поводу утверждения, что нельзя переносить наивные предрассудки обыденной жизни, например, в астрофизику, говорил себе следующее: «будь готов рассматривать Солнце как твердое тело или внутренность Земли как идеальный газ». В те времена звезды рассматривались в лучшем случае как газы, весьма далекие от идеальных.)

Эразм Дарвин считал, что время от времени следует производить самые дикие эксперименты. Из них почти никогда ничего не выходит, но если они удаются, то результат бывает потрясающим.

Дарвин играл на трубе перед своими тюльпанами. Результат этого эксперимента оказался отрицательным.

«*X* нашел, что в этих условиях возникают гравитационные волны; однако есть предположение, что в работе содержится ошибка».

Ясно, что *всякая* ошибка порождает гравитационные волны.

Ландау [1]) заготовлял печатные формуляры для рассылки авторам доказательств последней теоремы Ферма: «На стр. ..., строке ... имеется ошибка». (Находить ошибку поручалось доценту.)

Один педантичный профессор имел обыкновение говорить: «...полином четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

где e не обязано быть основанием натуральных логарифмов» (но может им быть).

О книгах Жордана говорили, что если ему нужно было ввести четыре аналогичные или родственные величины (такие, как, например, a, b, c, d), то они у него получали обозначения a, M_3', ε_2, $\Pi_{1,2}''$.

---

[1]) Речь идет об известном немецком математике Эдмунде Ландау.— *Примеч. пер.*

Классификация углов из книги по альпинизму (около 1900 г.):

перпендикулярно — 60°,
Мой дорогой сэр, абсолютно перпендикулярно —65°,
нависающе — 70°.

Я прочел в гранках книги Харди о Рамануджане: «кто-то сказал, что каждое положительное целое число было одним из его личных друзей». Моей реакцией на это место было: «Интересно, кто это сказал; я бы хотел, чтобы это был я». В верстке я уже прочитал (так, как это теперь напечатано) «Литлвуд сказал...».

(Произошло следующее: Харди выслушал мое замечание молча, с непроницаемым лицом, так что я решил, что он пропустил его мимо ушей. Впоследствии я упрекнул Харди в том, что он вообще имеет привычку часто не реагировать на замечания, на что он ответил: «Что же остается делать? Неужели каждый раз говорить: вот это здорово!» Ответ: «Да».)

Закончу одной моей шуткой, которую я всегда с удовольствием вспоминаю. Веблен как-то читал 3 лекции по геометрии путей; в конце одной из них уравнения путей чудесным образом приняли форму

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=\frac{t-d}{p}.$$

Он закончил сообщением о том, что будет следовать дальше, и сказал: «Я буду действовать, как сам Иоанн Креститель». Смысла этих слов (ответственности за который я никоим образом не несу) я уже не помню, но я воспользовался посланной небом возможностью сказать: «Поскольку наши пути прямые».

* Зоопарк

15. Область, получающаяся из круга выбрасыванием бесконечного множества таких секторов, как заштрихованные на рис. 10, имеет важные приложения в теории функций (слишком сложные для разъяснения здесь). Она обычно называется амебой или морской звездой.

Змея. Функция $f(z)$, отображающая область, изображенную на рис. 11, на единичный круг, принимает некоторые значения дважды (те, которые принадлежат дважды

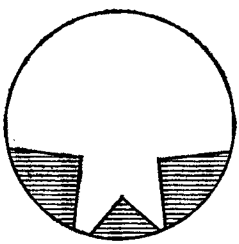

Рис. 10

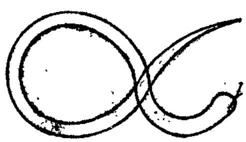

Рис. 11

покрываемой части), но f' нигде не обращается в нуль. (Ошибочное представление, что f' должно обращаться в нуль, чрезвычайно распространено, несомненно в результате диеты, слишком богатой алгебраической теорией функций, в которой все листы римановых поверхностей идентичны и располагаются над всей плоскостью.)

Крокодил (рис. 12). Зубы заходят один за другой и имеют бесконечную общую длину. Если эту область отобразить на единичный круг, то мы получим пример функции $f(z)=$

Рис. 12

$=\Sigma c_n z^n$, вещественная часть которой $U(\theta)=\mathrm{Re}\, f(e^{i\theta})$ имеет ограниченное изменеиие, а мнимая часть $V(\theta)$ как угодно близка к этому. С другой стороны,

$$\sum |c_n| = \int_0^1 \left(\sum n\,|c_n|\,\rho^{n-1}\right) d\rho \geqslant \int_0^1 |f'(\rho)|\, d\rho,$$

а последний интеграл представляет длину образа радиуса (0,1) круга в z-плоскости. Этот образ, однако, является линией, извивающейся между зубами к носу, и имеет бесконечную длину. Поэтому ряд $\Sigma|c_n|$ расходится.

Известно, что если U и V имеют ограниченное изменение, то этот ряд сходится. Крокодил показывает, что этот результат является наилучшим возможным — ответ на когда-то заданный мне (проф. Л. С. Янгом) вопрос. Однажды, когда я возвращался с пешеходной прогулки в Кембридж, думая иад этим вопросом, мне пришел в голову — неизвестно откуда — «гиппопотам» (рис. 13,— хорошо известный персонаж [1]) из теории «простых концов», но только теперь я решился окрестить его так, в подражание крокодилу). Он не совсем давал решение вопроса (или мне так показалось) и через несколько сотен ярдов превратился в крокодила.

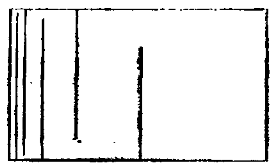

Рис. 13

Дикобраз. Допустим, что топологическое преобразование T таково, что T^nP для каждой точки P плоскости *в конце концов* (т. е. для $n>n_0(P)$) попадет в ограниченную область Δ *и останется там.* Пусть Δ_+ — немного увеличенное Δ (такое, что замыкание $\bar{\Delta}$ области Δ содержится в Δ_+). Пусть $\bar{D}$ — любая замкнутая ограниченная область. Верно ли, что T^nP сходится *равномерно* в Δ_+ для всех P из $\bar{D}$ (т. е. $T^n\bar{D}\subset\Delta_+$ для $n>n_0(\bar{D})$)? Каждый сначала подумает, что это действительно так (для одномерного аналога это даже верно), однако ответ оказывается отрицательным. Это доказывает пример (рис. 14), найденный мисс Картрайт и мной (на спине у дикобраза бесконечное множество игл с предельными точками L и L'). Рассмотрим T, которое оставляет дикобраза — фигуру, очерченную сплошной лини-

[1] Настолько хорошо известный, что мой художник не решился его нарисовать.

ей,— инвариантным в целом, но переводит каждую иглу в следующую за ней справа, и, кроме того, приближает все внешние точки к контуру дикобраза. Δ — область, ограниченная пунктирной линией, Δ_+ — сколь угодно мало увеличенное Δ. Тогда T^nP в конце концов попадает внутрь

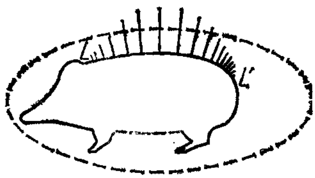

Рис. 14

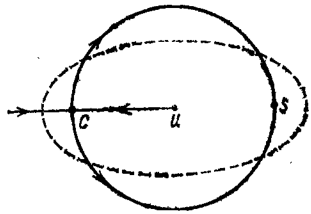

Рис. 15

Δ для каждого P, но для конца иглы вблизи L требуется большое n, для того чтобы T^nP в конце концов попало в Δ_+.

Позже мы нашли значительно более простой пример (рис. 15), в котором u, s, c — соответственно вполне нестабильная, стабильная и метастабильная фиксированные точки T, и линии фигуры инвариантны в целом относительно T. Δ — область, ограниченная пунктирной линией. Каково бы ни стало P, T^nP в конце концов остается в Δ, но точки вблизи u, а также точки, лежащие вблизи линии uc, попадают в Δ_+ как угодно поздно. Это T, однако, оставляет всю площадь инвариантной, и этот пример не покрывает важного класса преобразований T, при итерировании которых площадь каждой ограниченной фигуры стремится к нулю. Дикобраз может сделать и это, если свести к нулю площадь его тела; при этом он не исчезает, а из него только выпускают воздух.*

Баллистика

16. «*Задача стрелка*». Следует ли при данном расстоянии до цели увеличивать или уменьшать угол подъема φ (отсчитываемый от направления в цель), если цель находится несколько выше горизонтали? Ответ, вероятно, не очевиден, он интуитивно ясен, если цель находится ниже горизонтали, и поэтому скорость возрастания φ в зависимости от угла α наклона направления в цель к горизонтали нужно считать положительной, так что ответ на основной вопрос должен состоять в увеличении φ. Для средних расстояний φ стремится к нулю, когда α стремится к $\frac{\pi}{2}$, так что начальное увеличение φ затем переходит в уменьшение. В результате можно предполагать, что разумно хорошим приближением будет постоянное φ, если α достаточно мало и положительно [1]); это называется «принципом жесткости траектории».

Стрелок-профессионал считает, что φ надо увеличивать, если цель находится над горизонталью; он прав, так как поправка, которая в конечном счете приводит к уменьшению φ, вблизи горизонтали имеет второй порядок малости.

В пустоте высота траектории с целью на горизонтали

$$H=\frac{1}{8}gT^2(\approx 4T^2)\ ^{2)},$$

где T — время полета. Это оказывается очень хорошим приближением для всякого рода орудий и всех углов подъема (даже для вертикальных траекторий).

---

[1]) Это приближение улучшается, если принять во внимание уменьшение плотности воздуха с высотой. Соответствующие вычисления легко проводятся для траекторий в пустоте; относительное поведение фактических траекторий почти такое же (и во всяком случае стремится к поведению в пустоте при $\varphi\to 0$).

[2]) Если за единицу длины принять английский фут.— *Примеч. пер.*

Примем эти два принципа, считая их точными, а не приближенными. Тогда становится возможным найти *положение* вершины траектории при помощи следующего остроумного рассуждения, использующего только артиллерийские таблицы. * Артиллерийская таблица дает любые две из величин: R (дальность), φ (угол подъема), T (время полета, а вместе с ним и $H=4T^2$) как функции третьей. На рис. 16 мы имеем для данного φ

$$\theta+\alpha=\varphi, \quad r=R(\theta), \quad H=4T^2, \quad \sin\alpha=\frac{H}{r},$$

откуда

$$R(\theta)\sin(\varphi-\theta)=4T^2(\varphi),$$

и корень $\theta(\varphi)$ может быть приближенно найден методом проб, а с ним α и ON. *

Я столкнулся с этим вопросом при следующих обстоятельствах. Однажды вечером, незадолго до того, как я начал работать в Артиллерийском управлении (примерно в декабре 1915 г.), я был дежурным офицером по большому полигону, где было много старших офицеров (не являвшихся, однако, специалистами в области баллистики). На столе в комнате дежурного лежал лист бумаги с чертежом рис. 16 и всеми обозначениями, из которых легко можно было усмотреть, о чем идет речь. Через день или два после этого меня вызвал полковник и спросил, не знаю ли я способ нахождения вершины V. Со всей серьезностью я изложил ему приведенное выше рассуждение, а так как оно было, по-видимому, новым для него, то мне показалось забавным ничего к этому не добавлять. (Я так никогда и не узнал, откуда взялся этот чертеж.)

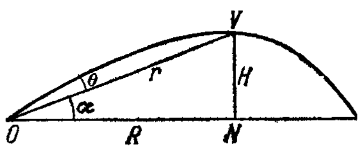

Рис. 16

17. *Ракеты.* Траектория частицы под действием земного притяжения и постоянной силы — старая игрушка динамики точки. Теоретически траектория не может начинаться из положения покоя иначе, как вертикально (при вертикальном старте начальная кривизна бесконечна).

Какие кривые имеют: а) изящную форму, б) изящное уравнение? Траектория бомбы имеет приближенное уравнение

$$e^{-y}=k\cos x.$$

Я слышал рассказ одного офицера о битве у Фолклендских островов (в 1914 г., в начале войны), в которой он принимал участие. Немецкие корабли были уничтожены с максимального расстояния, но на это потребовалось много времени, и залпы постоянно ложились на 100 ярдов левее. Эффект вращения Земли, аналогичный «дрейфу», учитывался наводящим устройством. Но это устройство было рассчитано на то, что морские битвы будут иметь место в районах широт 50° N. Двойная поправка для 50° S и максимального расстояния имеет порядок 100 ярдов.

*18. Допустим, что материальная точка падает вертикально вниз в среде, плотность ρ которой возрастает с глубиной y как $\frac{1}{1-\lambda y}$ и сопротивление которой изменяется как ρv^2, так что отрицательное ускорение от сопротивления среды по абсолютной величине равно $\frac{\mu v^2}{1-\lambda y}$. Если $\mu=\lambda$, то независимо от начальной скорости *движение оказывается гармоническим* (пока оно вообще происходит; наинизшая точка траектории совпадает с тем местом, где плотность становится бесконечной). Мои неоднократные попытки включить этот вопрос в экзаменационные билеты всегда отклонялись. Я надеялся услышать критику по линии «нереальности» задачи, на что существует следующий ответ. В 1917—1918 гг. потребовалось составить впервые, и притом быстро, артиллерийскую таблицу для самолетной пушки, стреляющей на заданной высоте в любом направлении. Существовал метод вычисления, основаный на использовании данных для вертикальных траекторий, направленных вверх и вниз. Оказалось, что значения μ и λ можно было считать с достаточной точностью равными (и $\rho=(1-\lambda y)^{-1}$ также было достаточно точной аппроксимацией закона плотности). Вертикальная траектория, направленная вниз, могла быть, следовательно, просто считана с таблицы синусов, и артиллерийская таблица была фактически составлена именно таким образом (примерно в 2/3 того времени, которое на нее понадобилось бы при ином способе составления).

19. Я не отрицаю, что только что приведенный пример не представляет большого интереса; вот более интересный пример. Для любого «свойства» траектории в атмосфере переменной плотности, скажем, для свойства иметь данное R для данного угла подъема φ (и фиксированного «оружия» [1])), существует «эквивалентная однородная атмосфера» (для которой R при данном φ то же, что и в реальной атмосфере; эквивалентная атмосфера меняется с φ); она характеризуется числом $c<1$ таким, что эквивалентная постоянная плотность равна фактической плотности на высоте ch, где h — наибольшая высота траектории. Оказывается, что во всякой такой задаче в пределе, когда $R \to 0$, c является постоянным числом, не зависящим от закона сопротивления и характера изменения плотности. В частности, для свойства иметь данное R предельное значение c равно 3/5. (Это предельное значение зависит от задачи, и, например, для свойства иметь данное время полета при данном φ равно 2/5. Вывод этих результатов из основных принципов требует довольно сложных вычислений, которые, однако, могут быть несколько упрощены, если принять заранее, что предел будет постоянным.) Так как «средняя высота» в любом обычном смысле этого слова равна $\frac{2}{3}h$, сформулированные результаты являются довольно тонкими (в Артиллерийском управлении не хотели всему этому верить, пока не был произведен эксперимент; после этого они верили любому результату, предсказанному теорией).

Если что-либо можно считать интуитивно ясным, так это то, что c ни для какого «свойства» не может лежать вне интервала $(0,1)$; как читатель относится к возможности $c=0$ или 1?

Фактически существует очень простой (и практически важный) случай, для которого $c=0$: это задача «время полета на данной наклонной плоскости при заданном угле подъема».

Так как высота h здесь первого порядка малости [2]) (для траектории с горизонтальной Землей она второго порядка), вычисления становятся более простыми. Если мы используем тот факт, что c не зависит от закона сопротивления и характера изменения плотности (парадокс, во всяком случае, не менее ярок в этом предельном случае), мы можем упростить задачу следующим образом. Нормируя притяжение Земли и начальную скорость к 1, мы можем предположить, что «ускорение» будет иметь вид $-\mu(1-\lambda y)v$, где μ

[1]) «Орудие» — это упорядоченная пара констант (c, V).

[2]) Как функция от R при $R \to 0$.— *Примеч. пер.*

мало. Пусть φ — угол подъема, α — угол наклонной плотности с горизонтом (рис. 17). Реальная траектория является решением системы

$$\ddot{x} = -\mu(1-\lambda y)\dot{x},$$
$$\ddot{y} = -1-\mu(1-\lambda y)\dot{y}$$

с начальными значениями $\dot{x}_0=\cos(\varphi+\alpha)$, $\dot{y}_0=\sin(\varphi+\alpha)$. Время τ, при котором $y=x\operatorname{tg}\alpha$, должно быть приравнено соответствующему времени с заменой λ на 0 и μ на $\mu'=(1-ch)\mu$. Если мы перейдем к пределу при φ (или τ) и μ, стремящихся к 0 ($\lambda\to 0$ не обязательно), то это будет, между прочим, означать, что всеми членами, содержащими μ^2, можно пренебречь. Тогда приближенно

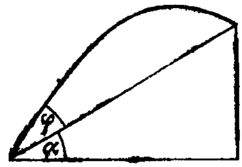

Рис. 17

$$\dddot{x} = \lambda\mu\dot{x}\dot{y}, \quad x^{(4)} = -\lambda\mu\dot{x}, \quad x^{(5)}=0; \quad \dddot{y} = \mu(1-\lambda y)+\lambda\mu\dot{y}^2,$$
$$y^{(4)} = -\lambda\mu\dot{y}+2\lambda\mu\dot{y}\ddot{y} = -3\lambda\mu\dot{y}, \quad y^{(5)}=0.$$

В момент τ мы имеем, полагая $\gamma=\cos(\varphi+\alpha)$, $\sigma=\sin(\varphi+\alpha)$,

$$\gamma\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{\frac{x}{\gamma}} \frac{\sum y_0^{(n)}\frac{\tau^n}{n!}}{\sum\limits_{n=1}^{4}\frac{x_0^{(n)}}{\gamma}\frac{\tau^n}{n!}} =$$

$$= \frac{\left\{\sigma-\frac{1}{2}(1+\mu\sigma)\tau+\frac{1}{6}(\lambda\mu\sigma^2+\mu)\tau^2-\frac{3}{24}\lambda\mu\sigma\tau^3\right\}}{\left\{1-\frac{1}{2}\mu\tau+\frac{1}{6}\lambda\mu\sigma\tau^2-\frac{1}{24}\lambda\mu\tau^3\right\}} =$$

$$= \sigma-\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{12}\mu\tau^2+O(\tau^4),$$

что находится прямым вычислением с пренебрежением μ^2; заметим, что член с τ^3 отсутствует.

Правая часть должна быть равна

$$\sigma-\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{12}\mu(1-c\sigma\tau)\tau^2+O(\tau^4),$$

а отсюда $c=O(\tau)$ и предел $c=0$.*

Дилемма теории вероятностей

Существует солидное число предложений этой теории, и никто не думает подвергать сомнению их практическую приложимость. Если, например, 1300 раз из полной колоды карт наудачу вынимается одна, то мы были бы очень удивлены, если бы среди вынутых карт число тузов сильно отличалось от 100; мы верим и более тонким заключениям, таким, например, что имеются равные шансы для появления от 94 до 106 тузов, и для появления числа тузов, меньшего 94 или бо́льшего 106, или, например, что вероятность появления числа тузов, меньшего 50 или бо́льшего 150, меньше чем 10^{-6}. Чтобы избежать возможных недоразумений, я начну с проведения некоторого различия. «Вероятность того, что будет вынут туз, равна $1/13$; вероятность, что будут вынуты подряд два туза, равна $\left(\frac{1}{13}\right)^2$» — такие утверждения, как и большинство утверждений «теории вероятностей», с которыми мы встречаемся в учебниках алгебры, являются, по существу, чисто математическими; лежащие в их основе условные принципы о «равновозможности» придают рассуждениям автоматический характер, и вопрос сводится только «к перестановкам и сочетаниям». Эта сторона теории вероятностей нас не интересует.

Приведенные выше утверждения имеют совсем другой характер: они содержат высказывания относительно реального мира, состоящие в том, что то или иное событие произойдет с той или иной вероятностью; эти утверждения понимаются с точки зрения обычного здравого смысла; в них, например, не имеется в виду, что из 52^{1300} возможных результатов 1300-кратного извлечения одной карты из колоды, содержащей 52 карты, некоторая часть результатов (близкая к $1/2$) будет содержать от 94 до 106 тузов. Поставим теперь вопрос об основаниях предмета.

Математика (я имею в виду здесь «чистую» математику) не связана непосредственно с реальным миром; если вероятность должна иметь дело с реальным миром, в ней должны содержаться элементы, внешние по отношению к математике; *смысл* вероятности должен иметь отношение к реальному миру, и должно существовать одно или несколько «первичных» предложений о реальном мире, исходя из которых мы уже можем дальше действовать дедуктивно (т. е. математически). Мы предположим (соединяя несколько первичных предложений в одно, что мы всегда вправе сделать), что существует только одно первичное предложение, «аксиома вероятности», которую мы для краткости назовем A. Хотя она должна быть верна, она по своей природе не допускает никакого дедуктивного доказательства на том вполне достаточном основании, что она относится к реальному миру (другие типы «оправданий» я рассмотрю позже).

Имеются 2 школы. Одна из них, которую я назову математической, остается внутри математики, с результатами, которые я рассмотрю позже. Мы начнем с другой школы, которую я назову философской. Эта школа атакует непосредственно «реальную» проблему вероятности; что же составляет аксиому A и смысл вероятности, и как мы можем оправдать A?

Поучительно рассмотреть попытку, называемую «теорией частот». Естественно верить в то, что такой акт, как бросание кости (с некоторыми понятными оговорками), при повторении n раз приведет к результату, в котором частота появления 6 очков *обязательно* будет стремиться к пределу, скажем p, при $n \to \infty$. (Делаются попытки подменить понятие предела каким-то понятием «предела» в кавычках, в пиквикском смысле. Но либо Вы *имеете в виду* обычный предел, либо перед Вами встает задача объяснения того, как «предел» себя ведет, и Вы попадаете в тупик. Нельзя сделать незаконное понятие законным, обозначив его через законное, заключенное в кавычки.) Если мы это утверждение берем в качестве A, то мы во всяком случае можем сразу же решить проблему *смысла* вероятности; мы определяем ее для данного события как число p. Но в остальном это A нам ничего не дает. Допустим, что мы бросаем кость 1000 раз, и хотим знать, что мы должны ожидать. Является ли 1000 достаточно большим числом для того, чтобы сходимость начала проявляться, и до какой степени? A ничего по этому поводу не говорит. Мы должны поэтому что-то добавить к A относительно скорости сходимости. Однако никакое A не может с *до-*

стоверностью утверждать что-либо ни о каком конкретном числе n бросаний, например, что «частота появления 6 очков будет *обязательно* лежать между $p - \varepsilon$ и $p + \varepsilon$ для достаточно больших n (величина n зависит от ε)». Оно может только утверждать, что «частота будет лежать между $p - \varepsilon$ и $p + \varepsilon$ *с вероятностью* (*зависящей от* ε *и* n_0) *не меньшей, чем такая-то, как только* $n > n_0$». Порочный круг очевиден. Нам не только не удалось оправдать какое-либо A как рабочую гипотезу, но мы даже не смогли сформулировать такое A, которым можно было бы дальше воспользоваться, считая его верным. Общее мнение таково, что теория частот не может быть положена в основу понятия вероятности. Однако какая бы другая теория ни была выдвинута, совершенно ясно, что порочный круг лежит очень глубоко: так как достоверность невозможна, то все, что A может утверждать, должно быть сформулировано только в терминах «вероятности».

Появляется желание прийти к опрометчивому выводу, что проблема вообще неразрешима (в рамках наших современных представлений). Делались попытки более утонченные, чем теория частот, но и они потерпели фиаско по той же причине.

Я сказал выше, что A по своей природе не может быть дедуктивно доказуема. Но она не может иметь и индуктивного доказательства. Если некоторые индуктивные соображения приводятся «в поддержку» A, то нам достаточно лишь спросить, *почему* они говорят в пользу A (т. е. делают A вероятным). Обоснование некоторой теоремы (в отличие от аксиомы) может быть дано только в терминах более ранних теорем или аксиом, первая теорема может, стало быть, опираться только на аксиомы. Но всякий ответ на вопрос «почему», поставленный выше, является «первой» теоремой; в то же время единственной аксиомой, на которую мы можем ссылаться, является сама A (или ее часть) — предложение, которое мы как раз пытаемся обосновать. По поводу философской школы этого достаточно.

Математическая школа развивает теорию вселенной, состоящей из идеальных «событий» E и некоторой функции $p(E)$, имеющей эти события в качестве аргументов. Относительно событий E и функций p формулируются некоторые постулаты [1]; в отличие от такой аксиомы, как A,

[1]) Их обычно называют «аксиомами», но я применяю термин «аксиома» в другом смысле.

они не обязаны быть верными или неверными (и даже имеющими смысл), т. е. они вполне аналогичны «аксиомам» современной геометрии. Развитие логических следствий из этих постулатов является ветвью «чистой» математики, хотя постулаты имеют, конечно, своей целью составить «модель» общепризнанной теории вероятностей. Это во многих отношениях весьма полезно: постулаты выбираются так, чтобы они составляли минимальную систему, обеспечивающую построение модели теории, и любая философская дискуссия может ограничиться ими. Некоторые более удаленные части обычной теории (например, вероятности причин или гипотез) философски спорны, они могут быть отделены в модели соответствующим разделением постулатов. Чисто методическим влиянием этого приема на обычную теорию также нельзя пренебрегать: это — распространенный в математике результат «эксиоматизации» предмета. (Между прочим, наиболее естественным с методической стороны подходом является оперирование с совершенно общими «аддитивными классами множеств». В результате интересующийся читатель вскоре обнаруживает, что от него требуется знание теории интеграла Лебега; это часто огорчает его, но само требование вполне естественно.)

Мы подходим, наконец, к связи между идеальной теорией и реальным миром, или «реальной» вероятностью. Сторонник математической школы, если он последователен, в вопросах приложений умывает руки. Тому, кто ими интересуется, он говорит, что идеальная система существует параллельно обычной теории: «Если хотите, попробуйте: в мою задачу не входит обоснование приложений; это — вопрос философский, я же математик». Он часто также склонен сказать: «попробуйте, если что-нибудь выйдет, то это и будет оправданием». Но теперь он уже не только философствует, но и делает характерную ошибку. Опытная проверка того, что гипотеза «работает», не может как индуктивное суждение служить обоснованием этой гипотезы по существу.

От последней теоремы Ферма до отмены смертной казни[1]

Теперь уже всеми признано, что чистая математика может привести к неожиданным выводам и даже оказать влияние на повседневную жизнь. Может ли существовать цепочка мыслей, приводящая к заглавию этого очерка? Я думаю, что да, хотя, конечно, с некоторыми натяжками; именно, я хочу представить себе одно или два правдоподобных изменения в ходе истории математики. Любителя следует, быть может, предупредить, что рассуждение будет вначале развиваться несколько медленно, но зато под конец оно будет двигаться очень быстро, я надеюсь, что при этих условиях читателя можно будет убедить следовать за нами в начале нашего пути (где мы будем, кстати, иметь дело с идеями большой математической значимости).

Теория чисел, более чем какая-либо другая математическая дисциплина, беззащитна перед упреком, что некоторые из ее проблем возникают в связи с вопросами, которых вообще не следовало бы ставить. Я лично не думаю, что опасность серьезна; в результате концентрированного обдумывания в течение разумного времени либо появляются новые интересные идеи и методы, либо проблему приходится попросту оставить. «Совершенные числа» заведомо никогда никакой пользы не принесли, но они и не причинили особого вреда. *П. Т. Ф.*— более серьезный случай, эта теорема имеет все внешние признаки «неправильного вопроса» (к тому же ее утверждение носит негативный характер); но работа над этой теоремой привела, как мы знаем, к важному математическому понятию «идеала». Это — первое звено в моей цепочке мыслей.

---

[1]) Основное содержание этой главы было изложено в моей лекции в Ливерпуле в 1929 г. *П. Т. Ф.* утверждает, что для целого $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ неразрешимо в целых числах x, y, z, отличных от 0. Достаточно решить вопрос в том случае, когда n есть простое p. Верна эта теорема или нет, до сих пор неизвестно.

Интенсивное изучение *П. Т. Ф.* вскоре показало, что для более глубокого ее понимания необходимо *обобщить* эту теорему [1]; числа x, y, z из «невозможного» равенства $x^p+y^p=z^p$ были заменены целыми числами «поля» уравнения $\zeta^p+1=0$. Если α — корень (отличный от -1) этого уравнения, то под целыми числами поля понимают (в формулировке, достаточной для наших целей) все числа вида $m_0+m_1\alpha+\ldots+m_{p-2}\alpha^{p-2}$, где m_0, m_1, ..., m_{p-2} — «обыкновенные» целые числа (любого знака). Идея делимости целого числа a поля на другое целое число b поля достаточно проста; a делится на b, если $a=bc$, где c — целое число поля. Далее, простое число поля — это такое целое число поля, которое не имеет «собственных» делителей, т. е. которое делится только на самого себя и на «единицы» поля (обобщения «1», на них делятся все целые числа поля). Любое целое число (поля) может быть разложено на простые «множители». Но тут возникает новая ситуация в полях, соответствующих некоторым (фактически большинству) p, заключающаяся в том, что это разложение на простые множители не всегда однозначно (для обыкновенных целых чисел оно всегда однозначно). Для того чтобы восстановить единственность разложения [2], привлекаются «идеалы».

Такие новые понятия, как идеалы, обычно вводятся сначала постулированием, и только позже ставятся на твердую почву конструированием объекта с требуемым поведением [3]. Простейший путь для нас состоит в том, чтобы сразу дать построение Дедекинда и исходить из него. Пусть α, β, ..., $\varkappa$ — любое конечное множество целых чисел поля; рассмотрим класс всех чисел (они — целые числа поля) вида $m\alpha+\ldots+k\varkappa$, где m, ..., k — обыкновенные целые числа; каждое число класса считается только один раз (если имеются перекрытия). Класс, полностью определенный множеством α, ..., $\varkappa$, обозначается через $(\alpha, \ldots, \varkappa)$ и называется *идеалом*. Вернемся теперь к полю обыкновенных целых чисел и посмотрим, во что превратится идеал в этом частном случае. Обыкновенные

---

[1] И, следовательно, решать, по всей видимости, более трудную проблему!

[2] Для целых чисел поля любого алгебраического уравнения $a_0+a_1\zeta+\ldots+a_n\zeta^n=0$, где a_0, a_1, ..., a_n — обыкновенные целые числа.

[3] Другие примеры: комплексные числа, бесконечно удаленные точки, неевклидова геометрия.

целые числа $\alpha, \ldots, \varkappa$ имеют наибольший общий делитель d (этот факт в действительности является основой единственности разложения на простые множители, и Евклид строит свое доказательство, исходя именно из этого факта; поэтому доказательство Евклида является «правильным» доказательством, хотя в учебниках часто дается другое доказательство). Класс чисел $m\alpha + \ldots + k\varkappa$ без учета многочисленных перекрытий совпадает, как легко видеть, с классом чисел nd (n пробегает все обыкновенные целые числа); идеал $(\alpha, \ldots, \varkappa)$ тождествен идеалу (d). Идеал в произвольном поле, имеющий форму (α), где α — целое число поля, называется *главным идеалом*; поле, в котором целыми числами являются только обыкновенные целые числа, обладает, таким образом, тем свойством, что все его идеалы — главные. Предположим теперь, что a, b — обыкновенные целые числа и что a делится на b, например, пусть $a=6$, $b=3$. Тогда (a) является классом всех чисел, кратных 6, (b) — классом всех чисел, кратных 3, и *класс* (a) *содержится в классе* (b). Обратно, класс (a) может содержаться в классе (b) только в том случае, когда *a делится* на b. Следовательно, утверждения «a делится на b» и «(a) содержится в (b)» эквивалентны. Но множество элементов (a) находится в точном соответствии с множеством элементов a (без скобок); в качестве исходного материала мы можем взять вместо целых чисел a идеалы (a), и под «b является делителем a» понимать «(a) содержится в (b)». Теория заключенных в скобки элементов развивается совершенно параллельно теории элементов, не заключенных в скобки, и является простым «переводом» последней. Вернемся теперь к общему полю. Целое число α заменяется на (α), но уже не все идеалы являются главными; в качестве исходного материала берутся все идеалы, и делимость одного идеала на другой (понятие, пока не определенное) понимается как включение первого из них (как класса) во второй. Предположим теперь, обозначая идеалы жирным шрифтом, что $\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{k}$ — конечное множество идеалов. Тогда существует идеал $\boldsymbol{d}$, который включает в себя $\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{k}$ и является наименьшим идеалом с этим свойством[1]; $\boldsymbol{d}$ играет роль «наибольшего общего делителя» $\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{k}$. После этого мы без труда (и вполне аналогично случаю обыкновенных целых чисел) приходим

---

[1]) Если $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \varkappa_1), \ldots, \boldsymbol{k}=(\alpha_n, \beta_n, \ldots, \varkappa_n)$, то $\boldsymbol{d}=(\alpha_1, \ldots, \varkappa_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \varkappa_n)$.

к основному предложению об однозначной разложимости каждого идеала в произведение «простых идеалов». Так как эта теория «приводится» к «обыкновенной» теории в частном случае «обыкновенных» целых чисел, она является подлинным *обобщением* этой последней, и про нее можно с полным основанием сказать, что она «восстанавливает» однозначность разложения на множители.

Я не могу избавиться от чувства, что сначала «следовало» создать идеалы и, отправляясь от них, прийти к знаменитому определению «действительных чисел» сечениями Дедекинда. Хотя такая возможность была близка к осуществлению, действительный ход событий был иным [1]). Мы предположим, однако, историю несколько измененной.

В определении дедекиндова сечения все рациональные числа распределяются на два класса, L и R [2]), причем каждое число из L расположено левее (т. е. оно меньше) каждого числа из R (и, для определенности, L не содержит наибольшего числа, тогда как R может содержать наименьшее число, но может и не содержать его). Совокупность всевозможных сечений в множестве рациональных чисел представляет собой множество элементов, обладающих теми свойствами, которые мы хотели бы придать континууму «действительных чисел», и последние становятся надлежащим образом обоснованными.

Что же, по существу, означает «сечение» (*Schnitt*)? После определения идеала как класса представляется естественным (и даже неизбежным) определить действительное число *как класс* L (можно было бы, конечно, определить его и как класс R). Так, действительное число $\sqrt{2}$ есть *класс рациональных чисел* r, составленный из всех отрицательных рациональных чисел и тех неотрицатель-

[1]) Публикация была более или менее одновременной (и более поздняя идея уже имелась для ревизии более ранней), но идея «сечения», опубликованная в 1872 г. (Was sind und was sollen die Zahlen?), зародилась в 1858 г.

[2]) Обозначения L и R (left — левый, right — правый.— *Примеч. пер.*), которые с благодарностью восприняло целое поколение студентов, были введены мною. В первом издании *Pure Mathematics* (Харди Г. Курс чистой математики.— *Примеч. пер.*) классы обозначались через T и U. Более поздние издания содержат много ссылок на меня, но, когда я намекнул Харди, что ему следовало бы отметить и эту мою заслугу (что не было сделано), он отказался выполнить мою просьбу на том основании, что упоминать такие мелочи было бы оскорбительно для меня. (Это известная отговорка угнетателей: то, чего жертва хочет, не служит ее истинным интересам.)

ных рациональных чисел, для которых $r^2<2$. Разумно считать этот шаг сделанным и под определением Дедекинда понимать определение через классы. Фактические обстоятельства были довольно странными. Для самого Дедекинда *Schnitt* был актом разрезания, а не тем, что отрезалось, он «постулирует», что «действительное число» осуществляет разрезание, но не может с этим полностью примириться (современный студент легко примиряется с *классом*). Как говорит Бертран Рассел, метод постулирования имеет много преимуществ, совпадающих с теми, которые присущи воровству по сравнению с честным трудом. Между прочим, с чисто лингвистической точки зрения слова *Schnitt* и *Section* означают и акт разрезания, и то, что оказывается отрезанным. Это тот случай, когда неверное лингвистическое толкование могло бы означать научный прогресс.

Определения через понятие класса, подобные рассмотренным (идеал и действительное число), не встречались в науке с 350 г. до н. э. Евдоксово определение (пятая книга Евклида) *равных отношений* (несоизмеримых величин) очень близко к сечению Дедекинда (евдоксовы равные $a:b$ и $c:d$ соответствуют каждое одному и тому же классу рациональных чисел m/n; эти два отношения должны считаться равными, если класс m/n, для которых $ma<nb$, совпадает с классом m/n, для которых $mc<nd$).

Обратимся теперь к другому вопросу: что́ понимается под «функцией»? Я отвлекусь (имея в виду определенную цель) и приведу в интересах начинающего некоторые цитаты из книги Форсайта *Теория функций комплексной переменной*[1]). (Книга Форсайта была устаревшей уже в 1893 г., когда она только писалась, но моему поколению приходилось часто встречаться с таким положением.) Тот факт, что *регулярность* функции комплексной переменной объясняется тут же, только усугубляет общий кошмар, но мне не хотелось бы лишать читателя известного интеллектуального наслаждения. Если читатель почувствует, что он дальше читать не в состоянии, то пусть знает, что цитата кончается на с. 67, строка 5.

«Все обыкновенные операции, будучи произведены над комплексными переменными, приводят, как уже отмечалось, вновь к комплексным переменным; и всякое опреде-

---

[1]) Forsyth A. R. Theory of Functions of a Complex Variable.

ленное количество, полученное таким образом при помощи операций над z, необходимо является функцией z.

Но если комплексная переменная w дана как комплексная функция x и y без каких бы то ни было указаний на ее происхождение, то вопрос о том, является w функцией z или нет, требует рассмотрения общей идеи функциональности.

Удобно постулировать $u+iv$ как форму комплексной переменной, где u и v вещественны. Так как w априори не ограничено в своем изменении, мы можем рассматривать величины u и v как независимые и, следовательно, как произвольные функции x и y — элементов, входящих в z. Но более явные выражения для этих функций не будут приводиться, и существование таких выражений не предполагается.

Возникновение идеи функциональности вначале было связано с функциями вещественных переменных, и тогда эта идея была равнозначна идее зависимости. Так, если значение X зависит от значения x и не зависит ни от какой другой изменяющейся величины, то принято X рассматривать как функцию x; при этом обычно еще подразумевается, что X выводится из x при помощи ряда операций.

Детальное знание z однозначно определяет x и y; поэтому значения u и v могут рассматриваться как известные, а следовательно, известным будет также и w. Таким образом, значение w зависит от значения z и не зависит от значений переменных, не связанных с z; имея в виду упомянутое выше понятие функциональности, мы можем теперь сказать, что w является функцией z.

Вполне совместным с рассмотренной точкой зрения будет, однако, и понимание комплексной функции как функции двух независимых элементов, из которых составлено z; и мы приходим всего лишь к рассмотрению функций двух вещественных независимых переменных с (возможно) мнимыми коэффициентами.

Оба эти аспекта зависимости w от z предполагают, что z рассматривается как составная величина, содержащая два независимых элемента, которые могут быть отделены друг от друга. Нашей целью, однако, является понимание z как наиболее общей формы алгебраической переменной, которая является неразлагаемым целым. Поскольку это предварительное условие по отношению к z оказывается невыполненным, ни один из указанных аспектов не может быть нами принят.

Допустим, что w понимается как функция z в том смысле, что она может быть построена при помощи определенных операций над z, рассматриваемым как неразлагаемая величина, и что u и v возникают после выполнения всех этих операций отделением действительной и мнимой части при замене z на $x+iy$. Таким образом, предполагается, что одной серии операций достаточно для одновременного построения и u, и v, в отличие от общего случая построения комплексной функции (см. выше), где требовалась одна серия операций для u и другая для v. Если это предположение оправдывается тем, что эти два различных метода построения приводят к одной и той же форме функции, то отсюда вытекает, что обе серии операций, которые приводят в общем случае к u и v, должны быть эквивалентны той единственной серии, которая приводит сразу и к u, и к v, т. е. что между этими величинами должны существовать какие-то соотношения; другими словами, u и v, как функции от x и y, должны иметь родственные функциональные формы:

. . . .

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{dw}{dz}, \tag{1}$$

. . . .

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

Это — необходимые... и достаточные... соотношения между функциональными формами u и v.

Приведенное выше определение необходимых и достаточных условий функциональной зависимости основывается на существовании функциональной формы, но в то же время сама эта форма оказывается несущественной, ибо как мы это уже отмечали, она исчезает из формулировки условий. Постулирование существования такой формы эквивалентно предположению, что значение функции может быть вычислено для каждого конкретного значения независимой переменной, хотя явная формулировка этой предпосылки в данном случае исчезла из нашего поля зрения. Обращение с функциями действительных переменных показывает, что в большинстве случаев удобнее использовать их свойства, чем знать их частные числовые значения. Это подтверждается также сказанным выше. Существенными условиями функциональной зависимости являются уравнения (1)...».

В наше время, конечно, функция $y=y(x)$ означает, что имеется класс «аргументов» x и что каждому x поставлено в соответствие одно и только одно «значение» y. После некоторых тривиальных разъяснений (а может быть, и без них?) мы можем осмелиться сказать, что функция есть просто класс C пар (x, y) (с учетом порядка в скобках), подчиненный (только) тому условию, что x в различных парах должны быть различными. (И утверждение «между x и y есть зависимость R» означает просто *задание класса*, который может быть любым классом упорядоченных пар.) В наше время, кроме того, x может обозначать элемент любой природы так же, как и y (например, класс или высказывание). Если мы хотим рассматривать функции, которые себя «хорошо ведут», например непрерывные функции действительной переменной, или $f(z)$ Форсайта, то мы определяем, какая функция называется непрерывной и т. д. (на что для функции Форсайта понадобятся 2 строки), и рассматриваем класс таких функций. Вот и все. Такая ясность дневного света считается теперь само собой разумеющейся, но она сменила мрак полуночи [1]). Основной шаг был сделан Дирихле в 1837 г.[2]) (для функций действительной переменной, где класс аргументов состоит из некоторых или всех действительных чисел, и класс значений также ограничен действительными числами). Для функций высказываний, например, полное равноправие было достигнуто в 1920-х годах.

Предположим теперь, вновь представляя себе историю несколько иной, чем она была на самом деле, что внесение ясности произошло позже, и было связано (как это легко могло случиться) с успехом идей Дедекинда. Я буду, следовательно, считать, что идея функции возникла в связи с теоремой Ферма. (Если это отклоняется, то «отмена смертной казни» вместо теоремы Ферма должна быть связана с рядами Фурье или дифференциальным уравнением теплопроводности.)

Рассмотрим теперь функцию, для которой класс аргументов состоит из моментов t (исторического) времени, а значение $f(t)$ является состоянием Вселенной (описываемым достаточно подробно с учетом всех событий, которые

---

[1]) Несчастье состояло, конечно, в навязчивой мысли, что значение функции «должно» получаться из аргумента при помощи «серии операций».

[2]) И Лобачевским, сделавшим его еще раньше.— *Примеч. пер.*

могут кого-либо интересовать). Если t_0 — настоящий момент, то $f(t)$ для $t<t_0$ представляет собой описание или словарь всего того, что произошло. Предположим теперь, что этот словарь перенесен назад, т. е. отнесен к более раннему моменту времени τ; тогда он содержит предсказания о том, что должно случиться между моментами τ и t_0. Ясно, что это рассуждение имеет *прямое отношение* к проблеме о детерминизме и свободе воли и может повлиять на колеблющихся. Колебания в вопросе о свободе воли отражаются на решении проблемы моральной ответственности и, таким образом (хорошо это или плохо), на решении проблемы наказания. Некоторые реформаторы руководствовались и более дикими идеями.

Математическое образование

Это — мое образование. Оно иллюстрирует общее положение дел до 1907 г., но имеет и свои специфические особенности.

К числу моих слабостей не принадлежит ложиая скромность, и я охотно сообщаю, что был очень развитым ребенком. Между прочим, раннее развитие не имеет для математика особого значения, и мы имеем массу примеров как раннего, так и более позднего развития среди математиков. Что касается меня, то я принадлежу к числу рано развившихся.

Я родился 9 июня 1885 г. и жил в Южной Африке с 1892 г. по 1900 г.; в возрасте 14 лет я покинул университет в Кейптауне и спустя 2 или 3 месяца отправился в Англию, чтобы учиться в школе Св. Павла, где в течение 3 лет моим учителем был Ф. С. Маколей. Знания мои по современным стандартам были незначительны: первые 6 книг Евклида, немного алгебры и тригонометрия до решения треугольников. 3 года в школе Св. Павла я занимался очень усердно и в результате переутомления некоторое время находился в состоянии депрессии.

Учебной традицией в те времена (восходящей, в конечном счете, к Кембриджу) было интенсивное изучение «низших» методов до перехода к методам «высшим»; так, аналитические методы в геометрии проходились поздно, анализ — очень поздно. При этом каждый учебник изучался до конца или почти до конца, прежде чем открывался следующий. Была принята такая последовательность учебников: *Алгебра* Смита; *Тригонометрия* Лонея; *Геометрия конических сечений* самого Маколея (довольно трудная книга: например, метрические свойства параболы разобраны в ней с бесконечной виртуозностью); *Статика и динамика* Лонея, без применения анализа; *Аналитическая теория конических сечений* Смита; *Дифференциальное исчисление* Эдвардса; *Интегральное исчисление* Уильямсона;

Гидростатика Безанта. Все эти книги были аннотированы Маколеем и снабжены контрольными работами, которые мы периодически писали. В дополнение к обязательному минимуму каждый мог читать все, что отвечало его индивидуальным вкусам. Мое дополнительное чтение шло, насколько я помню, в такой последовательности: *Дополнения к Евклиду* Кэзи; *Алгебра II* Кристалла; *Конические сечения* Салмона; *Тригонометрия* Гобсона (2-е изд., 1897); *Динамика точки* Рауса (более 400 страниц с весьма сложными дополнениями в конце); *Динамика твердого тела* Рауса; сферическая тригонометрия (со всеми мельчайшими подробностями); *Дифференциальные уравнения* Мэррея; *Стереометрия* Смита; *Теория уравнений* Бэрнсайда и Пэнтона; *Статика* Минчина (без теории упругости, но с теорией притяжения, сферическими гармониками и, конечно, подробным исследованием притягивающихся эллипсоидов [1])).

Я прочел почти все из этого списка до университетских вступительных экзаменов на стипендию в декабре 1902 г. (Ожидали, что я сдам эти экзамены хорошо, но вопросы в письменных работах были для меня слишком трудными, и я получил только Малую стипендию в Тринити-колледж [2]).) За несколько недель до этого у меня был тяжелый грипп, и хотя я не чувствовал себя нездоровым, по-видимому, все же я не был в лучшей своей форме. В школе нас не слишком загружали учебной работой, и мы не слушали лекций; каждый из нас мог в случае каких-либо затруднений обратиться к Маколею, но этого, как правило, никто не делал. Время от времени мы представляли письменные работы,— сначала решения указанных им задач из изучаемой книги, а затем задачи по нашему выбору. (Мы получали еженедельное задание из Вулстенхолмовского сборника, составлявшееся Маколеем, а впослед-

---

[1]) Излюбленный вопрос в системе английского математического образования, впервые подробно рассмотренный самим Ньютоном.— *Примеч. пер.*

[2]) Я вспомнинаю, как сильно я был расстроен на первом письменном экзамене тем, что напротив меня сидел экзаменующийся, который с большой быстротой разделывался с одной задачей за другой; на следующих экзаменах я уже выбирал другое место. То был, вероятно, Мерсер (который окончил до этого Манчестерский университет и начинал в Кембридже все сначала, что в те годы довольно широко практиковалось). Я помню также, что Кембридж внушал мне такое благоговение, какого я уже никогда больше в жизни не испытывал.

ствии старшим учеником, каковым на последнем году обучения был я сам; если никто из нас не мог решить какую-либо задачу, то обязанностью Маколея было решить ее перед нами на доске.) Классу рекомендовали обращаться за помощью к старшим ученикам, что приносило большую пользу всем. Работа по подготовке к экзамену на стипендию заключалась только в повторении материала за предшествующую четверть. (Маколей достиг больших успехов в преподавании. За 25 лет его работы в школе 52 его ученика получили университетские стипендии (из них 34 — в Кембридже); среди них за 20 лет 4 были первыми в своих выпусках из университета, 1 занял второе место и 1 — четвертое. Годы моего учения были в этом отношении годами «пик». Дж. Н. Ватсон, на курс младше меня в школе и в Кембридже, также был первым; между прочим, он был такой же вундеркинд, как и я. Дж. Р. Блэнко-Уайт, на курс старше меня, был вторым в своем выпуске.) Д-р Максвелл Гарнет правильно отметил в своем описании образования, что оно носило университетский характер. Так как от нас ждали уверенности в своих силах, мы по большей части обретали ее, и поскольку сам Маколей был творчески активен (он стал членом Королевского общества в 1928 г.), мы проникались чувством, что занятия математикой являются нормальной человеческой деятельностью.

До сих пор мое образование протекало правильно, а отдельные его недостатки коренились в самой системе. Было бы лучше учить анализ по французскому *Cours d'Analyse*, а не по Кристаллу и Гобсону, но это было бы в высшей степени необычным. Я не считал себя математиком (и, тем более специалистом в области анализа) до тех пор, пока я не сдал первый экзамен в университете, но я обладал инстинктивным интересом к математической строгости и легко одолевал главы из Кристалла о пределах и сходимости. Книга эта написана строго (в разумных пределах); тем не менее, я по-настоящему понимал, например, равномерную сходимость, хотя и достиг этого с большим трудом. (2-е издание Гобсона, 1897 г., представляет собой, по замечанию Маколея, странное сочетание придирчивой строгости с удивительными промахами [1]), которые,

[1]) ✶ Например, неверное доказательство того, что два степенных ряда, принимающих одинаковые значения, имеют одни и те же коэффициенты. На с. 243—244 мы также находим странные абзацы: «Если предел S_n бесконечен или если он конечен, но не определен, то

однако, меня, проработавшего «сходимость» по Кристаллу, не вводили в заблуждение.)

Но с этого момента (после экзамена на стипендию) я начал растрачивать свое время, за исключением редких периодов интенсивной работы; это длилось около $2^1/_2$ лет (последние 8 месяцев в школе и 2 академических года в Кембридже). Сначала о 8 месяцах в школе. Первое время после экзаменов я, правда, читал *Стереометрию* Смита; это не заняло много времени, но я припоминаю, что хотя я быстро во всем разобрался, к экзамену по этому материалу я не был готов и на выпускных экзаменах в школе не мог решить некоторых задач. Из вопросов прикладной математики лучше всего было выбрать «воду, газ и электричество». Подходящего учебника по электричеству, по-видимому, не было, но зато имелась *Гидродинамика* Ламба. Я очень долго (по собственной оплошности) изучал динамику и дошел до вопроса о движущейся системе координат. По чистой математике идеалом было бы чтение какого-нибудь полного *Cours d'Analyse*. Вместо этого я потратил массу времени на чтение книги Тэта, посвященной бесполезной теме о кватернионах. Затем наступил один из рабочих периодов: я занялся чтением *Введения в теорию аналитических функций* Харкнесса и Морлея (1898 г.). Здесь следовало бы начать распространяться о бесконечных горизонтах, которые открылись передо мной, и о новом понимании математики, которого я достиг, но фактически дело обстояло несколько иначе. Отдельные вещи [1]) действительно изумили и потрясли меня, а неко-

---

ряд расходится»; «Чтобы доказать достаточность [общего принципа сходимости], обозначим через R_n бесконечный ряд $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$, остаток после n членов; устремляя r к бесконечности [в $\sum_{n+1}^{n+r}$], мы видим, что $|R_n|<\varepsilon$, если $n\geqslant m$, и, следовательно, значение S заключено между $S_n\pm\varepsilon$ [а ε произвольно мало]; с другой стороны, S_n является суммой некоторого числа конечных величин, а поэтому само конечно. Таким образом, $S_{n+r}-S_n$ может быть сделано сколь угодно малым, если выбрать n достаточно большим; следовательно, $\lim S_n=\lim S_{n+r}$ и значение S определено, так как оно не зависит от формы n». [Для сокращения сделаны тривиальные изменения.]* Когда Гобсон это писал, он уже был специалистом в области анализа. Мы имеем здесь один из наиболее ярких примеров слепых пятен и слепого следования традиции при написании учебника: никто не может подвергать сомнению каждое написанное им слово. Я однажды поймал себя на том, что на лекции автоматически привел очень плохой признак законности дифференцирования под знаком интеграла, в то время как мне был известен гораздо лучший признак, который я, несомненно, использовал бы в работе.

[1]) Такие, как вычисление определенных интегралов при помо-

торые из них надолго врезались в мою память [1]). Но бесконечные горизонты не открылись. Откровенно говоря, я скептически отношусь к «Введениям»: они могут быть прекрасным чтением, если вы уже знаете предмет, но я не думаю, чтобы они могли увлечь читателя, незнакомого с предметом. Для такого читателя ничто не может заменить подробного изложения со всеми техническими деталями, требующего честной проработки. Между прочим, книга Харкнесса и Морлея несколько запутанно излагает вопрос о действительном числе, но это, вероятно, было неизбежно в 1898 г.; ничто из того, что изучало мое поколение, не обладало той бодрящей четкостью, с которой встречаются студенты сегодня.

Прибыв в Кембридж (октябрь 1903 г.), я в течение 2 лет (20 месяцев [2])) готовился к первому экзамену; моим репетитором был Р. А. Герман, друг моего отца и последний крупный репетитор [3]). Когда я вспоминаю об этом времени, оно представляется мне довольно мрачным. Если говорить о том новом, что я узнал и что действительно было достойно изучения, то стоит отметить движущуюся систему координат в динамике, гидродинамику и дифференциальную геометрию (сверх того, что есть у Смита), а также небольшие добавления к тому, что я уже знал о сферических гармониках и анализе в комплексной области. Мои знания по электричеству были незначительными и отрывочными; я никогда не видел уравнений Максвелла [4]). Энтузиазм у меня вызвали только два курса:

щи контурных, что при первом знакомстве производит ошеломляющее впечатление на каждого студента.

[1]) В связи с этим возник один инцидент в первом триместре моего прибывания в Кембридже. Наш лектор по анализу был большим педантом. Однажды на лекции мне было ясно, о чем дальше будет идти речь, так как я хорошо помнил Х. и М., поэтому я быстро записал все в своем конспекте и стал демонстративно смотреть в окно. «Вы не собираетесь записывать то, что я говорю, сэр?» — «Я уже все записал». Он явно колебался, попросить ли мой конспект для проверки или нет (тогда еще обо мне как о студенте ничего не было известно), но в конце концов сказал: «Прошу прощения». Присутствовавшие в аудитории считали, что я выиграл эту встречу по очкам, но сам я чувствовал, что победа осталась за ним, поскольку я был невежлив.

[2]) Включая только одни Большие каникулы.

[3]) Реформа (1910 г.) почти сразу уничтожила институт репетиторов.

[4]) Справедливость требует отметить, что я не мог изучать все читавшиеся курсы (в колледже или с репетитором). Для полноты картины следует добавить, что я растратил время на оптику и астрономию (не стоящие изучения) с тем, чтобы после этого забросить их.

в первом триместре заставлявший мыслить курс оснований механики А. Н. Уайтхеда и прекрасный курс дифференциальной геометрии Германа; подробнее об этом я скажу позже. Чтобы претендовать на первое место в своем выпуске, надо было две трети всего времени израсходовать на тренировку в быстром решении трудных задач. Помню, что я не придавал серьезного значения посещению лекций, за исключением лекций Германа; мои конспекты показывают, что я присутствовал примерно только на половине всех лекций, а если я не посещал лекций по какому-нибудь курсу систематически, то больше я уже не заглядывал в конспекты.

Принято было говорить, что тренировка в «навыках преобразований» приносит позже пользу в исследовательской работе. Я отрицаю это почти безоговорочно — такие навыки далеко не ведут. Мой опыт показывает, что после нескольких лет от них ничего не остается, кроме умения щелкать как орешки экзаменационные задачи (из современных сборников) с маленьким глупым чувством гордости за демонстрируемую виртуозность, которая ценится и по сей день; меня это никогда не заботило в отличие от моих младших коллег. (Я сказал «почти безоговорочно»; существуют редкие исключения. Если бы Герману в удачный момент предложили одно из более замысловатых элементарных неравенств, я легко могу себе представить, что он наметил бы доказательства, близкие к самым современным и самым изящным, а может быть, сделал бы и новые открытия.)

Старая система университетских экзаменов и ее пороки теперь уже ушли в прошлое; я не хочу стегать мертвую лошадь. Я не претендую на роль жертвы, тонкая натура которой не могла в полной мере развиться и зачахла. Я брал жизнь такой, какой она была; игра, в которую мы играли, давалась мне легко, и я даже чувствовал некоторое удовлетворение от своего мастерства.

Подробности моей карьеры за эти 20 месяцев были следующими. В первом триместре я работал слишком много. С другой стороны, я почти не работал во втором триместре (частично из-за подготовки к лодочным гонкам); в результате я принял участие в мартовских экзаменах на Большую стипендию [1]), к которым все равно нельзя было как

[1]) Это были конкурсные экзамены, открытые для всех; сейчас они отменены.

следует подготовиться; чувствуя себя достаточно уверенно, я полностью восстановил свою репутацию, испорченную провалом на вступительных экзаменах, сдав первым во главе списка. В июне я сдавал майские экзамены за 2-й год и вновь оказался первым (Мерсер эти экзамены не сдавал). Я получил максимальное число очков за задачи из анализа, и это было моим первым знакомством с изумленным Харди, который в это время только начинал свою работу в Тринити-колледже (и частным образом репетировал Мерсера). В течение 2-го года моего обучения единственным академическим событием был экзамен, где я разделил первое место с Мерсером (мне тогда еще не было 20 лет).

Майские экзамены по анализу напоминают мне один мой неумный эксперимент, и я остановлюсь на нем. Я жил в Байдфорде (Дэвон) и решил провести часть пасхальных каникул, забравшись в Хартленд Кей (чудесная местность и наиболее удаленный от железной дороги населенный пункт Англии). Основная идея состояла в том, чтобы бросить курить, сосредоточенно работать по утрам и после обеда и «отдыхать», читая поэзию и философию (Principia Ethica) по вечерам, подкрепляясь крепким кофе. (Кстати сказать, мое поколение работало главным образом по ночам, и час ночи считался ранним временем для отхода ко сну: существовало чудовищное мнение, что 8 часов — это ежедневный минимум для занятий математикой; истинно добродетельный человек должен был выкраивать за счет сна 10 часов работы в день.) Мое окно выходило на море, которое я использовал как корзинку для бумаг, и по прибытии я торжественно выбросил в него мою трубку и табак. Однако уже на следующий день я закурил снова. Работал я там без напряжения, занимаясь чтением тех мест из *Современного анализа* Уиттекера, которые мне еще не были известны, и повторяя все остальное; поэтому-то я и был так хорошо подготовлен по анализу на майских экзаменах. Этот эксперимент показал мне справедливость того правила, что для серьезной работы нет ничего лучше привычных условий и обычного режима и что на отдыхе надо отдыхать. На эту тему можно было бы сказать многое, но здесь не место для этого; скажу, однако, чего мне надо избегать, когда я занят творческой работой: это, в первую очередь, кембриджской жизни с ее оживленными беседами умных людей — вредными стимулами, отвлекающими мысль в сторону, и товарами, выставленными в витринах.

Кое-что о самих майских экзаменах. Они состояли из 7 работ («первые 4 дня») на сравнительно элементарные темы, но с довольно сложными дополнительными вопросами, за которыми через неделю («вторые 4 дня») следовали еще 7 работ. Успешное выполнение работ первых 4 дней давало право сдавать следующие экзамены на степень [1]), но работы вторых 4 дней были оценены примерно двойным числом очков, а так как было просто невозможно подготовиться ко всему, то кандидаты на первые места концентрировали свои усилия на подготовке ко вторым 4 дням [2]); к тому же в работах вторых 4 дней почти всегда можно было найти достаточно вопросов по основным предметам. Лидеры после первых 4 дней обычно имели примерно одинаковые результаты; вопросы и задачи, с которыми им приходилось иметь дело, теперь кажутся почти невероятными. Все это — потерянный мир, и за исключением отдельных случаев я даже приблизительно не помню, какие задачи мне приходилось решать. Я унаследовал от одного из экзаменаторов ведомость с оценками за мой год (1905). Если исключить работу по решению задач повышенной трудности, то за первые 4 дня лидеры получили 1350, 1330, 1280, 1230 очков (третий и четвертый из них в дальнейшем вышли на первое место); за ними следовали еще 8 лидеров, из которых последний получил 990 очков. Максимальное число очков было 1930, и работы состояли из 10 задач каждая, большей частью с трудными дополнительными вопросами. По задачам повышенной трудности Мерсер получил 270 очков из 760 за 18 задач (я получил только 180). По одной работе я получил 177 очков из 230 за дополнительные вопросы, и об этом я коечто помню. Один вопрос относился к циклу Карно и требовал только книжных знаний, но я этого вопроса не знал. Другой относился к конденсатору, о котором я тоже ничего не слышал, но мне удалось разобраться в этом вопросе по ответу к дополнительной задаче. Я припоминаю, однако, что я сделал *все*, кроме вопроса о Карно, так что потерянные мною очки были вычтены за ошибки в арифметических расчетах и вообще за свойственный мне «неряшливый стиль» [3]). За вторые 4 дня Мерсер и я (не считая

[1]) Диплом об окончании университета.— *Примеч. пер.*

[2]) Мне пришлось писать одну очень неприятную работу в первые 4 дня; сплошь оптика и астрономия.

[3]) Я сам никогда не снижаю очков на экзаменах за неряшливость как таковую (и всегда протестую против лепета экзаменаторов по

работы с задачами повышенной трудности) получили каждый примерно по 2050 очков из 4500 (по задачам повышенной трудности общим числом 18 каждый из нас получил приблизительно 330 очков из 1340 возможных). Что меня больше всего удивляет в этой ведомости — это то, что я по одной из работ (смешанная работа по чистой и прикладной математике), требовавшей только книжных знаний, получил почти полное число очков (290 из 310, так что я, очевидно, временно избавился от «неряшливости»), *плюс* 250 очков из 590 за дополнительные вопросы.

График распределения очков, полученных на экзаменах, далек от гауссова; от своей высшей точки он идет дальше горизонтально. Это легко понять, но интересно, что соответствующий график для недавних майских экзаменов имеет, грубо говоря, гауссову форму.

Только в отношении еще одной задачи я уверен в том, что решил ее, и именно по следующей причине. Я начал решать задачу по элементарной теории чисел, в которой я чувствовал уверенность со школьных дней. Задача не получалась, я не мог ее решить после ряда попыток. Мне понадобилась еще бумага; проходя мимо других экзаменующихся, я краем глаза увидел жирную галочку против этой задачи в работе одного студента, который никак не принадлежал к числу ведущих, и я подсознательно заключил, что задача должна быть очень простой, так что я напрасно усложнял дело; после этого я сравнительно легко решил ее. Сугубо щепетильный человек не стал бы уже решать эту задачу; я немного жалею, что так не поступил, но слишком больших угрызений совести мой поступок за собой не повлек.

Теперь о втором экзамене (1906 г.). Здесь мы имели дело с настоящей математикой (этот экзамен, не считая того, что он теперь является третьим и проводится на третьем, а не на четвертом году обучения, остался почти без изменений с 1880-х годов). Много времени я потратил

поводу «неряшливости в выкладках и ошибок в расчетах»). Сумбурное изложение в продуманной рукописи является, конечно, тяжким грехом, но в рукописи, написанной наскоро в экзаменационных условиях, оно простительно. В связи с этим вообще говорилось много глупостей. Я с удовольствием вспоминаю одного человека, который был знаменит ясностью своей мысли и каллиграфическим исполнением экзаменационных работ; его всегда ставили нам в пример. Его дальнейшая карьера ознаменовалась таким числом плохих, запутанных и совершенно неверных математических работ, какого я не встречал ни до, ни после него.

зря, о чем, конечно, можно пожалеть. Однако это являлось, в общем, нормальным явлением, связанным с поисками и ошибками. Продолжая изучение дифференциальной геометрии, я приступил к чтению *Теории поверхностей* Дарбу и проработал 3 из 4 томов (т. е. в общей сложности 1500 страниц). Это — замечательное произведение, но мой начальный энтузиазм несколько упал: дифференциальная геометрия не была моим призванием. На экзаменах встретилось несколько вопросов из нее, и я на все ответил; но я мог бы ответить на них и на год раньше по лекциям Германа. В остальном мои занятия были посвящены разным вопросам анализа. В деле подготовки будущего специалиста по математическому анализу Кембридж неизменно достигал одного: глубокого знания функций Лежандра и родственных вопросов. Такие предметы справочного характера никуда не годятся для хорошего математика. Обязательность этих знаний обеспечивалась еще и тем, что читался отдельный курс (Э. У. Гобсоном; впоследствии он написал стабильный учебник по этому предмету); я был единственным его слушателем. Я с удовольствием вспоминаю о том, что все эти вещи полностью оставались у меня в памяти: мне пришлось встретить несколько задач по этому разделу на экзамене, и я решил их все без затруднений. Я был также единственным слушателем курса Э. У. Барнса по обобщенным Г- и ζ-функциям. Весьма оригинальный курс читался также Г. Ф. Бэйкером по избранным вопросам из различных областей анализа; этот курс был весьма стимулирующим, но его построение нельзя было назвать педагогичным. Я записался также на более элементарную из двух частей курса эллиптических функций и «слушал» соответствующий курс А. Берри. Лекции Берри начинались в 9 часов утра, и я попадал только на половину из них (поскольку работал до 2—3 часов утра); я никогда не обращался к своему конспекту этих лекций, и я не прибегал также к очевидной альтернативе чтения учебника (хотя в те годы, в отличие от нынешнего времени, студенты в значительно большей степени опирались на учебник, чем на лекционный курс). Поэтому я не собирался сдавать экзамен по этому предмету. Дело в том, что я тогда еще не имел представления о том, чем мне следует заниматься в первую очередь и, в частности, еще не изучил как следует теорию функций комплексного переменного. Приобретя каким-то образом определенные сведения из математического анализа, я еще никогда серьезно не изучал ни одного *Cours d'Analyse*. Другие математики уже неоднократно отмечали, что впервые они поняли, что́ такое настоящая математика, только читая Жордана; я это упустил. Но я вообще был в своих занятиях весьма несистематичен; Пикар был бы, несомненно, очень полезен для меня. Все это я помню весьма смутно и, вероятно, я уже давно забыл многое из того, что было мной прочитано. За несколько недель до экзамена, в третьем триместре, мне попались в руки ранние тома серии Бореля; они-то, в сущности, и оказались первыми книгами, по-настоящему взволновавшими меня; ряды с положительными членами, расходящиеся ряды и том, посвященный целым функциям. Знание материала первых 2 книг не имело значения для экзаменов, третью я официально представил как проработанную к экзаменам, но я ее потерял, не мог быстро раздобыть другой экземпляр, и поэтому не отчитывался по ней. Но теперь я уже знал, что́ мне нужно.

По некоторым особым причинам я могу точно воспроизвести подробности относительно одной работы (пятница, 1 июня 1906 г.), и в свете моей дальнейшей деятельности меня интересует, чего я тогда *не знал*. В работе было 6 вопросов:

1. Функции Лежандра.
2. Перемножение рядов.
3. Разрывные функции, интегрируемые по Риману.
4. Обращение степенного ряда (с определением радиуса сходимости).
5. Конформное отображение овала на полуплоскость.
6. Эллиптические функции (ϑ-функции из второй части предмета, по которой я не отчитывался).

Из них единственным вопросом, который я действительно должен был бы знать, был вопрос 1 (по которому я, конечно, получил наибольшее число очков, затратив минимум времени). По правилам игры это давало мне право на полное число очков за всю работу; но в таких случаях студенты всегда нервничали по поводу того, заметят ли экзаменаторы, что ответ на вопрос был действительно исчерпывающим (именно это и является причиной того, что об этой работе я помню все). Кое-что я знал по вопросу 2, но не в той форме, в какой он был поставлен, так что мой ответ был небезупречным. По остальным вопросам я фактически ничего не знал (хотя за 5 лет до этого, в школе, я знал вопрос 2).

Мне сообщили, что я очень хорошо прошел через весь экзамен. Однако я не имел еще права на получение степени [1]). В те времена экзамен, сданный на втором году обучения, совершенно не засчитывался и, хотя второй экзамен давал право на степень, если он сдавался на четвертом году обучения, он не давал этого права, если сдавался на третьем году. Впрочем, была предусмотрена возможность исключений (специальным решением Сената), но я только впоследствии случайно узнал об этом.

Существовало 9 экзаменационных классов, от I (1) до III (3). Уровень классов был иногда чудовищно низким, и в 1910 г. эта система экзаменов сгорела в последней вспышке своей славы. Исключительно многочисленный и сильный контингент студентов этого года дал впоследствии 6 хорошо известных профессоров математики и людей, занимавших эквивалентное положение.

Чтобы покончить с лекциями. На четвертом году обучения почти не оставалось таких курсов, которые мне стоило бы посещать. Профессор А. Р. Форсайт читал курс дифференциальных уравнений; это не отвечало моим вкусам. Но я посещал лекции Уайтхеда по основаниям геометрии и основаниям математики, которые читались впервые. Этот курс слушало 3 или 4 человека, но мы находили его очень интересным. (Уайтхед незадолго до этого был избран старшим лектором в Тринити-колледж. В его обязанности входило чтение факультативных курсов. Читавшиеся им в колледже обязательные курсы, за исключением курса о принципах механики, были весьма солидными, но скучными и относились к прикладной математике: математик иногда обязан быть скучным, как, например, Эддингтон в своих лекциях по сферической тригонометрии.) Я не помню, чтобы я посещал еще какие-либо лекции.

Моя исследовательская работа началась, естественно, в Большие каникулы третьего года обучения, в 1906 г. Мой научный руководитель Э. У. Барнс предложил мне в качестве темы целые функции порядка 0. Первой задачей было найти асимптотические формулы для функций с простыми нулями вида $a_n = e^n$; аналитические методы, которые он успешно применял к порядкам, отличным от 0, здесь не работали. Между прочим, в связи с этим я познакомился еще с одним знаменитым и важным томом из бо-

---

[1]) Речь идет о степени бакалавра, т. е. диплома об окончании университета.— *Примеч. пер.*

релевской серии, *Calcul des Résidus* Линделёфа. Упомянутые методы не работали по самым основательным причинам, как это выяснилось в дальнейшем, но предложение Барнса оказалось очень удачным; мне сразу сильно повезло, и я вскоре, переключившись на элементарные методы, сделал одно открытие; после этого я быстро пошел вперед. Возникла гипотеза, что функция порядка 0 должна на достаточно больших окружностях иметь свойство

$$m(r) > \{M(r)\}^{1-\varepsilon},$$

где $m(r)$ и $M(r)$ — максимум и минимум модуля. Доказательство этого, по крайней мере элементарными методами, достаточно трудно, и заняло у меня, вероятно, несколько месяцев. [Соответствующий результат для порядков, отличных от 0, состоит в том, что для порядков, меньших $^1/_2$, $m(r)$ так же велико, как некоторая положительная степень $M(r)$ (на некоторых окружностях).] Это я мог доказать только для $^1/_4$ вместо $^1/_2$; полный результат был позже доказан А. Уайменом более «теоретико-функциональными» методами. Однако А. С. Безикович недавно возродил элементарные методы, которыми он доказал некоторые дальнейшие результаты. Я послал в Лондонское математическое общество длинную работу относительно функций порядка 0 (1 января 1907 г.). Теперь бы я ее написал значительно короче, но она была написана вполне прилично, и результат

$$m > M^{1-\varepsilon}$$

следует рассматривать как неплохой. Эта работа содержит также первое, насколько мне известно, применение метода усреднения. (Нужно доказать, что некоторая функция $f(x)$ превышает определенное число m в *какой-то* точке отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$. Так как ни о какой конкретной точке ничего нельзя сказать, то иногда представляется такой выход: показать, что среднее значение $f(x)$ на $(0, 1)$ превышает m; тогда должна существовать *какая-то* точка x, хотя мы и не можем указать ее, в которой $f(x) > m$.) Рецензенты разошлись во мнениях, причем один из них дал резко отрицательный отзыв (к тому времени, когда я узнал, кто был этим рецензентом, что произошло гораздо позже, я уже совершенно объективно считал его не очень умным). Харди был назначен третьим рецензентом, и работу напечатали. С тех пор у меня никогда не было никаких затруднений с публикацией работ, за исключением одной работы, написанной мной совместно с Харди, которая была отвергнута (совершенно напрасно) Кембриджским философским обществом.

Барнс счел возможным поставить теперь передо мной новую задачу: «доказать» гипотезу Римана. Это героическое начинание осталось все же небезрезультатным; мне придется начать с краткого очерка состояния теории $\zeta(s)$ и простых чисел в 1907 г. и, в частности, изложить, что́ я тогда по этому поводу знал. Я встретился с $\zeta(s)$ в книге Линделёфа, но в этой книге нет ничего относительно простых чисел, и я не имел ни малейшего представления о существовании какой-либо связи между этими вопросами; для меня *г. Р.* была просто знаменитой гипотезой из теории целых функций; все это произошло в Большие каникулы, когда я не имел доступа к литературе, к которой мог бы обратиться, если бы подозревал, что такая связь существует. (Даже среди лучше информированных людей только немногие слышали о работе Адамара, и еще меньшее число знало работу Валле-Пуссена в бельгийском журнале. Во всяком случае вопрос считался очень трудным и лежащим вне основного направления развития математики. Знаменитая работа Римана содержится в его собрании сочинений; в ней сформулирована *г. Р.* и приведено замечательное, но недоказанное «явное выражение» для $\pi(x)$. *Основная теорема теории простых чисел* не упоминается, хотя ее содержание легко угадывается, если исходить из этого «явного выражения». В частности, Харди рассказал мне позднее, что он «знал» о том, что основная теорема теории простых чисел доказана, но думал, что это было сделано Риманом. Все это сразу изменилось с появлением в 1909 г. книги Ландау.)

Я помнил формулу Эйлера

$$\sum n^{-s} = \prod (1-p^{-s})^{-1};$$

нас познакомили с ней в школе как с курьезным фактом (и поступили правильно, так как это прекрасная «шутка»). (Этой формулы нет в *Алгебре* Кристалла, что очень странно; но в главе о сходимости имеется пример с указанием: $\Sigma f(p)$ сходится, если сходится $\frac{\Sigma f(n)}{\log n}$. Здесь опечатка: вместо n надо читать p. По поводу возникающего неверного утверждения я сделал в 1902 г. пометку: положи $f(p) = \frac{1}{p}$; в 1902 г. я был уверен, что $\Sigma \frac{1}{p \log p}$ сходится —

это, ввиду формулы Эйлера, не так уж неправдоподобно.) В свете формулы Эйлера естественно изучать $P(s)=\Sigma p^{-s}$. Я вскоре обнаружил, что если основная теорема теории простых чисел верна с остаточным членом «порядка $\sqrt{x}$», то отсюда следует *г. Р*. Надо учесть, что в те времена никто из математиков, специально не знакомившихся с соответствующей литературой, не подозревал о существовании какой-либо чертовщины в распределении простых; поэтому ошибка в $\sqrt{x}$ представлялась совершенно естественной по той причине, что простой делитель n не может превосходить $\sqrt{n}$. В силу всего этого я приступил к работе с большим воодушевлением и уверенностью в успехе, и только после недельных мучений осознал действительное положенне вещей. Однако я заработал все же утешительный приз. Мне пришло в голову обратить рассуждение: я принял (по линии наименьшего сопротивления), что *г. Р*. действует для целой функции

$$\Pi\left\{\left(1+\frac{z}{p}\right)e^{-z/p}\right\},$$

и отсюда успешно вывел основную теорему теории простых чисел. Это я тут же использовал в своей первой работе на соискание звания члена колледжа (сентябрь 1907 г.); в следующем году я забрал ее обратно.

Я ясно помню мои юношеские взгляды на основную теорему теории простых чисел, и они хорошо иллюстрируют шаткость суждений и вкусов иачинающего математика в областях, где нет общепризнанных ориентиров. *Мне самому* очень нравились эти вещи; но я никоим образом не был уверен в том, как их воспримут другие, и если бы кто-нибудь сказал «неплохо, но все же уж очень специальный вопрос», «не настоящая математика», я бы покорно согласился. Харди (в то время младший член жюри) позже рассказал мне, что он «смело» выступал с заявлением, характеризующим эту часть работы как лучшую, не зная при этом, что результат был новым. Хотя в целом эта работа была принята благожелательно, я не был избран в пользу крайне нуждавшегося соискателя; однако было заключено джентльменское соглашение о том, что в следующий раз буду избран я.

С октября 1907 г. до июня 1910 г. я был лектором Манчестерского университета. Оклад в 250 фунтов стерлингов был, конечно, лучше, чем обычные 150 и 120 фунтов, и я последовал совету принять это предложение, что оказалось большой ошибкой. Я мог остаться в Кембридже как аспирант, и мне даже предложили одну из стипендий (которую, кстати, можно было получать наряду с окладом члена колледжа, если соискатель является таковым), но я отказался из-за работы в Манчестере. В смысле денег я ничего не выигрывал, но я чувствовал необходимость в перемене места и обстановки. Если моим дополнительным мотивом было желание много работать, то это желание исполнилось. Моя работа заключалась в следующем: 3 часа лекций провалившимся на вступительных экзаменах (университет за это получал деньги); 3 часа лекций студентам; 3 (иногда 2) часа лекций об основаниях математики учителям (в порядке «повышения квалификации» — совершенно бесполезная, естественно, затея); 2 часа практических занятий с сильными студентами 3-го года обучения, и 3 часа лекций для них же. Кроме этого, много свободного времени уходило на проверку письменных работ студентов младших курсов. В итоге получалось 4 часа работы утром по понедельникам, средам и пятницам, 3 часа утром по вторникам и четвергам; после обеда проверка работ и подготовка к лекциям в рабочей комнате университета примерно от 2.30 до 4 или 4.30. (Мы научились, конечно, читать элементарные лекции с минимумом подготовки, а иногда и просто экспромтом.) Суббота была свободным днем. Но если для большинства преподавателей рабочий день кончался в 4.30, то мне, сверх исполнения обычных обязанностей, приходилось вести еще сложную дополнительную работу. В то время сильные студенты третьего года обучения получали самое широкое математическое образование в стране. Несмотря на официальные экзамены, на которых предъявлялись нормальные для того времени требования, мы основательно изучали с ними в факультативном порядке разные избранные вопросы и занимались на практических занятиях полезными прикладными вещами. Мне была поручена та часть этой работы, которая относилась к чистой математике, причем я имел полную свободу выбора. В качестве одного из факультативных предметов я избрал дифференциальную геометрию. Этот предмет не доставлял мне больших забот, так как я рабски следовал своему конспекту лекций Германа, производя при этом необходимое рассредоточение материала. (Много лет спустя я рассказал об этом Харди, который в свою очередь сознался, что делал то же самое, когда в начале своей деятельности в качестве профессора геометрии [1]) Оксфордского университета узнал, что занимающий эту должность действительно обязан читать лекции по геометрии.) В остальном мои лекционные курсы относились к анализу. Эти лекции требовали от меня очень большой подготовки, которой мне приходилось заниматься по вечерам, причем должен сказать, что ни один курс из читанных мною впоследствии не отнимал у меня бо́льшего времени иа подготовку. В течение первого года моей работы я не располагал вышедшими позже книгами Харди *Курс чистой математики* и Бромвича *Бесконечные ряды*; Жордан, по-видимому, не удовлетворял моих запросов; я мог бы до некоторой степени использовать *Курс* Гурса, но, как это ни удивительно, я не знал о его существовании. Сейчас уже нельзя представить себе тех трудностей, с которыми приходилось встречаться при составлении строгого формально-логического плана изложения, в котором не возникали бы неожиданные провалы (с этой стороны достижение Бромвича вызывало мое восхищение). Моей целью было научить математической технике без претензий на изящество, но зато со всей строгостью (а мы рассматривали и такие вещи, как кратные несобственные интегралы), и это оказалось чрезвычайно трудным делом. Мои лекции пользовались некоторым успехом; временно они даже соблазнили Сиднея Чепмена стать аналитиком. (Мои затруднения еще усугублялись тем, что я был одним из самых безалаберных молодых людей; планы моих лекций были небрежно нацарапаны, что еще не составляет большой беды, но я писал их на отдельных разрозненных листах и содержал в столь хаотическом беспорядке, что их использование было невозможным уже в следующем году.) Ко всему этому остается только добавить, что 2 длинных триместра имели продолжительность в 10 недель каждый; единственное облегчение состояло в том, что Большие каникулы начинались рано, в июне. Такая напряженная работа рассматривалась как нормальное явление, если не считать моих специфических затруднений; что касается научно-исследовательской работы, то предполагалось, что она проводится в свободное время: я припоминаю одни

---

[1]) По старинному обычаю в Англии (как и во Франции) словом «геометрия» часто обозначали всю математику в целом.— *Примеч. пер.*

пасхальные каникулы, когда я был так измотан, что не мог заставить себя работать, испытывая в то же время постоянные угрызения совести по поводу своего безделья. «Современная молодежь не знает, что такое работа». Добавлю еще, что Г. Ламб (занимая одновременно две должности профессора: чистой и прикладной математики) полностью выполнял свои двойные обязанности и находил еще при этом возможность уделять мне много внимания.

Я вернулся в Тринити-колледж в октябре 1910 г. (на место, которое занимал Уайтхэд). Этот момент совпал с возникновением новых математических интересов. Книга Ландау по аналитической теории чисел читалась с исключительным интересом; она навела меня на некоторые мысли о ζ-функции, но здесь нет нужды говорить об этом подробнее. Я живо помню, однако, забавную для меня историю поисков доказательства «теоремы Абеля — Таубера» (если $\Sigma a_n x \to s$ при $x \to 1$ и $a_n = O(1/n)$, то Σa_n сходится к s). Это произошло в Байдфорде во время пасхальных каникул 1911 г. Задача была, несомненно, поставлена передо мною Харди, но я не знал, что он уже доказал (более слабую) «теорему Чезаро — Таубера». Это очень странно, так как он, без сомнения, мне об этом рассказал; не думаю, что это произошло в то время, когда я активно размышлял над проблемами из этой области. С другой стороны, я тогда старался неукоснительно следовать правилу начинающих разузнавать все, что было сделано до них по вопросам, близким к изучаемому; по-видимому, этот случай был исключением. Как бы то ни было, все указанные обстоятельства содействовали успеху. Доказательство основной теоремы базируется на двух не связанных между собой идеях, одна из которых состоит в связи между тремя (или большим числом) последовательных производных (если $f = o(1)$ и $f'' = O(1)$, то $f' = o(1)$ [1])). Я начал с теоремы Чезаро — Таубера, и в процессе отыскания доказательства пришел к теореме о производных; если бы я знал доказательство теоремы Чезаро — Таубера, то теорема о производных, будучи просто одним из звеньев готового доказательства (кстати, весьма отличного от моего), не обратила бы на себя моего внимания, а без этого я никогда не доказал бы основной теоремы. (Теорема о производных была вообще уже известна, но похоронена в недрах одной работы Адамара о волнах.) Начинать думать над проблемой,

[1]) См. на с. 38 сноску [2]).

не вникая особенно глубоко в существующую литературу, является, конечно, правильным методом работы, и я его часто применяю.

Теорема о производных позволяет отбрасывать некоторые части выражения, стремление к нулю которого нужно доказать. Однажды, когда я обдумывал с разных сторон это предложение, у меня смутно возникла мысль сделать число дифференцирований *r большим*. В этот момент до комнаты, где я работал, дошла очередь подвергнуться весенней уборке. Мне ничего не оставалось, как уйти на 2 часа гулять под проливным дождем. Проблема продолжала с силой бурлить в моей голове: рассуждения были обременены несущественными осложнениями, которые в окончательной редакции были устранены, а «идея» все еще была неопределенной и ускользающей. Наконец, я остановился под дождем на мосту (вблизи Кенвичского леса), глядя невидящим взглядом на поверхность реки; через несколько минут меня вдруг захлестнула уверенность, что теорема доказана. Все же 40 минут, которые прошли до моего возвращения и окончательной проверки, были чрезвычайно напряженными.

Оглядываясь назад, я вижу, что именно в это время мои математические вкусы приобрели устойчивость и я пришел к более или менее уверенному суждению о сравнительной ценности тех или иных математических открытий; это был конец моего «образования». Вскоре началось мое 35-летнее сотрудничество с Харди.

Рецензия на Собрание сочинений Рамануджана[1]

(*Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*) / Ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson.—1927.— XXXVI+355 p.

Рамануджан родился в Индии в декабре 1887 г., приехал в Кембридж и начал работать в Тринити-колледже в апреле 1914 г., был болен с мая 1917 г., вернулся в Индию в феврале 1919 г. и умер в апреле 1920 г. Он был членом Тринити-колледжа и членом Королевского общества.

Рамануджан не имел университетского образования и работал в Индии без чьей бы то ни было помощи до 27-летнего возраста. Когда ему было 16 лет, он случайно познакомился с книгой Карра *Synopsis of Mathematics*, и эта книга, получившая теперь широкую известность, о чем ее автор не мог и мечтать, внезапно пробудила в Рамануджане все его дремлющие силы. Чтобы иметь представление о развитии Рамануджана, необходимо критически рассмотреть содержание этой книги. В ней можно найти весьма полное изложение формальной стороны интегрального исчисления, включая, например, такие вещи, как формула Парсеваля, интеграл Фурье и другие формулы обращения, а также ряд теорем, формулировка которых имеет понятную для специалиста схему: «$f(\alpha)=f(\beta)$, если $\alpha\beta=\pi^2$». Мы находим в ней также раздел, посвященный преобразованиям степенных рядов в непрерывные дроби. Кроме того, Рамануджан прекрасно знал формальную сторону теории эллиптических функций (которых нет в книге Карра). Неясно, откуда он почерпнул эти знания. Но они вместе с содержанием книги Карра и теми сведениями, которые можно найти, например, в *Алгебре* Кристалла, повидимому, составляли все его вооружение в анализе и теории чисел. Во всяком случае, несомненно, что он ничего не знал ни о существующих методах суммирования расхо-

[1]) Опубликовано в Mathematical Gazette.— April 1929.— V14, N 200.

дящихся рядов, ни о теории квадратичных вычетов, ни о современном ему состоянии вопроса о распределении простых чисел (формулу Эйлера $\Pi(1-p^{-s})^{-1}=\Sigma n^{-s}$ он, возможно, знал, но о ζ-функции он заведомо не имел никакого представления). К тому же он пребывал в полном неведении относительно теоремы Коши и теории аналитических функций. (Это трудно понять, учитывая его хорошее знакомство с эллиптическими функциями; для объяснения достаточно и, как я думаю, необходимо предположить, что его учебником являлась весьма оригинальная и своеобразная книга Гринхилла *Эллиптические функции*.)

Работы, опубликованные им в течение индийского периода, не содержат его лучших идей, которые он, по-видимому, не был в состоянии удовлетворительно изложить. В начале 1914 г. в письме к Харди (тогда уже работавшему в Кембриджском Тринити-колледже) он доказал, однако, свою несомненную математическую силу и был приглашен в Тринити-колледж, где он смог активно работать в течение 3 лет до своей болезни. (Некоторые весьма характерные для него работы были написаны в период его двухлетней болезни.)

Я не имею намерения подробно обсуждать здесь те работы Рамануджана, которые он написал самостоятельно (очень интересная оценка этих работ дана профессором Харди в вводной статье, с. XXXIV). Если мы пока опустим его знаменитую работу, которую он написал совместно с Харди, то его основной вклад в математику, каким бы существенным и оригинальным он ни был с точки зрения общего интереса, должен, как мне кажется, уступить первое место романтике его жизни и математической карьере, его необычайной психологии и, прежде всего, исключительно интересной проблеме, сколь крупным математиком он мог бы стать при более счастливых обстоятельствах. Говоря это, я, конечно, предъявляю к математическим работам самые высокие требования. Но ведь никакие другие применительно к нему неуместны.

Огромный талант Рамануджана был чисто формальным. Он жил «в мире формул». Чтобы яснее выразить, что я имею в виду, приведу два примера (выбор второго, быть может, является случайным; первый же обладает неописуемой красотой):

$$p(4)+p(9)x+p(14)x^2+\ldots=$$
$$=5\frac{\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^6},$$

где $p(n)$ является числом представлений n в виде суммы положительных слагаемых;

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{\{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\alpha-x)\}^2}dx = \frac{1}{4\Gamma(2\alpha-1)\{\Gamma(\alpha)\}^2} \quad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right).$$

Но времена формул, по-видимому, прошли. Если предъявлять самые высокие требования, то я думаю, что никто уже не будет в состоянии открыть радикально новый тип формул, хотя Рамануджан в своих работах, связанных с $p(n)$, был очень близок к этому. Нет смысла умножать число формул Рамануджана из круга идей теоремы Коши, теории эллиптических функций и других областей математики, так как в каждой из этих областей в той или иной мере господствует какая-либо общая теория. Лет 100 назад его силы имели бы значительно больший простор. Открытия изменяют общую математическую атмосферу и имеют очень далеко идущие последствия, так что мы не склонны придавать большого значения переоткрытиям, сколь бы независимо они ни были сделаны. Как оценить самостоятельное открытие уже известных математических фактов? Сколь крупным математиком был бы Рамануджан, если бы он жил 100 или 150 лет назад? Что мог бы он свершить, если бы он своевременно познакомился с работами Эйлера? Насколько важна недостаточность математического образования? Состояла ли главная сила Рамануджана в выводе формул, или он развивался в этом направлении только благодаря книге Карра (нельзя забывать о том, что он впоследствии научился хорошо делать и другие вещи, и притом в возрасте, достаточно зрелом для индийца)? Такие вопросы возникают в связи с именем Рамануджана; в распоряжении каждого имеется теперь достаточный материал, чтобы судить о них.

Наиболее ценными свидетельствами, которыми мы располагаем, являются письма и списки результатов, сообщенных им без доказательств, имеющиеся в собрании его сочинений. Эти свидетельства заставляют предполагать, что его записные книжки дали бы еще более определенную картину сущности его математического гения, и следует очень пожелать, чтобы проект их полного опубликования был в конце концов претворен в жизнь [1]).

[1]) Записные книжки Рамануджана были изданы в 1957 г. (Notebooks of Srinivasa Ramanujan.— V. I—II.— Bombay, 1957.— *Примеч. пер.*)

Совершенно очевидно, что книга Карра дала Рамануджану и общее направление, и зачатки многих дальнейших глубоких его работ. Но даже учитывая это, нельзя не удивляться глубине, разнообразию и силе его таланта. Вряд ли существует область формул, за исключением формул классической теории чисел, которую бы он не обогатил, и в которой он не открыл бы новые, совершенно не подозревавшиеся ранее возможности. Красота его результатов, единственных в своем роде, совершенно поразительна. Не являются ли они даже более необычайными, чем специально подобранная коллекция уникумов? Мораль, по-видимому, такова, что наша фантазия недостаточна; во всяком случае, читатель Рамануджана постоянно переживает радостное изумление, и если он пожелает доказать какой-либо наугад взятый недоказанный результат, то — если он вообще будет в состоянии его доказать — он обнаружит по меньшей мере некоторую «изюминку», какой-то новый и неожиданный поворот. Профессор Ватсон и г-н Прийс взялись за героический труд доказать все недоказанные утверждения Рамануджана; некоторые из их решений были недавно опубликованы в журнале Лондонского математического общества, и эти работы с несомненностью подтверждают то мнение, что полный анализ записных книжек Рамануджана оказался бы чрезвычайно плодотворным.

Не подлежит сомнению, однако, что наиболее удивительные и оригинальные результаты и наиболее глубокое проникновение в существо вопроса обнаруживаются в работах Рамануджана по распределению простых чисел (см. с. XXII—XXV, XXVII, 351, 352). Задачи, рассмотренные им в этих работах, по своему существу совсем не формальны; они связаны с приближенными формулами для таких функций, как число простых чисел, меньших данного числа, или число целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов и меньших данного числа; определение порядка остаточных членов составляет в этих задачах главную часть теории. Все эти вопросы имеют очень тонкую теоретико-функциональную основу, и Рамануджан неизбежно должен был здесь потерпеть неудачу, так как его методы не могли не увести его в неверном направлении; он выводит приближенные формулы, но его утверждения относительно порядка остаточных членов очень далеки от истины. Эти проблемы напрягали до предела все ресурсы анализа и для своего решения потребовали более ста лет; они вообще не были решены до 1890 г.

Для Рамануджана полный успех был здесь заведомо недостижим. Он понял только, что за решение этих проблем можно приняться с формальной стороны, и продвинулся настолько, что смог угадать основные результаты. Соответствующие формулы являются очень глубокими, и его достижение в целом должно оцениваться как совершенно исключительное.

Если книга Карра дала ему определенное направление в работе, то уж во всяком случае она не имела ничего общего с его методами, наиболее важные из которых абсолютно оригинальны. Его интуиция опиралась на аналогии, часто весьма отдаленные, и в необычайной мере — на эмпирическую индукцию, основанную на числовых примерах. Не имея в своем распоряжении теоремы Коши, он, естественно, много работал с преобразованиями двойных интегралов и обращениями порядка интегрирования в них. Но его наиболее важным орудием, по-видимому, являлась высоко развитая техника преобразований расходящихся рядов и интегралов. (Хотя такие методы хорошо известны, не подлежит сомнению, что он открыл их совершенно самостоятельно.) Он не располагал строгими доказательствами законности своих операций. Он не интересовался строгостью, которая, кстати, в анализе за пределами студенческих работ не имеет первостепенного значения и может быть при наличии настоящей идеи всегда внесена любым компетентным профессионалом. Возможно, что Рамануджан вообще не имел четкого представления о том, что́ сейчас в математике понимается под доказательством. Если существенное, хотя бы и небольшое, рассуждение в сочетании с эмпирическими данными и интуитивными догадками давало ему субъективную уверенность в правильности результата, то больше он ничем не интересовался. Одним из второстепенных признаков его гения является тот факт, что он никогда не ощущал необходимости в чем-либо аналогичном теореме Коши. С ее помощью он дошел бы до некоторых своих результатов гораздо быстрее и проще. Но его собственные методы позволяли ему обозревать весь круг вопросов с такой же полнотой и с такой же уверенностью.

В заключение я должен кое-что сказать об его работе по представлению функции $p(n)$, написанной им совместно с Харди (с. 276—309). Число $p(n)$ очень быстро возрастает с ростом n. Так, например,

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Авторы показывают, что $p(n)$ является ближайшим целым числом к

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{\nu} \sqrt{q}\, A_q(n)\, \psi_q(n), \qquad (1)$$

где

$$A_q(n) = \sum \omega_{p,\,q} e^{-2np\pi i/q},$$

причем сумма распространяется на все p, взаимно простые с q и меньшие q, а $\omega_{p,\,q}$ — некоторый корень 24-й степени из 1; ν имеет порядок $\sqrt{n}$ и, наконец,

$$\psi_q(n) = \frac{d}{dn}\left\{\exp\left(C\sqrt{\frac{n-\frac{1}{24}}{q}}\right)\right\}, \quad C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Мы можем принять $\nu=4$, когда $n=100$. Для $n=200$ можно взять $\nu=5$; 5 членов ряда (1) дают точное значение $p(200)$. Всегда можно положить $\nu=\alpha\sqrt{n}$ (точнее, целой части $\alpha\sqrt{n}$), где α — любая положительная постоянная, если только n превышает некоторое число $n_0(\alpha)$, зависящее только от α.

Читателя не нужно убеждать в том, что это очень удивительная теорема; он легко поверит, что методы, при помощи которых она была установлена, содержат новый и важный принцип, оказавшийся чрезвычайно плодотворным и в других областях. История этой теоремы в высшей степени интересна (чтобы воздать ей должное, мне придется несколько нарушить правила соавторства, и поэтому я добавлю, что профессор Харди разрешает мне рассказать о следующих фактах относительно его совместной работы с Рамануджаном). Одна из гипотез Рамануджана, относящаяся еще к индийскому периоду его жизни, состояла в том, что первый член в формуле (1) является очень хорошим приближением к $p(n)$; это было установлено без большого труда. На этом этапе вместо $n-\frac{1}{24}$ фигурировало просто n, но это было пока несущественно. Отсюда начался настоящий штурм задачи. Следующим шагом вперед, не очень большим, было рассмотрение разложения (1) как асимптотического ряда, из которого следовало брать фиксированное число членов (например, 4), причем ошибка имела порядок следующего члена. Начиная с этого момента до самого конца работы Рамануджан упорно настаивал на том, что в действительности верно гораздо больше, чем было доказано; он утверждал, что «должна существовать формула с ошибкой $O(1)$». Эта гипотеза была его важнейшим вкладом, одновременно и чрезвычайно существенным и в высшей степени поразительным. Была сделана точнейшая численная проверка, которая выявила удивительные факты относительно $p(100)$ и $p(200)$.

Тогда ν было сделано зависящим от n; это было очень большим шагом вперед и потребовало новых глубоких теоретико-функциональных методов, которые Рамануджан, несомненно, ие мог бы открыть сам. Теперь, наконец, стала вырисовываться вся теорема. Однако преодоление самой последней трудности было бы, вероятно, невозможно без еще одного вклада Рамануджана, на этот раз очень характерного для него. Мало того, что аналитические трудности этой теоремы были громадными,— подступы к ней оказались еще забаррнкадированнымн почти непреодолимыми чисто формальными препятствиями. Вид функции $\Psi_q(n)$ ни на йоту не может быть изменен. Среди многих асимптотически эквивалентных выражений необходимо выбрать одно единственно правильное. Если бы это не было сделано с самого начала (а $-\frac{1}{24}$, не говоря уже о $\frac{d}{dn}$, могла появиться в Ψ_q только в результате исключительно блестящего прозрения формального гения), то эта теорема вообще никогда не могла бы возникнуть. Все это представляется загадочным. Если бы мы знали, что существует формула с ошибкой $O(1)$, то мы постепенно пришли бы в конце концов к правильному виду для $\Psi_q(n)$. Но почему Рамануджан был так уверен, что подобная формула существует? Трудно поверить, что это объясняется просто необычайной глубиной проникновения его умственного взора. С другой стороны, трудно представить себе, какие численные примеры могли быть в распоряжении Рамануджана, чтобы он мог привычным для него процессом интуитивной индукции прийти к заключению о справедливости столь сильного результата. В то же время, если вид $\Psi_q(n)$ не был известен ему заранее, то никакие численные данные не могли ничего ему подсказать. Так что, по-видимому, единственный возможный вывод состоит в том, что открытие им правильных формул было результатом взлета гения. Эта теорема возникла в результате исключительно удачного сотрудничества двух математиков совершенно разнородных способностей, в котором каждый из них проявил самые сильные, самые характерные стороны своего таланта. В этой совместной работе с Харди гений Рамануджана нашел возможность развернуться в полной мере.

Книга содержит биографию, написанную Сешу Айяром, и некролог, составленный профессором Харди. Биография и некролог дают нам живую картину интересной и привлекательной личности Рамануджана. Математики, подготовившие это издание, превосходно справились со своей задачей. Труд их почти незаметен: читателю сообщается то, что он хочет знать, и как раз в нужный момент; это потребовало от них бóльших усилий и большего объема библиографических исследований, чем читатель склонен предполагать.

Три рецензии[1]

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 23. *Operational Methods in Mathematical Physics*, by Harold Jeffreys, № 24. *Invariants of Quadratical Differential Forms*, by Oswald Veblen (Cambridge University Press).

The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series, by E. W. Hobson, vol. I, 3-d Edition (Cambridge University Press).

1. Каждый специалист в области математической физики должен знать операционный метод Хевисайда, так что появление книги д-ра Джеффрейса следует приветствовать. Первые три главы этой книги посвящены дифференциальным уравнениям для функций одной независимой переменной. Операционный метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений может быть совершенно строго обоснован; самый придирчивый ригорист не сможет предъявить никаких претензий к изложению этого вопроса автором, если не считать отсутствия ссылки на теорему о совместности на стр. 25, строка 4. В конкретных задачах операционный метод имеет определенные преимущества перед обычными методами; его применение позволяет избежать решения системы уравнений для отыскания произвольных постоянных, он одинаково легко справляется как с простыми, так и с кратными корнями, и полностью использует любое случайное упрощение, которое может встретиться в задаче.

Если бы область применения метода была ограничена одной переменной, то вряд ли стоило бы издавать о нем специальную книгу в этой кембриджской серии. Однако в гл. IV начинается изложение операционного метода

---

[1]) Перепечатано из Cambridge Review.— 1928, May 4.

для двух независимых переменных, и читатель попадает в новый мир чудес (несколько пейзажей которого он уже мельком видел на с. 18 и 22). Через дюжину страниц его математическая совесть несколько успокаивается, так как он встречается с более привычными рассуждениями, но в конечном счете метод Хевисайда для двух переменных так и не получает строгого обоснования; в лучшем случае его можно рассматривать как эвристическую процедуру, которая приводит к решениям, требующим окончательной проверки. Однако этот метод, без сомнения, обладает большой силой и позволяет находить сложные решения весьма приятным и легким способом.

В некоторых приложениях приходится использовать так называемый *метод наискорейшего спуска*. Это название отражает правило подъема на перевал: «держись направления ручья». Но все пути на перевал теоретически эквивалентны, и ручей не всегда является наиболее удобным из них; поэтому надо отдать предпочтение менее обязывающему названию *метод перевала*. В изложении этого метода мы сталкиваемся с знакомыми трудностями: в простейшем случае все очень легко, но каждое обобщение метода имеет свой собственный индивидуальный набор осложнений. Благодаря искусному употреблению некоторой расплывчатости в выражениях автору удается, как и в других его произведениях, добиться удовлетворительного компромисса. Однако его изложение все же несколько небрежно в деталях, например, никогда еще квадратный корень из безобидного комплексного числа не был так изувечен, как на с. 78 и 79.

Если читатель попытается ознакомиться с приведенной в библиографии обширной литературой, то он оценит мастерство, с которым д-р Джеффрейс прокладывал дорогу между громоздящимися друг на друга трудностями, сохраняя доступность своего изложения. Некоторых теория этого метода интересует больше всего в ее самых диких частях; она дает верные результаты в областях, значительно более широких, чем те, где она зиждется на строго обоснованных положениях; не означает ли это, что должна существовать более широкая точка зрения, с которой все приложения теории оказываются ясными и строго доказуемыми? Судя по заключительным фразам книги, автор верит в существование такой точки зрения. Рецензент настроен более скептически, хотя и признает привлекательность такой перспективы.

2. Для новой книги этой кембриджской серии редакторы сумели в качестве автора привлечь одного из наиболее выдающихся современных математиков, внесшего значительный вклад в теорию, которой посвящена книга. Профессор Веблен является, кроме того, мастером математического изложения. В первых 4 главах (составляющих половину книги) автор развивает аналитическую теорию дифференциальных инвариантов без каких бы то ни было примеров и аналогий из физики или геометрии. Этим и объясняется то, что тогда как части I и II *Абсолютного дифференциального исчисления* Леви-Чивита — столь же «чистая» математика — читаются без труда, первая половина книги Веблена определенно трудна. В этом, впрочем, нет вины автора. Дело просто в том, что аффинная связность, рассматриваемая абстрактно,— далеко не шутка. Как первое чтение по теории относительности эти главы, вероятно, непреодолимы. Читатель, немного знакомый с математическим аппаратом теории относительности, сможет их понять при повторном чтении; если он — математик, то удовлетворенность содержательным определением инвариантности, ощущаемая им при первом ознакомлении с книгой, при дальнейшем продвижении постепенно перейдет в смутное желание видеть перед собой более беззаботное изложение физиков. Читатель поступит правильно, если он не задастся целью читать определенное число страниц в час, так как стиль автора таков, что нигде не говорится ни одного лишнего слова, и рассуждения подаются в чрезвычайно концентрированном виде.

В главе IV общая теория иллюстрируется на простейшем примере евклидовой геометрии. В главе V рассматривается проблема эквивалентности (простейший случай которой относится к наложимости поверхностей); эта глава содержит также ряд очень общих теорем. Книга заканчивается главой о нормальных координатах.

Книга должна быть прочитана каждым специалистом по теории относительности; первую часть следует прочесть потому, что предмет надо изучать всесторонне, а вторую — хотя бы из-за раздела о нормальных координатах — очень важного, но малоизвестного вопроса.

3. После продолжительных трудов над вторым томом монографии подготовка третьего издания первого тома должна была показаться профессору Гобсону детской игрой. В этом издании мы находим значительное число небольших изменений; достаточно упомянуть о переработке и расширении раздела, посвященного интегралу Римана — Стилтьеса — понятию, область применения которого постоянно расширяется.

Должен ли еще аналитик оправдываться перед злопыхателями, упрекающими его в пристрастии к функциям с «патологическим поведением», даже в той малой степени, в какой это делает автор? Если когда-то и считалось модным опровергать скороспелые гипотезы построением примеров функций, ведущих себя соответствующим образом «плохо», то эта мода кончилась уже лет 20 назад. Подавляющее большинство доказанных с тех пор теорем содержит позитивные и изящные утверждения о функциях с хорошим поведением; необходимые иногда «патологические» теоремы только оттеняют позитивные утверждения и являются сугубо второстепенными и редкими исключениями.

Ньютон и притяжение шара[1]

1. В статье Кейнса, опубликованной в сборнике *Newton Tercentenary Celebratibns*, есть такие абзацы:

«Мы имеем свидетельства, что при подготовке своих *Principia* Ньютон почти до последнего момента не располагал доказательством того, что с материальным шаром можно обращаться так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре; это доказательство он нашел не ранее, чем за год до опубликования. Но в справедливости самого факта он был уверен многие годы, и всегда применял его.

Не подлежит сомнению, что геометрическая форма, которую Ньютон выбрал для изложения в *Principia*, не имеет ничего общего с действительным ходом мыслей, который приводил Ньютона к его заключениям. Я думаю, что его эксперименты являлись не столько источником его открытий, сколько проверкой того, что он уже знал».

Интуитивное познание присуще и более скромным умам, а Ньютон обладал им, конечно, в исключительно высокой степени; но я был бы склонен сомневаться в этом конкретном примере интуиции, даже и при отсутствии каких бы то ни было данных. Многие вещи вообще недоступны интуиции, например значение $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$. «Центральное» притяжение шара, быть может, интуитивно более постигаемо, но в действительности сам Ньютон говорит в своем письме к Хэлли от 20 июня 1686г., что в 1685 г. он считал невозможной замену шара точкой (по поводу этого см. Rouse Ball. An Essay on Newton's Principia, с. 61). Мне кажется поэтому, что есть достаточные и вполне понятные основания, объясняющие, почему Ньютон нашел доказательство этого факта столь поздно. Представляет интерес анализ математической формулировки задачи.

[1]) Перепечатано из Mathematical Gazette.— July 1948.— V. 32, N. 300.

2. Я считаю доказанным, что Ньютон не верил в центральное притяжение до 1685 г. Раз это так, то он вполне мог считать определение фактического притяжения второстепенным вопросом, который можно будет рассмотреть позднее. В конце концов он приступил к решению этой задачи. Теперь, *когда мы знаем ответ*, задача сводится к отысканию притяжения сферической оболочки, что в декартовых координатах приводит к интегрированию функции $(ax+b)/(cx+d)^{3/2}$ — детская игра для Ньютона.

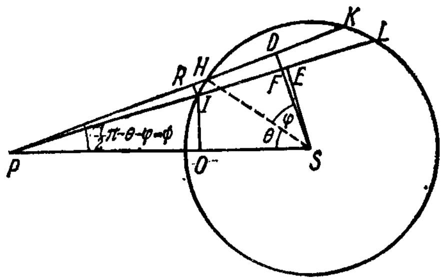

Рис. 18

Без знания ответа естественнее идти прямо от полного шара; это приводит к математически более трудной задаче, которая, пока Ньютоном не были полностью разработаны методы анализа, могла поставить его в тупик. В 1685 г. и эта задача была ему вполне по силам. Не исключено (но это можно высказать только в порядке предположения), что он пробовал подойти к решению, рассматривая сначала оболочку радиуса r с последующим интегрированием по r, тогда результат получался сразу. Так или иначе, доказательство было им найдено (и после этого он всегда работал только с оболочками). Но для него это еще далеко не было полным решением вопроса. Как мы теперь знаем, ему нужно было доказательство несомненно аналитическое, но такое, которое можно было бы «перевести» на геометрический язык. Пусть читатель попробует это сделать.

Мне кажется, что я могу с некоторым правдоподобием восстановить аналитическое доказательство Ньютона, и я привожу его здесь в современной трактовке. В нем мы исходим, конечно, из оболочки.

***3.** Рис. 18 принадлежит Ньютону, я добавил только пунктирную линию SH и обозначения трех углов.

Пусть $SH=a$, $SP=r$. В качестве переменной интегрирования возьмем φ[1]). Рассмотрим сферический пояс, образованный вращением HI вокруг SP и его вклад $\delta F = \delta F_P$ в общее притяжение F_P точки P. Этот вклад удовлетворяет соотношению

$$r^2 \frac{\delta F}{\delta \varphi} = \left(\frac{PS}{PI}\right)^2 \cos \psi \cdot 2\pi a \,|\delta\theta|\, IQ \cdot \frac{1}{\delta \varphi};$$

или

$$\frac{r^2}{a^2} \frac{dF}{d\varphi} = \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta}\right)^2 \sin(\theta+\varphi) \sin \theta \left|\frac{d\theta}{d\varphi}\right|. \quad (1)$$

Из треугольника PHS находим

$$\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos \varphi} = \frac{a}{r},$$

откуда следует, что

$$-\frac{d\theta}{d\varphi} = 1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(\theta+\varphi) = -\frac{\sin \theta}{\sin(\theta+\varphi) \cos \varphi}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что

$$\frac{r^2}{2\pi a^2} \frac{dF}{d\varphi} = \cos \varphi. \quad (3)$$

Область R изменения φ есть интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и мы получаем результат простым интегрированием. Идея Ньютона состоит в том, что R не зависит от P, так что для двух положений P и p мы имеем [2])

$$\frac{F_P}{F_p} = \frac{Sp^2}{SP^2}.$$

4. Переходим теперь к геометрическому доказательству (которое, по-видимому, оставляло читателей в состоянии беспомощного восхищения). Имеется второй экземпляр рисунка с малыми буквами (сферы будем считать равными). Интегрирование по φ переводится на геометрический язык следующим «странным» образом: «пусть phk отсекает дугу hk, равную дуге HK, и аналогично для pil». Следующие за этим рассуждения исключительно изящны и проводятся в очень продуманной последовательности, но архаичность

[1]) Алфавитный порядок обозначений приведен в соответствие с *положительным* приращением $\delta\varphi$.

[2]) Это и есть утверждение основного положения «Prop 71». Постоянная фактически так и не была никогда определена.

языка делает их для нас трудно доступными; поэтому я их модернизирую. *Трудности* возникают в связи с соотношением (2), которое, естественно, не так легко «перевести».

Так как $hk=HK$ и $il=IL$, то мы имеем

$$se=SE, \quad df\,(=sd-se=SD-SE)=DF. \tag{4}$$

Вклады δF_p и δF_P двух соответствующих поясов HI и hi удовлетворяют соотношению

$$\frac{\delta F_p}{\delta F_P}=\frac{PI^2}{pi^2}\left(\frac{\frac{pf}{ps}}{\frac{PF}{PS}}\right)\cdot\frac{hi\cdot iq}{HI\cdot IQ}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\frac{pf\cdot PI}{pi\cdot PF}=\frac{\frac{pf}{pi}}{\frac{PF}{PI}}=\frac{\frac{df}{ri}}{\frac{DF}{RI}}=\frac{RI}{ri}=\frac{IH}{ih}, \tag{6}$$

так как $\angle RHI=\angle rhi$. Из равенства $\frac{PI}{PS}=\frac{IQ}{SE}$, соответствующего равенства в малых буквах и равенства $SE=se$ находим, что

$$\frac{\frac{PI}{PS}}{\frac{pi}{ps}}=\frac{IQ}{iq}. \tag{7}$$

Перемножая формулы (6) и (7), получаем соотношение

$$\frac{PI^2\cdot pf\cdot ps}{pi^2\cdot PF\cdot PS}=\frac{IH\cdot IQ}{ih\cdot iq},$$

которое в силу равенства (5) приводит нас к равенству

$$\frac{\delta F_p}{\delta F_P}=\frac{PS^2}{ps^2}.$$

5. Существует доказательство, удовлетворяющее всем требованиям Ньютона, которое, можно полагать, и он нашел бы, если бы раньше не обнаружил другого пути. Оно легко возникает из современного подхода к решению и оперирует сразу с шаром; оно состоит в следующем (мы сохраняем исходные обозначения P, S).

Рассмотрим Σ — сферу, концентрическую с данной и проходящую через P, нормальную к Σ в точке P составляющую $N_Q(P)$ притяжения единичной массы, помещенной в точке Q, и среднее $\overline{N}_Q$ составляющих $N_Q(P)$ по всем

P на Σ. Величина $4\pi a^2 \overline{N}_Q$ (среднее, умноженное на площадь) составляется из вкладов всех элементов площади $\delta\Sigma$; каждый такой вклад, как вытекает из простых геометрических соображений, равен телесному углу, под которым элемент $\delta\Sigma$ виден из точки Q. Поэтому должно иметь место равенство $4\pi a^2 \overline{N}_Q = 4\pi$, т. е. $\overline{N}_Q$ не должно зависеть от Q, и таким образом должно быть равно $\overline{N}_S$. Но $\sum \overline{N}_Q \delta V_Q$, где сумма распространяется на все элементы объема шара, есть среднее нормальных составляющих притяжения шара по всем точкам Σ, а равное ему выражение $\overline{N}_s \sum \delta V_Q$ является соответствующим выражением для массы, сосредоточенной в S. В обоих случаях усредняемая величина постоянна и равна *полному* притяжению, и доказательство завершено.

6. Вернемся к вопросу об «интуиции». Естественным аргументом «против» является следующий: «Почему закон обратных квадратов должен занимать такое исключительное место по сравнению, например, с законом обратных кубов?» На это есть ответ: обратные квадраты представляют «естественный» закон убывания с расстоянием, например, освещенности или слышимости и, кроме Ньютона, многие другие думали о нем в связи с планетной системой [1]. Или примем корпускулярную теорию света, в которой частицы из разных источников не сталкиваются. Если допустить, что эти частицы не обладают упругостью, то, испускаемые точечным источником, они дают эффект *отталкивания*, подчиненный закону обратного квадрата, и *полное давление на сферу с центром в источнике не зависит от радиуса сферы*. Этот факт, в сочетании с симметрией, может вызвать интуитивное ощущение, что ситуация в задаче о притяжении шара делает предположение «центральности» правдоподобным. Но теперь уже рукой подать и до приведенного выше доказательства. Рассмотреть полное давление изнутри (т. е. нормальное давление) на Σ, оказываемое частицами, исходящими из источника Q,— не столь уж сложная идея, и остается только доказать основной факт, что оно не зависит от положения Q.*

---

[1] Заметим, что, как легко видеть, при законе r^{-2} притяжение на поверхности шара меньше центрального притяжения, а при законе r^{-4} оно больше. Во втором случае это очевидно потому, что соответствующее притяжение бесконечно.

Большие числа [1]

1. Задача представления очень больших чисел рассматривается в *Исчислении песчинок* Архимеда. «Неисчислимость» песчинок давно вошла в поговорку, но Архимед разработал схему — эквивалент обозначения 10^n, согласно которой «Вселенная» — сфера, доходящая до Солнца, с диаметром, не превышающим 10^{10} стадий,— будучи наполнена песком, содержит менее чем «1000 единиц седьмого разряда чисел», т. е. менее чем 10^{51} песчинок. [За основание того, что мы сейчас назвали бы степенью, Архимед берет 10^8 («*мириад мириадов*») и рассматривает «периоды», содержащие каждый 10^8 «порядков» чисел; последним числом схемы является $10^{8\cdot 10^{15}}$.] Задача представления упирается в изобретение подходящих *обозначений*; Архимед не располагал нашими обозначениями a^b с его возможным обобщением $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$. Мы вернемся к этому вопросу в конце; он далеко еще не исчерпан.

2. Древние индийские рукописи много раз с благоговением обращаются к идее представления колоссальных отрезков времени. (Мне *кажется*, что следующий пример я взял из книги Бокля *История цивилизации в Англии*; несомненно, что сам я не мог этого выдумать.)

Имеется камень размером в кубическую милю, в миллион раз тверже алмаза. Один раз в миллион лет святой муж подходит к этому камню и слегка дотрагивается до него. В конце концов, в результате этих легчайших прикосновений камень износится. Вычисления показывают, что это произойдет через 10^{35} лет: жалкий результат, учитывая столь богатую фантазию! Кстати, это — пример «недостаточности» популярных представлений о колоссальном.

---

[1]) Впервые опубликовано в Mathematical Gazette.— July 1948.— V. 32, N 300. Добавления заключены в квадратные скобки.

3. Когда древние греки стали рассматривать небесные тела как разбросанные в «обычном» пространстве, был совершен большой скачок в развитии наших представлений о Вселенной. Аналогичный, хотя и меньший, скачок был необходим для введения широко известных теперь рассуждений, связанных с эрозией и т. п. Легко представить себе Архимеда в качестве автора таких рассуждений, но, насколько мне известно, Греция не является их родиной. Интересно подсчитать, например, непостижимое для человеческого разума время, необходимое для образования долины в результате размывающего действия ручейка; одна двадцатая дюйма в год дает милю в 10^6 лет; продолжая, мы получим тысячу миль в 10^9 лет. (Эти периоды являются естественными единицами счета времени: второй из них сравним с возрастом Земли, первый — с временем, необходимым для превращения обезьяны в доктора наук.) Ньютон оценил расстояние до Сириуса (в астрономических единицах), предполагая, что Сириус сравним по своим размерам с Солнцем. Его метод заключался в сравнении Сириуса с Сатурном, альбедо которого он довольно точно установил.

4. Следующими двумя примерами я заканчиваю свои ссылки на прошлое. Первым из них является точность угловых измерений Тихо Браге. Ошибка этих измерений не превышала 1′ (у Гиппарха — 4′). Вторым — Самосский туннель, который строился во времена Пифагора и имел 900 ярдов в длину. Его прокладка началась с противоположных концов, и современные раскопки показали, что строители разошлись в середине лишь на несколько футов. Проще всего не верить, что это объясняется высокой точностью геодезических измерений и расчетов. Хотя основные свойства подобных треугольников были известны еще со времен Фалеса, я не могу допустить мысли о такой точности измерительных приборов в те времена. С другой стороны, я могу легко поверить в точность проведения наземных направлений при помощи провешивания или при помощи наблюдений какой-либо звезды из двух точек.

5. Я перехожу к современности, но продолжаю говорить об измерениях.

Мы все знаем, что измеряемые параллаксы имеют порядок 0,001″; представляет ли себе читатель, что это — угол, под которым видна монета достоинством в пенс с расстояния в 4000 миль?

Среди результатов измерений, используемых в научных вычислениях, самыми точными являются измерения времени в астрономии, в которых число значащих цифр доходит до 15: измеряются промежутки времени от 0,001″ до 10^2 или 10^3 лет, и для вычислительных целей сохраняются еще 2—3 цифры.

Однажды я спросил Эддингтона, с какой точностью возможны измерения угловых расстояний между двумя звездами, для которых оно велико. Ответ (последовавший мгновенно) гласил: «0,1″», что меня очень поразило, так как чисто механические трудности таких измерений, так же как и трудности, связанные с рефракцией, представляются непосвященному огромными.

Расскажу еще об одном удивительном факте. Официальные инструкции по производству геодезических работ предписывают для линейных измерений использование мерной ленты длиной в 130 дюймов; это не вызывает удивления. Но для угловых измерений должна использоваться «база» длиной в 9 миль — это примерно в 100 раз больше, чем я ожидал. В таких делах, впрочем, настоящие трудности возникают обычно там, где их меньше всего ждут, и оказываются часто мало интересными. В геодезических измерениях главная трудность заключается, по-видимому, в том, чтобы установить теодолит в точности над нужной точкой.

6. Перейдем теперь к рассмотрению кратных показателей и их основных свойств как «аппроксимирующих» чисел. Так как «порядок» имеет в математике и в приближенных вычислениях вполне определенный, но не подходящий для нас смысл, то будем говорить о *типах* чисел; именно, числа

$$N_1 = 10^{10},\quad N_2 = 10^{10^{10}},\ \ldots,\ N_n = 10^{N_{n-1}},\ \ldots$$

будем называть принадлежащими к *типу* 1, 2,. . ., *n*, ... Далее мы будем говорить, что, например, число

$$10^{10^{10^{4,7}}}$$

принадлежит к типу 2,47, и будем записывать его в виде $N_{2,47}$. Эта запись указывает на то, что тип этого числа лежит между 2 и 3; принятые обозначения содержат, правда, некоторую неточность, состоящую в том, что N_2 — это не $N_{2,0}$, а $N_{2,1}$, но с этим можно примириться. Вместо $N_{2,47}$ мы будем также писать $N_2(4,7)$; отметим, что $N_n = N_n(1)$.

Число 10^{79} всех элементарных частиц во Вселенной, которое мы (принося извинения за то, что выбрана малая буква) обозначим через u, есть $N_{1,79}$.

Принцип, который я хочу сейчас установить, может быть проиллюстрирован следующими примерами. Число типа, большего или равного 2, остается «практически неизменным» при возведении в квадрат; число типа, большего или равного 3, остается «неизменным» даже при возведении в степень u. Действительно,

$$N_2 = 10^{10^{10}}$$

и

$$N_2^2 \simeq 10^{10^{10,3}},$$

далее,

$$N_3 = N_3(1),$$

а

$$N_3^u = N_3(1 + 7{,}9 \cdot 10^{-9}).$$

С другой стороны, N_2 почти не изменяется, если в его нижнем основании 10 заменить на u, и остается «неизменным», если 10 заменить на 2. Другим важным фактом является «равенство» таких чисел, как $N!$, N^N и 2^N, если тип N не меньше 1.

Эти рассмотрения мы можем теперь обобщить в следующем «принципе грубости»: при оценке числа

$$a^{b^{c^{\cdot^{\cdot}}}}$$

важно не допускать больших ошибок в самом верхнем показателе, но можно применять весьма грубые оценки в отношении основания и нижних показателей.

7. Перехожу теперь к числам, непосредственно связанным с повседневной жизнью (что я имею в виду под «косвенной» связью, будет ясно из § 11). Диапазон от едва слышимого звука до звука, почти невыносимого по своей громкости (одинаковой частоты, близкой к области наибольшей чувствительности уха), превосходит 10^{12}. Для света он даже бо́льше, чем для звука (этого, конечно, и следовало ожидать). Поверхность Солнца имеет яркость в $6 \cdot 10^5$ бо́льшую, чем поверхность Луны при полнолунии (между прочим, Солнце в $5 \cdot 10^6$ ярче, чем половина Луны). Песчаная поверхность, освещенная полной Луной, по яркости находится в таком же отношении к лунному диску,

как этот последний к Солнцу. Каждый, кому приходилось ходить по проселочной дороге в безлунную облачную ночь, знает, что дорога и предметы на ней все же различимы (мне неизвестно ни одно удовлетворительное объяснение того, откуда берется в этом случае свет); тут мы имеем дело еще с одним множителем, не меньшим, чем 10^3 (а я бы сказал, 10^4 или еще бо́льшим), так что в итоге отношение получается равным 10^{14} или 10^{15}.

Не так давно можно было купить 10^{13} эргов за 4 пенса; здесь ничего не имеется в виду относительно энергии и массы — просто такова была плата за отопление в Англии. Но, конечно, эрг обсурдно мал, а механический эквивалент тепла очень велик.

8. *Совпадения и маловероятные события.* Каждый год поступает сообщение, что у кого-то при игре в бридж было на руках 13 карт одной масти. Вероятность такого распределения карт при сдаче равна $2{,}4 \cdot 10^{-9}$; если предположить, что $2 \cdot 10^6$ людей в Англии играют каждый по 30 партий (участвуют в 30 сдачах) в неделю, то мы получим вероятность такого же порядка. Прежде я думал, что тасовка карт при игре в бридж недостаточна для того, чтобы считать карты на руках полностью случайными; книга Бореля о бридже убедила меня, однако, в том, что, поскольку порядок карт на руках у данного игрока безразличен, обычный процесс перетасовывания обеспечивает случайность карт. (Однако для пасьянсов это не так: в этом случае для уничтожения всякого порядка карты надо тасовать гораздо дольше; я убедился в этом на практике в период увлечения пасьянсами, и мои наблюдения были подтверждены другими.)

Мне случалось задавать вопрос: какое самое удивительное совпадение встретилось вам в жизни, и является ли оно *действительно* столь удивительным? (Имея в виду, что выбирать можно из всей жизни, $1 : 10^6$ надо считать пустяком.) Хотя эта тема достаточно скучная, я приведу два встретившихся мне примера, один удивительный на первый взгляд, но проигрывающий в интересе при дальнейшем рассмотрении, а другой действительно редкий. Начну со второго. Девушка шла по Уолтон-стрит (Лондон) к своей сестре Флоренс Роз Далтон, которая работала поварихой в доме № 42 по этой улице. Она прошла мимо дома № 40 и подошла к дому № 42, где поварихой работала некая Флоренс Роз Далтон, находившаяся в то время в двухнедельном отпуске; эту Флоренс Роз Далтон в качестве поварихи заменяла ее сестра. Но этот дом оказался домом № 42 по Овингтон-сквер (откуда в этом месте есть узкий проход на Уолтон-стрит), дом же № 42 по Уолтон-стрит был следующим (я в то время жил в доме № 42 по Овингтон-сквер и узнал об этом случае в тот же вечер). Первый пример: начиная прогулку вблизи порта Уэймс, мы видели на рейде 7 судов, которые, когда мы, пройдя 3 мили, присели отдохнуть, превратились в 6; эти 6 судов стояли параллельно, а обе мачты седьмого точно заслонялись одной мачтой одного из 6. На расстоянии 5 ярдов в ту или иную сторону от места, где мы остановились, мачты всех семи судов уже были ясно различимы. Вероятность остановиться в пределах 10 ярдов равна 1 : 600, вероятность нахождения трех мачт в одной плоскости равна 1 : 60; в итоге это дает примерно $1 : 4 \cdot 10^4$. Этот пример показывает, что события, почти невероятные на первый взгляд, могут фактически иметь не столь уж малую вероятность.

Безусловно, некоторое количество удивительных совпадений должно было иметь место в действительности, и я сожалею, что знаю очень мало примеров таких совпадений. В книге Дороти Сейерс *Непопулярные мнения* рассказывается про двух негров, носивших одно и то же имя Уилл Уэст, которые были в один и тот же день заключены в Ливенуорсскую тюрьму в США (в 1903 г.), причем данные их антропометрических измерений в точности совпадали. (Можно ли этому поверить?)

Эддингтон рассказал мне как-то про полученную обсерваторией информацию относительно новой кометы (вновь наблюденной, но не обязательно неизвестной), причем данные в телеграмме были искажены; когда же телескоп был наведен на указанное место (и был обследован, надо полагать, район с диаметром около 1°), была обнаружена новая комета. (Это конечно, очень занимательный случай, но мы имеем здесь дело с вероятностью, не меньшей $1 : 10^6$.)

9. Мы все в школьные годы забавлялись, проводя на страницах книги извилистую линию, проходящую между словами. Допустим, что мы взяли страницу энциклопедии, набранную убористым штрифтом, содержащую 100 строк, и наугад черкнули по ней линию. Принимая 1 : 5 за вероятность того, что эта линия пройдет между словами одной строки, мы найдем, что вероятность успешного прохождения линии через всю страницу оказывается равной $1 : 10^{70}$.

Мой следующий пример, быть может, слишком далек от нашей темы. Существует способ, при помощи которого фокусник может делать вещи, на первый взгляд невозможные. Пусть выбрана какая-нибудь карта, скажем туз пик; фокусник кладет колоду карт на стол и просит кого-либо из присутствующих назвать любое число, меньшее 100; имеется немалая вероятность того, что будет названо число 37, и если оно будет названо, то фокусник предлагает отсчитать 37-ю карту колоды, которая и окажется тузом пик; если будет названо другое число, то фокусник делает какой-нибудь другой трюк. (Этот фокус может быть упрощен, если ограничиться только первыми 9 числами; очень вероятно, что названным числом будет 7 или 3; из колоды в 9 карт туз пик будет 7-й картой с одной стороны и 3-й с другой.)

К этой же категории вопросов относится нахождение вероятности того, что обезьяны, барабанящие по пишущей машинке, отпечатают Гамлета. Считая, что текст состоит из 27 000 букв и пропусков и что имеется 35 клавиш, найдем, что эта вероятность равна $1 : 33^{27000}$ (знаменатель меньше $N_{1,6}$).

10. *Игры.* Допустим, что в некоторой позиционной игре существует p возможных позиций $P_1, P_2, \ldots, P_p$. Партия представляет собой конечную последовательность позиций P, каждая из которых получается из предыдущей в результате «хода», сделанного в соответствии с определенной совокупностью правил. Число p обычно принадлежит к типу, немного большему 1, так что число партий сравнимо с $p!$ или с 2^p, что впервые приводит нас к числу, принадлежащему к типу, большему 2. Мы можем поэтому применять принцип грубости.

В шахматах партия признается ничьей, если какая-либо позиция возникает в 3-й раз. (По правилам партия в этом случае не обязательно должна быть признана ничьей; она признается ничьей, если этого потребует один из игроков; чтобы избежать бесконечных партий, мы будем считать партию автоматически ничьей при 3-м возникновении одной и той же позиции.) Правила игры не уточняют также того, должно ли при повторении позиции учитываться, занимают ли те же самые фигуры старые места или нет [1]).

[1]) Я слышал от г-на Уэбба, что в одной из партий Блэкберна позиция повторилась 3-й раз, но пара ладей при этом поменялась местами. Каждый из противников играл на выигрыш, но если бы

Мы будем предполагать, что позиция считается повторяющейся только при тождественности фигур, занимающих свои старые места.

Какова вероятность того, что игрок A, незнакомый с правилами игры, победит чемпиона мира C? Предположим, что C проигрывает одну из n сыгранных им партий, и притом не более чем в m ходов. Предположим, далее, что A знает лишь, что, делая ход, он должен переставить одну из своих фигур на свободное поле или на поле, занятое вражеской фигурой (со взятием). Если A имеет $N \leqslant 16$ фигур, то число его возможных ходов не превышает $N^{64-N} \leqslant M = 10^{48}$; поэтому вероятность его победы не меньше, чем $1 : nM^m$. Число n почти не имеет значения, если мы можем хотя бы немного понизить m; если мы допустим, что $m=20$ при $n = 10^{62}$, то шансы A на выигрыш больше, чем $1 : 10^{122} = \frac{1}{N_{1,21}}$ (т. е. выигрыш более вероятен, чем проведение двух извилистых линий из п. 9 подряд).

Каково число возможных шахматных партий? Легко указать верхнюю грань. Любое расположение фигур и пешек на доске (независимо от того, законно ли оно, т. е. совместимо с правилами или нет) мы будем называть *расстановкой* A; любую законную расстановку — *позицией* P. Замену одной расстановки A другой мы будем называть *переходом*, а законный шахматный ход в позиции P — *ходом*. При общем числе N фигур и пешек на доске число возможных A равно $64!/(64-N)!$ (считая пешки различимыми «индивидуальностями» и т. д.). Так как все пешки могут превратиться в фигуры, то это число близко к числу возможных P (во всяком случае, для некоторых N); основные запреты здесь состоят в том, что короли не должны стоять на соседних полях и не должны быть оба одновременно под шахом и что при наличии 10 белых (или черных) слонов они не должны все стоять на полях одного цвета. Число наборов, состоящих из пешек и пешек, превратившихся в ферзей, ладей, слонов и коней (независимо от их расположения на доске), равно

$$5^{16} + 5^{15} + \ldots + 5^{1} < 2 \cdot 10^{11}.$$

один из них потребовал признать партию ничьей, то возник бы тонкий вопрос интерпретации правил судьей соревнования (как заметил сам Блэкберн).

[1] Мы можем считать, что C (видя игру A в этой партии) не подозревает, что его противник не умеет играть, и сдается, как только он убеждается в неизбежности поражения.

Так как 2 короля обязательно должны быть в наличии, то число наборов *фигур*, не бывших пешками, равно

$$C_1^{14}+C_2^{14}+\ldots+C_{14}^{14}<5\cdot 10^4;$$

поэтому число всех возможных наборов из N фигур и пешек для любого N меньше 10^{16}.

Число возможных ходов в данной позиции P (или даже A) не превосходит

$$\mu=9\cdot 28+2\cdot 14+2\cdot 14+2\cdot 8+8=332\,[1].$$

Число всех A меньше

$$a=10^{16}\sum_{N=1}^{32}\frac{64!}{(64-N)!}=10^{69,7}.$$

Число возможных партий не превосходит

$$\mu^{2a+1}=10^{10^{70,5}}=N_{2,185}.$$

Задача нахождения не слишком грубой нижней грани (пусть даже без полного доказательства, но с субъективной уверенностью) представляется далеко не простой. Число позиций, определяющее верхний показатель, очень быстро растет с N, так что ограничение малыми N ведет к сильно заниженным результатам; если же число N фигур и пешек не мало, то трудно обеспечить их законное участие в позициях, возникающих после длинной цепочки ходов. Можно было бы попытаться ограничиться королями в углах, защищенными тремя легкими фигурами, и несколькими ферзями с каждой стороны (если это проходит, девятью). Эта мысль пришла мне в голову слишком поздно, и я не мог развить ее до каких либо количественных оценок; может быть, кто-нибудь из читателей захочет найти рекордную оценку снизу?

11. Перейдем теперь к числам, о которых я говорил, что они косвенным образом связаны с повседневной жизнью. Они возникают из колоссального числа $n_0=3\cdot 10^{19}$ молекул в 1 $см^3$ газа, находящегося в обычных условиях, и соответствующего числа перестановок. Я напомню замечательный пример, приведенный Джинсом: каждый раз,

[1] Рассуждение автора приводит к меньшему числу, чем 332; впрочем, в силу принципа грубости это не влияет на результат.— *Примеч. пер.*

когда кто-либо из нас делает вдох, весьма вероятно, что в его легкие попадают некоторые из молекул, участвовавших в предсмертном вздохе Юлия Цезаря.

Какова вероятность того, что *рукопись Гамлета* (не печатный текст) возникла случайно? Иными словами, какова вероятность того, что каждая из n молекул чернил, повинуясь случаю, нашла свой путь из чернильницы в *некоторую* точку чернильной линии, составляющей разборчивую рукопись Гамлета? Мы можем выбрать половину молекул уже расположенными на этой линии и определяющими узкую полосу, в надлежащие места которой должны попасть остальные $\frac{1}{2}n$ молекул. Если f — вероятность попадания одной молекулы, то интересующая нас вероятность равна $f^{\frac{1}{2}n}$. Так как n — число порядка

$$500n_0 = 1{,}5 \cdot 10^{21},$$

то применим принцип грубости, и будет f равно 10^{-1} или 10^{-10}, большой роли не играет. Искомая вероятность равна $\frac{1}{N_{2,13}}$.

Мы представляем себе, конечно, что произошло нечто значительно менее вероятное: чернильная линия возникла в результате упорядоченной во времени последовательности событий. Каков же дополнительный множитель? Если мы назовем количество чернил, содержащееся в точке, *чернильной точкой*, то линию можно считать содержащей, скажем, $s = 10^6$ таких точек. Мы должны уменьшить вероятность в $s!$ раз, что оставляет полученную вероятность почти без изменения (условие, выраженное выше курсивным «*некоторую*», точно так же не оказывает никакого влияния).

12. Мы все знаем, что закипание чайника, поставленного на плиту, представляет собой лишь вероятное, но не достоверное событие. Попробуем оценить вероятность того, что целлулоидная мышь выживет неделю в аду (или, что то же, что живая мышь замерзнет там). Благочестие требует, чтобы мы рассматривали эту задачу в классическом смысле и считали плотности земными. Примем (абсолютную) температуру ада (не желая относиться к этому учреждению без должного уважения) равной $2{,}8 \cdot 10^{12} = T_{\text{ада}}$ (множитель 2,8 я принимаю для облегчения вычислений).

* Пусть c — скорость движения молекул, соответствующая температуре T, $T_0=280$ (обычная для Англии комнатная температура), $c_0=c(T_0)$, $c_{\text{ада}}=c(T_{\text{ада}})$. Пусть $\mu=kn_0$ — число молекул в мыши (например, $k=10^3$). Вероятность p того, что данная молекула имеет скорость $c<c_0$, равна, в обычных обозначениях,

$$4\pi\int\limits_0^{c_0}\left(\frac{hm}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hmc^2}c^2\,dc.$$

Это — величина порядка

$$p=\left(\frac{c_0}{c_{\text{ада}}}\right)^3=\left(\frac{T_0}{T_{\text{ада}}}\right)^{3/2}$$

(константа несущественна в силу принципа грубости). Вероятность того, что для большей части мыши $c<c_0$, не намного больше, чем p^{μ}. Пусть τ будет «время релаксации» при температуре T; это время сравнимо с временем свободного пробега. Тогда

$$\tau_{\text{ада}}=\tau_0\frac{c_0}{c_{\text{ада}}}=\tau_0\left(\frac{T_0}{T_{\text{ада}}}\right)^{1/2},$$

где τ_0 — величина порядка $n_0^{-\frac{1}{3}}c_0^{-1}$. В неделе содержится $\nu=\frac{w}{\tau_{\text{ада}}}$ интервалов продолжительности $\tau_{\text{ада}}$, где w — число секунд в неделе.

Таким образом, исключительное состояние утрачивается за время порядка $\tau_{\text{ада}}$ и для выживания мыши требуется новое «чудо» в следующем интервале. Величина, обратная вероятности выживания в течение недели, имеет поэтому порядок

$$C=(p^{-\mu})^{\nu}=\left(\sqrt{\frac{T_{\text{ада}}}{T_0}}\right)^{{}^3/_2 c_0 kwn_0^{4/3}\sqrt{\frac{T_{\text{ада}}}{T_0}}}. \quad *$$

Подставляя численные значения

$$n_0=3\cdot10^{19},\ k=10^3,\ c_0=4\cdot10^5,\ w=5\cdot10^5,\ \sqrt{\frac{T_{\text{ада}}}{T_0}}=10^5,$$

получим

$$C=10^{10^{46,1}}=N_{2,17}.$$

Показатель 46,1 складывается из 5 единиц за счет $T_{\text{ада}}/T_0$, 5,7 — за счет w, 5,6 — за счет c_0, остальное (основная часть) — за счет n_0.

13. *Факторизации.* Давно прошли те дни, когда доказательства того, что данное число является простым (или, наоборот, составным), проведенные иначе, чем делением на простые числа до квадратного корня из данного числа, вызывали всеобщее изумление; большинство читателей уже слышало, вероятно, об электрическом сите Лемера, и по крайней мере некоторые из них знают, что «обратная теорема Ферма» сильно продвинула теорию признаков простоты [1]). Для сравнения с другими встречавшимися нам числами напомню лишь, что $2^{127}-1 \approx 10^{38}$ — наибольшее известное простое число [2]). $2^{257}-1 \approx 10^{76}$ — составное число, хотя ни один из его (собственных) делителей неизвестен: оно является в этом смысле рекордным; $2^{2^6}+1 \approx \approx 10^{19}$ имеет делители 274 177 и 67 280 421 310 721. Большинство изученных чисел имело, конечно, какую-либо специальную структуру, например, $a^n \pm b^n$; такие числа допускают применение специальных признаков, основанных на «обратной теореме Ферма». Я спросил профессора Лемера, для каких по величине чисел N можно, скажем, в течение одного года установить, простые они или составные.

(*a*) совершенно точно,

(*b*) с разумной степенью уверенности,

(*c*) при особой удаче [3]).

Многое зависит от природы $N-1$. Если известны достаточно большие делители $N-1$, то при помощи «обратной теоремы Ферма» можно определить характер N, если число его знаков лежит между 50 и 100. Аналогичные результаты могут быть получены, если известны большие делители $N+1$. Числа $N-1$ и $N+1$ имеют, вообще говоря, много мелких делителей, из которых можно составить достаточно большие делители. «Катастрофические» числа, для которых N, $N-1$ и $N+1$ трудно поддаются факторизации, встречаются исключительно редко (этот вопрос заслуживает теоретического рассмотрения). Если же попалось именно такое число, то можно вычислить, например a^N-1

---

[1]) Math. Ann.— 1934.— V. 109.— P. 661—667; Bull. Amer. Math. Soc.— 1928.— V. 34.— P. 54—56; Amer. Math. Monthly.— 1936.— V. 43.— P. 347—354.

[2]) Эти данные сильно устарели, что отмечается и ниже в тексте. Рекорды в этой области долго не держатся, и число Лемера (см. с. 115) также уже не наибольшее известное простое.— *Примеч. пер.*

[3]) Ответы на эти вопросы должны быть сейчас пересмотрены в свете использования электронных вычислительных машин.— *Примеч. пер.*

(mod N) для $a=2$. Если результат отличен от 1, то число N — составное, обратно, если N — составное, то, как мы можем судить по малым N, до порядка 10^{10} очень вероятно, что этот признак даст ответ (хотя это и не обязательно). В случае же, когда

$$2^N-1 \equiv 1 \pmod N,$$

то весьма вероятно, что N является простым (хотя и это не обязательно). В этом случае для окончательного доказательства ничего не остается, кроме «прямых методов», а они применимы примерно до 10^{20}.

Профессор Лемер далее сообщил мне, что числа до $2{,}17\cdot 10^6$ могут быть полностью разложены на простые множители за 40 минут; числа до 10^{15} — за один день; наконец, числа до 10^{100} при некоторой удаче — за год.

[В настоящее время в игру вступили электронные вычислительные машины. Рекордным простым числом теперь является $180\,p^2+1$, где p — предыдущее рекордное число $2^{127}-1$. После 7 неудачных попыток с другими числами вида kp^2+1, приведенный результат, где $k=180$, был недавно получен Дж. С. П. Миллером и Д. Дж. Уилером на машине *EDSAC* в Кембрижде. Применялся признак, основанный на «обратной теореме Ферма»; вычисления продолжались 27 минут.

Самое последнее известие (апрель 1956 г.): Лемер сообщает свой новый рекорд: $2^{2281}-1$ простое[1]).]

***14.** *$\pi(x)-\mathrm{li}\,x$ и число Скьюиса.* Разность $d(x)=\pi(x)-\mathrm{li}\,x$, где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, а $\mathrm{li}\,x$ — интегральный логарифм $\int\limits_0^x \frac{dx}{\ln x}$ (главное значение), отрицательна для всех x до 10^7 и для всех x, для которых $\pi(x)$ известно. Я доказал в 1914 г., что должно существовать такое X, что $d(x)$ положительна для некоторого $x \leqslant X$. Впоследствии выяснилось, что мое доказательство является чистым доказательством существования, и из него не может быть извлечена никакая численная оценка X; такая оценка, свободная от всяких гипотез, была найдена д-ром Скьюисом в 1937 г.; его работа еще не опубликована, хотя, по-

---

[1]) В настоящее время и этот рекорд побит: наибольшим известным простым числом (лето 1960 г.) является $2^{3217}-1$.— *Примеч. пер.*

видимому, ее публикация не должна заставить себя долго ждать. Пока же я изложу некоторые соображения по этому поводу, так как, кроме значения X, мы встретимся здесь и с другими неожиданностями.

Если мы обозначим θ точную верхнюю грань вещественных частей комплексных корней дзета-функции Римана $\zeta(s)$, то знаменитая гипотеза Римана (*г. Р.* для краткости) состоит в утверждении, что $\theta=\frac{1}{2}$; если это неверно, то $\frac{1}{2}<\theta\leqslant 1$. Уже давно было известно, что в последнем случае $d(x)>x^{\theta-\varepsilon}$ для произвольно малых положительных и сколь угодно больших x, так что в этом случае существование X обеспечено. Отсюда вытекает, что для целей доказательства существования мы можем принять *г. Р.*, и в моем первоначальном доказательстве я так и поступил. Для нахождения численной оценки X также целесообразно начать с принятия гипотезы Римана. На этом пути д-р Скьюис сумел получить результат[1])

$$X=10^{10^{10^{34}}}. \tag{1}$$

Здесь оказалось возможным свести задачу к соответствующей задаче относительно функции $\psi(x)$, связанной с $\pi(x)$ $\left[\psi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)\right.$, где $\Lambda(n)$ есть $\ln p$, если n — простое число p или степень p, и $\Lambda(n)=0$ в остальных случаях$\left.\right]$. Для этой задачи соответствующий результат состоит в том, что

$$«\delta(x)=\psi(x)-x-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}>0 \text{ для некоторого } x\leqslant X»;$$

если $\delta(x)>0$ для некоторого x, то, грубо говоря (я опускаю детали), $d(x)>0$ для того же x. Кроме того, мы имеем (вне зависимости от того, справедлива *г. Р.* или нет) «явную формулу»

$$\frac{\delta(x)}{x^{1/2}}=-\frac{1}{2}-\sum\frac{x^{\beta-1/2}\sin\gamma\eta}{\gamma}, \tag{2}$$

где $\beta+i\gamma$ пробегает все комплексные корни $\zeta(s)$ с положительными γ, а $\eta=\ln x$. Далее, независимо от справедливости *г. Р.*, ряд в формуле (2) может быть оборван, когда γ достигает величины x^3, так как допускаемая при этом ошибка пренебрежимо мала.

---

[1]) J. London Math. Soc.— 1933.— V. 8.— P. 227—283.

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к рассмотрению основной задачи численной оценки X, свободной от гипотез, и описанию основных этапов ее решения (при этом нам не удастся избежать небольших повторений того, что уже говорилось).

(I) Предположим справедливость *г. Р.* Тогда $\beta=1/2$ и задача состоит в том, чтобы найти $X=X_0$ такое, что

$$\sum_{\gamma\leqslant X^3}\frac{\sin\gamma\eta}{\gamma}>\frac{1}{2}\quad \text{для некоторого } \eta\leqslant\ln X.$$

Решение этого неравенства, требующее очень тонких и сложных выкладок, дано в цитированной работе д-ра Скьюиса. Как уже отмечалось, далее должен быть осуществлен хорошо известный переход от ψ к π (от δ к d); X_0, к которому мы приходим, есть число (1).

(II) Известно, что

$$\sum_{\gamma\leqslant T}\frac{1}{\gamma}<A\ln^2 T$$

(это — точный порядок). Если вместо *г. Р.* мы примем несколько более слабую гипотезу, а именно, что ни один корень $\zeta(s)$ с $\gamma<X_0^3$ не имеет вещественной части

$$\beta\geqslant\frac{1}{2}+X_0^{-3}\ln^{-3}X_0,$$

то

$$\sum_{\gamma\leqslant X_0^3}x^{\beta-1/2}\frac{\sin\gamma\eta}{\gamma}$$

при $x\leqslant X_0$ отличается от

$$\sum_{\gamma\leqslant X_0^3}\frac{\sin\gamma\eta}{\gamma}$$

настолько мало, что мы (после тривиальных преобразований) придем к прежнему заключению «$\delta(x)>0$ для некоторого $x\leqslant X_0$».

(III) Остается доказать существование (нового) X в предположении, что гипотеза п. (II) *неверна*. Это эквивалентно предположению, что существует корень $\beta_0+i\gamma_0$, лежащей правее прямой $\mathrm{Re}\, s = {}^1/_2$ на расстоянии не меньшем, чем $b = X_0^{-3} \ln^{-3} X_0$, и не выше, чем X_0^3; тем самым $\beta_0 - {}^1/_2 \geqslant b$ и $\theta \geqslant {}^1/_2 + b$, так что какое-то X существует. Но мы встречаемся здесь с новой неожиданностью. Имея корень $\beta_0 + i\gamma_0$, определенный выше, мы вправе ожидать, что исходное θ-рассуждение приведет к какому-то зависящему от этого корня значению x, для которого $\delta(x) > x^{\theta-\varepsilon}$; иначе говоря, казалось бы, что для *некоторого* x ряд

$$\sum_{\gamma \leqslant x^3} x^{\beta - {}^1/_2} \frac{\sin \gamma\eta}{\gamma}$$

должен превосходить, скажем, 1/10 величины его члена $x^{\beta_0 - {}^1/_2} \frac{\sin \gamma_0 \eta}{\gamma_0}$ (причем синус должен быть положительным). Д-р Скьюис убедил меня, однако, что такого вывода сделать нельзя: трудность заключается в том, что в ряде могут найтись для каждого выбранного члена другие члены того же или большего порядка, погашающие этот член. Эга трудность далеко не тривиальна, и для ее преодоления нужна новая идея. В конце концов мне удалось в общих чертах ее найти.

(IV) Но с задачей еще не покончено. Д-р Скьюис убедил меня (на этот раз преодолевая мое сопротивление), что без *г. Р.* уже невозможно сделать переход от ψ к π. Поэтому оказывается необходимым проводить все выкладки с использованием явной формулы для $\pi(x)$ вместо $\psi(x)$, что влечет за собой немало дополнительных трудностей. Д-р Скьюис проделал все это и получил окончательный результат $X = N_4(1{,}46)$ (улучшено до $N_3(3)$).*

15. В связи с только что рассмотренной задачей возникает следующий вопрос: возможна ли ситуация, когда существование числа X доказано, но численная оценка X не может быть дана вследствие того, что *возможные значения X столь велики, что не могут быть указаны*? Математик даст на этот вопрос отрицательный ответ, но мы тем самым возвращаемся к вопросу, с которого мы начали: сколь большие числа можно вообще записать? Речь фактически идет о том, чтобы построить функцию $F(n)$, растущую чрезвычайно быстро; что́ мы затем подставляем вместо n: число 2, или u, или $N_u(u)$, уже не составляет большой разницы. (Мы должны где-то остановиться в построении $F(n)$,

но еще одна итерация $F(F(n))$ перевесит все различия в подставляемых значениях n.)

Мы исходим из строго возрастающей положительной функции $f=f_0(n)$. Если мы условимся писать $\psi^k(n)$ вместо k-й итерации $\psi(\psi(\ldots\psi(n)))$, то положим

$$f_1(n)=f_1(n,\ f_0)=f^{f(n)^{f^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}(n)$$

(число показателей равно $f_0(n)$), где индекс нуль всюду опущен.

Это построение определяет переход от индекса 0 к индексу 1. Аналогично через f_1 определяется f_2 ($f_2(n)=f_2(n,f_1)$) и т. д. Воспользовавшись идеей обозначения трансфинитных порядковых чисел, образуем теперь

$$f_{f(n)_{f_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}(n)$$

(с $f_n(n)$ индексов). Теперь поступим так: забудем все наши промежуточные обозначения и обозначим *последнее* выражение через $f_1(n)$, после чего продолжим наше построение, вновь забудем все промежуточные обозначения и т. д.; но здесь я предпочитаю остановиться. Теперь положим, например, $f_0(n)=n^2$ или $n+1$ (*каково* $f_0(n)$, не играет никакой роли, лишь бы имело место неравенство $f_0(n)>n$).

Читатель согласится с тем, что записанные нами числа велики; трудно представить себе, однако, сколь они велики; все, что про них можно сказать,— это то, что они своим определением заданы. Если бы понадобилось сравнить два числа двух конкурирующих систем, то для этого пришлось бы создавать солидный математический аппарат.

Открытие Нептуна

Нептун был открыт в 1846 г. в результате математических вычислений, проведенных независимо друг от друга и практически одновременно Адамсом и Леверрье. История этого открытия изобилует неожиданными подробностями и осложнена неприязнью, существовавшей между некоторыми из главных действующих лиц. Чрезвычайно интересный отчет обо всем этом содержится в работе профессора Смарта (Smart W. M. *John Coach Adams and the Discovery of Neptune*.— Royal Astron. Society, 1947). Хочу рассмотреть только один аспект этой истории.

Чтобы освежить в памяти читателя то, что время от времени говорилось по поводу этого открытия, я начну с нескольких типичных высказываний. В своей книге *The Story of the Heavens* (1886) Р. Болл (Sir Robert Ball) писал: «...имя Леверрье поднялось на высоту, нигде и никогда не превзойденную...», «...глубочайшие размышления на протяжении многих месяцев...», «...долгий сложнейший труд, направляемый совершенным искусством математика...». Автор не отказывает себе также в применении небольшой дозы романтической популяризации: «...если эллипс и не обладает законченной простотой окружности, то он, по крайней мере, привлекает богатством форм..., являясь линией абсолютного изящества, вызывающей в нас самые возвышенные представления...» и т. д., но о Нептуне он говорит как профессионал. Одна замечательная современная книга по истории астрономии (1938 г.) содержит фразу: «...вероятно, самый смелый математический замысел столетия... поразительная попытка, равной которой не знает история...».

Открытие вызвало вполне естественную реакцию. Небесная механика вообще и, в частности, теория возмущений, развились в прекрасно разработанные сложные дисциплины. Задача объяснения неправильностей в поведении Урана наличием неизвестной планеты принадлежит к числу «обратных» задач теории; такие задачи считались чрезвычайно трудными — настолько трудными, что никто не сомневался в их неразрешимости. Можно размышлять над тем, почему такое мнение возникло (одной из причин являлось смешение разных смыслов термина «неразрешимость» [1]). Но и после того, как Адамс и Леверрье доказали ошибочность этого мнения (кстати, всякое математическое доказательство является в какой-то мере опровержением неправильного мнения), все же кое-что остается сказать в пользу оценки трудностей не после, а до их преодоления. Никто не может, конечно, считать славу Адамса и Леверрье недостаточно заслуженной (или, скажем, умалять ее ссылками на «везение», считая, что их открытие стало сенсацией в бо́льшей мере, чем это оправдывалось существом дела; между прочим, такое «счастье» никогда не выпадает на долю заурядных людей). Правда, следует сказать, что сенсация, связанная с этим открытием, продержалась дольше, чем можно было ожидать, ио надо иметь в виду возникающую всегда инерцию: люди не могут часто пересматривать свои мнения, и даже самые интеллигентные из нас, однажды высказав что-либо, много раз повторяют это. Известная фраза: «только 3 человека понимают теорию относительности» повторялась и в те дни, когда Эддингтон уже жаловался своим коллегам на легкость теории относительности как отдельного экзаменационного предмета по сравнению с другими университетскими курсами.

В том, о чем я собираюсь говорить дальше, не следует усматривать поучения людям, заведомо более умным, чем я. Мои незначительные *jeux d'esprit* никого не должны обидеть, и я не откажусь от них из опасения, что меня упрекнут в недостатке уважения к знаменитым ученым. Я не одинок в предположении, что возможен более простой подход к решению задачи. Во-первых, будем стремиться к тому, чтобы выкладки, необходимые для открытия новой планеты, были минимальными, в частности, будем стремиться к определению момента t_0 противостояния [2]). Во-вторых, забудем высокие материи и трудоемкие вычисления теории возмущений и попробуем обойтись только «школьной математикой». (Признаюсь, что я движим чисто человеческой

---

[1]) Связь этой задачи с «задачей трех тел» вводит многих в заблуждение и по сей день.

[2]) То есть момента, когда NUS становится прямой линией (я применяю сокращения: S, U, N).

слабостью предвкушения пикантности успеха на таком простом пути.) Для начала скажу, что я обнаружил одно весьма странное обстоятельство, состоящее в кажущейся невозможности приступить к решеиию (и в связи с этим вначале допустил грубые ошибки). В конце концов, однако, выявился абсурдно простой подход; я могу легко представить себе, что мое решение будет названо мошенничеством, и ни в коей мере не отрицаю, что в этом есть некоторая доля истины. Единственным способом, которым я могу доказать свою правоту, является полное объяснение того, как я «предсказываю» t_0, исходя из наблюденных данных (так что каждый может проверить, что — сознательно или бессознательно — не делается никаких ошибочных заключений). Я буду, кроме того, вести изложение так, чтобы оно было доступно максимальному числу любителей, желающих вместе со мной принять участие в этом небольшом приключении.

Планетной *орбитой* является эллипс, в одном из фокусов S которого расположено Солнце, причем радиус-вектор SP заметает в одинаковые отрезки времени одинаковые площади (2-й закон Кеплера). Если плоскость орбиты известна, то орбита определяется четырьмя элементами: a, e, α и ε. Первые три определяют геометрический эллипс: a является его большой полуосью, e — эксцентриситетом и α — долготой перигелия, т. е. при естественном выборе полярных координат r, θ (θ — *долгота*), $\theta=\alpha$, когда P находится ближе всего к S (в конце большой оси). Если мы знаем a, то мы знаем и среднюю угловую скорость n с соответствующим периодом $p=2\pi/n$, так как n пропорциональна $a^{-3/2}$ (3-й закон Кеплера [1]); далее, постоянная скорость заметания площадей отрезком SP равна $abn/2$ [2], а удвоенная скорость совпадает с *угловым моментом* [3] (*у. м.*) также, конечно, постоянным, который выражается дифференциальной формулой $r^2\dot{\theta}$. 4-й элемент, *эпоха* ε, необходим для установления начала отсчета t; его точное определение состоит в том, что равенство $\theta=\alpha$ (перигелий) достигается в момент t, для которого $nt+\varepsilon=\alpha$.

Орбита U имеет период 84 года и эксцентриситет e, примерно равный 1/20. После того как влияние всех тел, кроме S и возможного N, будет учтено, мы можем считать,

---

[1] *n не зависит от e.*

[2] Площадь всего эллипса равна πab, и она заметается за время p.

[3] Строго говоря, у. м. имеет в качестве множителя массу планеты, но масса U не играет роли, и я ее всюду опускаю.

что U, S и N являются единственными телами системы; мы можем также предположить (это общеизвестно), что все движения происходят в одной плоскости. Значения θ (для U) в разные моменты t (мы будем иногда писать $\theta(t)$, чтобы подчеркнуть, что θ берется «в момент t») могут рассматриваться как материал, доставляемый наблюдениями (хотя фактически наблюдения производятся, конечно, с Земли). Значения r для разных t не могут быть непосредственно измерены, и поэтому точность их определения значительно меньше.

Ситуация в 1845 г. была такова, что никакая точно эллиптическая орбита не подходила к наблюденным θ за период с 1780 по 1840 г.[1]). Расхождения были очень малыми, они составляли большей частью менее $1'$ дуги (не считая внезапного отклонения в $90''$ — см. табл. I); m — отношение массы N к массе S (принимаемой за 1) — примерно равно 1/19000 (что дает правильный порядок, так как m радиан приблизительно равно $11''$).

При отсутствии N *у. м.* A постоянен (как отмечено выше, это не что иное, как 2-й закон Кеплера); фактически N *увеличивает A в моменты, предшествующие t_0, и уменьшает его в последующие моменты*. График A как функции t поэтому поднимается до максимума при $t=t_0$, и моей первой идеей было использовать это обстоятельство для нахождения t_0. Так и можно было бы поступить, если бы все наблюдения были абсолютно точными (и метод вследствие этого имел бы то теоретическое преимущество, что он не требовал бы знания эксцентриситетов). Но значение A в момент t зависит от значения r в этот момент, в результате чего определение A оказывается слишком неточным. Таким образом, этот метод отпадает, но он возрождается из пепла в другом виде. Нам понадобятся еще некоторые предварительные замечания.

Численные данные, с которыми работали Адамс и Леверрье, содержали не сами наблюденные значения θ, а разности между наблюденными значениями $\theta(t)$ и значениями $\theta_B(t)$ для эллиптической орбиты, вычисленными Буваром; расхождение $\delta(t)$ (δ для краткости) определяется равенством $\delta(t)=\theta(t)-\theta_B(t)$. [$\theta_B(t)$ зависит от элементов

[1]) Наблюдения после 1840 г. были недоступны и не использовались. Уран был открыт в 1781 г. Чтобы предупредить недоумение читателя по поводу небольшого несоответствия в датах, замечу, что экстраполяция на 1780 г. вполне надежна.

Таблица I

Год	Наблюденные δ	Гладкая кривая	Год	Наблюденные δ	Гладкая кривая
1780	3,5	3,5	1813	22,0	22,8
1783	8,5	8,5	1816	22,9	22,5
1786	12,4	12,5	1819	20,7	22,0
1789	19,0	15,8	1822	21,0	21,0
1792	18,7	18,3	1825	18,2	18,1
1795	21,4	20,3	1828	10,8	10,3
1798	21,0	21,6	1831	—4,0	—4,0
1801	22,2	22,4	1834	—20,8	—20,8
1804	24,2	22,8	1837	—42,7	—42,5
1807	22,1	23,0	1840	—66,6	—66,6
1810	23,2	23,0	1843 (е)	—	—94,0

E_B, а эти последние содержат ошибки. Эти ошибки входят в число неизвестных, определение которых составляет задачу теории возмущений; но наш метод, как мы увидим, не интересуется ими.] Табл. I содержит неисправленные значения δ (данные из работы Адамса [1]) вместе с значениями, полученными из расчета гладкой интерполирующей кривой. Что делать с внезапным спуском после большого интервала сравнительно малых изменений — не совсем ясно; я провел свою кривую, и больше от нее не отступал (но даже ее исправление в конечном счете не оказало бы никакого влияния). Расхождения показывают порядок ошибок наблюдений (последние, естественно, улучшаются от года к году, не считая каких-то крупных неполадок в 1789 г.); эти расхождения абсолютные, а не относительные (так что вероятная абсолютная ошибка разности δ_1—δ_2 одна и та же, как при $\delta_1-\delta_2=0{,}5''$, так и при $\delta_1-\delta_2=90''$). Целесообразно работать с точностью до $0{,}1''$ или до удерживаемых нами десятичных знаков, хотя последний знак сомнителен.

Значение для 1843 г. является экстраполяцией; оно и выведенные из него результаты снабжены значком (е).

[1]) Collected Works, v. I, с. 11. Для нас важны именно эти данные (а не исправленные, приведенные у Смарта). Значения фактически являются средними за 3 года.

Эффект, вызываемый N, имеет «порядок m», а в математических обозначениях он равен $O(m)$; если ΔX для данной величины X означает (вычисленное X) — (наблюденное X), то ΔX есть $O(m)$. Квадрат $O(m)$ (бесконечно малая 2-го порядка) ничтожен, и каждый инстинктивно им пренебрегает (если часы отстают на 10 секунд в сутки, то никто не будет пытаться исправить отсчет времени сверх потерянных 10 секунд — это вполне аналогичный случай). Далее, эффект, вызываемый N, состоит из того, чем он был бы, если бы U, а также N, двигались по окружности, *плюс* поправки на эксцентриситеты орбит. Эксцентриситет U, равный $e(=1/20)$, необычно велик; разумно предположить, что эксцентриситет N не больше (фактически он менее 1/100). Эксцентриситеты искажают «круговое» значение эффекта на 5% (или, скажем, максимум на 10%). Так как сам эффект есть $O(m)$, то «искажение» эффекта будет $O(em)$ [1]: это — первый шаг моего рассуждения. В частности, если мы имеем величину, являющуюся каким-то Δ, или самим m, умноженным на некоторый *множитель*, то мы можем подставить первые приближения (т. е. приближения с $e=0$) или произвести изменения порядка $O(e)$ в самом *множителе*.

Предположим теперь, что E_1, E_2 — две (точные) эллиптические орбиты, дающие $\theta(t)$, отличающиеся на величины того типа, который мы рассматриваем, т. е. на $O(m)$ [2]. Тогда *разность* $\theta_1-\theta_2$ *представляется в виде*

$$\theta_1-\theta_2=m(a+bt+c\cos nt+d\sin nt)+O(em), \qquad (1)$$

где a, b, c, d — константы, зависящие от двух систем элементов орбит E_1 и E_2, а n (следуя нашей договоренности относительно *множителей* при m) мы можем считать любым общим приближением к средним угловым скоростям. Простое «школьное» доказательство равенства (1) я пока отложу.

Далее, пусть, во-первых, E^* — *мгновенная орбита в момент* t_0, т. е. орбита, которую стал бы описывать U,

---

[1]) *Я* хотел бы подчеркнуть, что не собираюсь пренебрегать даже высшими степенями e, *если они не сопровождаются множителем* m (e^4 радиан примерно равен 1″). Искажение значения, найденного для t_0, является, однако, исключением. Но эффект эксцентриситетов e в искажении t_0 вряд ли больше, чем то расхождение, которое они дают между временем противостояния и временем максимального сближения. Простой подсчет показывает, что это расхождение в худшем случае не превышает 0,8 года.

[2]) Орбиты могут иметь «солнца» масс, отличающихся на $O(m)$.

если бы N исчез в момент t_0; заметим, что E^*, как и t_0, пока «неизвестны». Во-вторых, пусть ϑ — возмущение величины θ для U, производимое N, *начиная с момента* t_0 [1]). Тогда, если θ (как всегда) является долготой U в некоторый момент t, θ_B — долготой на орбите E_B и θ^* — долготой на орбите E^*, то мы имеем $\vartheta=\theta-\theta^*$ и, следовательно,

$$\delta(t)=\theta-\theta_B=(\theta^*-\theta_B)+\vartheta. \tag{2}$$

Но каждое из последних слагаемых имеет множитель m, и мы можем опустить встречающиеся $O(em)$. В частности, мы можем при вычислении ϑ отбросить *все* e-члены. Это означает, что *мы можем вычислять* ϑ, *как если бы орбиты* U *и* N *были круговыми*, а в этом случае ϑ имеет *равные по абсолютной величине и обратные по знаку значения в точках* t, *симметричных относительно* t_0. Иначе говоря, *если мы положим* $t=t_0+\tau$, *то*

$$\vartheta(t)=\Omega(\tau) \tag{3}$$

является нечетной [2]) *функцией* τ, *т. е.* $\Omega(-\tau)=-\Omega(\tau)$.

Утверждения (1), (2) и (3) представляют собой основные (и притом очень простые) звенья нашего рассуждения. Разность $\theta^*-\theta_B$ является частным случаем $\theta_1-\theta_2$ и может быть вычислена по формуле (1). Положим в ней $t=t_0+\tau$ и используем (2) и (3); опуская члены $O(em)$, находим

$$\delta(t_0+\tau)=m\{a+bt_0+b\tau+c\cos(nt_0+n\tau)+ \\ +d\sin(nt_0+n\tau)\}+\Omega(\tau).$$

Применяя формулы для косинуса и синуса суммы и приводя подобные члены, получим (с новыми константами, зависящими от t_0, которые, однако, нас не интересуют)

$$\delta(t_0+\tau)=A-B(1-\cos n\tau)+\{C\tau+D\sin nt_0+\Omega(\tau)\}.$$

Выражение, стоящее в фигурной скобке, является нечетной функцией τ. Поэтому, если мы будем комбинировать противоположные по знаку и равные по абсолютной величине значения τ и построим $\delta^*(\tau)$ и $\rho(\tau)$ так, чтобы удовлетво-

---

[1]) Мы допускаем, конечно, *отрицательные* значения $t-t_0$ как для E^*, так и для ϑ.

[2]) Ω используется вместо буквы O (первая буква слова *odd* — нечетная), имеющей у нас специальное назначение. Заметим, что набранное в тексте курсивом утверждение справедливо «по симметрии»: *обратим* движение с момента t_0. (Это рассуждение учитывает также возмущение *Солнцем*, которое не столь мало́, как может показаться.)

рялись соотношения

$$\delta^*(\tau) = -\frac{1}{2}\{\delta(t_0+\tau)+\delta(t_0-\tau)-2\delta(t_0)\},$$

$$\rho(\tau) = \frac{\delta^*(\tau)}{1-\cos n\tau},$$

то будем иметь $\delta^*(t)=B(1-\cos n\tau)$ и $\rho(\tau)=B$ для всех τ. Таким образом, *если мы используем правильное значение t_0, то отношение $\rho(\tau)$ должно оказаться постоянным*: в этом и состоит наш метод определения t_0. Фактическое значение t_0 с точностью до года оказывается равным 1822.

Таблица II, в которой шаг равен 1 году (а n в $\cos n\tau$ равно $2\pi/84$), показывает результаты проб различных t_0 (число столетий в датах опущено). Последний знак в $\rho(\tau)$ ненадежен, но его надежность повышается с увеличением $2\delta^*(\tau)$: я привожу в этой таблице результаты моих вычислений, и они говорят сами за себя. Значение $\tau=6$ включено, хотя относительная ошибка значения δ^* для этого τ довольно велика[1]). Для $t_0=13$ значение ρ возрастает до 34,8 при $\tau=27$; для $t_0=16$ оно возрастает до 38,2 при $\tau=24$. Как только данные были собраны (имеются в виду значения для гладкой кривой), все вычисления заняли около часа работы с логарифмической линейкой. Дата 1822,4 представляется примерно «наилучшей» для t_0.

Нам требуются достаточно большие значения τ для того, чтобы значения $\delta^*(\tau)$ имели достаточное число значащих цифр, а также для того, чтобы располагать достаточно большим интервалом, в котором мы могли бы установить, что $\rho(\tau)$ постоянно. Нам также требуется место для маневрирования вокруг окончательного значения t_0. Таким образом, метод оказывается успешным благодаря тому «счастливому» обстоятельству, что 1822 г. достаточно удален от концов интервала наблюдений (1780—1840 гг.). Но ведь *какое-то* «везение» всегда необходимо.

Важно отметить, что метод совершенно нечувствителен к тому, насколько хорошо подсчитано E_B, и *нам не нужно знать элементов E_B (которые мне и неизвестны)*; достаточно знать «расхождение» с *некоторой* (конечно, *не слишком* плохой) «неизвестной» орбитой. С другой стороны, метод заведомо ничего не говорит о массе или расстоянии

[1]) И полученные значения для $\tau=6$ при $t_0=22$ и $t_0=22,4$ менее надежны, чем другие, вследствие резкого изменения в поведении гладкой кривой.

Таблица II

τ	$t_0=13$		$t_0=16$		$t_0=19$	
	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$
6	0,6	3,0	1,0	5,1	3,6	18,3
9	1,8	4,1	3,9	9,0	10,7	24,6
12	5,3	7,2	11,9	15,8	25,0	33,2
15	13,7	12,1	26,6	23,5	42,0	37,1
18	29,3	18,8	44,2	28,4	64,1	41,2
21	48,3	24,1	67,2	36,6	89,0	45,5

τ	$t_0=22$		$t_0=22,4$		$t_0=25$		$t_0=28$	
	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$	$2\delta^*(\tau)$	$\rho(\tau)$
6	9,2	47,0	10,6	53,8	18,2	92,5	20,4	103
9	23,2	53,3	25,0	57,6	34,5	79,3	41,1	94
12	39,8	53,0	42,2	56,1	55,9	74,4	64,7	86
15	61,5	54,4	64,0	56,5	79,8	70,5	91 (e)	80,6(e)
18	85,8	55,2	88,6	57,0	106 (e)	68,3(e)	—	—
21	113 (e)	56,5(e)	116 (e)	58,0(e)	—	—	—	—

N. Я хотел бы еще кое-что добавить к этому. Опустив e-члены, мы можем *точно* вычислить $\vartheta(\tau)/m$ для любого данного значения $\lambda=a/a_1$ (отношение больших полуосей орбит U и N) [1]). Идея, заключающаяся в том, чтобы испробовать различные λ, определяя по каждому λ наиболее подходящее m и беря наилучшие *пары* λ, m, не проходит, так как существенным членом в выражении ϑ является $b'(n\tau-\sin n\tau)$, а значение b' в сильной степени зависит от коэффициентов a, b, c, d в $\theta^*-\theta_B$, которые в свою очередь зависят от неизвестных элементов E_B (т. е. ϑ непригодно вследствие того, что $\theta^*-\theta_B$ «неизвестно»). Если бы мы *знали* эти элементы (или, что эквивалентно, исходные значения θ), то мы могли бы сдвинуться с места.

[1]) Для этого используются два дифференциальных уравнения второго порядка. Формула содержит «квадратуры», но при выполнении фактических вычислений интегрирование требует не больше времени, чем простое умножение. Сравнительно легко составить таблицу с двумя входами для $\vartheta(\tau, \lambda)/m$.

Эти данные можно, конечно, получить из архивов Парижской обсерватории, но я отказался от этой возможности, поскольку настоящая статья добавлялась к книге в самый последний момент, и я не чувствовал себя обязанным подходить к моей теме с сугубо профессиональных позиций. Кроме того, я не хотел, чтобы наш экскурс утратил свой характер легкой прогулки.

После того как t_0 определено, следовало бы угадать расстояние a_1 до N; период N тогда вычислялся бы по формуле $84\,(a_1/a)^{3/2}$ лет, и мы смогли бы предсказать положение N в 1846 г. В то время очевидной догадкой было (по эмпирическому закону Боде) $a_1/a=2$; но, к несчастью, N является первым исключением из этого закона, так как истинное значение $a_1/a=1{,}58$. Адамс и Леверрье действительно начали со значения 2 (Адамс во втором туре вычислений спустился до 1,942). С нашей точки зрения [1]) слишком большое a_1 ведет к непропорционально более плохим результатам, чем слишком малое a_1, и поэтому разумно в качестве первой попытки взять 1,8. Это дает для 1846 г. результат с ошибкой в 10°, а при поисках обычно практикуются такие отклонения телескопа.

Леверрье ошибся меньше, чем на 1° (Адамс — на 2—3°); «телескоп был направлен, и планету увидели». Столь точное двойное предсказание действительно является весьма курьезным фактом. Все наблюдения с 1780 по 1840 г. были использованы в равной мере, и теория претендовала на полное описание поведения N в течение всего этого периода. С неверным a_1 они могли быть правы в 1840 г. только за счет ошибочности данных за 1780 г. Для принятого Адамсом значения $a_1 = 1{,}94a$ период N (зависящий от a_1) оказался бы равным 227 годам; в предположении круговой орбиты и, следовательно, постоянной угловой скорости Адамс ошибся бы на 30° для 1780 г. Но неверное a_1, принятое Адамсом, автоматически нейтрализовалось большим эксцентриситетом 1/8 и отнесением перигелия к точке противостояния. Такая комбинация посылок привела к тому, что фактическое расстояние от S в критическом интервале оказалось близким к $1{,}7a$, и результирующая ошибка для 1780 г. (самая большая из всех) составила всего 18° (более очевидной компенсацией была бы в 2,8 раз большая масса).

[1]) Вычисления, основанные на теории возмущений, должны *исходить* из предположительного значения a_1; мы же a_1 выбираем в конце.

В более близкое к нам время небольшие ненормальности в поведении N и U были исследованы с точки зрения возможности существования транснептуновой планеты (ненормальности, относящиеся к U, оказались более податливыми), и в 1930 г. вблизи предсказанного места была открыта планета Плутон. Но это было чистейшей случайностью: Плутон имеет массу, вероятно, не бо́льшую, чем $\frac{1}{10}$ массы Земли, так что его влияние на N и U безнадежно покрывается ошибками наблюдений.

Мне остается лишь дать (школьное) доказательство соотношения (1). Положим $e_1-e_2=\Delta e$ и т. д. Выше было отмечено, что все Δ суть $O(m)$: это не совсем так, но я умышленно ввел читателя в заблуждение в его же собственных интересах [1]). Верно, что Δe, $\Delta\alpha$, Δn и $\Delta\varepsilon$ суть $O(m)$. Но «эффект» данного $\Delta\alpha$ исчезает при $e=0$ и пропорционален e. В *действительности не* $\Delta\alpha$, *а* $e\Delta\alpha$ *сравнимо с остальными* Δ *и является* $O(m)$ [2]).

Начнем с двух хорошо известных формул. Первую мы заимствуем из аналитической геометрии: полярное уравнение эллиптической орбиты имеет вид

$$r=a(1-e^2)(1+e\cos(\theta-\alpha))^{-1}. \tag{4}$$

Вторую мы заимствуем из динамики: 2-й закон Кеплера записывается в виде

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=na^2(1-e^2)^{1/2}. \tag{5}$$

Применяя точки для обозначения дифференцирования по t, будем иметь

$$\dot\theta=n(1-e^2)^{-3/2}[1-2e\cos(\theta-\alpha)+3e^2\cos^2(\theta-\alpha)+\ldots]. \tag{6}$$

Первым приближением (с $e=0$) является $\theta=nt+\varepsilon$. Применяя (6) с индексами 1 и 2, будем оперировать с Δ, помня, что мы можем брать первое приближение для любого *множителя* при m.

---

1) «Wen Gott betrügt, ist wohl betrogen».

2) Этот подвох делает «очевидный» подход, использующий хорошо известное разложение

$$\theta=nt+\varepsilon+2e\sin(nt+\varepsilon-\alpha)+\frac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\alpha)+\ldots,$$

несколько опасным; нам пришлось бы сохранить член с e^2. В тексте мы эту трудность обходим.

При оценке $\Delta\dot{\theta}$ можно, пренебрегая ошибкой $O(em)$, опустить множитель $(1-e^2)^{-3/2}$ в (6), так как этот множитель сам равен $1+O(e^2)$, а его Δ равно $O(e\Delta e)=O(em)$. Поэтому, с точностью до $O(em)$,

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta\{n[\quad]\} = [\quad]\Delta n + n\Delta[\quad].$$

Первое слагаемое равно $\Delta n+O(em)$. Второе равно

$$n[\Delta e\{-2\cos(\theta-\alpha)+O(e)\}+ \\ +\Delta(\theta-\alpha)\{2e\sin(\theta-\alpha)+O(e^2)\}],$$

и благодаря наличию множителя $O(e)$ мы можем отбросить θ в $\Delta(\theta-\alpha)$. Окончательно мы получим

$$\Delta\dot{\theta} = m(A+B\cos(\theta-\alpha)+C\sin(\theta-\alpha))+O(em),$$

где $mA=\Delta n$, $mB=-2n\Delta e$, $mC=-2n(e\Delta\alpha)$. Подставляя первое приближение $\theta=nt+\varepsilon$ в правую часть, мы находим

$$\Delta\dot{\theta} = m(A+B\cos(nt+\varepsilon-\alpha)+C\sin(nt+\varepsilon-\alpha))+O(em),$$

а интегрируя, получаем

$$\Delta\theta = \Delta\varepsilon + m\left[At+\frac{B}{n}\sin(nt+\varepsilon-\alpha)- \right. \\ \left. -\frac{C}{n}\cos(nt+\varepsilon-\alpha)\right]+O(em),$$

что и дает (1) после того, как мы применим формулы для синуса и косинуса суммы двух углов и приведем подобные члены[1]).

[1]) Мы рассматривали Δn и $\Delta\alpha$ как независимые величины (последняя вообще не входит в окончательную формулу для $\Delta\theta$); это означает, что мы допускаем разные массы для двух «солнц». Это обстоятельство играет роль в некоторых более тонких рассмотрениях, на которых я здесь не останавливаюсь.

Дело Адамса — Эри

Обзор[1]. Адамс посетил Королевскую обсерваторию 21 октября 1845 г., не смог увидеть Эри и оставил записку с кратким извещением о своем предсказании относительно *N*. Ответное письмо Эри (от 5 ноября) содержало вопрос о том, «объясняются ли отклонения радиуса-вектора той же теорией, которая объясняет отклонения в долготе». Адам не ответил. Фактические наблюдения не начинались до 29 июля 1846 г., когда Чаллис приступил к выполнению полной (к сожалению, слишком полной) программы поисков, продолжавшихся до конца сентября. Леверрье послал свое предсказание в Берлинскую обсерваторию, где Галле нашел *N* (при помощи незадолго до того опубликованной карты неба) 23 сентября, в тот же самый день, когда пришло письмо Леверрье.

То, что я имею сказать, относится как раз к *r*-поправкам. Адамс приступил к работе в полной уверенности, что причиной плохого поведения *U* является неизвестная планета, и с ясным представлением о том, как математически подойти к задаче; он был полностью поглощен своей работой и все время находился, если так можно выразиться, «при исполнении служебных обязанностей». Эри не занимался этим вопросом и думал, что в этом темном деле существует много других возможностей объяснения ненормальностей в поведении *U*; к идее новой планеты он относился скептически, что в 1845 г. было вполне объяснимо. (Опираясь на прошлый опыт, он, вероятно, считал, что методы теории возмущений требуют экспериментальных данных, относящихся к нескольким оборотам, т. е. результатов наблюдений многих сотен лет.) Однако он поставил вопрос о *r*-поправках, и этот вопрос, к сожалению, стал его идеей-фикс. (В своем объяснении перед общим собранием Королевского

---

[1]) Полный отчет занимает бо́льшую часть статьи Смарта: с. 19—43 (см. с. 120).

общества 13 ноября 1846 г. Эри говорил: «Я поэтому считал вопрос, может ли теория, объясняющая отклонения в долготе, объяснить и отклонения в радиусе, настоящим *experimentum crucis*. И я с большим нетерпением ожидал ответа мистера Адамса на этот вопрос. Если бы ответ был положительный, я бы сразу употребил все свое влияние» и т. д.) Адамс (который с самого начала и до конца был по отношению к Эри весьма вежлив и почтителен) фактически на этот вопрос так и не ответил. Его личное мнение [1]) состояло в том, что вопрос тривиален. Вот что он писал Эри 18 ноября в ответ на цитированное выше выступление (я опускаю его вежливые извинения): «В течение нескольких прошедших лет наблюдаемое положение Урана все больше и больше отставало от его табулированного положения. Другими словами, фактическое угловое движение Урана было значительно более медленным, чем то, которое предсказывалось таблицами. Мне кажется, что это ясно показывает, что табличный радиус-вектор любой теорией, правильно представляющей движение Урана по долготе, будет значительно увеличен, так как изменение правой части равенства

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

очень мало [2]). В соответствии с этим я нашел, что если просто исправить эллиптические элементы так, чтобы удовлетворить как можно точнее современным наблюдениям без учета других дополнительных возмущений, то соответствующее увелнчение радиуса-вектора не будет очень отличаться от того, что дает моя теория». (Остальное несущественно для наших целей.)

Я нахожу, что эта цитата (как и многое из того, что писалось 80 лет назад [3])) не является образцом кристально ясного изложения; но самый важный пункт, касающийся того, что, по мнению Адамса, *у. м.* изменяется очень мало, не мог бы быть изложен яснее. «Постоянство» *у. м.* устанавливало бы очень простую связь между θ-отклонениями и r-отклонениями. Чаллис (после открытия N) соглашается с мнением Адамса: «Совершенно невозможно исправить дол-

---

[1]) Сообщенное им в разговоре с Глейшером в 1883 г.

[2]) [$r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ — угловой момент (кратко: *у. м.*).— *Дж. И. Л.*]

[3]) Тогда надо было быть по крайней мере доцентом, чтобы с пониманием читать научную статью; сегодня любой аспирант может *читать* все.

готу (U) по наблюдениям в течение, по крайней мере, 180 лет независимо от исправлений радиуса-вектора...» Мнение Адамса окончательно подтверждается вычислениями: изменение *у. м.* очень слабо влияет на θ-эффекты.

Первое, что надо отметить,— это то, что Адамс и Эри частично говорили о разных вещах. Точка зрения Эри: я сомневаюсь, чтобы объяснение заключалось в наличии неизвестной планеты, но я готов рассмотреть эту возможность, если она объясняет отклонения r так же хорошо, как отклонения θ. Точка зрения Адамса: вопрос решается новой планетой, и если ее определить так, чтобы совпадали θ, то автоматически (ввиду имеющихся («связей») совпадут и значения r. Вина Адамса заключалась в том, что он не хотел понять точку зрения Эри; впоследствии он сам признал, что на вопрос Эри он должен был сразу дать обоснованный ответ. По-видимому, сыграло роль и то обстоятельство, что, будучи очень тонким математиком, Адамс был в то же время типичным кембриджским «первым призером» (молодой самоуверенный талант; все знания и идеи разложены по полочкам и в любой момент под руками; соображает быстро и без усилий). Пожилые люди, стремящиеся не утруждать себя размышлениями, если обстоятельства это позволяют, могут показаться ему медлительными и глупыми [1]). Следует всегда отвечать на тривиальные вопросы ваших старших коллег (тем более, что и молодой талант все же может что-нибудь не учитывать).

До сих пор я скрывал от читателя тот факт, что в решающем теоретическом вопросе об *у. м.* Адамс был абсолютно неправ. Относительное изменение *у. м.* того же порядка, что и θ — ошибка. Это очевидно даже с позиций школьной математики (возьмем «моменты» относительно S:

---

[1]) Люди, не встречающиеся со знаменитостями в часы их досуга, вряд ли представляют себе, какие глупости эти знаменитые люди в состоянии высказывать. Я вспоминаю две беседы за профессорским столом в кембриджском Тринити-колледже. Одного из самых известных биологов спросили, будут ли сыновья двух отцов-близнецов, женатых на двух сестрах-близнецах, похожи друг на друга; он ответил: «конечно», и был тут же поправлен одним быстро реагирующим философом. В другой беседе участвовали Резерфорд, Фаулер, по крайней мере еще один физик и я; мы безнадежно запутались в вопросе о связи между экспериментом с падением монеты и перышка в пустоте и фактом независимости вязкости от плотности. Не является ли этот эксперимент вообще блефом? Резерфорд извиняющимся тоном сказал, что, кажется, он сам видел этот опыт в юности. Мы продолжали обсуждение после ужина, когда нас вывел из тупика один инженер.

N сильно влияет на *у. м.*) [1]). Точка зрения Адамса последовательно основывалась на теории возмущений, но и с этих позиций, если даже и за «первым призером» признать право ошибаться, ошибка Адамса выглядит по крайней мере странной [2]). Численное подтверждение точки зрения Адамса представляет собой последний штрих этой комедии. В словах «мало изменяется» слово «мало» понимается в том смысле, что 15% — это малое изменение, но не «очень» малое (выражение Адамса). Так или иначе, эта малость является случайным следствием числовых постоянных; например, при «далеком» N ее уже нет.

Постскриптум о небесной механике. Я закончу эти замечания раскрытием секрета одной моей собственной работы, из которой вытекает, что в гравитирующей системе тел (обобщение солнечной системы) никогда не может произойти захвата (или, наоборот, потери) даже пылинки [3]). Этот результат имеет характер сенсации (я не встретил ни одного математика, который не был бы удивлен, услышав о нем), так как он противоречит общему мнению. Добавлю, что, во-первых, это не означает немедленного ухода пылинки, она может удерживаться в системе любое число биллионов лет. Существуют даже *предельные* случаи, в которых захват перманентен; но эти случаи должны быть отброшены как бесконечно редкие, так же как мы отбрасываем перманентные состояния неустойчивого равновесия (булавка на острие). Эти бесконечно редкие случаи, однако, показывают, что теорема не может быть тривиальной. Во-вторых, доказательство никоим образом не утверждает, что уходит именно пылинка: уйти может и Юпитер.

Эта теорема является следствием следующей теоремы: *допустим, что система была заключена в фиксированной сфере S для всех отрицательных времен; тогда (за исключением бесконечно редких случаев) она будет находиться в этой сфере и для всех положительных времен. Аналогичное утверждение имеет место и при перестановке положительных и отрицательных времен.* (Чтобы убедиться

---

[1]) Полный анализ круговой орбиты, конечно, подтверждает это.

[2]) $1-e^2$ «мало изменяется», но что заставило его думать, что a ведет себя так же?

[3]) Тела рассматриваются как точечные массы (чтобы избежать трудностей, связанных с соударением тел конечных размеров), подчиненные закону обратных квадратов ньютонова тяготения (последнее, вероятно, несущественно). Мне не удалось обнаружить более ранней формулировки этого результата.

в том, что предыдущая теорема действительно является *следствием* этой теоремы, заметим, что любой настоящий захват (соответственно, настоящая потеря) означает отличие прошлого от будущего, что исключается.)

Возьмем последнюю теорему в ее формулировке с переставленными будущим и прошлым (эта формулировка несколько более удобна); идея доказательства заключается в следующем. «Система» ассоциируется с ее точкой-представителем (кратко *т.-п.*) P «фазового» пространства, которая задает начальные условия в фиксированный момент времени t_0, например $t_0=0$[1]). Теперь рассмотрим множество V (в $6n$-пространстве) всех точек P, представляющих системы, которые (в астрономическом пространстве) остаются в сфере S для всех положительных времен. «Система» P имеет новую *т.-п.* P' (координаты $x, \ldots, \dot{x}; \ldots$), соответствующую, скажем, моменту $t=1$; множеству V точек P, таким образом, будет соответствовать множество V' точек P'. Существует известная теорема, которую мы примем без доказательства, утверждающая, что ($6n$-мерные) объемы V и V' равны между собой [так как дифференциальные уравнения системы «консервативны»] [2]).

Далее, множество V' может рассматриваться в том же $6n$-пространстве, что и множество V. Для того чтобы *т.-п.* P принадлежала к V, она должна выдержать некоторое вступительное испытание, заключающееся в том, что все тела должны оставаться в S *во все последующие моменты времени*. Но если P' из V' получается из P, входящего в V, то «будущее» P' начинается на единицу времени позже, чем «будущее» P, и, следовательно, P' *выдерживает вступительное испытание*. Итак, *множество V' содержится в множестве V*. Но их объемы равны. Все это вместе взятое означает, что V' и V тождественны [как *множества*: набор P' совпадает с набором P]. Поэтому *любая точка Q из V является некоторой точкой R из V'*.

Будем теперь исходить из некоторой точки Q из V и рассмотрим соответствующую *т.-п.* в момент $t=-1$ (момент прошлого, на единицу времени более ранний). Q является

---

[1]) Если система состоит из $n+1$ тела, то фазовое пространство имеет $6n$ «измерений», а именно: n (астрономических) пространственных координат x_0, y_0, z_0 и n соответствующих скоростей $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ n из этих тел в момент t_0.

[2]) Любое множество V имеет один и тот же объем во все моменты t. Для математика-профессионала доказательство умещается в одной строке (если можно якобиан назвать строкой).

каким-то R из V' и, следовательно, получается (в том же смысле, в каком P' получается из P) из некоторого T из V. Эта точка T является *т.-п.* P при $t=-1$. Мы приходим к заключению, что при $t=-1$ *т.-п. любого P из V сама лежит в V*. Это заключение можно неограниченно продолжать в прошлое: если P находится в V в момент $t=0$, то соответствующая *т.-п.* принадлежит к V во все моменты ($t=-m$) сколь угодно далекого прошлого. Это означает, что все тела системы оставались в S в течение *всего* прошедшего времени, и доказательство закончено.

Приведенное рассуждение является поразительным примером силы общих соображений. Если бы основные идеи этого рассуждения принадлежали мне, то я действительно имел бы чем гордиться; но они известны уже по крайней мере в течение 60 лет. Со мной же произошло следующее. Читая курс дифференциальных уравнений, я встретился с уравнениями, для которых объем множеств V убывает с возрастанием t. Мне пришла в голову «теорема о постоянном объеме» (кстати, я впервые узнал о ней незадолго до этого) и, чтобы немного отвлечься, я переключился на небесную механику. После лекции я пошел на прогулку, и изложенное выше доказательство промелькнуло у меня в голове (буквально в течение нескольких секунд). Моей первой реакцией было отвергнуть мысль о публикации столь мало оригинальной вещи. Но так как я имел обязательство написать статью для одной *Festschrift*, а у меня в тот момент ничего другого не было, то я решил внимательно продумать все детали доказательства.

Так обычно поступают все, кому иногда приходит в голову что-либо новое. Оказалось, что, строго говоря, мое рассуждение содержит некоторые ошибки (фактически оно содержит 3 неверных заключения). Любой компетентный аналитик может избавиться от них, и в результате возникает довольно содержательная работа. Так появилась на свет моя *«находка»* [1]: блестящие идеи, не мои, *плюс* математическая рутина.

[1]) Статья напечатана в Communication du séminaire mathématique de l'Université de Lund, tome supplémentaire (1952), dédié à Marcel Riesz. Она содержит добавление, в котором показывается, что предположение о равенстве масс нулю может быть отброшено. Это небольшое замечание вовсе не тривиально; в действительности мне пришлось потрудиться над ним две недели. (Хотя основная идея этого добавления требует для своей формулировки нескольких страниц, она тоже пришла мне в голову во время прогулки, на этот раз буквально в течение *доли* секунды.)

Лев и человек

«Лев и человек, находящиеся на огороженной круглой арене, имеют одинаковую максимальную скорость. Какой стратегии должен придерживаться лев, чтобы быть уверенным в своей трапезе?» [1]).

Говорят, что задача о «взвешивании монет» стоила 10 000 человеко-часов непродуктивно потраченного времени математиков, занятых оборонной работой во время войны. Было даже сделано предложение сбросить эту задачу над Германией. Задача о льве [2]), хотя и имеет уже 25-летнюю давность, недавно вновь пронеслась по стране; но большинство из нас удовлетворилось ответом «L (лев) все время должен находиться на радиусе OM (M — человек)».

Если L сходит с OM, то асимметрия идет на пользу M. Поэтому L придерживается OM и всякая иррегулярность в поведении M помогает L. Примем поэтому для простоты, что M бежит по окружности C радиуса a с угловой скоростью ω. Тогда L (придерживаясь радиусов) бежит по окружности, касающейся C [3]), скажем, в точке P и M оказывается пойманным за время, меньшее $\frac{\pi}{\omega}$. Это легко следует из уравнений движения L, а именно $\dot{\theta}=\omega$, $\dot{r}^2+r^2\omega^2=$ $=a^2\omega^2$. Поучительно, однако, подробнее исследовать движение вблизи P. Здесь мы имеем

$$\dot{r} \geqslant \frac{\sqrt{a-r}}{K}, \quad t < \mathrm{const}+K\int \frac{dr}{\sqrt{a-r}}.$$

Интеграл сходится (при $r \to a$) с большим запасом — настолько большим, что принятое нами упрощающее условие

[1]) «Кривая погони» (L бежит всегда прямо на M) требует бесконечного времени, так что формулировка задачи не лишена смысла.

[2]) Придумана Р. Радо (но не опубликована).

[3]) Случай, когда движение L начинается в O, особенно ясен из геометрических соображений.

представляется полностью оправданным. * Математик-профессионал легко проверит, что когда M движется по развертывающейся спирали, приближаясь к окружности, то, применяя легко понятное обозначение $x=r_M-r_L$ (теперь ω — уже переменное), мы будем иметь

$$-\dot{x} \geqslant \omega^2 r_L \frac{x}{r_L} = X,$$

где $\frac{X}{x} \to \infty$. Тогда $t < \text{const} + \int\limits^{x} X^{-1}\,dx$ и этот интеграл возрастает медленнее, чем $\int\limits^{x} x^{-1}\,dx$; поэтому можно, вообще говоря, с уверенностью предположить, что интеграл *сходится*. *

Несмотря на все это, «ответ» неверен: M может избежать поимки (как бы L себя ни вел). Это было совсем недавно обнаружено профессором А. С. Безиковичем; далее следует первое (и единственное) опубликованное доказательство.

Я начну с того случая, когда L придерживается OM; в этом случае все рассуждения легко проводятся (и во всяком случае этого достаточно для доказательства неверности «ответа»). Исходя из начальной точки M_0 при $t=0$, проведем ломаную $M_0M_1M_2\ldots$ со следующими свойствами: (I) M_nM_{n+1} перпендикулярно к OM_n, (II) длина ломаной бесконечна, (III) ломаная остается внутри круга с центром в O, не выходящего за пределы арены. В самом деле, если положить $l_n=M_{n-1}M_n$, то мы имеем $OM_n^2=OM_0^2+\sum\limits^{n} l_m^2$, и все будет обеспечено при $l_n=cn^{-\frac{3}{4}}$ с соответствующим образом подобранной постоянной c. Пусть M бежит вдоль этой ломаной (а L, как условлено, придерживается OM). Так как M_0M_1 перпендикулярно к L_0M_0, то *L не может поймать M, пока M находится на M_0M_1*. Так как, далее, L_1 находится на OM, а M_1M_2 перпендикулярно к L_1M_1, то L не может поймать M, пока M находится на M_1M_2. Это продолжается на каждом последующем звене M_nM_{n+1} и, следовательно, в течение бесконечного времени, так как общая длина ломаной бесконечна.

* Я добавлю набросок поразительно короткого доказательства в общем случае. Пусть дано M_0 и L_0; *M выбирает* подходящее O и «строит» описанную выше ломаную $M_0M_1M_2\ldots$, но бежит вдоль другой ломаной $M_0M_1'M_2'\ldots$, ассоциированной с первой и зависящей от того, что делает

L. M_0M_1' проводится перпендикулярно к L_0M_0; если N_0 — основание перпендикуляра, опущенного из O на M_0M_1', то M_1' берется на продолжении M_0N_0 так, чтобы было $N_0M_1'= =l_1 (=M_0M_1)$. Если L находится в L_1, когда M прибывает в M_1', то $M_1'M_2'$ проводится перпендикулярно к L_1M_1' и M_2' выбирается на этой прямой так, чтобы было $N_1M_2'=l_2$ и т. д. Ясно, что $OM_n'^2-OM_{n-1}'^2\leqslant l_n^2$, $OM_n'^2\leqslant OM_n^2$, и новая ломаная лежит внутри того же круга, что и старая. Так как $M_{n-1}'M_n'\geqslant l_n$, то новая ломаная также имеет бесконечную длину, и L по-прежнему не сможет поймать M. *

Научно-популярное издание

ЛИТЛВУД Джон

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*

Редактор *В. В. Донченко*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 41098

Сдано в набор 31.07.89. Подписано к печати 12.02.90. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7,56. Усл. кр.-отт. 7,98. Уч.-изд. л. 7,58. Тираж 200 000 экз. Заказ № 9—399. Цена 40 коп.

Издательско-производственное
и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской
Революции и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР по печати.
113054 Москва М-54, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь»
Ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия». 252119
Киев-119, ул. Пархоменко, 38-44.