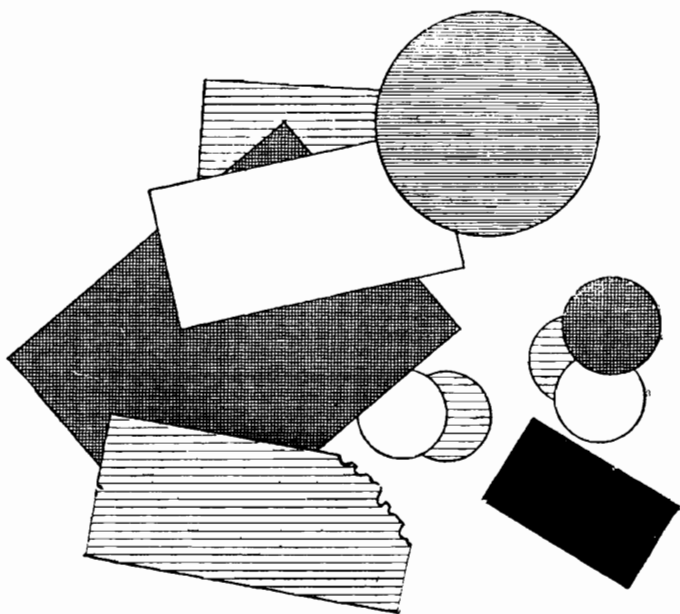


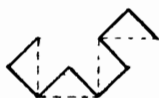
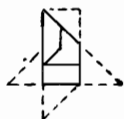


MATHEMATICAL GAMES
FROM *SCIENTIFIC AMERICAN*



Мартин Гарднер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ



НОВЕЛЛЫ



Перевод с английского Ю. А. Данилова
Под редакцией Я. А. Смородинского

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

МОСКВА

1974

Гарднер М.

Г20 Математические новеллы. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Под ред. Я. А. Смородинского. М., «Мир», 1974.

456 с. с илл.

Как и предыдущие книги известного американского специалиста в области занимательной математики, М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» и «Математические досуги», настоящая книга живо и увлекательно рассказывает читателю много удивительного из различных разделов математики. Удачный подбор материала и необычная форма его подачи доставят большое удовольствие читателям — любителям математики, желающим с пользой провести досуг.

Г $\frac{20202-183}{041(01)-74}$ 183—74

51

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974.

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предисловии к первому изданию своей книги «Жизнь растений», вышедшему в 1878 г., К. А. Тимирязев писал: «Положение автора общедоступного сочинения... тем отличается от положения автора специального исследования, что оно лишает его всякой возможности оправдываться и защищаться. Оно выдает его совершенно беззащитным в руки его судей. Первой и последней безапелляционной инстанцией является читатель. Специалист может находить свое изложение добросовестным, преодолевающим значительные трудности и пр., но если оно просто не нравится читателю, оно уже не достигает своей цели и, следовательно, осуждено».

Отношение к книгам Мартина Гарднера читатели и у нас, и за рубежом выражают ясно и определенно: их читают.

Предлагаемая книга, выходящая вслед за «Математическими головоломками и развлечениями» и «Математическими досугами», — третий «семестр» того замечательного курса общедоступной математики, который на протяжении многих лет М. Гарднер ведет на страницах журнала *Scientific American*, третий том своеобразной «Энциклопедии математических игр XX века».

Быть процитированным в разделе «Математических игр» журнала *Scientific American* для автора задачи, будь то начинающий любитель или известный математик, — не меньшая часть, чем быть «ограбленным» знаменитым «многоголовым» математиком Никола Бурбаки, имеющим обыкновение приводить в своих «Элементах математики» чужие результаты без ссылки на автора.

Демонстрируя классическую или лишь недавно придуманную задачу, Гарднер неизменно показывает ее в необычном ракурсе, проводит неожиданные параллели или обогащает ее содержание новым, ранее не известным фактом.

Гарднер широко использует самые разнообразные источники: труды по общей истории и истории математики, переписку с читателями, монографии и учебники, наследие великих математиков прошлого.

В настоящей книге читателя ожидают не только встречи с изобретателем полимино С. Голомбом, автором игры «Жизнь» Дж. Конуэем, голландским художником М. Эшером, но и с новыми именами, в частности с автором многотомного «Искусства программирования для ЭВМ» Д. Кнутом.

Материал, собранный в книге, как правило, расположен в хронологическом порядке и охватывает период с 1964 г. по 1969 г. Глава «Новые игры: «Гонки», «Сим» и «Щелк!» опубликована в январском и февральском номерах *Scientific American* за 1973 г.

Ю. Данилов
Я. Смородинский

ГЛАВА 1

ТРУДНОСТИ И ПАРАДОКСЫ, СВЯЗАННЫЕ С БЕСКОНЕЧНЫМИ РЯДАМИ И ПОНЯТИЕМ ПРЕДЕЛА

Для тех, кто постиг все премудрости элементарной математики и намерен приступить к изучению так называемой высшей математики, или математического анализа, весьма полезно, не вдаваясь в излишние тонкости, сначала разобраться в том, что такое предел, на интуитивном уровне.

Основные инструменты математического анализа — производная и определенный интеграл — представляют собой пределы частичных сумм некоторых рядов. Каждое иррациональное число, например π , e и $\sqrt{2}$, также можно представить в виде суммы (то есть предела частичных сумм) надлежащим образом построенного ряда. Может быть, несколько «легкомысленный» подход к понятию предела с позиций занимательной математики позволит обойти хотя бы некоторые из тех трудностей, с которыми пришлось столкнуться математикам на заре развития анализа и которые и поныне служат камнем преткновения для всякого, кто впервые встречается с понятием предела.

Греческий философ Зенон Элейский, живший в V в. до н. э., на ряде замечательных парадоксов — «апорий Зенона» — показал, какие логические ловушки подстерегают каждого, кто вздумает говорить о бесконечных рядах. «Каким образом бегун может вообще покрыть расстояние от пункта A до пункта B ?» — вопрошал Зенон. Ведь прежде чем пробежать все расстояние, отделяющее пункт A от пункта B , бегун должен преодолеть его половину. Пробежав половину пути, бегун, прежде чем оказаться у финиша, должен будет преодолеть половину оставшегося расстояния, то есть оказаться в точке,

отстоящей от пункта A на расстоянии, равном $\frac{3}{4}$ всего пути. После этого, прежде чем попасть в пункт B , бегун снова должен будет сначала пробежать половину оставшегося расстояния, то есть дойти до «промежуточного финиша» в точке $\frac{7}{8}$ (если длину всего пути AB мы примем за 1) и т. д.. Иными словами, бегун должен пробежать расстояние, равное сумме ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Многоточие означает, что ряд продолжается до бесконечности. Каким образом, спрашивает Зенон, бегун может преодолеть бесконечную последовательность отрезков за конечное время? Ведь, сколько бы членов ряда мы ни взяли, достичь «конца пути» — 1 нам так и не удастся, ибо не будет доставать отрезка пути, равного последнему взятому члену.

Нетрудно придумать мысленный эксперимент, подтверждающий, казалось бы, правильность вывода Зенона. Вообразим, что мы совместили центр круглого основания шахматного ферзя с точкой A . Теперь будем перемещать ферзя из A в B по следующей схеме. Засечем время и, передвинув ферзя на половину расстояния AB , подождем, пока с момента «старта» истечет секунда. Затем передвинем ферзя еще на четверть расстояния AB и подождем, пока истечет секунда, отсчитываемая с момента второго старта. Так же будем передвигать ферзя и дальше: каждый новый ход будем делать лишь через секунду после начала предыдущего. Спрашивается, через какой промежуток времени ферзь достигнет точки B ?. Оказывается, что это событие не произойдет никогда. Предположим теперь, что ферзь движется с постоянной скоростью, подобранной так, что он проходит половину расстояния за полсекунды, четверть расстояния — за четверть секунды и т. д. В этом случае и пройденное от точки A расстояние и истекшее с начала пути время будут описываться одним и тем же рядом, в котором каждый последующий член вдвое меньше предыдущего. Этот ряд сходится к 1.

Что имеет в виду математик, когда говорит, что «сумма» ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

равна 1? Ясно, что в данном случае в понятие «сумма» он вкладывает иной смысл, чем в понятие «сумма конечного ряда». Просуммировать бесконечный ряд в обычном смысле слова невозможно, потому что число слагаемых — членов ряда — бесконечно. Когда математик говорит о сумме бесконечного ряда, он имеет в виду число, к которому стремятся частичные суммы ряда при неограниченном числе входящих в них членов ряда. Слово «стремится» математик также понимает в специальном смысле: оно означает, что разность между суммой ряда и его частичными суммами можно сделать *сколь угодно малой*. Мы подошли сейчас к самой сути понятия предела. Частичные суммы бесконечного ряда иногда могут достигать его суммы и даже *превосходить* ее. Простой пример ряда, у которого частичные суммы превосходят свой предел — сумму ряда, — мы получим, изменив знаки у четных членов ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

с плюса на минус:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

Частичные суммы этого ряда попеременно оказываются то больше, то меньше суммы ряда, равной 0,333... (Кстати сказать, число 0,333... есть не что иное, как запись дроби $\frac{1}{3}$ в виде суммы бесконечного ряда десятичных дробей

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots)$$

Существенно, что всякий раз, когда ряд сходится, можно найти частичную сумму, отличающуюся от суммы ряда на величину, которая меньше любого наперед заданного числа.

Найти сумму сходящегося ряда нередко очень трудно, но если члены ряда убывают, как члены геометрической прогрессии (как, например, члены рассмотренного нами ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$), то для отыскания суммы ряда существует простой искусственный прием, который полезно знать каждому.

Пусть x — сумма интересующего нас ряда:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Умножив обе части равенства на 2, получим

$$2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Нетрудно видеть, что в правой части последнего равенства после 1 стоит первоначальный ряд. Следовательно,

$$2x = 1 + x,$$

откуда

$$x = 1.$$

Теперь, воспользовавшись полученными знаниями, попытаемся проанализировать другую апорию Зенона: «Ахиллес быстроногий не может догнать черепаху».

Предположим, что Ахиллес бежит вдесятеро быстрее, чем ползет черепаха, и в начале состязания черепаха имеет 100 м форы. К тому времени когда Ахиллес пробежит 100 м, черепаха успеет проползти 10 м. Когда же Ахиллес пробежит и эти 10 м, черепаха уползет вперед на 1 м. Если на преодоление каждого отрезка пути (длинной в 100, 10, 1 м и т. д.) Ахиллес будет затрачивать одно и то же время, он никогда не догонит черепаху. Если же оба участника состязания будут двигаться с постоянными скоростями, Ахиллесу непременно удастся настичь черепаху. Какое расстояние он успеет пробежать к этому моменту? Ответом (в метрах), очевидно, служит сумма ряда

$$100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots$$

Ясно, что она равна 111,111 ..., или $111\frac{1}{9}$ м. Предположим теперь, что Ахиллес бежит со скоростью, всемерно превышающей скорость черепахи, которая и на этот раз имеет 100 м форы. Сколько придется пробежать Ахиллесу, прежде чем он догонит черепаху?

(Мы оставляем в стороне вопрос о том, как современные математики разрешают апории Зенона*. Ра-

* См., например, статью С. А. Яновской «Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апории Зенона»? в сб. «Проблемы логики» (М., изд-во АН СССР, 1963, стр. 116—136). — *Прим. перев.*

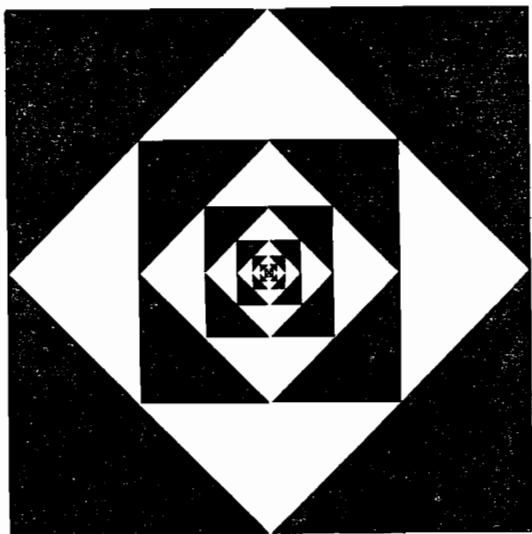


Рис. 1. Бесконечная последовательность вписанных друг в друга квадратов.

зумеется, ответ здесь существенно зависит от того, какой смысл вкладывается в слово «разрешать». Апории Зенона поднимают слишком глубокие вопросы, связанные со структурой пространства и времени и анализом понятия движения, чтобы отмахиваться от них или отвечать на них подобно Диогену, который попросту встал и прошел расстояние от пункта *A* до пункта *B*.)

Задачи о прыгающем мяче, которые можно найти во многих сборниках задач на смекалку, также легко решаются с помощью объясненного выше искусственного приема. Предположим, что идеально круглый мяч, падая с высоты 1 м, каждый раз подпрыгивает на высоту, составляющую $\frac{1}{3}$ от предыдущей. Если бы каждый подскок длился 1 с, мяч прыгал бы вечно. Однако времена подскоков убывают вместе с высотой, образуя сходящийся ряд, поэтому мяч в конце концов перестает подпрыгивать, хотя (теоретически) успевает совершить бесконечное число подскоков. Надо полагать, что читатель без труда сможет определить путь, который

успевают пройти идеальный мяч, прежде чем он окончательно перестанет подпрыгивать.

Неиссякаемым источником рядов рассматриваемого нами типа служат геометрические задачи. Пусть сторона самого большого квадрата на рис. 1 имеет единичную длину. Построим бесконечную последовательность квадратов, вписанных друг в друга таким образом, что вершины каждого последующего квадрата совпадают с серединами сторон предыдущего квадрата. Чему равна площадь всей бесконечной последовательности квадратов? Очевидно, она равна 1 плюс сумма уже знакомого нам ряда $(1/2 + 1/4 + \dots)$. Иными словами, полная площадь, занимаемая членами бесконечной последовательности квадратов, равна 2. Лишь немногим труднее задача, предложенная в 1905 г. на ежегодной математической олимпиаде в Венгрии. Единичный квадрат разделен на девять равных квадратов, как для игры в крестики и нолики. Центральный квадрат закрашен в черный цвет. Каждый из восьми остальных квадратов в свою очередь разделен, как и исходный квадрат, и каждый центральный квадрат из девяти квадратов «второго поколения» закрашен в черный цвет. Описанная процедура повторяется неограниченное число раз*. Чему равен предел площади части исходного квадрата, закрашенной в черный цвет (рис. 2)? (Ответы на этот и другие вопросы помещены в конце главы.)

Если ряд не сходится, то его называют расходящимся. Нетрудно заметить, что ряд $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ не сходится. А что будет, если каждый член какого-нибудь ряда меньше предыдущего и все члены положительны? Должен ли такой ряд непременно сходиться? Трудно поверить, но ответ на этот вопрос отрицателен. Рассмотрим, например, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots,$$

известный под названием гармонического ряда. Каждый последующий член этого ряда меньше предыдущего: в пределе члены ряда стремятся к нулю. Тем не менее сумма гармонического ряда неограниченно возрастает!

* Предельная фигура называется «ковром Серпинского». О ее удивительных свойствах рассказывается в книге А. С. Пархоменко «Что такое линия» (М., Гостехиздат, 1954). — *Прим. перев.*

Чтобы доказать это несколько неожиданное утверждение, сгруппируем члены ряда по два, четыре, восемь и т. д., начиная с члена, равного $\frac{1}{3}$. Сумма членов гармонического ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, оказавшихся в первой группе, больше $\frac{1}{2}$, поскольку $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, а $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично сумма членов второй группы $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ больше $\frac{1}{8}$, поскольку каждый из входящих в нее членов, кроме последнего, больше $\frac{1}{8}$, а $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. По той же причине сумма членов третьей группы (из 8 членов) больше $\frac{1}{2}$ — ведь, каждый из членов этой группы, кроме последнего, больше $\frac{1}{16}$, а $8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$. Продолжая рассуждение, можно показать, что сумма членов каждой последующей группы также больше $\frac{1}{2}$, а поскольку число таких групп неограниченно велико, рассматриваемый ряд должен быть расходящимся. Гармонический ряд действительно расходится, но это происходит удручающе медленно. Например, сумма первых 100 его членов лишь немного больше 5. Чтобы частичная сумма гармонического ряда достигла 100, необходимо взять более 2^{100} его членов! (Более точно: сумма 2^{143} первых

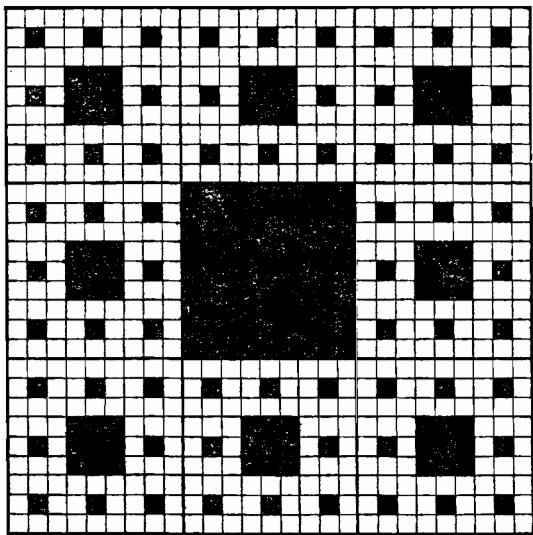
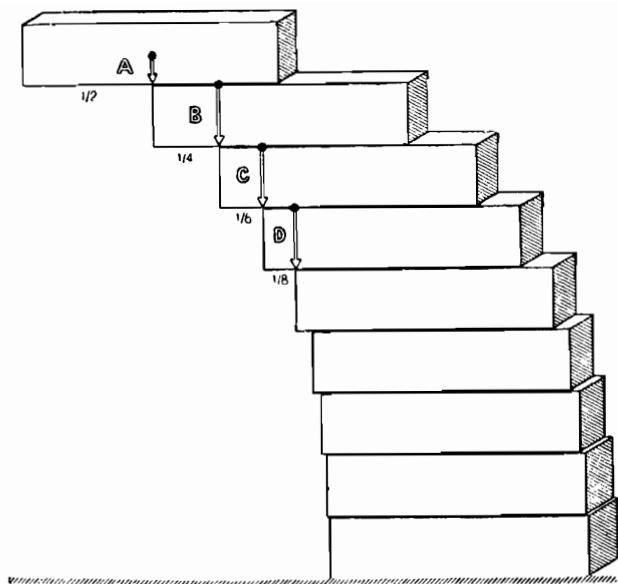


Рис. 2. Ковер Серпинского.

Чему равен предел части квадрата, закрашенной в черный цвет?



Р и с. 3. Парадокс сдвинутых кирпичей.

Расстояние между левыми гранями верхнего и нижнего кирпичей может быть сколь угодно велико.

членов гармонического ряда еще меньше 100, а сумма 2^{144} его членов уже больше 100.) Число это так велико, что нам даже трудно себе его представить. Если каждый член гармонического ряда напечатать на квадратике из бумаги со стороной в 1 см (дроби, выражающие «далекные» члены гармонического ряда с большими номерами, нам пришлось бы набирать микроскопическими цифрами, иначе они не уместились бы на квадратике, но подобное затруднение мы считаем несущественным), то 2^{100} квадратиками можно было бы покрыть весь земной шар, причем не в один, а примерно в 400 млрд. слоев!

Гармонический ряд возникает и в еще одной занимательной задаче. Если один кирпич уложен на другой, то максимальное расстояние, на которое можно сдвинуть верхний кирпич так, чтобы он не упал с нижнего, будет достигнуто, когда центр тяжести верхнего кирпича будет проектироваться на боковую грань нижнего кирпича (как показано стрелкой A на рис. 3). Если теперь оба

наших кирпича мы поместим на третий, то максимальный сдвиг будет достигнут в момент, когда их общий центр тяжести будет проектироваться на боковую грань нижнего кирпича (как показано стрелкой *B* на рис. 3). Продолжая укладывать кирпичи с максимально возможным сдвигом, мы получим искривленную колонну, изображенную на рис. 3. Спрашивается, насколько левая грань верхнего кирпича может быть сдвинута относительно левой грани нижнего кирпича? Может ли верхний кирпич быть сдвинут относительно нижнего на длину кирпича?

Оказывается (как ни трудно в это поверить), что сдвиг верхнего кирпича относительно нижнего может быть сколь угодно велик! Действительно, верхний кирпич сдвинут относительно предыдущего на $\frac{1}{2}$ своей длины, второй сверху кирпич сдвинут относительно третьего на $\frac{1}{4}$, третий относительно четвертого — на $\frac{1}{6}$ своей длины и т. д. Если бы запас кирпичей был неограниченным, то расстояние между левыми гранями самого верхнего и самого нижнего кирпичей выражалось бы суммой ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

Ряд этот представляет собой не что иное, как обычный гармонический ряд, все члены которого умножены на $\frac{1}{2}$. Поскольку сумма гармонического ряда превосходит любое заранее заданное число, ее половина также неограниченно возрастает. Иными словами, ряд расходится и, следовательно, расстояние между левыми гранями верхнего и нижнего кирпичей может быть сколь угодно большим. Поскольку гармонический ряд расходится медленно, чтобы достичь даже небольшого сдвига, необходимо очень много кирпичей. Возьмите колоду из 52 карт и положите ее на стол так, чтобы более короткая сторона нижней карты совпала с краем стола. Как показывают подсчеты, карты можно сдвинуть так, что обрез верхней карты будет выступать над краем стола немногим более $2\frac{1}{4}$ длины карты (рис. 4).

Гармонический ряд обладает многими любопытными свойствами. Если вычеркнуть все его члены, содержащие цифру 9, то оставшиеся члены образуют схо-

дящийся ряд. Сходящийся ряд получится и в том случае, если мы возведем знаменатель каждого члена гармонического ряда в одну и ту же степень n , где $n > 1$. Изменив знаки (на минус) у членов, стоящих на четных местах, мы также получим сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

сумма которого равна $\ln 2$ — числу, несколько меньшему 0,7.... Принимают ли частичные суммы этого ряда когда-нибудь целые значения (разумеется, отличные от 1)? Ответить на этот вопрос было бы несложно, если бы существовала простая формула, выражающая частичную сумму n первых членов этого ряда как функцию числа n , но такой формулы нет. Однако с помощью довольно тонких рассуждений, использующих соображения четности, можно показать, что частичные суммы рассматриваемого ряда не принимают целочисленных значений, отличных от 1. (Доказательство этого утверждения было известно еще в 1915 г., а может быть и раньше. Подробнее см. в *American Mathematical Monthly* за январь 1934 г., стр. 48.)

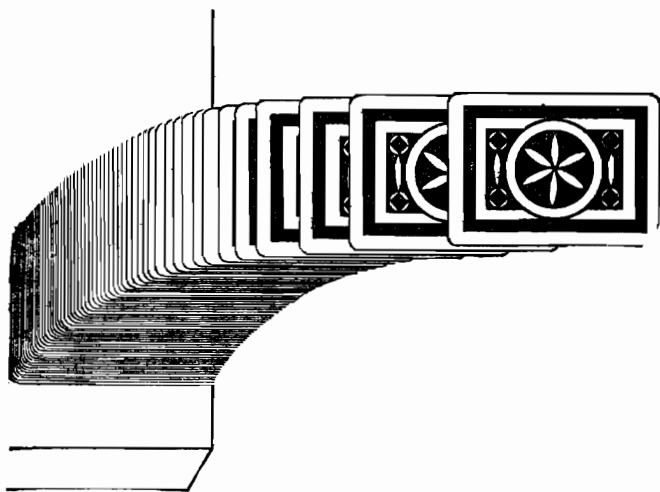


Рис 4. Колода карт с максимальным сдвигом.

Если все члены бесконечного ряда положительны, то их, очевидно, можно как угодно группировать или переставлять: сумма ряда от этого не изменится. Если же среди членов ряда есть не только положительные, но и отрицательные члены, то их перестановка или перегруппировка нередко существенно изменяет сумму ряда. Начиная с XVII в. и вплоть до середины XIX в., когда теория пределов получила, наконец, строгое обоснование, жонглирование знаками плюс и минус в различных бесконечных рядах порождало немало удивительнейших парадоксов. Так, математик из Пизанского университета Гранди рассмотрел простой знакопеременный ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$. Сгруппировав члены ряда попарно, начиная с первого члена, $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, Гранди получил, что сумма ряда равна 0. Расставив скобки в ином порядке (и поменяв надлежащим образом знаки перед членами внутри скобок), $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$, Гранди обнаружил, что сумма того же ряда стала равной 1. Это показывает, заявил Гранди, как всевышний, взяв Вселенную, части которой в сумме давали ничто, и переставив их, сумел создать нечто.

Правильное значение суммы исходного ряда, по мнению Гранди, равно $\frac{1}{2}$. Свое утверждение Гранди подкрепил притчей о драгоценном камне, который отец завещал двум своим сыновьям с неременным условием, чтобы камень ежегодно переходил от одного сына к другому. Если стоимость камня принять за 1, то стоимость доли наследства, доставшейся каждому из сыновей, будет выражаться рядом $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$. Поскольку все наследство поделено между братьями поровну, сумма этого ряда должна быть равна $\frac{1}{2}$. В споре, разгоревшемся вокруг задачи Гранди, приняли участие многие знаменитые математики. Так, Лейбниц и Эйлер согласились с тем, что сумма указанного ряда равна $\frac{1}{2}$, но аргументация, к которой они прибегли, дабы подтвердить свое заключение, была различной. Сейчас ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ считается расходящимся, поэтому спор о том, чему равна его сумма, для современного математика лишен смысла.

Еще «хуже» обстоит дело с рядом $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots$. Если его члены сгруппировать попарно, начиная со второго члена, то есть $1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + \dots$, то получится расходящийся ряд $1 + 2 +$

$+ 8 + 16 + \dots$, сумма которого стремится к $+\infty$. Если же члены того же ряда сгруппировать попарно, начиная с первого члена, то есть $(1 - 2) + (4 - 8) + \dots$, то получится расходящийся ряд $-1 - 4 - 16 - 64 - \dots$, сумма которого стремится к $-\infty$! Удивление, вызванное необычными свойствами бесконечных рядов, достигло наивысшей точки в 1854 г., когда Риман, известный ныне как один из создателей неевклидовой геометрии, доказал поистине замечательную теорему. Суть ее сводится к следующему: если сумма бесконечного ряда изменяется при перестановке или перегруппировке его членов, то ряд называется *условно* (или неабсолютно) *сходящимся* в отличие от *абсолютно* сходящегося ряда, на сумме которого никак не сказываются любая перестановка членов и расстановка скобок. Условно сходящийся ряд всегда содержит отрицательные члены: ведь если бы все его члены были положительными, то такой ряд непременно был бы расходящимся. По доказанной Риманом теореме члены любого условно сходящегося ряда (например, приведенного выше ряда, сумма которого была равна $\ln 2$) можно всегда переставить так, что его сумма совпадет с любым заранее заданным конечным числом, рациональным или иррациональным, или даже будет равна $+\infty$ или $-\infty$.

Расходящиеся ряды с положительными членами также могут вызвать серьезные трудности, если мы вздумаем применять к ним правила, справедливые лишь для конечных или сходящихся рядов. Пусть, например,

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

(заметим, что все члены ряда, стоящего в правой части этого равенства, положительны). Тогда

$$2x = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Нетрудно видеть, что правая часть нового равенства отличается от правой части исходного равенства лишь отсутствием 1. Следовательно, $2x = x - 1$, откуда $x = -1$. Итак, мы «доказали», что $+\infty = -1$. Нельзя не согласиться с Абелем, который писал в 1828 г.: «Расходящиеся ряды — это измышление дьявола. При любом доказательстве опираться на них должно быть стыдно».

ОТВЕТЫ

Если скорость Ахиллеса в 7 раз больше скорости черепахи и черепаха сначала имеет 100 м формы, то полное расстояние, которое успевает пробежать Ахиллес, прежде чем догонит черепаху, равно сумме ряда

$$100 + \frac{100}{7} + \frac{100}{7 \cdot 7} + \frac{100}{7 \cdot 7 \cdot 7} + \dots$$

Каждый член этого ряда в 7 раз меньше предыдущего. Воспользуемся уже известным нам приемом: обозначим сумму ряда через x и умножим правую и левую части равенства

$$x = 100 + \frac{100}{7} + \frac{100}{7 \cdot 7} + \dots$$

на 7. Мы получим новое равенство

$$7x = 700 + 100 + \frac{100}{7} + \dots,$$

в правой части которого после члена 700 стоит исходный ряд. Таким образом, $7x = 100 + x$, откуда $6x = 700$, или $x = 116\frac{2}{3}$ м. Итак, прежде чем догнать черепаху, Ахиллес успевает пробежать $116\frac{2}{3}$ м.

Когда подпрыгивающий мяч остановится, пройденный им путь будет равен 1 м (высота, с которой он был брошен) плюс сумма ряда $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$. С помощью неоднократно применявшегося нами приема (в данном случае нужно обозначить ряд через x и умножить обе части получившегося равенства на 3) нетрудно найти, что сумма этого ряда равна 1. Итак, когда, совершив бесконечное число подскоков, мяч остановится, пройденный им путь будет равен 2 м.

Венгерская задача о вычислении площади заштрихованной части квадрата сводится к вычислению суммы ряда

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \frac{8^3}{9^4} + \dots$$

Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен $\frac{8}{9}$. Для отыскания ее суммы можно воспользоваться нашим искусственным приемом или, что в сущности то же самое, готовой формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{rx}{x - 1},$$

где r — знаменатель прогрессии (равный $\frac{8}{9}$), а x — ее первый член (равный $\frac{1}{9}$). Таким образом, искомая сумма равна 1. Следовательно, если мы условимся называть операцией разбиение квадратов очередного поколения на 9 равных квадратов и штриховку центрального квадрата, то при неограниченном увеличении числа

операций площадь заштрихованной части единичного квадрата будет стремиться к 1. Иначе говоря, в пределе весь единичный квадрат окажется заштрихованным. Разумеется, на практике мы успеем заштриховать весь единичный квадрат лишь в том случае, если отрезки времени, затрачиваемые нами на последовательные операции, будут образовывать сходящийся ряд.

ГЛАВА 2

ПОЛИАМОНДЫ

В 1953 г. С. Голомб, ныне известный математик, а тогда еще аспирант Гарвардского университета, предложил называть фигуры, составленные из одинаковых примыкающих друг к другу квадратов, специально придуманным им термином — «полиомино». По аналогии с классическим «домино» — прямоугольником, составленным из двух одинаковых квадратов, Голомб назвал фигуры из трех квадратов — тримино, из четырех — тетрамино и т. д.

Особую популярность у любителей головоломок завоевали 12 фигур пентамино, соответствующих 12 различным способам составления связных фигур из 5 квадратов. О них мы уже неоднократно говорили*. Комбинаторные задачи, возникающие в связи с этими 12 причудливыми фигурками, настолько интересны, что решение их стало любимым развлечением американцев. На изобретателя пентамино Голомба обрушился нескончаемый поток писем: их авторы предлагали новые задачи, просили уточнить старые, выясняли подробности. На радость энтузиастам новой игры Голомб собрал все, что

* М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, гл. 12 и 46. Здесь и далее, когда в ссылке речь идет о предыдущих сборниках математических головоломок М. Гарднера, имеются в виду книги: М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971; М. Гарднер, Математические досуги, М., изд-во «Мир», 1972.

известно сегодня о пентамино и их «квадратных» родственниках, в одной тщательно иллюстрированной книге *.

Однако здесь мы рассмотрим «треугольных» родственников полимино. В книге Голомба о них упоминается лишь вскользь, правда, кое-какие упоминания можно найти в отдельных журналах, но большая часть того, что известно о составленных из равносторонних треугольников аналогов полимино, открыта лишь в самое последнее время и публикуется впервые. Перед нами обширная и почти совсем неисследованная область, в которой предстоит решить немало важных задач, открыть множество изящных фигур и доказать ряд тонких теорем.

Еще в 1954 г. Голомб обратил внимание на то, что в игру, аналогичную полимино, можно играть, если воспользоваться фигурами, составленными из равносторонних треугольников. Математик из Глазго Т. О'Бейрн предложил называть такие фигуры «полиамондами». В качестве этимологического образца для своей номенклатуры О'Бейрн избрал терминологию, введенную Голомбом в полимино. Если алмазом, или диамондом, называется фигура, составленная из двух равносторонних треугольников, рассуждал О'Бейрн, то фигуру, составленную из трех равносторонних треугольников, естественно назвать триамондом, из четырех треугольников — тетриамондом. Затем идут пентиамонд, гексиамонд, гептиамонд и n -иамонды более высоких порядков (состоящие из $n > 7$ равносторонних треугольников). Очевидно, что существует лишь по одной форме диамонда и триамонда. Нетрудно также убедиться и в том, что имеется лишь 3 различные формы тетриамонда и 4 формы пентиамонда. (Так же как и при подсчете фигур полимино, формы n -иамондов, переходящие друг в друга при зеркальных отражениях, принято считать тождественными.) Различных гексиамондов всего 12 — приятное совпадение с числом различных пентамино. Гептиамонды существуют в 24 вариантах. Число более сложных фигур пока что не установлено.

Всего 12 гексиамондов изображены на рис. 5; названия их, как правило, придуманы О'Бейрном.

* S. W. Golomb, Polyominoes, N. Y., 1965.

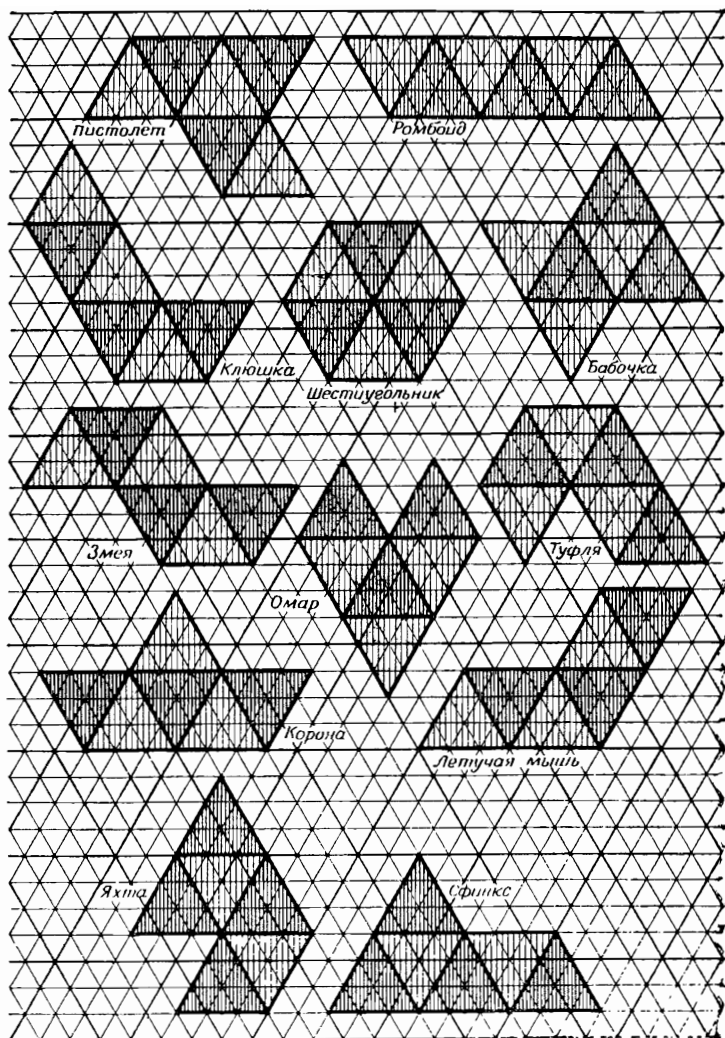
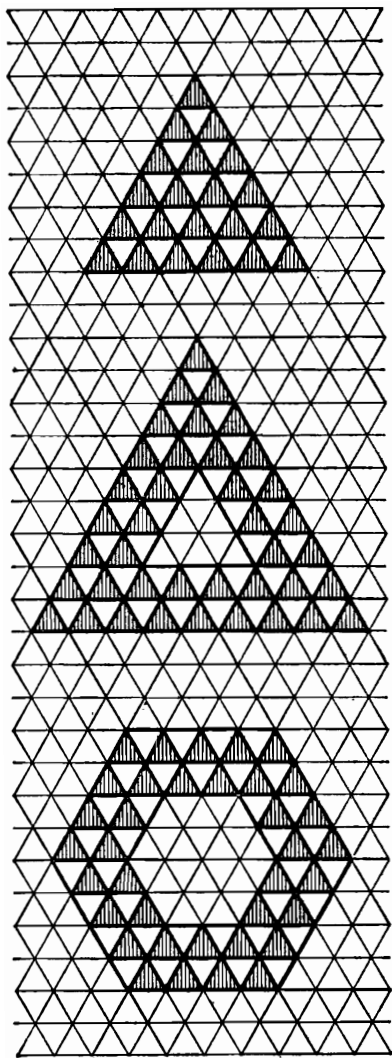


Рис. 5. Двенадцать гексиамондов.

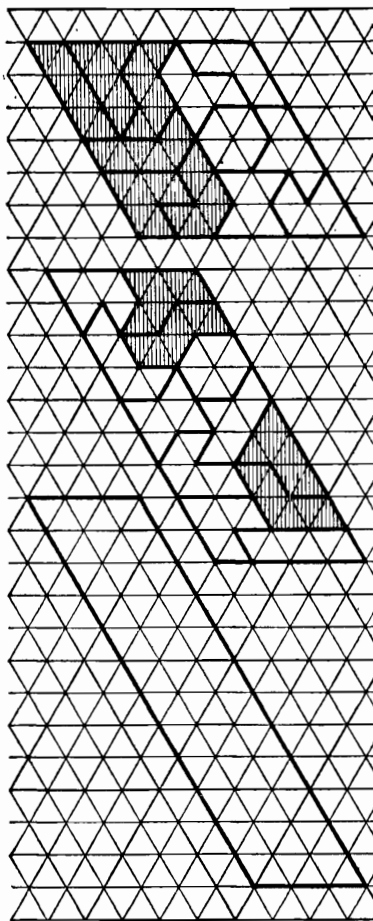
Гексиамонды необходимо перерисовать на лист картона и аккуратно вырезать, не обращая внимания на штриховку. Лучше всего, если лист картона, из которого вырезаются гексиамонды, будет с обеих сторон одного цвета: это позволит как угодно переворачивать асимметричные гексиамонды. Полезно иметь под рукой лист бумаги с треугольной системой координат для «записи» решений — вычерчивания соответствующих фигур.

Ясно, что число единичных треугольников в фигуре, составленной из гексиамондов, делится на 6. Можно пойти дальше. Раскрасим единичные треугольники в два цвета (на рис. 5 этим цветам соответствуют два вида штриховки). Мы видим, что все гексиамонды, кроме двух последних (яхты и сфинкса), «уравновешены»: они содержат по 3 единичных треугольника каждого цвета. Любая фигура, составленная из уравновешенных гексиамондов, также будет уравновешенной. Яхта и сфинкс не уравновешены с одинаковым соотношением треугольников различных цветов — 4:2. Если какая-нибудь фигура содержит лишь один неуравновешенный гексиамонд, то она также будет неуравновешенной, причем треугольников одного цвета у нее должно быть на 2 больше, чем треугольников другого цвета. Если же фигура содержит оба неуравновешенных гексиамонда, то она может быть и уравновешенной (если яхта и сфинкс расположены так, что «компенсируют» друг друга), и неуравновешенной. В последнем случае элементарных треугольников одного цвета в ней должно быть на 4 больше, чем треугольников другого цвета. Эти простые соображения помогают оценить реальность построения различных фигур, позволяя заранее исключать многие конфигурации как невозможные.

Рассмотрим, например, равносторонний треугольник шестого порядка (то есть со стороной, равной 6 единицам), изображенный на рис. 6 вверху. Он содержит 36 единичных треугольников. Это единственный из равносторонних треугольников, лежащих в «пределах досягаемости» 12 гексиамондов (то есть содержащих число элементарных треугольников, не превосходящее 72), число единичных треугольников которого кратно 6. Много часов можно было потратить в безуспешных попытках составить такой треугольник из 6 гексиамондов. Раскрасив же его так, как показано на рис. 6, мы сразу



Р и с. 6. Три фигуры, которые нельзя составить из гексиамондов.



Р и с. 7. Параллелограммы, составленные из 12 гексиамондов.

обнаружим, что в нем число элементарных треугольников одного цвета на 6 больше, чем другого. Поскольку, как мы показали выше, максимальная разность для фигур, составленных из гексиамондов, не может превышать 4, вполне очевидно, что составить равносторонний треугольник 6-го порядка из гексиамондов невозможно.

Вслед за треугольниками идут параллелограммы. «Правильное» (то есть делящееся на 6) число элементарных треугольников содержат лишь ромбы 3×3 и 6×6 (ромбы). Нетрудно сообразить, что составить из гексиамондов ромб меньших размеров невозможно, зато ромб 6×6 можно составить несколькими способами. Одно из решений представлено на рис. 7. Оно интересно в двух отношениях: во-первых, все гексиамонды, кроме шестиугольника, примыкают к одной из границ параллелограмма, во-вторых, параллелограмм делится на две конгруэнтные половины. Разумеется, эти половинки можно располагать и по-иному, получая фигуры, обладающие двусторонней симметрией.

О возможности построения ромбов (параллелограммов, у которых все углы отличны от прямых, а стороны, сходящиеся в любой из вершин, не равны) из гексиамондов известно следующее:

1. Если одна сторона ромбоида равна 2, то длина другой стороны должна быть кратна 3. Сложить параллелограмм 2×3 из гексиамондов, вероятно, нельзя. Ромб 2×6 допускает единственное (с точностью до независимых отражений двух его половинок) разложение из гексиамонда (рис. 8). Нетрудно доказать, что изображенные на рис. 8 четыре гексиамонда (перечисляем их снизу вверх — омар, яхта, летучая мышь и сфинкс) используются в любом ромбоиде со стороной, равной 2. Действительно, если мы воспользуемся гексиамондом в форме ромбоида (гексиамондом-ромбоидом), то рядом с ним в ромбоиде со стороной 2 нельзя будет уложить ни один из остальных гексиамондов. Каждый же из гексиамондов, кроме гексиамонда-ромбоида, делит ромбид со стороной 2 на две части, содержащие по нечетному числу элементарных треугольников. Поскольку нечетное число не делится на 6, никакой другой ромбид со стороной 2, кроме изображенного на рис. 8, составить из гексиамондов невозможно.

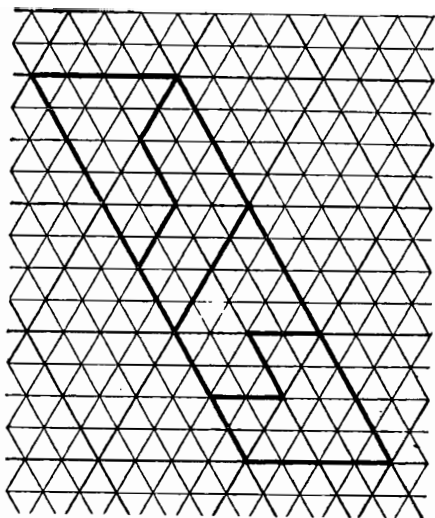


Рис. 8. Единственный ромбоид со стороной 2, который можно составить из гексиамондов.

2. Если одна сторона ромбоида равна 3, то число элементарных треугольников должно быть кратно 6. Ромбоид 3×3 составить из гексиамондов невозможно. Ромбоиды 3×4 , 3×5 , 3×6 , 3×7 , 3×8 , 3×9 и 3×10 допускают построение из гексиамондов, причем многими способами.

Составить из гексиамондов ромбоид 3×11 можно, но это сложная задача, поэтому я предоставляю ее решение читателям в качестве упражнения повышенной трудности. Во всех известных решениях (одно из которых приводится в конце главы) отсутствует гексиамонд «летучая мышь». Я не знаю, существует ли решение, в котором отсутствует какой-нибудь другой гексиамонд.

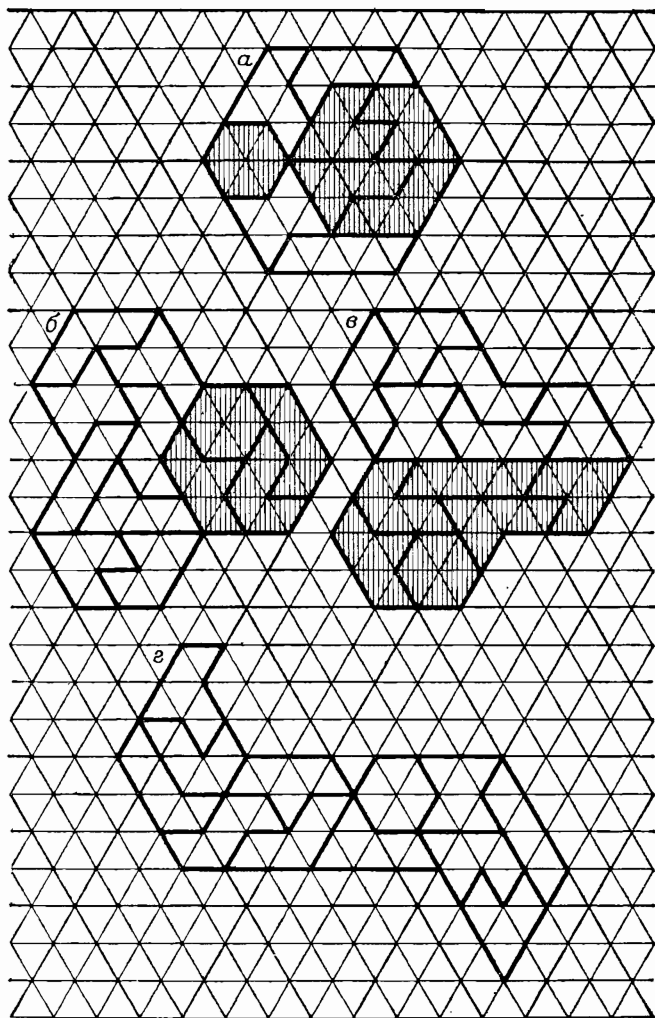
Если бы ромбоид 3×12 можно было сложить из гексиамондов, то понадобились бы все 12 фигур — от пистолета до сфинкса. С помощью специальной программы, составленной для ЭВМ, удалось показать, что задача о составлении ромбоида 3×12 из гексиамондов не имеет решения, а ромбоид 3×11 можно составить 24 способами.

3. Если одна сторона ромбоида равна 4, то длина другой стороны должна быть кратна 3. Ромбоид 4×3 (уже упоминавшийся ранее как ромбоид 3×4), как известно, можно построить из гексиамондов. Допускает построение и ромбоид 4×6 . Ромбоид 4×9 можно составить из гексиамондов многими способами, один из которых изображен на рис. 7 (обращаем внимание на то, что в этот ромбоид входят все 12 гексиамондов). При отражении заштрихованных участков возникают три других решения.

4. Единственным ромбоидом со стороной, равной 5, который можно составить из гексиамондов, является ромбоид 5×6 . Задача допускает много решений.

При решении задач на построение из гексиамондов не обязательно ограничиваться «сплошными» фигурами — с тем же успехом можно рассматривать и кольцеобразные фигуры с «пустотами» (такие, как, например, две нижние фигуры на рис. 6). Нетрудно показать, что составить треугольное кольцо из гексиамондов невозможно: для этого достаточно раскрасить элементарные треугольники в шахматном порядке, чтобы подсчитать, что треугольников одного цвета на 6 больше, чем треугольников другого. Шестиугольное кольцо уравновешено, но, как нетрудно заметить, построить его из гексиамондов также невозможно. Действительно, гексиамонд-шестиугольник может занять в кольце лишь два существенно различных положения — все остальные положения получаются из них с помощью поворотов или отражений. Какое бы из двух положений ни занимал гексиамонд-шестиугольник, добавив к нему гексиамондо-омара, мы разделим остальную часть шестиугольного кольца на две области. Ни в одной из этих областей число элементарных треугольников не кратно 6.

Из гексиамондов были построены фигуры, обладающие осью симметрии третьего порядка (то есть совпадающие сами с собой при повороте вокруг этой оси на 120°). Существуют шестиугольники второго и третьего порядка (рис. 9, а). Трилистник (рис. 9, б) можно сложить из гексиамондов несколькими способами. Если заштрихованный шестиугольник пристроить к остальной части трилистника сверху или снизу, получится цепочка из трех одинаковых шестиугольников, выстроенных вдоль прямой. На рис. 9, в показан трилистник, рассеченный



Р и с. 9. Фигуры, составленные из гексамонов.

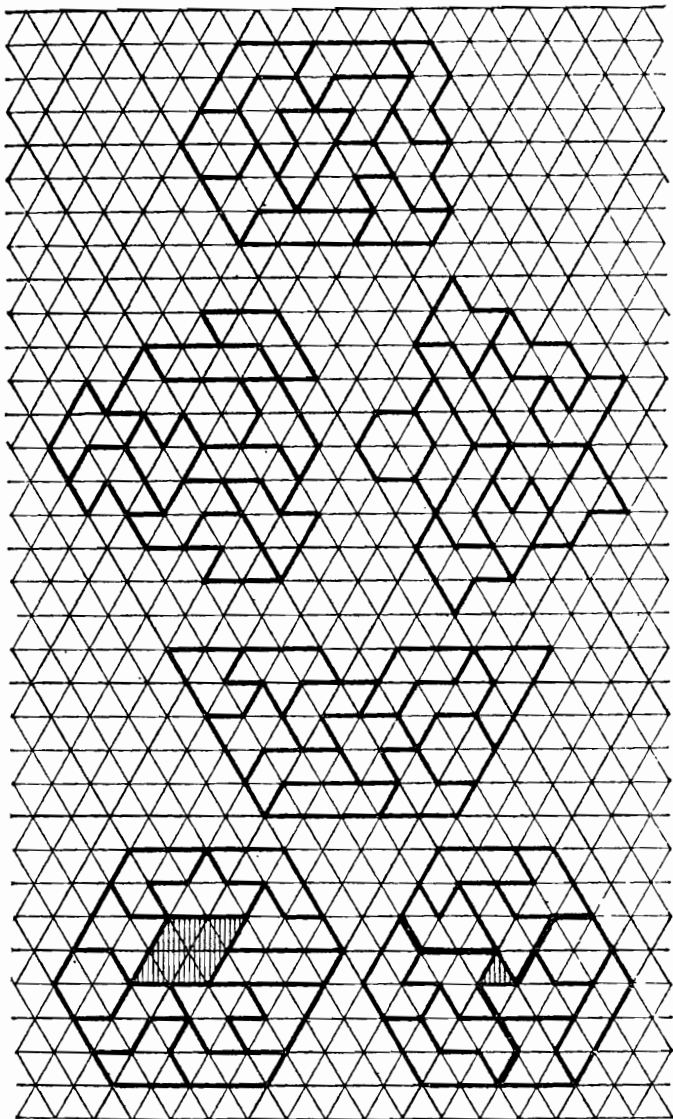


Рис. 10. Симметричные фигуры, составленные из гексиамондов.

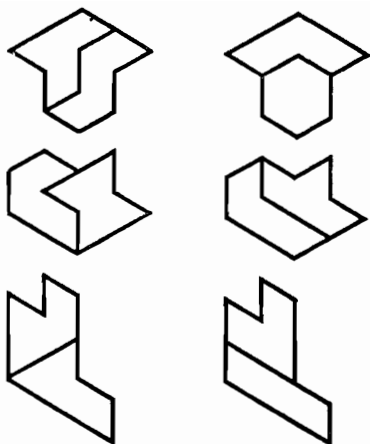


Рис. 11. Решение «задачи о трех близнецах».

на две конгруэнтные половины, а на рис. 9, г — развертка правильного октаэдра, составленная из гексиамондов.

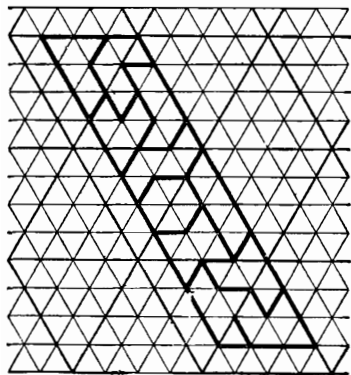
На рис. 10 показаны составленные из гексиамондов фигуры, обладающие двусторонней симметрией или осью симметрии третьего порядка.

Задача об удвоении — построении точных копий каждого из гексиамондов, увеличенного вдвое, с помощью 4 из 12 гексиамондов — легко решается для всех 12 фигур. Все гексиамонды, кроме пистолета, короны и омара, можно получить, составляя различными способами половинки ромбоида 6×2 , изображенного на рис. 8. Задача об утроении — построении увеличенных втрое копий гексиамондов из 9 основных фигур — неразрешима для сфинкса и яхты (копии этих фигур не уравновешены и содержат элементарных треугольников одного цвета на 6 больше, чем другого). Копии всех остальных гексиамондов уравновешены, и способы утроения каж-

дого из них, кроме бабочки, известны. Утроение бабочки, по-видимому, невозможно, но доказать неразрешимость этой задачи пока не удалось.

На рис. 11 показано решение так называемой «задачи о трех близнецах».

Рис. 12. Одно из решений задачи о составлении ромбоида 3×11 из гексиамондов.



Ромбоид 3×11 можно составить из гексиамондов несколькими способами, но ни в одном из известных в настоящее время вариантов не используется «летучая мышь». Одно из таких решений показано на рис. 12.

ГЛАВА 3

ТЕТРАЭДРЫ В ПРИРОДЕ И В АРХИТЕКТУРЕ

Любые четыре точки (A, B, C, D) пространства, не лежащие в одной плоскости, можно рассматривать как вершины четырех треугольников (рис. 13). Эти треугольники образуют грани простейшего из многогранников (тел, ограниченных плоскими многоугольниками)—тетраэдра. Если каждая грань тетраэдра имеет форму равностороннего треугольника, то тетраэдр называется правильным. Правильный тетраэдр представляет собой простейшее из пяти правильных платоновых тел. Оно настолько просто, что было известно еще древним египтянам, а математики приступили к его изучению одновременно с изучением геометрических свойств куба.

Пифагорейцы считали, что огонь состоит из мельчайших, а потому невидимых частиц, имеющих форму тетраэдра. Поскольку среди выпуклых правильных тел тетраэдр обладает наименьшим числом граней и

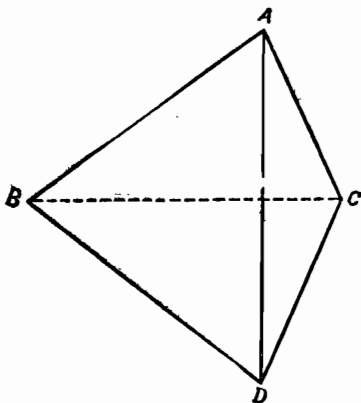


Рис. 13. Правильный тетраэдр.

наиболее «острыми» многогранными углами при вершинах, частицы, имеющие форму тетраэдра, по мнению пифагорейцев, должны образовывать наименее устойчивую из четырех стихий — земли, воздуха, огня и воды, — обладающую к тому же наибольшей проникающей способностью.

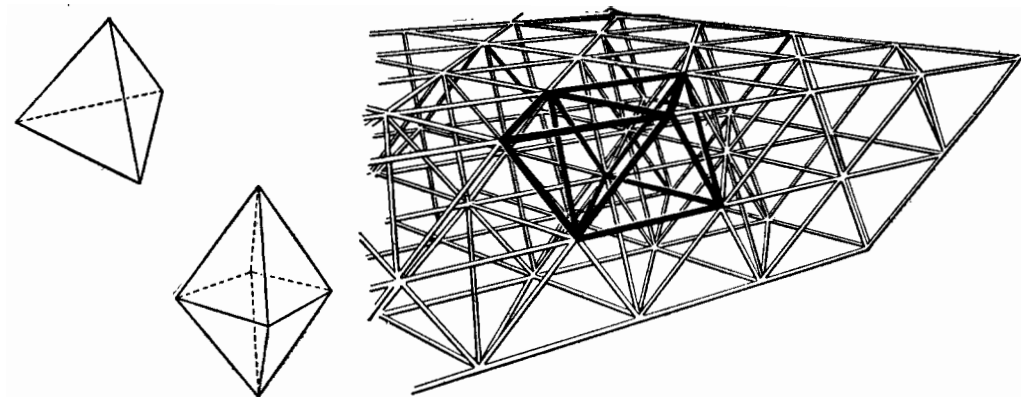
Со времен пифагорейцев наши знания об окружающем мире неизмеримо возросли, и все же их гипотеза о частицах, имеющих форму тетраэдра (так же, как и многие другие догадки), в известном смысле оказалась пророческой: тетраэдрические структуры часто встречаются в микромире. Например, атом углерода, без которого, как известно, невозможны ни органические молекулы, ни сама жизнь, всегда соединен химическими связями с четырьмя другими атомами, колеблющимися вокруг вершин тетраэдра, в центре которого расположен исходный атом углерода. Так, молекула широко известного растворителя — четыреххлористого углерода — представляет собой тетраэдр, в вершинах которого находятся атомы хлора, а в центре — атом углерода. Тетраэдральной структурой обладают и решетки многих кристаллов, в том числе кристаллическая решетка алмаза. При замерзании воды ее молекулы под действием водородных связей располагаются в вершинах и центрах тетраэдров. Тетраэдральной кристаллической решеткой обладает и одна из важных разновидностей медных руд; ее даже называют тетраэдритом, поскольку она часто встречается в природе в виде крупных хорошо развитых кристаллов, имеющих форму тетраэдра.

Одинаковыми квадратами, прилегающими друг к другу, как клетки шахматной доски, можно покрыть плоскость. Точно так же все пространство можно заполнить одинаковыми кубами. Поскольку одинаковые равносторонние треугольники позволяют замостить плоскость ничуть не хуже, чем квадраты, может показаться, что и одинаковыми правильными тетраэдрами можно заполнить сплошь все пространство. Это кажется настолько очевидным, что долгое время «способности» тетраэдра не вызывали никаких сомнений. В своем трактате «О небе» Аристотель утверждал (не приводя при этом никаких доказательств), что правильными тетраэдрами можно заполнить пространство. В действительности же из всех платоновых тел свойством заполнять

пространство обладает лишь куб. Если бы этим свойством обладал тетраэдр, то упаковочные коробки и ящики такой формы уже давно соперничали бы с привычными кубическими емкостями.

Небезынтересно отметить, что правильными тетраэдрами и октаэдрами (октаэдром называется правильное тело, ограниченное восемью треугольными гранями) можно заполнить все пространство, если располагать их так, как показано на рис. 14, справа. Никакими другими правильными телами, кроме тетраэдра и октаэдра, заполнить пространство невозможно. Заметим также, что каждый треугольник в решетке, изображенной на рис. 14, справа, служит одновременно гранью и тетраэдру, и октаэдру, а к каждой вершине решетки примыкают восемь тетраэдров и шесть октаэдров. Эта изящная решетка нашла широкое применение в строительных конструкциях, созданных архитектором Р. Б. Фуллером. Например, ферма системы Фуллера (сам изобретатель предложил называть ее «октетом») состоит из алюминиевых трубок, образующих ребра своеобразных сот, ячейки которых имеют форму правильных тетраэдров и октаэдров. (Увлекательное задание для внеклассных занятий — построить модель таких сот из большого числа одинаковых по длине соломинок или тонких пластмассовых трубочек.) Знаменитые «геодезические» сетчатые перекрытия Фуллера по существу представляют собой тетраэдральные решетчатые конструкции, в которых (так же, как и в «октете») максимальная жесткость достигается при минимальных весе и стоимости.

Фуллер был не единственным (и даже не первым) из известных американских изобретателей, с энтузиазмом относившихся к идее использования рациональной конструкции тетраэдра: его высокой прочности при малом весе. После того как Александр Г. Белл приобрел всеобщую известность как один из изобретателей телефона, его воображение почти целиком поглотили тетраэдры. Дело в том, что в 90-х годах прошлого века все попытки построить самолет, способный оторваться от земли и продержаться некоторое время в воздухе, заканчивались неудачей из-за отсутствия достаточно мощных моторов. Белл полагал, что проблему полетов можно решить, если построить огромный воздушный змей в виде обтянутого шелком тетраэдрального



Р и с. 14. Тетраэдр, октаэдр и заполненное ими пространство.

каркаса, который мог бы поднять человека. Множество таких змеев самой причудливой формы Белл построил в своем поместье в Бэддекке в Новой Шотландии (Канада). Чтобы следить за их полетом, он соорудил двадцатичетырехметровую вышку. Наблюдательная площадка крепилась на трех опорах, образовавших скелет огромного тетраэдра. Каждая из опор представляла собой решетчатую ферму, элементы которой также располагались вдоль ребер тетраэдров. Форму тетраэдра имел и наземный павильон для наблюдений. В 1955 г. в Бэддекке было построено здание музея Белла, в котором основным архитектурным мотивом является тетраэдр.

Беллу, несомненно, было бы очень приятно узнать, что милый его сердцу тетраэдр в последнее время находит все более широкое применение при упаковке жидких и сыпучих продуктов. Возьмем бумажную трубку достаточно большого диаметра и, сведя вместе ее нижние края, склеим их так, чтобы получилось прямое ребро. Повторим ту же операцию с верхней частью трубки, проследив за тем, чтобы верхнее ребро шло в направлении, перпендикулярном направлению нижнего ребра. В результате у нас получится тетраэдр. Если длина окружности поперечного сечения трубки составляет 4 единицы, а ее высота $\sqrt{3}$ единиц, то тетраэдр будет правильным (рис. 15). Описанный нами метод построения тетраэдра лежит в основе промышленного метода изготовления бумажных пакетов для хранения и перевозки жидких продуктов, разработанного в середине 50-х годов в Швеции. Бумажные пакеты для

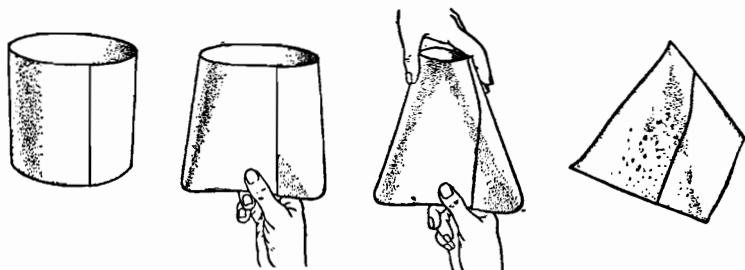


Рис. 15. Как сделать пакет для молока в форме тетраэдра.

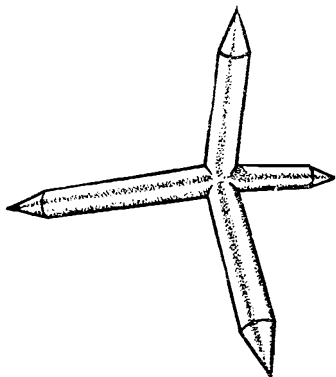


Рис. 16. «Еж» для прокалывания шин.

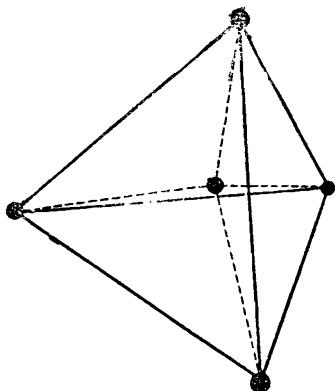


Рис. 17. Проекция пентатоп на трехмерное пространство.

молока, сливок и кефира все больше вытесняют стеклянную тару.

Я полагаю, что не выдам военной тайны, если открою еще одно применение тетраэдра в совершенно иной области. Во время второй мировой войны использовалось устройство для прокалывания автомобильных шин, изображенное на рис. 16 (его можно было бы рассматривать как модель атома углерода!). У такого «ежа» одна колючка обязательно торчит вверх. Ежей разбрасывали по дорогам, и, как показала практика, благодаря форме они прокалывали шины на максимальную глубину.

Четырехмерный аналог тетраэдра называется пентатопом. Если центр равностороннего треугольника соединить отрезками прямых с вершинами, то получится проекция на плоскость каркаса правильного тетраэдра. Точно так же, соединив отрезками прямых центр тетраэдра с четырьмя вершинами, мы получим проекцию на трехмерное пространство каркаса пентатоп (рис. 17). Нетрудно заметить, что у пентатоп имеются 5 вершин, 10 ребер, 10 треугольных граней и 5 «клеток» в форме тетраэдра. На проекции, изображенной на рис. 17, мы видим четыре маленькие клетки и одну большую. В самом пентатопе, если он правильный, все клетки конгруэнтны. Любые пять точек в четырехмерном пространстве, не лежащие в одной и той же трехмерной гиперплоскости, служат вершинами некоторого пентатоп, а

каждое подмножество из четырех вершин служит вершинами одной из его тетраэдральных клеток. Если пять точек расположены в четырехмерном пространстве так, что расстояние между любой парой из них одинаково, то пентатоп, имеющий вершины в этих точках, правильный. Правильный пентатоп — одно из 6 правильных выпуклых тел, существующих в четырехмерном пространстве.

Подобно тому как плоская развертка поверхности тетраэдра состоит из центрального треугольника, к каждой стороне которого примыкает по такому же треугольнику, трехмерная «развертка» гиперповерхности пентатопа имеет вид звездчатого тетраэдра: она состоит из центрального тетраэдра, на каждой из граней которого воздвигнуто еще по такому же тетраэдру (рис. 18). Если бы мы могли складывать фигуры в четырехмерном пространстве, то пакет для гипермолока имел бы форму пентатопа!

Одно странное и мало известное свойство тетраэдра (ни одно из платоновых тел, кроме тетраэдра, этим свойством не обладает) лежит в основе удивительного

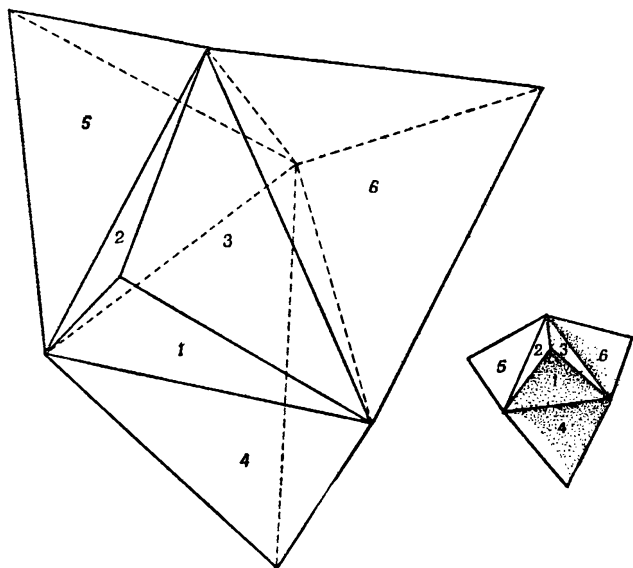


Рис. 18. Трехмерная развертка пентатопа.

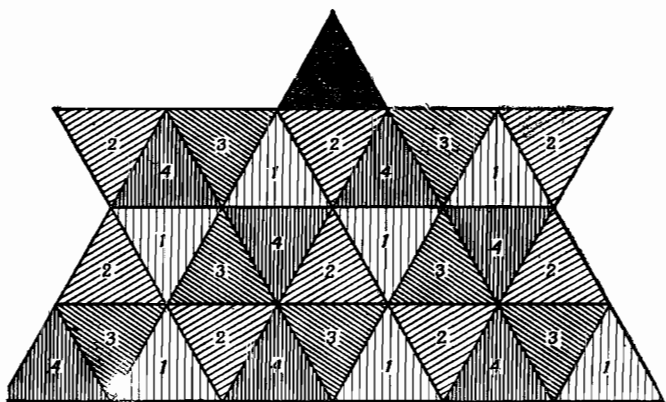


Рис. 19. Доска для фокуса с тетраэдром.

фокуса — распознавания света на ощупь. Прежде всего построим модель правильного тетраэдра (его грани должны быть того же размера, что и равносторонние треугольники на рис. 19). Быстрый и удобный способ построения такой модели предложил математик Чарлз У. Тригг. Вырежьте из плотной бумаги или тонкого картона фигуру, изображенную на рис. 20, перегните ее вдоль всех ребер в одну сторону (например, так, чтобы все внутренние линии превратились только в «хребты» или только в «долины») и из незаштрихованных треугольников сложите тетраэдр. Заштрихованные треугольные клапаны введите в щели, образовавшиеся вдоль некоторых ребер тетраэдра. У вас получится моделька тетраэдра, при изготовлении которой не было использовано ни капли клея. Поставьте модельку на черный треугольник (рис. 19; каждая из цифр на рисунке означает определенный цвет). Повернитесь теперь к доске спиной и попросите кого-нибудь из зрителей перекачать тетраэдр на любое из треугольных полей доски (с одного поля на другое тетраэдр следует перекачивать, переворачивая его через ребро, совпадающее с их общей стороной). Когда зритель сочтет себя достаточно потрудившимся и остановится, он должен запомнить цвет того треугольника, на котором оказался тетраэдр, и, сосчитав медленно до 10, передвинуть тет-

раэдр (не переворачивая его!) в исходное положение — на черный треугольник. После этого вы поворачиваетесь, берете тетраэдр, ощупываете его нижнюю грань и называете цвет последнего треугольника, на котором он стоял перед возвращением.

Секрет фокуса в равной мере основан на использовании как геометрических свойств тетраэдра, так и одного жульнического приема из арсенала карточных шулеров. Если шулеру в разгаре игры необходимо пометить какую-нибудь карту, он как бы невзначай пачкает палец и незаметно в определенном месте на ее полях оставляет отпечаток. На краях карт, неоднократно бывших в употреблении, такой отпечаток едва заметен и неотличим от других грязных пятен. Возьмите карандаш и, сильно надавливая грифелем на бумагу, зачертите сплошь небольшое пятно. Поводите по графиту кончиком пальца и осторожно поставьте отпечаток в угол одной из граней тетраэдра. Отпечаток должен быть очень слабым, чтобы его никто, кроме вас, не заметил.

«Тайно» помеченный тетраэдр поставьте на черный треугольник так, чтобы отпечаток вашего пальца оказался у верхней из вершин грани, обращенной к остальной части доски с треугольниками. Положение отпечатка в конце фокуса можно рассматривать как своего рода кодированное сообщение о цвете последнего треугольника, на котором стоял тетраэдр. Делая вид, будто вы ощупываете нижнюю грань тетраэдра, в действительности вы просто смотрите на модель. Отпечаток вашего пальца может быть в одном из четырех положений, каждое из которых соответствует своему вполне определенному цвету (рис. 21). Выяснение причин, по которым этот фокус можно показывать, не боясь «осечек», предоставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения.

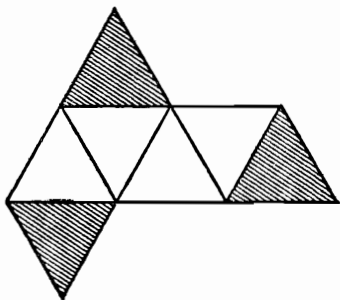


Рис. 20. Развертка для быстрого изготовления тетраэдра.

Положение отпечатка	Цвет
 <i>Вверху</i>	
 <i>На нижней грани</i>	
 <i>У основания тетраэдра слева</i>	
 <i>У основания тетраэдра справа</i>	

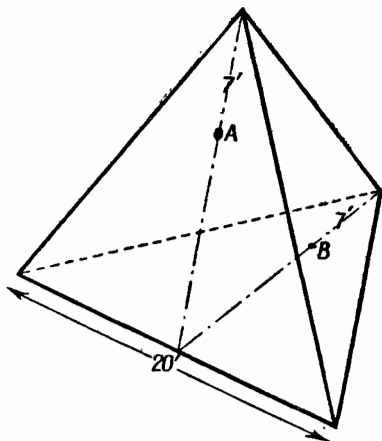
Р и с. 21. Ключевая таблица к фокусу с тетраэдром.

В заключение приведем несколько задач о тетраэдрах. Решить все эти задачи нетрудно, но некоторые из решений будут довольно неожиданными.

1. Правильный тетраэдр рассечен шестью различными плоскостями. Каждая плоскость проходит через одно из ребер тетраэдра и середину противоположного ребра и делит тетраэдр на две равные части. На сколько частей делят тетраэдр все шесть плоскостей?

2. Всякий ли треугольник, вырезанный из бумаги, можно перегнуть вдоль трех прямых так, чтобы получился (не обязательно правильный) тетраэдр? Если нет, то сформулируйте условия, при которых из треугольника можно сложить тетраэдр.

3. По стене комнаты, имеющей форму правильного тетраэдра, из точки A в точку B ползет жук (рис. 22). Ребро тетраэдра имеет в длину 20 футов. Каждая из точек A и B лежит на высоте, опущенной из вершин треугольников, служащих соответственно боковой гранью и основанием тетраэдра, на противоположную сторону на расстоянии 7 футов от вершины. Какова длина кратчай-



шего маршрута между точками A и B , которым может следовать жук?

4. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере так, чтобы расстояния между любыми двумя точками были равны?

5. От каждой вершины правильного тетраэдра с длиной ребра 2 см отсекается по правильному тетраэдру с длиной ребра 1 см. Форму какого геометрического тела будет иметь остаток от большего из тетраэдров?

6. Существуют ли 4 различных числа такого рода, что если их сопоставить граням тетраэдра, то сумма чисел, соответствующих любым трем граням, сходящимся в одной вершине, будет одинакова? Существуют ли 6 различных чисел, которые можно было бы сопоставить ребрам тетраэдра так, что сумма чисел, соответствующих любым трем ребрам, сходящимся в одной вершине, была бы одинакова? В обоих случаях числа могут быть как рациональными, так и иррациональными.

7. Чему равна длина ребра наибольшего правильного тетраэдра, который можно поместить в коробку, имеющую форму куба с ребром длиной 1 дм?

8. Сколько различных тетраэдров можно построить из четырех правильных треугольников, каждый из которых окрашен в свой цвет? Два тетраэдра считаются одинаковыми, если, поворачивая один из них, можно добиться такого положения, при котором аналогичные грани тетраэдров будут окрашены в одинаковые цвета. Тетраэдры, получающиеся один из другого путем зеркального отражения, считаются различными.

9. Если каждая из граней правильного тетраэдра окрашена либо в красный, либо в синий цвет, то, очевидно, существует лишь 5 различных вариантов раскраски:

тетраэдр с красными гранями, тетраэдр с синими гранями, тетраэдр с одной красной гранью, тетраэдр с одной синей гранью и тетраэдр с двумя красными гранями. Сколько различных вариантов тетраэдров можно построить, если каждая из граней покрашена в красный, белый или синий цвет? Как и в предыдущей задаче, тетраэдры, отличающиеся лишь положением в пространстве, считаются одинаковыми. Те из читателей, кто более основательно изучал математику, могут попробовать свои силы и попытаться вывести формулу для числа различных тетраэдров в том случае, когда каждая грань окрашена в один из n цветов.

ОТВЕТЫ

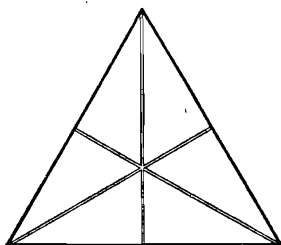
1. Шесть плоскостей, каждая из которых проходит через одно из ребер и середину противоположного ребра тетраэдра, делят тетраэдр на 24 части. Эту задачу нетрудно решить, если заметить, что секущие плоскости разбивают каждую грань тетраэдра на 6 треугольников (рис. 23), каждый из которых служит основанием тетраэдра с вершиной в центре большого тетраэдра.

2. Из любого бумажного треугольника, все углы которого острые, можно сложить тетраэдр.

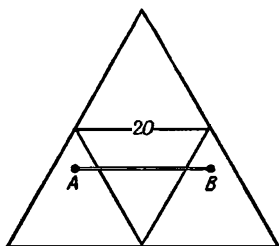
3. Кратчайший маршрут жука из A и B показан на развертке тетраэдра, изображенной на рис. 24. Он на 0,64... фута короче кратчайшего пути, проходящего лишь по двум граням тетраэдра и не имеющего общих точек с третьей гранью.

4. Наибольшее число точек, которые можно расставить на сфере так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было одинаковым, равно четырем. Эти точки служат вершинами правильного тетраэдра, вписанного в данную сферу.

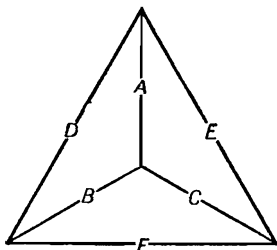
5. Если от вершин правильного тетраэдра с ребрами длиной 2 см отсечь правильные тетраэдры с ребрами длиной 1 см, то оставшаяся часть большого тетраэдра будет иметь форму правильного октаэдра.



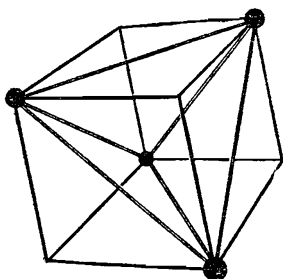
Р и с. 23. К решению задачи 1.



Р и с. 24. Кратчайший путь из A в B .



Р и с. 25. К решению задачи 6.



Р и с. 26. Решение задачи о наибольшем тетраэдре, уместяющемся в кубической коробке.

6. Не существует четырех различных чисел, которые можно было бы сопоставить граням тетраэдра так, чтобы сумма любых трех чисел соответствующих граням, сходящимся в одной вершине, была одинакова. Действительно, рассмотрим любые две грани A и B тетраэдра. Они пересекаются с гранью C в одной вершине и с гранью D — в другой. Чтобы суммы чисел, соответствующих граням A, B, C и A, B, D были одинаковыми, числа, соответствующие граням C и D , должны совпадать, в то время как по условию задачи все четыре числа различны.

Вторая задача несколько сложнее. Приводимое нами решение принадлежит Лео Мозеру. Обозначим ребра тетраэдра так, как показано на рис. 25, а соответствующие им числа — малыми латинскими буквами. Предположим, что задача разрешима. Тогда $a + b + c = a + e + d$, откуда $b + c = e + d$. Аналогичным образом из равенства $f + b + d = f + e + c$ получаем $b + d = e + c$. Складывая два новых равенства, находим

$$\begin{array}{r} b + c = e + d \\ b + d = e + c \\ \hline 2b + c + d = 2e + c + d. \end{array}$$

Последнее равенство сводится к более простому равенству $b + e$, которое, очевидно, противоречит условию задачи (все 6 чисел должны быть различными).

7. Если длину ребра кубической коробки принять за 1, то длина ребра наибольшего по своим размерам тетраэдра, который можно уложить в нее, равна $\sqrt{2}$ (рис. 26).

8. Из четырех равносторонних треугольников, окрашенных в четыре различных цвета, можно составить лишь два различных тетраэдра, переходящих друг в друга при зеркальном отражении.

9. Если каждая грань тетраэдра окрашена в красный, белый или синий цвет, то существует 15 различных вариантов раскраски: три одноцветных тетраэдра, три тетраэдра с красно-синими гранями, три тетраэдра с красно-белыми, три тетраэдра с сине-белыми

гранями и три тетраэдра с красно-бело-синими гранями, у которых имеются по две грани одного и того же цвета. Формула для подсчета числа различных тетраэдров (напоминаем еще раз, что два тетраэдра, переходящие друг в друга при поворотах, считаются тождественными, а два тетраэдра, переходящие друг в друга при зеркальных отражениях, — различными) при условии, что каждая грань может быть окрашена в n различных цветов, имеет вид

$$\frac{n^4 + 11n^2}{12}.$$

ГЛАВА 4

СЕМЬ КОРОТКИХ ЗАДАЧ

Задачи этой главы в целом несколько проще, чем аналогичные подборки задач, опубликованные в двух предыдущих сборниках.

1. Задача Кольриджа. Кто бы мог подумать, что поэт Сэмюэль Кольридж интересовался занимательной математикой? Тем не менее в его записных книжках, опубликованных в 1957 г., имеется следующая запись: «Задумайте любое число, удвойте его, прибавьте 12, то, что получится, разделите на 2 и вычтите задуманное число. У вас получится 6». Через несколько лет после того, как была сделана эта запись, Кольридж привел свой простой фокус в газетной статье, посвященной проблемам обучения малышей началам арифметики.

Встречается в записных книжках поэта и еще одна запись, относящаяся к занимательной математике. Вот она: «Предположим, что некто забрел в сад, в котором имелось три калитки, и решил пройти через них, не пропустив ни одной. Набрав некоторое количество яблок, он отдал половину всех яблок и еще пол-яблока человеку, стоявшему у первой калитки (у каждой калитки стоит человек), половину того, что осталось, и еще пол-яблока — человеку, стоявшему у второй калитки, и половину всех оставшихся яблок и еще пол-яб-

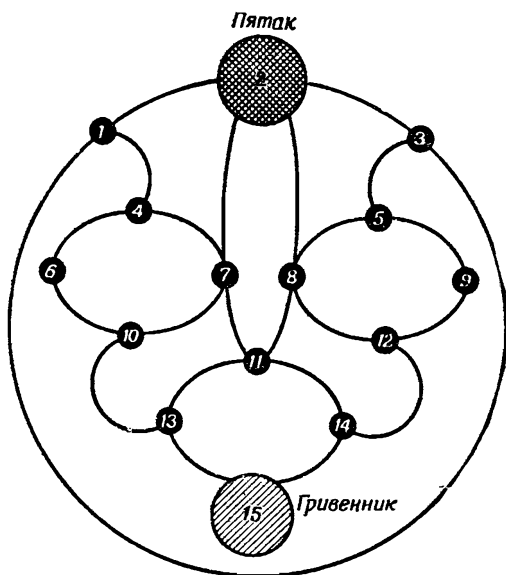


Рис. 27. Всегда ли пятак может загнать гривенник в ловушку?

лока — человеку, стоявшему у третьей калитки, и при этом не разрезал ни одного яблока».

Интересно, сколько времени потребуется читателю, чтобы найти наименьшее число яблок, удовлетворяющее условиям задачи Кольриджа?

2. Детям до 16 лет... Представьте себе, что перед вами человек, к лодыжкам которого крепко-накрепко привязаны концы трехметровой веревки. Можно ли, не разрезая и не развязывая веревки, снять с этого человека брюки, вывернуть их наизнанку (не снимая с веревки) и снова надеть их на него «по всем правилам» (то есть не меняя положения верха и низа брюк)? Рекомендуем ответить на этот «неприличный» топологический вопрос теоретически, не прибегая к экспериментальной проверке.

3. Оптимальная стратегия. Игра с двумя участниками, изображенная на рис. 27, служит особенно наглядной иллюстрацией одного принципа, часто имеющего решающее значение в эндшпиле таких игр, как шашки, шахматы, и других математических игр на

специальных досках. В начале игры пятак лежит на кружке 2, а гривенник — на кружке 15. Играющие делают ходы по очереди, один из них передвигает пятак, другой — гривенник. Ход состоит в том, что монету перемещают вдоль черной линии на соседний кружок. Тот, кто передвигает пятак, ходит первым. Он стремится захватить монету своего противника, поставив в результате очередного хода пятак на кружок, занятый гривенником. Чтобы победить, он должен достичь своей цели прежде, чем успеет сделать седьмой ход. Если после шести ходов он не сумеет захватить гривенник, ему засчитывается поражение.

Существует простая стратегия, придерживаясь которой один из противников всегда может выиграть. Удастся ли вам найти ее?

4. Новая логическая задача. Логическим задачам о лжецах и людях, говорящих одну лишь правду, «несть числа», однако следующий необычный вариант их, насколько известно, ранее не публиковался.

Представьте себе, что перед вами стоят трое людей. Один из них всегда отвечает на вопрос правдиво, другой изрекает только ложь, а ответы третьего постоянно носят случайный характер: иногда он отвечает правдиво, иногда — лжет. Кто из стоящих перед вами людей лжет, кто говорит правду и кто придерживается «смешанной» стратегии, вам заранее неизвестно, хотя стоящие перед вами люди это отлично знают. Каким образом вы с помощью трех вопросов можете установить, «кто есть кто»? Каждый вопрос можно обращать к любому из трех людей. Формулировать его следует так, чтобы ответить на него можно было коротко: «да» или «нет».

5. Зубчатая передача. Механическое устройство, изображенное на рис. 28, придумал Джеймс Фергюсон, шотландский астроном XVIII в., пользовавшийся в свое время широкой известностью как лектор, писатель и изобретатель. Самое удивительное в биографии Фергюсона — это то, что, хотя он и удостоился избрания в члены Королевского общества, его официальное образование ограничивалось... тремя месяцами грамматической школы. (Один из биографов Фергюсона весьма красноречиво назвал свою книгу «История крестьянского мальчика, ставшего философом»). Сконструированное Фергюсоном механическое устройство мы приводим здесь

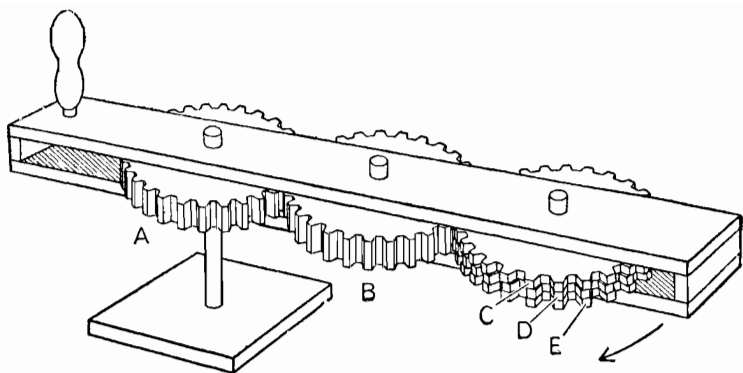


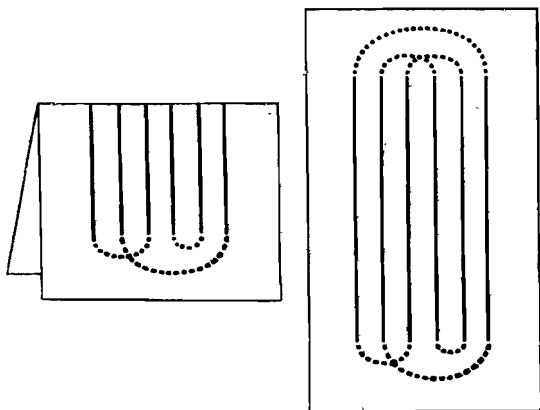
Рис. 28. Парадокс Джеймса Фергюсона с зубчатой передачей.

как головоломку, которая после своего решения превращается в еще более удивительный парадокс.

Шестерня *A* жестко закреплена на оси и не может вращаться. Если всю систему повернуть за ручку вокруг нее по часовой стрелке, то шестерня *B* будет вращаться также по часовой стрелке. Зубцы шестерни *B* входят в зацепление с зубцами трех более тонких шестерен *C*, *D* и *E*, каждая из которых насажена на ось независимо от двух остальных. Шестерни *A*, *B* и *E* имеют по 30 зубцов, шестерня *C* — 29 и шестерня *D* — 31 зубец. Диаметры всех шестерен одинаковы.

При повороте всей системы вокруг шестерни *A* каждая из более тонких шестерен *C*, *D* и *E* может поворачиваться вокруг своей оси либо по часовой стрелке, либо против нее (относительно наблюдателя, смотрящего на систему сверху), либо вообще не двигаться. Опишите движение всех шестерен, пользуясь наглядным пособием в виде модели передачи Фергюсона. Если читателю все же захочется построить модель, то следует иметь в виду, что число зубцов у шестерен не обязательно должно совпадать с приведенным выше. Необходимо лишь, чтобы число зубцов у шестерен *A* и *E* было одинаковым, шестерня *C* имела на один зубец меньше, а шестерня *D* — на один зубец больше.

6. Гадание. В старину в некоторых русских деревнях было распространено одно любопытное гадание. Девушка зажимала в руке шесть длинных травинок,



Р и с. 29. Современный вариант старинного гадания на шести травинках.

концы которых сверху и снизу выступали наружу, а ее подружка наугад попарно связывала сначала верхние, а потом нижние концы. Считалось, что если все шесть травинок окажутся связанными в кольцо, то девушка, связавшая их, в этом году непременно выйдет замуж.

На том же принципе основана следующая игра (только вместо травинок нам потребуется карандаш и листок бумаги). На листке бумаги проведите шесть вертикальных линий. Первый участник в любом порядке попарно соединяет верхние концы линий, затем перегибает листок пополам, чтобы верхние концы не были видны, и передает его второму игроку. Второй игрок соединяет попарно нижние концы линий так, как показано на рис. 29, после чего листок разворачивают. Если в результате всех манипуляций линии оказались соединенными в кольцо, то второй игрок считается выигравшим (такой случай изображен на рис. 29, справа). Кто имеет больше шансов на выигрыш: первый или второй игрок? Какова вероятность выигрыша второго игрока?

7. Игра в 8. Мы уже неоднократно рассказывали о знаменитой головоломке Сэма Лойда — игре в 15*. Существует множество аналогичных головоломок. Как

* См. М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, гл. 9; Математические досуги, гл. 33.

правило, они выглядят так. В прямоугольной (в частном случае — в квадратной) коробочке, заполненной квадратными шашками, имеется «пустота», позволяющая перемещать шашки, не вынимая их из коробки. Задача состоит в том, чтобы расположить шашки в определенном порядке.

Во всех головоломках этого типа существует проверка на четность, позволяющая быстро распознавать, разрешима ли данная задача: можно ли от начального расположения шашек перейти к конечному или нет. Рассмотрим, например, простейшее нейтральное игровое поле в форме квадрата (рис. 30). Слева числа на шашках идут в порядке убывания, справа — в порядке возрастания. Можно ли перевести левую позицию в правую?

Чтобы ответить на этот вопрос, будем попарно переставлять шашки до тех пор, пока они не расположатся так, как изображено на рис. 30, справа. При этом следует подсчитывать число сделанных транспозиций. Производить транспозиции можно в любом порядке, при этом совершенно необязательно стремиться минимизировать их число. Если число транспозиций четно (как, например, в рассматриваемом случае), то задача разрешима. При нечетном числе транспозиций решения не существует (то есть одно расположение квадратных шашек нельзя перевести в другое, не вынимая шашки из коробки, а лишь передвигая их).

Займемся теперь поиском оптимального решения. Чему равно наименьшее число ходов, позволяющее решить задачу, изображенную на рис. 30?

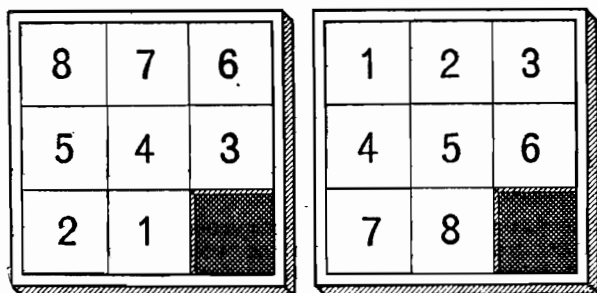


Рис. 30. Игра в 8.

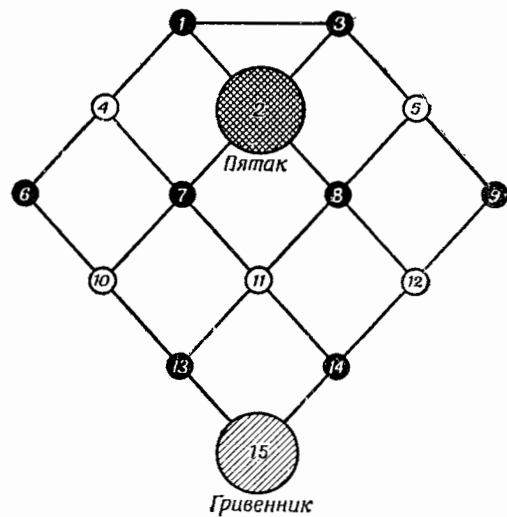
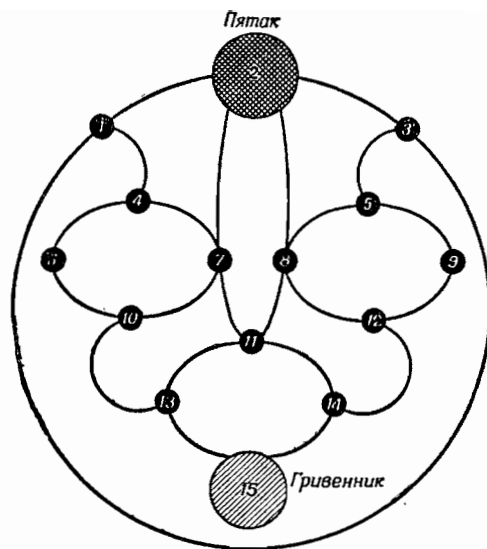
Как ни удивительно, но методы минимизации решений таких задач почти не разработаны. Можно показать, что интересующую нас задачу — обращение порядка следования чисел — можно решить не менее чем за 26 ходов. Действительно, если каждый квадрат будет следовать к «месту назначения» — своей финальной позиции — кратчайшим маршрутом, то нам потребуется всего 16 ходов. Но числа 4 и 5 в начальной позиции расположены рядом, поэтому переставить их можно лишь за 4 хода. Те же 4 хода (и по той же причине) понадобятся, чтобы поменять местами числа 3 и 6. Таким образом, минимальное число ходов уже не может быть меньше 20. Два хода теряется на «дебют» — перемещение квадратов с числами 1 или 3, — а еще два — на заключительные перемещения чисел 8 или 6, поскольку и в том, и в другом случае квадрат должен встать на клетку, лежащую в стороне от кратчайшего маршрута, связывающего положение в начале и в конце решения. Таким образом, если построить дерево (граф) для начальных ходов, то выяснится необходимость потери еще двух ходов (это произойдет на девятом ходу). Следовательно, решить задачу менее чем за 26 ходов невозможно. Поскольку «пустое место» возвращается в исходное положение, любое решение должно иметь четное число ходов.

Лучшее из известных решений принадлежит знаменитому английскому составителю головоломок Генри Э. Дьюдени и требует 36 ходов. Пусть цифра означает номер квадратика, который передвигается при очередном ходе. Тогда последовательность ходов в решении Дьюдени выглядит так: 12543 12376 12376 12375 48123 65765 84785 6. Имеются веские основания полагать, что решение Дьюдени можно улучшить.

ОТВЕТЫ

1. Наименьшее число яблок, удовлетворяющее условиям задачи Кольриджа, равно 7.

2. Еще раз напомним, что все операции мы проделываем мысленно. Для решения задачи прежде всего необходимо стянуть брюки, не выворачивая их, и затем, уже на веревке, проташить одну штанину сквозь другую. Наружная штанина оказывается вывернутой дважды, зато брюки на веревке обращены лицевой стороной наружу и обращены к ногам хозяина не поясом, а штанинами.



Р и с. 31. Поиск оптимальной стратегии.

Встав лицом к хозяину брюк, вы продаете в них руки и, ухватившись изнутри за штанины, выворачиваете брюки наизнанку. Теперь брюки обращены к ногам поясом и их можно снова натянуть на хозяина (правда, при выворачивании наизнанку правая и левая штанины поменялись местами, но условие задачи соблюдено: брюки вывернуты наизнанку, а верх и низ остались на месте).

3. При анализе сложных сетей иногда бывает полезно преобразовать одну сеть в другую, топологически эквивалентную, но обладающую более четко выраженными свойствами. Сеть линий, изображенная на рис. 31 слева, очевидным образом эквивалентна сети, изображенной на том же рисунке справа. Если пятак движется прямо к тому кружку, который занят гривенником, то гривенник находится в полной безопасности. Действительно, предположим, что кружки раскрашены в шахматном порядке (через одного) в два цвета. Покуда монеты расположены вне верхнего треугольника, любой ход гривенника переводит его на кружок того же цвета, что и кружок, занятый пятаком. Поэтому пятак своим следующим ходом никак не может занять кружок, на котором располагается гривенник. Чтобы выиграть, играющий пятаком должен сделать ход вдоль линии, соединяющей кружки 1 и 3. При этом относительная четность кружков, занимаемых пятаком и гривенником, изменится и пятак сможет захватить гривенник.

Возвращаясь к первоначальной сети, мы видим, что для играющего пятаком оптимальная стратегия состоит в том, чтобы либо занять первым ходом кружок 1, а вторым перевести пятак по дуге большого круга на кружок 3, либо, наоборот, сделать первый ход на кружок 3, а вторым перевести пятак на кружок 1. И в том, и в другом случае тот, кто передвигает пятак, сможет «поймать» гривенник до седьмого хода на одном из кружков 6, 9 или 15.

4. Обозначим людей буквами *A*, *B* и *C*. Пусть *P* означает того, кто всегда говорит правду, *L* — лжеца и *M* того, кто говорит и то, и другое. Существует всего 6 перестановок из трех букв *P*, *L* и *M*:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
(1)	<i>P</i>	<i>L</i>	<i>M</i>
(2)	<i>P</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
(3)	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>P</i>
(4)	<i>L</i>	<i>P</i>	<i>M</i>
(5)	<i>M</i>	<i>P</i>	<i>L</i>
(6)	<i>M</i>	<i>L</i>	<i>P</i>

Вы задаете *A* вопрос: «Верно ли, что вероятность услышать правдивый ответ от *B* выше, чем от *C*?» Если *A* ответит «да», то перестановки (1) и (4) исключаются, и вы заключаете, что *B* либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Повернувшись затем в первом случае к *C*, во втором — к *B*, вы задаете какой-нибудь вопрос, ответ на который вам известен. Например, можно спросить: «Не вы ли тот человек, который то лжет, то говорит правду?» По ответу вы сразу отличите лжеца от того, кто всегда говорит только правду. Затем вы задаете ему тот же вопрос, указывая при

этом на одного из его товарищей («Не тот ли это человек, который то лжет, то говорит правду?»), и таким образом устанавливаете, кто из стоящих перед вами П, кто Л и кто М.

Приведенная задача имеет и иные решения, но все они получаются аналогичным способом.

5. Когда зубчатая передача Фергюсона поворачивается по часовой стрелке, шестерня *C* вращается также по часовой стрелке, шестерня *D* — против часовой стрелки, а шестерня *E* остается неподвижной!

6. Независимо от того, как соединены верхние концы, травинки всегда можно расположить так, как показано на рис. 32. Остается вычислить вероятность того, что, соединив наугад попарно нижние концы травинки, мы получим кольцо.

Если соединить концы *A* и *B*, то кольцо заведомо не получится. Если же конец *A* соединен с *C*, *D*, *E* или *F*, то благоприятный исход не исключен. Таким образом, вероятность благоприятного исхода после соединения концов первой пары травинки равна $\frac{4}{5}$.

Предположим, что мы соединили концы *A* и *C*. Тогда *B* можно соединить с *D*, *E* или *F*. Кольцо заведомо не получится, если конец *B* соединен с *D*. Вероятность соединения *B* с *E* или *F* равна $\frac{2}{3}$. И в том, и в другом случае, соединив свободные концы, мы получим кольцо. Аналогичная ситуация возникла бы и в том случае, если бы мы соединили *A* не с *C*, а с *D*, *E* или *F*. Таким образом, вероятность образования кольца равна $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3} = 0,53 \dots$. Несколько неожиданно, что эта вероятность оказывается больше $\frac{1}{2}$. Это означает, что второй игрок обладает более высокими шансами на выигрыш. Большинство людей склонно считать, что некоторым преимуществом обладает первый игрок, поэтому если вы вступаете в игру с неподготовленным человеком, то всегда можете обеспечить себе небольшое преимущество, галантно уступив ему право начать игру.

Задача легко допускает обобщение. Для двух травинки вероятность появления кольца равна 1 (событие достоверно), для четырех — $\frac{2}{3}$, для шести, как мы только что подсчитали, составляет $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ и, наконец, для восьми травинки равна $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$. Нетрудно подметить общую закономерность: с появлением очередной пары травинки в выражении для вероятности образования кольца

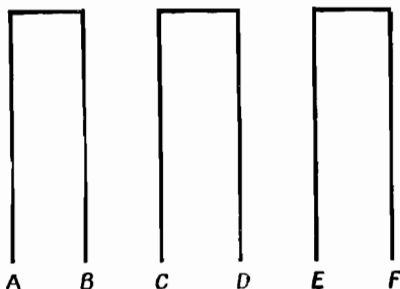


Рис. 32. Гадание на шести травинках.

возникает еще один множитель. Найти его совсем нетрудно, поскольку в числителе дробей, входящих в искомую вероятность, стоят последовательные нечетные числа. Вывод формулы можно найти в книге А. М. и И. М. Ягломов*. Там же объясняется, как можно воспользоваться формулой Стирлинга для приближенного вычисления вероятности образования кольца при очень большом числе пар травинки (и, следовательно, большом числе сомножителей в выражении для вероятности).

7. Решить задачу, возникающую при игре в 8 (мини-15), можно в 30 ходов. Всего удалось найти 10 таких решений. Они представлены в следующей таблице:

1 а.	34785	21743	74863	86521	47865	21478
1 б.	12587	43125	87431	63152	65287	41256
2 а.	34785	21785	21785	64385	64364	21458
2 б.	14587	53653	41653	41287	41287	41256
3 а.	34521	54354	78214	78638	62147	58658
3 б.	14314	25873	16312	58712	54654	87456
4 а.	34521	57643	57682	17684	35684	21456
4 б.	34587	51346	51328	71324	65324	87456
5 а.	12587	48528	31825	74316	31257	41258
5 б.	14785	24786	38652	47186	17415	21478

Решения разбиты на пары, поскольку каждому решению соответствует «сопряженное», получающееся из исходного, если вместо каждой цифры взять ее дополнение до 9, а получившуюся последовательность цифр взять в обратном порядке. Заметим, что из всех возможных начал-двухходовок к минимальному решению не ведет лишь вариант (3, 6). Как видно из присланных мне решений, труднее всего оказалось найти решение 5а. Большинство читателей сумели найти решения 2а и 3б.

Ни одному читателю не удалось найти все 10 решений без помощи ЭВМ. Шофилд составил программу для отыскания решений с минимальным числом ходов для задач, в которых пустая клетка в начальной и конечной позиции находится в центре. С помощью своей программы Шофилд сумел найти все 10 решений в 30 ходов, однако его результат не исключал возможности существования других, более коротких решений. Окончательную ясность в этот вопрос внес другой программист Уильям Ф. Демпстер. Поиск оптимальных решений в игре в 8 он разбил на два этапа. В результате первого этапа были найдены все решения, состоящие из 30 или меньшего числа ходов. Таких решений оказалось 10, и выдача их на печать продолжалась 2½ мин (машина ИБМ 7094). На втором этапе отыскивались решения, состоящие из 34 и меньшего

* А. М. Яглом, И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954 (Библиотека математического кружка, вып. 5), задача № 76.

числа ходов. За 10 мин работы ЭВМ нашла 112 решений в 32 хода и 512 решений в 34 хода. Таким образом, имеется 634 решения, каждое из которых короче решения (в 36 ходов), предложенного автором задачи Генри Э. Дьюдени.

Составленная Шофилдом программа доказала, что задачи, у которых пустая клетка в начальной и конечной позиции находится в центре, требуют более 26 ходов. Поскольку перевести пустую клетку из угла в центр можно за 2 хода, отсюда следует, что 30 ходов достаточно для решения любой задачи, у которой пустая клетка в начальной и конечной позиции занимает одинаковое положение. Таким образом, предложенная Дьюдени задача принадлежит к числу «наихудших» задач, возникающих при игре в 8, то есть задач, самые короткие решения которых требуют максимального числа ходов.

ГЛАВА 5

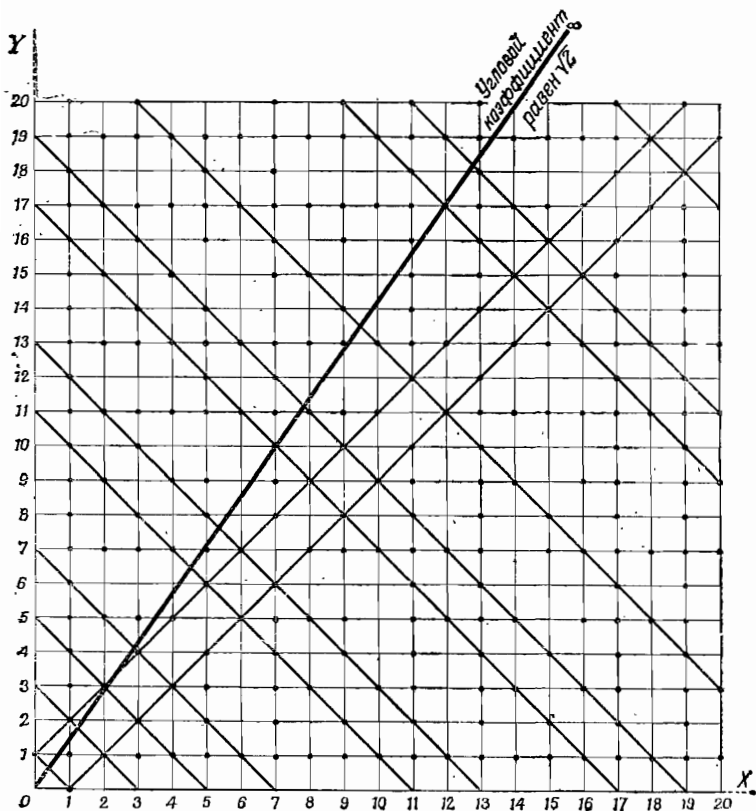
РЕШЕТКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Простейшая из решеток на плоскости (говоря о решетке, мы вкладываем в это слово тот же смысл, что и кристаллографы) — это точки, расположенные в вершинах квадратов, заполняющих всю плоскость. Такую решетку часто называют решеткой целых чисел, и вот почему. Если мы введем на плоскости прямоугольную систему координат, то наша решетка окажется не чем иным, как множеством точек с целочисленными координатами x и y . Конечное подмножество — 400 точек, координаты x и y которых пробегают все целые значения от 0 до 20, этого бесконечного множества изображено на рис. 33.

Представим себе, что начало координат — точка с координатами $(0, 0)$ — это юго-западный угол сада, обнесенного стеной с юга и запада, но простирающегося неограниченно далеко на север и на восток. Предположим также, что каждая точка решетки — это дерево. Если встать в начале координат и посмотреть в сад, то одни деревья будут видны, а другие окажутся скрытыми за ними. Разумеется, аналогия между решеткой целых

чисел и садом с квадратным размещением деревьев не вполне удачна: деревья мы рассматриваем как точки и считаем, что дерево можно увидеть из начала координат, если отрезок прямой, соединяющей «дерево» с точкой $(0, 0)$, не содержит ни одной другой целой точки. На рис. 33 жирными точками отмечены те деревья, которые видны из начала координат. Неотмеченные точки решетки означают деревья, которые заслонены другими деревьями (если смотреть на сад из начала координат).

Сопоставим каждому дереву нашего сада дробь, числителем которой будет его абсцисса x , а знаменате-



лем — абсцисса x . Эта простая операция позволяет выявить многие интересные свойства решетки целых чисел. Например, каждой точке, видимой из начала координат, соответствует дробь с взаимно простыми числителем и знаменателем (иначе говоря, числитель и знаменатель этой дроби не имеют общих множителей, отличных от 1, вследствие чего сама дробь несократима). Каждой точке, которую нельзя увидеть из начала координат, соответствует сократимая дробь, а каждой дроби, которая получается из нее при сокращении на общий делитель числителя и знаменателя, отвечает некоторая точка на отрезке прямой, соединяющей исходную точку с началом координат $(0, 0)$. Рассмотрим, например, точку $\frac{6}{9}$ ($x = 9, y = 6$). Увидеть ее из начала координат $(0, 0)$ нельзя, поскольку дробь $\frac{6}{9}$ можно после сокращения привести к виду $\frac{2}{3}$. Соединив отрезком прямой точки $(0, 0)$ и $(9, 6)$, вы увидите, что точку $(9, 6)$ «заслоняет» точка $(x = 3, y = 2)$. Все точки решетки, расположенные на диагоналях, идущих вправо и вверх из точек $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$, видимы, потому что дроби, числитель и знаменатель которых отличаются на единицу, несократимы.

Интересно отметить, что многие диагонали, идущие в другом направлении — слева направо и сверху вниз, — если не считать их концов, целиком заполнены точками, видимыми из начала координат. Все эти диагонали пересекают оси координат в точках, одна из координат которых выражается простым числом. Каждой видимой точке на такой диагонали соответствует дробь, числитель и знаменатель которой в сумме дают простое число, служащее отличной от нуля координатой концов диагонали. Ясно, что два числа, сумма которых равна простому числу, взаимно просты (если бы у них был общий делитель, то он должен был быть и делителем их суммы), поэтому дроби, соответствующие точкам на интересующих нас диагоналях, несократимы. Вертикальные и горизонтальные прямые, пересекающие оси x и y в точках, у которых отличная от нуля координата выражается простым числом, заселены видимыми точками решетки тем гуще, чем больше это простое число, поскольку невидимые из начала координат точки могут лежать на таких прямых лишь в том случае, если их другая координата (одноименная с нулевой координатой

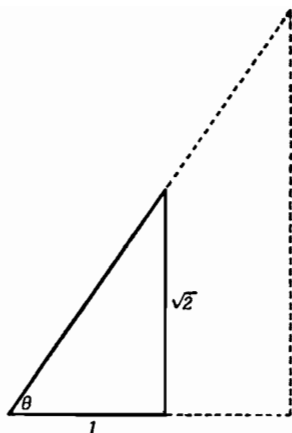
точки пересечения данной прямой с осью координат) кратна этому простому числу.

Можно ли, стоя в начале координат $(0, 0)$, бросить в наш бесконечный сад взгляд в таком направлении, что луч зрения нигде «не наткнется» на деревья, сколько бы мы его ни продолжали? Оказывается, можно! Более того, таких направлений не только бесконечно много, но и множество их гораздо «богаче» (в действительности бесконечно богаче) множества прямых, проведенных через начало координат и проходящих через видимые точки. Следовательно, если направление луча зрения выбрано наугад, то вероятность увидеть дерево равна нулю. Каким образом можно задать такие направления, по которым не будет видно ни одного дерева? Оказывается, нужно лишь, стоя в начале координат, направить прямую под таким углом к осям координат, чтобы координаты любой точки, лежащей на прямой, были несоизмеримы. Иначе говоря, для любой точки (x, y) на прямой дробь y/x — тангенс угла наклона, который данная прямая составляет с осью x — должна быть иррациональным числом. Сдвинемся, например, вправо вдоль оси x до отметки 10, а затем вверх до точки с $y = 10\pi$. Соединив эту точку с началом координат, мы получим прямую, на которой, сколько бы мы ее ни продолжали, не окажется ни одного узла решетки, поскольку для нее $y/x = 10\pi/10 = \pi$, а π — число иррациональное. (Было бы чрезвычайно интересно построить такую прямую и с помощью сверхмощного микроскопа посмотреть, как далеко она проходит от точки $(x = 113, y = 355)$. Дробь $^{355}/_{113}$ позволяет получать приближенное значение π с шестью знаками!)

Тангенс угла наклона к оси x (его еще называют угловым коэффициентом) у жирной прямой на рис. 33 равен $\sqrt{2}$. Нетрудно доказать, что пуля, выпущенная по направлению этой прямой, не попадает ни в одно дерево, даже если устремится в бесконечность. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник на рис. 34. Основание его равно 1, высота $\sqrt{2}$, следовательно, тангенс угла θ равен $\sqrt{2}$. Если мы продолжим гипотенузу и основание так, чтобы получился треугольник, подобный исходному (на рис. 34 стороны нового треугольника показаны пунктиром), то отношение вы-

Р и с. 34. Тангенс угла θ равен $\sqrt{2}$.

соты и основания нового треугольника будет по-прежнему равно иррациональному числу $\sqrt{2}$. Таким же будет и отношение координат y/x для всех точек, лежащих на прямой с угловым коэффициентом $\sqrt{2}$. Поэтому, сколько бы мы ни продолжали такую прямую, отношение координат y/x для лежащих на ней точек будет неизменно равно $\sqrt{2}$. Для всех же узлов решетки отношение y/x *рационально*. Следовательно, ни один узел решетки не может лежать на прямой с угловым коэффициентом, равным $\sqrt{2}$.



Занявшись поиском тех узлов решетки, мимо которых прямая с иррациональным угловым коэффициентом проходит особенно близко, мы получим превосходные рациональные приближения для этого коэффициента. Представим себе, что прямая с угловым коэффициентом, равным $\sqrt{2}$, — это туго натянутая веревка, закрепленная в бесконечности. Взяв ее за другой конец («прикрепленный» к началу координат), начнем перемещать его к востоку. Вербка по мере движения будет задевать деревья, которым соответствуют дроби, меньшие, чем число $\sqrt{2} = 1,414236 \dots$. По мере удаления от начала координат эти дроби будут все меньше отличаться от $\sqrt{2}$. Сначала веревка заденет дерево $(1, 1)$. Соответствующая ему дробь $1/1 = 1$ дает плохое приближение к $\sqrt{2}$. Следующее дерево $4/3$ дает несколько лучшее приближение, затем идет дерево $7/5 = 1,4$. Здесь уже совпадают не только целые, но и десятые. Если мы будем тянуть конец веревки к северу, то веревка заденет деревья, которым соответствуют дроби, превосходящие $\sqrt{2}$. Правда, с нашим приближением к бесконечности разность между этими дробями и $\sqrt{2}$ будет

стремиться к нулю. Первая дробь $\frac{2}{1} = 2$ дает очень грубое приближение, вторая $\frac{3}{2}$ — несколько лучшее, третья $\frac{10}{7}$ — еще лучшее, а четвертая $\frac{17}{12} \approx 1,41666\dots$ отличается от $\sqrt{2}$ лишь на $0,0024\dots$

Одно из наиболее простых представлений иррационального числа $\sqrt{2}$ мы получим, если обратимся к непрерывным дробям:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 1}}} \dots$$

Начав с самого верха и образовав так называемые «подходящие дроби» ($1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}$ и т. д.), мы получим все ранее упоминавшиеся рациональные приближения числа $\sqrt{2}$: $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}$. По мере того как расстояние между узлами решетки и прямой уменьшается, соответствующие узлам дроби дают все лучшее приближение числа $\sqrt{2}$.

Изучение прямых с иррациональными угловыми коэффициентами естественно подводит нас к следующему вопросу. Рассмотрим точку с координатами $x = \sqrt{3}, y = \sqrt{27}$. Через эту точку и начало координат проведем прямую. Будет ли эта прямая содержать хоть один узел решетки, отличный от $(0, 0)$?

Если поместить в начале координат бильярдный шар и пустить его по главной диагонали (биссектрисе угла между осями координат), то он будет проходить лишь те узлы решетки, которым соответствуют дроби, равные единице ($\operatorname{tg} 45^\circ = 1$). Предположим теперь, что мы рассматриваем не всю плоскость, а лишь прямоугольники произвольных размеров, ограниченные снизу и слева осями координат, стороны которых выражаются целыми числами. Представим себе, что каждый такой прямоугольник — это бильярдный стол. Будем считать, что бильярдный шар упруго отражается от бортов и катится по поверхности стола, расчерченного на квадраты («покрытого решеткой целых чисел»), без трения. С по-

мощью метода отражений* нетрудно показать, что независимо от размеров стола шар, пущенный из начала координат под соответствующим углом, после конечного числа отражений от бортов попадает в один из трех остальных углов стола.

Последнее утверждение можно усилить. Независимо от того, под каким углом шар пущен из начала координат, он в конце концов попадет в один из углов бильярдного стола, если точка его первого соударения с бортом отстоит от любого из концов борта на расстояние, выражающееся рациональным числом. Если же точка первого соударения шара с бортом отстоит от конца (какого именно — безразлично) борта на расстояние, выражающееся иррациональным числом, то траектория шара никогда не пройдет ни через один из узлов решетки. Поскольку углы бильярдного стола принадлежат к числу решеточных узлов, шар никогда не попадет ни в один из углов бильярдного стола, отличных от начала координат. Иррациональных точек на любой прямой бесконечно больше, чем рациональных. Следовательно, вероятность того, что идеальный (точечный) шар, выпущенный из начала координат под выбранным наугад углом, отразится от первого же борта в точке, отстоящей от любого из концов на отрезок, длина которого выражается рациональным числом, бесконечно близка к нулю. Представим себе, что весь бильярдный стол расчерчен на мельчайшие клетки, стороны которых пересекают оси x и y в точках с рациональными координатами. Тогда шар, пущенный наугад из начала координат, будет вечно двигаться по бильярдному столу, никогда не проходя по одному и тому же участку своего пути дважды и не задевая ни одного узла решетки!

Рассмотрим лишь простейший случай: шар, движущийся по диагоналям — прямым, составляющим с бортами угол в 45° . Сразу же возникает интересный вопрос. Можно ли заранее предсказать, в какой из трех (отличных от начала координат) углов бильярдного стола попадет шар, если размеры стола известны? Разумеется, мы всегда можем начертить траекторию шара и узнать ответ, но если, например, стол имеет размеры $10,175 \times$

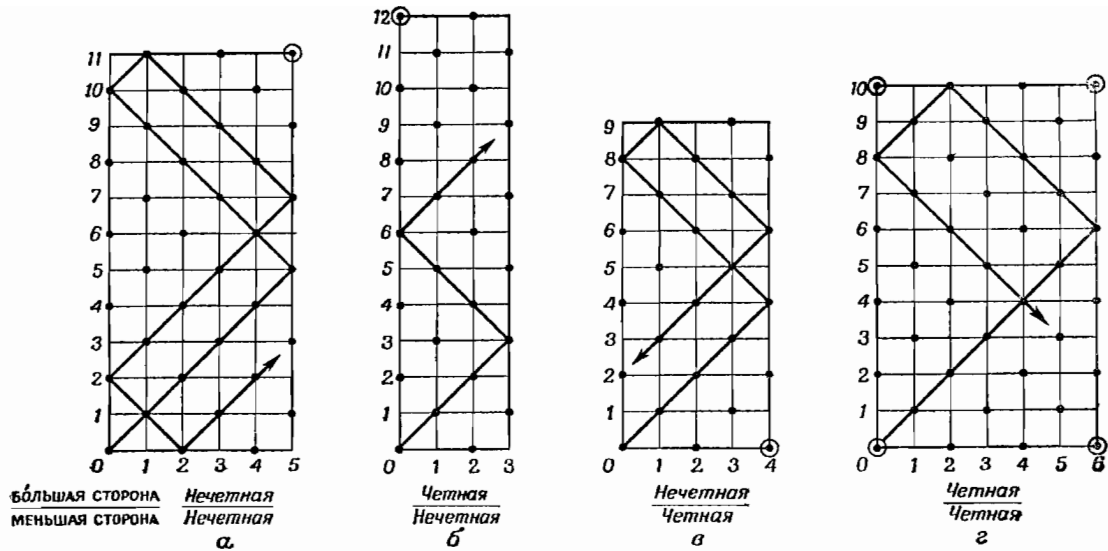
* См., например, Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М. — Л., Гостехиздат, 1949, стр. 29.

× 11,303, то графическое решение становится громоздким и утомительным.

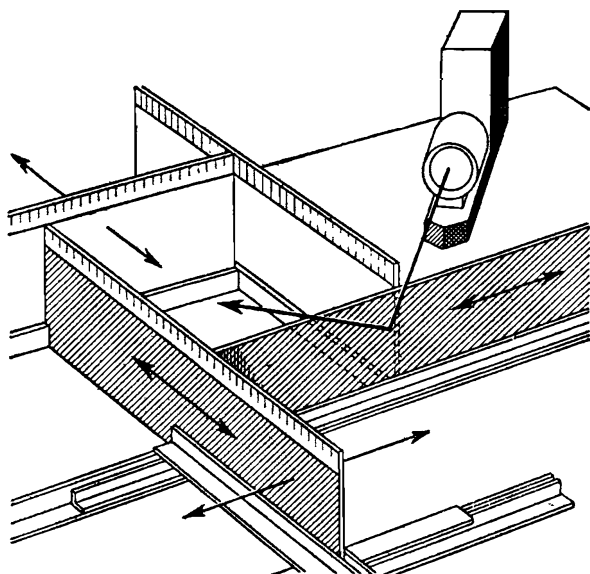
Если длина или ширина стола выражаются нечетным числом, то ответить на вопрос о том, в какой из его углов попадет бильярдный шар, можно с помощью остроумной проверки на четность. Предположим, что оба размера стола нечетны. Отметим жирными точками начало координат и каждый второй узел решетки (рис. 35, а). Ясно, что траектория шара будет проходить только по отмеченным узлам решетки. Из трех углов стола, отличных от начала координат, жирной точкой отмечен лишь северо-восточный. Он-то и будет тем углом, в который в конце концов попадет шар. (Читатель легко может убедиться в этом, построив траекторию шара.) Если длина одной стороны стола четна, а другой — нечетна, то, расставив жирные точки так же, как и в предыдущем случае (рис. 35, б и в), мы увидим, что шар попадет в тот угол, который принадлежит четной стороне, выходящей из начала координат.

Непредвиденное затруднение возникает, когда мы переходим к рассмотрению четно-четного стола (длины обеих сторон которого выражаются четными числами): жирные точки в этом случае стоят во всех четырех его углах (рис. 35, г). В какой из трех углов, не совпадающих с началом координат, попадает шар? Немного поэкспериментировав на листе бумаги в клеточку, вы убедитесь, что в зависимости от соотношения сторон шар может попасть в любой из трех углов. Можно ли сформулировать арифметическое правило, позволяющее указывать угол, в который попадет шар для любого четно-нечетного стола?

Следующее любопытное обстоятельство может подсказать путь к решению этой задачи: ближайший к началу координат узел решетки, принадлежащий одновременно траектории шара и большей из сторон стола, всегда отстоит от начала координат на расстояние, вдвое превышающее общий наибольший делитель (о. н. д.) длин бортов бильярдного стола. Если длины сторон выражаются взаимно простыми числами, то о. н. д. равен 1 (такой случай изображен на рис. 35, а и в). В этом случае ближайший к началу координат узел решетки, принадлежащий одновременно траектории шара и большей из сторон стола, удален от (0, 0)



Р и с. 35. Проверка траекторий бильярдного шара на четность.



Р и с. 36. «Оптический бильярд» Завроцкого для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел.

на 2, то есть на расстояние, вдвое превышающее о. н. д. длин бортов бильярдного стола.

Это свойство траектории бильярдного шара, пущенного под углом в 45° внутри прямоугольного участка решетки целых чисел, навело Анде Завроцкого на мысль о создании оптического устройства для отыскания общего наибольшего делителя двух чисел. Принципиальная схема его прибора изображена на рис. 36. Четыре зеркала с нанесенными на их края равномерными шкалами образуют стенки прямоугольного ящика. Длины сторон можно менять, подбирая их так, чтобы они совпадали с теми числами, о. н. д. которых требуется найти.

Через небольшую щель луч света попадает в пространство между зеркалами, отражается под углом в 45° от «начала координат» (угла ящика, служащего началом отсчета обеих сходящихся в нем шкал) и продолжает свой путь, отражаясь то от одной, то от другой стенки до тех пор, пока не попадет в один из трех остальных углов ящика. Ближайшая к началу отсчета

светящаяся точка на более длинной из шкал устройства Завроцкого (сам изобретатель назвал свой прибор «оптическим бильярдом») указывает удвоенный о. н. д. чисел, отложенных на шкалах. По замыслу Завроцкого «оптический бильярд» предназначался в качестве наглядного пособия для школ. Читатели без труда смогут убедиться в том, что «оптический бильярд» работает безотказно, и заодно решить следующую задачу: вывести формулу, позволяющую находить длину пути, который шар проходит от точки $(0, 0)$ до попадания в следующий угол зеркального ящика, а также формулу для подсчета числа отражений светового «шарика» от бортов «оптического бильярда».

Соединяя узлы решетки отрезками прямых, можно построить бесконечное множество простых многоугольников (рис. 37). (Слово «простой» мы употребляем здесь в техническом смысле: простыми называются многоугольники, стороны которых не имеют точек самопересечения.) Разбив «решеточные многоугольники» на

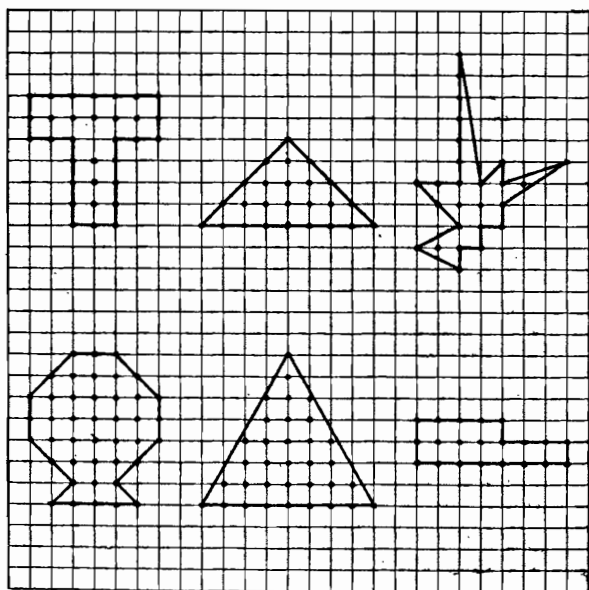
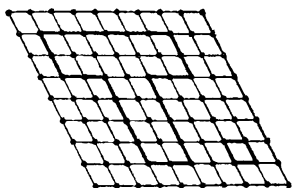


Рис. 37. Решеточные многоугольники.



Р и с. 38. Аффинное преобразование решеточного многоугольника.

более простые фигуры, мы всегда сможем вычислить их площадь, однако этот метод очень утомителен. К счастью, площадь решеточного многоугольника можно вычислить более простым и гораздо более приятным способом. Воспользуемся для этого следующей замечательной теоремой:

Площадь любого простого многоугольника с вершинами в узлах решетки вычисляется по формуле

$$\frac{b}{2} + c - 1,$$

где b — число узлов решетки, лежащих на контуре многоугольника, а c — число узлов решетки, попавших внутрь многоугольника. За единицу площади принимается площадь «элементарной (единичной) ячейки» решетки.

Согласно Штейнгаузу*, эта изящная теорема была впервые открыта Г. Пиком и опубликована им в 1899 г. в одном чехословацком журнале. Теорема Г. Пика относится к аффинной геометрии (играющей важную роль в математическом аппарате теории относительности). Это означает, что утверждение теоремы останется в силе, даже если мы будем растягивать и перекашивать решетку. Например, теорема Пика применима к «искаженному T -образному решеточному многоугольнику, изображенному на рис. 38. Этот многоугольник, так же как и его прототип на рис. 37, содержит 24 узла решетки на границе и 9 — внутри нее. По формуле Пика его площадь равна $12 + 9 - 1 = 20$, если за единицу принять площадь «элементарной ячейки» (на рис. 37 она изображена справа). Правильность этого результата легко проверяется прямым подсчетом элементарных ячеек, заключенных внутри многоугольника. Доказательство теоремы Пика предоставляется читателям в

* H. Steinhaus, Mathematical Snapshots (Second ed.), Oxford — London, 1950. Русский перевод выполнен с первого издания,

качестве полезного (и не лишённого приятности) упражнения. Один из вариантов доказательства можно найти в книге Г. С. М. Кокстера*.

Невольно напрашивается мысль о том, что теорема Пика должна допускать простое обобщение на случай многогранников с вершинами в узлах трехмерной кубической решетки, однако рис. 39 позволяет быстро рассеять эту иллюзию. На рисунке изображена элементарная ячейка трехмерной кубической решетки, одна из вершин которой совпадает с началом координат. Рассмотрим решеточный тетраэдр с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Если вершину тетраэдра перенести в точку $(1, 1, 2)$, то объем его увеличится. В то же время ни на его ребрах, ни на его гранях, ни внутри его не появится ни одного нового узла решетки. Более того, мы видим, что, перемещая вершину тетраэдра вверх по вертикали, объем тетраэдра можно сделать сколь угодно большим, при этом число узлов решетки, заключенных внутри тетраэдра, а также лежащих на его ребрах и гранях, останется неизменным! Однако если ввести еще одну, вспомогательную, решетку, то формулу, устанавливающую связь между числом узлов решетки, «запутавшихся» в многограннике, и его объемом, все же можно вывести**.

В заключение сформулируем еще одну задачу. Со-

* Г. С. М. Кокстер, Введение в геометрию, М., изд-во «Наука», 1966, стр. 300—302.

** Подробности приведены в статье Дж. Рива «Об объеме решеточных полиэдров», опубликованной в *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7, № 7, 378—395 (1957).

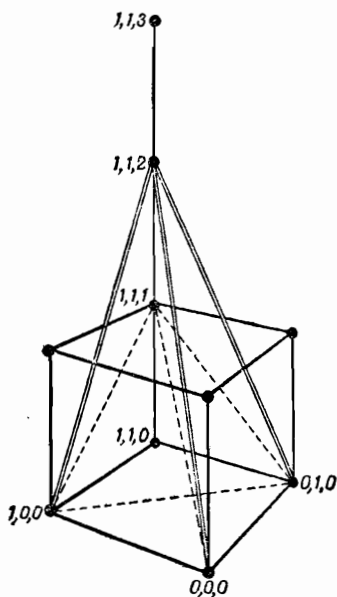


Рис. 39. Решеточные многогранники.

едините 12 узлов плоской решетки так, чтобы получился Т-образный многоугольник, аналогичный изображенному на рис. 37, но площадью в 10 квадратных единиц. (Из формулы Пика следует, что внутри такого многоугольника должно содержаться ровно 5 узлов решетки.)

ОТВЕТЫ

Прямая, выходящая из начала координат с угловым коэффициентом $\sqrt{27}/\sqrt{3}$, пройдет через бесконечное множество узлов решетки. Действительно, так как $\sqrt{27} = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$, дробь $\sqrt{27}/\sqrt{3}$ после сокращения числителя и знаменателя на $\sqrt{3}$ приводится к виду $3/1$, то есть она рациональна. Первый узел, через который проходит эта прямая, имеет координаты $x = 1, y = 3$.

На «четно-четном» бильярдном столе шар, выпущенный из начала координат под углом в 45° к бортам, проходит через узлы решетки, координаты которых отличаются на величину, равную удвоенному о. н. д. длин бортов стола. Отметив эти узлы жирными точками (рис. 40), мы увидим, что лишь один из трех возможных

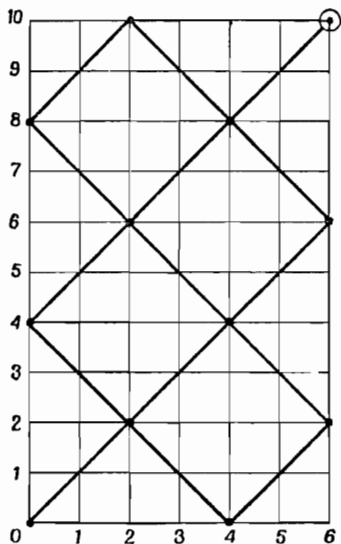


Рис. 40. Решение задачи о четно-четном бильярдном столе.

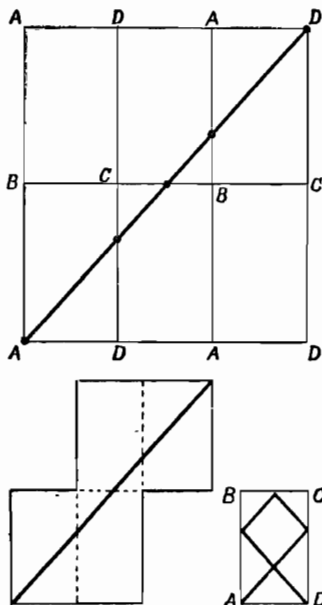
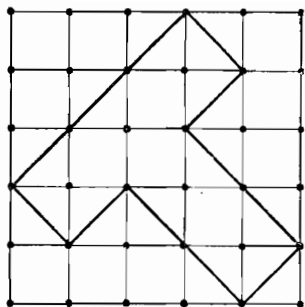


Рис. 41. Длина траектории бильярдного шара и число отражений от бортов.

Р и с. 42. Решение задачи о Т-образном многоугольнике.



углов окажется занятым такой точкой. В него-то и попадет шар. Правильно, позволяющее заранее указывать угол, в который попадет шар, формулируется просто. Разделим длины сторон на их о. н. д. Если оба полученных числа нечетны, шар попадет в угол стола, лежащий на противоположном началу координат конце диагонали. Если одно из чисел четно (оба получившихся числа не могут быть четными одновременно), то шар попадет в угол, лежащий на соответствующей этому числу стороне, которая проходит через начало координат. Эти правила допускают обобщения на случай траектории, составляющей с осью x произвольный угол, тангенс которого рационален.

Формулы, позволяющие определять длину траектории шара и число соударений, интуитивно ясны из рис. 41, идея которого заимствована из уже упоминавшейся книги Штейнгауза «Математический калейдоскоп». Независимо от целочисленных размеров прямоугольника мы всегда можем построить квадрат, взяв достаточно большое число его «копий» и расположив их вплотную друг к другу (рис. 41). Длина стороны наименьшего из построенных таким образом квадратов совпадает с общим наименьшим кратным длин сторон рассматриваемого треугольника.

Теперь каждый из прямоугольников мы будем рассматривать как зеркальное отражение смежного прямоугольника, имеющего с ним общую сторону. Тогда диагональ квадрата, соединяющая точку A — начало траектории шара, пущенного под углом в 45° к борту стола, — с диагонально противоположной вершиной квадрата, будет представлять собой не что иное, как «распрямленную» траекторию шара. Вырезав из тонкой бумаги те прямоугольники, по которым пролегает траектория шара, сложив их по пунктирным линиям и посмотрев на свет, мы увидим, что диагональ превратится в ломаную — подлинную траекторию шара на поверхности бильярдного стола (рис. 41).

Поскольку диагональ AD квадрата есть в то же время гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника, каждый из катетов которого равен общему наименьшему кратному длин сторон прямоугольника, то длина траектории равна этому общему наименьшему кратному, умноженному на $\sqrt{2}$.

Точки на диагонали (за исключением ее концов) соответствуют отражениям шара от бортов бильярдного стола. Нетрудно видеть, что число столкновений определяется формулой

$$\frac{a+b}{\text{о. н. д.}},$$

где a и b — длины сторон исходного прямоугольника, а о. н. д. — их общий наибольший делитель.

Единственный способ нарисовать Т-образный многоугольник на плоской решетке, граница которого содержит 12 узлов, а внутренность — 5, показан на рис. 42. Его площадь равна площади десяти элементарных ячеек.

ГЛАВА 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ МИСТЕРА О'ГАРА, ПОЧТАЛЬОНА

Перебирая как-то раз на своем письменном столе грудку конвертов в поисках необычных марок, я неожиданно наткнулся на конверт с яркой наклейкой. Напечатанный на ней текст гласил. «Если эта наклейка отпала при пересылке письма, срочно сообщите об этом П. О.» «Типичный образец ирландского тумора», — подумал я и оказался прав. Вскрыв конверт, я обнаружил, что буквы П. О. означали не «почтовому отделению», а «Патрику О'Гара». Отправитель письма действительно был ирландцем и проживал в Бруклине. По профессии мистер О'Гара был почтальоном, но его подлинным призванием была занимательная математика. Обходя свой участок, он, по его словам, развлекался тем, что придумывал необычные головоломки. Мистер О'Гара любезно предлагал мне встретиться и обсудить те из его задач, которые на мой взгляд могли бы представить интерес для читателей.

Должен признаться, что пересечение множества людей, у которых я брал интервью*, с множеством реаль-

* Напомним, что в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» приводятся интервью с Джеймсом Хью Райли (гл. 28), Виктором Айгеном (гл. 42) и П. Бертраном Аполлинаксом (гл. 44), а в его же «Математических досугах» — интервью с преподающим Артуром Слейдом (гл. 12) и участниками съезда фокусников в Чикаго (гл. 18). — *Прим. перев.*

но существующих людей пусто. Однако это несущественное обстоятельство не ослабило моего рвения. Более того, перечитав незадолго до получения письма от мистера О'Гара один из моих любимых рассказов Дж. К. Честертона о патере Брауне «Человек-невидимка», я был психологически подготовлен к встрече с необыкновенным почтальоном. В этом рассказе четверо свидетелей клятвенно заверяют, что никто не входил в дом и не покидал его, поскольку ежедневный визит почтальона стал для них настолько привычным, что не заслуживал особого упоминания. «Никто почему-то не обращает внимания на почтальонов, — говорит в этом рассказе патер Браун, — а ведь и у почтальонов, как и у других людей, есть свои увлечения...»

Хотя главным увлечением мистера О'Гара была занимательная математика, его следующей по рангу страстью была филателия. О'Гара оказался молодым человеком атлетического сложения с рыжеватыми волосами и дочерна загорелым лицом. Ему довелось окончить лишь среднюю школу, но небольшой кабинет его холостяцкой квартиры в Бруклине был буквально забит старыми и новыми книгами по занимательной математике, и с первых же слов стало ясно, что в этой области он превосходно разбирается.

— Не собираете ли вы марки? — спросил О'Гара.

— Нет, — ответил я, — но мой десятилетний сынишка только что начал свой первый альбом.

— Посоветуйте ему собирать марки на какую-нибудь тему, — сказал О'Гара. — В наше время тематическая коллекция — великое дело! Никто больше не собирает марки «вообще», просто так. Не хотите ли взглянуть на мои тематические коллекции?

Больше всего марок в собрании О'Гара было посвящено математике. Я был поражен, узнав, как много знаменитых математиков удостоились чести быть изображенными на этих миниатюрных гравюрах. Немцы, например, выпустили свою первую математическую марку в 1926 г. Это была марка достоинством в 40 пфеннигов с портретом Лейбница. В коллекции О'Гара были французские марки, выпущенные в честь Декарта, Паскаля, Бюффона, Карно, Лапласа, Пуанкаре и многих других математиков. На итальянских марках были изображены сцены из жизни Галилея. Я увидел

голландские марки с портретами Гюйгенса и Лоренца, советские марки, посвященные таким выдающимся математикам, как Эйлер, Чебышев и Лобачевский. Великолепная серия из четырех марок была выпущена в 1929 г. в Норвегии к столетию со дня смерти Абеля. В 1955 г. ФРГ выпустила марку с портретом Гаусса. Двумя марками было ознаменовано 50-летие румынского математического журнала *Gazeta Matematica*. В 1955 г. Греция торжественно отпраздновала 2500-летие Пифагорейской академии, выпустив четыре марки с изображением пифагорова треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

— Удостаивали ли Соединенные Штаты какого-нибудь математика чести быть изображенным на почтовых марках? — спросил я.

О'Гара покачал головой.

— Англия тоже не выпустила ни одной марки с портретом математика, но у Англии хоть есть оправдание: англичане на своих марках изображают лишь членов королевской фамилии.

Одна из наиболее удивительных тематических коллекций О'Гара была посвящена «научным нелепостям» (термин самого О'Гара) — маркам, на которых по вине художника или в процессе печати были допущены вопиющие ошибки. Так, в 1903 г. британская колония Сент Киттс-Невис выпустила марку с изображением Колумба, стоящего на палубе каравеллы и пытающегося разглядеть землю в подзорную трубу, коей в его времена еще не было. На ямайской марке 1932 г. плоды на банановом дереве растут не вверх, как им положено по законам природы, а вниз. На австрийской марке 1934 г. у лыжника оказались почему-то перевернутыми уши. Необычный вид имеет созвездие Южного Креста на бразильской марке 1940 г.: его также перевернули. На американской марке 1944 г., выпущенной в честь юбилея трансконтинентальной железной дороги, увековечен паровоз, у которого дым направлен в одну сторону, а развевающийся флаг — в другую.

Другая необычная тематическая коллекция О'Гара была составлена из марок со «скрытыми изображениями». В 1904 г. Сербия выпустила знаменитую марку с «посмертной маской»: из профилей Карагеорга и Петра I Карагеоргиевича, если их перевернуть на 180°, воз-

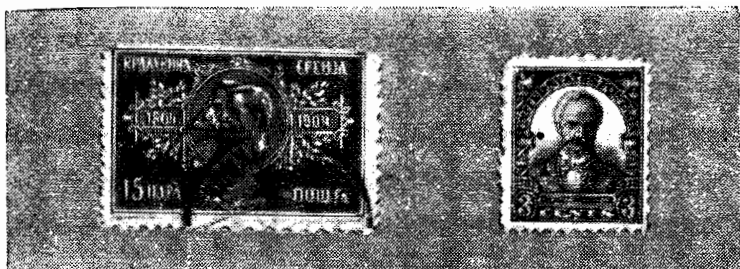


Рис. 43. Сербская и американская марки со «скрытыми изображениями».

никала посмертная маска сербского короля Александра I Обреновича, убитого сторонниками Карагеоргиевичей за год до выпуска марки. На трехцентовой марке, выпущенной в 1932 г. в США, галстук и манишка Даниэля Уэбстера, стоило лишь перевернуть его портрет вниз головой, неожиданно превращались в... лицо старика-китайца с длинными усами (рис. 43). На другой американской марке, появившейся в обращении в 1934 г. в серии, посвященной достопримечательностям Национального парка, горная цепь при повороте на 90° становилась мужским профилем, а плотину Боулдер Дэм на перевернутой «вверх ногами» марке 1935 г. трудно отличить от Колокола Свободы. Были в коллекции О'Гара и другие диковины.

Герой одного детективного рассказа сыщик Чарли Чен говаривал: «Почтальон во время отпуска любит совершать далекие прогулки». Как бы в подтверждение его слов, проводя несколько лет назад свой отпуск в Европе, О'Гара специально побывал в Калининграде (во времена Эйлера называвшемся Кёнигсбергом), чтобы пройти по семи знаменитым кёнигсбергским мостам. По словам О'Гара, ему действительно удалось сделать то, что не удалось Эйлеру, впервые доказавшему неразрешимость задачи об обходе семи кёнигсбергских мостов: через реку Преголя успели построить еще один, восьмой, мост.

Как-то раз прошлой зимой, подкрепившись изрядной дозой ирландского виски, О'Гара предпринял обширные исследования проблем, связанных с случайными

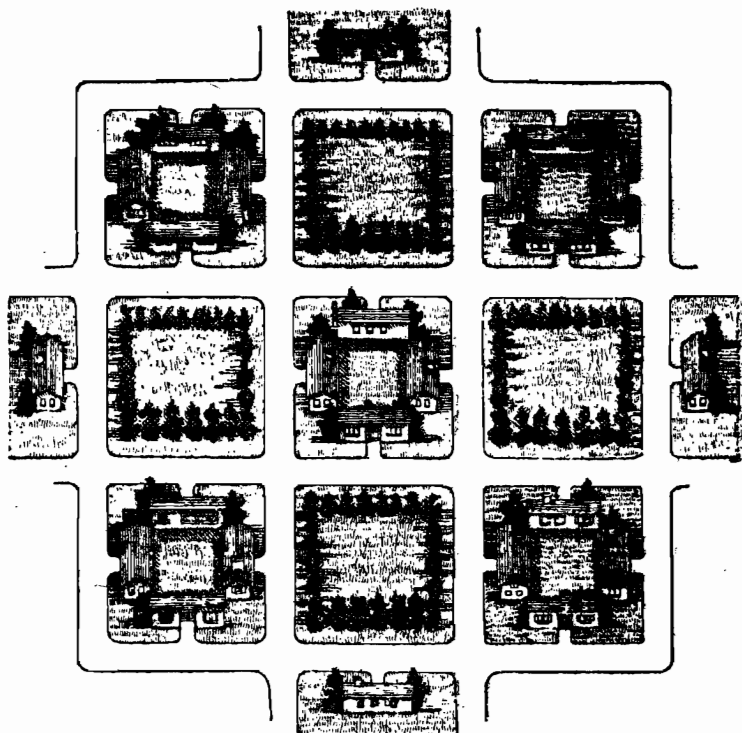


Рис. 44. По какому маршруту почтальону удобнее всего обходить эти дома?

блужданиями по одной из заснеженных площадей «где-то в Бруклине».

— У меня хорошо развито пространственное воображение, — сообщил мне О'Гара. — В детстве я часто играл в шахматы вслепую, без доски, а сейчас, разнося письма, нередко решаю в уме различные геометрические головоломки. Вот одна из них....

С этими словами он быстро изобразил на листе бумаги план участка, жителям которого О'Гара некогда доставлял корреспонденцию (рис. 44). Дома были разделены лужайками, поэтому заселенным был каждый второй квартал. При доставке почты почтальон должен заходить в каждый дом,

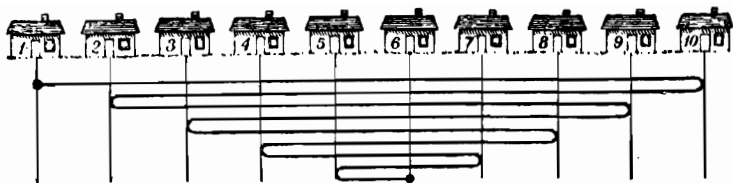


Рис. 46. Задача о наихудшем маршруте почтальона.

пытался найти новые маршруты длиной в 27 кварталов, удовлетворяющие различным условиям. Например, мне удалось найти все мыслимые кратчайшие маршруты (длиной в 27 кварталов), позволяющие обойти все 8 улиц и при этом не совершить ни одного левого поворота (рис. 45). Под конец месяца я столкнулся с двумя прелестными задачками, которые могут понравиться вашим читателям.

Первая задача, как выяснилось из дальнейших объяснений О'Гара, заключалась в том, чтобы найти кратчайший маршрут длиной в 27 кварталов с минимальным числом поворотов, проходящий по всем 8 улицам его участка. Маршрут, изображенный на рис. 45, например, содержит 19 поворотов, что намного больше необходимого минимума. «Поворот» происходит в любой точке маршрута, где изменяется направление движения. Повороты могут быть левыми и правыми. Маршрут может быть с «открытыми» концами и замкнутым (то есть таким, что его конец совпадает с началом). Вторая задача заключалась в отыскании кратчайшего маршрута длиной в 27 кварталов с максимальным числом поворотов. В обеих задачах почтальон, следуя маршрутами, должен пройти полностью каждую из 8 улиц.

— Когда мне надоело отыскивать наилучшие пути, — продолжал О'Гара, — я принялся отыскивать наихудшие. Как-то мне нужно было доставлять почту в 10 домов, расположенных вдоль улицы (по одной и той же стороне ее) на одинаковом расстоянии один от другого. Каков самый длинный маршрут, который может избрать почтальон, если от дома к дому он ходит по прямой, никуда не сворачивая, начинать обход может с любого дома и должен непременно побывать по одному разу в каждом из 10 домов? На листке бумаги О'Гара изобразил (рис. 46) свою первую попытку

найти наилучший маршрут: обход начинался с дома 1, заканчивался на доме 6, а длина маршрута составляла 45 единичных интервалов.

— А бывают маршруты еще хуже? — спросил я.

О'Гара утвердительно кивнул.

— Спросите своих читателей, смогут ли они найти самый худший из маршрутов. Если подобные комбинаторные головоломки им понравятся, пусть попытаются решить более трудную задачу — найти формулу, выражающую длину наиболее протяженного пути как функцию числа домов n .

— Великолепно! — воскликнул я, записывая условия задачи в блокнот. — Но мне не хотелось бы чрезмерно перегружать наше интервью задачами о выборе маршрутов. Не доводилось ли Вам придумывать интересных головоломок о чем-нибудь другом? Например, о номерах домов?

О'Гара выдвинул ящик письменного стола, в котором аккуратно выписанные на карточках хранились сотни задач. Одна из них особенно понравилась мне.

Длинная улица тянется с востока на запад. По обеим сторонам ее стоят дома. Нумерация домов обычная: по одной стороне нечетные дома (начиная с № 1 и далее), по другой — четные (№ 2, 4, 6 и т. д.). Домов на каждой стороне больше 50 и меньше 500. Смит живет на нечетной стороне улицы. Сумма номеров всех домов, расположенных по нечетной стороне к востоку от его дома, равна сумме номеров всех домов, расположенных по четной стороне к западу от его дома. В аналогичной ситуации находится также и Джонс, живущий на четной стороне улицы. Сумма номеров всех домов, расположенных к западу от его дома, по четной стороне, равна сумме номеров всех домов, расположенных по обе стороны улицы к востоку от его дома. Требуется определить номера домов, в которых живут Смит и Джонс.

— Не предлагали ли Вы своим читателям, — спросил О'Гара, — старую задачу о человеке, который пишет n писем, надписывает n конвертов, и затем наудачу раскладывает письма по конвертам?

— Как же! — ответил я. — Только формулировал я ее несколько иначе: у меня речь шла о попарной раскладке карт из двух тщательно перетасованных колод.

Насколько я помню, с ростом n вероятность того, что ни одно письмо не попадает в «свой» конверт, стремится к пределу, равному $1/e$.

— Правильно, — согласился О'Гара. — Имея всего лишь 4 письма и 4 конверта, нетрудно подсчитать, что вероятность отправить по верному адресу одно или несколько писем составляет $5/8$, а вероятность отправить по верному адресу ровно одно письмо равна $1/3$.

— Верю вам на слово, — сказал я.

— А не могли бы вы, — продолжал О'Гара, слегка улыбнувшись, — вычислить вероятность, с которой ровно одно письмо из четырех отправлено по неверному адресу?

Я начал было выписывать на листе бумаги все возможные перестановки из четырех букв A, B, C и D , но О'Гара остановил меня.

— Задачу следует решать в уме, — укоризненно заметил он, — и быстрее, чем за 10 секунд.

Я озадаченно посмотрел на него, но тут же рассмеялся. Решив задачу, читатель поймет, что заставило меня развеселиться.

Когда я добирался от метро до квартиры О'Гара, шел сильный ливень. Продолжался он и теперь, когда я собрался уходить.

— Ну что ж, — сказал я, пожимая на прощание хозяину руку, — ни дождь, ни пыль, ни тьма ночная не могут помешать гонцу.

— Вот, кстати, еще одна задача, — ответил О'Гара, слегка поморщившись. — Слова, которые вы только что процитировали, причем, должен признаться, весьма неточно, известны многим. Не могли бы вы сказать, кому они принадлежат?

На этом мы расстались.

ОТВЕТЫ

Решение задачи о кратчайшем маршруте длиной в 27 кварталов с минимальным числом поворотов, проходящем по всем 8 улицам, показано на рис. 47.

Решение это с точностью до поворотов и отражений единственно. Докажем, что число поворотов не может быть меньше 10. Заменяв каждую из улиц отрезком прямой, получим схематический план — дорожную сеть — участка, который обслуживал О'Гара. Заметим, что в 8 вершинах (или узлах) сети — они расположены по ее внешнему контуру — сходится нечетное число линий. Извест-

ные правила гласят, что сеть можно обойти, побывав на всех ее участках лишь по одному разу и нигде не «перепрыгнув» с одного участка на другой, лишь при условии, если число вершин, в которых сходится нечетное число линий, равно либо нулю, либо двум. Следовательно, нам не остается ничего другого, кроме как проходить некоторые участки сети дважды, однако делать это нужно экономно, чтобы суммарный путь был как можно более коротким. Нетрудно видеть, что кратчайший путь получится, если мы будем проходить дважды лишь три участка пути: на рис. 48 они указаны двойными дугами. Длина кратчайшего пути составляет 27 кварталов, его началом и концом служат точки *A* и *B* (две оставшиеся вершины исходной сети, в которых сходится нечетное число линий).

Пять улиц почтальон может пройти, не совершив при этом ни одного поворота. Будем называть любой отрезок пути, проходимый «напрямую», без поворотов, «ходом». Пять улиц, о которых мы только что говорили, можно пройти самое меньшее за пять ходов. Чтобы пройти любую из трех остальных улиц, нам потребуется затратить по меньшей мере два хода, ибо средний квартал каждой из этих улиц необходимо пройти дважды. Следовательно, любой непрерывный путь из *A* в *B* должен содержать по крайней мере 11 ходов или, что то же, 10 поворотов. Предположим, что мы, выйдя из *A*, добрались до точки *C* (рис. 47). Находясь в *C*, мы не можем повернуть налево, ибо тогда, чтобы пройти оставшиеся две трети верхней улицы, нам потребовалось бы два хода, а чтобы пройти всю улицу, — три хода, в то время как решение с минимальным числом поворотов отводит на прохождение этой улицы лишь два хода. Следовательно, добравшись до точки *C*, мы должны повернуть направо. Рассуждая аналогичным образом и анализируя все «за» и «против» в каждой из вершин сети, мы обнаружим, что существуют лишь два маршрута, позволяющие обойти всю сеть и совершить при этом лишь 10 поворотов. Каждый из этих маршрутов является зеркальным отражением другого.

На рис. 49 изображен маршрут, позволяющий обойти весь участок с максимальным числом поворотов: оно равно 26. Это

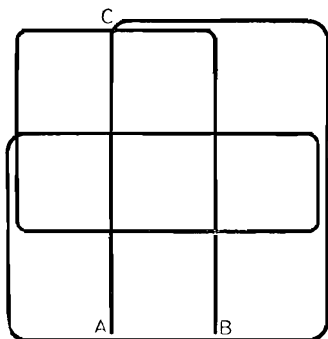


Рис. 47. Кратчайший маршрут с минимальным числом поворотов.

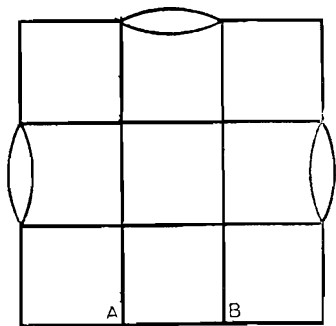


Рис. 48. Поиск кратчайшего маршрута с минимальным числом поворотов.

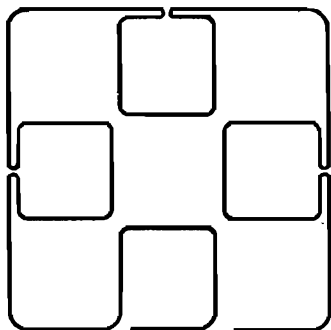


Рис. 49. Маршрут с максимальным числом поворотов.

решение также единственно с точностью до поворотов и отражений.

Самый длинный маршрут обхода десяти домов, выстроенных в ряд, изображен на рис. 50. Его длина составляет 49 единиц (за единицу принято расстояние между домами). Если число домов

n четно, то длина «наихудшего» пути равна $\frac{1}{2}(n^2 - 2)$, если n нечетно, то $\frac{1}{2}(n^2 - 3)$. Вывод формул, позволяющих вычислять длину «наихудшего» маршрута, приведен в книге Штейнгауза (задача № 65) *.

Смит живет в доме № 239, на его стороне улицы 169 домов. Джонс живет в доме № 408, на его стороне улицы 288 домов.

Данные относительно Смита мы находим, решая в целых числах уравнение $2x^2 - 1 = y^2$; данные относительно Джонса, — решая в целых числах уравнение $2x^2 + 2x = y^2$ (x — номер дома, y — число домов). Оба диофантовых уравнения допускают бесконечное множество решений в целых числах, однако из условия задачи нам известно, что число домов в каждом случае заключено между 50 и 500. Это позволяет в каждом случае выделить из бесконечного множества решений одну-единственную пару допустимых значений x и y .

Вероятность того, что ровно 1 письмо будет отправлено по неверному адресу, если четыре письма наугад разложены по четырем надписанным конвертам, равна нулю. Действительно, если три письма отправлены тем адресатам, которым они предназначались, оставшееся, четвертое, письмо при всем желании невозможно вложить в конверт с «не тем» адресом!

Слова «Ни снег, ни дождь, ни жара, ни тьма ночная...» принадлежат древнегреческому историку Геродоту. Они высечены на фронте здания Главного почтамта в Нью-Йорке.

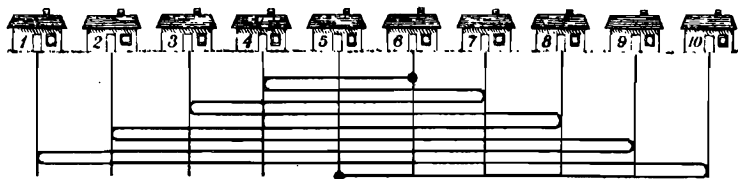


Рис. 50. Наихудший (самый длинный) маршрут.

* Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, М., 1959.

ГЛАВА 7

ПЕНТАМИНО И ПОЛИОМИНО: ПЯТЬ ИГР И СЕРИЯ ЗАДАЧ

Книга С. Голомба «Полиомино»* пробудила во всем мире интерес к многоугольникам, составленным из прилегающих друг к другу единичных квадратов. В свою очередь всеобщий интерес к полиомино вынудил Голомба, преподающего электротехнику и математику в Южно-Калифорнийском университете, уделять большую часть своего досуга изучению некоторых белых пятен в теории полиомино. Недавно я получил письмо от С. Голомба, в котором содержалась серия увлекательных (и до конца не решенных) задач, относящихся к изобретенной им много лет назад игре пентамино.

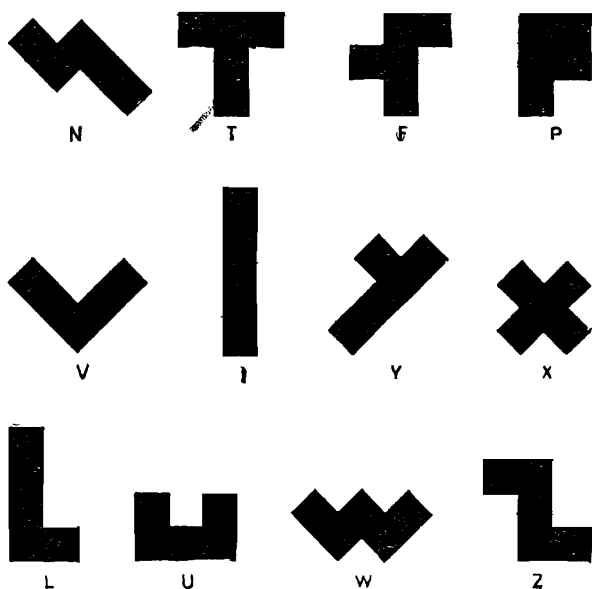
Пентамино представляют собой полиомино, состоящие из пяти квадратов**. Все 12 возможных фигур пентамино (вместе с их мнемоническими обозначениями, придуманными Голомбом) изображены на рис. 51. Чтобы играть в обычную игру пентамино, вам понадобятся эти фигурки, вырезанные из картона, и обычная шахматная доска, клетки которой имеют те же размеры, что и единичные квадраты, из которых составлены фигурки. Если вам никогда прежде не доводилось играть в пентамино, настоятельно советуем изготовить набор «костей» и попробовать сыграть партию-другую. Можно без преувеличения сказать, что пентамино — одна из наиболее интересных математических игр на специальных досках, которые появились в последние годы.

Играют в пентамино следующим образом. Двое игроков садятся друг против друга за пустой шахматной доской, имея под рукой полный комплекс фигур пентамино.

* W. Golomb, Polyominoes, N. Y., 1965.

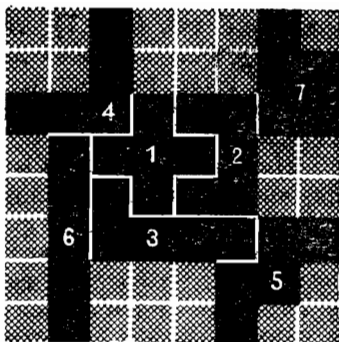
** См. гл. 12 и 46 книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения».

Тот из игроков, кому досталось по жребию право сделать первый ход, берет одну из 12 фигур и располагает ее на шахматной доске так, чтобы она закрывала 5 клеток. Другой игрок также берет одну из 11 оставшихся фигур и располагает ее на доске так, чтобы она закрыла пять из еще не закрытых клеток доски. Игроки делают ходы по очереди до тех пор, пока один из них не сможет сделать очередного хода либо потому, что оставшаяся в его распоряжении фигура не уместится на свободных клетках доски, либо потому, что все фигуры оказались «израсходованными». Игрок, который не может сделать очередного хода, считается проигравшим. Партии игры в пентамино длятся весьма недолго. Ничьи в пентамино, разумеется, невозможны. Тем не менее показать хороший класс игры в пентамино не так просто: для этого требуется искусство и интуиция. Математики пока еще не могут ответить на вопрос о том, кто из игроков — делающий первый ход или второй — может всегда обеспечить себе выигрыш, если он будет придерживаться рациональной стратегии. «Полный анализ игры в пентамино, — пи-



Р и с. 51. Двенадцать фигур пентамино.

Р и с. 52. Типичная партия в пентамино.



шет Голомб, — в настоящее время намного превосходит возможности самой быстродействующей ЭВМ при любых, даже самых щедрых, затратах машинного времени и сколь угодно изощренной программе».

По словам Голомба, наиболее разумная стратегия заключается в том, чтобы стремиться разбить доску на отдельные участки одинаковой площади. Коль скоро это удалось, перед вами открывается великолепная возможность парировать ход, сделанный вашим противником на одном из участков, своим следующим ходом, сделанным на другом участке. При сохранении такой ситуации до конца игры вы можете не сомневаться, что последний ход останется за вами.

Придуманная Голомбом типичная партия, в которой оба игрока придерживаются такой стратегии, показана на рис. 52. Игрок *А* располагает фигуру *X* вблизи центра доски (ход 1), чтобы помешать своему противнику разбить доску на участки одинаковой площади. Игрок *В* отвечает на его ход, пристраивая фигуру *U* к фигуре *X* (ход 2). Это хороший ход, комментирует Голомб, «потому что он не упрощает позицию для противника и не позволяет ему разбить доску на равновеликие участки». Игрок *А* действует не менее осмотрительно: он идет фигурой *L* (ход 3), по-прежнему не давая противнику разбить свободную часть доски на равновеликие участки. Четвертый ход игрока *В* — слабый, поскольку позволяет игроку *А* так расположить фигуру *W* (ход 5), что она разбивает доску на два равновеликих участка, каждый из которых содержит по 16 клеток (в этой партии участки не только равновелики, но и совпадают по форме).

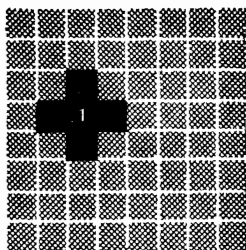
В ответ игрок *В* ставит на доску фигуру *I* (ход 6), надеясь, что его противнику не удастся найти среди оставшихся фигур пентамино такую, которая могла бы разместиться на другом участке доски. Но *А* ставит

фигуру Р так (ход 7), что выигрывает: хотя три еще не занятых участка доски достаточно велики, чтобы на них можно было разместить фигуры пентамино, единственные три фигуры нужной конфигурации — I, Р и U — уже использованы.

Наиболее интересным вариантом обычной игры в пентамино, по мнению Голомба, следует считать пентамино с заранее выбранными фигурами. Вместо того, чтобы выбирать фигуры при очередном ходе, противники до начала игры по очереди выбирают по одной фигуре, пока у каждого не наберется по 6 фигур. Тот, кто взял последнюю фигуру, делает первый ход. Игра проводится по правилам обычной игры в пентамино с той лишь разницей, что каждый игрок может выставлять на доску лишь фигуры, отобранные им перед началом игры. Стратегия игры с избранными заранее фигурами совершенно отлична от стратегии обычной игры в пентамино. Вместо того чтобы стремиться разбить доску на два равновеликих участка и тем самым создать ситуацию, в которой до конца игры остается четное число ходов, игрок старается оставить как можно больше ходов для своих фигур и как можно меньше — для фигур противника. Для этого он создает участки, которые можно заполнить лишь его фигурами (Голомб называет такие участки «убежищами»).

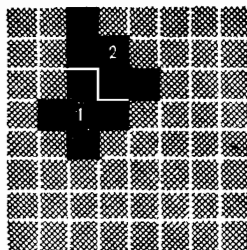
Комментарии Голомба к типичной партии игры в пентамино с заранее выбранными фигурами представлены на рис. 53. Игрок А прежде всего избавляется от Х — самой «каверзной» из фигур, способной доставить своему владельцу немало хлопот (ход 1). (Фигуры, выбранные игроками А и В, перечислены соответственно слева и справа от досок. Перечеркнутая фигура означает, что игрок использовал ее при очередном ходе.) Игрок В выставляет на доску (ход 2) фигуру W, также способную причинить немалые неприятности. Игрок А выставляет на доску фигуру F (ход 3), чтобы создать «убежище» для имеющейся в его «арсенале» фигуры Y. В ответ игрок В строит убежище для U, выкладывая на доску L (ход 4). Игрок А делает ход фигурой N (ход 5), В ставит на доску фигуру I (ход 6) и создает прямоугольное убежище размером две клетки на три, способное вместить две оставшиеся у него фигуры: Р и U. Игрок А выставляет фигуру V (ход 7) и, проанализировав

NYVT
✗



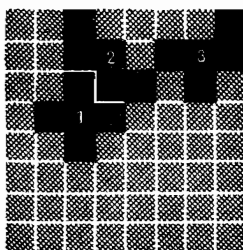
1

PULIZ
✗



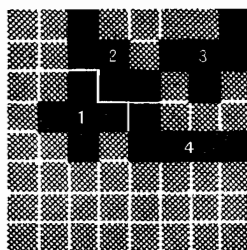
2

NYVT
✗



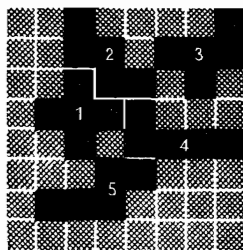
3

PULIZ
✗



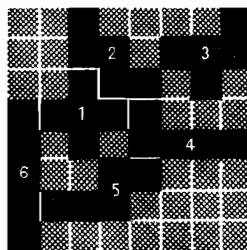
4

✗YVT



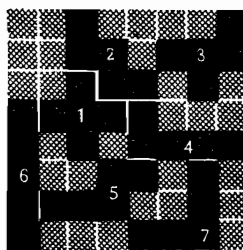
5

PULIZ
✗



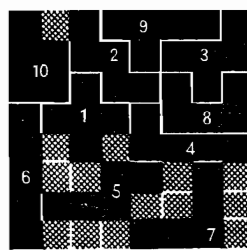
6

Y
✗
T



7

✗
✗
Z



8

Рис. 53. Игра в пентамино с заранее выбранными фигурами.

продолжение игры (ход 8), признает себя побежденным: после заполнения убежищ у А останется Т-образное пентамино, для которого на еще незанятой части доски местечка уже не найдется.

Если силы игроков неравны, то более сильный игрок может давать более слабому «фору», предоставляя ему право первого выбора фигур и, следовательно, второго хода. Еще большее преимущество слабый игрок получит, если разрешить ему выбрать не одну, а две или даже три фигуры подряд и предоставить возможность ходить вторым.

Существуют и другие, не менее увлекательные варианты игры в пентамино. Можно играть, например, в «карточное пентамино». Для этого фигуры пентамино (или их обозначения) рисуют на отдельных карточках. Карточки тщательно тасуют и раздают двум игрокам. Те отбирают фигуры, изображенные на доставшихся им карточках, и затем играют так же, как в пентамино с заранее выбранными фигурами. Играть в пентамино можно не только в одиночку, но и командами. Четыре игрока рассаживаются по четырем сторонам шахматной доски. Каждый из игроков по очереди выставляет на доску по одной фигуре. Игроки, сидящие напротив друг друга, образуют команду. Поражение засчитывается той команде, чей игрок первым не сможет сделать очередного хода. Командное первенство можно проводить по любой из трех описанных выше разновидностей пентамино.

Имеется еще один тип игры, также применимый ко всем трем разновидностям пентамино. Мы назовем его «Кто-кого?» В игре могут участвовать от двух до четырех игроков, но каждый из них играет только за себя. Победителем считается тот, кто делает последний ход. Ему засчитывается 10 очков. Тот, кто должен идти после победителя (игрок, который первым из участников *не может* сделать очередного хода), не получает ни одного очка, а все остальные игроки записывают себе по 5 очков.

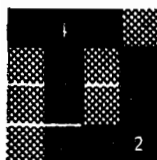
Обратимся теперь к задачам, которые возникают при обычной игре в пентамино на досках различных размеров. Чтобы был возможен первый ход, доска должна иметь размеры не меньше чем 3 клетки на 3. Разумеется, на такой доске выигрывает всегда тот, кому принадлежит право первого хода, потому что второго хода сделать нельзя. Зато на доске 4×4 второй игрок всегда

может добиться победы. Голомб доказал это, составив таблицу всех (с точностью до поворотов и отражений) первых ходов и указав для каждого из них второй ход, ведущий к выигрышу (рис. 54). Во всех случаях, кроме одного, игрок, делающий второй ход, может добиться выигрыша не одним, а несколькими способами. Интересно, много ли времени понадобится читателю, чтобы найти ту позицию, в которой существует лишь один второй ход, ведущий к победе?

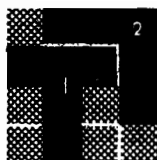
На первый взгляд может показаться, что анализировать игру на доске 5×5 труднее, чем на доске 4×4 , но в действительности, как это ни удивительно, игра на доске 5×5 оказывается гораздо проще. Причина столь странного положения заключается в том, что на доске 5×5 существует первый ход, неизменно ведущий к выигрышу того, кто его делает. Сумеет ли читатель самостоятельно обнаружить этот ход?

Сложность игры резко возрастает при переходе к доске 6×6 . Кто из игроков при рациональной стратегии может рассчитывать на выигрыш, пока не известно. «Несколько многообещающих ходов были подвергнуты подробнейшему разбору. Оказалось, что во всех рассмотренных случаях игрок, делающий второй ход, может выиграть, — пишет Голомб. — Однако полный анализ игры необычайно громоздок, ибо для каждого из большого числа возможных первых ходов необходимо указать оптимальную стратегию, приводящую к выигрышу».

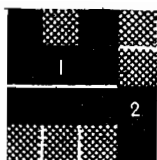
Другая, не менее трудная задача — определение самой короткой из партий игры в пентамино на досках размером 13×13 или меньше (если вдоль стороны доски укладывается более 13 клеток, то на доске становится достаточно «просторно» для всех 12 фигур пентамино и игра становится тривиальной) — также ждет своего решения. На языке теории множеств эту задачу можно сформулировать так: «Какова мощность подмножества 12 фигур пентамино, которое можно расположить на доске размером $n \times n$ (при $n \leq 13$) так, чтобы оставшиеся свободными клетки доски нельзя было закрыть ни одной из фигур пентамино, не принадлежащих этому подмножеству?» Примеры самых коротких партий в пентамино на досках с $n \leq 13$ приведены на рис. 55. Во многих случаях задача о наиболее короткой партии допускает более чем одно решение.



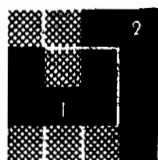
1



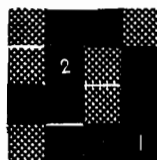
2



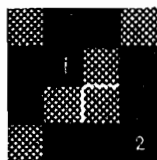
3



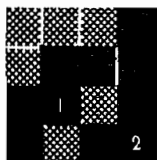
4



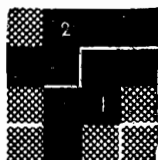
8



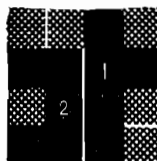
9



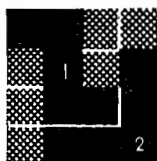
10



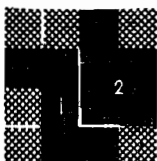
11



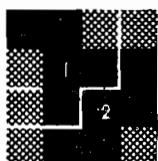
15



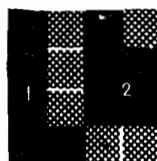
16



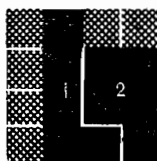
17



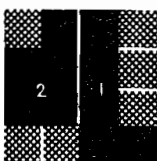
18



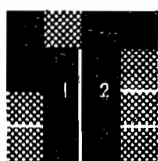
22



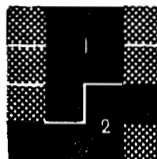
23



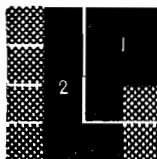
24



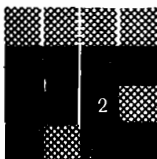
25



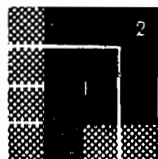
29



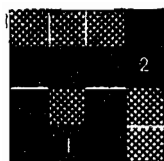
30



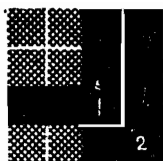
31



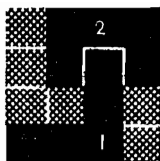
32



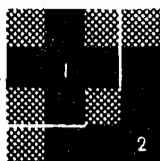
5



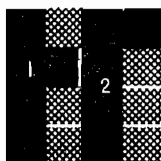
6



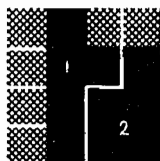
7



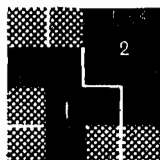
12



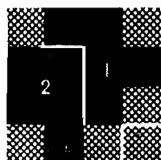
13



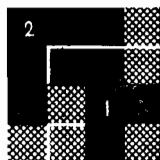
14



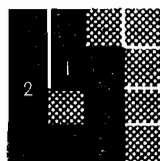
19



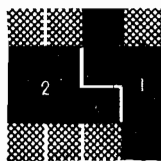
20



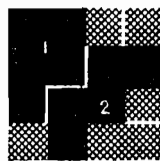
21



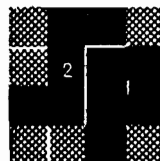
26



27



28



33

Р и с. 54. Доказательство существования выигрышной стратегии для второго игрока при игре в пентамино на доске 4×4 .



$n=1$

0 χοδος



$n=2$

0 χοδος



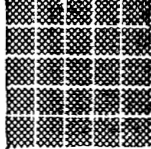
$n=3$

1 χοδ

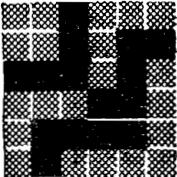


$n=4$

2 χοδα

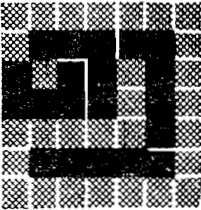


$n=5$



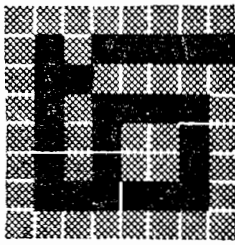
$n=6$

3 χοδα



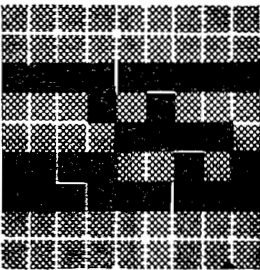
$n=7$

4 χοδα



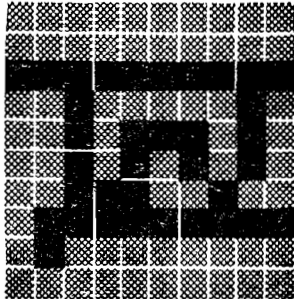
$n=8$

5 χοδος



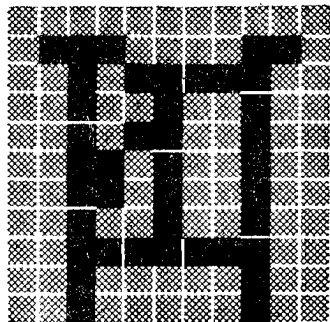
$n=9$

6 χοδος

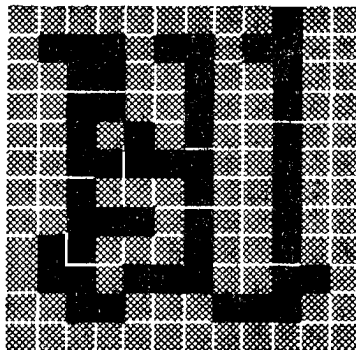


$n=10$

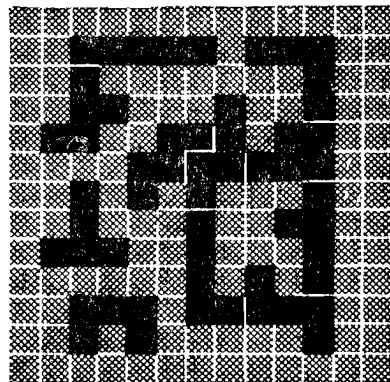
7 χοδος



$n=11$
8 ходов



$n=12$
10 ходов



$n=13$
11 ходов

Р и с. 55. Самые короткие партии на досках размером от $n=1$ до $n=13$.

Я умышленно не указал самой короткой партии в пентамино на доске 5×5 ; чтобы не лишать читателей удовольствия самостоятельно решить две несложные задачи. Какая партия, которую можно сыграть в пентамино на этой доске, самая короткая, какая — самая длинная?

От обычных, квадратных, досок естественно перейти к прямоугольным. Проведя исчерпывающий анализ всех прямоугольных досок, площадь которых не превышает 36 клеток, Голомб обнаружил, что наиболее удивительными свойствами обладает доска размером 5×6 : первый игрок на такой доске всегда может выиграть, но лишь при условии, если он сделает правильный первый ход. Читатели, которым четыре предыдущие задачи показались слишком простыми, могут поразмыслить над решением гораздо более трудной задачи: найти тот первый ход на доске 5×6 , который ведет к победе.

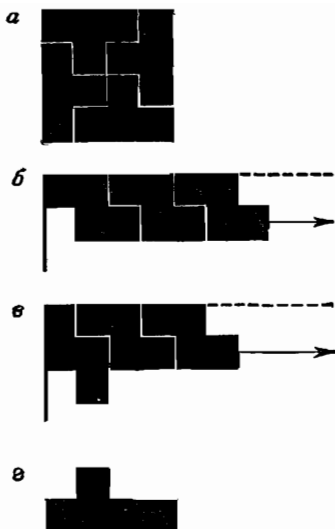
Совершенно иной тип задач возникает при попытке заполнить прямоугольник копиями какой-нибудь одной фигуры полиоминно. (Асимметричные фигуры разрешается переворачивать любой стороной вверх и использовать в любой из двух зеркально-симметричных форм.) О задачах этого типа ничего не говорится в книге Голомба, и теория их еще далека от завершения.

Первый вопрос, который возникает в этой связи, можно сформулировать так: каковы размеры наименьшего прямоугольника, составленного из одинаковых копий одной из фигур полиоминно? Если вы считаете, что данная фигура не может заполнить прямоугольник при любом соотношении сторон, докажите это.

Задача о построении прямоугольников из повторений одной и той же фигуры пентамино была поставлена в 1963 г. Д. Кларнером, в то время аспирантом математического факультета Университета Альберта. На следующий год группа студентов, участвовавших в работе организованной Калифорнийским университетом в Беркли летней математической школы, занялась изучением этой задачи под руководством своего преподавателя Р. Спира. О фигуре пентамино, которой можно заполнить прямоугольник, студенты говорили, что она «спрямляема», а саму задачу Кларнера называли «задачей о спрямлении фигур полиоминно».

Ясно, что мономино (состоящее из одного квадрата) и домино (состоящее из двух квадратов) спрямляемы,

Рис. 56. Задача о спрямлении фигур полимино.



поскольку каждая из этих фигур сама по себе имеет форму прямоугольника. Спряжляемы и обе фигуры тримино (состоящие из трех квадратов каждая): одна из них сама является прямоугольником 1×3 , а из двух L-образных тримино нетрудно построить прямоугольник 2×3 . Из пяти тетрамино (фигур, составленных из 4 квадратов) прямое тетрамино и тетрамино, имеющее

форму квадратов, сами являются прямоугольниками. Два L-образных тетрамино образуют прямоугольник 4×2 , а Т-образные фигуры тетрамино заполняют квадрат 4×4 (рис. 56, а). Z-образная фигура тетрамино неспряжляема. Доказательство этого утверждения тривиально; как бы мы ни располагали Z-образное тетрамино в левом верхнем углу прямоугольника, правый верхний угол прямоугольника останется незаполненным (рис. 56, б и в).

Аналогично доказывается невозможность составить прямоугольник из большинства фигур пентамино. Доказательство «неспряжляемости» пентамино Т, U, V, W, X, Z, F и N мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. Построить прямоугольник из пентамино I, L и P совсем несложно. Остается последняя из 12 фигур — пентамино Y. Она труднее других поддается анализу. Спряжляемо ли пентамино Y, изображенное на рис. 56, г? Если да, то каков наименьший прямоугольник, который можно составить из Y? Если нет, докажете «неспряжляемость» Y.

«Спряжляемость» 35 фигур гексамино (каждая из которых состоит из 6 квадратов) до сих пор подробно не исследована, хотя группа, руководимая Спиром, пришла к заключению, что число спряжляемых гексамино равно

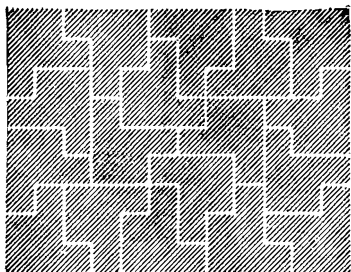


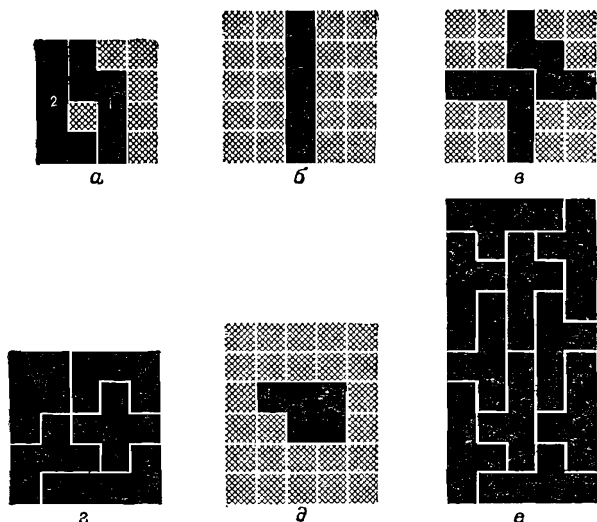
Рис. 57. Спрявление наиболее сложной фигуры гексамино и одна из фигур гептамино.

9 или 10. Д. Кларнеру, автору задачи о спрявлении фигур полиомино, удалось доказать спрявляемость 9 фигур гексамино. Восемь из этих 9 фигур спрямляются сравнительно просто: четырьмя копиями любой из них можно заполнить прямоугольник. Спрявление девятой фигуры гексамино сложнее: эта фигура и составленный из ее копий минимальный прямоугольник изображены на рис. 57 сверху. Есть основания полагать, что наименьшим прямоугольником для этой фигуры служит квадрат 14×14 , состоящий из 28 ее копий. (При составлении квадрата копии можно переворачивать любой стороной вверх.)

ОТВЕТЫ

В первой задаче из 33 двухходовых партий в пентамино на доске 4×4 , изображенных на рис. 54, нужно было выбрать ту, в которой второй игрок может выиграть, лишь сделав один-единственный ход. Нужным свойством обладает партия 26. Для удобства мы приводим ее еще раз на рис. 58, а. После первого хода справа остается пространство, которое можно заполнить лишь L-образным пентамино. Но если второй игрок выставит на доску L-образное пентамино, то первый сможет выиграть, сделав соответствующий ход на левой части доски. С другой стороны, если второй игрок поставит на левую часть доски любую фигуру, кроме L-образного пентамино, то первый игрок сможет добиться выигрыша, расположив L-образное пентамино на правой части доски. Следовательно, второй игрок может одержать победу лишь в том случае, если он выставит L-образное пентамино на левую часть доски. Именно этот ход и изображен на рис. 58, а.

На доске 5×5 игрок, делающий первый ход, очевидно, выигрывает, если располагает пентамино I по центру доски (рис. 58, б). Его противник вынужден ответить ходом на одной половине доски, после чего первый игрок выигрывает, выставляя фигуру на другую половину доски. Самая короткая партия при игре в пентамино на доске 5×5 состоит из 2 ходов (рис. 58, в), самая длинная — из пяти ходов (рис. 58, г). Самая короткая партия единственна. Самая длинная партия существует в нескольких вариантах.



Р и с. 58. Ответы к задачам о пентамино.

На прямоугольной доске 5×6 первый игрок выигрывает лишь в том случае, если делает первый ход, изображенный на рис. 58, д. Доказать это утверждение непросто, а поместить здесь правильные ответы на все возможные вторые ходы не позволяет их громоздкость.

У-образное пентамино спрямляемо. Наименьший прямоугольник, который можно составить из нескольких экземпляров этой фигуры, показан на рис. 58, е. Существуют 4 различные схемы составления такого прямоугольника.

ГЛАВА 8

ВОСЕМЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ

1. Назойливый поклонник. Одна молодая особа решила покупаться и позагорать на Круглом озере — искусственном водоеме, названном так за идеально круглую форму. Чтобы избавиться от назойливого поклонника,

девушка села в лодку и уплыла к центру озера, где на якоре стоял плот. Незадачливый Ромео решил дожидаться на берегу. «Рано или поздно ей все равно придется вернуться на берег, — рассуждал он, — а поскольку я бегая вчетверо быстрее, чем она гребет, мне удастся встретить ее в тот самый момент, когда лодка причалит к берегу».

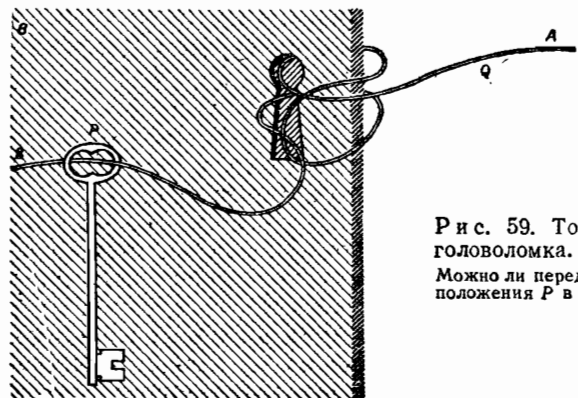
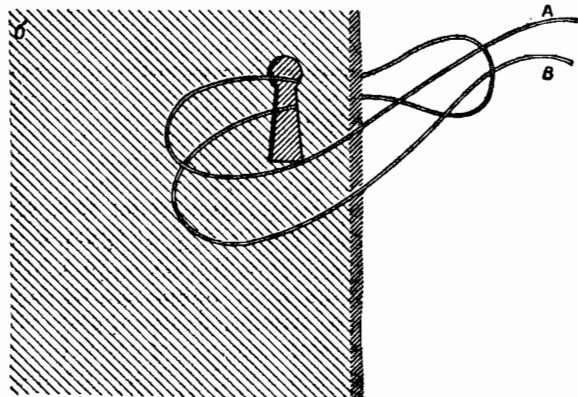
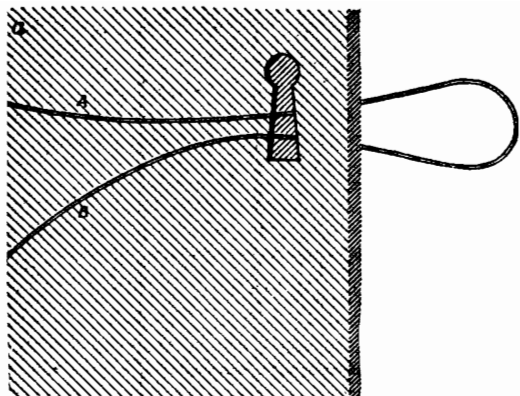
Попав в затруднительное положение, девушка задумалась над тем, как ей быть. Она знала, что на суше сумеет легко убежать от своего преследователя, а потому необходимо было разработать такую стратегию, которая позволила бы причалить к берегу в точке, до которой не успеет добежать поклонник. После непродолжительных размышлений девушке, которая была студенткой последнего курса математического факультета, пришла в голову удачная идея. Воспользовавшись своими познаниями из области прикладной математики, она успешно осуществила остроумный замысел.

Какой стратегии придерживалась девушка? (Предполагается, что в любой момент девушка располагает самыми точными сведениями относительно координат той точки озера, в которой она находится.)

2. Топологическая головоломка. Для этой несколько обескураживающей топологической головоломки нужен дверной ключ и кусок прочной веревки длиной в несколько метров. Сложив веревку вдвое, просуньте ее в замочную скважину, как показано на рис. 59, а, после чего проденьте концы веревки сквозь петлю, как показано на рис. 59, б. Теперь разведите концы веревки — один направо, другой налево (рис. 59, в), на левый конец наденьте ключ и сдвиньте его к двери. После этого закрепите оба конца веревки, привязав их, например, к спинкам двух стульев. Натягивать веревку не надо.

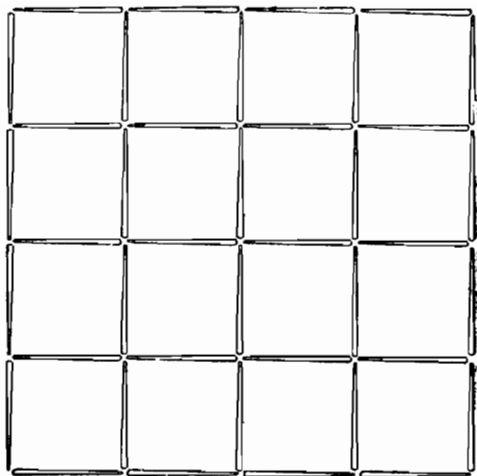
Задача заключается в том, чтобы, манипулируя ключом и веревкой, перевести ключ из точки P на левом конце веревки в точку Q на ее правом конце. После всех манипуляций веревка должна выглядеть так же, как и тогда, когда ключ находился в точке P .

3. Головоломка с зубочистками. Эта на первый взгляд безобидная задача по комбинаторной геометрии, заимствованная из одного давно забытого сборника занимательных задач, на самом деле гораздо сложнее, чем мо-



Р и с. 59. Топологическая головоломка.

Можно ли передвинуть ключ из положения *P* в положение *Q*?



Р и с. 60. Головоломка с зубочистками.

жет показаться. Сорок зубочисток расположены так, что образуют очертания шахматной доски 4×4 (рис. 60). Требуется убрать наименьшее число зубочисток так, чтобы периметр любого квадрата на шахматной доске оказался разрушенным. Говоря о «любом» квадрате, мы имеем в виду не только 16 маленьких квадратов 1×1 , но и 9 квадратов 2×2 , 4 квадрата 3×3 и большой квадрат 4×4 — внешний контур доски, то есть всего 30 квадратов.

(На любой шахматной доске размером $n \times n$ клеток всего имеется

$$\frac{(n^2 + n)^2}{4}$$

различных прямоугольников, из которых

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

квадраты. «Интересен и удивителен тот факт, — писал известный английский специалист по математическим головоломкам Генри Э. Дьюдени, — что полное число

прямоугольников всегда равно квадрату n -го треугольного числа *»).

Ответ, приведенный в старом сборнике, оказался правильным, и я не сомневаюсь, что читатели без особого труда сумеют решить эту задачу. Но смогут ли они сделать еще один шаг, доказав, что найденное ими решение действительно соответствует минимальному числу зубочисток?

Поставленный вопрос отнюдь не исчерпывает всех «глубин» задачи. Следующий шаг, очевидно, должен заключаться в исследовании квадратных досок различных размеров. Случай доски 1×1 тривиален. Нетрудно видеть, что для полного разрушения всех квадратов с доски 2×2 необходимо снять три зубочистки, а с доски 3×3 — шесть зубочисток. Ситуация с доской 4×4 достаточно трудна для того, чтобы быть интересной. При рассмотрении досок больших размеров трудности быстро возрастают.

Специалист по комбинаторной математике вряд ли почувствует удовлетворение до тех пор, пока ему не удастся вывести формулу, выражающую минимальное число зубочисток, которые необходимо снять для разрушения всех квадратов с доски $n \times n$, как функцию числа n , и указать способ, позволяющий получить хотя бы одно решение для любого n . Затем задачу можно обобщить на случай прямоугольных досок и задать себе вопрос о том, чему равно минимальное число зубочисток, при снятии которых разрушаются контуры всех *прямоугольников*, в том числе и квадратов.

В качестве самостоятельного упражнения мы предлагаем читателю решить задачу для квадратных досок $n \times n$ с $3 \leq n \leq 8$. Предупреждаем заранее, что найти решение для обычной шахматной доски ($n = 8$), на которой имеется всего 204 различных квадрата, не так-то просто.

4. Удивительная прямая. Внутри замкнутой кривой, изображенной на рис. 61, заключено бесконечно много

* Треугольными числами называются элементы последовательности $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Название чисел происходит от того, что t_n совпадает с числом кружков одинакового радиуса, из которых на плоскости можно выстроить треугольник (n — число слоев). (См. главу 17.) — *Прим. перев.*

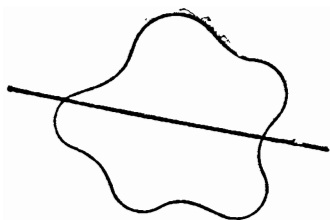


Рис. 61. Задача о разбиении множества из 1 000 000 точек на две половины.

точек. Предположим, что мы выбрали из них наугад 1 000 000 точек. Всегда ли на плоскости можно провести прямую так, чтобы она пересекала нашу замкнутую кривую, не проходила ни через одну из миллиона выбранных точек и при этом делила множество отобранных точек на две равные половины (иными словами, чтобы по любую сторону от прямой находилось по 500 000 отобранных точек)? Оказывается, что такая прямая всегда существует. Докажите это.

5. Логическая задача. Три игральные карты из одной колоды выложены в ряд на стол вверх рубашкой. Справа от короля находится дама или двойка. Слева от дамы лежит дама или двойка. Слева от карты червовой масти лежит карта пиковой масти или двойка. Справа от карты пиковой масти лежит карта пиковой масти или двойка.

Назовите карты, выложенные на стол.

6. Геометрическая задача Стифена Барра. Пять бумажных прямоугольников (один из них с оторванным углом) и шесть бумажных кружков брошены на стол. Они расположились так, как показано на рис. 62. Назовем вершины прямоугольников и точки пересечения контуров прямоугольников и кружков избранными точками. Можете ли вы указать среди избранных точек четыре набора (по 4 точки в каждом) точек «одного круга», то есть таких, что они лежат на одной окружности?

Например, точками «одного круга» служат вершины прямоугольника, расположенного на рис. 62 справа внизу: через вершины прямоугольника, как известно, всегда можно провести окружность. Можете ли вы указать три других набора точек «одного круга»?

7. Детективная история.

— Странный народ эти математики, — заметил полицейский комиссар, обращаясь к своей жене. — Помнишь,

я рассказывал тебе про тот случай в отеле? Так вот. Все недопитые бокалы мы выстроили рядами на столе в кухне отеля. В одном из них был яд, и нам хотелось узнать, в каком именно, прежде чем отправлять бокал в дактилоскопическую лабораторию. Разумеется, наши химики могли взять на анализ жидкость и из каждого бокала, но на это ушло бы немало времени и денег. Поэтому мы и хотели сократить число анализов до минимума. Позволили в университет, и те прислали нам на помощь профессора математики. Он пришел, пересчитал бокалы, улыбнулся и сказал:

— Выбирайте любой бокал, какой вам нравится, комиссар. С него и начнем анализ.

— А стоит ли так делать? — спросил я. — Ведь следствию дорога буквально каждая минута.

— Стоит, — ответил он. — То, что я предлагаю, ведет к быстрейшему установлению истины. Прежде всего необходимо взять на анализ пробу из одного бокала. Из какого именно — безразлично.

— А сколько бокалов стояло на столе? — спросила у комиссара жена.

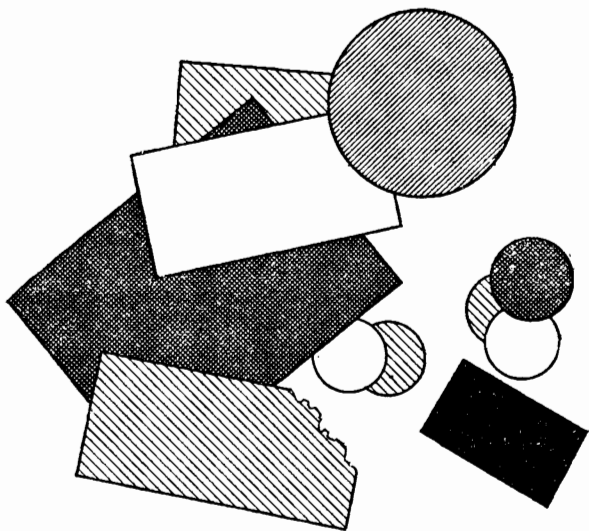


Рис. 62. Три набора из четырех точек, лежащих на одной окружности.

— Точно не помню. Что-то между 100 и 200.

Не поможете ли вы комиссару и не назовете ли точное число бокалов?

(Предполагается, что содержимое любой группы бокалов можно анализировать одновременно. Для этого из каждого бокала берется проба, все пробы смешиваются, и проводится один общий анализ получившейся смеси.)

8. Путешествие по шахматной доске. В литературе по занимательной математике много внимания уделялось различного рода «путешествиям» по шахматной доске: та или иная фигура должна побывать по одному и только по одному разу на всех 64 полях доски, не нарушив при этом определенных ограничений. Новую разновидность путешествий — «перекатывание кубика» — придумал в 1964 г. Джон Харрис. Она также таит в себе много возможностей.

Для решения приводимых ниже двух лучших задач Харриса вам понадобится небольшой детский кубик (если готового кубика под рукой нет, его можно склеить из картона). Грани кубика должны быть того же размера, что и клетки шахматной доски. Одна грань кубика должна быть окрашена в красный цвет. Кубик перекатывается с поля на поле через ребро, совпадающее с общей границей этих полей. Таким образом, при каждом ходе он поворачивается на четверть оборота в северном, южном, восточном или западном направлении.

Задача 1. Поставьте кубик в северо-западный угол доски так, чтобы его красная грань была обращена вверх. Перекатывая кубик с одного поля доски на другое, обойдите все 64 клетки, побывав на каждой лишь один раз так, чтобы закончить путешествие в северо-восточном углу доски и чтобы красная грань опять оказалась сверху. На протяжении всего путешествия красная грань ни разу не должна быть обращена вниз. (Примечание. Совершить такое путешествие из одного угла доски в диагонально противоположный угол невозможно.)

Задача 2. Поставьте кубик на любое поле шахматной доски так, чтобы он был обращен вверх любой из своих неокрашенных граней. Совершите по доске «кругосветное» путешествие (то есть, перекатывая кубик с клетки на клетку, побывайте по одному разу на всех клетках доски и вернитесь на ту же клетку, с которой начали)

так, чтобы красная грань ни разу не была обращена вверх.

Обе задачи имеют единственное решение (с точностью до поворотов и отражений траектории кубика на доске).

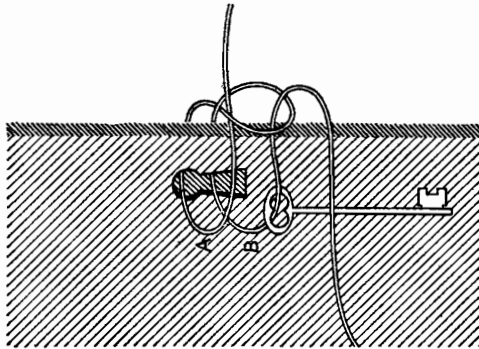
ОТВЕТЫ

1. Оптимальная стратегия для девушки, желающей избежать встречи с назойливым поклонником, сводится к следующему. Сначала девушка должна грести так, чтобы центр озера, где стоит на якоре плот, всегда находился между нею и человеком на берегу, при этом все три точки (центр озера, местоположение девушки и местоположение преследователя) должны находиться на одной прямой. Поскольку преследователь бежит по суше в 4 раза быстрее, чем девушка может грести, ей нетрудно удерживать его на прямой, проходящей через лодку (имеющую точечные размеры) и центр озера, и в то же время двигаться к берегу. Так будет продолжаться до тех пор, пока она не отплывет от центра на расстояние, равное четверти радиуса озера. В этот момент угловая скорость девушки станет равной угловой скорости преследователя, и у девушки не хватит энергии, чтобы еще и грести к берегу. Поэтому, достигнув точки, отстоящей на четверть радиуса от центра озера, девушка прямоком устремляется к ближайшей точке на берегу. Чтобы достичь берега, ей необходимо проплыть расстояние $3r/4$ (где r — радиус озера), а ее преследователь, чтобы добежать до этого места, должен преодолеть расстояние, равное πr . Поскольку преследователь бежит в 4 раза быстрее, чем гребет девушка, к моменту, когда лодка коснется берега, он успеет преодолеть лишь расстояние $3r$. А так как $3r < \pi r$, девушка сумеет благополучно убежать от него.

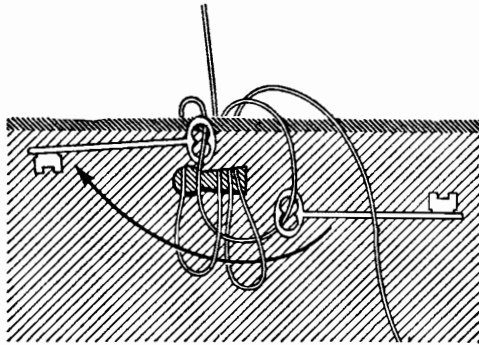
2. Чтобы перевести ключ из положения P в положение Q («сквозь дверь»), необходимо прежде всего пропустить ключ сквозь петлю. В результате этой операции ключ должен повиснуть на веревке так, как показано на рис. 63, а. Затем нужно взять веревку в точках A и B и протянуть петлю сквозь замочную скважину. Вместе с большой петлей снаружи («по эту сторону» двери) окажутся две малые петли. Продев ключ сквозь обе петли (рис. 63, б), потяните за концы веревки, оставшиеся по другую сторону двери, проташите обе малые петли сквозь замочную скважину и придайте веревке исходный вид (рис. 63, в). Двигая ключ вправо, проденьте его в петлю так, как показано на рис. 63, в, и головоломка будет решена.

3. Наименьшее число единичных отрезков («зубочисток»), которые необходимо снять со схематического изображения шахматной доски 4×4 , чтобы разрушить контуры всех «спрятанных» в ней квадратов, равно 9. Примером одного из таких решений может служить внутренний квадрат 4×4 в верхней части рис. 64.

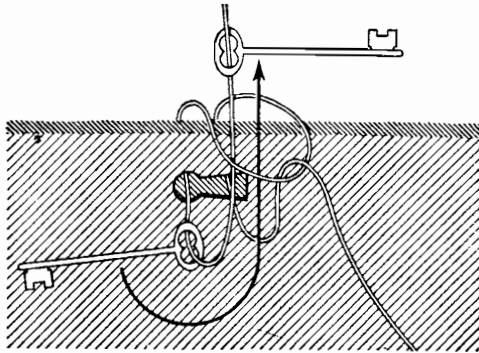
Докажем, что разрушить все квадраты, сняв меньшее число единичных отрезков, невозможно. Прежде всего заметим, что восемь темных квадратов не имеют общих сторон. Следовательно, разрушить их периметры можно, лишь убрав восемь единичных



а

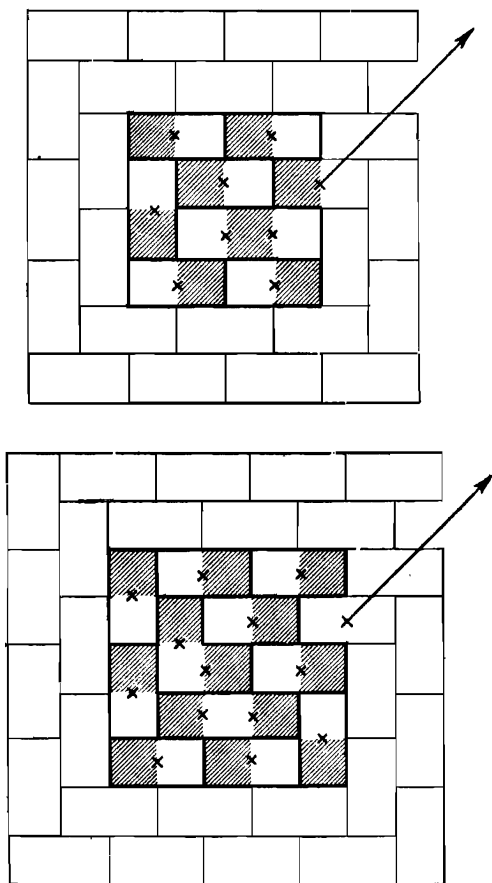


б



в

Р и с. 63. Решение головоломки с ключом.



Р и с. 64. Решение головоломок с зубочистками.

отрезков — по одной стороне у каждого квадрата. То же можно сказать и о восьми белых квадратах. Однако разрушить все 16 квадратов можно, не обязательно стерев 16 единичных отрезков, а гораздо более экономным способом. Действительно, стерев сторону, разделяющую белый и темный квадрат, мы сразу «убьем двух зайцев» — разрушим периметры двух квадратов. Для «расправы» с контурами всех 16 квадратов нам потребуется стереть всего лишь 8 единичных отрезков. При этом, однако, ни один из стертых отрезков не будет лежать на внешней границе доски, образующей самый большой квадрат — 4×4 . Следовательно, для того чтобы разрушить 16 маленьких (1×1) и 1 большой квадрат (4×4) ,

необходимо стереть по крайней мере 9 единичных отрезков. Из рис. 64 видно, что при этом оказываются разрушенными контуры всех 30 квадратов, «затаившихся» в очертаниях доски 4×4 .

Аналогичные рассуждения показывают, что для любой квадратной доски четного порядка число стертых сторон единичных квадратов, при котором достигается тотальное уничтожение всех квадратов, должно быть не меньше $\frac{1}{2}n^2 + 1$, где n — порядок доски. Является ли эта оценка точной, то есть достигается ли она для любых квадратных досок четного порядка?

Доказательство по индукции неявно содержится в рис. 64. Введем кость домино в отверстие на границе доски 4×4 и пристроим к ней остальные кости домино так, как показано на рис. 64 (внизу). Нетрудно видеть, что для доски 6×6 минимальное число единичных отрезков, удаление которых приводит к разрушению всех квадратов, равно 19. Повторив построение еще раз, мы получим, что для доски 8×8 минимальное число отрезков равно 33. Ясно, что достраивать кости домино можно бесконечно и на границе каждой новой доски всегда будет гнездо размером в один-единственный квадрат (на рис. 64 оно указано стрелкой).

На доске 5×5 ситуация осложняется тем, что темных квадратов на ней на один больше, чем белых. Следовательно, чтобы «одним махом» разрушить 12 белых и 12 темных квадратов, необходимо стереть 12 единичных отрезков. Они как бы образуют 12 костей домино. Если бы единственный «оставшийся в живых» темный квадрат примыкал к внешней границе доски, то его контур и контур самого большого (наружного) квадрата можно было бы разрушить одновременно, стерев еще один единичный отрезок. Это наводит на мысль о том, что минимальное число единичных отрезков, которые необходимо стереть для уничтожения всех квадратов, для досок нечетного порядка n равно $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$. Однако минимум этот был бы достигнут, если бы нам удалось уложить домино так, чтобы контуры всех квадратов порядка $n > 1$ оказались разрушенными. Поскольку это невозможно, минимальное число единичных отрезков возрастает до $\frac{1}{2}(n^2 + 1) + 1$. На рис. 64 внизу показано, как достигается минимальное решение для любого квадрата нечетного порядка.

При рассмотрении более общей задачи о разрушении контуров всех «внутренних и внешних» прямоугольников, присущих данной квадратной доске, роль, аналогичную роли домино, играет L-образное тримино. Харрис разработал метод получения минимального решения, допускающий обобщение на случай квадратной доски любого порядка. При $n = 2$ минимальное число единичных отрезков, подлежащих удалению, равно трем, при $n = 3$ —

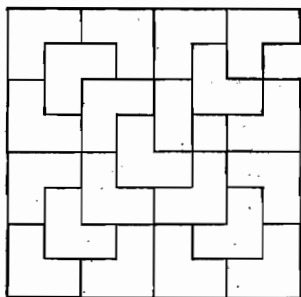
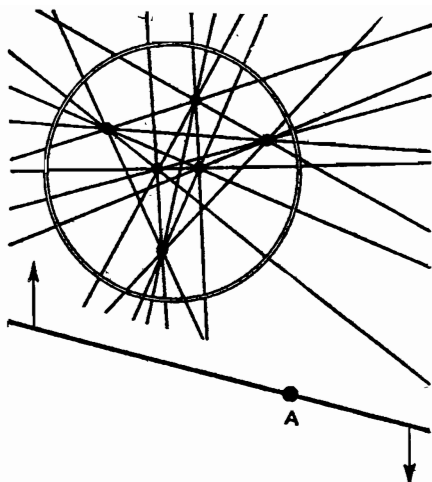


Рис. 65. Доска 8×8 , не содержащая ни одного прямоугольника.



Р и с. 66. Разбиение множества из 1 000 000 точек на две половины.

семи, при $n = 4$ — одиннадцати, при $n = 5$ — восемнадцати, при $n = 6$ — двадцати пяти, при $n = 7$ — тридцати четырем и при $n = 8$ — сорока трем. Полученное Харрисом минимальное решение при $n = 8$ приведено на рис. 65.

4. Нетрудно показать, что для любого конечного множества точек на плоскости существует бесконечно много прямых, каждая из которых делит множество на две половины. Доказательство этого факта для множества, состоящего из шести точек (рис. 66), применимо к любому конечному множеству точек.

Рассмотрим все возможные пары точек нашего множества и через любые две точки проведем прямую. Вне замкнутой кривой, окружающей все точки множества, выберем точку A , не лежащую ни на одной из проведенных нами прямых. Проведем через A произвольную прямую. Поворачивая прямую вокруг точки по часовой стрелке, будем проходить одну за другой точки нашего множества. (Пройти одновременно через две точки множества прямая не может, поскольку это означало бы, что точка A вопреки сказанному ранее принадлежит прямой, проведенной через эти две точки.) После того как «за кормой» останется половина точек нашего множества, задача будет решена — прямая, проходящая через точку A , будет делить наше множество на две половины. Поскольку точку A можно выбрать бесконечно многими способами, прямых, делящих наше множество на две половины, также бесконечно много.

5. Двум первым условиям задачи удовлетворяют лишь две раскладки карт: КДД и ДКД (К — король, Д — дама). Двум последним условиям также удовлетворяют лишь две раскладки: ППЧ

и ПЧП (П — пиковая, Ч — червовая масть). Всем четырем условиям удовлетворяют четыре варианта размещения карт:

КП	ДП	ДЧ
КП	ДЧ	ДП
ДП	КП	ДЧ
ДП	КЧ	ДП

Последний вариант необходимо отбросить, поскольку в нем участвуют две пиковые дамы. Три остальных набора содержат одни и те же карты: короля пик, пиковую и червовую дамы. Поэтому мы можем с уверенностью сказать, что на столе лежат именно эти карты. Указать, в какой именно последовательности они расположены, мы не можем: условия задачи не позволяют однозначно определить положение каждой карты в ряду. Можно лишь утверждать, что первая карта — пиковой масти, а последняя (третья) — дама.

6. На рис. 67 четыре набора, каждый из которых содержит по четыре точки «одного круга», отмечены жирными точками. Опервом из них мы уже говорили — это вершины прямоугольника, изображенного на рис. 67 справа. Четыре точки, лежащие на ободке маленького кружка, очевидно, также принадлежат «одному кругу». Третий набор состоит из точек A , B , C и D . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что отрезок BD (показанный на рис. 67 пунктиром) — диаметр этого круга. Действительно, поскольку углы при вершинах A и C (двух различных) прямоугольников прямые, точки A и C по известной теореме планиметрии должны лежать на окружности, для которой отрезок BD служит диаметром. Наконец, четвертый набор состоит из точек A , E , B и F . Пунктирный отрезок прямой BE служит диаметром окружности, проходящей через точки A и F , поскольку каждая из них служит вершиной прямого угла, опирающегося на диаметр BE .

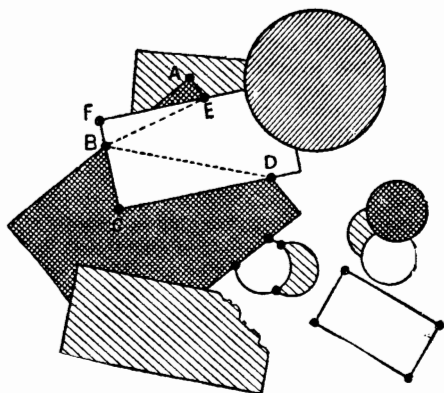


Рис. 67. Решение геометрической задачи Стифена Барра.

7. Установить, какой из конечного множества бокалов содержит яд, быстрее (эффективнее) всего можно с помощью так называемой дихотомии. Разделим бокалы (их всего n) на две группы. Если n четно, то в каждой из групп должно быть по $n/2$ бокалов. Если же n нечетно, то в одной группе должно быть $(n+1)/2$ бокалов, а в другой $(n-1)/2$ бокалов. Отобрав пробы из всех бокалов одной группы, мы сливаем их вместе и проводим анализ. По результатам анализа мы судим, в какой из двух групп находится бокал с ядом. Затем мы повторяем всю процедуру, сузив, таким образом, поле поисков примерно вдвое (при четном n — ровно вдвое). Если число бокалов заключено между 100 и 128, для установления бокала с ядом необходимо произвести всего семь разбиений на группы (и соответственно семь анализов). Если число бокалов заключено между 129 и 200, то для установления бокала с ядом необходимо произвести восемь анализов. Число 128 занимает особое положение: это единственная из степеней числа 2, заключенная в интервале между 100 и 200 ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, ...). Бокалов на кухне отеля должно было быть 129, ибо лишь в этом случае (из условий задачи известно, что число бокалов больше 100, но меньше 200) анализ содержимого одного бокала не уменьшает эффективность процедуры (математик утверждает, что его метод ведет к быстрейшему установлению истины). Действительно, при отыскании бокала с ядом среди 129 бокалов по методу дихотомии требуется провести 8 анализов. Те же 8 анализов нам придется провести, если мы сначала проверим содержимое одного бокала, а затем применим дихотомию к 128 бокалам (на что уйдет еще 7 анализов).

8. Решения двух задач о перекачивании кубика показаны на рис. 68. На верхней доске кубик обращен вверх

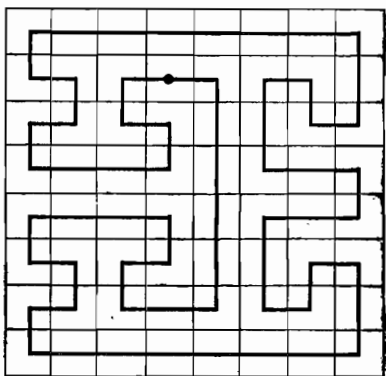
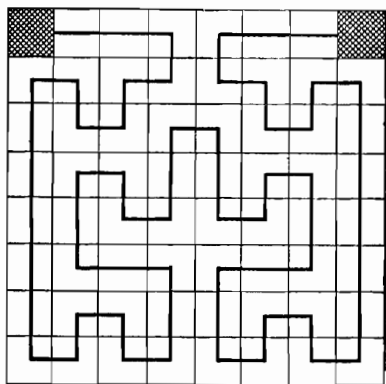


Рис. 68. Решения задач о перекачивании кубика.

красной гранью лишь в начале и в конце пути — в правом и левом верхних углах доски. На второй доске точно отмечено начало и конец замкнутой траектории, ни на одной клетке которой кубик не обращен вверх красной гранью.

ГЛАВА 9

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ НУМИЗМАТИКА

Целый ряд свойств делает монеты незаменимыми для занимательной математики: их легко складывать столбиком, удобно использовать в качестве фишек, они могут служить моделями точек на плоскости, имеют удобную круглую форму и хорошо различимые стороны — «орел» и «решетку». Для «нумизматических» задач, о которых пойдет речь дальше, необходимо иметь (самое большее) 10 монет одинакового достоинства. Все задачи элементарны, хотя некоторые из них затрагивают далеко не тривиальные разделы математики.

Одна из наиболее старых и интересных головоломок с монетами заключается в следующем. На столе выкладывают в ряд восемь монет (рис. 69). Из этих монет в четыре хода требуется сложить четыре столбика по две монеты в каждом (задача о «вздваивании» ряда). При решении этой задачи необходимо соблюдать единственное условие: при каждом ходе одиночной монете разрешается «перепрыгивать» (в любом направлении — направо или налево) ровно две монеты и «приземляться» на следующей за ними одиночной монете. Две монеты, через которые совершается прыжок, могут быть и двумя



Рис. 69. Задача о «вздваивании» ряда монет.

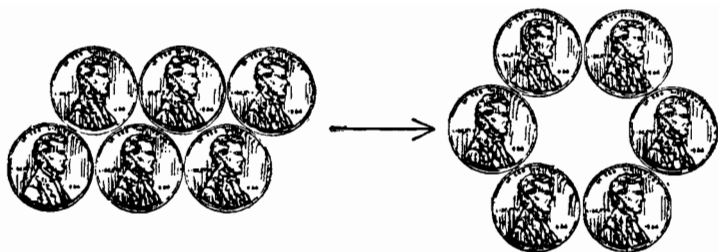


Рис. 70. Задача о плотнейшей укладке монет.

одиночными монетами, и столбиком, состоящим из двух монет. Восемь — наименьшее число монет, которые можно разложить таким образом.

Решить задачу о «вздваивании» ряда для восьми монет нетрудно. Самое интересное начинается потом. Предположим, что мы добавили к ряду еще две монеты. Можно ли 10 монет перестроить за 5 ходов в 5 столбиков по две монеты в каждом? Многие из тех, кто с легкостью перестраивает ряд из 8 монет, приходят в отчаяние, столкнувшись с задачей о «вздваивании» ряда из 10 монет, и бессильно опускают руки. Между тем задача решается мгновенно, разумеется, если вы располагаете ключом к ее решению. Более того, тривиально обобщив решение задачи с 8 монетами, вы сможете решать в n ходов задачу о вздваивании ряда из $2n$ монет ($n > 3$).

Центры монет, уложенных вплотную друг к другу на плоскости, образуют треугольную решетку. Это обстоятельство используется во множестве самых различных головоломок с монетами. Можно взять, например, шесть монет, выстроенных в виде ромба (рис. 70), и попытаться в три хода перестроить их в круг так, что если в центр круга поместить еще одну монету, то все семь монет окажутся уложенными плотнейшим образом. При каждом ходе сдвигать монету нужно так, чтобы в новом положении она касалась двух других монет (точки касания однозначно определяют новое положение монеты). Эта задача, так же как и задача о вздваивании ряда монет, обладает любопытной особенностью. Задайте ее вашему товарищу. Если он не справляется с задачей, медленно передвигая монеты, покажите ему решение и попросите повторить ваши действия, но, возвращая монеты в исходное положение, выстройте их в форме ромба,

служащего зеркальным отражением ромба на рис. 70. Весьма вероятно, что ваш приятель не заметит подвоха и, пытаясь повторить ваши три хода, вскоре столкнется с серьезными трудностями.

К этой задаче естественно примыкает другая — об «опрокидывании» треугольника. Разложим 10 монет в виде треугольника (рис. 71). Это знаменитая «тетрактис» (четверица) пифагорейцев. Задача заключается в том, чтобы, передвигая по одной монете, перевернуть треугольник — обратить его вершиной вниз. Как и в предыдущей задаче, новое положение каждой монеты должно однозначно определяться точками ее касания с двумя другими монетами. Чему равно минимальное число ходов, которые необходимо совершить для опрокидывания треугольника? Большинство людей быстро находят решение из четырех ходов, но опрокинуть треугольник можно и быстрее — за три хода.

Задача об опрокидывании треугольника допускает интересное обобщение. Треугольник из трех монет можно опрокинуть, передвинув лишь одну монету, треугольник из шести монет, — передвинув две монеты. Треугольник из десяти монет, как только что говорилось, можно опрокинуть тремя ходами. Можно ли опрокинуть следующий равносторонний треугольник, состоящий из 15 монет, расположенных так же, как 15 бильярдных шаров перед началом игры, передвинув всего лишь четыре монеты? Оказывается, нельзя: для опрокидывания треугольника из 15 монет требуется совершить 5 ходов. Тем не менее существует удивительно простой способ, позволяющий

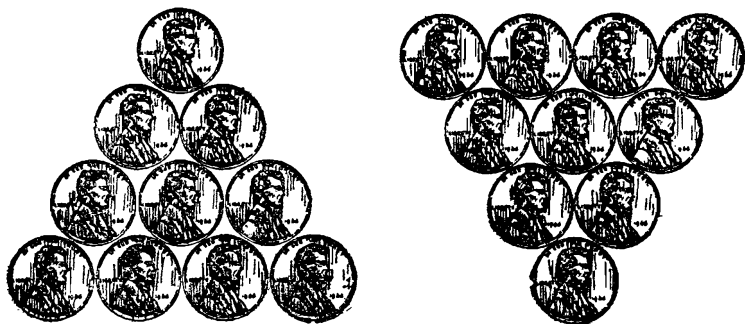


Рис. 71. Задача об опрокидывании треугольника.

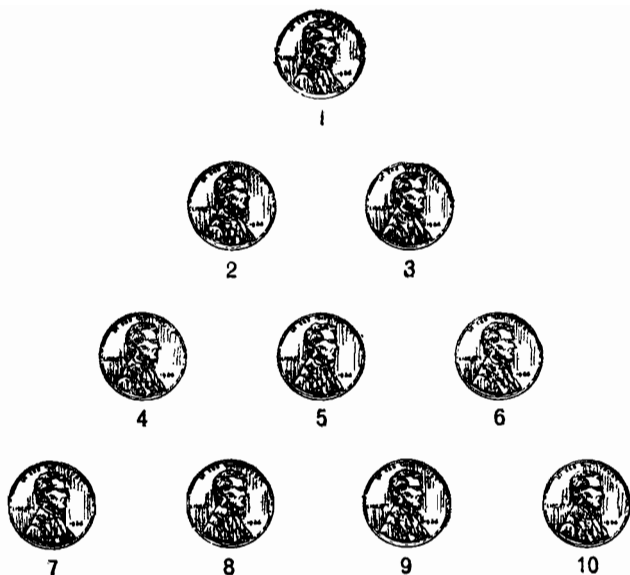


Рис. 72. Солитер на треугольной доске.

по числу монет в треугольнике определять число ходов, необходимых для его опрокидывания. Можете ли вы указать этот способ?

Пифагорейскую «тетрактис» нетрудно превратить в увлекательную игру — своеобразную разновидность солитера. В солитер обычно играют на крестовидной доске. Традиционной форме той игры посвящена обширная литература*. Насколько известно, игра в солитер на треугольных досках еще не привлекала к себе должного внимания. Пифагорейская «тетрактис» — с десятью лунками — служит простейшей из нетривиальных, начальных позиций на треугольной доске. Чтобы упростить запись партий, расположите «лунки» на листе бумаги (расстояния между «лунками» должны быть такими, чтобы на них можно было без помех класть монеты, служащие фишками) и перенумеруйте их (рис. 72).

Сняв одну монету с доски, образуйте пустую лунку. Игра продолжается до тех пор, пока на доске не оста-

* См., например, гл. 16 книги Гарднера «Математические досуги». — *Прим. перев.*

нется одна монета. Ход в солитере делается так же, как в шашках: монета «перепрыгивает» через соседнюю монету и занимает следующую за ней пустую лунку. Монету, через которую перепрыгнула другая монета, снимают с доски. «Прыгать» на треугольной доске можно в шести направлениях: в обе стороны вдоль прямой, параллельной основанию треугольника, и в две стороны вдоль прямых, параллельных его боковым сторонам. Так же как и в шашках, один ход может состоять из цепочки прыжков, следующих один за другим. Методом проб и ошибок можно убедиться в том, что основная задача игры в солитер на треугольной доске — свести число монет, оставшихся на доске, к одной — разрешима, но, разумеется, ни один истинный любитель занимательной математики не почувствует полного удовлетворения, пока не решит ту же задачу за минимальное число ходов. Вот, например, одна из партий в шесть ходов на треугольной доске с пустой лункой на месте монеты 2:

1. 7—2	4. 7—2
2. 9—7	5. 6—4, 4—1, 1—6
3. 1—4	6. 10—3

Однако существует лучшее решение, состоящее лишь из 5 ходов. Читатель, которому удастся найти это решение, может приступить к игре на треугольной доске больших размеров — с 15 лунками. Самые короткие из известных партий на такой доске насчитывают по 11 ходов. До сих пор не ясно, является ли это число минимальным.

А вот задача из совсем иной области занимательной нумизматики. Возьмем две одинаковые монеты и одну из них покатаем без скольжения по ободу другой. Сколько оборотов совершит монета, когда полностью обойдет вокруг неподвижной монеты?

На первый взгляд может показаться, что поскольку периметры монет равны, то подвижная монета, описав полный круг вокруг неподвижной, успеет повернуться один раз. Однако экспериментальная проверка показывает, что такой ответ неверен: в действительности подвижная монета, описав круг вокруг неподвижной, доворачивается на два полных оборота. «Лишний» оборот возникает вследствие того, что центр вращающейся монеты также описывает окружность. Предположим теперь, что мы катим монету (без скольжения) по периметру сло-

женного из монет треугольника (рис. 73). Началом обхода будет верхняя его вершина. Сколько оборотов совершит монета за один обход? Из рис. 73 нетрудно видеть, что сумма дуг, проходимых катящейся монетой, составляет $1\frac{2}{3}$ полной окружности, то есть 720° . Следовательно, за один обход треугольника катящаяся монета совершает по крайней мере два полных оборота. Не следует ли нам прибавить к окончательному ответу еще один оборот, учитывая, что центр монеты описывает при обходе треугольника замкнутую кривую? Нет, ибо экспериментальная проверка показывает, что при обходе треугольника монета успевает совершить не три, а четыре полных оборота! Дело в том, что, катясь по дуге неподвижной монеты в 1° , подвижная монета поворачивается на 2° . Поэтому, чтобы получить правильный ответ, пройденный монетой путь необходимо удвоить — получится четыре полных оборота. Имея это в виду, вы без труда решите другие задачи того же типа, часто встречающиеся в книгах по занимательной математике. Величину угла, на который поворачивается монета, проходя тот или иной путь, вы получите, вычислив угловую меру пути в градусах и умножив ее затем на 2.

Сами по себе эти факты тривиальны, но за ними кроется изящная теорема, которая, насколько мне известно, никем не была отмечена ранее. Вместо того чтобы укладывать монеты, по которым катится другая монета, плотнейшим образом, выстроим их в виде неправильной замкнутой цепочки (на рис. 74 показана такая цепочка неправильной формы из 9 монет). (Единственное условие, которое непременно должно выполняться, заключается в том, что монета, катясь без скольжения, должна коснуться каждой монеты в цепочке.) Как ни

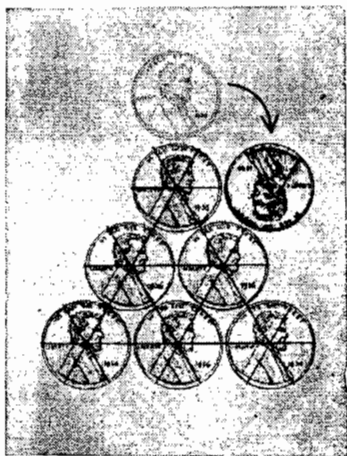
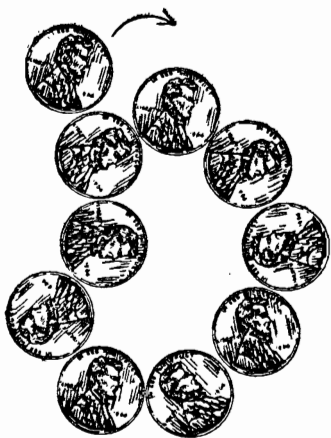


Рис. 73. Задача об обходе треугольника.

Сколько оборотов успевает совершить за один обход катящаяся монета?

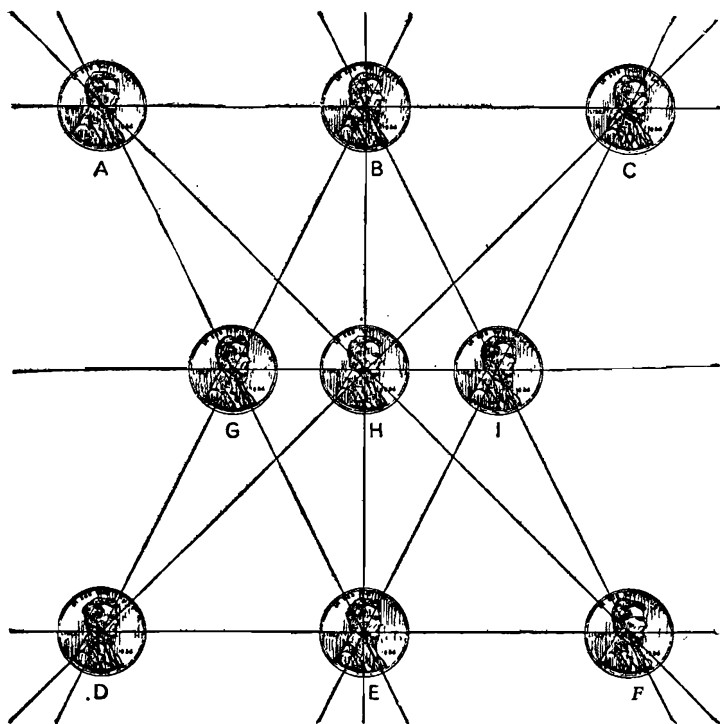


Р и с. 74. Теорема об инвариантности числа оборотов катящейся монеты относительно изменения формы цепочки монет.

странно, число оборотов, которые совершает катящаяся монета за один полный обход, не зависит от формы цепочки! Если цепочка состоит из 9 монет, монета совершает 5 полных оборотов. Если монета катится по цепочке из 9 монет не снаружи, а изнутри, то за один обход она совершит 1 оборот. Число оборотов, совершаемых при обходах цепочки изнутри, также не зависит от ее формы. Сможет ли читатель доказать, что для любой замкнутой цепочки из n монет ($n > 2$) число полных оборотов, совершаемых монетой, катящейся по цепочке снаружи, не зависит

от формы цепочки? (Для доказательства теоремы необходимы лишь самые элементарные сведения из геометрии.) Те, кто сумеет доказать это утверждение, сразу же увидят, как воспользоваться полученным доказательством для случая монеты, катящейся изнутри по цепочке из n монет ($n > 6$), и как вывести простую формулу, позволяющую получать полное число оборотов как функцию n для монеты, катящейся по цепочке изнутри и снаружи.

Монеты удобно использовать в качестве фишек при решении так называемых задач о «посадке деревьев». Вот одна из них. Фермер хочет посадить 9 деревьев так, чтобы они образовали 10 рядов по 3 дерева в каждом ряду. Читатель, знакомый с проективной геометрией, без труда сообразит, что решение этой задачи можно использовать в качестве чертежа (рис. 75) при доказательстве знаменитой теоремы Паппа; «Если три точки A, B, C лежат на одной прямой, а три точки D, E, F — на другой прямой (прямые не обязательно должны быть параллельны, как на рис. 75), то точки пересечения G, H, I противоположных сторон шестиугольника $AFBDCE$, вершины которого попеременно лежат то на прямой ABC ,



Р и с. 75. Задача о посадке деревьев и теорема Паппа.

то на прямой DEF , также лежат на одной прямой». Задача о посадке деревьев самым тесным образом связана с разделом проективной геометрии, который изучает отношение инцидентности (точка инцидентна любой проходящей через нее прямой, прямая инцидентна любой лежащей на ней точке). Чертеж, с помощью которого в курсах проективной геометрии обычно доказывают знаменитую теорему Дезарга, позволяет решить две задачи о посадке деревьев: как посадить 25 деревьев в 10 рядов по 6 деревьев в каждом ряду и как посадить 19 деревьев в 9 рядов по 5 деревьев в каждом ряду. Задача о деревьях уводит нас в «глубокие воды» комбинаторики. Общего метода, позволяющего решить любые задачи

подобного типа, пока не существует, и эта область занимательной математики изобилует нерешенными вопросами.

Но вернемся к монетам. Оказывается, что 10 монет можно расположить в 5 рядов по 4 монеты в каждом

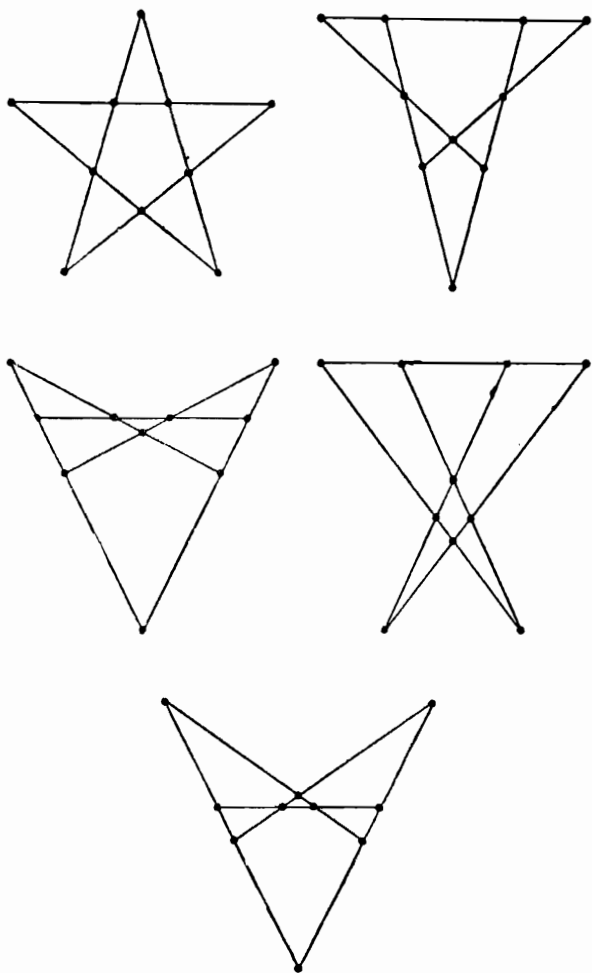


Рис. 76. Пять способов расстановки десяти монет в пять рядов по 4 монеты в каждом ряду.



Рис. 77. Задача-шутка о трех монетах.

ряду. («Рядом» мы будем называть прямую, проходящую через центры монет.) Пять вариантов решения этой задачи представлены на рис. 76. Каждый из них можно деформировать бесконечно многими способами, не изменяя его топологической структуры. На рис. 76 решения представлены в форме, приданной им знаменитым английским составителем головоломок Генри Э. Дьюдени. Все пять решений на рис. 76 обладают двусторонней симметрией. Существует еще одно, шестое, решение той же задачи, но оно совсем иного топологического типа, чем пять предыдущих. Сумеете ли вы самостоятельно найти это решение?

Задачи и головоломки с монетами открывают широкие возможности для различных розыгрышей, пари и т. п., поскольку во многих из них используются не только те или иные математические факты, но и всякого рода «ловушки».

Расположите, например, четыре монеты в вершинах квадрата и заключите с кем-нибудь пари, что вы, передвинув лишь одну монету, сумеете перестроить монеты в два ряда по три монеты в каждом. Подобное перестроение кажется невозможным, но решение задачи тривиально: достаточно взять любую монету и положить ее *на* монету, находящуюся на другом конце диагонали квадрата.

А вот еще две задачи-шутки.

Первая задача-шутка. Расположите три монеты так, как показано на рис. 77, и попросите кого-нибудь поместить монету *С* между монетами *А* и *В* так, чтобы все три монеты оказались расположенными вдоль одной прямой, не двигая при этом монету *В*, не касаясь монеты *А* руками, какой-либо иной частью тела или предметом и не дуя на *А* с тем, чтобы сдвинуть монету с места.

Вторая задача-шутка. Проведите на листке бумаги вертикальную линию. Можно ли расположить на листке три монеты таким образом, чтобы два герба находились справа от прямой, а две «решетки» — слева?

ОТВЕТЫ

1. Задача о «вздваивании» ряда из 8 монет — перестройка его в ряд из четырех столбиков по две монеты в каждом. Перенумеруем монеты по порядку от 1 до 8. Монету 4 положим на монету 7, 6 — на 2, 1 — на 3 и 5 — на 8. Если ряд состоит из 10 монет, то столбик из двух монет нужно «возвести» на одном из концов (например, поставить монету 7 на монету 10), после чего задача сведется к предыдущей. Ряд из $2n$ монет можно вздвоить за n ходов, выстраивая столбики из 2 монет с одного конца ряда до тех пор, пока и эта задача не сведется к задаче о «вздваивании» ряда из 8 монет.

2. Перестроить монеты из ромба в круг с соблюдением перечисленных в условии задачи правил можно следующим образом. Перенумеруем монеты так, как показано на рис. 78. Передвинем затем монету 6 так, чтобы она коснулась монет 4 и 5, монету 5 — так, чтобы она коснулась сверху монет 2 и 3 и, наконец, монету 3 — так, чтобы она коснулась монет 5 и 6.

3. Опрокинуть треугольник из 10 монет вы сможете в том случае, если передвинете три монеты так, как показано на рис. 79. Решение общей задачи об опрокидывании равностороннего треугольника произвольных размеров существенно упрощается, если заметить, что эта задача эквивалентна следующей. Начертим равносторонний треугольник, ограничивающий интересующий нас треугольник из монет (начерченный треугольник можно рассматривать как аналог рамки, с помощью которой перед началом партии в бильярд маркер выстраивает 15 шаров). Требуется, перевернув

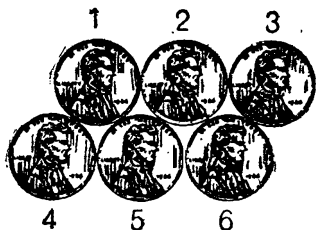


Рис. 78. Перестроение монет из ромба в круг.

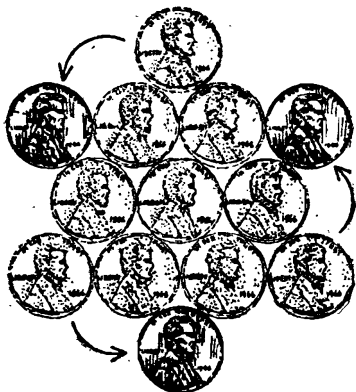


Рис. 79. Опрокидывание треугольника.

начерченный треугольник, наложить его на треугольник из монет так, чтобы как можно больше монет оказалось внутри начерченного треугольника. И в первом, и во втором случае число монет, которые необходимо передвинуть для того, чтобы исходный треугольник из монет опрокинулся, равно частному от деления числа монет на 3 (остаток от деления отбрасывается).

4. При игре в солитер на треугольной доске с 10 лунками партию в 5 ходов можно провести, например, оставив в исходной позиции пустой лунку 3, а затем сделав ходы 10—3, 1—6, 8—10—3, 4—6—1—4, 7—2.

Самая короткая партия при игре в треугольный солитер состоит, по-видимому, из 9 ходов. Во всех известных вариантах 9-ходовой партии пустая лунка в начале игры находится в центре треугольника. Вполне возможно, что минимальных решений с иным расположением начальной лунки не существует. В большинстве известных решений единственная монета, остающаяся на доске в конце игры, оказывается на той лунке, которая в начале игры была пустой. Мы приведем лишь одно решение. Оно отличается тем, что после 6-го хода монеты выстраиваются в виде изящного ромба. Итак, вот одна из партий в 9 ходов:

1. 11—4	6. 12—14
2. 2—7	7. 10—8
3. 13—4	8. 3—10
4. 7—2	9. 1—4, 4—13, 13—15, 15—6, 6—4
5. 15—13	

Приведем также лучшее из известных решений для треугольного солитера с 21 лункой:

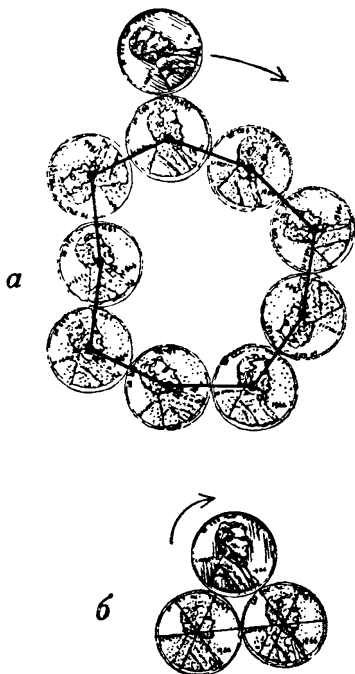
1. 1—4	6. 18—16, 16—7, 7—18, 18—9
2. 7—2	7. 15—6, 6—13
3. 16—7	8. 20—18, 18—9, 9—20
4. 6—1, 1—4, 4—11	9. 21—19
5. 13—6, 6—4, 4—13	

5. Докажем теорему о независимости числа оборотов, совершаемых монетой, которая катится снаружи по цепочке монет от формы цепочки. На рис. 80, а изображена цепочка из 9 монет.

Соединив центры монет отрезками прямых, получим n -угольник. Сумма дуг (измеряемых в угловых градусах) внешних ободков монет, оказавшихся вне n -угольника, равна сумме углов, дополняющих внутренние углы многоугольника до полного угла (в 360°). Последняя же сумма для n -угольника всегда равна $(\frac{1}{3}n + 1) \cdot 360^\circ$.

Катясь по цепочке, монета пропускает дуги в $\frac{1}{6}$ полного угла на ободе каждой монеты всякий раз, когда касается двух монет одновременно (рис. 80, б), таким образом «пропускает» на каждой паре монет угол в $\frac{1}{3}$ полного угла. Обходя всю цепочку из n монет, катящаяся монета пропускает дугу в $\frac{n}{3}$ полных углов. Следовательно, сумма дуг, проходящих ею при одном обходе цепочки, составляет $(\frac{1}{2}n + 1) - \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}n + 1$ полных углов. Поскольку, проходя дугу в 1° , катящаяся монета поворачивается вокруг своего центра на угол в 2° , угол, на который она успевает повернуться за

Рис. 80. К доказательству теоремы об инвариантности числа оборотов катящейся монеты относительно изменения формы цепочки монет.



один обход цепочки, равен $(\frac{1}{3}n + 2) \cdot 360^\circ$. При фиксированном n эта величина остается постоянной независимо от формы цепочки (какую бы форму ни принимала цепочка, формула останется верной, потому что центры монет при любой конфигурации цепочки всегда располагаются в вершинах некоторого n -угольника, а выведенная формула верна для любого n -угольника, независимо от того, является ли он выпуклым или нет). Выведенная формула применима и к вырожденной цепочке, состоящей из двух монет, центры которых можно рассматривать как вершины вырожденного «двуугольника».

Как показывают аналогичные рассуждения, монета, катящаяся по цепочке монет изнутри, успевает за один обход совершить $\frac{1}{3}n - 2$ оборотов вокруг собственного центра (при этом цепочка должна состоять не менее чем из 6 монет). Для цепочки, состоящей ровно из 6 монет, формула предсказывает 0 оборотов: в этом

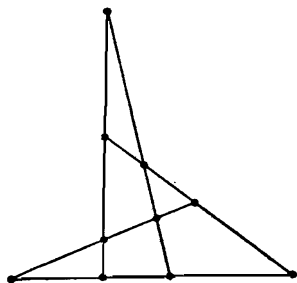


Рис. 81. Шестое решение задачи о посадке десяти деревьев в пять рядов по четыре дерева в каждом ряду.

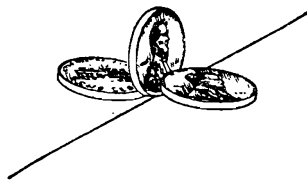


Рис. 82. Решение второй задачи-шутки.

случае монета просто заполняет внутреннюю «пустоту», касаясь всех шести монет, образующих цепочку, одновременно. При обходе «разорванной» цепочки из n монет катящаяся монета совершает $\frac{1}{3}(2n + 4)$ оборотов вокруг собственного центра.

6. Способ расстановки 10 монет в 5 рядов по 4 монеты в каждом ряду показан на рис. 81.

7. Первая задача-шутка решается так. Чтобы поместить монету C между двумя касающимися друг друга монетами A и B , не прикасаясь к A и не двигая B , прижмите кончиком пальца монету B , а монету C щелчком направьте к B . В тот момент, когда C вплотную приблизится к B , но еще не успеет коснуться ее, отпустите монету B . Сила удара заставит A отлететь в сторону от B , и на освободившееся место вы сможете поместить монету C .

8. Решить вторую задачу-шутку вы сможете, расположив монеты так, как показано на рис. 82.

ГЛАВА 10

ИЕРАРХИЯ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ

В 1963 г. Пол Дж. Козн, 29-летний математик из Станфордского университета, нашел поистине удивительный ответ на одну из великих проблем современной теории множеств: существует ли бесконечное множество, мощность которого больше мощности множества натуральных чисел, но меньше мощности множества точек на прямой? Чтобы смысл результата, полученного Козном, был ясен, необходимо сообщить кое-какие сведения о самых «бедных» из известных бесконечных множеств — множества натуральных чисел и множестве точек на прямой.

Георг Кантор первым открыл, что существуют не только бесконечные множества, содержащие «больше» элементов, чем множество натуральных чисел (мощность которого — «количество элементов» Кантор назвал «алеф-нуль» — $\aleph_0$), но и бесконечное множество «типов» таких множеств, отличающихся друг от друга мощностью. Ведущие математики реагировали на открытие Кантора неодинаково. Анри Пуанкаре назвал канторовскую иерархию бесконечных множеств «болезнью, от которой математика должна излечиться», а Герман

Вейль отозвался о последовательности «алефов», как о «тумане на тумане».

В то же время Давид Гильберт заявил: «Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного Кантором», а Бертран Рассел назвал теорию Кантора «величайшим достижением, которым, по-видимому, может похвастать наш век».

В настоящее время иерархия алефов вызывает беспокойство лишь у математиков-интуиционистов и некоторых философов. Большинство же математиков давно утратили страх перед ними, и доказательства, с помощью которых Кантор установил свои «ужасные династии» (выражение аргентинского писателя Жоржи Луиса Боргеса), ныне пользуются всеобщим признанием и справедливо считаются одними из наиболее блестящих и красивых в истории математики.

Любое бесконечное множество, элементы которого можно перенумеровать натуральными числами 1, 2, 3, ..., имеет кардинальное число $\aleph_0$ (алеф-нуль). В канторовской лестнице алефов это бесконечное множество самого низкого ранга. Разумеется, пересчитать по одному все элементы такого множества (оно называется счетным) в действительности было бы невозможно. Мы можем лишь показать, каким образом элементы счетного множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие с «номераами» — элементами множества натуральных чисел 1, 2, 3, ... Рассмотрим, например, множество простых чисел. Оно бесконечно. Его элементы нетрудно поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами:

1	2	3	4	5	6	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
2	3	5	7	11	13	...

Следовательно, множество простых чисел счетно (имеет кардинальное число алеф-нуль).

Уже при рассмотрении счетных множеств мы сталкиваемся с основным парадоксом всех бесконечных множеств — утверждением о том, что «часть меньше целого», для них неверно. Бесконечные множества в отличие от конечных можно поставить во взаимно однозначное соответствие с их частью, или, если воспользоваться

точной математической терминологией, с одним из их «собственных подмножеств» *. Так, множество простых чисел, хотя они и составляют лишь незначительную часть всех натуральных чисел, обладает тем же кардинальным числом. Точно так же целые числа составляют лишь малую часть рациональных чисел (к которым относятся все целые числа и дроби, числитель и знаменатель которых выражаются целыми числами), но и более «богатое» множество рациональных чисел обладает кардинальным числом алеф-нуль.

Существуют разнообразнейшие доказательства того, что множество рациональных чисел счетно. Все они основаны на том, что рациональные числа тем или иным образом упорядочивают («выстраивают») и ставят во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел. Самый известный способ упорядочения рациональных чисел заключается в том, что их записывают в виде дробей, «развешивают» по узлам бесконечной квадратной решетки и затем «считают» узлы, обходя их зигзагообразно или по спирали, если решетка содержит не только положительные, но и отрицательные рациональные числа. Другой, несколько неожиданный метод упорядочения и счета положительных рациональных чисел был предложен американским логиком Чарлзом С. Пирсом.

Возьмем две дроби — $0/1$ и $1/0$ (вторая дробь не имеет смысла, но для наших целей это обстоятельство несущественно). Образует новую дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей двух исходных дробей, и поместим ее между ними: $0/1$, $1/1$, $1/0$. Пролодав только что выполненные операции над каждой парой дробей, стоящих рядом, получим

$$\frac{0}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{2}{1} \frac{1}{0}.$$

В свою очередь эти пять дробей превращаются в девять дробей

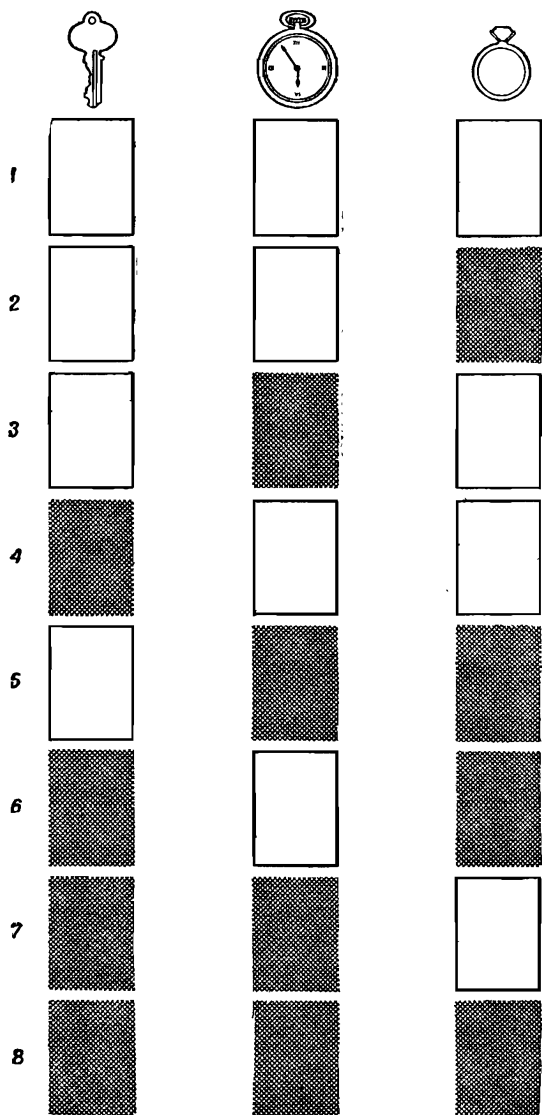
$$\frac{0}{1} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{1} \frac{3}{2} \frac{2}{1} \frac{3}{1} \frac{1}{0}$$

и т. д.

* Собственными подмножествами данного множества называются подмножества, отличные от всего множества и пустого множества, не содержащего ни одного элемента. — *Прим. перев.*

В получающейся бесконечной последовательности каждое рациональное число будет встречаться один и только один раз, причем в несократимом виде. Метод Пирса делает излишним вычеркивание таких дробей, как, например, $10/20$, эквивалентных более простым дробям, также представляющим рациональные числа. При использовании метода Пирса сократимые дроби не появляются. При использовании же других методов упорядочения рациональных чисел исключение дробей, числитель и знаменатель которых содержат общие множители, просто необходимо, иначе одно и то же рациональное число будет сосчитано несколько раз. В методе Пирса происходит постепенное, шаг за шагом, «замазывание щелей» в ряду рациональных чисел, а дроби можно нумеровать в порядке их появления. Пирс обратил внимание на многочисленные любопытные свойства возникающего числового ряда. На каждом шаге цифры, стоящие в числителях, если их брать по порядку слева направо, начинаются с группы цифр, стоявшей в числителях дробей на предыдущем шаге: 01, 011, 0112 и т. д. На каждом шаге цифры, стоящие в знаменателе, совпадают с цифрами, стоящими в числителе, но взятыми в обратном порядке — справа налево. Члены этого ряда тесно связаны с числами Фари (названными так в честь английского геолога Джона Фари, впервые исследовавшего их), которым в настоящее время посвящена обширная литература.

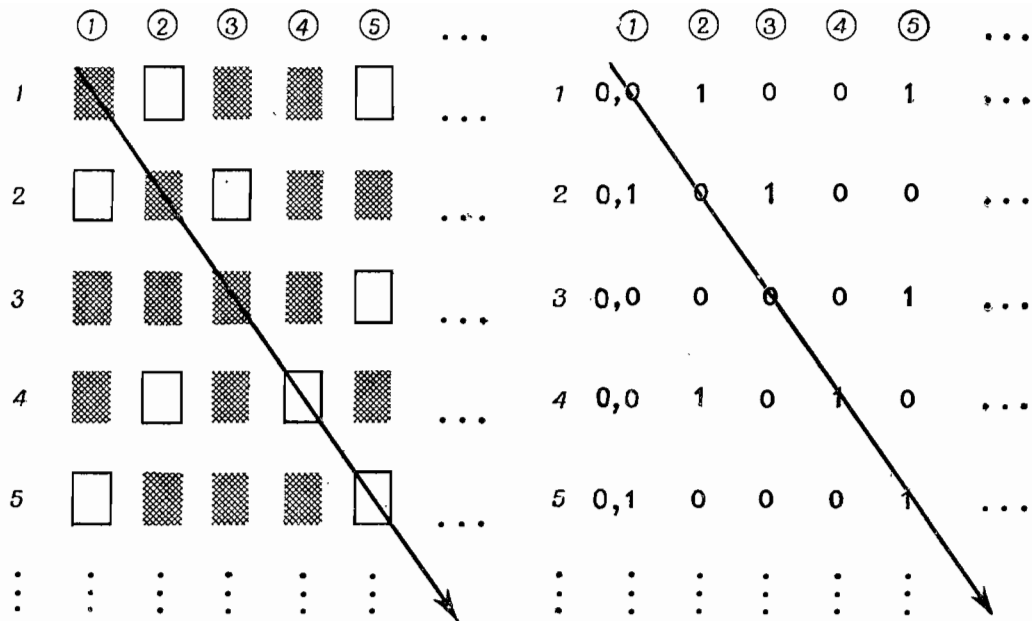
Нетрудно доказать, что существуют бесконечные множества, более «богатые» элементами, чем счетные множества. Чтобы пояснить основную идею одного из лучших доказательств этого факта, воспользуемся колодой карт. Для простоты начнем с множества, состоящего из трех элементов: ключа, часов и колечка. Каждое подмножество этого множества условно обозначим тремя картами, выложенными в ряд (рис. 83). Светлый прямоугольник (карта, обращенная вниз рубашкой) означает, что предмет, изображенный над столбцом, принадлежит подмножеству, темный прямоугольник (карта, обращенная вверх рубашкой), — что предмет отсутствует. Первое подмножество — это само множество из трех элементов. Затем идут три подмножества, каждое из которых содержит лишь по два элемента. После них следуют три подмножества, содержащих по одному



Р и с. 83. Подмножества множества из трех элементов.

элементу, и, наконец, пустое подмножество, не содержащее ни одного элемента. Число подмножеств конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n . Заметим, что эта формула применима и к пустому множеству, поскольку $2^0 = 1$, а пустое множество содержит единственное подмножество — пустое множество.

Применим тот же метод к бесконечному, но счетному множеству (рис. 84, слева). Можно ли подмножества этого множества поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами («перенумеровать»)? Предположим, что можно. Каждое подмножество, как и в примере с множеством из трех элементов, будем обозначать картами, выложенными в ряд (на этот раз бесконечный). Представим себе, что мы каким-то образом упорядочили ряды карт и перенумеровали их по порядку сверху вниз. Можно ли быть уверенными в том, что, продолжая неограниченно долго выкладывать бесконечные ряды карт, мы рано или поздно включим в наш список подмножеств любое подмножество рассматриваемого счетного множества? Оказывается, нет: подмножество, которое ни разу не встретится среди занесенных в наш список, можно составить не одним, а бесконечно многими способами. Проще всего убедиться в этом, если рассмотреть карты, стоящие на диагонали (на рис. 84 она указана стрелкой), и представить, что все эти карты перевернуты (то есть карта, лежавшая рубашкой вниз, заменена картой, лежащей рубашкой вверх, и наоборот). «Диагональное» подмножество (перевернутых) карт не может совпадать с первым подмножеством нашего списка, поскольку его первая карта обращена вверх не той стороной, которой обращена первая карта первого подмножества. Не может оно совпадать и со вторым подмножеством, поскольку его вторая карта обращена вверх не той стороной, которой обращена вторая карта второго подмножества. Вообще, «диагональное» подмножество не может совпадать с n -м подмножеством из составленного нами списка, поскольку его n -я карта — это n -я карта n -го подмножества, но только перевернутая. Таким образом, мы построили подмножество, которое никогда не войдет в список подмножеств, сколько бы мы его ни продолжали. Следовательно, наше исходное предположение (о том, что, продолжая список подмножеств неограниченно долго, мы рано



Р и с. 84. Диагональный метод Кантора.

Счетное множество содержит несчетное множество подмножеств (слева), соответствующих вещественным числам (справа).

или поздно включим в него любое подмножество) ложно. Множество всех подмножеств счетного множества обладает мощностью, большей, чем мощность счетного множества: его кардинальное число равно $2^{\aleph_0}$ (2 в степени алеф-нуль). Из проведенного нами доказательства видно, что элементы множества всех подмножеств счетного множества нельзя перенумеровать натуральными числами, оно обладает более высоким кардинальным числом и служит примером несчетного бесконечного множества.

Знаменитый «диагональный» метод Кантора в том его виде, каким мы только что воспользовались, таит в себе приятный сюрприз. Сами того не зная, мы доказали, что множество вещественных (рациональных и иррациональных) чисел несчетно. Рассмотрим отрезок числовой оси от 0 до 1 . Каждой рациональной дроби, заключенной между 0 и 1 , соответствует некоторая точка нашего отрезка. Между двумя любыми рациональными точками существует бесконечно много других рациональных точек. Тем не менее даже после того, как мы выколем все рациональные точки, останется бесконечно много невыколотых точек, соответствующих бесконечным непериодическим десятичным дробям, представляющим такие алгебраические иррациональные числа, как, например, $\sqrt{2}$, и такие трансцендентные иррациональные числа, как π и e .

Каждой точке на отрезке рациональной или иррациональной прямой можно сопоставить бесконечную десятичную дробь. Использовать десятичную систему счисления совсем не обязательно — двоичная система была бы ничуть не хуже. В двоичной системе каждой точке отрезка можно сопоставить бесконечный набор нулей и единиц и, наоборот, любой бесконечной последовательности нулей и единиц соответствует ровно одна точка отрезка.

Условимся теперь, что каждую карту, лежащую рубашкой вниз, мы будем обозначать единицей, а каждую карту, лежащую рубашкой вверх, — нулем. Тогда, поставив перед каждой последовательностью нулей и «двоичную» запятую, мы получим бесконечный список различных двоичных дробей, заключенных между 0 и 1 (рис. 84, справа). «Диагональная» дробь, в которой

каждая единица заменена нулем, а каждый ноль — единицей, в списке не встретится. Итак, мы видим, что взаимно однозначное соответствие существует между тремя множествами: множеством всех подмножеств счетного множества, множеством вещественных чисел (записанных в виде двоичных дробей) и совокупностью точек на отрезке прямой. Этот тип бесконечных множеств Кантор наделил кардинальным числом C («мощность континуума»). Кантор считал, что $C = \aleph_1$ (алеф-один). Иначе говоря, Кантор считал, что множество точек отрезка прямой (или любого эквивалентного ему множества) — бесконечное множество, ближайшее по мощности к счетному множеству.

Кантор привел простые и изящные доказательства того, что мощностью континуума C обладают такие бесконечные множества, как множество трансцендентных иррациональных чисел (счетность множества алгебраических иррациональных чисел также была доказана Кантором), множество точек на бесконечной прямой, множество точек, принадлежащих любой плоской фигуре или всей плоскости, а также множество точек любого трехмерного тела и всего трехмерного пространства. Переход к пространствам более высокого числа измерений не увеличивает мощности множеств. Точки на отрезке длиной в 1 см можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками, принадлежащими телу в пространстве сколь угодно высокой размерности.

Различие между счетным множеством и множеством мощности континуума играет важную роль в геометрических задачах, связанных с пересчетом бесконечных множеств различных фигур. Рассмотрим, например, плоскость, выложенную правильными шестиугольниками. Чему равна мощность множества вершин шестиугольников — $\aleph_0$ или C ? Оказывается, $\aleph_0$: вершины шестиугольников легко пересчитать, обходя их по спирали (рис. 85). В то же время множество различных окружностей радиусом в 1 см, которые можно разместить на стандартном листе писчей бумаги, имеет мощность континуума потому, что мощностью континуума обладает множество точек, заполняющих любой квадрат в центре листа (отстоящий от краев листа более чем на 1 см), а каждую точку можно рассматривать как центр окружности радиусом в 1 см.

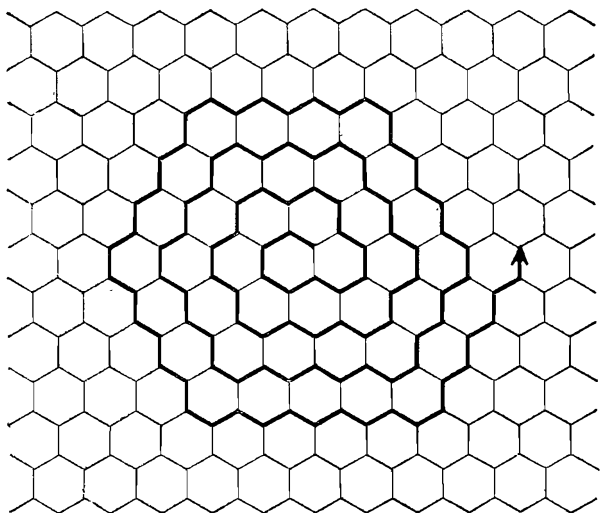


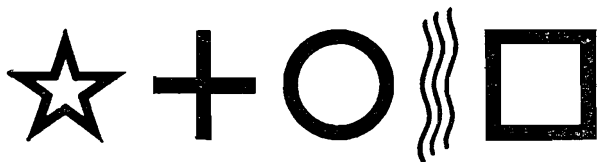
Рис. 85. Пересчет всех вершин шестиугольного паркета при обходе их по спирали.

Рассмотрим теперь пять символов (рис. 86), которые Дж. Б. Райн использует в своих экспериментах по изучению экстрасенсорного восприятия (ЭСВ). Какие из этих символов можно начертить на бумаге бесконечно много раз так, чтобы их множество имело мощность континуума? Предполагается, что образуют символы идеальные линии, не имеющие толщины, и что отдельные символы нигде не перекрываются и не пересекаются. (Изображения символов могут и не совпадать по размерам, но они непременно должны быть одинаковыми по форме.) Оказывается, что все символы, кроме одного, могут образовывать множества мощности континуума. Можете ли вы самостоятельно, не заглядывая в ответ, определить, какой из пяти символов Райна является исключением?

Не так давно множества мощности $\aleph_0$ и $\mathcal{C}$ заинтересовали специалистов по космологии. Физик из Мичиганского университета Ричард Шлегель обратил внимание на странное противоречие, возникающее в теории «стационарного состояния» Вселенной. Согласно этой теории, во всей Вселенной в настоящее время имеется лишь счет-

ное множество атомов. (Вселенная считается бесконечной, хотя «оптический горизонт» ограничивает пределы видимости.) По мере расширения Вселенной число атомов в ней увеличивается. Бесконечное пространство легко «выдерживает» любое конечное число удвоений исходного множества атомов, поскольку множество, содержащее вдвое больше элементов, чем счетное множество, само счетно. (Представьте себе, что у вас имеется счетное множество яиц, разложенных в счетное множество коробок по одному яйцу в коробке. Переложив яйцо из коробки 1 в коробку 2, яйцо из коробки 2 в коробку 4 и, вообще, яйцо из коробки n в коробку $2n$, вы сможете освободить коробки для еще одного счетного множества яиц: оно разместится в коробках с нечетными номерами.) Но если исходное множество атомов удваивать счетное число раз, то получится множество мощности $2^{\aleph_0}$, то есть $2 \times 2 \times 2 \times \dots$ и т. д. $\aleph_0$ раз. Мы уже знаем, что это не что иное, как мощность континуума. Предположим, бесконечно давно во всей Вселенной имелось лишь два атома. Сейчас, после счетного числа удвоений, они «размножились» и превратились в множество атомов мощности континуума. Но Вселенная, в какой бы момент мы ее ни взяли, не может содержать множество атомов мощности континуума: любой набор различных физических величин («сущностей») в отличие от идеальных математических величин не более чем счетен.

В своей статье «Проблема бесконечной материи в стационарной космологии» * Шлегель указал остроумный выход из создавшегося затруднения. Вместо того чтобы рассматривать прошлое как уже готовое, завершенное счетное множество конечных интервалов времени



Р и с. 86. Пять символов, используемых Райном в экспериментах по ЭСВ.

* *Philosophy of Science*, 32, January 1965, pp. 21—31.

(разумеется, совокупность отдельных моментов времени образует континуум, но Шлегель имеет в виду лишь те конечные интервалы времени, на протяжении которых происходит удвоение множества атомов во Вселенной), Шлегель предложил принять прошлое и будущее как бесконечное множество отрезков времени в процессе его «становления»*: на какую бы дату ни назначили начало мира, всегда можно указать еще более раннюю дату, когда Вселенная уже существовала (напомним, что речь идет о стационарной модели, а не о теории «сильного взрыва» или Вселенной, испытывающей попеременно то стадии сжатия, то стадии расширения). В некотором смысле «начало» мира существует, но мы можем отодвигать его сколь угодно далеко назад, в прошлое. Существует и «конец» мира, но его мы можем отодвигать сколь угодно далеко в будущее. Возвращаясь назад по времени и уменьшая каждый раз множество атомов во Вселенной вдвое, мы успеваем совершить лишь конечное число «ополовиниваний», поэтому число атомов во Вселенной, убывая, тем не менее не перестает быть счетным. Продвигаясь вперед по времени, мы также успеваем совершить лишь конечное число удваиваний множества атомов во Вселенной, поэтому оно и в будущем всегда остается не более чем счетным. В каком направлении мы бы ни двигались по времени — в прошлое или в будущее, множество интервалов времени, на протяжении которых множество атомов во Вселенной удваивается или делится пополам, никогда не переходит в континуум. Соответственно множество атомов во Вселенной также остается лишь счетным и никакого противоречия не возникает.

Кантор был убежден, что в построенной им бесконечной иерархии алефов, каждый из которых получается при возведении 2 в степень, равную предыдущему алефу, представлены все алефы, какие только могут быть. Алефов, которые занимали бы промежуточное положение между «ступеньками» иерархии бесконечностей, по Кантору, просто не существует, как не существует и последнего, «высшего», алефа.

* Бесконечность в «готовом виде», как нечто законченное, в математике принято называть актуальной бесконечностью в отличие от потенциальной бесконечности — возможности неограниченно добавлять к множеству все новые и новые элементы. — *Прим. перев.*

До конца жизни Кантор безуспешно пытался доказать свою знаменитую «континуум-гипотезу»: $\aleph_1 = C$ (иначе говоря, не существует бесконечного множества, мощность которого была бы больше мощности счетного множества, но меньше мощности континуума). В 1938 г. Курт Гёдель доказал, что предположение об истинности континуум-гипотезы не противоречит аксиомам теории множеств.

Результат, полученный Коэном в 1963 г., заключался в доказательстве противоположного утверждения: предположение о том, что $\aleph_1 \neq C$ (иначе говоря, между $\aleph_0$ и C существует по крайней мере один алеф, хотя мы и не имеем ни малейшего понятия о том, как построить бесконечное множество с таким кардинальным числом), также не противоречит аксиомам теории множеств. Гипотеза Кантора неразрешима. Подобно постулату о параллельных в евклидовой геометрии, она представляет

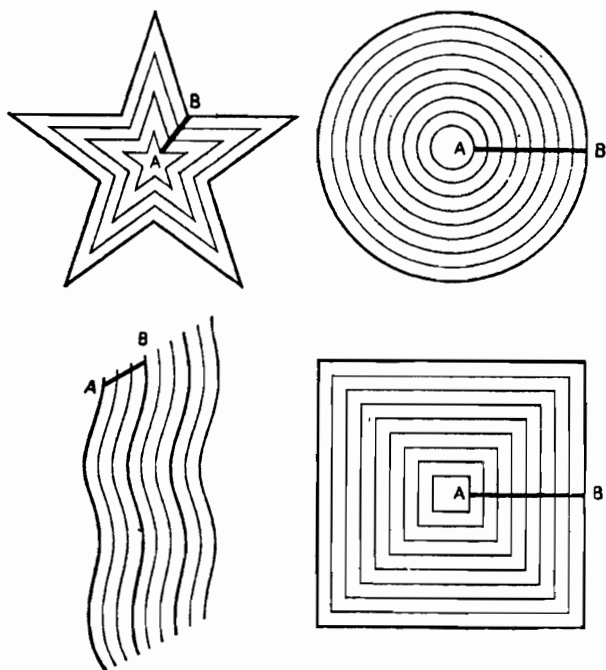


Рис. 87. Решение задачи о символах Райна.

собой независимую аксиому: систему аксиом теории множеств можно пополнить не только континуум-гипотезой, но и ее отрицанием. Так же как принятие и непринятие аксиомы о параллельных Евклида разделили геометрию на евклидову и неевклидову, так и предположения об истинности или ложности континуум-гипотезы делят теорию бесконечных множеств на канторовскую и неканторовскую.

Теории множеств нанесен сокрушительный удар. К каким результатам приведет потрясение ее основ, пока сказать трудно.

ОТВЕТЫ

Единственным из пяти символов Райна, который всегда образует лишь счетные множества, является знак плюс. Из остальных четырех символов нетрудно построить множества мощности континуума. Точки на отрезке прямой AB образуют континуум. На рис. 87 изображены вложенные друг в друга копии каждого из четырех символов, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка AB . Расположить аналогичным образом изображения знака плюс нельзя: они не примыкают вплотную друг к другу, и расстояние между центрами двух плюсов конечно (хотя его и можно сделать сколь угодно малым). Таким образом, плюсы всегда образуют не более чем счетное множество точек*.

ГЛАВА 11

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИСКУССТВО МОРИЦА ЭШЕРА

Среди современных художников в жанре «математического искусства» наиболее успешно выступает голландский художник Мориц Эшер.

«Я часто ощущаю бóльшую близость к математикам, чем к коллегам-художникам», — писал сам Эшер. Ему

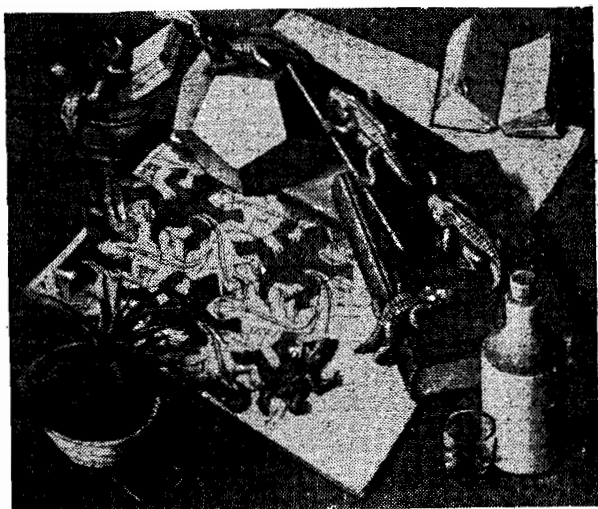
* Много интересных сведений о теории множеств можно почерпнуть в книжке Н. Я. Виленкина «Рассказы о множествах» (М., изд-во «Наука», 1965).

же приписывают слова: «Все мои произведения — это игры. Серьезные игры». Его литографии, гравюры на дереве, меццо-тинто можно увидеть в кабинетах математиков и других ученых во всех уголках мира. Некоторые из его работ носят жутковатый, сюрреалистический оттенок, но произведения Эшера — это не фантазмагии Сальвадора Дали или Рене Магритта, а тонкие философские и математические наблюдения. Но, прежде чем рассказать о некоторых удивительных произведениях Эшера, приведем кое-какие сведения о самом художнике.

Мориц Эшер родился в 1898 г. в Голландии. В юности учился в Школе архитектуры и орнамента в Гарлеме. В течение 10 лет жил в Риме. Покинув Италию в 1934 г., Эшер провел 2 года в Швейцарии, 5 лет — в Брюсселе и затем поселился в голландском городе Барне, где жил до конца жизни. Обширную коллекцию работ Эшера собрал внук президента Теодора Рузвельта инженер Корнелиус Ван Шаак Рузвельт.

Среди кристаллографов наибольшей известностью пользуются хитроумные орнаменты Эшера, заполняющие всю плоскость. Орнаменты на стенах Альгамбры свидетельствуют о том, сколь искусны были испанские мавры в изобретении узоров, состоящих из периодических повторений конгруэнтных фигур. Но мусульманская религия запрещала мавританским мастерам использовать в орнаментах изображения живых существ. Разбивая плоскость на хитроумные комбинации контуров птиц, рыб, пресмыкающихся, млекопитающих и человеческих фигур, Эшер умело включает свои орнаменты в необычайные, подчас озадачивающие неожиданными решениями композиции.

На литографии «Рептилии» (рис. 88) маленькое чудовище выползает из шестиугольной мозаики, чтобы начать краткий цикл трехмерного бытия. Достигнув высшей точки, — взобравшись на додекаэдр, рептилия вновь возвращается в безжизненную плоскость. На гравюре «День и ночь» (рис. 89) правая и левая части композиции не только зеркально симметричны, но и как бы служат своеобразными «негативами» одна другой. По мере того как наш взгляд перемещается снизу вверх, квадраты полей превращаются в белых птиц, летящих в ночи, и в черных птиц, летящих на фоне светлого дневного неба. На круглой гравюре «Рай и ад» (рис. 90) фигуры



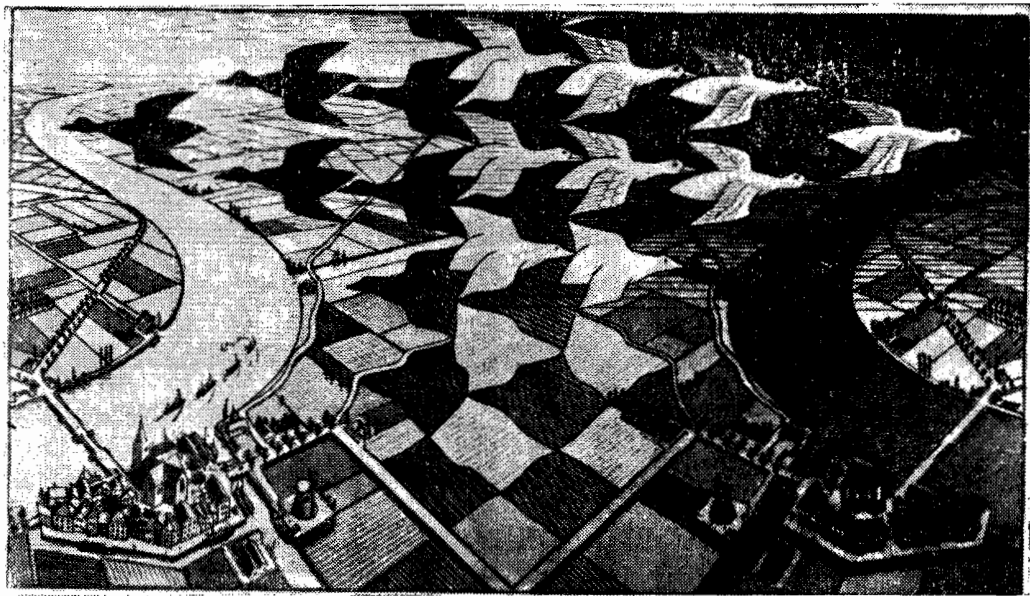
Р и с. 88. М. Эшер. «Рептилии» (литография, 1943 г.).

ангелов и дьяволов, вплотную примыкая друг к другу, заполняют плоскость. При движении от центра гравюры к ее краю фигуры уменьшаются, превращаясь в бесконечное множество фигурок, невидимых невооруженным глазом на самом краю. Этот замечательный орнамент основан на вполне математической идее — известной евклидовой модели неевклидовой гиперболической плоскости, придуманной Анри Пуанкаре. Читатель сможет найти интересующие его подробности модели Пуанкаре в книге Г. С. М. Кокстера *.

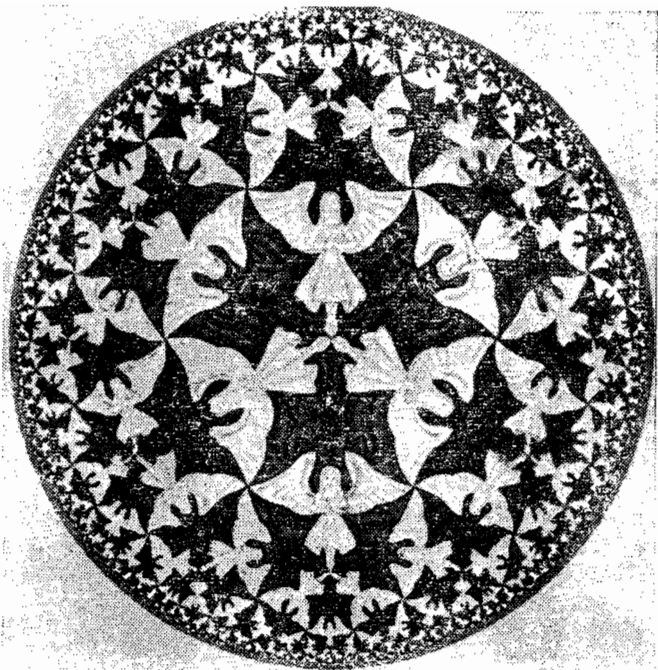
Если вам покажется, будто создание таких орнаментов — дело нетрудное, мы рекомендуем попробовать свои силы и придумать хотя бы одну композицию!

«Иногда, когда я рисую, мне кажется, будто я медиум, находящийся во власти существ, порожденных моим же воображением, — сказал как-то раз Эшер. — Они словно сами избирают, в каком виде им появиться... Линия, разделяющая две смежные фигуры, выполняет

* Г. С. М. Кокстер, Введение в геометрию, М., изд-во «Наука», 1966, гл. 16.



Р и с. 89. М. Эшер. «День и ночь» (гравюра на дереве, 1938 г.).



Р и с. 90. М. Эшер. «Рай и ад» (гравюра на дереве, 1960 г.).

двоякую функцию, и провести такую линию чрезвычайно сложно. По обе стороны от нее обретает зримую форму то, что ранее существовало лишь в воображении. Но ни человеческий глаз, ни человеческий разум не могут одновременно созерцать две вещи, поэтому происходит быстрое и непрерывное переключение внимания с того, что находится по одну сторону линии, на то, что находится по другую сторону от нее. Но, вероятно, именно в этой трудности и кроется движущая пружина моего упорства».

О том, сколь многими способами фантастические орнаменты Эшера иллюстрируют различные аспекты симметрии, теории групп и кристаллографических законов, можно было бы написать целую книгу. Такая книга действительно была написана Каролиной Макгиллэври из

Амстердамского университета. Называлась она «Симметричные аспекты периодических рисунков М. К. Эшера» * и была издана Международным союзом кристаллографов. В ней собраны репродукции 41 орнамента Эшера (многие из них — цветные).

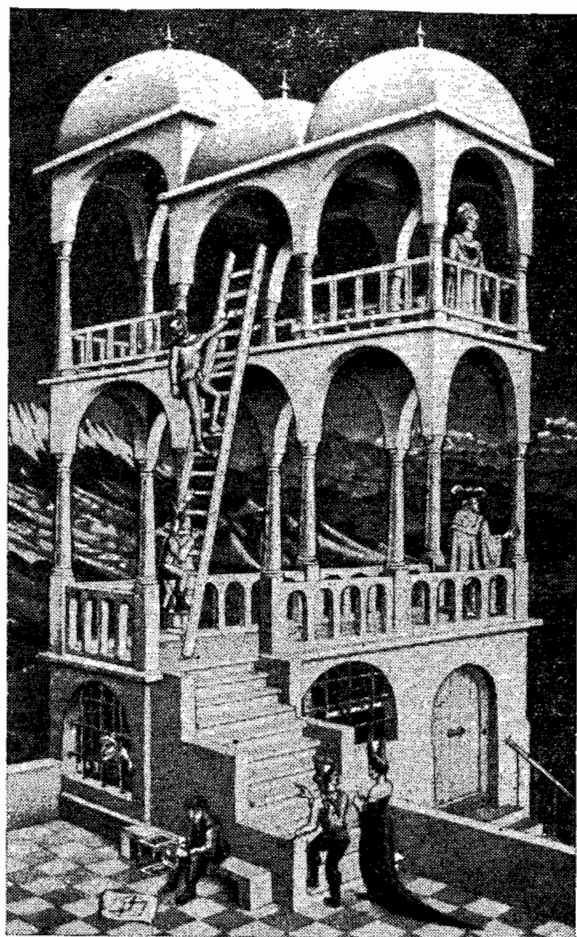
Работами совсем иной категории являются игры с законами перспективы, создание «невозможных» конфигураций. Примерами их могут служить литографии Эшера, воспроизведенные на рис. 91 и 92. Обратите внимание на схематическое изображение куба на литографии «Бельведер» (на листе бумаги, лежащем на выложенном квадратными плитами полу). Точки, в которых скрещиваются ребра куба, отмечены кружками. На остоле куба в руках у сидящего мальчика ребра скрещиваются самым невероятным (и не реализуемым в трехмерном пространстве) образом. Множество «невозможных» деталей имеется и в самом бельведере. Юноша, взобравшийся на самый верх приставной лестницы, висит снаружи бельведера, хотя основание лестницы находится внутри его. Человек в темнице, вероятно, сошел с ума, пытаясь разобраться в противоречиях причудливого мира, в котором он оказался по воле художника.

В литографии «Восхождение и спуск» (рис. 92) использована одна из удивительных («невозможных») фигур, впервые обнаруженных английским генетиком Л. С. Пенроузом и его сыном математиком Р. Пенроузом **. Монахи неизвестного ордена совершают ежедневный ритуал — нескончаемую прогулку по круговой галерее на крыше своего монастыря. При этом те, кто идет по «невозможной» лестнице во внешнем ряду, все время взбираются вверх, а те, кто шествует во внутреннем ряду, столь же неуклонно спускаются вниз.

«И то, и другое, хотя и не лишено смысла, одинаково бесцельно, — комментирует Эшер. — Два мыслящих индивидуума (один — на балконе, другой — на лестнице) отказываются принимать участие в «упражнении

* Caroline H. MacGillavry, Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings, A. Oosthoek's Uitgeversmaatschappij, N. Y., 1965.

** См. статью Л. Пенроуза и Р. Пенроуза «Невозможные объекты» и В. И. Бахмина «Фотографирование невозможных объектов» в журнале «Квант», № 5, 1971 (стр. 26—29). — *Прим. перев.*



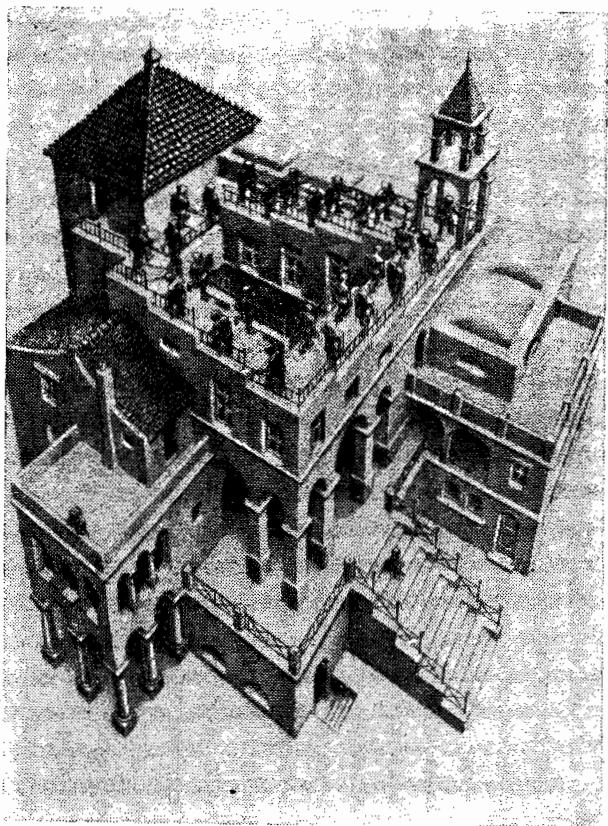
Р и с. 91. М. Эшер. «Бельведер» (литография, 1958 г.).

духа». Им кажется, будто они постигли истину глубже, чем их собратья, но рано или поздно они поймут ошибочность своего неконформизма».

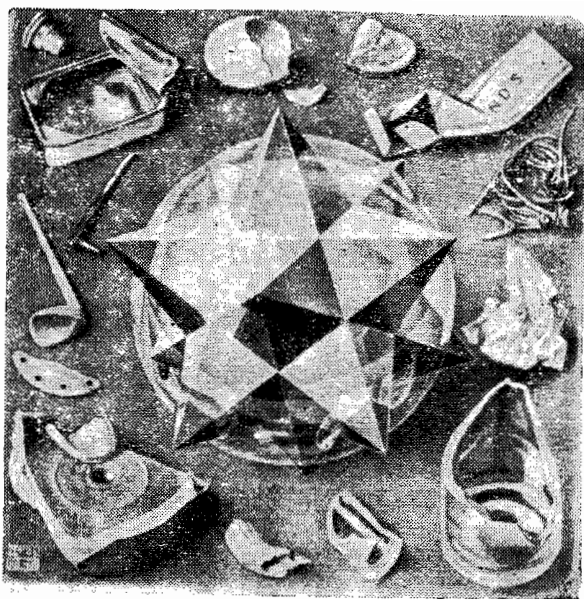
Во многих картинах Эшера запечатлено чувство восхищения формами правильных и полуправильных тел.

«Среди окружающего нас нередко хаотического мира, — писал Эшер, — они служат непревзойденным по

своей выразительности символом извечного стремления человека к гармонии и порядку. В то же время их совершенство вызывает у нас ощущение собственной беспомощности. Правильные многогранники совершенно лишены человеческого элемента. Их нельзя считать изобретениями человеческого разума, ибо они существовали в земной коре в виде кристаллов задолго до того, как на сцене появилось человечество. Что же касается сферических форм, то разве сама Вселенная не состоит из сфер?»



Р и с. 92. М. Эшер. «Восхождение и спуск» (литография, 1960 г.).



Р и с. 93. М. Эшер. «Порядок и хаос» (литография, 1950 г.).

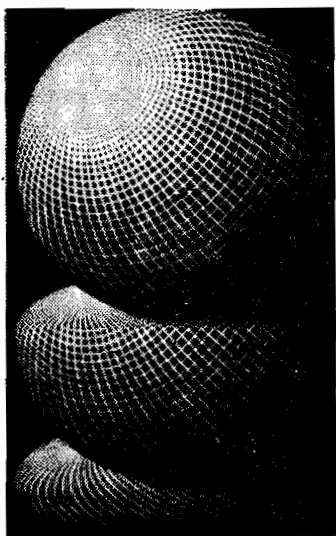
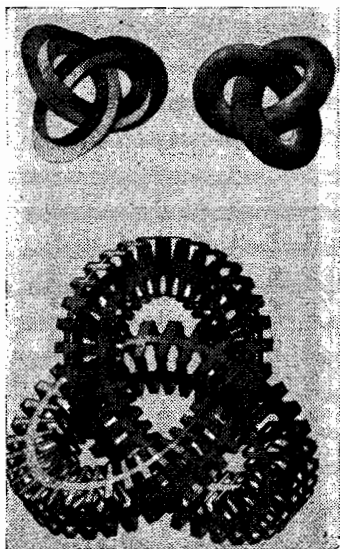
На литографии Эшера «Порядок и хаос» (рис. 93) изображен малый звездчатый додекаэдр — один из четырех звездчатых многогранников Кеплера — Пуансо, образующих вместе с пятью платоновыми телами девять правильных многогранников. Малый звездчатый додекаэдр (вместе с еще одним звездчатым многогранником) был впервые открыт Кеплером, который назвал его «ежом». Рисунок «ежа» был опубликован на страницах кеплеровской «Гармонии мира» — грандиозного трактата, в котором гармонические пропорции, открытые великим астрономом в формах геометрических фигур, переносились на движение небесных тел. В «Гармонии мира» Кеплер впервые сформулировал свой знаменитый третий закон движения планет.

Грани кепплеровского «ежа», как и грани платоновых тел, имеют форму одинаковых правильных многоугольников, только не выпуклых, а звездчатых: грани малого звездчатого додекаэдра «проникают» одна сквозь другую. Одинаковы и пятигранные правильные выпуклые

углы при вершинах «ежа». Представим себе, что каждая из 12 граней обычного додекаэдра (такого, как, например, изображенный на литографии «Рептилии») продолжена до пентаграммы — пятиконечной звезды (иначе говоря, ребра, ограничивающие каждую грань додекаэдра, продолжены до пересечения). Тогда 12 взаимно пересекающихся пентаграмм будут образовывать малый звездчатый додекаэдр. На протяжении веков математики отказывались признавать пентаграмму многоугольником на том основании, что ее стороны пересекаются (по той же причине звездчатым многогранникам было отказано в праве гражданства среди «добропорядочных» — выпуклых — многогранников). Забавно, что еще в середине прошлого века швейцарский математик Людвиг Шлефли, допускавший существование невыпуклых многогранников, отказывался признавать малый звездчатый многогранник «истинным» многогранником, ссылаясь на то, что 12 граней, 12 вершин и 30 ребер кеплеровского ежа «не укладываются» в формулу Эйлера $F + V = E + 2^*$. (Если малый звездчатый додекаэдр рассматривать как геометрическое тело с 60 треугольными гранями, 32 вершинами и 90 ребрами, то он попадет под «юрисдикцию» формулы Эйлера, но тогда его уже нельзя будет считать правильным многогранником, ибо его грани будут не равносторонними, а всего лишь равнобедренными треугольниками.) На литографии «Порядок и хаос» изящная симметрия многогранника, вершины которого пронзают окружающий его мыльный пузырь, противостоит коллекции предметов, которые Эшер охарактеризовал как «выброшенные за ненадобностью, смятые и никому не нужные».

Увлечение Эшера причудливыми формами тел, изучаемых в топологии, нашло отражение в ряде его более поздних работ. На гравюре «Узлы» (рис. 94) мы видим два зеркально симметричных узла, известных под названием «трилистник». Левый узел «сделан» из двух полосок, пересекающихся под прямым углом. Перед тем как концы такой крестообразной полоски были соединены, всю двойную полосу перекутили на полоборота. Как по-вашему, что представляет собой такой узел:

* F — число граней, V — вершин и E — ребер многогранника. — *Прим. перев.*



Р и с. 94. М. Эшер «Узлы»
(гравюра на дереве, 1965 г.).

Р и с. 95. М. Эшер. «Три сферы»
(гравюра на дереве, 1945 г.).

одностороннюю полосу, которая дважды, с самопересечением, обегает трилистник или два различных не пересекающихся листа Мёбиуса? Большой узел, изображенный под двумя трилистниками, «выполнен» из ажурной трубки четырехугольного сечения, перекрученной на четверть оборота перед склеиванием ее концов: муравей, ползущий по центральной дорожке, опишет четыре полных круга, прежде чем вернется в исходную точку.

При взгляде на гравюру «Три сферы» (рис. 95) может показаться, будто на ней изображены три последовательные стадии топологического преобразования сферы — ее сплющивания. Стоит, однако, присмотреться к гравюре более внимательно, и вы увидите, что на ней изображено нечто иное. Можете ли вы догадаться, что именно Эшер со свойственной ему изобретательностью изобразил на этой гравюре?

ОТВЕТ

На гравюре «Три сферы» Эшер изобразил три плоских диска, каждый из которых «закамуфлирован» под сферу. Нижний диск лежит на столе. Средний перегнут под прямым углом вдоль диа-

метра. Верхний диск стоит вертикально на горизонтальной половине среднего диска. Разобраться в «обмане» вам помогут линия сгибоа среднего диска и одинаковая раскраска всех трех «псевдосфер».

ГЛАВА 12

НЕЗАДАЧИ С ЗАДАЧАМИ

Иногда в хитроумной математической задаче обнаруживается какой-нибудь существенный изъян (например, выясняется, что у нее нет решения или вопреки утверждению составителя решение неединственно, что решить задачу можно проще и изящнее, чем полагал ее автор и т. п.), и мы говорим, что ее автора постигла незадача (ибо задача с изъяном — это уже не задача), что он «попал впросак», «дал маху» и... многое другое.

Принято считать, что математика в отличие от экспериментальных и описательных наук изрекает лишь непререкаемые истины, но и математикам свойственно ошибаться. Поэтому даже в области математики правильность доказательства требует признания со стороны других лиц. История математики знает немало приме-

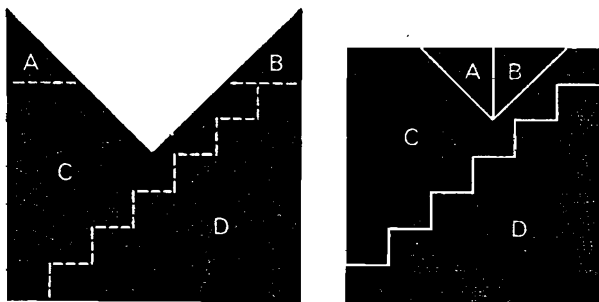
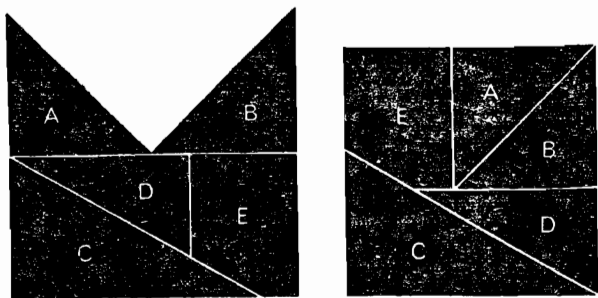


Рис. 96. Решение задачи о разрезании митры, предложенное Лойдом.

Митра разрезана на 4 части.



Р и с. 97. Решение задачи Лойда, предложенное Дьюдени.
Митра разрезана на 5 частей.

ров того, как в «доказательствах» даже выдающихся математиков впоследствии обнаруживались уязвимые места, а подчас и ошибки. Особенно часто происшествия подобного рода случаются в занимательной математике — области, где преобладающее большинство составляют не профессионалы, а любители.

Известный американский изобретатель головоломок Сэм Лойд опубликовал великое множество шахматных задач и математических головоломок. Не удивительно, что в некоторых из них обнаруживались роковые изъяны.

Одну из самых грубых ошибок Лойд допустил в решении задачи на разрезание. «Митру», или квадрат с выброшенной четвертушкой (рис. 96, слева), требуется разрезать на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было составить квадрат. Решение Лойда намечено пунктирной линией на рис. 96 слева, а сам квадрат в «собранном виде» показан на том же рисунке справа. Лойд считал, что задачу можно решить, разрезав митру всего лишь на четыре части. «Превратить митру в квадрат, разрезая ее на пять, шесть, .. двенадцать частей, можно многими способами, — писал он, — но решения при этом получаются сложными и требуют немалых познаний в геометрии».

Ошибку в предложенном Лойдом решении обнаружил знаменитый английский составитель головоломок Генри Э. Дьюдени* — как математик он был сильнее

* Сборник избранных задач Генри Э. Дьюдени выходит на русском языке в издательстве «Мир».

Лойда. Основная идея лойдовского решения заключалась в том, чтобы, заполнив маленькими треугольниками выемку, построить прямоугольник, который затем с помощью «лестничного метода» можно было бы превратить в квадрат. Но лестничный метод позволяет преобразовывать прямоугольник в квадрат лишь при определенных отношениях сторон прямоугольника, а отношение сторон прямоугольника в задаче Лойда, равное $3:4$, не является допустимым. (Формула, позволяющая находить отношения сторон прямоугольников, при которых применим «лестничный метод», была выведена Дж. Мотт-Смитом.) Решение Лойда при всем его остроумии позволяет получить не квадрат, а всего лишь прямоугольник. Правильное решение задачи дал Дьюдени (рис. 97): для превращения митры в квадрат ее пришлось разрезать на 5 частей. Решения, в котором митра разрезается лишь на 4 части, по-видимому, не существует, хотя признанный специалист по решению геометрических задач

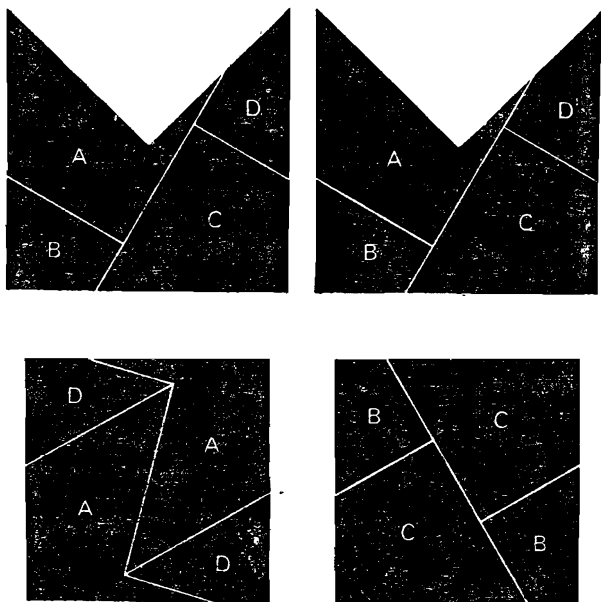
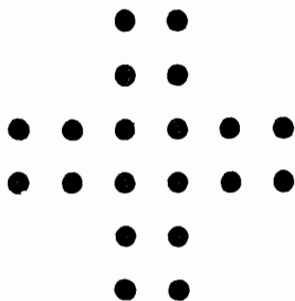


Рис. 98. Задача Линдгрена о разрезании двух митр и превращении их в два квадрата.

Р и с. 99. Дважды исправлявшаяся задача «профессора Хоффмана».



на разрезание Гарри Линд-
грен* показал, каким образом
можно разрезать две митры на
четыре части каждую, чтобы
из восьми образовавшихся ча-

стей можно было сложить два одинаковых квадрата (рис. 98).

Иногда «скрытые возможности» удастся обнаружить не только в первоначальном, но и в исправленном варианте задачи. Так, англичанин Анжело Льюис, который под псевдонимом «профессор Хоффман» выпустил несколько книг о фокусах и головоломках, привел в одном из своих сборников следующую задачу. Фишки выстроены так, как показано на рис. 99. Требуется подсчитать число различных квадратов, все четыре вершины которых заняты фишками. По мнению «профессора Хоффмана», имеется всего 17 различных квадратов. Дьюдени опроверг это утверждение, перечислив 19 различных квадратов. В действительности квадратов оказалось 21. Дьюдени привел правильный ответ, перепечатав головоломку Льюиса в одной из своих книг. Для читателя не составит труда найти 21 квадрат, скрытый среди фишек на рис. 99, но вторая часть старой головоломки менее проста. Требуется снять 6 фишек так, чтобы никакие 4 фишки из числа оставшихся не были расположены в вершинах квадрата (любого размера).

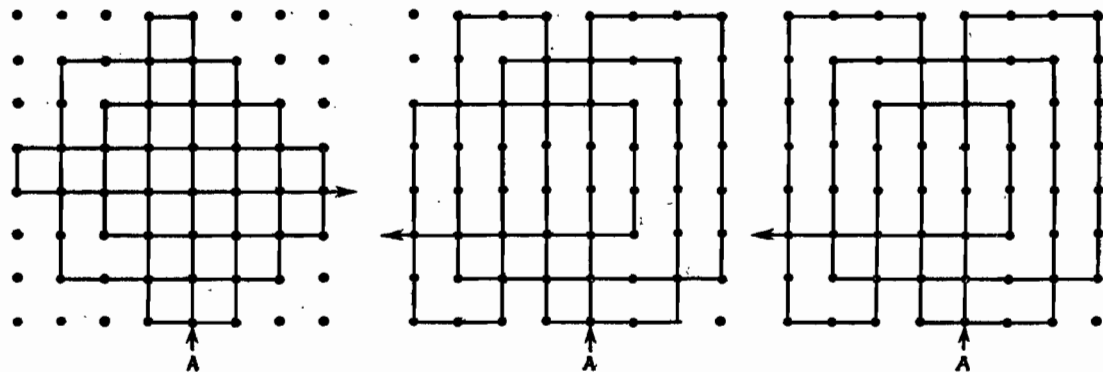
Большая часть ошибок Дьюдени была замечена читателями его журнала и отделов головоломок и развлечений, которые он вел в различных газетах. Это позволило Дьюдени внести исправления, прежде чем издавать сборники своих задач. Однако и в книгах его имеется немало ошибочных решений. Рассмотрим, например, следующую задачу — разновидность известных задач об обходе ладьей шахматной доски. Некий район

* О Линдгрене рассказывается в гл. 11 книги М. Гарднера «Математические досуги».

города имеет в плане вид квадрата, разбитого на меньшие квадраты — кварталы. Размеры района — 7×7 кварталов (рис. 100). Автомашина выезжает из точки А, расположенной на границе района («транспортный» вариант задачи удобнее «шахматного», так как при движении машины вдоль улиц — линий квадратной решетки — особенно легко подсчитывать расстояния). Требуется указать маршрут наибольшей протяженности, следуя по которому машина совершит не более 15 поворотов и ни по одному участку пути не пройдет дважды. Чтобы протяженность маршрута была максимальной, машина, очевидно, должна посетить как можно больше «перекрестков» — узлов квадратной решетки.

В двух книгах Дьюдени было приведено решение, показанное на рис. 100, слева. Длина маршрута составляет 70 кварталов, не посещенными остаются 19 перекрестков. Позднее сам Дьюдени улучшил свое решение (оно показано на рис. 100, в центре): новый маршрут протянулся уже на 76 кварталов и оставил в стороне лишь 3 перекрестка. Можно ли это решение считать окончательным? (Оказывается, нет: один из читателей недавно прислал мне решение, изображенное на рис. 100, справа. Длина маршрута составляет теперь 76 кварталов; следуя им, машина совершает 15 поворотов и оставляет в стороне лишь 1 перекресток! Можно ли улучшить и это решение: найти маршрут длиной более 76 кварталов с 15 поворотами или длиной в 76 кварталов, но проходящий через все перекрестки? По-видимому, нельзя, однако, насколько известно, никто этого не доказал.

В другой задаче Дьюдени требовалось разрезать на четыре части циферблат с римскими цифрами таким образом, чтобы сумма чисел, оказавшихся на каждой части, была равна 20. Поскольку сумма всех чисел от 1 до 12 на «целом» циферблате составляет всего лишь 78, ее необходимо увеличить до 80 с помощью какого-нибудь специального ухищрения. Неуклюжий метод Дьюдени состоял в том, чтобы рассматривать число IX «не с той стороны» и читать его как XI. Решение Дьюдени представлено на рис. 101, слева. Лойд предложил более изящное решение, изображенное на рис. 101, справа, но упустил при этом целую серию из 12 столь же безукоризненных решений, ни в одном из которых не требуется рассматривать римские числа «вверх ногами». Найти 9



Р и с. 100. Первоначальное (слева) и два обнаруженных впоследствии решения транспортной задачи Дьюдени.

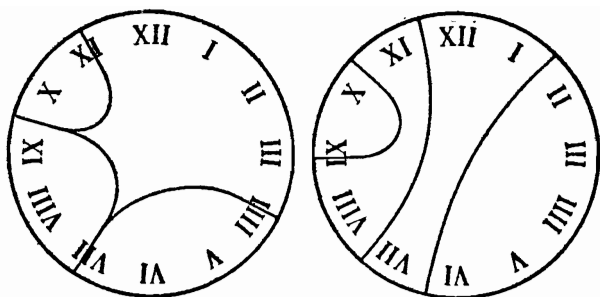


Рис. 101. Решения задачи с часами, предложенные Дюдени (слева) и Лойдом (справа).

из них довольно легко, зато с 3 остальными придется изрядно повозиться. Заметим, что по обычаю часовщиков число 4 пишется в виде IIII, а не IV. Все цифры считаются «намертво» прикрепленными к ободку циферблата. Иначе говоря, линию разреза разрешается проводить между любыми двумя цифрами, но запрещается описывать петли вокруг них, отделяя цифры от ободка. Если бы линия разреза могла описывать петли вокруг цифр, то задача утратила бы всякий интерес: число решений сразу возросло бы до нескольких сотен.

Подготавливая к изданию обширную «Энциклопедию головоломок» Сэма Лойда, я обнаружил множество ошибок, главным образом опечаток. («Энциклопедия» была составлена после смерти Лойда его сыном, наскоро собравшим материалы, сохранившиеся в архиве отца.) Среди нескольких пропущенных мной ошибок самой порочной я считаю ошибку в решении задачи о полете орла. Суть задачи в следующем. С восходом солнца орел снимается с вершины купола Капитолия в Вашингтоне и летит на восток до тех пор, пока солнце не оказывается у него прямо над головой, после чего поворачивает назад и летит на запад до тех пор, пока не увидит заход солнца. Поскольку в утреннюю часть полета солнце и орел движутся в противоположных направлениях, а в вечернюю — в одном и том же направлении, ясно, что после полудня орел пролетает большее расстояние и к заходу солнца оказывается к западу от того места, откуда он вылетел утром. После захода солнца орел отдыхает до восхода, после чего все повто-

ряется сначала: с восходом солнца он взлетает, летит на восток до тех пор, пока солнце не окажется у него над головой, после чего поворачивает назад и до захода летит на запад. Так продолжается до тех пор, пока орел, описав круг, не вернется в Вашингтон. Предположим, что покрытое орлом расстояние равно 19 500 милям и что орел завершает свой «трудовой день» в точке, находящейся ровно в 500 милях к западу от того места, откуда он взлетает с очередным восходом солнца. Спрашивается, сколько суток пройдет с отлета орла до его возвращения на купол Капитолия с точки зрения наблюдателя, безотлучно находящегося в Вашингтоне. Ответ (38 суток), приведенный в изданной мной книге Лойда *, неверен. Не сможете ли вы подсчитать истинную продолжительность полета орла?

Одна из самых замечательных ошибок, допущенных когда-либо в решении занимательных задач, также имеет некоторое отношение к географии. Путешественник находится в некоторой точке земного шара. Взглянув на юг, он обнаруживает в 100 м от себя медведя. Путешественник замирает на месте, а медведь проходит 100 м, двигаясь строго на восток. После этого путешественник берет ружье, прицеливается и убивает медведя выстрелом, направленным точно на юг. Спрашивается, в какой точке земного шара находится путешественник. Первоначальный ответ, разумеется, был: «На Северном полюсе!» Однако, как уже объяснялось в одной из наших книг **, задача имеет и другие решения. Путешественник может стоять, например, так близко от Северного полюса, что медведь, пройдя свои 100 м, оказывается в исходной точке. В действительности же имеется бесконечно много решений этого типа, поскольку путешественник может находиться на еще меньшем удалении от полюса и медведь, проходя 100 м, будет проходить вокруг полюса два, три и т. д. раза. Возникает вопрос, в какой мере задачу о путешественнике и медведе можно считать раскрытой до конца. Оказывается, ее «возможности» (точнее, возмож-

* Mathematical Puzzles of Sam Loyd, selected and edited by M. Gardner, N. Y., vol. 1, 1959, vol. 2, 1960.

** М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, гл. 3, задача 1,

ности ее решения) далеко не исчерпаны. В статье, опубликованной в 1960 г. в серьезном математическом журнале, Б. Л. Шварц обнаружил еще два совершенно различных семейства решений! Перечитайте внимательно условие задачи и попробуйте догадаться, о каких двух семействах решений идет речь.

Помимо подлинных «разоблачений» своих ошибок, я нередко получаю от дотошных читателей замечания, которые за неимением лучшего слова, называю «придириками». «Придирика» — это такое неожиданное решение, которое основано на игре слов или какой-нибудь неточности в формулировке задачи. Иногда решения «придирики» бывают довольно забавными. Как-то раз я написал, что если сеть линий содержит более двух вершин, в которых сходится нечетное число линий, то ее нельзя вычертить, не отрывая карандаш от бумаги и не обводя ни один участок сети дважды. Один из моих читателей сообщил мне, что задача решается совсем легко, если воспользоваться автоматическим карандашом. Достаточно лишь в случае необходимости нажать на кнопку, чтобы убрать грифель, как уже начерченный участок сети можно будет пройти, «не отрывая карандаш от бумаги» и «не обводя его дважды», а затем, если необходимо, снова выпустить грифель. Разумеется, при таком методе можно вычерчивать («соблюдая условия») любые сети.

В другой раз я придумал для одной детской книжки следующую задачу-шутку. В табличке

9	9	9
5	5	5
3	3	3
1	1	1

требуется обвести кружками 6 чисел так, чтобы их сумма была равна 21. Мое решение состояло в том, чтобы, перевернув страницу «вверх ногами», превратить девятки в шестерки, а затем обвести 3 «шестерки» и 3 единицы. Одному из читателей удалось найти гораздо более остроумное решение. Не переворачивая страницы с табличкой, он обвел кружками каждую из трех троек, затем единичку, стоящую слева, и одним кружком — две единички справа. Сумма чисел, обведенных кружками, — $3 + 3 + 3 + 1 + 11$, — очевидно, равна 21.

ОТВЕТЫ

Один из способов, позволяющих снять 6 фишек так, чтобы никакие 4 фишки из оставшихся не были расположены в вершинах квадрата, показан на рис. 102.

12 решений задачи о разбиении циферблата (помимо решений Лойда) изображены на рис. 103. Каждый циферблат разделен на 4 части так, что сумма чисел на каждой из частей равна 20. Труднее всего найти 3 последних решения.

С точки зрения наблюдателя, находящегося безотлучно в Вашингтоне, орел завершает свой полет в момент захода солнца спустя $39\frac{1}{2}$ суток после отлета. Сам орел успеет «насчитать» (по восходам и заходам солнца) лишь $38\frac{1}{2}$ суток, но, поскольку он совершает облет параллели в направлении, противоположном направлению вращения Земли, его календарь отстает от календаря вашингтонского наблюдателя на одни сутки.

Предположим, что путешественник и медведь находятся вблизи Южного полюса. Медведь располагается в 100 м к югу от путешественника на таком расстоянии от полюса, что, закончив свою стометровую прогулку на восток, оказывается как раз напротив путешественника, но по другую сторону от Южного полюса, чем он. Решений такого типа существует бесконечно много, поскольку расстояние от медведя до полюса может становиться все меньше и

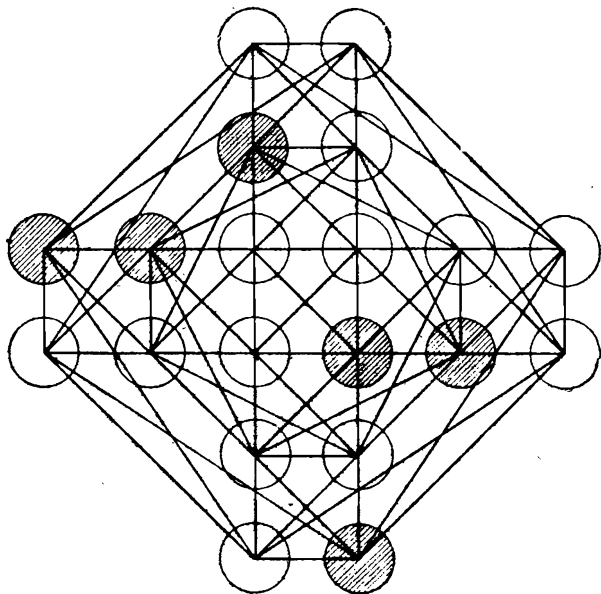


Рис. 102. Решение второй половины задачи о 20 фишках.

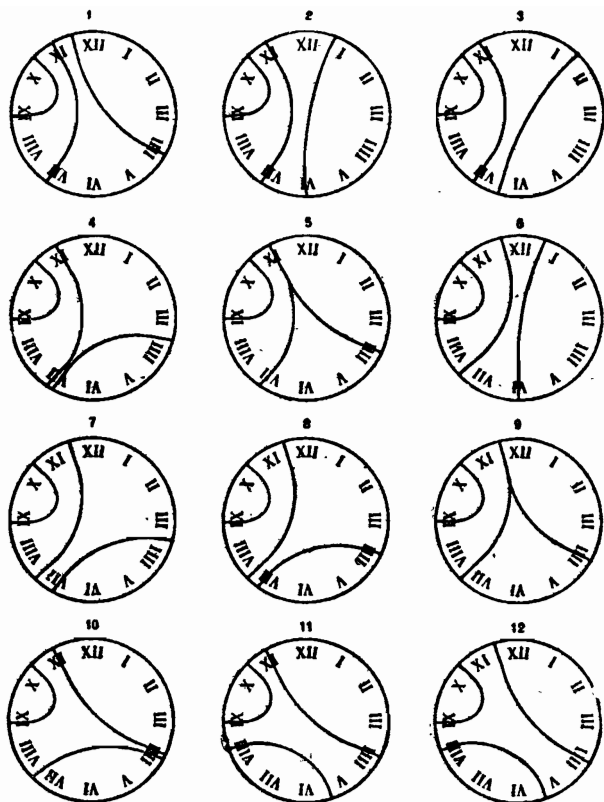


Рис. 103. Решение задачи о разбиении циферблата на 4 части.

меньше и сам медведь, прежде чем оказаться на мушке, может успевать пройти вокруг полюса $1\frac{1}{2}$ — $2\frac{1}{2}$ и т. д. полных круга.

Другое семейство пропущенных решений задачи основано на той части ее формулировки, где говорится, что, «взглянув на юг, путешественник и медведь в исходной позиции могут находиться в 100 м друг от друга по разные стороны от Южного полюса, причем путешественник — дальше от полюса, чем медведь. После того как медведь пройдет на восток 100 м, он опишет вокруг полюса полуокружность и окажется в точке, расположенной к югу от путешественника по ту же сторону от Южного полюса, что и последний. Чем дальше будет находиться путешественник от полюса, тем больше «оборотов» — 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ и т. д. — придется совершить медведю. Так возникает второе бесконечное семейство решений. «Предельное» решение достигается, когда путешественник оказывается на расстоянии 100 м от полюса: стометровая прогулка медведя вырождается в пируэты, совершаемые четвероногим на

самом полюсе. Оба пропущенных ранее бесконечных семейств решений были найдены Шварцом и опубликованы в статье «Какого цвета была шкура убитого медведя?»*.

ГЛАВА 13

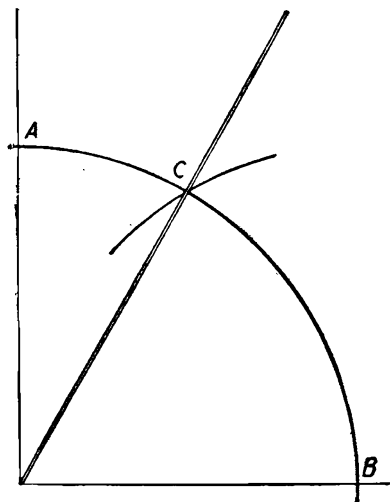
О ТРИСЕКЦИИ УГЛА И ТЕХ, КТО УПОРНО (НО ТЩЕТНО) ПЫТАЕТСЯ РЕШИТЬ ЭТУ ДРЕВНЮЮ ЗАДАЧУ

Среди первых задач на построение с помощью циркуля и линейки, с которыми встречается каждый, кто приступает к изучению планиметрии, две задачи решаются особенно просто: задача о построении биссектрисы данного угла и задача о делении отрезка на любое наперед заданное число равных частей. Обе задачи столь просты, что учащимся трудно поверить в невозможность трисекции угла с помощью циркуля и линейки. Услышав о неразрешимости этой классической задачи, ученики, обладающие наиболее выраженными математическими способностями, усматривают в словах преподавателя вызов и немедленно принимаются за работу, пытаясь опровергнуть столь вопиющее утверждение.

В ту далекую пору, когда геометрия еще только зарождалась, нечто подобное происходило и среди математиков. В V в. до н. э. геометры проводили немало времени, стремясь с помощью прямых и окружностей получить точки пересечения, которые бы делили любой угол на три равные части. Им было известно, что некоторые углы допускают трисекцию. Например, удивительно легко разделить на три равные части прямой угол: для этого достаточно провести дугу AB (рис. 104) и затем, не меняя раствора циркуля, сделать засечку с центром в точке B (C — точка пересечения дуги AB и дуги того же радиуса с центром в B). Прямая OC дает решение задачи о трисекции прямого угла. (Читателю предоставляется удобный случай вспомнить то, чему его учили на уроках геометрии в школе, и само-

* *Mathematics Magazine*, 34 (сентябрь — октябрь 1960), стр. 1—4.

Р и с. 104. Трисекция прямо-
го угла.



стоятельно доказать, что произведена действительно трисекция прямого угла. Все необходимые утверждения доказываются чрезвычайно просто.)

Построение угла в 60° позволяет осуществлять трисекцию угла в 180° , а построение биссектрисы угла в 30° — трисекцию угла в 45° . Пользуясь циркулем и линейкой (последняя служит лишь для того, чтобы проводить прямые через две точки), можно производить трисекцию бесконечно многих углов специального вида. Греческие же геометры пытались разработать общий метод, применимый к любому углу. Вместе с задачами об удвоении куба и квадратуре круга трисекция угла стала в античной геометрии одной из трех великих задач на построение.

Первое строгое доказательство невозможности трисекции угла было опубликовано в одном французском математическом журнале П. Л. Вантцелем лишь в 1837 г. Доказательство Вантцеля слишком специально, чтобы его можно было привести здесь полностью, поэтому мы ограничимся тем, что наметим основные идеи*.

Рассмотрим угол в 60° , вершина которого совпадает с началом прямоугольных координат на плоскости (рис. 105). С центром в точке O проведем окружность единичного радиуса. Прямая, отделяющая от угла в 60° одну треть, пересекает окружность в точке A . Можно ли, пользуясь лишь циркулем и линейкой, найти точку

* Наиболее полное и доступное изложение невозможности трисекции см. в книге: Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967.

А? Если нет, то по крайней мере один угол не допускает трисекции, и, следовательно, не существует и общего метода, позволяющего делить на три равные части любой угол.

Поскольку прямые на декартовой плоскости задаются линейными, а окружности — квадратными уравнениями, нетрудно показать, что существует пять и только пять операций, которые можно производить над отрезком прямой с помощью циркуля и линейки. Отрезки можно складывать, вычитать, умножать, делить и извлекать из них квадратные корни. Если задан отрезок длиной n , то с помощью циркуля и линейки можно найти $\sqrt{n}$. Применяя ту же операцию к $\sqrt{n}$, можно найти $\sqrt[4]{n}$. Применяя операцию извлечения корня конечное число раз, можно построить корень 2-, 4-, 8-, 16-й, ... степени. Построить с помощью циркуля и линейки отрезок, равный кубическому корню из данного, нельзя, поскольку число 3 не встречается среди целых степеней двойки. Все сказанное и более тонкие соображения, заимствованные из аналитической геометрии и теории «числовых полей», позволяют заключить, что с помощью циркуля и линейки на плоскости можно «построить»

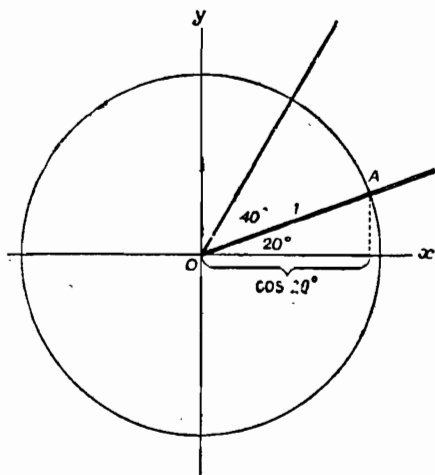
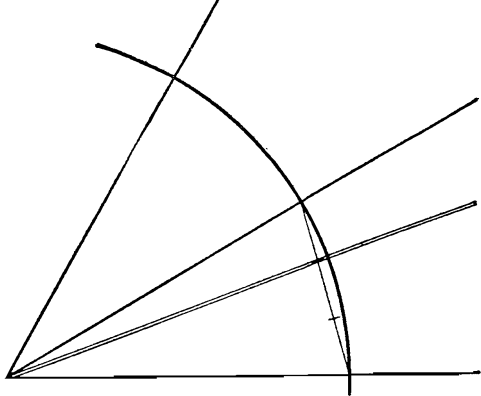


Рис. 105. Точку A нельзя «построить» с помощью циркуля и линейки.

лишь те точки, координаты x и y которых являются вещественными корнями уравнения вполне определенного типа. Уравнение должно быть алгебраическим, неприводимым (то есть его левую часть нельзя представить в виде произведения многочленов меньших степеней), с рациональными коэффициентами, а показатель степени его старшего члена должен быть одной из степеней числа 2.

Зная это, обратимся к рассмотрению координаты x точки A на рис. 105 — точки, лежащей на «трисектрисе» угла в 60° . Координата эта выражает длину катета прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1, и потому равна $\cos 20^\circ$. Немного «пожонглировав» простыми тригонометрическими формулами, можно показать, что $\cos 20^\circ$ служит иррациональным корнем кубического уравнения $8x^3 - 6 = 1$. Поскольку число 3 (показатель степени старшего члена) не находится среди целых степеней 2, точку A нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Следовательно, при классических ограничениях на использование линейки и циркуля трисекция угла в 60° невозможна. Аналогичные рассуждения показывают, что не существует общих методов, позволяющих с помощью циркуля и линейки разделить произвольно заданный угол на 5, 6, 7, 9, 10 или любое другое число равных частей, не встречающееся среди членов ряда 2, 4, 8, 16, ... Бесконечному множеству углов, допускающих трисекцию, принадлежат углы вида $360^\circ/n$, где n — целое число, не делящееся без остатка на 3. Бесконечному множеству углов, не допускающих трисекцию, принадлежат углы вида $360^\circ/n$, где n — целое число, кратное 3. Так, угол в 9° можно разделить на 3 равные части с помощью циркуля и линейки, а его «треть» — угол в 3° — нельзя. Иначе говоря, угол в 1° (как и угол в 2°) нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

Разумеется, приближенную трисекцию угла можно осуществлять многими способами. Один из наиболее простых методов предложил выдающийся польский математик Гуго Штейнгауз. На рис. 106 метод Штейнгауза применен к трисекции угла в 60° . Сначала проводится биссектриса исходного угла, а затем хорда, стягивающая половинный угол, делится на 3 равные части. Точка, отстоящая на $1/3$ хорды от биссектрисы,



Р и с. 106. Простой метод приближенной трисекции произвольного угла.

позволяет провести «трисектрису» исходного угла с ошибкой, меньшей, чем неизбежная неточность чертежа. Известно множество приближенных методов трисекции, точность которых выше, но все они требуют существенно больших затрат времени и труда.

Абсолютно точную трисекцию произвольного угла можно осуществить, лишь нарушив одно из традиционных ограничений. Многие кривые, в частности гипербола и парабола, служат идеальными «трисекторами». Другие методы точной трисекции используют бесконечное число последовательных приближений, а сама «трисектриса» — прямая, отсекающая треть исходного угла, — получается в результате предельного перехода. Однако проще всего нарушить классические ограничения на использование циркуля и линейки можно путем нанесения на линейку двух точек. Для этого, собственно, даже не требуется наносить на линейку какие-нибудь метки: чтобы провести отрезок прямой, достаточно использовать концы линейки, ее ширину или просто прижать к ребру линейки ножки циркуля.

Один из лучших способов такой «жульнической» трисекции был обнаружен в трудах Архимеда. Предположим, что требуется произвести трисекцию угла AED (рис. 107). Проведем полуокружность с центром в вершине угла E и продолжим вправо сторону DE . Не ме-

няя раствора циркуля (равного радиусу полуокружности DE), приложим циркуль к линейке, ребро которой проходит через точку A . Двигая линейку, приведем ее в такое положение, в котором одна из ножек циркуля не окажется в точке пересечения ребра линейки с полуокружностью (точка B), а другая — в точке пересечения ребра линейки с продолжением стороны DE исходного угла. Иначе говоря, через точку A мы провели такую прямую, что ее отрезок BC равен радиусу полуокружности. Дуга BF составляет ровно одну треть дуги AD .

Для трисекции угла было изобретено множество механических устройств. Как заметил Лео Мозер, одним из таких устройств могут служить самые обыкновенные ручные или карманные часы: когда минутная стрелка описывает угол, в четыре раза превышающий угол, подлежащий трисекции, часовая стрелка описывает угол, равный $\frac{1}{3}$ данного угла. Хитроумное приспособление, придуманное лондонским адвокатом А. Б. Кемпе (рис. 108), основано на одной теореме о параллелограммах с пересекающимися сторонами (параллелограммах, «сложенных» так, что их противоположные стороны пересекаются). Длинная сторона самого маленького из параллелограммов в шарнирном механизме Кемпе равна короткой стороне среднего параллелограмма, длинная сторона которого в свою очередь равна короткой стороне самого большого параллелограмма. Как видно

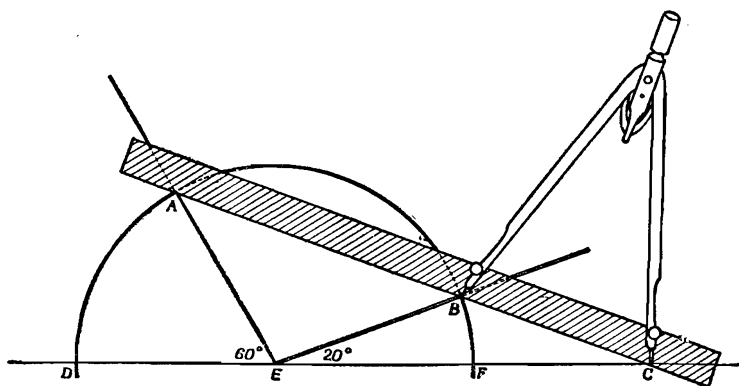


Рис. 107. «Неклассическая» трисекция угла по Архимеду.

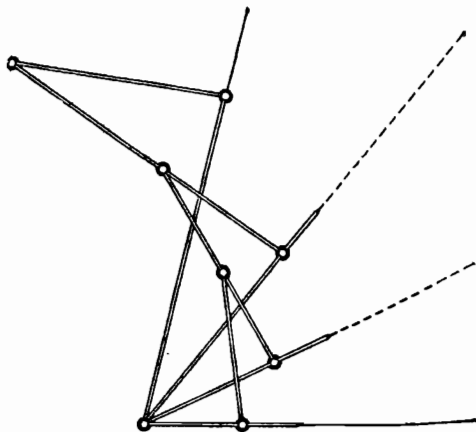
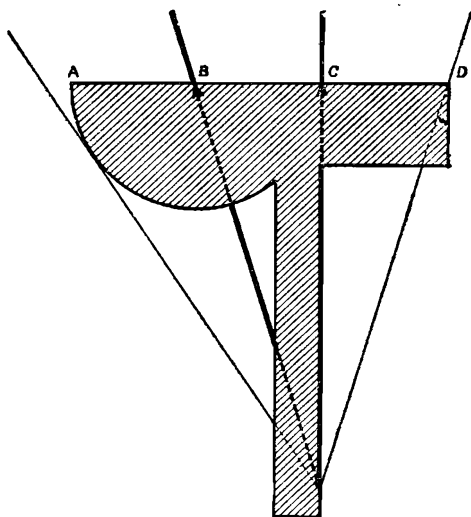


Рис. 108. Устройство Альфреда Кемпе для трисекции угла.

из рисунка, устройство Кемпе производит трисекцию любого угла автоматически. Принцип, положенный в основу прибора, допускает обобщение: увеличивая число параллелограммов с пересекающимися сторонами, можно получить устройство, которое будет делить произвольный угол на любое число равных частей.

Устройство, известное под названием «томагавк», не имеет движущихся частей, не требует проведения каких-либо предварительных геометрических построений и, безусловно, гарантирует точную и быструю трисекцию любого угла (рис. 109). Его нетрудно изготовить из обыкновенного картона. Верхний край томагавка AD разделен на три части точками B и C . Кривая часть его контура представляет собой дугу окружности с центром в точке B и радиусом AB . Томагавк помещают так, чтобы точка D оказалась на одной стороне «трисектируемого» угла, дуга окружности касалась другой стороны угла, а правый край рукоятки проходил через вершину угла. Прямые, проходящие через вершину угла и точки B и C , делят угол на три равные части. Если угол слишком «острый» и томагавк просто не уместается, его всегда можно предварительно удвоить (один или несколько раз), произвести трисекцию большего угла, а затем уменьшить полученный угол вдвое (столько же раз, сколько был удвоен исходный угол).

Хотя доказательство невозможности трисекции угла с помощью циркуля и линейки не оставляет никаких сомнений у тех, кто его понимает, во всем мире все еще находятся любители, которые тешат себя надеждой, будто им все же удалось решить задачу и соблюсти при этом все требования. Типичный «трисектрист», как правило, достаточно разбирается в элементарной геометрии, чтобы изобрести свой способ «решения» неразрешимой задачи, но недостаточно хорошо владеет математикой, чтобы проследить до конца доказательство невозможности трисекции или обнаружить ошибку в своих рассуждениях. Предлагаемый им способ трисекции зачастую столь сложен, а доказательство столь громоздко, что обнаружить ошибку, которая заведомо там имеется, бывает нелегко даже искушенному геометру. Профессиональным математикам нередко приходится получать письма с подобными «доказательствами». Поскольку поиск ошибки сопряжен с непроизводительной затратой времени и не сулит ничего интересного, они обычно стараются как можно скорее отослать полученные материалы автору, даже не пытаясь вникнуть в детали «доказательства». У «трисектриста»



Р и с. 109. «Томагавк» для трисекции произвольного угла.

неизменно создается впечатление, будто все математики участвуют в заговоре, чтобы лишить его великое открытие заслуженной известности. После того как труд будет отвергнут всеми математическими журналами, «трисектрист» обычно излагает свое решение в отдельной книге или брошюре, которую издает за собственный счет. Иногда он публикует свой метод в отделе объявлений местной газеты, добавляя, что рукопись с полным доказательством «надлежащим образом оформлена».

Последним из любителей-математиков, получивших широкую известность в США в связи с трисекцией угла, был преподобный Иеремия Джозеф Каллахан. В 1931 г., будучи ректором Университета Дюкена в Питтсбурге, он заявил, что ему удалось решить задачу о трисекции любого угла. Агентство Юнайтед Пресс распространило длинную телеграмму, текст которой был составлен самим отцом Каллаханом. Еженедельник «Тайм» поместил его портрет и весьма доброжелательную статью о столь революционном открытии. (Кстати сказать, в том же 1931 г. преподобный Каллахан опубликовал книгу в 310 страниц «Евклид или Эйнштейн», в которой, «доказав» знаменитый постулат Евклида о параллельных и тем самым продемонстрировав миру «абсурдность» неевклидовой геометрии, лежащей в основе общей теории относительности, он «ниспровергал» теорию Эйнштейна.) Репортеры и люди, далекие от математики, были возмущены неслыханным поведением профессионалов-математиков, которые, даже не взглянув на построение преподобного Каллахана, в один голос заявили, что оно неверно. Наконец, в конце 1931 г. вышла брошюра Каллахана «Трисекция угла». Математики оказались правы: Каллахан не справился с трисекцией угла. Взяв угол, он утроил его, после чего снова нашел исходный.

3 июня 1960 г. почтенный Дэниель К. Инуйе, представлявший в Конгрессе США Гавайи, произнес речь, в которой всячески превозносил заслуги некоего Мориса Киджеля, художника-портретиста из Гонолулу, сумевшего разрешить не только задачу о трисекции угла, но и задачи о квадратуре круга и удвоении куба. Киджель и К. Юнг написали книгу об этом эпохальном событии под названием «Два часа, которые потрясли математический мир» и небольшую брошюру «Решение

трех неразрешимых задач». В 1959 г. оба автора совершили турне по городам США, выступая с лекциями о сенсационных достижениях Киджеля. Сан-францискская телестудия даже сняла специальный телефильм «Загадка веков». По словам конгрессмена Инуйе (ставшего впоследствии сенатором), «решения Киджеля изучаются в сотнях школ и колледжей не только на Гавайях, но и в других штатах и в Канаде». Остается лишь надеяться, что в выступлении distinguished государственного деятеля содержится некоторое преувеличение.

Что может сказать математик «трисектрису» сегодня? Он может напомнить ему, что в математике существуют задачи, неразрешимость которых доказана окончательно, раз и навсегда. Трисекция угла невозможная так же, как партия в шахматы, в которой ферзь совершал бы ходы, «приливающие» коню. И в том, и в другом случае причина невозможности по существу одна и та же: используемая операция нарушает правила игры. Затем математик может посоветовать «трисектрису» раздобыть экземпляр книги Куранта и Роббинса «Что такое математика», разобрать приведенное там доказательство невозможности трисекции, а затем вернуться к собственному «доказательству» и постараться обнаружить в нем ошибку. Но трисектрисы (так же как и их собратья — квадратурщики) — народ упрямый и не склонны следовать чьим-либо советам. Знаменитый английский математик и логик Де Морган, которому неоднократно приходилось разбирать «доказательства» квадратурщиков и «трисектрисов», привел как-то строчку из одной старинной брошюры о трисекции угла: «Плод многих лет напряженных размышлений». Комментарий де Моргана был краток, но выразителен: «Как верно и как печально»,

ГЛАВА 14

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

В этой главе мы решили для разнообразия поместить серию задач, носящих в основном нематематический характер. Для их решения необходимы умение логически мыслить и некоторые (самые элементарные) познания в области физики, поэтому такие задачи с достаточным основанием можно назвать физическими. Лишь в редких случаях задачи сформулированы так, чтобы ввести читателя в заблуждение. Тем не менее даже нарочито запутанные задачи не сводятся лишь к одной игре слов, а допускают вполне «серьезное» решение.

1. Некоторым читателям, вероятно, приходилось видеть следующую необычную игрушку. В цилиндре, наполненном водой, плавают песочные часы (рис. 110). Если цилиндр перевернуть, то происходит нечто забавное: песочные часы остаются на дне до тех пор, пока какое-то количество песка из их верхней части не пересыплется в нижнюю часть, после чего они медленно всплывают. Казалось бы, что пересыпание песка не должно сказаться на общем запасе плавучести часов. Можете ли вы объяснить принцип действия этой игрушки?

2. Сплошной (без внутренних пустот) кусок железа, имеющий форму бублика, нагревают. Что произойдет при этом с диаметром «дырки от бублика»: увеличится она или уменьшится?

3. Из тонкого картона вырежьте подкову размером чуть больше зубочистки. Прислоните подкову к зубочистке так, как показано на рис. 111. Можно ли поднять одновременно подкову и зубочистку с помощью еще одной зубочистки, которую вы держите одной ру-

кой? Касаться подковы или зубочистки, служащей ей опорой, чем-нибудь, кроме зубочистки, которую вы держите в руке, запрещается. Подкову и зубочистку требуется поднять одновременно и подержать над столом. Как это сделать?

4. Следующий старый анекдот не лишен физического смысла.

Грузовик с контейнером в кузове подъезжает к шаткому мостику. Водитель останавливает машину, выходит из кабины и начинает изо всех сил колотить по контейнеру. Случайно проходивший мимо фермер спрашивает у водителя, что, собственно, тот делает.

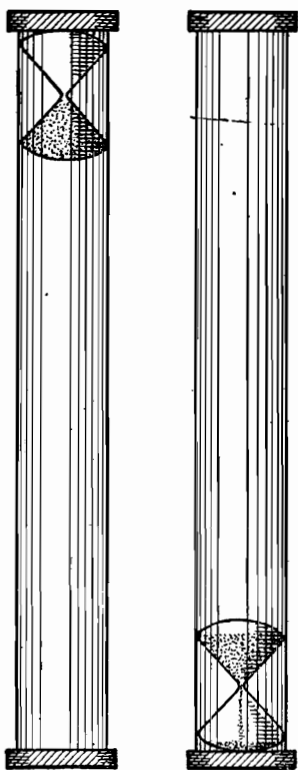


Рис. 110. Ныряющие песочные часы.

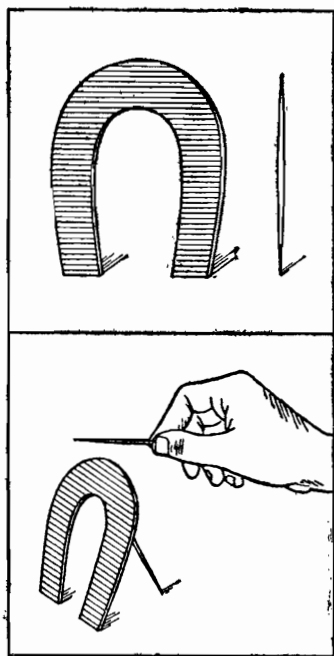


Рис. 111. Подкова и зубочистка.

— Я везу в контейнере 200 голубей, — объясняет водитель. — Везят они немало, а мост не внушает доверия. От шума голуби взлетят, вес контейнера уменьшится, и я благополучно перееду мост. Главное, чтобы голуби не сели, пока машина не сойдет с моста.

Предположим, что контейнер с голубями воздухо- непроницаем (и не сообщается с внешней средой). Что можно сказать о рассуждениях водителя?

5. Наполните стакан водой и бросьте в него небольшой кусочек пробки. Покачиваясь на волнах, пробка «причалит» к стенке стакана. Можно ли заставить пробку плавать в центре стакана? В стакане не должно быть ничего, кроме воды и пробки.

6. В седьмой главе сказочной повести Льюиса Кэррола «Сильвия и Бруно (окончание)». Немецкий профессор рассказывает о том, что его соотечественникам нет необходимости отправляться в плавание, чтобы испытать все прелести боковой и килевой качки. Желая испробовать острые ощущения, жители страны, из которой прибыл Профессор, надевают на оси своих экипажей овальные колеса. Слушавший Профессора Барон замечает, что он способен понять, каким образом овальные колеса заставляют экипаж совершать килевую качку, но каким образом они вынуждают экипаж крепиться с борта на борт, ему совершенно неясно.

— Милорд, колеса повернуты относительно друг друга, — отвечает Профессор. — Когда одно из овальных колес, сидящих на общей оси, стоит на вершине, другое стоит на боку. Поэтому сначала поднимается одна сторона экипажа, затем — другая и при этом экипаж испытывает сильную килевую качку. Да, чтобы разъезжать в наших экипажах-лодках, надо быть хорошим моряком!

Можно ли в действительности так подобрать положения четырех овальных колес, чтобы экипаж, двигаясь, испытывал боковую и килевую качку, о которой рассказал Профессор?

7. Группа друзей решила провести выходной день на лоне природы.

— Захватил ли ты масло и уксус для заправки салата? — спросила миссис Смит своего мужа.

— Конечно! — ответил мистер Смит. — А чтобы не возиться с двумя бутылками, я слил их вместе в одну бутылку.

— Глупее ничего нельзя было придумать, — негодуя фыркнула миссис Смит. — Я люблю, когда в салате много масла и чуть-чуть уксуса, а Генриетта, наоборот, когда много уксуса и...

— Ты ошибаешься, дорогая. То, что я сделал, не так уж глупо, — прервал ее мистер Смит и, отмерив из одной бутылки нужные порции масла и уксуса, сумел заправить салат каждому участнику пикника по его вкусу. Как это ему удалось?

8. Представьте себе, что вы заперты в комнате, где (так же как и на вас самих) нет ничего металлического, кроме двух совершенно одинаковых с виду железных брусков. Один из брусков намагничен. Установить, какой именно, можно, подвесив каждый из брусков на нити, обвязанной вокруг середины бруска: намагниченный брусок будет вести себя, как стрелка компаса, то есть указывать на север. Нельзя ли более простым способом установить, какой из брусков намагничен?

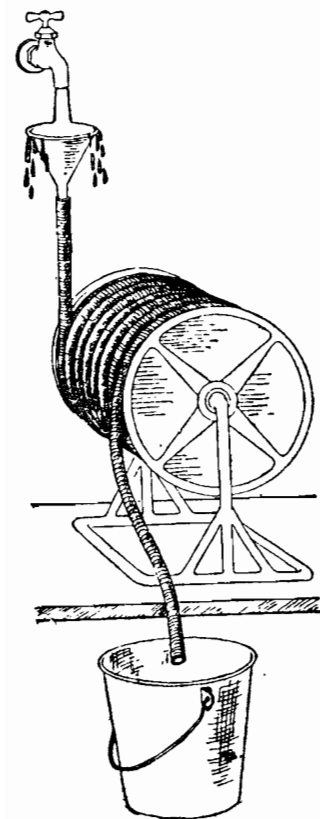
9. Кубик льда плавает в ведерке с водой. Вся система находится при температуре 0°C . К ней подводится такое количество тепла, которое достаточно для того, чтобы растопить лед, не изменив температуру системы. Что произойдет с уровнем воды в ведерке: он повысится, понизится или останется неизменным?

10. С потолка спортивного зала до пола свисают два каната, подвешенные примерно на расстоянии полуметра один от другого. Для соревнований по перетягиванию каната желательно использовать как можно большую часть обоих канатов. Срезать канаты вызвался искусный гимнаст. В зале нет ни лестницы, ни других предметов, на которые можно было бы встать, поэтому свою миссию смельчак может выполнить лишь одним-единственным способом: взобраться с ножом в зубы по канату и перерезать оба каната как можно выше. Потолок в зале так высок, что падение даже с $\frac{1}{3}$ его высоты неминуемо привело бы к гибели

гимнаста. Как следует ему поступить, чтобы отрезать как можно большую часть канатов?

11. Человек, возвращаясь вечером домой, идет по тротуару с постоянной скоростью и минует уличный фонарь. По мере удаления от фонаря тень человека становится все длиннее. Как движется при этом ее верхушка: быстрее, медленнее или с той же скоростью, с какой она двигалась, когда тень была короче?

12. Садовый шланг намотан на барабан диаметром 30 см, который стоит на скамейке (рис. 112). Один конец шланга опущен в ведро, другой смотан с барабана так, что его можно приподнять примерно на метр над барабаном. Шланг внутри пуст,



в нем нет ни пробок, ни крапов, и он нигде не перегнут. Вставим в верхний конец шланга воронку и начнем наливать в него воду. Казалось бы, вода должна непрерывно вытекать через нижний конец шланга в ведро. В действительности же происходит нечто иное: уровень воды в приподнятом конце шланга поднимается до тех пор, пока вода не начинает выплескиваться через края воронки. Из нижнего же конца шланга в ведро не падает ни капли воды. Объясните, почему так происходит.

13. Очищенное крутое яйцо трудно протолкнуть через горлышко бутылки из-под молока: мешает воздух, запертый внутри бутылки. Однако если в бутылку бросить кусочек го-

Рис. 112. Задача о садовом шланге.

рящей бумаги или несколько горящих спичек и лишь затем закупорить бутылку очищенным яйцом, то оно будет втянуто внутрь бутылки разрежением, которое образуется в результате того, что часть воздуха, расширяющегося при нагревании, выходит из бутылки. После того как яйцо окажется внутри бутылки, возникает вторая проблема: как извлечь его оттуда, не разбивая бутылки и не разрезая яйцо на части?

14. Маленький мальчик пускает в ванне игрушечную лодочку, груженную орехами и железками. Что произойдет с уровнем воды в ванне, если весь груз лодки будет «сброшен за борт» как ненужный балласт: поднимается он или опускается?

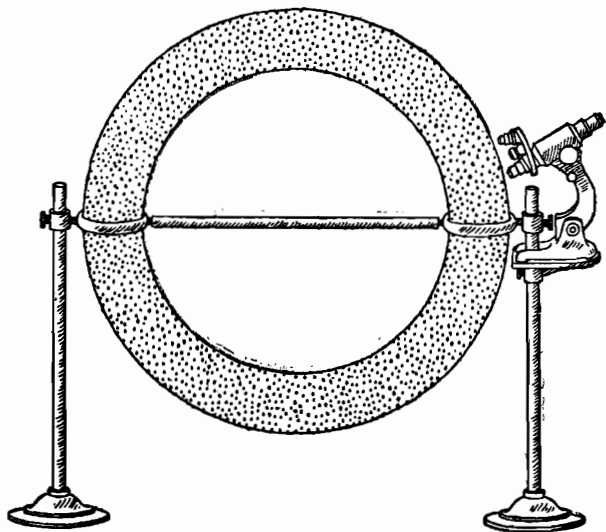
15. Папа, мама и их возлюбленное чадо отправляются на прогулку в собственной машине. День выдается холодный, поэтому окна в машине тщательно задраены. Ребенок сидит на заднем сиденье и держит за ниточку воздушный шарик, наполненный гелием. Шарик плавает под самой крышей машины. Что произойдет с шариком, если движение машины ускорится: останется он на месте, сдвинется вперед или назад? Как будет вести себя шарик на вираже?

16. Высказывалось предположение, что в далеком будущем космические станции можно будет оборудовать в искусственных полостях внутри больших астероидов или Луны. Представим себе, что мы находимся на полом астероиде, имеющем вид невращающейся сферической оболочки постоянной толщины. Как будет вести себя тело, находящееся внутри полости у ее стенки? Как оно будет двигаться под действием силы тяжести, создаваемой оболочкой: смещаться к оболочке, к центру астероида или плавать в том месте, куда его поместили?

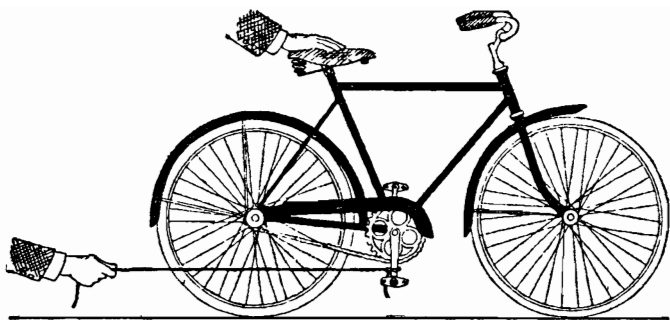
17. К спине птицы прикреплен небольшой баллончик с кислородом, позволяющий ей дышать на Луне. Известно, что сила тяжести на Луне меньше, чем на Земле. Как будет летать птица на Луне: быстрее, медленнее или с той же скоростью, как на Земле? Для удобства сравнения будем считать, что на Земле птица летает в тех же космических доспехах, что и на Луне.

18. На рис. 113 схематически изображено малоизвестное изобретение знаменитого физика Артура Х. Комптона. Внутри полого стеклянного тора диаметром примерно 1 м налита жидкость, в которой взвешены мелкие частицы. Жидкости дают отстояться, после чего тор быстро переворачивают на 180° вокруг горизонтальной оси. Наблюдая в микроскоп за движением взвешенных частиц, можно установить, возникает циркуляция жидкости или нет, и если возникает, то в каком направлении. Предположим, что вы вместе с комптоновским устройством находитесь в помещении без окон и не знаете, где находится север. Как, пользуясь этим устройством, определить страны света?

19. Аквариум, на $\frac{3}{4}$ наполненный водой, стоит на весах. Если вы пустите в аквариум живую рыбку, то весы покажут увеличение веса, равное весу рыбки. Предположим теперь, что вы держите рыбку за самый кончик ее хвоста, еле выступающий над поверхностью воды. Будут ли весы показывать при этом больший вес, чем в том случае, когда вы просто пустите рыбку в аквариум?



Р и с. 113. Тор Комптона.

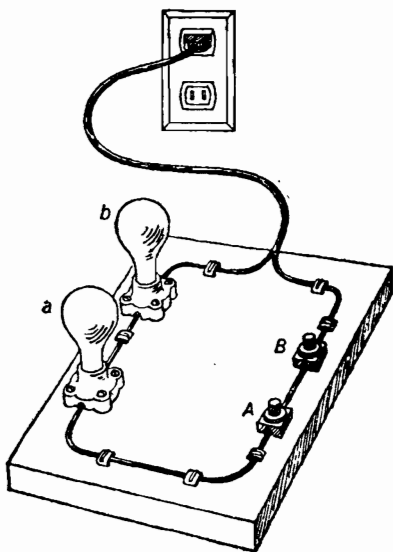


Р и с. 114. Задача о велосипеде.

20. Вербка привязана к педали велосипеда так, как показано на рис. 114. Представьте себе, что вы тянете за веревку, а ваш приятель слегка придерживает велосипед за седло, не давая ему упасть. Что произойдет с велосипедом: поедет ли он вперед, назад или останется на месте?

21. Вербка привязана к корме спущенной на воду лодки. Может ли человек, стоящий в лодке, привести ее в движение, дергая за свободный конец веревки? Можно ли аналогичным образом привести в движение космический корабль, дрейфующий в межпланетном пространстве?

22. Имеются пластинки золота одинаковой пробы двух размеров: 10- и 20-долларовые. Что дороже: килограмм 10-долларовых пластинок или полкилограмма 20-долларовых?



Р и с. 115. Загадочная цепь.

23. Забавную игрушку можно собрать из двух ламп (желательно, чтобы одна из ламп была матовой) и двух выключателей. Лампы и выключатели соединяются последовательно (рис. 115) и подключаются к обычной сети переменного тока. Если оба выключателя находятся в положении «включено», то горят обе лампы. Если одну лампу вывернуть, то вторая лампа, как и следовало ожидать, продолжает гореть. Если оба выключателя находятся в положении «выключено», то обе лампы не горят. Если выключатель *A* находится в положении «включено», а выключатель *B* — в положении «выключено», то горит лишь лампа *a*. Если в положении «включено» находится выключатель *B*, а выключатель *A* находится в положении «выключено», то горит лишь лампа *b*. Иными словами, каждый выключатель управляет «своей» лампой независимо от другого. Еще более непонятно другое: если лампы поменять местами, то выключатель *A* будет по-прежнему управлять лампой *a*, а выключатель *B* лампой *b*. В деревянной доске, на которой смонтирована цепь, нет никаких потайных устройств. На чем основан нехитрый «секрет» загадочной цепи?

ОТВЕТЫ

1. Когда песок находится в верхней части песочных часов, их центр тяжести расположен высоко над основанием и часы слегка наклоняются. (Верх и донышко часов для этого специально сделаны слегка выпуклыми.) Трение между часами и стенкой цилиндра достаточно велико, чтобы удерживать часы на дне цилиндра. По мере пересыпания песка из верхней части часов в нижнюю часы выпрямляются, трение о стенку цилиндра ослабевает и часы всплывают.

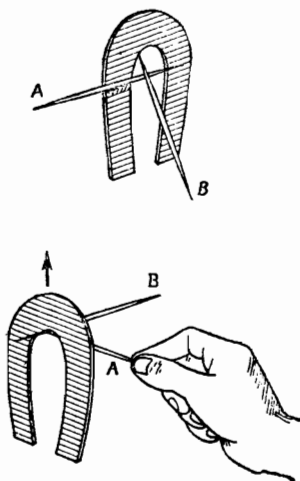
Если часы немного тяжелее вытесненной ими воды, то игрушка действует «наоборот»: песочные часы большую часть времени покоятся на дне цилиндра, после переворачивания цилиндра остаются вверх и опускаются на дно лишь тогда, когда пересыпающийся песок уменьшит трение между часами и стенкой цилиндра. Иногда встречается комбинированный вариант игрушки с двумя цилиндрами. Если их одновременно перевернуть, то в одном из них часы после пересыпания песка всплывут, а в другом опустятся на дно.

2. Железный «бублик» при нагревании расширяется, пропорционально увеличиваются при этом и все его размеры. Следовательно, увеличатся и размеры «дырки от бублика». Этим обстоятельством пользуется и мастер-оптик, нагревающий оправу очков, чтобы из-

Р и с. 116. Решение головоломки с подковой и зубочисткой.

влекать из нее линзу, и домашняя хозяйка, нагревая тугую открывающуюся крышку банки, чтобы ее можно было снять без труда.

3. Введите зубочистку *A* между картонной подковой и зубочисткой *B*. Отожмите зубочисткой *A* подкову так, чтобы конец зубочистки *B* оперся на зубочистку *A* (рис. 116). Затем подведите конец зубочистки *B* под подкову и поднимите подкову вместе с зубочисткой *B*, защемленной между ней и зубочисткой *A*.



4. Водитель ошибается. Вес изолированного от внешней среды контейнера с птицей равен весу «пустого» контейнера (с воздухом) плюс вес птицы, если только птица не взлетает и ее движение не имеет ускоренной вертикальной составляющей. Ускорение, направленное вниз, уменьшает вес системы, ускорение, направленное вверх, увеличивает его. Если птица внутри контейнера находится в состоянии свободного падения, то вес системы уменьшается на величину, равную весу птицы. При горизонтальном полете взмахи крыльев создают небольшие ускорения, направленные попеременно то вверх, то вниз. Двести голубей, беспорядочно летающих внутри контейнера, который находится в кузове грузовика, создадут небольшие, быстро меняющиеся флуктуации веса, но не изменят среднего веса системы.

5. Пробка будет плавать в центре стакана лишь в том случае, если он наполнен чуть выше краев. Поверхностное натяжение воды придаст свободной поверхности воды небольшую выпуклость.

6. Каждая пара овальных колес, насаженных на одну ось, у экипажей Льюиса Кэррола повернута относительно друг друга так, что их большие оси взаимно перпендикулярны. Этим достигается боковая качка. Если бы большие оси колес, находящихся с одной и той же стороны экипажа, были также повернуты на 90° относительно друг друга, то пассажиры экипажа не испытывали бы ни боковой, ни килевой качки. Экипаж просто то поднимался, то опускался бы сначала на одной паре колес, расположенных по диагонали, затем — на другой. Однако если большие оси колес, находящихся с одного борта экипажа, повернуты относительно друг друга на 45° , то экипаж великолепнейшим образом испытывает и боковую и килевую качку. Каждое колесо при движении экипажа будет то касаться земли, то отрываться от нее в чарующей «четырёхтактной» последовательности.

7. Масло плавает поверх уксуса. Чтобы полить винегрет укусом, мистер Смит затыкает бутылку пробкой, переворачивает ее и, вытащив слегка пробку, отмеряет требуемое количество уксуса.

8. Дотроньтесь концом одного бруска до середины другого. Если вы почувствуете магнитное притяжение, то брусок, которым вы дотрагивались, намагничен. Если притяжения не возникнет, то в руках у вас находится ненамагниченный брусок.

9. Уровень воды в ведерке останется неизменным. Кубик льда не тонет лишь потому, что вода, из которой он состоит, при замерзании расширилась. Вес же кубика льда равен весу воды, образующейся при его таянии. Поскольку всякое плавающее тело вытесняет количество воды, вес которого равен весу тела, растаявший кубик пополнит запас воды в ведерке как раз на то количество воды, которое он вытеснял до таяния.

10. Прежде всего гимнаст должен связать свободные концы канатов (для удобства обозначим один из канатов *A*, другой — *B*). Затем он взбирается по канату *A* под потолок спортивного зала и перерезает канат *B*, оставив лишь такую его часть, из которой можно связать петлю. Уцепившись за эту петлю, гимнаст повисает на ней и перерезает канат *A* у самого потолка (приняв все необходимые меры предосторожности, чтобы не выронить отрезанный канат!), продвигает конец каната *A* сквозь петлю и протаскивает канат до тех пор, пока в петле не оказывается середина «суммарного» каната, связанного из *A* и *B*. Спустившись по сложенному вдвое канату, гимнаст без труда выдергивает его из петли. Таким образом, ему удастся получить весь канат *A* и почти весь канат *B*.

11. Когда человек проходит мимо уличного фонаря, верхушка тени движется быстрее человека, но с постоянной скоростью, не зависящей от длины тени.

12. Небольшое количество воды, пройдя первый виток шланга, попадает в нижнюю часть второго витка и образует воздушную ловушку. Воздух в ловушке запирает шланг и не дает воде проникнуть даже в первый виток шланга.

13. Чтобы извлечь очищенное крутое яйцо из бутылки, отклоните назад голову и, держа бутылку горлышком вниз, приложите ее к губам и изо всех сил подуйте в нее. Стоит вам отнять бутылку от губ, как сжатый воздух вытолкнет яйцо из горлышка.

14. Орехи и железки, находясь в игрушечной лодочке, вытесняют количество воды, вес которого равен их весу. «Сброшенные за борт», они опускаются на дно ванны, вытесняя при этом количество воды, объем которого равен их суммарному объему. Поскольку каждая железка весит гораздо больше воды, занимающей ее объем, уровень воды в ванне после разгрузки понизится.

15. Когда машина с тщательно задраенными окнами и плотно закрытыми дверцами испытывает ускорение, направленное вперед, силы инерции заставляют воздух в машине двигаться назад. В результате воздух за шариком оказывается более сжатым, чем перед ним, и шарик отклоняется вперед. Когда машина проходит вираж, шарик по той же причине смещается по направлению к центру закругления.

16. Во всех точках внутри полого астероида сила тяжести равна нулю.

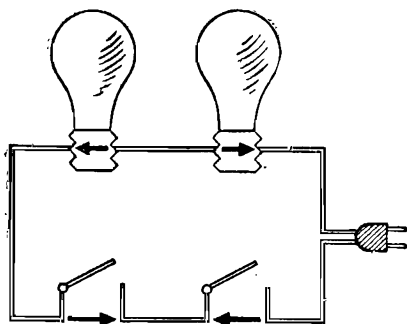
17. На Луне, лишенной атмосферы, птица летать не может.

18. Если стеклянный тор расположен в вертикальной плоскости, идущей с запада на восток, и его повернули на 180° вокруг оси, концы которой указывают на запад и на восток, то, глядя на тор в направлении с юга на север, вы увидите, как жидкость в нем под действием кориолисовых сил начнет циркулировать против часовой стрелки. Так происходит потому, что до того, как вы перевернули тор, жидкость, находившаяся в его верхней части, двигалась на восток (относительно центра Земли) с большей скоростью, чем жидкость в нижней части тора, поскольку суточное вращение Земли заставляет жидкость в верхней части тора описывать окружность большего радиуса. После того как вы перевернули тор, жидкость, движущаяся быстрее, оказалась внизу, а жидкость, движущаяся медленнее, — вверху, вследствие чего возникла циркуляция жидкости, которая может продолжаться. Интенсивность циркуляции убывает по мере отклонения плоскости тора от направления с запада на восток, достигая нуля для вертикальной плоскости, расположенной в меридиональном направлении (то есть с севера на юг). Таким образом, направление восток — запад можно определить, устанавливая прибор Комптона в различных ориентациях до тех пор, пока интенсивность циркуляции не станет максимальной.

19. Вес аквариума увеличивается на все количество жидкости, вытесненной погруженной в воду частью тела рыбки.

20. Потянув за веревку, привязанную к нижней педали, вы заставите педали вращаться по часовой стрелке. Велосипед, педали которого вращаются в эту сторону, обычно едет вперед, но, поскольку в рассматриваемом случае тормозная втулка не работает, ничто не мешает велосипедисту поехать в ту сторону, куда его тянет веревка. Большие размеры велосипедных колес и небольшое передаточное число для pedalной шестерни и шестерни, закрепленной на заднем колесе, приводят к тому, что велосипед действительно едет назад. Педаль также движется назад относительно земли, хотя относительно велосипеда она вращается вперед. Когда педаль поднимется достаточно высоко, сработает тормозная втулка и велосипед остановится. Тому, из читателей, кто не поверит нам на слово, мы советуем взять велосипед и самому все проделать.

21. Лодку можно заставить двигаться вперед, дергая за веревку, привязанную к корме. В стоячей воде лодка, приводимая в движение таким своеобразным способом, может развить скорость, достигающую нескольких километров в час. Когда тело человека, находящегося в лодке, наклоняется к ее носу, сила трения между лодкой и водой не позволяет лодке сколь-нибудь существенно отойти назад. Сила же инерции рывка достаточно велика для того, чтобы преодолеть сопротивление воды и сообщить лодке импульс, направленный вперед. Движение ребенка, сидящего в картонной коробке и заставляющего ее сильными рывками вперед скользить по навощенному полу, объясняется аналогичным образом. В космосе такой «инерциальный привод» становится невозможным, поскольку близкая к вакууму межпланетная среда не способна оказать достаточно сильного сопротивления кабине корабля.



Р и с. 117. Схема электрической цепи.

22. Килограмм 10-долларовых пластинок содержит вдвое больше золота, чем полкилограмма 20-долларовых и, следовательно, стоит вдвое дороже.

23. В основании каждой лампы и каждого выключателя спрятан небольшой кремниевый выпрямитель, пропускающий электрический ток лишь в одном направлении. Схема цепи изображена на рис. 117. Стрелками указано направление, в котором пропускает ток каждый выпрямитель. Если ток движется в направлении, «запрещенном» выпрямителем, который находится в основании лампы, то выпрямитель «запрет» лампу и она не загорится. Нетрудно видеть, что каждый выключатель управляет лишь той лампой, у которой выпрямитель пропускает ток в ту же сторону, что и выпрямитель, спрятанный в основании выключателя.

ГЛАВА 15

СТЕГАНОЕ ОДЕЯЛО МИССИС ПЕРКИНС

Английский физико-математический журнал *The Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* — солидное издание, менее всего склонное к мистификациям и легкомысленным шуткам, — в июле 1964 г. озадачил своих читателей, опубликовав статью под названием «Стеганое одеяло миссис Перкинс». Написанная

Дж. Х. Конуэем*, эта статья носит отнюдь не популярный и не развлекательный характер: она посвящена рассмотрению одной из наиболее «бесполезных», но увлекательных нерешенных задач занимательной геометрии.

Названная задача принадлежит к обширному семейству комбинаторных задач на составление квадратов из других квадратов меньших размеров. Наибольшей известностью в этом семействе пользуется задача о составлении квадрата из набора попарно различных квадратов (большой квадрат должен быть «вымощен» неповторяющимися меньшими квадратами без пробелов и перекрытий). Представим себе, что мы рисуем квадраты на бумаге в клетку. Тогда наименьший квадрат, который допускает разбиение на попарно различные квадраты, имеет размеры 175×175 единичных клеток и состоит из 24 меньших квадратов. Он изображен в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» на рис. 171 (стр. 323). Глава 32 этой книги посвящена рассказу Уильяма Т. Татта о том, как ему и его товарищам удалось решить задачу о «квадрировании квадрата» с помощью теории электрических цепей.

Задача о стеганом одеяле миссис Перкинс (названная так предложившим ее английским мастером головоломок Генри Э. Дьюдени) по существу совпадает с рассмотренной Таттом, но условия ее менее ограничительны: меньшие квадраты не обязательно должны быть различными.

Условимся называть порядком квадрата, начерченного на бумаге в клетку, число единичных клеток, примыкающих к его стороне. Ясно, что квадрат порядка n можно разбить на n^2 единичных квадратов. Однако задача состоит в том, чтобы определить наименьшее число квадратов, на которые можно разбить данный квадрат. На первый взгляд «одеяло миссис Перкинс» кажется не более чем облегченным вариантом задачи Татта. В действительности же, отбрасывая условие о попарном различии квадратов, мы существенно не упрощаем решения задачи.

Чтобы получить представление о том, как происходит поиск решения задачи о стеганом одеяле миссис Перкинс, лучше всего начать с рассмотрения квадратов

* Читатели книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» знают Дж. Х. Конуэя как автора игры «Жизнь» (гл. 38). О другой его игре см. гл. 23 этой книги. — *Прим. перев.*

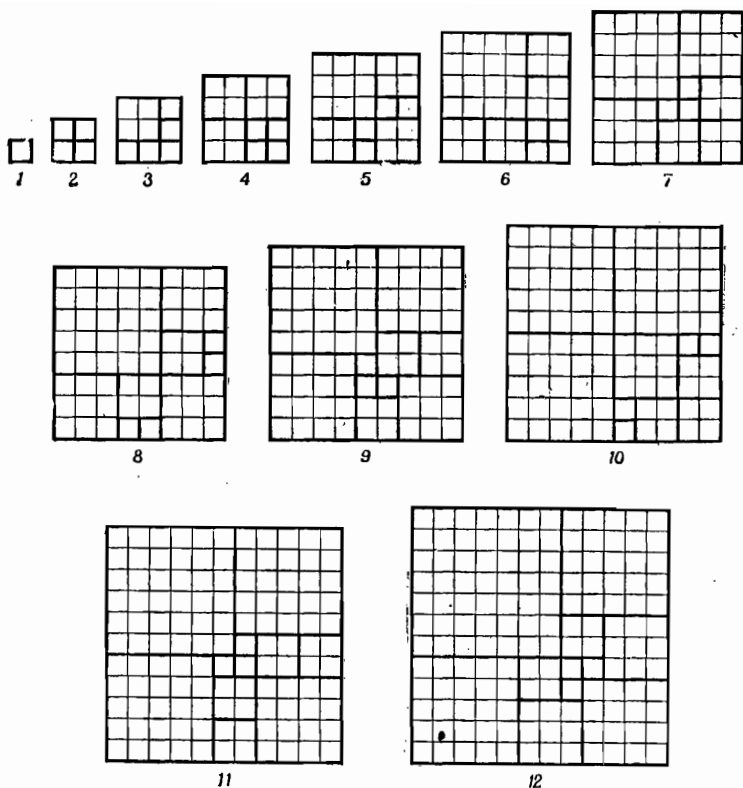
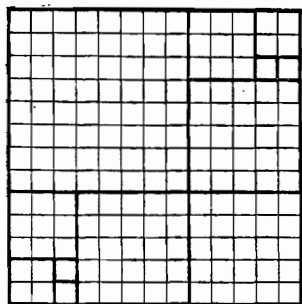


Рис. 118. Решение задачи о стеганом одеяле миссис Перкинс для квадратов порядка от 1 до 12.

наименьших порядков (рис. 118). Для квадратов порядков 1 и 2 решения тривиальны. Квадрат порядка 3 допускает разбиение на 6 квадратов (пять квадратов порядка 1 и один квадрат порядка 2). Если не считать поворотов и отражений, то разбиение квадрата порядка 3, изображенное на рис. 118, единственно. Число 4 кратно 2, поэтому квадрат порядка 4 так же, как и квадрат порядка 2, допускает разбиение на 4 одинаковых квадрата. Поскольку такое разбиение представляет собой не что иное, как увеличенный вдвое («раздутый») вариант разбиения квадрата порядка 2, введем новое дополнительное условие: потребуем, чтобы порядки квадратов,

на которые разбивается данный квадрат, были взаимно просты, то есть не имели общих делителей. Тогда наименьшее число квадратов, на которые можно разбить квадрат порядка 4, станет равным 7 (схема разбиения показана на рис. 118). Разбиение, удовлетворяющее дополнительному условию (отсутствие общих множителей у порядков квадратов, составляющих данный квадрат), называется «взаимно простым разбиением». Если порядок квадрата выражается простым числом, то любое разбиение такого квадрата будет взаимно простым. Если порядок квадрата выражается составным числом, то отнюдь не всякое его разбиение будет взаимно простым. Поэтому, получив разбиение квадрата составного порядка, необходимо убедиться в том, что оно взаимно просто, ибо в противном случае минимальное разбиение квадрата будет всего лишь тривиальным повторением минимального разбиения квадрата, порядок которого совпадает с наименьшим из множителей, содержащимся в разложении порядка исходного квадрата. Итак, задача о стеганом одеяле миссис Перкинс точно формулируется следующим образом: найти минимальное взаимно простое разбиение квадрата произвольного порядка. (Условимся в дальнейшем для краткости называть взаимно простые разбиения простыми разбиениями.) Решения задачи для квадратов порядка от 1 до 12 представлены на рис. 118.

Если порядок квадрата совпадает с одним из чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих), то при минимальном симметричном простом разбиении стороны меньших квадратов также выражаются числами Фибоначчи. Для квадратов порядка 1, 2, 3, 5 и 8 (рис. 118) минимальное симметричное разбиение совпадает с минимальным разбиением, но для квадрата порядка 13 это уже не так. Симметричное разбиение квадрата порядка 13 на квадраты, стороны которых выражаются числами Фибоначчи, показано на рис. 119. Удастся ли вам получить минимальное разбиение квадрата порядка 13? (В отличие от симметричного разбиения, содержащего 12 квадратов, минимальное разбиение содержит всего лишь 11 квадратов. Оно несимметрично, то есть не переходит в себя при зеркальном отражении.) Задача имеет единственное решение.



13

Р и с. 119. Симметричное разбиение квадрата порядка 13.

Сколь ни увлекателен поиск минимального разбиения для квадрата данного порядка, он все же уступает заветной цели — отысканию общего метода, позволяющего находить

минимальные простые разбиения для квадратов любых порядков, и формулы, выражающей минимальное число участвующих в разбиении квадратов как функцию порядка «разбиваемого» квадрата. Задача о стеганом одеяле миссис Перкинс пока остается неприступной: мы не располагаем ни общим методом ее решения, ни общей формулой. Конуэй доказал, что число квадратов, участвующих в минимальном простом разбиении квадрата порядка n , не меньше $\log_2 n$ и не больше $6\sqrt[3]{n} + 1$. В 1965 г. верхнюю оценку Конуэя удалось улучшить: Дж. Б. Траструм показал, что число квадратов в минимальном простом разбиении не превышает $6 \log_2 n$. Однако и в усиленном варианте оценки еще весьма далеки от явной формулы для числа квадратов, участвующих в разбиении.

В своей статье Конуэй упоминает работу Лео Мозера, также посвященную решению задачи о стеганом одеяле миссис Перкинс. Лео Мозеру принадлежат также решения и других, не менее интересных задач, связанных с составлением квадрата из других квадратов меньших размеров. Рассмотрим, например, квадраты, длины сторон которых совпадают с членами гармонического ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$. По мере увеличения числа таких квадратов сумма длин их сторон неограниченно возрастает, но их площади образуют другой ряд $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$, который сходится к несколько неожиданному пределу, равному $\pi^2/6 - 1$ (собственно, неожиданно в этом пределе появление числа π). Нетрудно убедиться, что $\pi^2/6 - 1$ чуть больше 0,6. Лео Мозер был первым, кто задумался над вопросом: можно ли разме-

равна 1, внутри единичного квадрата помещается бесконечно много таких полос. «Гармонические» квадраты в порядке убывания их размеров выстраиваются внутри полосок («левофланговый» квадрат внутри каждой полоски строго соответствует ей по ширине). Таким способом бесконечную последовательность квадратов удастся с комфортом разместить внутри единичного квадрата, причем чуть меньше 0,4 его площади остается свободной. Лео Мозеру и его сотруднику Дж. У. Муну удалось довести задачу до ее естественного предела — «изъять все излишки». Они доказали, что бесконечную последовательность «гармонических» квадратов можно разместить в квадрате со стороной $\frac{5}{6}$, но нельзя разместить ни в каком квадрате меньших размеров. Им же принадлежит и ряд других результатов, в том числе изящное доказательство того, что любой набор квадратов, суммарная площадь которых равна 1, можно расположить внутри квадрата площадью в 2 единицы так, что никакие два квадрата, входящие в набор, не будут перекрываться.

Одна из наиболее удивительных задач, связанных с составлением большого квадрата из квадратов меньших размеров, была предложена Ричардом Б. Бриттоном. Прочитав статью Татта о квадрировании квадрата — разбиении его на попарно различные квадраты, — Бриттон задал себе вопрос: нельзя ли разбить квадрат на меньшие квадраты со сторонами, длина которых выражается последовательными натуральными числами 1, 2, 3, 4, 5, ... Такое разбиение было бы возможно в том случае, если частичная сумма ряда площадей $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots$ при каком-то n (числе квадратов) достигала значения, которое является квадратом какого-то числа. Оказывается, что это происходит лишь при $n=24$. Частичная сумма $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = 4900 = 70^2$. Любопытно, что ни при каком другом n частичная сумма ряда $1 + 4 + \dots$ не равна квадрату целого числа.

Доказательство уникальности числа 4900 имеет любопытную историю и тесно связано с одной разновидностью трехмерных «фигурных» чисел, известных под названием пирамидальных чисел. Член последовательности пирамидальных чисел с номером n указывает, из скольких ядер можно сложить правильную четырехугольную пирамиду в n слоев так, что в верхнем ее слое будет находиться 1 ядро, в следующем — 4 ядра, затем —

9 ядер и т. д. Нетрудно видеть, что n -я частичная сумма ряда пирамидальных чисел равна $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Формула, выражающая n -ю частичную сумму как функцию n , известна: она имеет вид

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

В старинной задаче, приводимой во многих книгах по занимательной математике, требуется найти наименьшее число ядер, из которых можно было бы сложить и правильную четырехугольную пирамиду, и однослойный квадрат. С точки зрения алгебры задача сводится к отысканию наименьших целых положительных значений m и n , удовлетворяющих диофантову уравнению

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = m^2.$$

Французский математик Эдуард Люка, а позднее и Генри Э. Дьюдени высказали предположение о том, что $n = 24$ и $m = 70$ — единственная пара целых положительных чисел (если не считать тривиального случая $n = 1$, $m = 1$), удовлетворяющая этому уравнению. Иначе говоря, 4900 — единственное число, большее 1, которое является одновременно квадратным и пирамидальным. Доказать правильность гипотезы Люка и Дьюдени удалось лишь в 1918 г. Дж. Н. Ватсону.

Итак, единственной шахматной доской, на разрезание которой резать вдоль линий, разделяющих клетки, на доски размером 1×1 , 2×2 , 3×3 и т. д. еще можно надеяться, будет лишь доска 70×70 . Хотя невозможность такого разбиения квадрата не доказана, результаты Татта и его коллег делают его маловероятным. Найти строгое доказательство невозможности разбиения, по-видимому, не очень

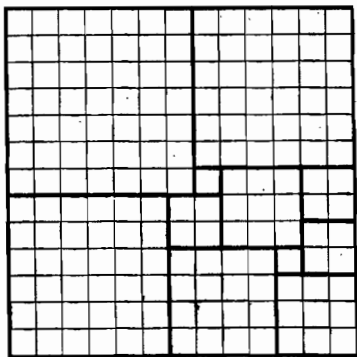
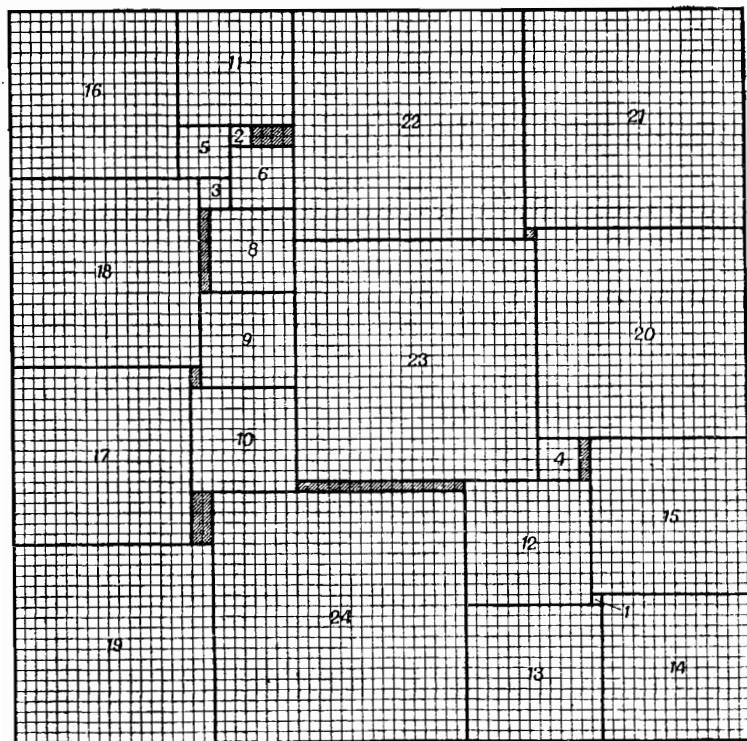


Рис. 121. Решение задачи о минимальном простом разбиении квадрата порядка 13.

трудно. Гораздо интереснее другой вопрос (в этом и состоит задача Бриттона): какова наибольшая площадь части квадрата порядка 70, которую можно покрыть квадратами из набора квадратов последовательных порядков от 1 до 24? (Разумеется, использовать все 24 квадрата невозможно.) Квадраты не должны попарно перекрываться и выступать за границы большого квадрата порядка 70. Несмотря на упорные усилия, окончательное решение задачи Бриттона до сих пор не получено.

ОТВЕТЫ

Решение задачи о минимальном простом разбиении квадрата порядка 13 (на 11 меньших квадратов) показано на рис. 121. Для тех читателей, которых заинтересует отыскание минимальных раз-



Р и с. 122. Задача о наиболее плотном покрытии квадрата порядка 70.

биений для квадратов более высоких порядков, сообщая, что квадраты порядков от 14 до 17 допускают минимальные простые разбиения на 12 квадратов, квадраты порядков от 18 до 23 — на 13 квадратов, квадраты порядка от 24 до 29 — на 14 квадратов, квадраты порядка от 30 до 39 и 41 — на 15 квадратов. (Квадрат порядка 40 очевидным образом допускает разбиение на 16 квадратов.) Данные о числе квадратов в минимальном простом разбиении квадратов перечисленных порядков заимствованы из статьи Дж. Х. Конуэя. Как сообщил Конуэй, особенно трудно найти минимальное простое разбиение (на 15 квадратов) квадрата порядка 41.

В лучших из известных решений задач Бриттона незакрытой остается лишь часть квадрата площадью в 49 квадратный единиц, что составляет ровно 1% от всей площади квадрата порядка 70. Во всех этих решениях используются квадраты порядков от 11 до 24 (расположение меньших квадратов внутри большого квадрата одинаково с точностью до поворотов и отражений и перестановок квадратов порядка 17 и 18) и отсутствует лишь квадрат порядка 7. Минимальность решения остается недоказанной. Одно из лучших решений изображено на рис. 122.

ГЛАВА 16

МОЖНО ЛИ НАГЛЯДНО ПРЕДСТАВИТЬ СЕБЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНУЮ ФИГУРУ?

Способен ли человеческий разум наглядно представлять себе четырехмерные фигуры?

Знаменитый немецкий физик и физиолог Гельмгольц утверждал, что способность видеть четырехмерные фигуры присуща человеку. Необходимо лишь снабдить мозг надлежащими «входными данными». К сожалению, наш повседневный опыт ограничен трехмерным пространством и в нашем распоряжении нет никаких научных данных, которые позволяли бы утверждать, что четырехмерное пространство действительно существует. (Четырехмерное евклидово пространство не следует смешивать с четырехмерным неевклидовым пространством-временем теории относительности, в котором роль четвертой координаты играет время.) Тем не менее при надлежащей тренировке человек мог бы развить в себе способность наглядно представлять четырехмерный гиперкуб (тессе-

ракт). «Человеку, который посвятил бы этой задаче всю жизнь, — писал Анри Пуанкаре, — вероятно, удалось бы мысленно представить себе четвертое измерение». Чарлз Говард Хинтон, эксцентричный американский математик, некогда преподававший в Принстонском университете и написавший популярную книгу «Четвертое измерение», разработал особую систему, которая позволяет складывать из разноцветных кубиков трехмерные модели различных сечений четырехмерного гиперкуба. Хинтон полагал, что человек, достаточно долго игравший его «игрушкой», в конце концов обретет интуитивное представление о четырехмерном пространстве. «Я не могу утверждать этого со всей определенностью, — писал он, — ибо мне не хотелось бы/быть причиной напрасной траты времени другими людьми в том случае, если я ошибаюсь (что отнюдь не исключено). Что же касается меня лично, то я считаю, что мне удалось развить зачатки четырехмерной интуиции...»

Разноцветные кубики Хинтона слишком сложны, чтобы их можно было описать или объяснить их устройство *здесь* (свою систему тренировки четырехмерной интуиции Хинтон подробно изложил в специальной книге, вышедшей в 1910 г. под названием «Новая эра мышления»). Однако ничто не мешает нам, изучая простейшие свойства четырехмерного гиперкуба, сделать первые шаги к той чудесной способности видения четырехмерных фигур, которую начал ощущать в себе Хинтон.

Возьмем точку и сдвинем ее вдоль прямой на расстояние, равное единице (рис. 123, *а*). Каждую точку единичного отрезка можно «занумеровать», поставив ей в соответствие число, заключенное между 0 и 1. Сдвинем теперь единичный отрезок на единичное расстояние в направлении, перпендикулярном прямой, на которой лежит сам отрезок (рис. 123, *б*). Единичный отрезок опишет при этом («заметет») единичный квадрат. Обозначим одну из вершин квадрата 0, а концы его сторон, пересекающихся в «нулевой» вершине, — 1. Вводя таким образом систему координат x и y , мы можем поставить в соответствие каждой точке квадрата упорядоченную пару чисел — ее координаты. Следующий этап построения гиперкуба так же ясен, как и предыдущие: сдвинем единичный квадрат на расстояние, равное единице, в направлении, перпендикулярном осям x и y (рис. 123, *в*),

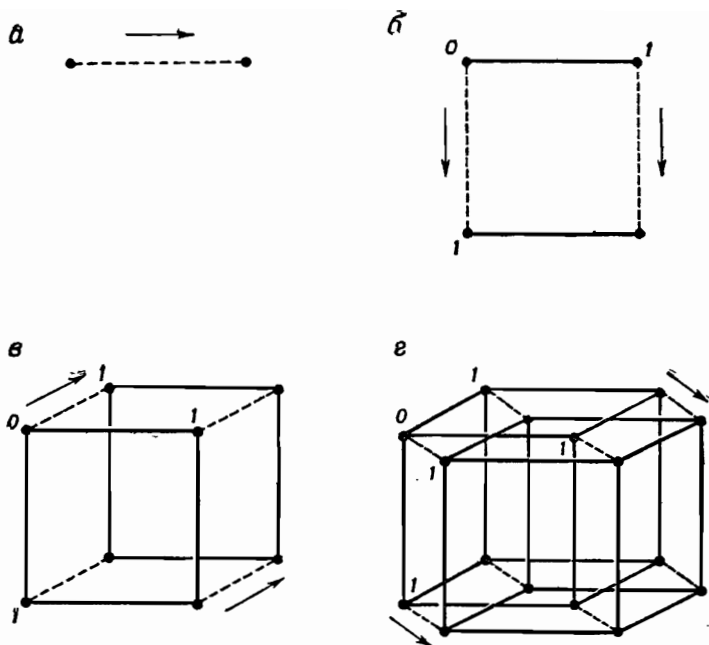


Рис. 123. Последовательные этапы построения гиперкуба.

и получим единичный куб. Выбрав за оси x , y и z три ребра, сходящихся в одной из вершин куба, поставим в соответствие точкам куба упорядоченные тройки чисел — координаты x , y , z точек.

Хотя наше геометрическое воображение на следующем этапе построения гиперкуба становится бессильным, логически ничто не мешает нам сдвинуть единичный куб на расстояние, равное единице, в направлении, перпендикулярном всем трем осям: x , y и z (рис. 123, г). Фигура, которая получится в результате сдвига, и будет единичным гиперкубом. В каждой из вершин гиперкуба сходятся по 4 взаимно перпендикулярных ребра. Выбрав любую из вершин гиперкуба за начало координат, а сходящиеся в ней ребра — за оси координат w , x , y , z , мы сможем поставить в соответствие каждой точке гиперкуба упорядоченную четверку чисел. Аналитическая геометрия позволяет обращаться с этими упорядоченными четверками чисел так же, как обращаются

с упорядоченными парами чисел в планиметрии или с упорядоченными тройками чисел в геометрии трехмерного пространства. Более того, евклидову геометрию точно таким же образом можно обобщить на случай пространства любого целого и положительного числа измерений. При каждом n пространство будет евклидовым, хотя его топологические свойства при переходе от одного n к другому будут изменяться: квадрат нельзя непрерывно деформировать в отрезок прямой, куб — в квадрат, гиперкуб — в куб и т. д.

Свойства четырехмерных фигур можно изучать различными способами. Можно доказывать, например, теоремы четырехмерной геометрии, выводя их из аксиом и ранее доказанных теорем. Можно действовать иначе: ввести систему координат w, x, y, z и изучать уравнения, описывающие интересующие нас геометрические места точек. Однако четырехмерный гиперкуб выделяется среди прочих четырехмерных фигур своими особенно простыми свойствами, и поэтому о многих из них мы можем получить довольно полное представление по аналогии с его «младшими братьями» — кубом, квадратом и отрезком прямой, — оставаясь на интуитивном уровне.

Отрезок прямой имеет две конечные точки. Вершины квадрата, порожденного движением отрезка, можно разбить на две пары: начальное и конечное положения концов отрезка. Следовательно, число вершин квадрата вдвое больше числа концов отрезка прямой, то есть равно четырем. Две прямолинейно движущиеся точки порождают два отрезка прямых. Кроме того, сам отрезок также движется и, следовательно, занимает определенное начальное и конечное положения. Таким образом, к двум отрезкам, прочерченным концами отрезка, следует присоединить еще два отрезка, с которыми совпадает исходный отрезок в начале и в конце движения. Следовательно, число отрезков прямых, ограничивающих квадрат, равно четырем. Аналогично этому куб, порожденный движением квадрата, имеет восемь вершин — вдвое больше, чем у квадрата, поскольку вершины куба можно рассматривать как начальное и конечное положения вершин квадрата. При движении каждая из вершин квадрата описывает отрезок прямой. Эти четыре «новорожденных» ребра следует прибавить к четырем сторонам квадрата в начальном положении и четырем

сторонам квадрата в его конечном положении. Следовательно, полное число ребер у куба равно $4 + 4 + 4 = 12$. Ребра куба ограничивают $1 + 1 + 4 = 6$ граней: две грани ($1 + 1$) — начальное и конечное положения квадрата, порождающего куб, остальные грани — «новорожденные».

Предположим теперь, что обычный трехмерный куб мы передвинули на единичное расстояние в направлении четвертой оси, перпендикулярной трем остальным. Наглядно изобразить эту ось мы не в состоянии, поскольку осуждены на пожизненное заточение в трехмерном пространстве, но сосчитать основные элементы четырехмерного гиперкуба все же можем. Сосчитав каждую вершину трехмерного куба дважды — в ее начальном и конечном положениях, — найдем, что у гиперкуба имеется $2 \times 8 = 16$ вершин. Каждая вершина трехмерного куба, двигаясь, описывает единичный отрезок — одно из ребер гиперкуба. Всего таких ребер столько, сколько вершин у трехмерного куба, то есть 8. Присоединив к ним 12 ребер, служащих ребрами трехмерного куба в его начальном положении, и 12 ребер трехмерного куба в конечном положении, обнаружим, что у гиперкуба насчитывается $8 + 12 + 12 = 32$ ребра. А сколько у гиперкуба двумерных граней — квадратов? Каждое из 12 ребер куба порождает 1 квадрат, но к этим 12 «новоиспеченным» граням мы должны еще прибавить 6 граней куба в начальном положении и 6 — в конечном. Таким образом, у четырехмерного гиперкуба имеются $12 + 6 + 6 = 24$ двумерные грани.

Не следует думать, будто гиперкуб ограничен этими 24 гранями. Они лишь образуют скелет гиперкуба так же, как ребра обычного трехмерного куба образуют его скелет. Куб ограничен двумерными гранями, имеющими форму квадрата. Гиперкуб ограничен трехмерными гранями, имеющими форму куба. Перемещая куб на единичное расстояние вдоль «невообразимой» четвертой координаты, мы заставляем каждую из его граней-квадратов перемещаться на единичное расстояние вдоль перпендикулярного ей направления и, следовательно, порождать куб. К шести кубам, порожденным гранями исходного куба, следует прибавить еще два: исходный куб в начальном и конечном положениях. Таким образом, у четырехмерного гиперкуба имеется 8 трехмерных

кубических граней. Они-то и ограничивают гиперкуб, образуя его гиперповерхность.

Число элементов в «кубах» пространств размерности от 0 до 4 приведено в следующей таблице.

Размерность пространства	Вершины (точки)	Ребра (отрезки прямых)	Двумерные грани (квадраты)	Трехмерные грани (кубы)	Гиперкубы
0	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
2	4	4	1	0	0
3	8	12	6	1	0
4	16	32	24	8	1

Эту таблицу с помощью простого, но оттого не менее удивительного приема можно продолжить до сколь угодно больших значений n . Заметим, что числа, стоящие в n -й строке (n — размерность пространства), совпадают с коэффициентами разложения бинома $(2x + 1)^n$. Например, при $n = 1$ справа от размерности стоят числа 2 и 1: одномерный «куб» — единичный отрезок — имеет 2 «вершины» и одно «ребро». Запишем бином $(2x + 1)^1$ в виде $2x + 1$ и умножим его на самого себя:

$$\begin{array}{r}
 \times 2x + 1 \\
 \hline
 2x + 1 \\
 4x^2 + 2x \\
 \hline
 4x^2 + 4x + 1
 \end{array}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты произведения совпадают с числами, стоящими в третьей сверху строке таблицы ($n = 2$). Более того, если любой строке таблицы, соответствующей размерности k , сопоставить многочлен $(2x + 1)^k$ и умножить его на $2x + 1$, то получится следующая строка. Предположим, например, что нас интересует число «деталей» пятимерного гиперкуба. За-

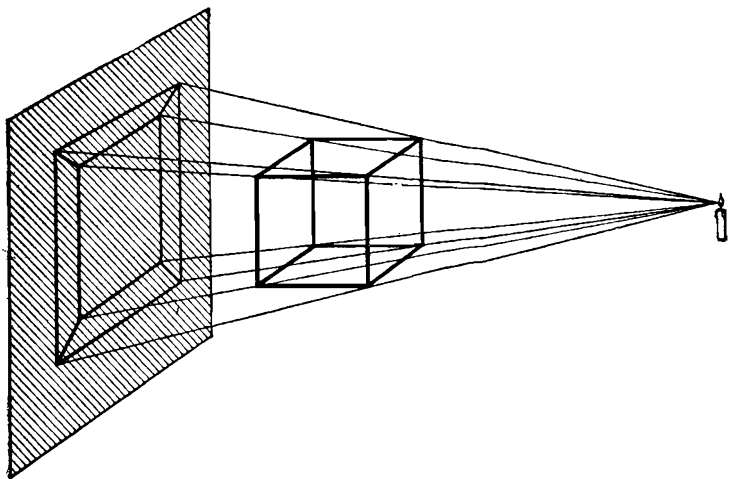


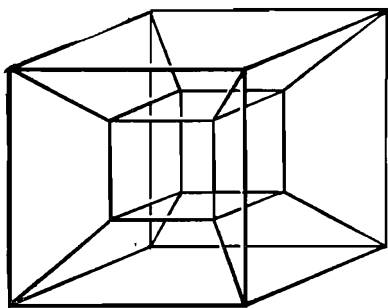
Рис. 124. Проекция куба на плоскость.

писав строку, соответствующую четырехмерному гиперкубу в виде $(2x + 1)^4$, и умножив на $2x + 1$, получим

$$\begin{array}{r}
 \times 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \\
 \hline
 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \\
 32x^5 + 64x^4 + 48x^3 + 16x^2 + 2x \\
 \hline
 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1
 \end{array}$$

Коэффициенты разложения бинома $(2x + 1)^5$ совпадают с числами, стоящими в строке таблицы с $n = 5$. Следовательно, у пятимерного гиперкуба имеется 32 вершины, 80 одномерных ребер, 80 двумерных квадратных граней, 40 трехмерных кубических граней, 10 четырехмерных гиперкубических граней и, наконец, он сам — «единственный и неповторимый» пятимерный гиперкуб.

Возьмем теперь проволочную модель — скелет — куба и осветим ярким источником света. Поворачивая модель, мы будем получать на стене или любом другом экране различные тени. Если источник света расположен достаточно близко от проволочной модели, то, повернув ее надлежащим образом, можно заставить модель отбрасывать на экран тень, изображенную на рис. 124. Сеть



Р и с. 125. Проекция четырехмерного гиперкуба на трехмерное пространство.

теневых линий на плоскости обладает всеми топологическими свойствами куба. Например, муха не может обойти по непре-

рывному маршруту все ребра куба, не проходя ни одного ребра дважды, как не может обойти и линий сети на получившейся двумерной проекции куба.

На рис. 125 изображена аналогичная проекция ребер четырехмерного гиперкуба в трехмерное пространство, точнее, проекция на плоскость трехмерной модели, которая в свою очередь служит проекцией четырехмерного гиперкуба. Все элементы гиперкуба, различные на рис. 125, нетрудно отождествить с деталями модели, хотя шесть из восьми кубов на проекции изображены в искаженном виде (так же как четыре из шести граней на плоской проекции обычного трехмерного куба). Перечислим эти восемь кубов: большой куб, малый куб, расположенный в центре модели, и шесть шестигранников, окружающих малый куб. (Попробуйте самостоятельно отыскать все восемь кубов на другой трехмерной модели гиперкуба, полученной при проектировании его в трехмерное пространство под другим углом и изображенной на рис. 123, г.) Как и в случае куба, обе модели и сеть ребер «натурного» гиперкуба обладают одинаковыми топологическими свойствами. На этот раз муха может совершить прогулку по всем ребрам гиперкуба и обойти их все по непрерывному маршруту, не проходя ни одно из ребер дважды. (В общем случае мухе удастся удовлетворить свою страсть к разнообразию — непрерывным маршрутом без повторяющихся участков — лишь на гиперкубах в пространствах четной размерности, поскольку только в пространствах четной размерности в каждой вершине гиперкуба встречается нечетное число ребер.)

Многие свойства единичных гиперкубов можно выразить с помощью простых формул, применимых к гипер-

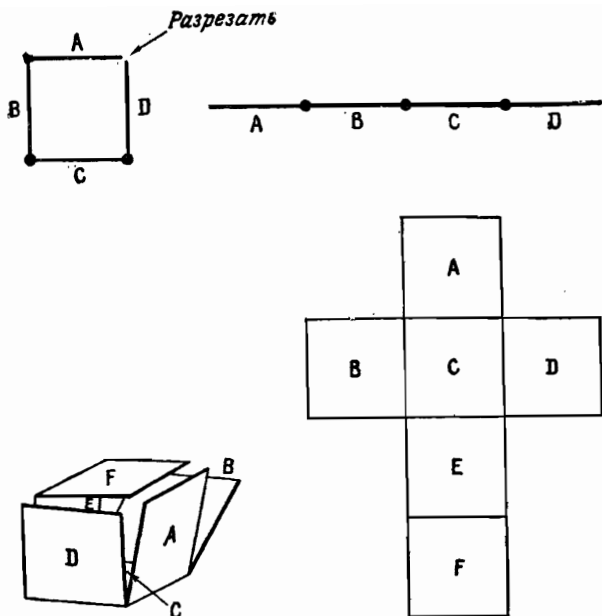
кубам всех размерностей. Так, например, длина диагоналей единичного квадрата равна $\sqrt{2}$. Длина самых «длинных» диагоналей единичного куба равна $\sqrt{3}$. В общем случае диагональ, соединяющая противоположные вершины n -мерного гиперкуба, равна $\sqrt{n}$.

Если x — сторона квадрата, то x^2 — его площадь, а $4x$ — его периметр. При каких размерах квадрата его площадь численно равна периметру? Из квадратного уравнения $x^2 = 4x$ следует, что $x = 4$. Итак, единственный квадрат, площадь которого численно совпадает с его периметром, — это квадрат со стороной в 4 единицы. Естественно напрашивается следующий вопрос: при каких размерах куба его объем численно равен его поверхности? Ответив на этот вопрос, читатель сможет без труда ответить еще на два вопроса:

1. При каких размерах гиперкуба его гиперобъем (за единицу которого принят объем единичного гиперкуба) численно равен гиперплощади (измеряемой в кубических единицах — объемах единичных трехмерных кубов) его гиперповерхности?

2. Как выглядит формула, выражающая длину ребра n -мерного куба, n -мерный объем которого численно равен $(n - 1)$ -мерному объему его «поверхности»?

В книгах по занимательной математике часто можно встретить задачи о кубах, условия которых (в отличие от их решений) допускают непосредственное обобщение на случай четырехмерного гиперкуба. Рассмотрим, например, задачу об отрезке прямой наибольшей длины, который помещается внутри единичного квадрата. Ясно, что таким отрезком служит диагональ квадрата, длина которой составляет $\sqrt{2}$. Каков, по-вашему, наибольший квадрат, который можно поместить внутри единичного куба? Успешно ответив на этот весьма непростой вопрос, читатель может попытаться счастья в решении еще более сложной задачи о кубе наибольшего размера, помещающемся внутри единичного четырехмерного гиперкуба. Решение задачи о размещении внутри единичного куба квадрата наибольших размеров дано в конце главы. Решение второй задачи (о размещении куба максимальных размеров внутри единичного гиперкуба) целиком представляется на усмотрение читателей.



Р и с. 126. Развертка квадрата (вверху) и куба (внизу).

К одной интересной комбинаторной задаче, связанной с четырехмерным гиперкубом, лучше всего подойти, как обычно, начав с аналогичных задач для квадрата и куба. Разрезав контур квадрата в одной из его вершин (рис. 126), мы сможем развернуть его границу в виде отрезка прямой. Для этого следует лишь представить себе, что каждая из вершин квадрата — это шарнир, и вращать стороны до тех пор, пока они не расположатся вдоль одной прямой, то есть не окажутся в одном и том же одномерном пространстве. Чтобы получить развертку куба, необходимо разрезать его поверхность вдоль семи ребер и поворачивать грани вдоль оставшихся ребер до тех пор, пока все грани не расположатся в одной и той же плоскости, образуя одну из фигур гексамино (шесть квадратов, примыкающих один к другому вдоль сторон). Предположим, что мы не различаем асимметричные фигуры гексамино, переходящие друг в друга при отражении. Сколько различных (с нашей точки зрения) фигур

гексамино можно построить, разворачивая поверхность куба на плоскость?

Аналогичным образом можно разрезать восемь кубов, образующих внешнюю поверхность четырехмерного гиперкуба, и получить его развертку. Нам трудно представить себе, каким видит развертку четырехмерного гиперкуба обитатель четырехмерия (с трехмерной сетчаткой?). Тем не менее восемь кубов, ограничивающих гиперкуб, действительно образуют его поверхность: никакой обитатель четырехмерия не может коснуться гипербулавкой ни одной точки внутри гиперкуба, не проколов при этом в том или ином месте один из кубов, так же как в обычном трехмерном пространстве мы не можем коснуться булавкой любой точки внутри куба, не пронзив при этом одной из граней куба. Однако точки куба, не лежащие на его гранях, расположены «внутри» куба лишь для нас, обитателей трехмерия. Для четырехмерного существа любая точка куба, образующего «наружную» грань гиперкуба, непосредственно доступна наблюдению: поворачивая гиперкуб в своих гиперпальцах, он видит точки гиперграней так же, как мы — точки граней куба.

Еще труднее представить себе, каким образом трехмерный куб в четырехмерном пространстве может вращаться вокруг своих двумерных граней. Восемь кубов, образующих границу гиперкуба, соприкасаются друг с другом гранями! Рассматривая трехмерные модели гиперкуба, нетрудно понять, что 24 квадратные грани служат местами сочленения кубов, причем каждая из них разделяет (или, наоборот, соединяет) два куба. Проведя разрез вдоль 17 из этих 24 граней, мы сможем повернуть кубы вокруг оставшихся двумерных «шарниров» так,

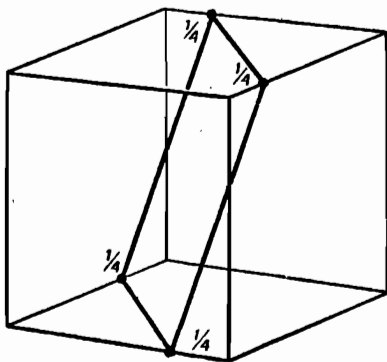
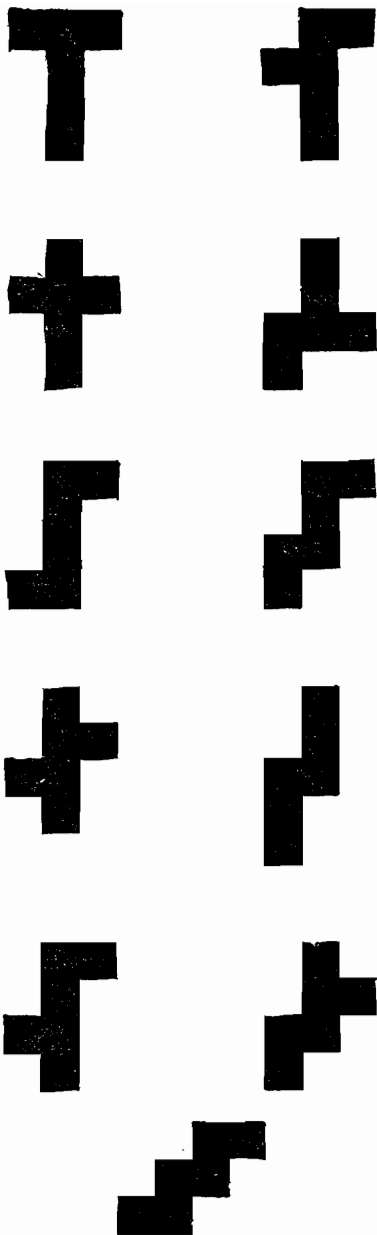


Рис. 127. Наибольший из квадратов, вмещающихся внутри единичного куба.



чтобы кубы расположились в одном и том же трехмерном пространстве (проводя разрез, необходимо следить не только за тем, чтобы он прошел вдоль 17 граней, но и чтобы цепочка кубов оставалась связанной, то есть не распадалась на отдельные звенья). Трехмерная развертка гиперкуба имеет вид поликуба порядка 8 (восьми кубов, склеенных по граням). Завершая свой экскурс в четырехмерие, мы хотим задать еще один вопрос: сколько различных (не переходящих друг в друга при поворотах и отражениях) поликубов можно получить, разворачивая полый гиперкуб в трехмерном пространстве?

ОТВЕТЫ

Гиперобъем четырехмерного гиперкуба с ребром длиной x равен x^4 . Трехмерный объем его гиперповерхности равен $8x^3$. Если гиперобъем и гиперповерхность равны, то $x = 8$. В общем случае численное равенство n -мерного гиперобъема n -мерного гиперкуба и $(n-1)$ -мерного объема его гиперповерхности достигается при длине ребра гиперкуба, равной $2n$.

Р и с. 128. Одиннадцать фигур гексамино, служащих развертками куба.

Самый большой квадрат, который только можно поместить в единичном кубе, изображен на рис. 127. Его вершины находятся на расстоянии $\frac{1}{4}$ от соответствующих вершин куба. Его площадь равна $\frac{9}{8}$, а сторона — $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. Читатели, которые помнят известную задачу о проталкивании куба наибольших размеров сквозь отверстие квадратного сечения, прорезанное в меньшем кубе, несомненно, узнают своего старого знакомого: найденный нами квадрат есть не что иное, как максимальное сечение квадратного отверстия. Иначе говоря, куб с длиной ребра чуть меньше $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ можно протолкнуть сквозь отверстие, прорезанное в единичном кубе.

На рис. 128 изображены 11 различных фигур гексамино, которые могут служить разверткой куба. Любопытно, что сколько бы мы ни старались, сложить из этих фигур прямоугольник площадью в 66 единичных квадратов нам все равно не удастся (хотя, быть может, эти 11 гексамино укладываются в более интересные фигуры). Таким образом, среди 35 различных гексамино 11 «разверток куба» образуют самый обескураживающий набор.

ГЛАВА 17

НЕИСЧЕРПАЕМОЕ ОЧАРОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ

Этот удивительный математический фокус придумал математик и психолог Гарри Лорейн. Зрителю вручают колоду карт, из которой извлечены дамы, валеты, короли и десятки, и просят выложить на стол в один ряд вниз рубашкой любые пять карт. Лорейн тотчас же отыскивает в колоде некую карту и кладет ее над рядом рубашкой вверх (рис. 129). После этого зритель выкладывает из карт пирамиду, придерживаясь следующих правил.

«Значения» каждой пары карт, расположенных в нижнем ряду по соседству друг с другом, складываются. Если сумма превышает 9, то производится «вычеркивание девятки» (то есть берется вычет по модулю 9). Это действие можно производить очень быстро, если вычитание девятки заменить сложением цифр получившейся суммы. Например, значение первых двух карт в нижнем

ряду на рис. 129 равно 16. Вместо того чтобы вычитать 9 из 16, можно сложить 1 и 6. Сумма цифр равна 7, поэтому над первыми двумя картами зритель кладет семерку. Сумма значений второй и третьей карт нижнего ряда равна 8, поэтому над ними зритель кладет восьмерку. Так продолжается до тех пор, пока над нижним рядом не вырастет новый ряд из четырех карт. Затем все повторяется еще и еще раз, пока пирамида не до-

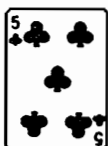
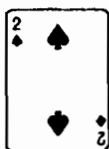
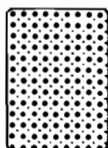


Рис. 129. Карточный фокус.

стигнет вершины. Верхнюю карту переворачивают, и... оказывается, что ее значение в точности соответствует сумме значений карт в последнем ряду!

Фокус можно показывать с любым числом карт в нижнем ряду. Правда, особенно увлекаться удлинением ряда не следует: при чрезмерно большой его протяженности в колоде может не хватить карт нужных значений и пирамида останется недостроенной. Необходимые выкладки не обязательно производить в уме: их всегда можно проделать на клочке бумаги.

Фокус можно показывать и в другом варианте, не требующем никакого «реквизита». Попросите кого-нибудь выписать в ряд 10 наугад выбранных однозначных чисел. Зная секрет фокуса, вы сможете быстро произвести в уме необходимые подсчеты и указать, какое число будет стоять на вершине пирамиды. Разумеется, в ста случаях из ста вы окажетесь правы. Каким же образом удастся столь безошибочно предсказывать верхнее число? Может быть, оно совпадает с «цифровым корнем» * суммы чисел, стоящих в нижнем ряду? Непосредственная проверка показывает, что это не так.

В действительности фокус Лорейна основан на простой формуле, выведенной с помощью одной из изящнейших и известнейших схем в истории математики. Схема эта известна под названием «треугольник Паскаля», поскольку Блез Паскаль, французский математик и философ XVII в., посвятил ей специальный трактат, который так и назывался «Трактат об арифметическом треугольнике». В действительности же треугольник Паскаля был известен задолго до 1653 г. — даты выхода в свет труда Паскаля. Так, треугольник Паскаля воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанном в начале XVI в. Петром Апианом, астрономом из Ингольштадтского университета. Изображен треугольник и на иллюстрации в книге одного китайского математика, выпущенной в 1303 г. Омар Хайям, бывший не только поэтом и философом, но и математиком, знал о существовании треугольника около 1100 г.,

* «Цифровым корнем» данного числа Гарднер называет отличный от нуля остаток от деления данного числа на 9. Если остаток равен 0, то цифровой корень числа считается равным 9. Подробнее о цифровых корнях см. гл. 19 «Математических головоломок и развлечений». — *Прим. перев.*

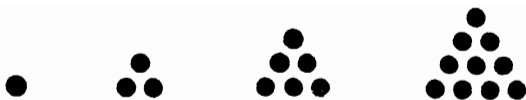
в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его может даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных численных схем во всей математике.

На вершине треугольника стоит число 1 (рис. 130). Все остальные числа равны сумме двух чисел, расположенных непосредственно над ними. (Единицы, стоящие вдоль правой и левой сторон треугольника, можно также рассматривать как сумму двух чисел: единицы, расположенной строкой выше, и нуля.) Треугольник можно продолжать неограниченно. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его вершину. На рис. 130 строки и диагонали перенумерованы по традиции, начиная с 0, а не с 1. Такая нумерация облегчает объяснение некоторых основных свойств треугольника.

Вдоль диагоналей, параллельных сторонам треугольника, выстроены треугольные числа и их обобщения на случай пространств всех размерностей. Треугольными называются числа, показывающие, из скольких точек («плоских ядер») можно сложить треугольную пирамиду (рис. 131).

Последовательность треугольных чисел расположена вдоль второй диагонали треугольника. (Обратите внимание на то, что сумма любых двух последовательных треугольных чисел равна квадратному числу.) Первая диагональ дает натуральные числа — аналоги треугольных чисел в одномерном пространстве. Вдоль нулевой диагонали выстроились аналоги треугольных чисел в нульмерном пространстве, где единственно возможной «схемой укладки ядер» служит сама точка. На третьей диагонали стоят тетраэдральные числа. n -й член последовательности тетраэдральных чисел показывает, сколько круглых ядер можно уложить в виде n -слойного тетраэдра. На четвертой диагонали стоят гипертетраэдральные числа для четырехмерного пространства, на пятой — для пятимерного и т. д. до бесконечности. В целом



Р и с. 131. Низшие треугольные числа.

можно сказать, что n -я диагональ заполнена n -мерными аналогами треугольных чисел. Даже беглого взгляда, брошенного на треугольник Паскаля, достаточно, чтобы отметить следующие любопытные факты: 10 ядер можно сложить и в виде тетраэдра, и в виде плоского треугольника; 56 гиперядер, образующих тетраэдр в пятимерном пространстве, можно уложить на гиперплоскости так, что они выстроятся в виде трехмерного тетраэдра (однако если бы мы попытались выложить из 56 ядер треугольник, то одно ядро осталось бы лишним).

Чтобы найти сумму чисел, стоящих на любой диагонали от начала до интересующего нас места, достаточно взглянуть на число, расположенное снизу и слева от последнего слагаемого. Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 9. «Спустившись» по диагонали до числа 9, мы увидим, что ниже его слева стоит число 45. Оно-то и дает искомую сумму. Чему равна сумма первых восьми треугольных чисел? Отыскиваем восьмое число на второй диагонали и сдвигаемся вниз и налево. Ответ: 120. Заметим, кстати, что 120 — тетраэдральное число. Следовательно, взяв все ядра, из которых сложены 8 первых треугольников, мы могли бы сложить тетраэдр.

Суммы чисел, стоящих вдоль не столь круто падающих сплошных диагоналей, образуют хорошо известную последовательность чисел Фибоначчи, в которой каждый член равен сумме двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Числа Фибоначчи часто встречаются в комбинаторных задачах. Приведем лишь один пример. Рассмотрим ряд из n стульев. Сколькими способами можно рассадить на них мужчин и женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом? При n , равном 1, 2, 3, 4, ..., число способов соответственно равно 2, 3, 5, 8, ..., то есть совпадает с последовательными членами ряда Фибоначчи. Паскаль, по-видимому, не знал, что числа Фибоначчи «скрыты» в его треугольнике. Это обстоятельство было обнаружено только в XIX в.

Лишь совсем недавно было открыто еще одно интересное свойство треугольника Паскаля: частичные суммы ряда Фибоначчи можно находить, стирая диагонали, параллельные левой стороне треугольника. Так, если стереть слева нулевую диагональ, то на сплошных («фибоначчиевых») диагоналях останутся числа, дающие частичные суммы ряда Фибоначчи ($1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 4$, $1 + 1 + 2 + 3 = 3 + 4 = 7$ и т. д.). Если стереть нулевую и первую диагонали, то на диагоналях Фибоначчи останутся числа, дающие частичные суммы ряда частичных сумм ($1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 1 + 6 = 7$ и т. д.). Вообще, если стереть k диагоналей, то на диагоналях Фибоначчи останутся k -кратно просуммированные частичные суммы частичных сумм.

Числа, стоящие по горизонтальным строкам треугольника Паскаля, — это биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты разложения $(x + y)^n$ по степеням x и y . Например, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Коэффициенты разложения 1, 3, 3, 1 стоят в третьей строке треугольника. Чтобы найти коэффициенты разложения $(x + y)^n$, достаточно взглянуть на n -ю строку треугольника Паскаля. (Числа, стоящие в n -й строке, упорядочены так, что, читая их слева направо, мы получим коэффициенты в разложении бинома $(x + y)^n$, расположенного по возрастающим степеням x , или, что то же, по убывающим степеням y .) Именно это фундаментальное свойство треугольника Паскаля связывает его с комбинаторикой и теорией вероятностей, превращая в удобное средство проведения вычислений.

Предположим, что некий шейх, следуя законам гостеприимства, решает отдать вам трех из семи своих жен. Сколько различных выборов вы можете сделать среди прекрасных обитательниц гарема? Для ответа на этот вопрос необходимо лишь найти число, стоящее на пересечении диагонали 3 и строки 7: оно оказывается равным 35. Если, охваченные радостным волнением, вы перепутаете номера диагонали и строки и будете искать число, стоящее на пересечении диагонали 7 и строки 3, то обнаружите, что седьмая диагональ и третья строка не пересекаются. Иначе говоря, метод всегда приводит лишь к правильному ответу, не давая вам ошибиться! В общем случае число, показывающее, сколькими способами можно выбрать n элементов из множества,

содержащего r различных элементов, стоит на пересечении n -й диагонали и r -й строки.

Связь между комбинаторикой и теорией вероятностей станет ясной, если мы рассмотрим восемь возможных исходов бросания трех монет: ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР. Нетрудно видеть, что три герба выпадают лишь в одном случае, два герба — в трех случаях, один герб — также в трех случаях и ни одного герба — в одном случае. Числа благоприятных испытаний для получения 3, 2, 1 и 0 гербов равны 1, 3, 3, 1. Именно эти числа стоят в третьей строке треугольника Паскаля. Предположим теперь, что мы хотим узнать вероятность выпадения ровно 5 гербов при одновременном бросании 10 монет. Прежде всего необходимо подсчитать, сколько существует различных способов, позволяющих выбрать 5 монет из 10. Ответ мы получим, найдя число, стоящее на пересечении 5-й диагонали и 10-й строки. Оно равно 252. Сложив все числа, стоящие в 10-й строке, мы найдем число возможных исходов. Вычисления можно намного сократить, если воспользоваться следующим свойством биномиальных коэффициентов: сумма коэффициентов бинома $(x + y)^n$, а именно они и стоят в n -й строке треугольника Паскаля, равна 2^n . (Действительно, сумма чисел, стоящих в любой строке треугольника, вдвое больше суммы чисел, стоящих в предыдущей строке, поскольку при построении каждой строки числа, стоящие в предыдущей, сносятся дважды. Сумма чисел первой (самой верхней) строки равна 1. Следовательно, суммы чисел, стоящих в строках треугольника Паскаля, образуют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем 2: 1, 2, 4, 8, ...) Десятая степень числа 2 равна 1024. Следовательно, вероятность выпадения пяти гербов при бросании 10 монет равна $252/1024 = 63/256$. (Треугольник Паскаля позволяет объяснить принцип действия так называемой доски Гальтона — механического устройства, служащего для демонстрации приближенного гауссовского распределения. *)

Заменим каждое число в треугольнике Паскаля точкой. Более жирными точками будем отмечать те числа, которые не делятся нацело на некоторое целое положи-

* См., например, Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М. — Л., Гостехиздат, 1949, стр. 132—133. — *Прим. перев.*

тельное число. Результат окажется удивительным: треугольник Паскаля разобьется на более мелкие треугольники, образующие изящный узор. Узоры эти таят в себе много неожиданностей. Рассмотрим, например, «двоичный» узор, получающийся в том случае, когда делитель равен 2 (рис. 132). По мере удаления от вершины нам будут встречаться треугольники все возрастающих размеров, не содержащие ни одной жирной точки, то есть «составленные» из одних лишь четных чисел. У вершины треугольника Паскаля «притаился» треугольник, состоящий из одной-единственной точки, затем идут треугольники, содержащие 6, 28, 120, 496, ... точек. Три из названных чисел — 6, 28 и 496 — известны как совершенные, поскольку каждое из них равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа. Например, $6 = 1 + 2 + 3$. Не известно, существует ли бесконечно много совершенных чисел, а также существует

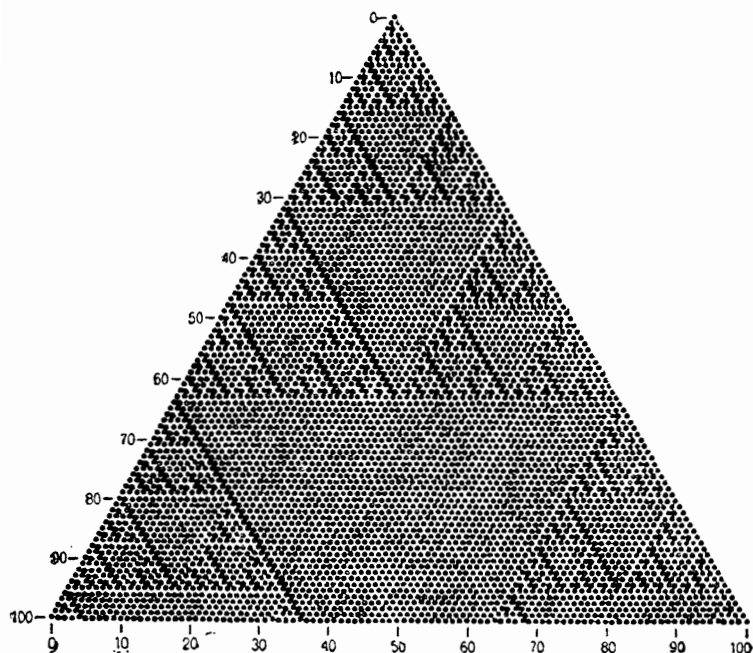


Рис. 132. Треугольник Паскаля.

Числа заменены точками. Более жирными точками отмечены нечетные числа.

ли хоть одно нечетное совершенное число. Евклиду удалось доказать, что всякое число вида $2^{n-1}(2^n - 1)$, где $(2^n - 1)$ — простое число (такие простые числа называются числами Мерсенна), является четным совершенным числом. Впоследствии Эйлер доказал, что формула Евклида охватывает все четные совершенные числа. Формулу Евклида можно представить в виде

$$\frac{P(P+1)}{2},$$

где P — простое число Мерсенна. Точно в таком же виде можно записать формулу для треугольных чисел. Иначе говоря, если «сторона» треугольного числа выражается числом Мерсенна,¹ то треугольное число совершенно. Возвращаясь к разбиению точек, образующих треугольник Паскаля, на четные и нечетные, заметим, что, как нетрудно показать, формула,¹ выражающая число точек в n -м от вершины треугольника месте на центральной оси, имеет вид $2^{n-1}(2^n - 1)$, то есть совпадает с формулой совершенных чисел. Таким образом, всякий раз, когда число $2^n - 1$ простое, число точек в треугольнике, расположенном на оси треугольника Паскаля на n -м месте от вершины, выражается четным совершенным числом. Более того, все четные совершенные числа «присутствуют» в треугольном узоре, изображенном на рис. 132 как мощности соответствующих треугольных множеств. Поскольку число $2^4 - 1 = 15$ составное, четвертый из треугольников, расположенных на центральной оси, несовершенен. Число точек в пятом треугольнике (496) совершенно, поскольку $2^5 - 1 = 31$ — простое число. (Аналогично, число точек в шестом треугольнике несовершенное, а число точек в седьмом треугольнике, равное 8128, — совершенное. *)

В заключение упомянем еще одно любопытное свойство треугольника Паскаля. Если «содержимое» каждой из строк от 0 до 4 читать как одно число (1, 11, 121, 1331 и 14 641), то эти числа окажутся не чем иным, как последовательными степенями числа 11, начиная с $11^0 = 1$. В следующей, пятой, строке «должно» было бы

* Свойствам биномиальных коэффициентов и треугольника Паскаля посвящена статья Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов» (*Квант*, № 6, 1970, стр. 17—25). — *Прим. перев.*

стоять $11^5 = 161\,051$, но, к сожалению, правило перестает действовать. Впрочем, горю можно помочь. Обратим внимание на то, что в пятой строке треугольника Паскаля впервые встречаются двузначные числа. Если числа в пятой строке рассматривать как коэффициенты при последовательных степенях числа 10, возрастающих справа налево, то нарушенное было правило окажется вновь реабилитированным: $1 \times 1 + 5 \times 10 + 10 \times 100 + 10 \times 1000 + 5 \times 10\,000 + 1 \times 100\,000 = 11^5$. Более того, при такой интерпретации чисел n -я строка всегда будет давать 11^n .

Почти всякий, кто займется более подробным изучением треугольника Паскаля, откроет другие, не менее удивительные его свойства, однако не все из этих свойств будут новыми. Ведь то, что мы рассказали, — не более чем капля в поистине безбрежном море литературы о треугольнике Паскаля. По признанию самого Паскаля, в своем «Трактате» он вынужден был обойти молчанием многие свойства треугольника. «Поистине удивительно, — восклицает Паскаль, — сколь неисчерпаемы эти свойства!»

Существуют многочисленные разновидности треугольника Паскаля и его обобщения, например «тетраэдр Паскаля», в виде которого располагаются коэффициенты разложения «тринома» $(x + y + z)^n$.

Степень владения тайнами треугольника Паскаля читатель может проверить, решив следующие пять задач:

1. Найти формулу для суммы всех чисел, расположенных выше n -й строки в треугольнике Паскаля.

2. Сколько нечетных чисел содержится в 256-й строке треугольника Паскаля?

3. Сколько чисел в 67-й строке треугольника Паскаля делятся без остатка на 67?

4. Шашка, стоящая на одной из четырех черных клеток первого ряда пустой 64-клеточной доски, двигаясь по обычным правилам, может различными путями перейти на любую из четырех черных клеток восьмого ряда. Предположим, что каждая из начальных клеток соединена с каждой конечной всеми возможными маршрутами. Определите, сколько существует различных маршрутов, ведущих из данной начальной клетки в данную конечную, и для какой начальной и конечной клетки число связывающих их маршрутов максимально.

5. Предположим, что в фокусе Лорейна начальный ряд выложен из n карт. Как с помощью треугольника Паскаля вывести простые формулы, позволяющие вычислять значения самой верхней карты?

ОТВЕТЫ

1. Сумма чисел, расположенных в треугольнике Паскаля над n -й строкой, равна $2^n - 1$.

2. Все числа, стоящие в 256-й строке, нечетные. (То же утверждение справедливо и для любой строки, номер которой совпадает с одной из степеней числа 2.)

3. Все числа, стоящие в 67-й строке, кроме единиц, делятся на 67. (Аналогичное утверждение для любой строки, номер которой выражается простым числом.)

4. Задача о шашке-путешественнице решается очень быстро, если клетки занумеровать так, как показано на рис. 133. Для каждой начальной позиции числа образуют перевернутый треугольник Паскаля, обрезанный краями доски. Число, стоящее в клетке, указывает, сколькими путями может достичь ее пешка из данной начальной позиции. Максимальное число маршрутов ведет в клетку с числом 35 из третьей слева черной клетки первого (нижнего) ряда.

5. Значение верхней карты в фокусе Гарри Лорейна можно определить следующим образом. Пусть n — число карт в нижнем ряду. Вычислить значение верхней карты позволяет «усеченный» треугольник Паскаля с n числами в строке, лежащей в основании. Поясним сказанное на примере.

Предположим, что в нижнем ряду выложено шесть карт со значениями 8, 2, 9, 4, 6, 7. Строка треугольника Паскаля длиной в 6 чисел содержит числа 1, 5, 10, 10, 5, 1. Заменим десятки их цифровыми корнями (для чего, не вычитая девяток, просто сложим цифры $1 + 0 = 1$) и получим набор однозначных чисел 1, 5, 1, 1, 5, 1. Эти числа будем рассматривать как «веса» (коэффициенты), с которыми следует брать значения карт. Поскольку все «веса», кроме второго и предпоследнего, равны 1, умножаем на 5 значения карт, стоящих на втором и предпоследнем месте в нижнем ряду, и складываем полученные произведения со значениями остальных четырех карт. Цифровой корень полученной суммы и будет значением верхней карты.

Все вычисления нетрудно производить «в уме», поскольку все промежуточные результаты можно заменять их цифровыми корнями. Так, получив при умножении на 5 значения второй и предпоследней карт 10 и 30, мы тотчас же заменим их цифровыми корнями, равными 1 и 3, что дает в сумме 4. К 4 прибавляем значения остальных карт, каждый раз заменяя получающуюся сумму ее цифровым корнем. Окончательный результат равен 5. Это и есть значение верхней карты.

Для ряда из 10 карт значение верхней карты получается еще быстрее. В этом случае цифровые корни соответствующих биномиальных коэффициентов равны 1, 9, 9, 3, 9, 9, 3, 9, 9, 1. Поскольку число 9 сравнимо с 0 по модулю 9 (иначе говоря, делится на 9 без

	14		14		6		1
5		9		5		1	
	5		4		1		
2		3		1			
	2		1				
1		1					
	1						
1							

	28		34		21		6
9		19		15		6	
	9		10		5		1
3		6		4		1	
	3		3		1		
1		2		1			
	1		1				
		1					

	20		35		34		14
5		15		20		14	
	5		10		10		4
1		4		6		4	
	1		3		3		1
		1		2		1	
			1		1		
				1			

	7		20		28		14
1		6		14		14	
	1		5		9		5
		1		4		5	
			1		3		2
				1		2	
					1		1
						1	

Рис. 133. Решение задачи о шашке-путешественнице.

остатка), набор коэффициентов можно переписать в виде 1, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 0, 1. Следовательно, чтобы вычислить значение верхней карты, необходимо лишь умножить на 3 значения карт, стоящих на четвертом месте от начала и от конца ряда, прибавить к полученным произведениям значения первой и последней карт и вместо полученной суммы взять ее цифровой корень. Значения шести остальных карт можно полностью игнорировать!

Необычайно эффектный вариант фокуса предложил Л. Восбург Лионс. Зритель называет любое однозначное число, которое он хотел бы видеть на вершине пирамиды. Затем выписывает в ряд 9 наугад выбранных им однозначных чисел, вы дописываете к ним десятое число, причем зритель указывает, куда именно вы должны поместить свое число — перед рядом или после него. Сложив три «ключевых» числа, взятых с соответствующими весами, вы, разумеется, без труда подбираете число так, чтобы пожелание зрителя непременно исполнилось.

Значение верхней карты можно вычислять не только с помощью вычетов по модулю 9, но по любому другому модулю. Необходимые формулы дает треугольник Паскаля, в котором биномиальные коэффициенты заменены вычетами по выбранному модулю. Предположим, например, что исходный ряд содержит 8 однозначных чисел и что в качестве модуля сравнения выбрано число 7. Соответствующая строка треугольника Паскаля после замены биномиальных коэффициентов вычетами по модулю 7 имеет вид: 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1. Следовательно, чтобы вычислить верхнее число, необходимо лишь сложить первое и последнее числа исходного ряда и, если сумма окажется двузначным числом, вычесть из нее семерку. Убедиться в том, что треугольник Паскаля позволяет получить необходимые формулы независимо от того, какое число мы вычеркиваем (при получении «цифровых корней» мы, например, вычеркиваем девятки), предоставляется читателю.

ГЛАВА 18

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ ИГР С ДВУМЯ УЧАСТНИКАМИ

Слово «игра» обычно употребляется как синоним слова «развлечение». В этой главе мы рассмотрим игры в более узком смысле — как состязание двух участников. Мы расскажем о старых и новых играх, для которых известны оптимальные стратегии. Свой рассказ мы начнем с трех игр, между которыми существует забавная и несколько удивительная связь.

1. Девять карт со значениями от туза до девятки выкладываются на стол. Играющие по очереди берут по одной карте. Выигрывает тот, кто первым возьмет три карты, сумма значений которых равна 15.

2. На рис. 134 изображена схема дорог. Каждая дорога имеет свой номер. Играющие по очереди «блокируют» дороги (закрашивают дорогу в свой цвет на всем ее протяжении, даже там, где дорога проходит через «города»-кружки). Чтобы ходы можно было отличать, каждый из играющих пользуется карандашом одного из двух цветов. Победителем считается тот, кому удастся закрасить в свой цвет три дороги, ведущие в один и тот

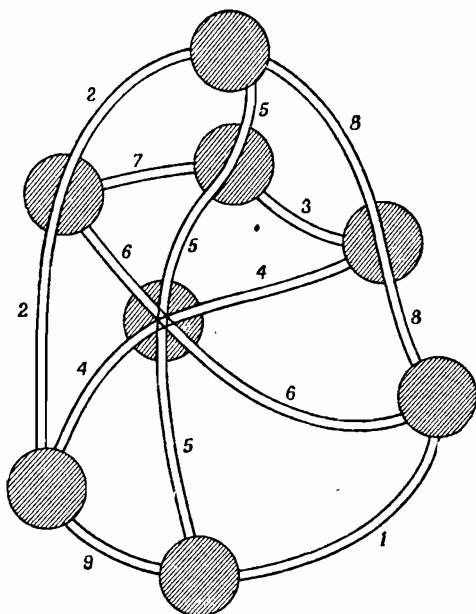


Рис. 134. Схема дорог в игре «Пробка».

же город. (Придумавший игру голландский психолог Джон А. Мишон назвал ее «Пробка», поскольку цель игры состоит в том, чтобы, блокируя дороги, создавать «пробки» на перекрестках.)

3. Каждое из слов: рыба, клин, нить, небо, сок, бусы, тор, сеть, река — напечатано на отдельной карточке. Карточки разложены на столе надписями кверху. Игроки по очереди берут со стола по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым возьмет три карточки со словами, имеющими общую букву. (Эту игру придумал математик Лео Мозер.)

Во всех трех играх возникает один и тот же вопрос: как закончится игра — выиграшем того, кто делает первый ход, того, кто делает второй ход, или вничью, — если оба игрока делают наилучшие ходы?

Наиболее проницательные читатели, вероятно, уже догадались, что все три игры изоморфны обычной игре в крестики и нолики (то есть по существу не отличаются

от нее). Убедиться в этом совсем нетрудно. Начнем с первой игры. Выпишем все тройки цифр от 1 до 9, дающие в сумме 15. Таких троек ровно 9. Их можно разместить на обычной «доске» для игры в крестики и нолики в виде магического квадрата:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Каждая строка, каждый столбец и любая из двух диагоналей содержат числа, образующие одну из 9 троек. Взяв одну из карт, игрок как бы совершает ход в крестики и нолики. Выигрышная комбинация в картах соответствует выигрышному расположению крестиков или ноликов — занятию строки, столбца или диагонали на магическом квадрате. Всякий, кто достиг гроссмейстерского уровня игры в крестики и нолики и помнит магический квадрат, сразу же становится непобедимым игроком и в карточный вариант игры в 15.

Карта дорог на рис. 134 топологически эквивалентна симметричному графу, изображенному на рис. 135, слева. Граф в свою очередь эквивалентен «двойственному» графу, полученному при соединении центров де-

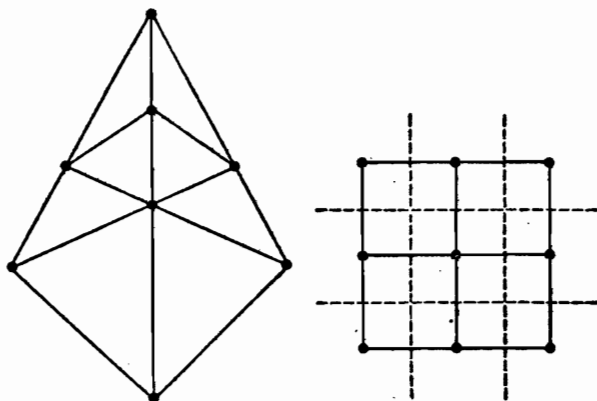


Рис. 135. Граф игры в «Пробку» и ее двойник в крестиках и ноликах.

вяти клеток, на которых обычно играют в крестики и нолики (рис. 135, справа). Каждая из нумерованных клеток магического квадрата соответствует одной (и только одной) дороге, носящей тот же номер на схеме, а каждый город на схеме отвечает строке, столбцу или одной из главных диагоналей магического квадрата. Как и в первом случае, между игрой в «Пробку» и крестиками и ноликами имеется соотношение эквивалентности.

Изоморфизм между придуманной Мозером игрой в слова и игрой в крестики и нолики становится очевидным, если девять слов записать в клетках доски, расчерченной для игры в крестики и нолики:

сок	клин	река
бусы	небо	рыба
сеть	нить	тор

Любые три слова, стоящие в одной строке, одном столбце или на одной диагонали, имеют общую букву. Всякая другая тройка слов ни одной общей буквы не имеет. И в этом случае, так же как и в «Пробке», стоит лишь запомнить магический квадрат, как тот, кто постиг тайны беспронигрышной игры в крестики и нолики, становится непобедимым игроком в новую игру.

Поскольку при рациональной игре обоих участников партия в крестики и нолики заканчивается вничью, все три описанные нами игры также должны завершаться вничью, хотя тот из игроков, кто делает первый ход, имеет ощутимое преимущество перед вторым, не догадывающимся, что он играет в «замаскированный» вариант крестиков и ноликов, или не овладевшим всеми секретами этой древней, но вечно юной игры.

Поняв, что все три игры по существу тождественны, вы различаете за внешней оболочкой скрытый внутренний механизм. Такого рода «прозрение» весьма ценно.

Математика изобилует «играми», не имеющими на первый взгляд ничего общего между собой, но в действительности представляющими собой лишь различные наборы символов и правил для игры в одну и ту же

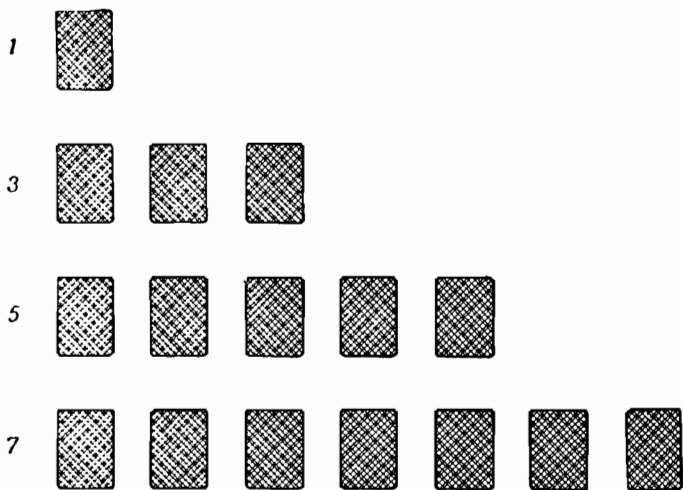


Рис. 136. Начальная позиция при игре в ним или в «Кегли».

игру. Например, как показывает великое открытие Декарта — аналитическая геометрия, алгебру и геометрию можно рассматривать как по существу тождественные, но внешне различные «игры».

Существует множество игр «хватательного» типа, в которых игроки по очереди забирают по одному элементу или целому подмножеству из некоторого множества. Выигравшим считается тот, кто возьмет последний элемент. Среди игр этого типа особой известностью пользуется ним. Правила игры в ним просты. Фишки (монетки, камешки и т. п.) раскладывают в несколько рядов. Число рядов и число фишек в каждом ряду произвольно. Играющие по очереди забирают любое число фишек, но лишь из одного ряда. Выигрывает тот, кто забирает последнюю фишку. Оптимальная стратегия при игре в ним легко формулируется с помощью двоичной системы (см., например, гл. 14 книги «Математические головоломки и развлечения»).

Одна из начальных позиций при игре в ним изображена на рис. 136. Шестнадцать карт разложены в 4 ряда. В первом ряду — одна карта, во втором — три, в третьем — пять и в четвертом — семь. Чтобы определить, кто из игроков — делающий первый или делающий второй

ход — может выиграть, мы записываем число карт в каждом ряду в двоичной системе, а полученные числа складываем «столбиком»:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 3 \quad 11 \\ 5 \quad 101 \\ 7 \quad 111 \\ \hline 224 \end{array}$$

Если сумма чисел, стоящих в каждом столбике, как в данном случае, четна (или, если сложение производится по модулю 2, равна 0), то позиция называется «безопасной». Это означает, что делающий первый ход, играя против рационально мыслящего противника, заведомо обречен на поражение. Независимо от того, какой ход он сделает, позиция после его хода станет «опасной» (по крайней мере в одном столбце сумма чисел станет нечетной) и противник очередным ходом сможет превратить позицию в безопасную. Именно то обстоятельство, что противник неизменно оставляет после себя безопасную позицию, гарантирует ему выигрыш.

Удивительный вариант игры в ним предложил французский математик Мишель Энон: для игры в новую разновидность нима требуются не фишки, а... ножницы и обрезки бечевки. Чтобы лучше разобраться во всех тонкостях игры Энона, мы начнем издалека — с более «древнего» варианта игры в ним, известного как игра в «Кегли».

«Кегли» были изобретены Генри Э. Дьюдени, они описаны в его первой книге «Кентерберийские головоломки». Основную идею и название игры Дьюдени заимствовал из древней игры, широко распространенной еще в XIV в. В первоизданном ее варианте участники стремились сбить выстроенные в один ряд кегли деревянным шаром, диаметр которого был подобран таким образом, что шар мог сбить либо одну, либо две стоящие рядом кегли.

В математический вариант кеглей лучше всего играть на обычном столе. Вместо кеглей берут монеты, карты или любые другие мелкие предметы. Так же как и при игре в ним, их выстраивают в несколько рядов, каждый из которых может содержать любое число предметов.

Двоичные числа k для анализа игры в «Кегли» —
число звеньев не больше 70

Число звеньев в цепочке	Число k	Число звеньев в цепочке	Число k
1	1	36	100
2	10	37	1
3	11	38	10
4	1	39	111
5	100	40	1
6	11	41	100
7	10	42	111
8	1	43	10
9	100	44	1
10	10	45	1000
11	110	46	10
12	100	47	111
13	1	48	100
14	10	49	1
15	111	50	10
16	1	51	1000
17	100	52	1
18	11	53	100
19	10	54	111
20	1	55	10
21	100	56	1
22	110	57	100
23	111	58	10
24	100	59	111
25	1	60	100
26	10	61	1
27	1000	62	10
28	101	63	1000
29	100	64	1
30	111	65	100
31	10	66	111
32	1	67	10
33	1000	68	1
34	110	69	1000
35	111	70	110

Новое по сравнению с игрой в ним состоит в том, что предметы, стоящие в одном ряду, рассматриваются как звенья одной цепочки. Делая очередной ход, игрок вправе взять либо одно, либо два смежных звена цепочки. Если выбор игрока остановился на звеньях, находящихся в середине цепочки, она естественно, распадается на два обрывка. Например, если игрок возьмет среднюю карту из нижнего ряда раскладки, изображенной на рис. 136, то «великолепная семерка» распадется на два обрывка, каждый из которых содержит по 3 звена. Таким образом, по мере развития партии число обрывков цепочки, как правило, увеличивается.

«Кегли» также легко поддаются анализу с помощью двоичной системы, хотя и не столь простому, как игра в ним. Каждой цепочке мы ставим в соответствие некоторое двоичное число, которое после перевода в десятичную систему *не совпадает* с числом звеньев в цепочке (исключение составляют лишь одно-, двух- и трехзвенные цепочки). Энон составил таблицу чисел k , сопоставляемых цепочкам длиной от 1 до 70 звеньев (таблица I). При числе звеньев, большем 70, возникает любопытная

Таблица II

Двоичные числа k для анализа
игры в «Кегли» — число
звеньев больше 70

Остаток от деления числа звеньев на 12	Число k
0	100
1	1
2	10
3	1000
4	1
5	100
6	111
7	10
8	1
9	1000
10	10
11	111

периодичность: двоичное число, сопоставляемое цепочке, в этом случае определяется не числом звеньев, а остатком от деления его на 12 и находится по таблице II. При игре в ним об опасности или безопасности позиции можно судить по двоичной записи числа фишек в каждом ряду. При игре в «Кегли» шансы на выигрыш определяются числами k , соответствующими длине каждой цепочки.

Рассмотрим, например, раскладку карт, изображенную на рис. 136. При игре в ним она безопасна и, следовательно, обеспечивает выигрыш тому из игроков, кто делает второй ход. Безопасна ли она при игре в «Кегли»? Справившись в таблице I, находим:

1	1
3	11
7	100
5	<u>10</u>
	122

Поскольку сумма чисел в левом столбце нечетна, позиция при игре в «кегли» опасна. Правда, существует один-единственный ход, которым игрок, открывающий партию, может перевести позицию в безопасную и тем самым обеспечить себе выигрыш. Сумеете ли вы обнаружить спасительный ход?

Вычисление значений k слишком сложно, чтобы его можно было объяснить здесь. Заметим лишь, что все числа k не более чем четырехзначные. Следовательно, суммируя их по двоичным разрядам, мы получаем 16 различных комбинаций (каждая комбинация состоит из 4 — по числу двоичных разрядов чисел — сумм k), из которых лишь одна — четно-четно-четно-четная! Отсюда, как заметил Энон, можно заключить, что при игре в «Кегли» выбранная наугад исходная позиция с вероятностью, весьма близкой к $1/16$, будет безопасной.

Существуют весьма полезные простые правила, позволяющие игроку в «Кегли» быстро ориентироваться в возникающей ситуации, не прибегая каждый раз к анализу позиции. Две цепочки одинаковой длины безопасны: на какие бы хитрости ни пускался ваш противник, вы всегда сумеете сорвать его планы, продублировав его ход на цепочке той же длины, что и разрушенная (или по крайней мере укороченная) им. Например, если

имеются две цепочки длиной в 5 звеньев каждая и ваш противник возьмет вторую карту из первой цепочки, вы ответите на его ход, взяв вторую карту из второй цепочки. В результате на столе останутся 4 цепочки длиной в 1, 1, 3 и 3 звена. Если ваш противник следующим ходом заберет две карты из трехзвенной цепочки, вы повторите его ход на другой трехзвенной цепочке. Если же он вздумает взять однозвенную цепочку, вы также снимете со стола оставшуюся однозвенную цепочку.

Если исходная раскладка состоит из одной-единственной цепочки, то, как нетрудно видеть, выигрывает тот, кто делает первый ход. Если число звеньев в цепочке равно одному или двум, то первый игрок попросту забирает их. Если же число звеньев больше двух, то первый игрок забирает два или одно звено (в зависимости от того, четно или нечетно число звеньев в цепочке), расположенные в середине, после чего исходная цепочка распадается на две цепочки равной длины и игра продолжается так, как было описано выше.

Если раскладка содержит четное число пар цепочек одинаковой длины, то позиция безопасна, поскольку второй игрок дублирует любой ход первого игрока на цепочке-близнеце.

Полезно также помнить безопасные раскладки для двух или трех цепочек, каждая из которых содержит не более девяти карт. Помимо двух цепочек одинаковой длины, безопасных при любом числе звеньев, безопасны следующие пары цепочек (числа означают длину цепочки — количество звеньев): 1—4, 1—8, 2—7, 3—6, 4—8 и 5—9. Чтобы запомнить безопасные тройки цепочек, достаточно держать в голове три группы ключевых цифр: 1, 4, 8; 2, 7 и 3, 6. Любая комбинация трех чисел, взятых по одному из каждой группы, порождает безопасную раскладку.

Но вернемся, наконец, к игре Энона. Возьмем несколько обрезков бечевки произвольной длины. Вместе с партнером будем по очереди отрезать от любого куска бечевки по 1 см. (Разрешается не только отрезать «хвосты», но и вырезать «серединки» длиной в 1 см.) При очередном ходе не обязательно пользоваться ножницами: если на столе лежит «готовый» обрезок бечевки длиной в 1 см, то его можно взять. Выигрывает тот, кто возьмет со стола последний обрезок бечевки длиной в 1 см.

Длина обрезков бечевки не обязательно должна быть рациональным числом. На рис. 137 изображена начальная позиция с четырьмя обрезками длиной в 1, π , $\sqrt{30}$ и $\sqrt{50}$ см. Кто выиграет партию, если оба игрока будут придерживаться оптимальных стратегий? На первый взгляд этот вопрос кажется необычайно трудным, но стоит лишь вникнуть в существо дела, как ответ на него становится до смешного простым.

Решая задачу, удобно начертить на листке бумаги четыре отрезка нужной длины и, стирая каждый раз по единичному отрезку, проставить над оставшимися их длину в сантиметрах.

Играя в игру Энона, можно использовать не только прямолинейные обрезки, но и петли из бечевки. Предположим, что в исходной позиции имеется семь петель и периметр каждой из них больше 2 см. Можно ли заранее сказать, кто из игроков выиграет, если точные значения периметров петель неизвестны? Несмотря на кажущуюся трудность, эта задача решается еще проще, чем предыдущая.

Последняя игра, о которой мы хотим рассказать в этой главе, называется «Полицейская машина» и заимствована из книги Руфуса Айзекса «Дифференциальные игры» (М., «Мир», 1967). Ее автор, известный специалист в области исследования операций, за выдающиеся достижения был удостоен в 1966 г. Американским обществом исследования операций Ланчестерской премии. В книге Айзекса приводится множество оригинальных методов решения сложных конфликтных игр, в особенности игр, связанных с преследованием и поимкой цели.

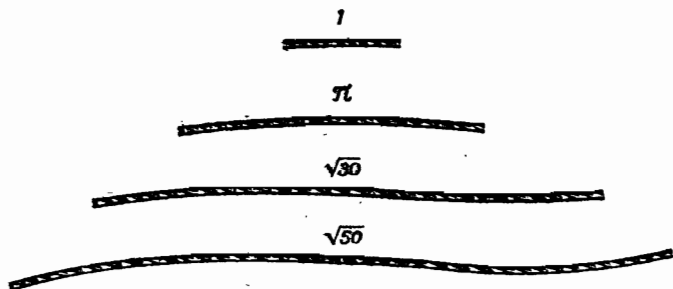


Рис. 137. Обрезки бечевки для игры Энона.

В упрощенном дискретном варианте многие игры представляют интерес для занимательной математики.

Одна из «ключевых» игр в книге Айзекса, которая служит пробным камнем для демонстрации различных методов решения, носит устрашающее название «Шофер-убийца». Шофер-убийца сидит за рулем машины, которая может развезжать с постоянной скоростью по бесконечной плоскости. Шофер может мгновенно поворачивать баранку, но угол, на который поворачиваются передние колеса, ограничен. На той же плоскости находится пешеход, который передвигается с постоянной скоростью, меньшей, чем скорость машины. При каких условиях машина (некоторая окрестность точки, изображающей шофера-убийцу) непременно настигнет (коснется) пешехода? При каких условиях пешеходу удастся избежать гибели под колесами машины? Каким образом преследователь может минимизировать время, за которое он настигнет жертву (в том случае, когда это возможно)?

К счастью, нам не нужно ломать голову над этими трудными вопросами. Нас будет интересовать более простая, хотя и в чем-то сходная с «Шофером-убийцей» игра, которую Айзекс назвал «Полицейская машина». Патрульная полицейская машина находится на одном из перекрестков города, имеющего прямоугольную планировку. В другой машине находятся преступники. Полицейская машина имеет вдвое бoльшую скорость, чем машина преступников, но зато блюстители порядка вынуждены соблюдать правила движения, которыми пренебрегают (семь бед — один ответ!) преступники. Правила запрещают делать левые повороты и разворачиваться (совершать U-образные повороты) на перекрестках, поэтому на каждом перекрестке полицейская машина может либо повернуть направо, либо проехать его прямо. Преступники же, оказавшись на любом перекрестке, могут свернуть на любую из 4 отходящих от него магистралей.

В дискретном варианте игры перекрестки заменяются клетками бесконечной шахматной доски, полицейская машина — пешкой с нарисованной на ней стрелкой, указывающей направление движения машины, машина с преступниками — обычной пешкой. Игроки по очереди совершают ходы. Первый ход делает «водитель» поли-

рис. 138 эти клетки заштрихованы), преступники считались бы пойманными.

Где должна находиться полицейская машина, чтобы преступники не могли уйти от возмездия? В своей книге Айзекс показывает, что вокруг клетки, на которой в начальный момент находится полицейская машина, можно построить асимметричную, компактную область, состоящую из 69 клеток. На какой бы из клеток этой области ни находилась в начальный момент машина с преступниками, участь их предрешена. Верно и обратное утверждение: находясь в начальный момент на любой клетке вне построенной Айзексом роковой области, преступники сумеют уйти от преследования (напомним, что доска предполагается неограниченной).

Читатель может попробовать самостоятельно отыскать 69 роковых для преступников клеток. Для этого ему необходимо начертить доску размером 50×50 клеток и, поместив полицейскую машину в центре доски, начать экспериментировать. До тех пор пока игра не будет полностью проанализирована, она таит в себе много неожиданного. «Водитель» машины с преступниками, по-разному выбирая свою начальную позицию, стремится определить, из каких клеток ему удастся добраться до границы доски, прежде чем он будет пойман.

Разумеется, сыграв достаточно большое число партий, вы в конце концов сумеете очертить опасную для преступников зону. Однако существует более простой метод, позволяющий не только определить ее границы, но и сопоставить каждой клетке число, показывающее, за сколько ходов полицейская машина настигнет преступников, если обе стороны будут играть рационально.

Читателям, не склонным к проведению подробного анализа игры, мы предлагаем поразмыслить над более простой задачей. Предположим, что полицейская машина в начале игры находится в клетке, помеченной на рис. 138 кружком со стрелкой, а преступники — в любой из клеток, отмеченных звездами. Из всех этих клеток, кроме одной, они могут безнаказанно скрыться от преследования. Какая из клеток окажется роковой, и сколько ходов потребуется полицейской машине, чтобы догнать преступников, если обе стороны будут действовать оптимальным для себя образом?

ОТВЕТЫ

При игре в «Кегли» с начальной позицией, изображенной на рис. 136, единственный ход, обеспечивающий выигрыш первому игроку, состоит во взятии центральной карты из ряда в пять карт.

Игра Энона, как ни удивительно, изоморфна игре в «Кегли»! То обстоятельство, что длина обрезков бечевки может принимать иррациональные значения, на первый взгляд чрезвычайно осложняет игру. В действительности же дробной частью длины всегда можно пренебречь. Пусть, например, нам дан обрезок бечевки длиной в $6\frac{1}{2}$ см. Отрезать от него кусочек в 1 см — то же самое, что изъять одно звено из цепочки длиной в 6 звеньев при игре в «Кегли». Остаток (в $\frac{1}{2}$ см, если мы играем в игру Энона, и в $\frac{1}{2}$ звена — при игре в «Кегли») не имеет значения ни в одной из игр. Представим себе, что мы отрезаем кусочек длиной в 1 см, отступая на $\frac{3}{4}$ см (или на любую долю см, выражающуюся правильной дробью) от конца бечевки. При игре в «Кегли» этой операции соответствует ход, при котором игрок забирает два звена с одного из концов шестизвенной цепочки. Остающийся на столе кусочек бечевки длиной в $\frac{3}{4}$ см «меньше нормы» — его нельзя взять при очередном ходе, — поэтому на столе по существу остается лишь один обрезок бечевки длиной в $4\frac{3}{4}$ см. При игре в «Кегли» ему соответствует цепочка длиной в 4 звена. Отступим от конца бечевки на целое число сантиметров и вырежем из ее внутренней части кусочек в 1 см. При игре в «Кегли» этому ходу соответствует взятие одного звена из середины (номер звена на единицу больше числа сантиметров, отсчитанных от конца бечевки) шестизвенной цепочки. Отступим теперь от конца бечевки (длина всего обрезка по-прежнему равна $6\frac{1}{2}$ см) на расстояние, равное целому числу сантиметров плюс дробь, заключенная между $\frac{1}{2}$ и 1. При игре в «Кегли» этому ходу соответствует взятие двух звеньев из середины шестизвенной цепочки. Немного поразмыслив и попрактиковавшись, вы без труда убедитесь в том, что каждый ход при игре в «Кегли» имеет аналог в игре Энона, и наоборот, а каждый обрезок бечевки (при игре в «Кегли») соответствует цепочке, число звеньев которой равно числу «полных» сантиметров, укладываемых в длину обрезка.

Коль скоро эквивалентность игры в «Кегли» и игры Энона известна, ответить на вопрос об оптимальной стратегии для игрока, делающего первый ход в партии, начальная позиция которой изображена на рис. 137, совсем несложно. Вычислив значения длин обрезков ($1, \pi \approx 3,14..., \sqrt{30} \approx 5,47..., \sqrt{50} \approx 7,07...$) и отбросив дробные части, мы увидим, что эта позиция эквивалентна начальной позиции при игре в «Кегли», изображенной на рис. 136. Следовательно, тот, кто делает первый ход, может выиграть, следуя стратегии, изложенной при рассмотрении этой партии: отступив на 2 см от конца обрезка длиной в 5,47... см, отрезать кусочек длиной в 1 см, а затем продолжать партию, переводя на язык игры Энона ходы, описанные ранее при разборе партии в «Кегли».

Если в игру Энона играть с обрезками бечевки, связанными в петли с периметром больше 2 см, то тот из игроков, кто делает второй ход, без труда обеспечивает себе победу. Когда его противник отрежет 1 см от любой петли, тем самым превратив ее в обыч-

			8	11						
			5	8						
		3	4	7	10					
		2	3	4	7					
	1	1	1	3	6	9				
	1	1	1	2	3	6				
	0	0	0	1	1	5	8			
	0		0	1	1	2	3			
	9	0	0	0	1	1	3	4	5	8
	7	4	3	2	3	4	7	8	11	
	10	7	4	3	6	7	10			
		8	5	6	9					
		11	8							

Рис. 139. Опасная для преступников зона в игре «Полицейская машина».

ный («разомкнутый») обрезок бечевки, второй игрок вырезает 1 см из самого центра бечевки. В результате бечевка распадается на два обрезка одинаковой длины. Как и при игре в «Кегли», образовавшаяся позиция безопасна, поскольку любой ход, сделанный противником на одном обрезке, второй игрок повторяет на другом обрезке. После вскрытия всех петель и вырезания кусочков в 1 см из центра оставшихся обрезков игра сводится к обычному варианту игры Энона с обрезками, разбитыми на пары одинаковой длины. Таким образом, второй игрок заведомо обеспечивает себе выигрыш.

Если в начальной позиции имеется одна замкнутая петля с периметром не менее 1 см, но не более 2 см, то тот из игроков, кто

делает первый ход, выигрывает. Для этого ему необходимо отрезать от этой петли кусочек длиной в 1 см, а в дальнейшем придерживаться стратегии, которая ранее обеспечивала выигрыш второму игроку. Если число малых петель нечетно, первый игрок выигрывает. Если же число малых петель (с периметром более 1 см и менее 2 см) четно, первый игрок проигрывает.

Опасная для преступников зона (клетки, из которых им не удастся скрыться от полиции) в игре «Полицейская машина» изображена на рис. 139. Полицейская машина отправляется из клетки, отмеченной черным кружком со стрелкой. В какой бы из клеток, отмеченных числами, ни находилась машина с преступниками, ее участь предreshена. Числа в клетках показывают, за сколько ходов полицейская машина догонит машину с преступниками, если обе стороны будут играть рационально. На том же рисунке приводится ответ и на последний вопрос этой главы. Из десяти клеток, отмеченных звездами, единственно опасной является клетка, в которую полицейская машина могла бы попасть ходом коня (на рис. 139 «роковая» клетка отмечена крапинками). Если обе стороны действуют наилучшим образом, то преступники будут настигнуты после девяти ходов.

С простым методом, позволяющим указывать границы опасной зоны и число ходов, можно ознакомиться в книге Р. Айзекса «Дифференциальные игры», в которой дан подробный анализ игры.

Читатель в качестве самостоятельного упражнения может попытаться разработать стратегии, при которых полицейская машина настигает преступников за минимальное число ходов или при которых преступники как можно дольше оттягивают момент поимки и даже уходят от погони, если их начальная позиция находилась вне опасной зоны или если полиция, преследуя их, допускает какую-нибудь тактическую ошибку.

ГЛАВА 19

СЕМЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ

Для решения любой из приводимых в этой главе задач необходимо лишь знание элементарной математики. Для разминки мы начнем с совсем простых вопросов.

а. Верно ли утверждение, что квадратный корень из любого числа n всегда меньше n ?

б. Существуют ли в ряду натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ... два простых числа, разделенных ровно 10 составными числами?

в. Первый том двухтомного издания толщиной в 2 см стоит на полке слева от второго тома толщиной в $2\frac{1}{2}$ см. В толщину каждого тома входит и толщина обложки. Обложки у обоих томов одинаковы и имеют толщину $\frac{1}{8}$ см. Книжный червь прогрызает горизонтальную норку, начиная с первой страницы первого тома и финишируя на последней странице второго тома. Определите длину норки.

г. Не производя умножения, докажите, что $1\,234\,567\,890^2 - (1\,234\,567\,889 \times 1\,234\,567\,891) = 1$.

д. Верно ли утверждение о том, что тетраэдр имеет четыре или пять граней?

е. Выпишите одну за другой все цифры от 9 до 1 в обратном порядке.

ж. Набор чисел 1, 3, 8 и 120 обладает замечательным свойством: произведение любых двух из них на единицу меньше точного квадрата. Найдите пятое число, которое можно присоединить к этому набору, не нарушая его свойства.

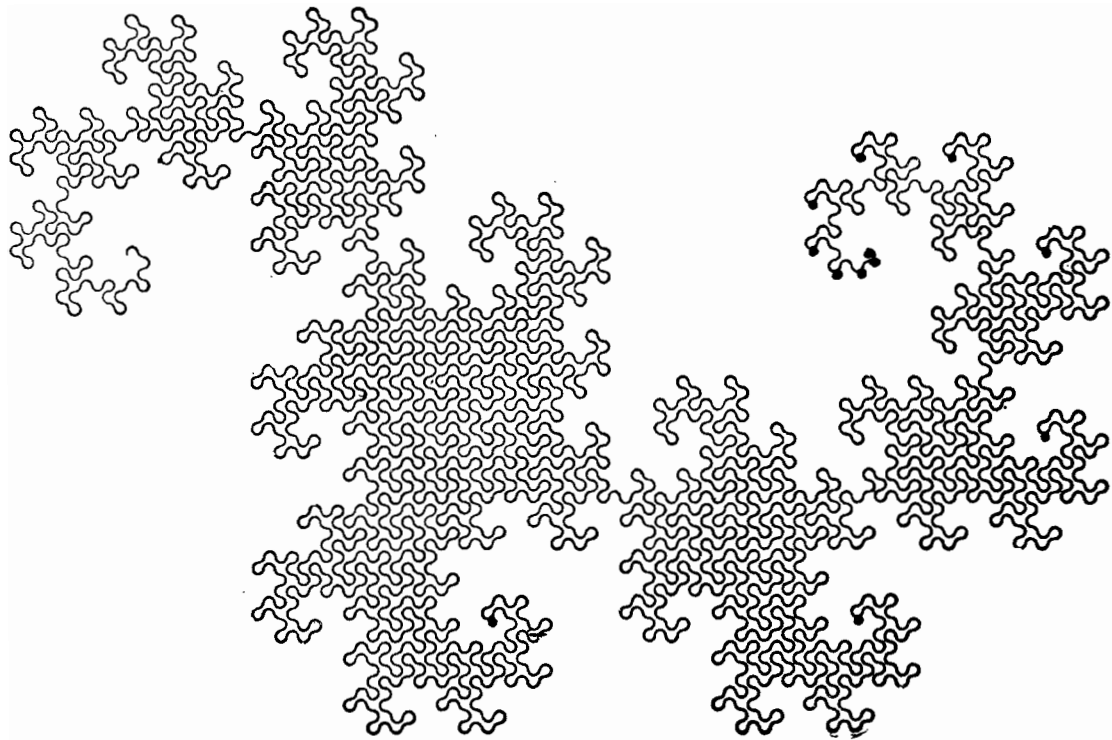
1. У студентки одного колледжа несколько необычное палиндромное* имя Нора Лил Арон. Как-то раз ее приятель, студент-старшекурсник математического факультета, изнывая от скуки на лекции, решил от нечего делать заняться составлением числовой криптограммы и записал имя девушки в виде «примера на умножение»:

$$\begin{array}{r} \times \text{НОРА} \\ \text{Л} \\ \hline \text{АРОН} \end{array}$$

Можно ли, подставив вместо каждой буквы одну из 10 цифр, превратить эту запись в арифметический пример — умножение двух чисел? Немного поразмыслив, студент обнаружил, что такая подстановка действительно возможна и что задача имеет единственное решение. Мы надеемся, что читателям не составит труда найти это единственное решение. Предполагается, что ни одно из четырехзначных чисел не начинается с нуля.

2. Причудливая кривая, изображенная на рис. 140, называется «кривая дракона». Придумал ее физик Джон

* То есть читающееся одинаково справа налево и слева направо. — *Прим. перев.*

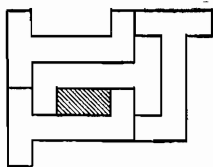


Р и с. 140. Кривая дракона двенадцатого порядка.

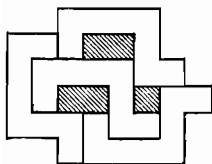
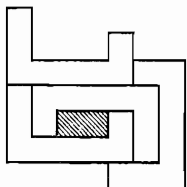
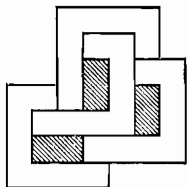
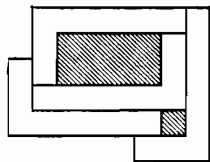
Э. Хейзуэй, а подробную теорию разработали Гартер, Хейзуэй и Бенкс. Хотя кривая дракона не имеет отношения к теории групп, Гартер привел ее на обложке своей работы по приложениям теории групп в физике как символ «все более широкого распространения таинственного начала, которое лежит в основе этой научной дисциплины». Кривая дракона на рис. 140 имеет вид фантастической траектории, начерченной вдоль линий квадратной решетки. Каждый поворот кривой на 90° скруглен, чтобы показать более наглядно, что кривая не имеет точек самопересечения. Кривая действительно несколько напоминает дракона с когтистыми лапами и разверстой пастью, обращенной влево, или морского змея, чье туловище, свитое в тугие кольца, вздымается над воображаемой поверхностью воды.

Можете ли вы придумать простой способ построения кривой дракона? Известно три таких способа (о них рассказывается в «Ответах»): один, основанный на использовании последовательности двоичных цифр, другой, использующий складываемую в несколько раз полоску бумаги, и третий, основанный на некотором геометрическом построении. К открытию кривых дракона привел второй метод. В «Ответах» объясняется также значение 12 жирных точек, свидетельствующих о том, что на рис. 140 изображена кривая дракона 12-го порядка. По странному стечению обстоятельств, эти 12 точек лежат на логарифмической спирали, хотя это было замечено лишь позднее и никак не используется при построении кривой.

3. Полиомино — это связанные фигуры, составленные из единичных квадратов. Один квадрат представляет собой единственную фигуру мономино, два — домино, из трех квадратов можно составить 2 различные фигуры тримино, из четырех — 5 различных тетрамино, из пяти — 12 различных пентамино и т. д. Недавно меня заинтересовал вопрос, чему равен наименьший порядок полиомино, четыре одинаковые фигуры которого можно сложить так, что любые две из них будут иметь общий участок границы. Я думаю (хотя это и не доказано), что наименьший порядок равен 8, иначе говоря, указанным свойством обладает октамино (и не обладают моно-, до-, ..., септамино). Пять расположений фигур



Р и с. 141. Пять решений задачи о четырех фигурах полиомино, из которых любые две имеют общую границу.

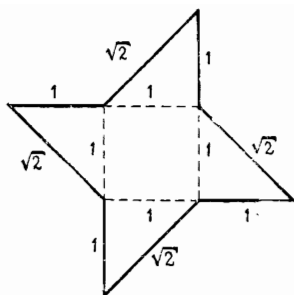


октамино, из которых любые две имеют общие участки границы, изображены на рис. 141. Если каждую фигуру октамино рассматривать как карту некоторой страны, то каждый из пяти вариантов сборки четырех фигур служит частным решением проблемы четырех красок: раскрасив карту всего лишь в 4 краски, мы сможем добиться, чтобы никакие две сопредельные страны не были выкрашены в один цвет.

Снимем теперь ограничение, согласно которому число одинаковых фигур полиомино непременно должно быть равно четырем, и спросим, каков наименьший порядок полиомино, из фигур которого можно составить карту, требующую для раскраски четыре цвета? На этот раз условие, согласно которому любые четыре фигуры должны подразделяться на пары, непременно имеющие общую границу, может нарушаться. Необходимо лишь следить за тем, чтобы для правильной раскраски карты, составленной из повторений одной и той же фигуры, хватило четырех красок. (Под правильной раскраской мы понимаем такую, при которой любые две страны, имеющие общий участок границы, оказываются выкрашенными в различные цвета.) «Пустоты», остающиеся между фигурами, частью карты не считаются и остаются незакрашенными. Порядок полиомино, при котором достигается решение этой задачи, существенно меньше 8.

4. Любопытную двойную задачу предложил в 1966 г. на конкурсе, проводимом кембриджским студенческим

Рис. 142. Задача Д. Моллисона.



математическим обществом, Д. Моллисон из Тринит-колледжа. Задача первая: чему равно максимальное число точек, которые можно разместить внутри и на контуре фигуры, изображенной на рис. 142, так, что расстояние между любыми двумя точками будет не меньше $\sqrt{2}$? Задача вторая: сколько существует различных вариантов размещения точек, удовлетворяющих условиям первой задачи (варианты, переходящие один в другой при поворотах и отражениях, различными не считаются)? Пунктирные линии внутри фигуры проведены специально для того, чтобы показать, что фигура состоит из единичного квадрата, окруженного четырьмя половинками квадратов.

5. Вы отворачиваетесь, а ваш приятель раскладывает на столе три монеты различного достоинства (например, пятак, гривенник и полтинник). Как именно лягут монеты, безразлично, лишь бы все три монеты не были обращены вверх только гербом или только решеткой.

Не глядя на монеты, вы должны указать приятелю, какие из них необходимо перевернуть, чтобы все три монеты легли вверх одинаковой стороной (гербом или решеткой). Пусть, например, вы попросили приятеля перевернуть пятак. Выполнив просьбу, он сообщает, легли ли все три монеты так, как надо, или нет. Если с первой попытки вам не удастся достичь желаемого, вы называете вторую монету. Так продолжается до тех пор, пока ваш приятель не объявит, что все три монеты лежат вверх гербом (или решеткой).

Вероятность того, что вам удастся достичь успеха при первой попытке, равна $1/3$. Предположим, что вы избрали оптимальную стратегию. Какова вероятность того, что вам удастся достичь успеха не более чем за 2 попытки? Чему равно наименьшее число попыток n , гарантирующее, что успех будет достигнут не позже чем при n -й попытке?

Ответить на эти вопросы нетрудно, но мы слегка усложним игру. В новом варианте игры все остается прежним, только на этот раз вы стремитесь перевернуть все три монеты вверх гербами. Ваш приятель может раскладывать монеты, как ему вздумается. Единственной запрещенной комбинацией в начале игры считается три герба. Как и в старом варианте игры, после каждой попытки вам сообщают, удалось ли достичь успеха или нет. Предположим, что вы и в этой игре избрали оптимальную стратегию. Спрашивается, чему равно наименьшее число попыток, гарантирующее успех? Какова вероятность достичь успеха не более чем за две попытки, не более чем за три попытки и т. д., вплоть до последней попытки, при которой вероятность достигает значения 1 (то есть исход испытания становится достоверным)?

6. Десять солдат, из которых любые два отличаются друг от друга по росту, выстроились в одну шеренгу. Сделать это они могут $10! = 3\,628\,800$ различными способами, но в какой бы последовательности солдаты ни становились, четверо из них всегда будут стоять «по росту» — либо в порядке его возрастания, либо в порядке его убывания. Если все солдаты, кроме этих четырех, выйдут из строя, то оставшаяся четверка будет напоминать нечто вроде спортивного свистка.

Убедиться в справедливости сказанного вы можете, взяв 10 игральных карт со значениями от туза до десятки. Предположим, что значения карт соответствуют росту солдат. Тогда независимо от того, в какой последовательности вы выложите 10 карт в ряд, среди них всегда можно будет указать 4 карты, значения которых либо монотонно возрастают, либо монотонно убывают. Предположим, например, что вы выложили карты в такой последовательности: 5, 7, 9, 2, 1, 4, 10, 3, 8, 6. Четверка карт 5, 7, 9, 10 расположена в порядке возрастания значений. Может быть, вам покажется, что монотонность возрастания нарушится, если десятку расположить между семеркой и девяткой? Вы правы лишь отчасти: переложив десятку, вы обнаружите, что возникла монотонно убывающая последовательность из 4 карт: 10, 9, 8, 6.

Пусть c (от слова свисток) — максимальное число солдат, которые в шеренге из n человек различного роста всегда оказываются выстроенными по росту (либо в порядке его возрастания, либо в порядке его убывания). Задача (и отнюдь не легкая) состоит в том, чтобы доказать, что при $c = 4$, $n = 10$. Не исключено, что в процессе решения вам удастся обнаружить общее правило, позволяющее находить значение c при любом n .

7. На каждой клетке шахматной доски размером 5×5 стоит конь. Можно ли одновременно делать ход всеми 25 конями так, чтобы после хода все 25 клеток мини-доски снова оказались занятыми? Каждый конь ходит, как обычно: на два поля в одном направлении, после чего поворачивается на 90° и «приземляется» на соседнем поле.

ОТВЕТЫ

а. Утверждение ложно (например, $\sqrt{1/4} = 1/2 > 1/4$).

б. Нет, не существуют. Все четные числа (кроме 2) составные. Таким образом, любая последовательность составных чисел, разделяющих два простых числа, должна начинаться и заканчиваться четным числом и, следовательно, содержать нечетное число составных чисел. Поскольку число 10 четно, никакие два простых числа не могут быть разделены десятью составными числами.

в. $1/4$ см. Первую страницу первого тома отделяют от последней лишь верхняя обложка первого тома и нижняя обложка второго тома.

г. Пусть $a = 1\,234\,567\,890$. Тогда левая часть равенства запишется в виде $a^2 - (a-1)(a+1)$. Раскрыв скобки, получим тождество $1 = 1$.

д. Верно. Тетраэдр имеет четыре грани, поэтому утверждение «Тетраэдр имеет четыре или пять граней» (или — не исключающее) истинно.

е. 123 456 789.

ж. Пятым числом, не нарушающим свойства чисел, входящих в набор, является 0.

Задача допускает естественное обобщение: не существует ли шестого числа, присоединение которого к расширенному набору из пяти чисел (исходный набор плюс тривиальное дополнение в виде нуля) не меняет основного свойства? Окончательный ответ на этот вопрос не известен. Доказано лишь, что если шестое число существует, то оно должно быть больше, чем 10^{580} . Не доказано и обратное: что шестое число не существует (как, впрочем, и то, что набор чисел со столь любопытным свойством конечен).

1. Криптарифм $\text{НОРА} \times \text{Л} = \text{АРОН}$ имеет единственное решение $2178 \times 4 = 8712$. Если бы вторым инициалом Норы была буква А, то единственное решение имело бы вид $1089 \times 9 = 9801$.

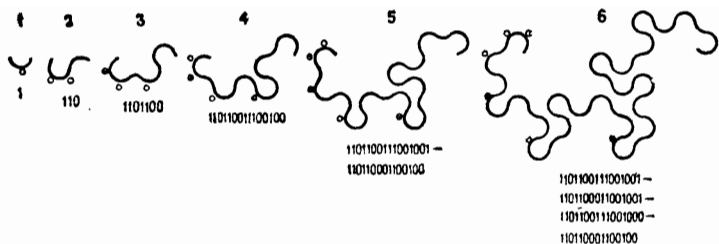


Рис. 143. Кривые дракона от нулевого до шестого порядка и их двоичные формулы.

Среди чисел, не превышающих 10 000, лишь два числа — 1089 и 2178 — при умножении на некоторое число «выворачиваются наизнанку» (если исключить тривиальные случаи чисел-палиндромов типа 3443, умножаемых на 1). Вставив в середину любого из этих чисел произвольное количество девяток, мы получим не слишком интересный набор чисел, также обладающих свойством «выворачиваться» при умножении на некоторое число. Например, $21\,999\,978 \times 4 = 87\,999\,912$.

2. Каждую кривую дракона можно описать с помощью последовательности двоичных цифр, где 1 соответствует повороту налево, а 0 — повороту направо (кривая вычерчивается на листе бумаги от хвоста к пасти дракона). Формула для кривой дракона любого порядка (большее 1) получается с помощью следующего рекуррентного метода. К формуле кривой дракона предыдущего порядка мы справа приписываем единицу. Это дает нам половину формулы. Затем мы отыскиваем в наборе двоичных цифр, предшествующих приписанной единице, центральную единицу и заменяем ее на нуль, после чего приписываем то, что получилось, справа от уже построенной половины формулы. Кривая дракона первого порядка имеет двоичную формулу 1. Приписав справа единицу, получим 11. Единственная цифра, стоящая перед приписанной единицей, является «центральной». Заменяв ее на 0 и приписав его справа, получаем двоичную формулу кривой дракона второго порядка: 110. Чтобы получить формулу кривой дракона третьего порядка, приписываем к 110 справа 1 и, изменив центральную цифру числа 110 с 1 на 0, повторяем его справа от 1101: 1101100. Аналогично получаются формулы для кривых дракона более высокого порядка. Нетрудно видеть, что кривая дракона n -го порядка ($n > 1$) состоит из двух экземпляров кривых дракона $(n - 1)$ -го порядка, соединенных «головой к голове», в силу чего вторая кривая вычерчивается «наоборот»: не от хвоста к голове, а от головы к хвосту. Кривые дракона от нулевого до шестого порядка изображены на рис. 143. Все драконы вычерчены с хвоста к голове и повернуты так, чтобы они «плыли» направо, а пасть и кончик хвоста касались «поверхности воды». Если единицу интерпретировать как поворот направо, а нуль — как поворот налево, то формулы будут описывать драконов, плывущих в другую сторону. Жирные точки на каждой кривой соответствуют центральным единицам в формулах кривых дракона

последовательных порядков от 1 до порядка рассматриваемой кривой. На кривых дракона любого порядка эти точки лежат на логарифмической спирали.

Джон Э. Хейзуэй открыл кривые дракона, действуя совсем иным образом. Перегнем пополам лист бумаги, затем развернем его так, чтобы угол между половинками был равен 90° , и взглянем на лист с торца. Мы увидим кривую дракона первого порядка. Перегнув сложенный вдвое лист пополам еще раз (складывать лист нужно все время в одном и том же направлении) и раскрыв его так, чтобы части листа у каждого сгиба образовывали угол в 90° , мы получим кривую дракона второго порядка. (Точнее говоря, поскольку у листа два торца, мы получим две зеркально симметричные кривые дракона второго порядка.) Трижды перегибая лист бумаги пополам, мы получим кривую дракона третьего порядка (рис. 144). В общем случае при n -кратном перегибании листа бумаги мы получим кривую дракона n -го порядка.

Двоичную формулу можно с успехом применять и к конструированию моделей кривых дракона из многократно сложенной узкой полоски бумаги. Условимся, что единицы соответствуют «горным хребтам», а нули — «ущельям». Начав с одного конца полоски, сложим ее в соответствии с двоичной формулой. Развернув затем сложенную полоску так, чтобы ее звенья были расположены под прямым углом друг к другу, получим интересующую нас кривую дракона.

Бенкс придумал способ, позволяющий получать кривые с помощью геометрического построения (рис. 145). Начертим прямой угол (стороны угла удобно выбрать подлиннее). На каждом последующем этапе мы заменяем отрезок прямой прямым углом так, как показано на рис. 145. Нетрудно видеть, что результат при этом получается такой же, как если бы мы воспользовались моделью кривой из многократно сложенной полоски бумаги.

Один из трех создателей теории кривых дракона Гартер открыл множество способов, позволяющих «сшивать» кривые дракона

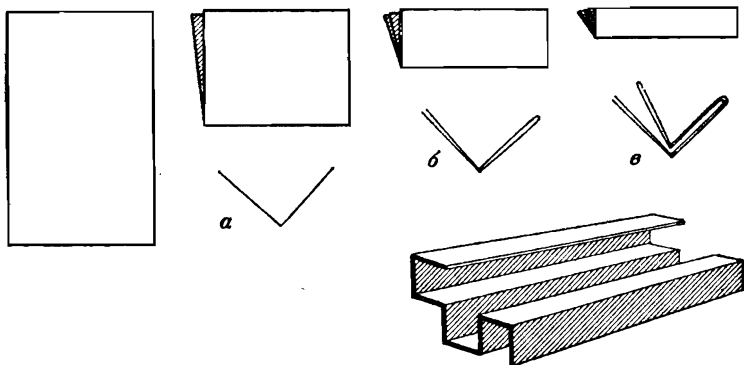


Рис. 144. Кривая дракона третьего порядка, полученная при трехкратном перегибании листа бумаги.

a — лист бумаги, сложенный один раз; *б* — два раза; *в* — три раза.

так, чтобы они покрывали всю плоскость или образовывали симметричные узоры. Драконов можно соединять пастью к пасти, хвостом к хвосту, пастью к хвосту, спинами или брюхом, брюхом к спине и т. д. На рис. 146 изображены четыре обращенных пастью вправо дракона 6-го порядка, сцепленных хвостами. Сцепив аналогичным образом четырех драконов 12-го порядка, изображенных на рис. 139, вы увидите незабываемое зрелище. Эксперименты по сцеплению кривых дракона удобнее всего проводить, нарисовав их на кальке.

Дональд Э. Кнут доказал трудную теорему: четыре кривых дракона бесконечного порядка можно сцепить так, что они полностью покроют всю плоскость*.

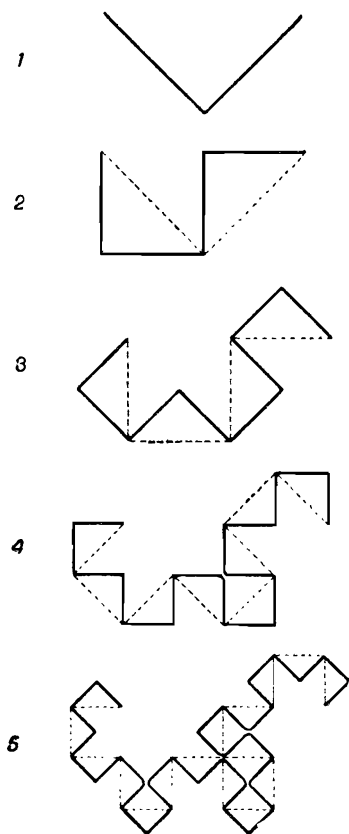
3. Как видно из рис. 147, шесть костей обычного домино можно расположить так, что для правильной раскраски получившейся карты потребуется лишь четыре цвета.

Карту, допускающую правильную раскраску в четыре цвета, можно составить из 11 мономино (рис. 148). Обойтись при раскраске этой карты тремя красками нельзя (две сопредельные страны непременно окажутся выкрашенными в один цвет). До сих пор не доказано, что если ограничиться четырьмя красками, то нельзя построить карту из меньшего числа мономино, также допускающую правильную раскраску. (Напомним, что пустоты между фигурами полимино «странами» не считаются.)

Карта, составленная из мономино, естественно наводит на мысль о трехмерном обобщении задачи. Предположим, что у нас имеется неограниченный запас одинаковых кубов. Чему равно максимальное число кубов, которые можно расположить так, что любые

* См. также статью: Н. Б. Васильев и В. Л. Гутенмахер, Кривые дракона, *Квант*, № 2, 1970, стр. 36—46. — *Прим. перев.*

Р и с. 145. Геометрический метод построения кривых дракона.



два из них будут соприкасаться гранями? Иначе говоря, если n — число одинаковых кубов, то каково максимальное значение n , при котором, для того чтобы соприкасающиеся гранями кубы были окрашены в разные цвета, необходимо взять n красок? Говоря о кубах, соприкасающихся гранями, мы отнюдь не имеем в виду, что кубы имеют общими целые грани. Соприкосновение может происходить и по части грани, но непременно грани: кубы не могут иметь одну лишь общую вершину или ребро.

Оказывается, что $n = 6$. На рис. 149 в плане показаны три куба (сплошные линии), покоящиеся на трех других кубах. Нетрудно видеть, что любые два из шести кубов соприкасаются гранями.

4. Пять точек на фигуре Моллисона можно расположить так, как показано на рис. 150. Расстояние между любыми двумя точками не меньше $\sqrt{2}$. Каждую точку, не нарушая условий первой задачи, можно сместить на довольно большие расстояния. Таким образом, существует бесконечно много вариантов размещения пяти точек. Интересно, удалось ли вам избежать ловушки, расставленной автором задачи, — не поместили ли вы четыре из пяти точек в вершинах фигуры?

5. Чтобы все три монеты легли вверх гербом или вверх решеткой, лучше всего придерживаться следующей последовательности

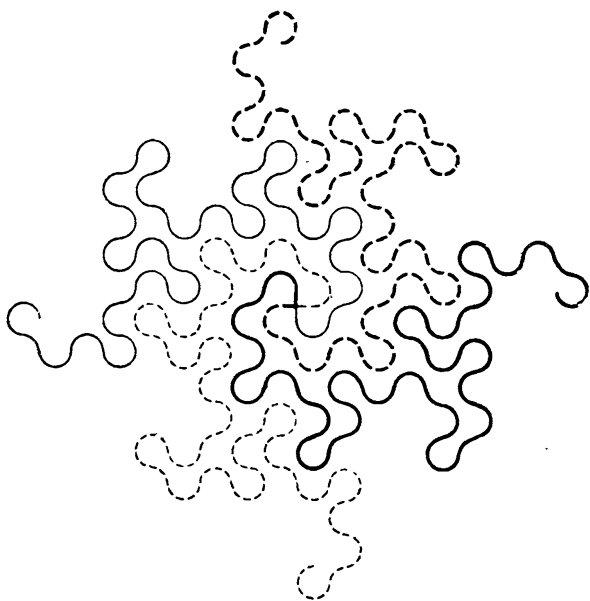
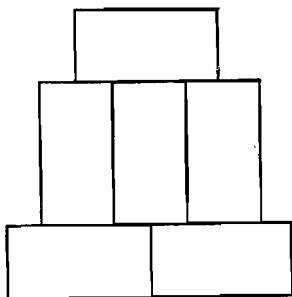
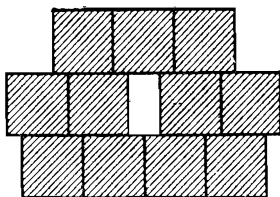


Рис. 146. Четыре кривые дракона шестого порядка, сцепленные хвостами.



Р и с. 147. Карта из шести домино, для правильной раскраски которой необходимы лишь четыре краски.



Р и с. 148. Карта из одиннадцати мономино, допускающая правильную раскраску в четыре цвета.

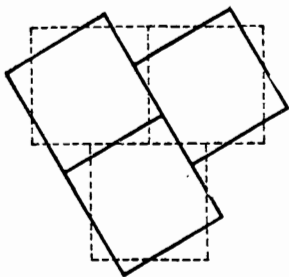
действий: попросите вашего приятеля перевернуть выбранную наугад монету, затем любую другую монету и снова первую монету. Вероятность достичь успеха при первой же попытке равна $\frac{1}{3}$. Если же вас постигнет неудача, то с вероятностью $\frac{1}{2}$ вас ждет успех при второй попытке. Можно было бы подумать, будто сумма этих вероятностей равна вероятности достичь успеха не более чем за две попытки, но это неверно.

Рассмотрим, как влияют первые две попытки на каждый из шести равновероятных вариантов раскладки монет: ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ. Соображения симметрии позволяют при первых двух попытках переворачивать любые две монеты. Успех достигается в четырех случаях из шести, следовательно, вероятность достичь благоприятного исхода испытания не более чем за две попытки равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

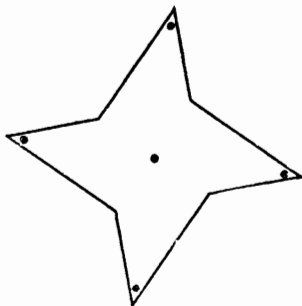
Если требуется, чтобы все три монеты были обращены вверх гербами, то успех заведомо достигается при семи попытках. Действительно, из восьми исходных раскладок монет запретной объявлена лишь раскладка ГГГ. Следовательно, перебрав семь вариантов, вы сумеете рано или поздно получить заветную комбинацию ГГГ. Существует легко запоминаемая стратегия поиска. Перенумеруем монеты числами 1, 2, 3 и будем испытывать их в последовательности 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3. Вероятность добиться успеха при первой попытке равна $\frac{1}{7}$, не позже чем при второй попытке — $\frac{2}{7}$ и т. д. до вероятности, равной $\frac{7}{7} = 1$, которая достигается не позже чем при седьмой попытке.

6. Если n — число солдат различного роста, выстроенных в одну шеренгу, из которых по крайней мере c всегда оказываются выстроенными по росту — либо в порядке его возрастания, либо в порядке его убывания, — то число c^2 — наименьший из квадратов, удовлетворяющих неравенству $c^2 \geq n$.

Чтобы доказать это, сопоставим каждому солдату два числа a и b . Пусть a — число солдат, стоящих слева от данного солдата



Р и с. 149. Решение задачи о размещении кубов.



Р и с. 150. Решение задачи Моллисона о пяти точках.

(включая его самого), рост которых образует монотонно возрастающую последовательность; b — максимальное число солдат, стоящих слева от данного солдата (включая его самого), рост которых образует монотонно убывающую последовательность. Нетрудно видеть (доказательство этого утверждения предоставляем читателю), что каких бы двух солдат мы ни взяли, по крайней мере одно из двух чисел a или b у них будет отличаться. Иначе говоря, у двух солдат могут совпадать либо числа a , либо числа b , но отнюдь не оба числа.

Предположим, что 10 солдат выстроены в такой последовательности, что максимальное число тех из них, кто выстроен по росту (безразлично справа налево или слева направо), равно c — наименьшему возможному значению. Ни у одного солдата числа a и b не могут в этом случае превосходить c . Поскольку у любых двух солдат пары чисел a и b не совпадают, число c должно быть достаточно велико, чтобы мы могли набрать по крайней мере 10 различных пар a и b .

Может ли c быть равным 3? Нет, потому что при этом мы получили бы лишь $3^2 = 9$ пар чисел:

a	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b	1	2	3	1	2	3	1	2	3

При любом c мы получаем c^2 пар чисел a и b . Поскольку $3^2 = 9$, значение $c = 3$ не позволяет получить столько пар, чтобы их хватило на 10 солдат. Но $c = 4$ порождает $4^2 = 16$ пар. Это больше, чем нужно. Отсюда мы заключаем, что независимо от расстановки солдат в строю по крайней мере четверо из них будут выстроены по росту. Таким же ($c = 4$) остается значение c и для 11, 12, ..., 16 солдат, выстроенных в одну шеренгу. Но для 17 солдат нам уже требуется $c = 5$, ибо в противном случае не хватит различных пар чисел a и b .

7. 25 коней не могут одновременно перейти с одного поля минидоски 5×5 на другое. Это легко доказать с помощью проверки на четность. Конь всегда ходит с поля одного цвета на поле другого

цвета. Доска 5×5 имеет 13 полей одного цвета и 12 полей другого. Ясно, что 13 коней не могут пойти на 12 полей так, чтобы по крайней мере два из них не оказались на одном и том же поле. Приведенное доказательство применимо ко всем доскам с нечетным числом полей.

ГЛАВА 20

СЕКРЕТЫ ЭСТРАДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ

Способность молниеносно производить в уме арифметические действия отнюдь не свидетельствует о высоком уровне общего развития и в еще меньшей степени о наличии математических способностей. Некоторые из выдающихся математиков не могли без ошибки подсчитать, какую сумму им надлежит получить сдачи при покупке какой-нибудь мелочи. В то же время многие профессиональные «чудо-вычислители» (хотя и не лучшие из них) во всем, что не касалось арифметических выкладок, были людьми весьма неразвитыми.

Тем не менее великие математики нередко отличались способностью мгновенно производить в уме сложнейшие расчеты. Например, Карл Фридрих Гаусс производил вычисления с такой быстротой и так искусно, что ему мог бы позавидовать любой эстрадный вычислитель. Не без тщеславия он любил говорить о себе, что научился вычислять раньше, чем говорить. Как-то раз отец Гаусса, бравший подряды на строительные работы, подсчитывал, сколько он должен уплатить своим каменщикам за неделю. Трехлетний Фридрих озадачил отца, сказав:

— Папа, ты ошибся...

Мальчик назвал число, которое действительно оказалось правильным, хотя установить это удалось лишь после кропотливой проверки. Самым удивительным было то, что никто не учил малолетнего ревизора арифметике.

Джон фон Нейман был разносторонним математическим гением, обладавшим способностью производить сложнейшие вычисления, не прибегая к карандашу и бумаге. В своей книге «Ярче тысячи солнц»* Р. Юнг (цитируя другого ученого) описывает следующий случай. «Однажды в кабинете Теллера собрались Ферми, фон Нейман и Фейнман. Я также присутствовал, так как мне предстояло выполнять планируемые здесь вычисления. Возникало и отвергалось много разных идей, и через каждые несколько минут у Ферми и Теллера появлялась необходимость быстрой численной проверки. И тогда ученые начинали действовать: Фейнман с помощью настольного арифмометра, Ферми с помощью маленькой логарифмической линейки, которую постоянно носил с собой, а фон Нейман обходился собственной головой. Голова обычно срабатывала быстрее, и было поразительно, как близко совпадали все три ответа».

Способность к устному счету таких первоклассных математиков, как Гаусс, фон Нейман, Эйлер или Валлис, не может не вызывать восхищения. Однако все их достижения в этой области меркнут по сравнению с чудесами, которые демонстрировали на эстраде профессиональные «чудо-вычислители». Многочисленные представители того племени акробатов и жонглеров ума с успехом подвизались в прошлом веке на подмостках Англии, континентальной Европы и Америки. Многие из них начинали свои выступления, еще будучи маленькими детьми. И хотя некоторые из вычислителей писали о своих методах и подвергались обследованию в лабораториях психологов, большую часть своих секретов они, по-видимому, утаивали или, скорее всего, сами до конца не понимали, каким образом им удастся делать то, что они делают.

Первый из американских эстрадных вычислителей Зера Колберн родился в 1804 г. в Кэботе (штат Вермонт). Так же как у его отца, прабабушки и по крайней мере у одного из братьев, у Зера было по шесть пальцев на каждой руке и ноге. («Лишние» пальцы были ампутированы, когда Зера исполнилось 10 лет. Как знать, может быть, именно они способствовали пробуждению

* Р. Юнг, Ярче тысячи солнц, М., Атомиздат, 1960, стр. 245.

у Зера интереса к счету и вычислениям?) Таблицу умножения всех чисел до 100 он выучил задолго до того, как научился писать и читать. Отец Зера, бедный фермер, быстро понял, какое золотое дно таят в себе необычайные способности сына, и, когда Зера исполнилось всего лишь 6 лет, отправился с ним в первое турне. В возрасте 8 лет Колберн выступал в Англии. Сохранились официальные протоколы его выступлений. Он мог почти мгновенно умножать одно на другое два четырехзначных числа и задумался лишь на миг, когда ему предложили перемножить два пятизначных числа. Когда Колберна попросили умножить 21 734 на 543, он тотчас же назвал ответ: 11 801 562. На вопрос, каким образом ему это удалось, Колберн ответил, что 543 — это 3×181 . Поскольку умножать на 181 легче, чем на 543, он сначала умножил 21 734 на 3, а полученный результат умножил на 181.

Вашингтон Ирвинг и другие поклонники необыкновенного таланта мальчика собрали достаточную сумму денег, чтобы отправить юного Колберна в школу сначала в Париже, а затем в Лондоне. Что произошло дальше, доподлинно не известно: то ли вычислительные способности Колберна ослабели, то ли он просто потерял интерес к выступлениям на эстраде. По возвращении в Америку (ему тогда было 20 лет) он в течение 10 лет служил священником методистской церкви. Его необычайная автобиография была опубликована в 1833 г. под названием «Воспоминания Зера Колберна, написанные им самим,... с изложением оригинальных методов вычислений». Колберн умер в возрасте 35 лет, будучи преподавателем иностранных языков в Норвичском университете (г. Нортфилд, штат Вермонт).

Английским соперником Колберна был Джордж Паркер Биддер, родившийся в 1806 г. в Девоншире. По преданию, отец Биддера, по профессии каменщик, научил сына лишь считать. Арифметику Биддер «открыл» самостоятельно, играя шариками и пуговицами. Когда ему исполнилось 9 лет, он в сопровождении отца отправился в свою первую гастрольную поездку. Типичным среди вопросов, которые задавали ему любопытные, был, например, такой: «Если Луна находится на расстоянии 123 256 миль от Земли, а звук распространяется со скоростью 4 мили в минуту, то сколько времени потре-

буется звуку, чтобы пройти путь от Земли до Луны (в предположении, что звук может распространяться в безвоздушном пространстве)?» Менее чем через минуту мальчик ответил: «21 сутки 9 часов 34 минуты». Как-то раз, когда Биддеру было 10 лет, его попросили извлечь квадратный корень из 119 550 669 121. Результат был получен через 30 секунд: 345 761. В 1818 г., когда Биддеру было 12, а Колберну 14 лет, оба вундеркинда встретились в Дербишире и вступили в состязание друг с другом. В своих мемуарах Колберн утверждает, что победа досталась ему, но лондонские газеты того времени отдают пальму первенства Биддеру.

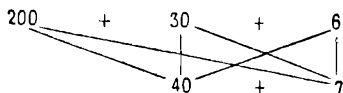
Профессора Эдинбургского университета убедили Биддера-старшего предоставить им право позаботиться об образовании сына. Мальчик с успехом окончил колледж и впоследствии стал одним из лучших инженеров Англии. В основном ему приходилось заниматься строительством железных дорог, но наибольшую известность он снискал как автор проекта и руководитель постройки доков Виктории в Лондоне. С возрастом Биддер не утратил способности производить в уме головокружительные выкладки. Незадолго до его смерти, последовавшей в 1878 г., кто-то, упомянув, что в одном дюйме укладывается 36 918 длин волн красного света и что свет распространяется со скоростью 190 000 миль в секунду, поинтересовался, сколько волн красного света успевает достичь сетчатой оболочки глаза в течение одной секунды. «Не трудитесь считать, — ответил Биддер, — 444 443 651 200 000».

И Колберн, и Биддер вычисляли произведения больших чисел, разбивая их на части и умножая слева направо «перекрестным методом». Например, вычисляя произведение 236×47 , Колберн сначала разбивал множители на части — $(200 + 30 + 6) \times (40 + 7)$, — а затем действовал так, как показано на рис. 151. Попробуйте, закрыв глаза, вычислить какое-нибудь произведение по методу Колберна и вы убедитесь, что он позволяет производить вычисления в уме гораздо легче, чем обычный способ умножения справа налево. «Правда, этот метод... требует использования гораздо большего количества чисел, чем обычные правила, — пишет Колберн в своих мемуарах, — но не следует упускать из виду, что перья, чернила и бумага обходились Зера

$$236 \times 47$$

$$236 = 200 + 30 + 6$$

$$47 = 40 + 7$$



$$1. 40 \times 200 = 8\,000$$

$$2. 8\,000 + (40 \times 30) = 9\,200$$

$$3. 9\,200 + (40 \times 6) = 9\,440$$

$$4. 9\,440 + (7 \times 200) = 10\,840$$

$$5. 10\,840 + (7 \times 30) = 11\,050$$

$$6. 11\,050 + (7 \times 6) = 11\,092$$

Рис. 151. Вычисление произведений методом Зера Колберна.

весьма дешево». (В своей книге Колберн говорит о себе в третьем лице.) Почему производить вычисления в уме с помощью «перекрестного метода» легче, чем по обычным правилам? Выступая в лондонском Институте гражданских инженеров с лекцией о своих методах вычислений, Биддер так ответил на этот вопрос: «На каждом этапе метод

позволяет иметь дело с одним и только с одним фактом. Лишь его необходимо удерживать в памяти до тех пор, пока очередной этап вычислений не будет завершен».

Другая причина, по которой эстрадные вычислители предпочитают умножать числа слева направо (хотя они редко признаются в этом), заключается в том, что, умножая слева направо, они получают возможность называть цифры произведения до того, как вычисление его будет закончено. Эстрадные вычислители прибегают и к другим уловкам, чтобы создать у зрителей впечатление, будто время, затрачиваемое ими на получение ответа, меньше того, которое они затрачивают в действительности. Так, например, они повторяют вопрос, а затем отвечают так, будто результат мгновенно пришел им в голову, хотя вычислять ответ они начинают еще до того, как зритель успевает назвать последнюю цифру второго множителя. Иногда вычислитель выигрывает еще немного времени, притворившись, будто не расслышал вопроса, и попросив повторить его еще раз. Читая сообщения очевидцев о «мгновенных» вычислениях, производимых тем или иным чудесником на эстраде, всегда над-

лежит вводить поправку на подобные «отвлекающие маневры».

Так называемые вычислители-«идиоты» не представляют особого интереса, и я упомяну лишь одного из них. Должен заметить, что все они отнюдь не были столь безнадежными идиотами, как считала публика. Кроме того, они значительно уступали эстрадным вычислителям с более развитым интеллектом по скорости, с которой производили арифметические действия.

Одним из первых представителей «умственно неполноценных» вычислителей был английский фермер Джедедия Бакстон, живший в XVIII в. Всю свою жизнь он был фермером и никогда не выступал перед публикой. Тем не менее слух о его необыкновенных способностях распространился по округе и достиг Лондона, куда Бакстон был вызван, дабы члены Королевского общества могли убедиться в том, что имеют дело с «чудом природы». Во время пребывания Бакстона в Лондоне кто-то вздумал пригласить его в Друрилейнский театр на трагедию Шекспира «Ричард III» с прославленным актером Дэвидом Гарриком в главной роли. На вопрос о том, как ему понравился спектакль, Бакстон ответил, что Гаррик произнес 14 445 слов и сделал 5202 шага по сцене. У Бакстона была непреодолимая страсть подсчитывать и измерять решительно все, что попадалось ему на глаза. Рассказывают, что, пройдя по полю, он мог с необычайной точностью назвать его площадь в квадратных дюймах и тут же перевести их в... «квадратные толщины волоса» (из расчета 48 волос в одном дюйме). Бакстон никогда не учился и не умел читать, писать и обращаться с цифрами.

Примером вычислителей с высокоразвитыми умственными способностями может служить профессор математики Эдинбургского университета Александр Крейг Эйткен*. Он родился в 1895 г. в Новой Зеландии. В отличие от большинства людей, способных «молниеносно» производить в уме вычисления, Эйткен ничем не проявлял

* На советской эстраде долгие годы с успехом выступал вычислитель (или, как он сам называл себя, артист-математик) Роман Семенович Арраго. Более подробные сведения о его искусстве и необычной судьбе можно почерпнуть в статье А. М. Громова «Артист-математик» (*Наука и жизнь*, № 5, 1968, стр. 118—122). — Прим. перев.

своего дарования до 13 лет. Впрочем, и в этом возрасте его интерес пробудился в основном к алгебре, а не к арифметике.

В 1954 г., почти через сто лет после исторической лекции Биддера, Эйткен выступил перед лондонским Обществом инженеров с докладом на тему «Искусство устного счета (доклад сопровождается демонстрацией различных приемов устного счета)». Доклад Эйткена — это авторитетный отчет о том, что происходит в уме человека, способного, не прикасаясь к карандашу и бумаге, быстро производить сложнейшие вычисления, отчет тем более ценный, что исходит от человека, наделенного такой способностью.

Совершенно необходимой предпосылкой к деятельности «чудо-вычислителя» служит врожденная способность быстро запоминать числа. Все выдающиеся вычислители обладали этой способностью и нередко демонстрировали ее в своих выступлениях. Десятилетний Биддер с легкостью называл по порядку все цифры 40-значного числа, которые зрители по его просьбе сообщали ему в обратном порядке. Многие эстрадные вычислители, заканчивая свое выступление, могли безошибочно называть все «участвовавшие» в нем числа.

Существуют различные мнемонические приемы, позволяющие заменять числа словами, которые поддаются запоминанию с помощью других мнемонических приемов, однако все они слишком медленны для того, чтобы ими можно было пользоваться на сцене, и мастера-вычислители ими, несомненно, не пользовались. «Я никогда не прибегал к мнемоническим приемам, — заявил в своем докладе Эйткен, — и отношусь к ним с глубоким недоверием. Они лишь отягощают случайными и не относящимися к делу ассоциациями способность, которая должна проявляться в чистом, незамутненном виде».

Здесь же Эйткен упомянул об одном забавном случае, о котором он прочитал в газетах. Современного французского эстрадного вычислителя Мориса Дагбера обвинили в «бессмысленной трате времени и энергии», когда он запомнил 707 знаков десятичного разложения числа π , полученного в 1873 г. Вильямом Шенксом. «Мне было приятно сознавать, — сказал Эйткен, — что я проделал это за несколько лет до Дагбера и не встретил никаких трудностей. Мне пришлось лишь разбить знаки

на строки по 50 цифр в каждой строке, затем каждые 50 цифр разбить на 10 групп по 5 цифр, а затем прочитать эти пятерки с соблюдением определенного ритма, как стихотворение. Запоминание 707 знаков, полученных Шенксом, было бы абсолютно бессмысленным занятием, если бы оно не было так просто».

Через 20 лет после того, как современные ЭВМ позволили вычислить π с точностью до нескольких тысяч знаков, Эйткен узнал, что несчастный Шенкс ошибся в своих вычислениях и последние 180 знаков привел неверно. «Мне доставило удовольствие, — продолжал Эйткен, — выучить правильное значение π до 1000-го знака. И снова я не встретил никаких трудностей. Единственное, что потребовалось, — это «сшить» уже хранившиеся в моей памяти цифры с новыми там, где Шенкс допустил ошибку. Я считаю, что секрет успеха заключается в умении расслабляться, в полной антитезе умению сосредоточиться. Важную роль играет заинтересованность. Случайная последовательность чисел, не представляющих никакого интереса с точки зрения математики, производила бы на меня отталкивающее впечатление. Если бы мне потребовалось запомнить их, я бы, разумеется, смог это сделать, но не без внутреннего сопротивления».

Здесь Эйткен прервал свою лекцию, чтобы привести на память (с явным соблюдением ритма) 250 знаков десятичного разложения π . Кто-то из присутствующих попросил его продолжить «чтение» десятичного разложения π с 301-го знака. После того как Эйткен назвал 50 знаков, его попросили перейти сразу к 501-му знаку, что он и сделал, назвав еще 150 знаков. Все цифры были названы без единой ошибки (присутствовавшие проверяли правильность называемых Эйткеном знаков по таблице).

Используют ли эстрадные вычислители, манипулируя числами, свое «внутреннее зрение», «видят» ли они мысленно те числа, с которыми работают? Единого ответа на этот вопрос дать нельзя. Некоторые вычислители представляют числа написанными на доске или на листе бумаги, другие предпочитают воспринимать числа на слух, третьи просто не в состоянии объяснить, как они работают. Французский психолог Альфред Бине входил в состав комитета, созданного в конце прошлого века Французской Академией наук для изучения

процесса мышления двух выдающихся эстрадных вычислителей — грека Перикла Диаманди и итальянца Жака Инауди. В выпущенной в 1894 г. книге «Психология выдающихся вычислителей и мастеров игры в шашки» Бине сообщал, что Диаманди мысленно представлял себе доску с написанными на ней числами, с которыми он производил различные действия, а Инауди, производивший арифметические выкладки в 6 раз быстрее, был вычислителем аудиоритмического типа. Вычислители визуального типа, хотя к их числу принадлежат столь выдающиеся мастера, как Дагбер, польский вычислитель Сало Финкельштейн и замечательная французская вычислительница, выступавшая под псевдонимом мадмуазель Осака, обычно работают медленнее своих собратьев по профессии, которым не требуется «видеть» числа. Например, такие вычислители аудиотипа, как Биддер, работали явно быстрее. По-видимому, рекорд быстроты принадлежит ныне здравствующему голландскому эстраднему вычислителю Вильяму Клейну, который выступает под псевдонимом Паскаль. Он способен перемножить 2 десятизначных числа менее чем за 2 минуты. Клейн также принадлежит к аудиотипу. Более того, он просто не в состоянии производить вычисления, не бормоча себе при этом под нос. Если Клейн ошибается, то это обычно связано с тем, что он путает два близких по звучанию числа.

В своем докладе Эйткен утверждал, что он по желанию может мысленно представить себе числа написанными на бумаге. На различных этапах вычислений и в особенности на завершающем этапе числа могут самопроизвольно возникать перед мысленным взором вычислителя. «Но в основном они как бы прячутся под неким покровом, продолжая двигаться в скрытом состоянии и перестраиваться в нужном порядке с неукоснительной точностью. В частности, я могу со всей определенностью утверждать, что лишние нули в начале или в конце числа никогда не возникают перед моим мысленным взором на промежуточных этапах вычислений. Выражение «перед мысленным взором» здесь не совсем точно. Речь идет не о способности видеть или слышать, а о некоторой более общей способности, объединяющей черты той и другой, адекватное описание которой мне не приходилось встречать в литературе (как, впрочем,

не приходилось встречать и адекватного описания мыслительных процессов, обуславливающих музыкальную память или способность сочинять музыку). Не могу не отметить также, что в некоторых случаях разум опережает волю: я получаю ответ до того, как у меня возникает желание произвести вычисления. Я неоднократно проверял это и, к своему удивлению, всегда обнаруживал, что такой предугаданный ответ верен».

Эйткен умудряется хранить в своей памяти поистине чудовищное количество разнообразнейших сведений. Высокая «информационная емкость» характерна для всех эстрадных вычислителей. Вряд ли найдется хоть один из них, кто не знал бы таблицу умножения до 100×100 , а специалисты утверждают, что Биддер и некоторые другие вычислители удерживали в памяти, хотя и бессознательно, таблицу умножения до 1000×1000 . (Числа, превышающие 1000, эстрадные вычислители перемножают, разбивая их на пары и тройки цифр, с которыми можно обращаться, как с отдельными цифрами.) В памяти эстрадного вычислителя хранятся обширные таблицы квадратов, кубов, логарифмов, а также множество других числовых данных, полезных при ответах на вопросы, задаваемые аудиторией, например число секунд в году или унций в тонне. Поскольку 97 — наибольшее из простых чисел, не превышающих 100, к эстрадным вычислителям часто обращаются с просьбой назвать 96-значный период десятичного разложения дроби $1/97$. Эйткен давно запомнил этот период и, если кому-либо из присутствующих на его выступлении приходит в голову поинтересоваться бесконечной периодической дробью $1/97$, выпаливает все 96 знаков периода без малейшей задержки.

Помимо природных данных, существуют сотни способов ускорить вычисления, которые эстрадный вычислитель либо выучивает, либо изобретает. Как отметил в своем докладе Эйткен, первое, с чего приходится начинать любое вычисление, — это выбор в мгновение ока оптимальной стратегии вычислений. В качестве примера Эйткен раскрыл один удивительный и не слишком известный секрет вычислителей. Предположим, вас попросили перевести в десятичную дробь $1/k$, где целое число k заканчивается девяткой (например, $k = 59$). Вместо того, чтобы делить 1 на 59, вы можете прибавить

1 к 59, превратив тем самым 59 в 60, после чего разделить 0,1 на 6 так, как показано на рис. 152. (Метод Эйткена сводится к последовательной корректировке делимого: получив в частном очередную цифру, он вводит ее в делимое с «опозданием» на один знак. Для удобства сравнения частное повторено над делимым.)

«Представим теперь, — продолжает Эйткен, — что вас попросили перевести в десятичную дробь $\frac{5}{23}$. Я сразу вижу, что, умножив числитель и знаменатель дроби на 3, получу эквивалентную дробь $\frac{15}{69}$, знаменатель которой заканчивается весьма удобной девяткой». Перед вычислителем возникает дилемма: «превратить» 69 в 70 и разделить 1,5 на 7 по только что описанному способу или же, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на 13, превратить ее в $\frac{65}{299}$ и разделить затем 0,65 на 3 (при этом цифры из частного в корректируемый делитель будут попадать с «опозданием» на два знака).

Какая стратегия лучше? «Решение, — говорит Эйткен, — следует принимать, не колеблясь ни минуты, и, избрав стратегию раз и навсегда, неукоснительно идти к цели. Посреди вычислений в голову может прийти мысль о том, что другая стратегия лучше. Даже если это так, запоздалое озарение следует безжалостно отбросить и продолжать скачки на лошади, даже явно уступающей по своим достоинствам более резвому скакуну».

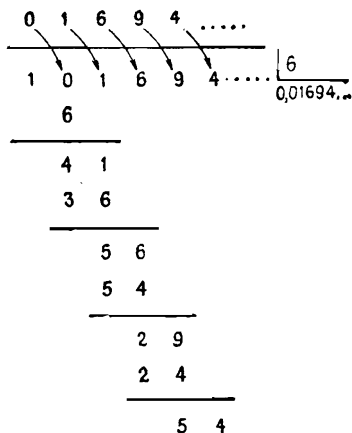
Ниже показано, как Эйткен возводит в квадрат число 777.

Задача: $777 \times 777 = ?$

$$\begin{aligned} a^2 &= [(a + b) \times (a - b)] + b^2, \\ 777^2 &= [(777 + 23) \times (777 - 23)] + 23, \\ 777^2 &= [800 \times 754] + 529, \\ 777^2 &= 603\,200 + 529, \\ 777^2 &= 603\,729. \end{aligned}$$

Число b выбирается так, чтобы оно было по возможности меньше и чтобы одно из чисел $(a + b)$ или $(a - b)$ заканчивалось как можно более длинной цепочкой нулей. В данном случае Эйткен выбрал $b = 23$. Помня таблицу квадратов небольших чисел, он, не задумы-

Рис. 152. Перевод $1/59$ в десятичную дробь методом Эйткена.



ваясь, возводит 23 в квадрат, получая 529. Во время доклада Эйткен привел 7 трехзначных чисел, которые тут же возвел в квадрат. Удивительно простое правило возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5, непосредственно вытекает из метода

Эйткена. Оно так просто, что заслуживает, чтобы его запомнить: первую цифру числа нужно умножить на нее же плюс единица, а к полученному произведению справа приписать 25. Пусть, например, требуется возвести в квадрат 85. Умножая 8 на $(8 + 1) = 9$, получаем 72. Приписывая справа 25, находим окончательный ответ: $85 \times 85 = 7225$.

Математик из Глазго Томас О'Бейрн рассказывает о том, как однажды он вместе с Эйткеном отправился на выставку-распродажу настольных вычислительных машин. «Коммивояжер, демонстрировавший машины, произнес нечто вроде:

— А сейчас мы умножим 23 586 на 71 283...

Стоявший рядом Эйткен тотчас же продолжил:

— ... и получим столько-то.

Ответ был совершенно правильным. Коммивояжер был слишком поглощен стремлением продать машину и ничего не заметил, но наблюдавший сцену представитель фирмы, убедившись, что Эйткен не ошибся, чуть не упал в обморок. Я тоже».

В наши дни бурное развитие вычислительной техники не поощряет молодых людей, обладающих выраженными способностями к устному счету, совершенствовать свое искусство. В заключение своего доклада Эйткен признал, что и его способности к молниеносному счету стали слабеть после того, как он познакомился с первым арифмометром и убедился, каким бесполезным

становится его искусство. «Люди, способные производить в уме сложнейшие выкладки, по-видимому, обречены на вымирание, подобно аборигенам Тасмании или маорийцам, — с горечью заметил он. — Поэтому вы можете испытывать интерес, близкий к тому, какой испытывают антропологи, наблюдая любопытный образец исчезающего племени вычислителей. Может быть, кто-нибудь из моих слушателей, дожив до 2000 г., сможет с гордостью сказать:

— Да, одного такого я знал».

ГЛАВА 21

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ И УГАДЫВАНИЕ ДНЕЙ НЕДЕЛИ ПО НАЗВАННЫМ ДАТАМ

Даже самые выдающиеся эстрадные вычислители — звезды первой величины, о которых мы рассказывали в предыдущей главе, — редко могли удержаться от того, чтобы не включить в свою программу различные трюки, рассчитанные на чисто внешний эффект, а кое-кто из «живых арифмометров» меньшего ранга строил всю свою программу на таких якобы необычайно трудных, но в действительности простых номерах. Некоторые из трюков столь элементарны, что читатель, желающий позабавить и удивить своих друзей, овладеет ими без труда.

Рассмотрим, например, следующий трюк с умножением чисел (известный сравнительно мало, он имеет великолепную родословную, восходящую к выпущенной в 1747 г. итальянцем Альберти книге «Численные игры: тайные факты»). Трюк действует безотказно на числах любой длины, но если под рукой нет настольной вычислительной машины для проверки результатов, то лучше всего ограничиться трехзначными числами.

Попросите кого-нибудь из зрителей назвать любое трехзначное число. Предположим, что он выбрал число 567. Запишите это число дважды на доске или на листе бумаги:

567 567

Попросите назвать еще одно трехзначное число и запишите его под 567 слева. Теперь вам необходимо найти еще одно число — сомножитель числа 567, выписанного справа. Оно должно быть «дополнением до 9» левого множителя (хотя зрителям об этом, разумеется, ничего не известно), то есть сумма единиц, десятков и сотен правого и левого множителей должна быть равна 9. Предположим, что в качестве левого множителя названо число 382. Тогда правый множитель равен 617:

$$\begin{array}{r} \times 567 \\ 382 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 567 \\ 617 \end{array}$$

Если вы демонстрируете свое искусство группе зрителей, то можете заранее попросить своего приятеля сыграть роль «подсадной утки» и назвать правильный сомножитель для числа 567, записанного справа. Если вам не удастся найти помощника, то вы выписываете правый сомножитель сами, как бы беря наудачу совершенно случайное число. Затем вы объявляете зрителям, что вычислите оба произведения без помощи карандаша и бумаги, затем найдете их сумму и, наконец, удвоите ее. Сумму произведений вы получаете мгновенно: необходимо лишь вычесть 1 из первого названного зрителями числа и приписать справа дополнение полученной разности до 9. В рассматриваемом примере первым было названо число 567. Следовательно, $567 - 1 = 566$, а «дополнение 566 до 9» равно 433. Таким образом, сумма произведений в этом случае равна 566 433. Если вы запишите полученную сумму на доске, то кто-нибудь из зрителей может заметить, что две ее первые цифры совпадают с двумя первыми цифрами числа 567 (в общем случае, первого из названных зрителями чисел). Чтобы «замести следы», вы умножаете полученную сумму на 2. Это совсем нетрудно проделать в уме, выписывая цифры по мере их получения справа налево. Если

угодно, можно приписать справа к числу 566 433 нуль и затем разделить на 5 (поскольку умножение на 10 с последующим делением на 5 эквивалентно умножению на 2). В этом случае ответ удобнее выписывать слева направо.

В чем секрет трюка? Сумма вторых сомножителей равна 999, поэтому сумма левого и правого произведений равна $567 \cdot 999 = 567 \cdot (1000 - 1) = 567\,000 - 567$. Вычислив эту разность на бумаге, вы сразу же увидите, что результат равен 566 433, то есть числу $(567 - 1)$, вслед за которым выписано его «дополнение до 9».

На несколько более тонком принципе основано множество трюков с молниеносным умножением некоторых чисел, выглядящих на первый взгляд вполне невинно, на любые числа той же или меньшей длины. Предположим, что вычислитель на эстраде обращается к аудитории с просьбой назвать какое-нибудь девятизначное число, и его ассистент, сидящий в зале, называет число 142 857 143. Другое девятизначное число по просьбе вычислителя, называется «честно». Можно представить себе восторг зрителей, когда вычислитель, «молниеносно перемножив в уме» два девятизначных гиганта, начинает сразу же выписывать чудовищное произведение слева направо. Секрет этого трюка до смешного прост. Второе число необходимо «удвоить», мысленно представив его выписанным подряд дважды, после чего разделить на 7. Полученное частное будет совпадать с искомым произведением. (Если второе число делится на 7 без остатка, вы просто выписываете частное подряд два раза. Если же второе число делится на 7 с остатком, то, дойдя до конца в первый раз, вы приписываете полученный остаток слева от второго числа, после чего продолжаете деление.) Предположим, что второе число равно 123 456 789. После «удвоения» вы получаете число 123 456 789 123 456 789. Разделив его на 7, находите число 17 636 684 160 493 827. Оно-то и равно произведению 142 857 143 и 123 456 789. Следует иметь в виду, что «удвоенное» число непременно должно делиться на 7 без остатка. Если «удвоенное» число не делится на 7, то это означает, что вы где-то допустили ошибку.

Столь же легко умножать магическое число 142 857 143 на более «короткие» числа. Необходимо лишь перед «удваиванием» дополнить «короткозначное» число до девятизначного нулями, после чего приписать справа короткое число еще раз, а полученное число разделить на 7. Так, если вторым числом было названо 123 456, вы мысленно превращаете его в 123 456 000 123 456, после чего делите на 7. Производя деление, вы можете тайком посматривать на число 123 456, выписанное на доске. Это облегчит вам деление и позволит не сбиться со счета.

Число 142 857 143 хорошо известно эстрадным вычислителям. В начале века на эстрадах США выступал некий Артур Ф. Гриффитс, называвший себя на афишах «Чудо-Гриффитс». Он пользовался репутацией человека, способного менее чем за 30 секунд перемножить два девятизначных числа. Когда я впервые прочитал об этом, у меня зародилось смутное подозрение. После длительных «раскопок» в библиотеке мне, наконец, удалось найти отчет очевидца, присутствовавшего на выступлении Гриффитса в 1904 г. перед группой студентов и преподавателей Университета штата Индиана. «Гриффитс, — говорится в отчете, — написал на доске число 142 857 143 и попросил профессора написать под этим числом любой девятизначный множитель. Как только профессор начал выписывать слева направо цифры сомножителя, Чудо-Гриффитс тотчас же начал выписывать одну за другой цифры произведения. Присутствовавшие студенты, стоя, приветствовали вычислителя восторженными криками». В 1901 г. Гриффитс выпустил небольшую брошюру, в которой рассказывал о своих методах «легкого и быстрого устного счета». О числе 142 857 143 в брошюре не говорилось ни слова.

Тех, кто пользуется магическим числом 142 857 143, подстерегает одна опасность: если второй сомножитель делится на 7, то произведение начинает «заикаться» — в нем появляются повторяющиеся цифры, а это рождает у зрителей подозрение, что «дело не чисто». Чтобы избежать «заикания», Уоллес Ли, придумавший множество превосходных математических фокусов, предложил другое магическое число 2 857 143 (нетрудно видеть, что это все то же магическое число 142 857 143,

у которого отброшены две первые цифры). Попросите зрителя назвать семизначный сомножитель, каждая цифра которого не меньше 5. Поясните, что это условие особенно усложняет задачу (в действительности же оно, конечно, упрощает выкладки). Метод вычислений по существу остается таким же, как прежде, с одним лишь различием: перед тем как приступить к делению на 7, второе число необходимо умножить на 2. Поскольку все его цифры больше 4, умножение на 2 можно производить постепенно, цифра за цифрой, по мере того, как вы будете делить число на 7.

Предположим, что в качестве второго множителя названо число 8965797. Умножив первую цифру на 2 и прибавив 1, получим 17. Разделив 17 на 7, мы получим 2 — первую цифру искомого произведения, а остаток 3 запоемним. Удвоим следующую цифру 9 и прибавив 1, получим 19. Отбросим первую цифру полученного числа и заменим ее 3 — остатком от деления на 7 предыдущего числа. Получив в результате число 39, разделим его на 7. Частное, равное 5, будет второй цифрой искомого произведения, а остаток 4 придется снова запомнить. Удвоим следующую цифру 6, прибавим 1 и, отбросив в сумме единицу, стоящую спереди, заменим ее остатком от предыдущего деления на 7, равным 4. В итоге получим 43. Разделив 43 на 7, получим третью цифру искомого произведения, равную 6, и 1 в остатке. Удвоим следующую цифру 5 и прибавив 1, мы получим 11. Отбрасывание первой цифры и замена ее остатком на этот раз бессмысленна, поскольку оба числа одинаковы. Разделив 11 на 7, получим 1 и 4 в остатке. Таким образом, четвертая цифра искомого произведения равна 1, а остаток 4 понадобится нам для получения следующей цифры. Так продолжается до тех пор, пока мы не дойдем до последней цифры числа 8965797. При умножении на 2 последней семерки единицу прибавлять не нужно. Остаток от деления последнего двузначного числа, равный 2, переносим в начало и приписываем перед восьмеркой, с которой начинается число 8965797, после чего делим число 28965797 на 7 обычным способом, без умножения каждой цифры на 2. В итоге мы получаем искомое произведение. Оно равно 25 616 564 137 971.

Удвоением цифр, необходимым на первом этапе вычислений, овладеть совсем нетрудно. Метод Уоллеса Ли заведомо избавляет произведение от «заикания». При этом разгадать секрет трюка непосвященному зрителю гораздо труднее, чем, в первом случае. Мысленно восполняя недостающие знаки нулями, магическое число 2857143 так же, как и его предшественника, можно умножать на числа с меньшим количеством знаков.

Оба магических числа приводят к столь «астрономическим» произведениям, что зрители просто не в состоянии проверить результаты вычислений, если у них под рукой нет настольной вычислительной машины. Однако существует множество магических чисел более умеренного «калибра», позволяющих проделывать по существу те же трюки с вычислением произведений. Например, произведение 143 и трехзначного числа abc можно вычислить, разделив на 7 число $abcabc$ (правда, эффект трюка будет в значительной мере зависеть от того, удастся ли избавиться от «заикания» в частном или нет). Чтобы умножить 1667 и трехзначное число abc , нужно приписать к abc справа 0, разделить получившееся число на 6, затем приписать половину остатка от деления, если таковой имеется (нетрудно видеть, что остаток от деления числа $abc0$ на 6 может принимать лишь значения 0, 2 и 4), к числу abc спереди и полученное число разделить на 3. Все указанные операции нетрудно проделывать в уме, произведения получаются свободными от «заикания», и зрители могут легко проверять правильность производимых выкладок, не прибегая к помощи вычислительной техники.

В качестве приятного и небесполезного упражнения из элементарной теории чисел читателю предлагается самостоятельно разобраться в механизме трюков, основанных на четырех названных выше магических числах.

Другой трюк, который производит сильное впечатление на непосвященного зрителя, связан с извлечением кубического корня. Вы заявляете, что беретесь мгновенно извлечь кубический корень из куба любого целого числа, заключенного между 1 и 100, и к удивлению зрителей действительно неплохо справляетесь с предлагаемыми вам задачами. Этот трюк чрезвычайно прост. Чтобы продемонстрировать его, вам необходимо запомнить лишь таблицу кубов чисел от 1 до 10.

	Кубы	Пятые степени
1	1	100 тысяч
2	8	3 миллиона
3	27	24 миллиона
4	64	100 миллионов
5	125	300 миллионов
6	216	777 миллионов
7	343	1 миллиард 500 миллионов
8	512	3 миллиарда
9	729	6 миллиардов
10	1000	10 миллиардов

Нетрудно видеть, что среди последних цифр кубов в отличие от последних цифр квадратов нет повторяющихся (именно поэтому извлекать «в уме» кубический корень гораздо легче, чем квадратный). Последние цифры чисел 1, 4, 5, 6, 9 и 10 совпадают с последними цифрами их кубов. Запомнить же последние цифры кубов чисел 2, 3, 7 и 8 совсем нетрудно: они допсляют каждое из названных чисел до 10.

Предположим, что вас попросили извлечь кубический корень из 658 503. Отбросив последние три цифры, вы прежде всего сосредоточиваете внимание на трех первых цифрах 658. Восстановив в памяти таблицу кубов, вы заключаете, что кубический корень из числа 658 лежит где-то между 8 и 9 и произносите вслух меньшее из двух чисел: 8. Таким образом, первая цифра ответа получена. Взглянув на последнюю цифру куба 658 503, вы сразу же называете вторую цифру искомого кубического корня: 7. Итак, кубический корень из числа 658 503 равен 87.

После извлечения кубических корней эстрадные вычислители нередко демонстрируют свое искусство в из-

влечении корней пятой степени. На первый взгляд может показаться, будто эта задача еще труднее, чем извлечение кубических корней, однако в действительности вычислять корни пятой степени проще и легче. Дело в том, что последняя цифра любого числа совпадает с последней цифрой его пятой степени. Для отыскания же первой цифры достаточно запомнить правый столбец таблицы, приведенной на стр. 262. Предположим, что вас попросили извлечь корень пятой степени из 8 587 340 257. Как только зритель произнес: «Восемь миллиардов...» — вы узнали, что нужное вам число заключено между 9 и 10, и, выбрав меньшее из чисел: 9, узнали первую цифру ответа. После этого вы «пропускаете мимо ушей» все, что говорит зритель, до тех пор, пока он не назовет последнюю цифру: 7. В этот же момент вы сообщаете ответ: корень пятой степени из 8 587 340 257 равен 97. Трюк с извлечением корней пятой степени не следует повторять более двух-трех раз, ибо в противном случае зрители могут обратить внимание на совпадение последних цифр у числа и его пятой степени. Разумеется, профессиональные эстрадные вычислители извлекают кубические корни и корни пятой степени из гораздо больших чисел, но какими бы обобщениями перечисленных выше приемов быстрого счета они ни пользовались, по существу их трюки основаны на тех же принципах, которые мы объяснили на примере двузначных чисел.

Большинство эстрадных вычислителей любят поражать воображение публики, отгадывая, на какой день недели приходится любая названная зрителями дата. Для показа этого трюка необходимо запомнить следующую таблицу:

Январь	1	<i>Первый</i> месяц
Февраль	4	<i>Л-ю-т-о</i> — холодно
Март	4	<i>Март</i> — четыре буквы
Апрель	0	<i>Нулевая</i> температура
Май	2	<i>Первое мая</i> — два слова

Июнь	5	<i>Ж-а-р-к-о</i>
Июль	0	<i>Ни капли</i> дождя
Август	3	<i>Третий</i> месяц лета
Сентябрь	6	Не осенний <i>м-е-л-к-и-й</i> дождик
Октябрь	1	<i>Один</i> лист на ветке
Ноябрь	4	<i>С-н-е-г</i> на крыше
Декабрь	6	Готовь сани летом, а <i>т-е-л-е-г-у</i> зимой

Каждому месяцу соответствует определенное число. Чтобы его легче было запомнить, рядом указана мнемоническая фраза.

Вычисление дня недели производится в четыре этапа (все действия производятся «в уме», без карандаша и бумаги).

1. Две последние цифры года вы рассматриваете как отдельное число. Это число вы делите на 12 и запоминаете остаток от деления. Затем вам необходимо сложить три небольших числа: частное от деления двузначного числа, которым заканчивается год, на 12, остаток от деления того же числа на 12 и частное от деления остатка на 4. Например, зрители назвали 1910 г. Частное от деления 10 на 12 равно 0, остаток — 10. Разделив 10 на 4, вы получаете 2 (остаток от деления в этом случае вас не интересует). Итак, $0 + 10 + 2 = 12$. Если полученная сумма больше или равна 7, то ее необходимо разделить на 7 и запомнить лишь остаток от деления. В рассматриваемом случае $12 > 7$, поэтому вы делите 12 на 7 и получаете в остатке 5. Именно эту пятерку и необходимо запомнить для дальнейшего. (В тех случаях, когда нас интересуют лишь остатки от деления чисел на какое-нибудь определенное число, например 7, математики говорят, что мы пользуемся вычетами по модулю 7.)

2. К числу, полученному на предыдущем этапе, прибавляете ключевое число месяца и в случае необходимости (если полученная сумма больше или равна 7)

заменяете вычисленную сумму остатком от деления ее на 7.

3. К полученному числу прибавляете день месяца и снова заменяете сумму остатком от деления ее на 7. Полученное число дает вам день недели (0 соответствует субботе, 1 — воскресенью, 2 — понедельнику и т. д. до 6 — пятницы).

4. Если год високосный и зрители назвали дату, приходящуюся на январь или февраль, от полученного результата необходимо отбросить один день (то есть вместо понедельника называть воскресенье, вместо вторника — понедельник и т. д.).

Первый этап вычислений служит своеобразным сигналом, предупреждающим вас о високосности года. Високосные годы приходятся на каждый четвертый год, а любое число кратно 4, если две его последние цифры образуют двузначное число, кратное 4. Таким образом, если две последние цифры названного зрителями года образуют двузначное число, которое без остатка делится на 12, или остаток от деления его на 12 кратен 4, то это служит вам предостережением о том, что год високосный. (Вместе с тем следует иметь в виду, что в грегорианском календаре 1800 г. и 1900 г., хотя и они кратны 4, не считаются високосными, в то время как 2000 г. считается високосным. Дело в том, что годы, приходящиеся на начала столетий, в грегорианском календаре считаются високосными лишь в том случае, если они кратны 400 *.)

Способ определения дня недели, о котором мы рассказали, применим к годам нашего века. Впрочем, переход к более далекому прошлому или будущему требует лишь незначительных изменений. Например, для дат, относящихся к прошлому веку, необходимо «накидывать» два дня, для дат, относящихся к будущему веку, — отнимать один день.

Поясним все сказанное на примере. Предположим, что кто-то из зрителей родился 28 июля 1929 г. и желает узнать, на какой день недели пришелся его день

* Более подробные сведения по различным вопросам хронологии и истории календарных систем можно почерпнуть из книги: С. И. Селешников, История календаря и хронология, М., изд-во «Наука», 1972. — *Прим. перев.*

рождения. Производимые вами в уме выкладки будут выглядеть следующим образом:

1. Последние две цифры года образуют двузначное число 29. Разделив его на 12, вы получаете 2 (и 5 в остатке). Разделив 5 на 4, получаете 1 (и 1 в остатке). Вычисляете сумму $2 + 5 + 1 = 8$ и заменяете ее остатком от деления на 7. Итак, в результате первого этапа вычислений вы получаете 1.

2. Ключевое число для июля равно 0. Следовательно, к имеющейся единице ничего прибавлять не надо, и вы по-прежнему удерживаете в памяти 1.

3. Прибавляете 28 — день месяца — к 1 и полученную сумму делите на 7. Остаток равен 1. Следовательно, зритель родился в воскресенье.

Необходимость в четвертом этапе отпадает, поскольку 1929 г. — невисокосный. (Впрочем, если бы он был и високосным, то необходимость в четвертом этапе все равно не возникла бы, так как зритель родился в июле, а не в январе и не в феврале — двух месяцах, для которых вводится поправка.)

В конце прошлого века интерес к определению дня недели для любой названной даты был чрезвычайно велик и породил множество различных методов решения задачи. Один из первых методов, по существу аналогичный тому, о котором рассказывалось в этой главе, был предложен Льюисом Кэрролом. «Не могу сказать, что считаю в уме очень быстро, — писал он, — но все же на любой вопрос такого рода мне удастся ответить в среднем не более чем за 20 секунд. Ничуть не сомневаюсь, что те, кто считает проворнее меня, справились бы с задачей менее чем за 15 секунд».

ОТВЕТЫ

Принцип, или, если угодно, механизм, действия четырех магических чисел лучше всего пояснить на примерах.

Число 142 857 143 — это частное от деления 1 000 000 001 на 7. Ясно, что при умножении 1 000 000 001 на любое девятизначное число *abcdefghi* мы получим произведение вида *abcdefghiabcdefghi*. Следовательно, для того, чтобы умножить 142 857 143 на *abcdefghi*, достаточно разделить число *abcdefghiabcdefghi* на 7.

Второе магическое число 2 857 143 равно частному от деления 20 000 001 на 7. Нетрудно видеть, что в этом случае семизначное число, на которое мы хотим умножить 2 857 143, сначала необходимо умножить на 2, затем разделить на 7, а дойдя до последней

цифры, продолжать деление на 7 того же числа, но уже без предварительного удваивания его. Условие, согласно которому каждая цифра семизначного числа, умножаемого на 2857143, должна быть больше 4, гарантирует появление 1, прибавляемой к удвоенной цифре, и делает возможным именно тот вариант удваивания, который был описан выше. Разумеется, умножать цифры на 2 и делить на 7 можно и в том случае, если среди цифр семизначного числа встречаются цифры меньше 5, но правила при этом усложняются.

Малые магические числа 143 и 1667 «действуют» аналогичным образом. Первое из них равно $1001/7$; второе — $5001/3$. Во втором случае прежде чем делить («по первому разу») на 3 число abc , умножаемое на 1667, его необходимо умножить на 5. Поскольку умножение на 5 эквивалентно умножению на 10 с последующим делением на 2, мы дописываем к числу abc ноль справа и производим деление на 6 так, как уже говорилось. Остаток делится пополам для того, чтобы перевести «шестые» в «трети», и приписывается спереди к числу abc , после чего все делится на 3. Частное гарантировано от «заикания» (однообразного повторения цифр) именно тем, что число abc оба раза делится на различные числа. При умножении 143 на число abc , кратное 7, произведение всегда не свободно от «заикания».

ГЛАВА 22

ПОЛИГЕКС И ПОЛИАБОЛО

Обычные головоломки, в которых из кусочков дерева, пластмассы или металла самой причудливой формы требуется сложить единое целое, почти лишены математического интереса. При достаточном терпении и настойчивости метод проб и ошибок приводит в конце концов к желаемой цели. Но если детали головоломки выполнены в форме простейших многоугольников, то составление из них заранее заданной фигуры превращается в задачу комбинаторной геометрии, решение которой открывает широкий простор для подлинно математического творчества и затрагивает далеко не тривиальные вопросы. Если к тому же устройство самих деталей подчиняется простому закону, то игра обретает изящество и исследование комбинаторных свойств всего

набора становится занятием не только увлекательным, но и требующим времени.

Одна из таких головоломок — полиомино — пользуется особой известностью среди любителей занимательной математики. «Деталими» игры в n -мино служат связанные фигуры, составленные всеми возможными способами из n единичных квадратов. Другое хорошо изученное семейство геометрических головоломок мы получим, склеивая сторонами равносторонние треугольники. Об одной из разновидностей таких головоломок — гексиамондах (полиамондах, образованных из 6 равносторонних треугольников) мы рассказывали в главе 2.

В настоящей главе я расскажу о двух новых разновидностях геометрических игр, навеянных полиомино и полиамондами. Обе игры почти не известны. Думаю, что читателю будет приятно вступить в почти неисследованную область и с чувством законного удовлетворения решить многие из никем еще не решавшихся задач.

Поскольку существуют лишь три типа правильных многоугольников, которыми можно замостить всю плоскость без просветов и перекрытий, — квадраты, равносторонние треугольники и правильные шестиугольники — и два из них уже послужили «блоками» для создания полиомино и гексиамондов, естественно напрашивается мысль воздать должное правильным шестиугольникам. Итак, запасемся достаточным числом экземпляров конгруэнтных шестиугольников и будем составлять из них различные фигуры.

Существует лишь один способ, позволяющий соединить два правильных шестиугольника (в дальнейшем мы будем, говоря о правильных шестиугольниках, называть их для краткости просто шестиугольниками) так, чтобы у них была общая сторона. Три шестиугольника можно соединить тремя различными способами, четыре — семью. Получающиеся фигуры напоминают структурные формулы некоторых органических веществ (каждый шестиугольник соответствует бензольному кольцу). Дэвид Кларнер, впервые исследовавший такие фигуры, предложил называть их «полигексами». Семь тетрагексов изображены на рис. 153. Их ближайшие — в сторону увеличения числа шестиугольников — родственники пентагексы слишком многочисленны (всего существует 22 различных пентагекса), чтобы их можно

было использовать для игры. За пентагексами следуют 82 различных гексагекса, 333 гептагекса и 1448 октагексов. Заметим, что численность семейств полигексов была установлена с помощью ЭВМ. Так же как и в случае полиомино и полиамондов, формула, позволяющая находить число полигексов как функцию их порядков, пока не известна.

Для игры в тетрагекс необходимо вырезать набор фигур из картона. (Если пол в ванной выложен шестиугольными плитками, его можно использовать в качестве «доски» для расстановки фигур.)

Для начала рассмотрим следующую задачу. Из восьми симметричных фигур, изображенных на рис. 154, лишь одну нельзя сложить из полного набора тетрагексов. Можете ли вы указать «невозможную» фигуру? Заметим, кстати, что простое доказательство невозможности построения этой фигуры из тетрагексов не известно. (Желая сберечь время читателя и облегчить поиски таинственной фигуры, подскажем, что «башня» на рис. 154 находится вне подозрений: возведение ее из тетрагексов представляет собой, хотя и трудную, но вполне разрешимую задачу. Более того, если не считать тривиальных перевертываний двух деталей, образующих

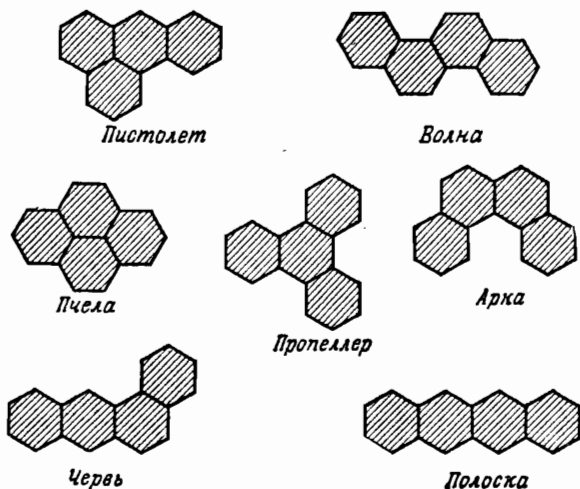
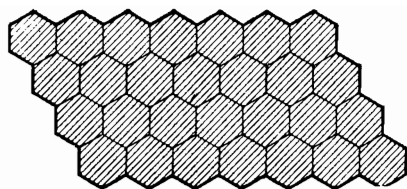
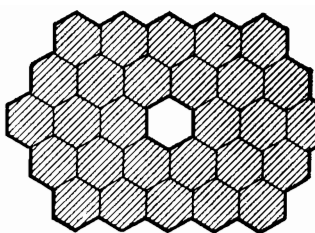


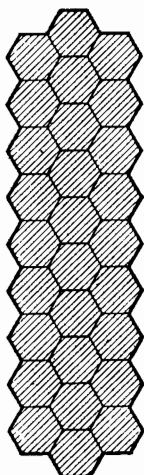
Рис. 153. Семь тетрагексов.



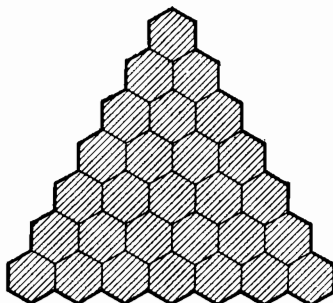
Ромб



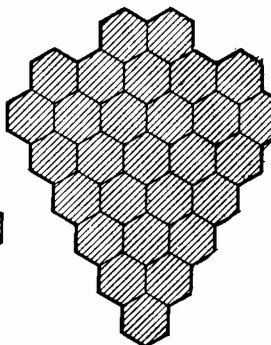
Кольцо



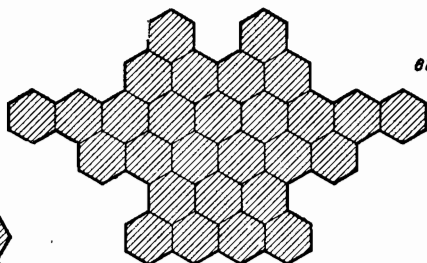
Башня



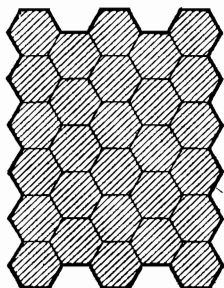
Треугольник



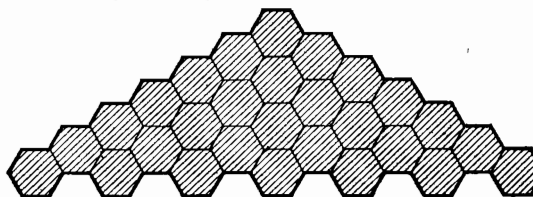
*Кисть
винограда*



Чернильница

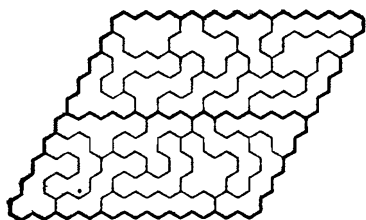


Ковер

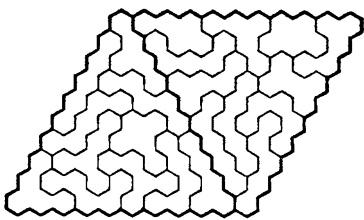


Пирамида

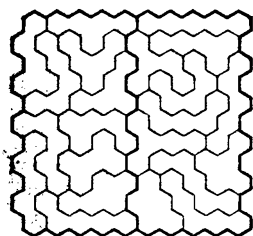
Р и с. 154. Образцы фигур для составления из тетрагексов.
Одну из этих фигур «построить» из тетрагексов невозможно.



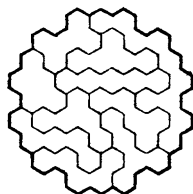
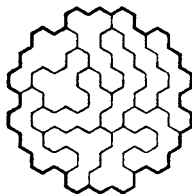
Ромбы



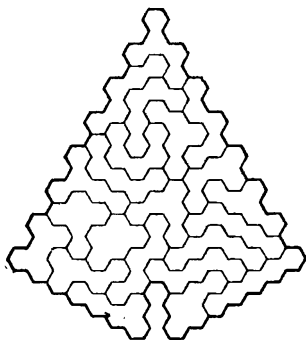
Треугольники



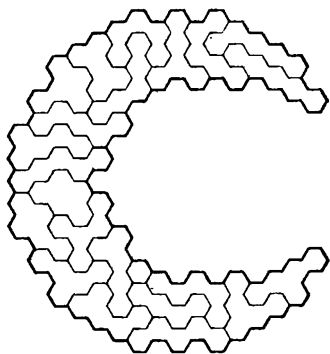
Коврик



Два шара



Новогодняя елка



Старый месяц

Рис. 155. Симметричные фигуры, которые можно составить из 22 пентагексов.

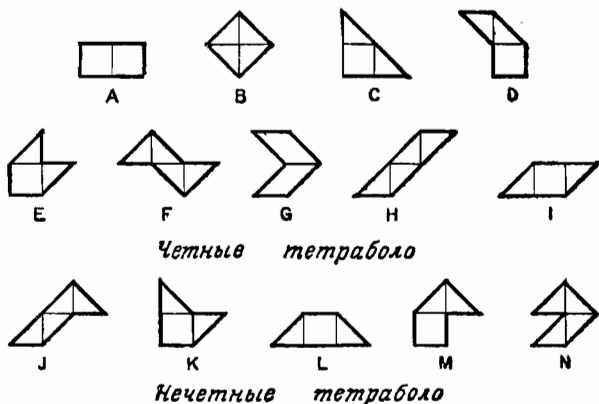
зеркально-симметричный «узел» башни, то задача о построении башни имеет единственное решение.)

Множество удивительно изящных симметричных фигур можно сложить из 22 пентагексов (рис. 155). «Коврик» можно разрезать вдоль средней линии и превратить в вдвое более длинную, но зато вдвое более узкую «дорожку». Ромбы также можно разрезать вдоль их

общей границы и превратить в ромб размером 5×22 единичных шестиугольников. Построить шестиугольник из одних лишь тетрагексов или из одних лишь пентагексов нельзя: ни у тех, ни у других не хватает площади. Однако шестиугольник, вдоль стороны которого укладываются 4 единичных шестиугольника, можно сложить, комбинируя семь тетрагексов с тремя тригексами.

Поскольку детали геометрических головоломок отнюдь не обязательно должны состоять из правильных (а тем более «замощающих» всю плоскость) многоугольников, ничто не мешает рассматривать головоломки, в которых элементарными «кирпичиками» служат неправильные многоугольники. Наиболее простыми среди неправильных многоугольников, по-видимому, следует считать равнобедренный прямоугольный треугольник. Фигуры, составленные из таких треугольников, носят название полиаболо (n -аболо, где n — число «единичных» треугольников).

Любопытно происхождение этого названия. В некогда продававшийся набор для показа фокусов «Диаболо» среди прочих предметов входили две призмы, имевшие в сечении форму равнобедренных прямоугольных треугольников. «Если два треугольника называются *диаболо*, — подумал один из пионеров новой игры С. Дж. Коллинз, — то почему бы не назвать *тетраболо* фигуры, состоящие из четырех треугольников?» Обоб-



Р и с. 156. Четырнадцать фигур тетраболо.

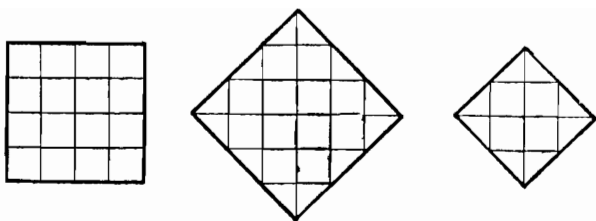
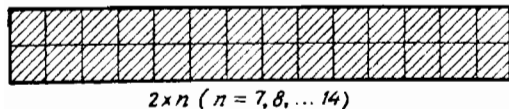
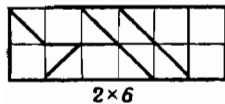
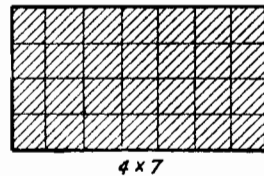
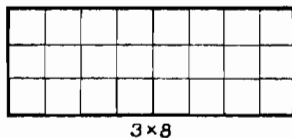
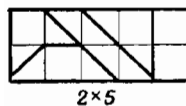
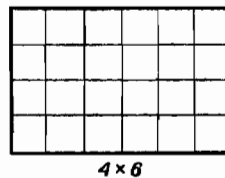
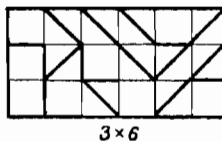
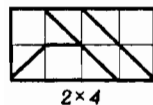
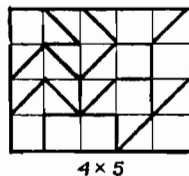
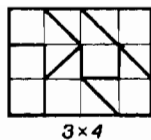
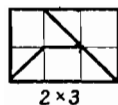


Рис. 157. Квадраты, составленные из фигур тетраболо.

шение на случай большего числа треугольников было уже тривиально. Так появилось родовое название, охватывающее фигуры, составленные из любого числа треугольников — полиаболо. Существует три разновидности диаболо, четыре — триаболо, 14 — тетраболо (рис. 156), 30 — пентаболо и 107 — гексаболо.

Условимся для краткости обозначать катеты элементарных треугольников буквой k , а гипотенузы — буквой h . В зависимости от того, что считать единицей длины — катет или гипотенузу, суммарная площадь всех 14 фигур, составляющих полный набор тетраболо, равна либо 28 k -единичным квадратам, либо 14 k -единичным квадратам. Поскольку ни 14, ни 28 не являются квадратом целого числа, из полного набора фигур тетраболо невозможно составить квадрат. Размеры квадрата $2k \times 2k$ заставляют предполагать, что его можно составить из двух фигур тетраболо, однако более тщательный анализ опровергает это предположение. На рис. 157 изображены три квадрата, которые можно составить из неполного набора фигур тетраболо. Вырезав 14 фигур тетраболо, изображенных на рис. 160, читатель сможет попытаться счастья в раскрытии секрета составления этих квадратов. Наименьший из квадратов можно составить двумя способами. Число способов, которыми можно составить два больших квадрата, неизвестно.

Составляя прямоугольники, мы можем располагать фигуры тетраболо так, чтобы элементарные треугольники примыкали к сторонам прямоугольника либо катетами, либо гипотенузами. В первом случае мы будем говорить о прямоугольниках с k -образными сторонами, во втором — о прямоугольниках с h -образными сторонами. На рис. 158 изображены все прямоугольники с k -образными



Р и с. 158. Прямоугольники с k -образными сторонами.
Темные прямоугольники составить из фигур тетраболо невозможно.

сторонами, которые обладают площадью, позволяющей надеяться, что их можно составить либо из полного набора (14 фигур, изображенных на фиг. 156) тетраболо, либо из некоторого его подмножества. Все аналогичные прямоугольники с h -образными сторонами изображены на рис. 159. Любопытно заметить, что наибольший по площади среди прямоугольников каждого типа, как является из подписей к рисункам, невозможно составить из фигур тетраболо. Замечательное доказательство этого утверждения принадлежит одному из первых исследователей тетраболо О'Бейрну.

Доказывая, что ту или иную фигуру нельзя составить из полимино, ее обычно раскрашивают, как шахматную доску. Метод доказательства по существу сводится к сравнению четности числа черных и белых клеток, входящих в состав стандартных фигур полимино

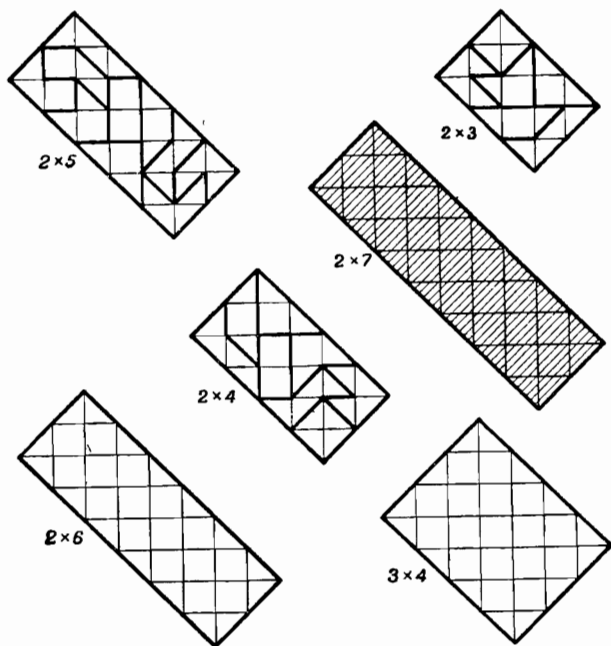


Рис. 159. Прямоугольники с h -образными сторонами. Темные прямоугольники составить из фигур тетраболо невозможно.

и той фигуры, которую мы хотим из них построить. К сожалению, метод шахматной раскраски, столь хорошо зарекомендовавший себя при анализе полиоминно, оказывается неприменимым к тетраболо. В доказательстве О'Бейрна главную роль играет число гипотенуз («сторон h ») элементарных треугольников, образующих контур фигур тетраболо.

Будем поворачивать каждую из 14 фигур тетраболо до тех пор, пока катеты составляющих ее элементарных треугольников не расположатся по вертикали и горизонтали. Гипотенузы элементарных треугольников займут при этом одно из двух положений: они будут наклонены либо вправо, либо влево (рис. 156).

У фигуры A сторон h нет вообще (гипотенузы всех элементарных треугольников, из которых сложена A , «спрятаны» внутри, и контур ее образован одними лишь сторонами k). Фигуру A вместе с восемью другими фигурами (B, C, D, E, F, G, H, I) условимся называть четными фигурами, поскольку контур любой из них содержит по четному числу сторон h с наклоном влево и по четному числу сторон h с наклоном вправо. (Нуль считается четным числом.) Последние пять фигур тетраболо (J, K, L, M, N) мы назовем нечетными: контур каждой из них содержит нечетное число сторон h с наклоном влево и нечетное число сторон h с наклоном вправо. Из того, что число нечетных фигур тетраболо само нечетно, следует важный вывод.

Представим себе, что на составление некоторой фигуры мы израсходовали весь запас тетраболо (все 14 фигур). Независимо от того, в каком порядке они расположились, можно утверждать, что число звеньев h их контуров, наклоненных вправо, так же как и число звеньев h , наклоненных влево, всегда нечетно, если все звенья k контуров тетраболо ориентированы по одному из двух направлений: по вертикали или по горизонтали.

Рассмотрим « k -образный» прямоугольник 4×7 (рис. 158) и « h -образный» прямоугольник 2×7 (рис. 159). Подсчитав площадь каждого из прямоугольников, мы увидим, что на составление их должен пойти весь набор фигур тетраболо (разумеется, если оно вообще возможно). В каждом прямоугольнике число звеньев h контуров тетраболо, наклоненных влево, и число звеньев h контуров тетраболо, наклоненных вправо,

должно быть четно. Действительно, если речь идет о звеньях, образующих внутренние «швы», то число таких звеньев h четно, поскольку любой участок шва образован склеиванием двух однотипных звеньев контура фигур тетраболо. Если же речь идет о периметре « h -образного» прямоугольника, то, обходя его, мы насчитаем четное число звеньев h , наклоненных вправо, и четное число звеньев h , наклоненных влево. Следовательно, ни один из рассматриваемых прямоугольников нельзя составить из 14 фигур тетраболо. Метод доказательства чрезвычайно мощен, ибо применим не только к прямоугольникам, но и к любой фигуре с двусторонней симметрией площадью в 28 квадратных k -единиц, или 14 квадратных h -единиц.

Прямоугольники $2 \times n$, где $n = 7, 8, \dots, 14$ (размеры даны в k -единицах) также невозможно составить из фигур тетраболо. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что, как бы мы ни разместили шесть из фигур тетраболо (B, D, E, G, M, N), прямоугольник $2 \times n$ разобьется на две части, и площадь каждой не будет кратна $2k$ -единичным квадратам. Следовательно, эти шесть фигур тетраболо не могут «входить в состав» прямоугольников $2 \times n$. Остальные восемь фигур тетраболо способны «поставить» периметру прямоугольника самое большее 17 звеньев k , в то время как даже при $n = 7$ периметр прямоугольника составляет 18 звеньев k .

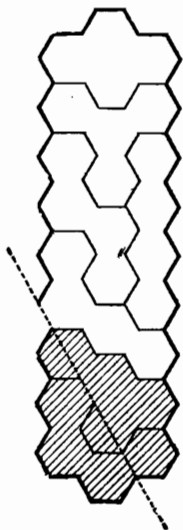
На рис. 158 и 159 показаны все известные схемы разбиения прямоугольников. Можно ли составить из фигур тетраболо « k -образные» прямоугольники 3×8 и 4×6 и « h -образные» прямоугольники 2×6 и 3×4 ? Площадь каждого из них составляет 24 k -единичных, или 12 h -единичных, квадратов. Следовательно, если их вообще можно составить, то лишь израсходовав 12 тетраболо. Одна четная и одна нечетная фигуры должны оставаться «лишними». Наибольшие сомнения вызывает « k -образный» прямоугольник 3×8 : его периметр столь велик, что налагает весьма жесткие ограничения на число способов, которыми могут располагаться фигуры тетраболо.

Вниманию читателей, желающих «помериться силами» с более трудной задачей, можно предложить следующую задачу на составление квадрата, придуманную

О'Бейрном. Отбросим шесть симметричных фигур тетраболо, не меняющих очертаний при переворачивании на 180° вокруг одной или нескольких осей симметрии, и рассмотрим лишь восемь оставшихся асимметричных фигур: D, F, H, I, J, K, M и N . Поскольку суммарная площадь асимметричных фигур равна 16 k -единичным квадратам, можно было бы ожидать, что из них удастся сложить квадрат со стороной в 4 k -единицы. Однако периметр такого квадрата составлял бы 16 k -единиц, в то время как все 8 асимметричных фигур «общими усилиями» не в состоянии дать более 12 k -единиц.

Предположим теперь, что вместе с каждой асимметричной фигурой мы рассматриваем ее зеркальное отражение. Полный комплект будет в этом случае состоять из 16 асимметричных фигур. Переворачивать фигуры не разрешается. Это означает, что ни одна фигура не должна повторяться дважды: вместо двойника у каждой фигуры должно быть ее зеркальное отражение. Общая площадь всех 16 фигур составляет 16 квадратных h -единиц. Следует ли отсюда, что из этих фигур можно составить квадрат со стороной в 4 h -единицы? Как показал О'Бейрн, составить такой квадрат действительно можно, хотя и чрезвычайно трудно. Один из возможных способов составления квадрата приведен в ответах к этой главе: полное число до сих пор не известно.

Тетраболо позволили решить еще одну геометрическую задачу, возникшую еще до изобретения тетраболо. Существуют ли четыре плоские равновеликие фигуры, из которых, складывая их четырьмя различными способами, можно было бы составлять фигуры, подобные каждой из первоначальных, но вчетверо больших размеров. Предполагается, что никакие две фигуры из исходного набора не совпадают по форме (зеркально



Р и с. 160. Башня, составленная из семи тетрагексов.

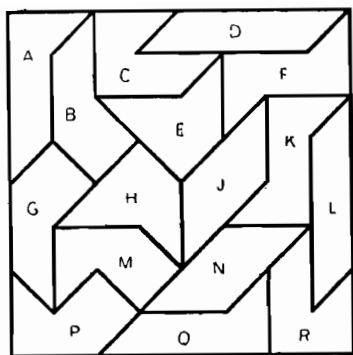


Рис. 161. Решение задачи О' Бейрна.

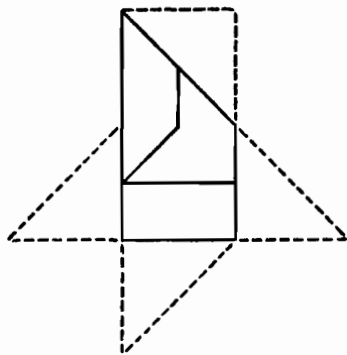


Рис. 162. Решение задачи об учетверении фигур тетраболо.

симметричные фигуры различными не считаются). При составлении учетверенной копии каждой фигуры непременно должны быть использованы все 4 фигуры исходного набора. Оказывается, что простое решение этой задачи можно получить, воспользовавшись четырьмя фигурами тетраболо. Не сможет ли читатель указать, о каких именно фигурах тетраболо идет речь и как из них составляются их учетверенные копии?

ОТВЕТЫ

Единственная фигура на рис. 154, которую нельзя составить из тетрагексов, — это треугольник. Доказательство невозможности построения треугольника слишком сложно, чтобы мы могли привести его здесь. Заметим лишь, что ключом к нему служит довольно простое соображение: тетрагекс «пропеллер» может занимать внутри треугольника лишь конечное число положений.

На рис. 160 приведено решение трудной задачи о составлении из тетрагексов башни. Обратите внимание на то, что заштрихованная часть фундамента башни обладает осью симметрии. Повернув

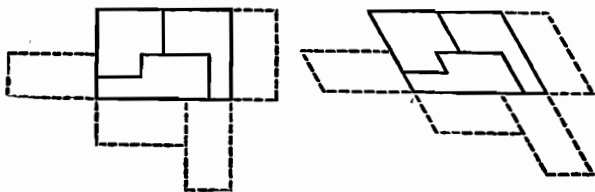


Рис. 163. Решение задачи об учетверении фигур октамино и его образ при аффинном преобразовании.

эту часть на 180° вокруг оси (или, что то же самое, зеркально отразив ее половинки), мы получим второе решение. Существует ли решение, отличное от двух названных, не известно.

Можно показать (мы не делаем этого из-за недостатка места), что составить из фигур тетраболо « k -образные» прямоугольники 3×8 и 4×6 (рис. 158) невозможно. Наоборот, « h -образные» прямоугольники 2×6 и 3×4 (рис. 159) оказываются вполне «тетраболическими»: их можно составить из фигур тетраболо.

Одно из решений трудной задачи О'Бейрна о составлении квадрата из 8 асимметричных фигур тетраболо и их зеркальных отражений показано на рис. 161. Это решение порождает множество других. Действительно, фигуры тетраболо G , H и M образуют симметричный блок, который можно поворачивать вокруг оси симметрии, не изменяя при этом расположения остальных фигур. Блоки JKN и FJK обладают центром симметрии. Не «тревожа» прочие фигуры, их можно поворачивать на 180° вокруг оси, проходящей через центр симметрии перпендикулярно плоскости рисунка. Блоки CE и MP можно переставлять местами. Известны и некоторые другие решения задачи, также порождающие многочисленные варианты. Полное число различных решений пока не известно.

Расположив три тетраболо так, как показано на рис. 162, и передвигая тетраболо — треугольник C , мы получим увеличенные в 4 раза копии фигур тетраболо A , C , K и L . Любопытно заметить, что существуют другие положения треугольника C , позволяющие

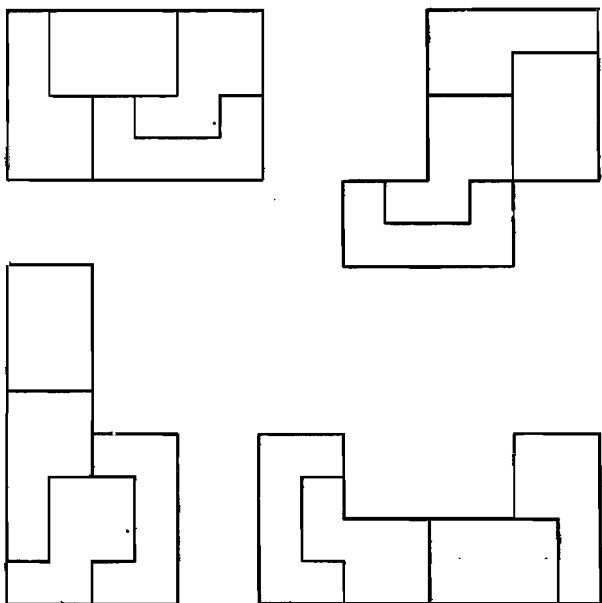


Рис. 164. Решение задачи об учетверении фигур гексамино.

получить в увеличенном виде еще четыре фигуры тетраболо. Таким образом, приведенное на рис. 162 решение позволяет «увеличивать» 8 фигур тетраболо, то есть больше половины полного набора. Другое решение задачи об учетверении плоских фигур мы получим, взяв тетраболо C, I, K и L .

Существуют ли другие наборы из четырех плоских фигур, отличных от тетраболо, которые позволяли бы решать ту же задачу о составлении подобных фигур вчетверо больших размеров?

Оказывается, таких наборов бесконечно много. Рассмотрим набор из четырех октамино. Каким образом из них можно сложить увеличенные вчетверо фигуры октамино, показано на рис. 163. Подвергая полученное решение аффинному преобразованию, искажающему углу, получаем бесконечное множество других решений.

Располагая четыре фигуры гексамино так, как показано на рис. 164, мы также решаем задачу о построении подобных фигур в увеличенном в 4 раза масштабе. Изображенные на рис. 164 фигуры гексамино позволяют «увеличивать» не только себя, но и 11 других фигур гексамино. Попытка решить ту же задачу для фигур пентамино привела к несколько неожиданному результату: удалось найти 4 фигуры пентамино, которые позволяют увеличить вчетверо 4 другие фигуры пентамино, но не дают возможности воспроизвести себя в увеличенном масштабе.

ГЛАВА 23

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИГРЫ «РАССАДА» И «БРЮССЕЛЬСКАЯ КАПУСТА»

«Недавно мой друг, изучающий классическую филологию в Кембриджском университете, познакомил меня с игрой «Рассада». В течение последнего семестра на этой игре буквально помешался весь Кембридж. Некоторые особенности игры не лишены интереса с точки зрения топологии».

Так начиналось письмо, которое я получил в апреле 1967 г. от одного студента-математика из Англии. Вскоре начали поступать и другие сообщения о том, что «Рассада» привилась и пышно расцвела на благодатной почве Кембриджа.

Заинтересованный новой игрой, я постарался разузнать как можно больше и о ней, и о ее создателях.

Мои усилия увенчались успехом: мне удалось проследить историю игры до самых ее истоков. «Рассаду» создали уже известный читателям профессор Джон Хортон Конуэй и кембриджский аспирант Майкл Стьюарт Патерсон.

Игра начинается с того, что на листе бумаги расставляют n точек (лунок для рассады). Анализ игры даже при $n = 3$ оказывается намного более сложным, чем анализ игры в крестики и нолики, поэтому начинающим рекомендуется «выкапывать» в начале игры не больше 3—4 лунок. Делая очередной ход, играющий проводит линию («рассада пускает росток»), либо соединяющую одну точку с другой, либо описывающую замкнутую петлю и возвращающуюся в исходную точку, и затем ставит на проведенной линии новую точку. Правила игры несложны. Их два:

1) линия может иметь любой вид, но не должна иметь точек самопересечения, пересекать ранее проведенные линии или проходить через ранее поставленные точки, не служащие ее началом и концом;

2) из каждой точки должно выходить не более трех линий.

Играющие по очереди проводят линии. В обычном варианте «Рассады» победителем считается тот, кто сумеет провести последнюю линию. Возможен и другой вариант игры («мизер»), когда выигравшим считается тот, кто первым не сможет провести линию.

На рис. 165 показана типичная партия игры в «Рассаду». Первый игрок выигрывает ее на седьмом ходу. (Ходы второго игрока показаны пунктирными линиями, чтобы их легко было отличать от ходов первого игрока. В обычной (непоказательной) игре не обязательно различать линии, проведенные первым и вторым игроками. Игра получила свое название потому, что по мере развития партии линии разрастаются, подобно молодым побегам, образуя фантастические узоры. Наиболее замечательная особенность игры состоит не в том, что «Рассада» принадлежит к числу комбинаторных игр (ибо таких игр много), а в том, что в ней используются топологические свойства плоскости. Прибегнув к более строгой математической терминологии, можно сказать, что игра «Рассада» использует теорему Жордана о замкнутой кривой, которая гласит: «Всякая простая замкнутая

Начало
игры

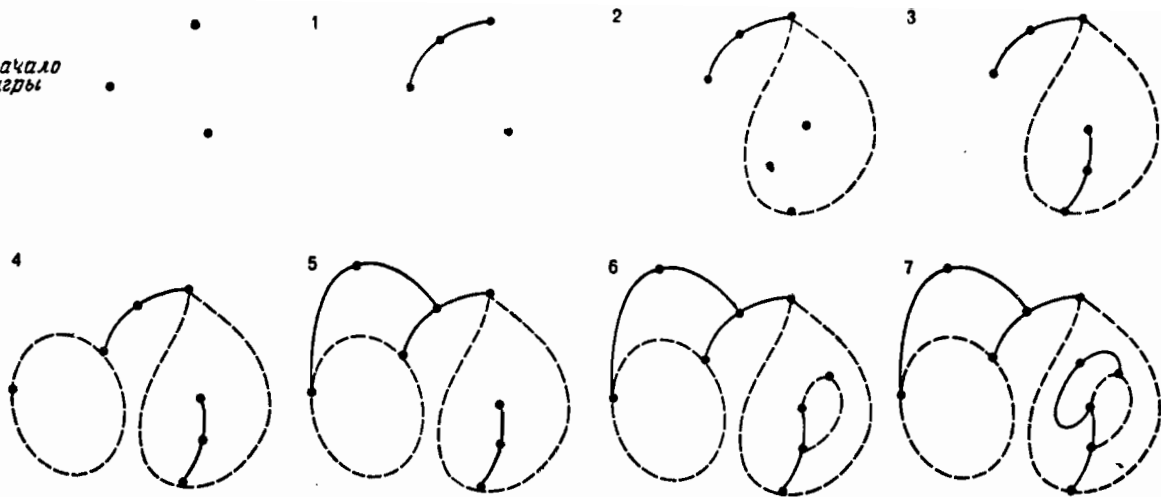


Рис. 165. Типичная партия игры в «Рассадку» с тремя лунками.

кривая делит плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю».

На первый взгляд может показаться, что «рассада» способна пускать ростки неограниченно долго, однако в действительности, как показал Конуэй, игра должна заканчиваться не более чем через $3n - 1$ ходов. Из каждой лунки могут исходить три побега — три линии, которым по правилам игры разрешается пересекаться в одной точке. Лунка с тремя побегами называется отмершей, поскольку новых побегов из нее уже быть не может. Если в начальной позиции имелось n лунок, то число возможных побегов составляло $3n$. Каждый ход «убивает» два побега (один в начале и один в конце проводимой линии), но добавляет одну лунку, из которой может «проклюнуться» один росток. Следовательно, с каждым ходом возможное число побегов убывает на 1. Ясно, что продолжать игру при одном оставшемся побеге невозможно, поскольку каждый ход требует двух побегов. Таким образом, игра может продолжаться не более чем $3n - 1$ ходов. В то же время, как нетрудно показать, игра не может закончиться раньше, чем через $2n$ ходов. Итак, если в начале игры было 3 лунки, то игра закончится не позже, чем на восьмом ходу, и не раньше, чем на шестом.

Если в исходной позиции имеется лишь одна лунка, то игра тривиальна. У первого игрока нет выбора. Он должен провести замкнутую петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в единственной лунке. Если игра ведется, как обычно, то второй игрок выигрывает (в «мизерном» варианте он проигрывает), соединяя исходную и новую точки кривой, расположенной либо внутри, либо снаружи замкнутой петли. С точки зрения преимуществ, извлекаемых из ходов в игре, оба хода эквивалентны, поскольку до того, как они сделаны, область, заключенная внутри замкнутой кривой, ничем не отличается от области, лежащей снаружи. Представим себе, что мы играем в «Рассаду», проводя кривые на поверхности сферы. Проткнув поверхность сферы в точке, расположенной внутри замкнутой кривой, мы сможем растянуть ее на плоскость так, что все точки, лежавшие внутри замкнутой кривой, окажутся снаружи, а все точки, лежавшие снаружи, окажутся внутри. Топологическую эквивалентность областей, расположенных внутри и вне

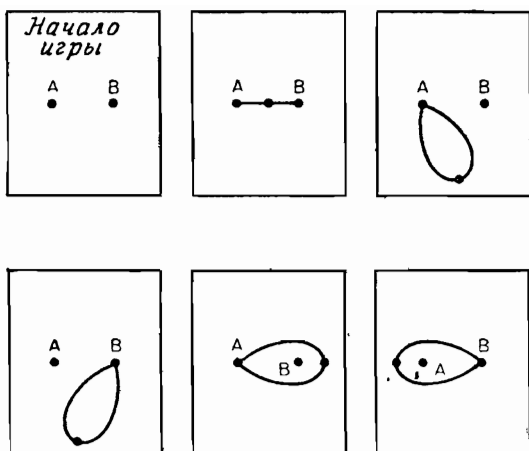


Рис. 166. Начальные лунки *A* и *B* и возможные ходы первого игрока.

замкнутой кривой, не следует упускать из виду, поскольку она позволяет значительно упрощать анализ игры при числе лунок в начальной позиции, большем 2.

Если в начальной позиции имеются две лунки, игра сразу же приобретает интерес. Начнем с дебюта. Может показаться, будто у первого игрока имеется выбор из пяти ходов (рис. 166), однако не все эти ходы различны. Из соображений симметрии ясно, что второе и третье (так же как и четвертое и пятое) начала партии эквивалентны. Кроме того, эквивалентность между внутренней и наружной областью замкнутой кривой позволяет считать равносильными, например, второе и четвертое, а следовательно, и все начала со второго по пятое. Таким образом, первый игрок должен выбрать лишь один из двух топологически различных ходов. Начертив дерево игры для всех возможных вариантов партий, нетрудно убедиться в том, что и при обычной, и при «мизерной» игре в «Рассадку» с двумя лунками в исходной позиции второй игрок всегда может выиграть.

Анализируя игру с тремя лунками в исходной позиции, Конуэй показал, что в обычном варианте игры выигрыш всегда может остаться за первым, а в «мизерном» — за вторым игроком. Д. Моллисон показал, что

первый игрок всегда может выиграть в обычном варианте игры, если в исходной позиции имеется 4 или 5 лунок. Пospорив с Конуэем на 10 шиллингов, что он успеет проанализировать игру с шестью лунками в начальной позиции в течение месяца, Моллисон представил трактат на 49 страницах, из коего следовало, что выигрыш (в обычном варианте) должен остаться за вторым игроком. Доказательство оказалось столь громоздким, что до сих пор никому, кроме его автора, не удалось проследить ход рассуждений во всех деталях и убедиться в том, что в него нигде не вкралась ошибка. При игре в «мизерный» вариант с четырьмя лунками в начальной позиции выигрывает второй игрок. Кто выигрывает в «мизерном» варианте в тех случаях, когда в начальной позиции имеется более четырех лунок, не известно. При семи и более лунках анализ игры становится столь сложным, что, по мнению Конуэя, требует быстройдействующей ЭВМ и хитроумной программы.

Таким образом, отыскание оптимальной стратегии для игры в «Рассаду» при произвольном числе лунок лежит за пределами человеческих возможностей. Однако по мере приближения партии к концу нередко становится ясным, каким образом следует проводить замкнутые кривые, чтобы, разбивая плоскость на внешние и внутренние области, обеспечить себе выигрыш. Именно возможность такого разумного планирования делает «Рассаду» интеллектуальной забавой и позволяет игрокам совершенствовать мастерство от партии к партии. Вместе с тем «Рассада» изобилует неожиданностями, исключаящими, по-видимому, самое существование универсальной стратегии, способной обеспечить выигрыш в любой ситуации. По оценке Конуэя, полный анализ игры с семью лунками не под силу даже современным ЭВМ.

Известна точная дата рождения игры: она была изобретена во вторник 21 февраля 1967 г. В этот день Конуэй и Патерсон, покончив с чаепитием, сидели в гостиной математического факультета, безуспешно пытаясь придумать какую-нибудь новую игру, в которую можно было бы играть, вооружившись карандашом и бумагой. Конуэй разрабатывал вариант игры, в котором нужно было хитроумным способом складывать полоску марок, а Патерсон «переводил» все ходы на лаконичный язык

графики. Было перебрано и отвергнуто множество различных правил, когда Патерсон вдруг заметил: «А почему бы нам не ставить на линии новую точку?»

«Как только новое правило было принято, — вспоминает Конуэй, — все прочие правила тотчас же были отброшены как ненужные, начальная позиция упростилась и превратилась в набор из n точек. Словом, «Рассада» пустила корни».

Добавление новой точки имело столь решающее значение, что авторство, по единодушному мнению самих изобретателей «Рассад», было решено разделить в отношении 3:2 ($\frac{3}{5}$ получал Патерсон и $\frac{2}{5}$ — Конуэй).

«Были оговорены и другие, более сложные правила, позволяющие разделить любой, даже самый маленький лавровый листик, которым потомки могут увенчать нас как изобретателей игры», — шутливо замечает Конуэй.

«На следующий день после того, как «Рассада» впервые пустила корни, — продолжает он, — в нее играли поголовно все. Во время завтрака всюду можно было видеть небольшие группки людей, смешно горбившихся над фантастическими узорами «Рассад». Некоторые пытались играть не только на приевшейся плоскости, но в поисках острых ощущений переходили на поверхность тора, бутылки Клейна и т. п. экзотику, а один математик даже подумывал об игре в «Рассаду» в пространствах высших размерностей. Не остались в стороне от всеобщего увлечения и сотрудники секретариата. Листы, исчерченные побегами, можно было обнаружить в самых неподходящих местах. Стоило мне начать объяснять кому-нибудь правила новой игры, как немедленно выяснялось, что мой собеседник уже наслышан о ней. Каналы, по которым распространялась информация, подчас были самыми невероятными. Даже мои малолетние дочери, одной из которых исполнилось в ту пору три, а другой — четыре года, играли в «Рассаду».

«Правда, — добавляет Конуэй, — обычно мне удавалось у них выигрывать».

Название «Рассада» предложил Конуэй. Патерсон предлагал другое название «Корь», мотивируя его тем, что игра «прилипчива, как корь», и вспыхивает, как эпидемия, но привилась именно «Рассада».

Позднее Конуэй изобрел другую игру, внешне очень напоминающую «Рассаду». Желая подчеркнуть, что

речь идет об игре-шутке, он назвал вторую игру «Брюссельская капуста».

Вместо n точек начальная позиция при игре в «Брюссельскую капусту» состоит из n крестиков. Очередной ход в «Брюссельской капусте» состоит в том, что свободный конец одного из крестов соединяют со свободным концом другого и на проведенной кривой ставят поперечную черточку — «перекладину» нового креста. Два других конца нового креста следует считать «отмершими», поскольку они уже «заняты» проведенной кривой, а использовать дважды одну и ту же оконечность креста нельзя. Так же как и в «Рассаде», кривые, проводимые при игре в «Брюссельскую капусту», не должны иметь точек самопересечения или пересекаться с ранее проведенными кривыми. Победителем в обычном варианте игры считается тот из игроков, кто делает последний ход (при игре в «мизерный» вариант, наоборот, — тот, кто первым не сможет сделать очередной ход).

После игры в «Рассаду» «Брюссельская капуста» может показаться более сложной и даже более изощренной игрой. Более того, поскольку каждый ход связывает кривой две оконечности крестов и порождает две новые оконечности, создается впечатление, будто игра может продолжаться бесконечно. Тем не менее все партии в «Брюссельскую капусту» заканчиваются за конечное число ходов. Мы надеемся, что тот из читателей, кто сумеет полностью разобраться во всех тонкостях игры, по достоинству оценит юмор ее создателя. Чтобы облегчить первоначальное знакомство с новой игрой, приводим типичную партию на рис. 167. Второй игрок одерживает победу на восьмом ходу.

В письме, полученном мной от Конуэя, сообщалось о последних успехах «огородничества». Патерсон и Конуэй научились оценивать конечную позицию «Рассады» по степени ее «вымирания» и разработали классификацию позиций нулевой степени. Таких позиций оказалось пять: блоха, жук, таракан, уховертка и скорпион. Мелкие блохи могут селиться иногда не по одиночке, а целыми гнездами на более крупных насекомых и скорпионах. Один из нарисованных Конуэем узоров представляет собой «не что иное, как вывернутую наизнанку уховертку внутри вывернутой наизнанку блохи». По сообщению

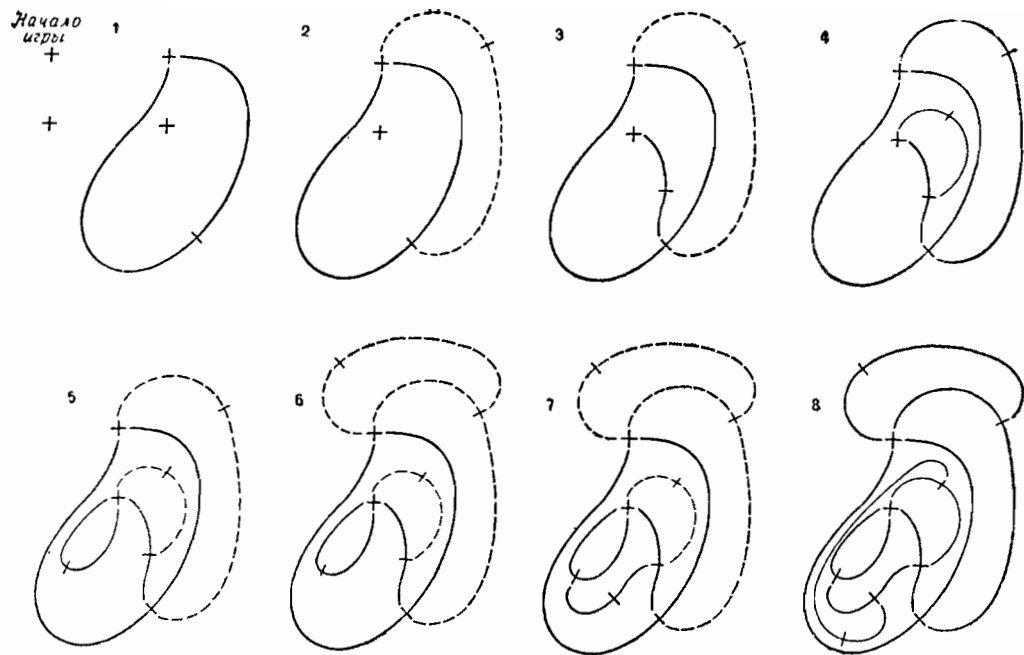


Рис. 167. Типичная партия игры в «Брюссельскую капусту» с двумя крестиками в исходной позиции.

Конуэя, ему в соавторстве с Патерсоном удалось открыть весьма глубокую Фундаментальную Теорему о Вымирании Нулевой Степени (ФТВНС). Так, семена, брошенные 21 февраля 1967 г., дали дружные всходы. Мы присутствуем при бурном развитии нового направления в занимательной математике — математического «огородничества»!

ОТВЕТЫ

Секрет игры-шутки «Брюссельская капуста» заключается в том, что в нее нельзя играть ни хорошо, ни плохо: каждая партия должна заканчиваться ровно через $5n - 2$ ходов, где n — число крестиков в начальной позиции. В обычном варианте игры (когда выигравшим считается игрок, делающий последний ход) при нечетном числе крестиков в начальной позиции выигрывает первый игрок, при четном — второй. (В «мизерном» варианте ситуация противоположна.) Предложив кому-нибудь сыграть несколько партий в «Рассадку» — игру, действительно требующую сообразительности и геометрической ситуации, можно затем «переключить» партнера на псевдосостязание в «Брюссельскую капусту». К его удивлению, вы всегда можете беспроблемно заключать пари относительно того, кто выиграет очередную партию.

Доказательство того, что каждая партия в «Брюссельскую капусту» заканчивается ровно за $5n - 2$ ходов, мы предоставляем читателю.

ГЛАВА 24

ХОДОМ КОНЯ

Конь — единственная шахматная фигура, ход которой асимметричен. Именно «кривобокость» и придает ему необычность. Конь (по-немецки *Der Springer* — прыгун) перепрыгивает одно поле по горизонтали или вертикали, после чего, подобно кэрроловскому Белому Рыцарю, переступает на соседнее поле вправо или влево. Ход конем можно описать и иначе: конь переходит на соседнее поле по диагонали, как слон, затем поворачивает вокруг вертикальной оси на 45° вправо или влево и

переходит на соседнее поле ходом ладьи. Именно так ходит *ма* (конь) в китайских и корейских шахматах, ибо в отличие от своего европейского аналога *ма* оказывается запертой, если соседнее по диагонали поле, на котором происходит поворот на 45° , занято другой фигурой. *Кейма* (благородный конь) в японских шахматах ходит так же, как конь в европейских, — перепрыгивая через фигуры, стоящие на пути, но должен двигаться лишь вперед, к противоположному краю доски.

Хорошо известный нам Генри Э. Дьюдени называл коня «презренным шутом шахматной доски». Ни с одной другой шахматной фигурой не связано столько необычных и занимательных комбинаторных задач*. В этой главе мы рассмотрим несколько таких задач, классических и новых, лишь недавно придуманных С. Голломбом.

Самой «древней» из задач о шахматном коне, несомненно, следует считать задачу об обходе конем всех полей доски. Решению этой задачи посвящена обширная литература. Формулируется эта задача так. Требуется обойти ходом коня все клетки шахматной доски (не только традиционной 8×8 , но и других размеров и форм), побывав на каждой из них один и только один раз. Маршрут обхода называется замкнутым, если конь, побывав на всех клетках доски, возвращается в исходную клетку, и открытым (незамкнутым), если ходом коня из конечной клетки нельзя попасть в начальную. Поскольку конь всегда ходит с поля одного цвета на поле другого цвета, последовательные «стоянки» коня вдоль маршрута имеют чередующуюся окраску. Следовательно, если маршрут замкнут, то число черных и белых клеток должно быть одинаково, а поскольку доски нечетного порядка содержат нечетное число клеток, замкнутые маршруты на них невозможны. На досках второго и четвертого порядка (то есть со сторонами в 2 и 4 клетки) невозможны маршруты обоих типов — и замкнутые, и открытые. На всех квадратных досках более высоких четных порядков замкнутые маршруты существуют. Наименьшая прямоугольная доска, на которой возможен открытый маршрут, имеет размеры 3×4 . Наименьшие прямоугольные доски, для которых суще-

* См. Л. Я. Окунев, Комбинаторные задачи на шахматной доске, М. — Л., ОНТИ, 1935. — *Прим. перев.*

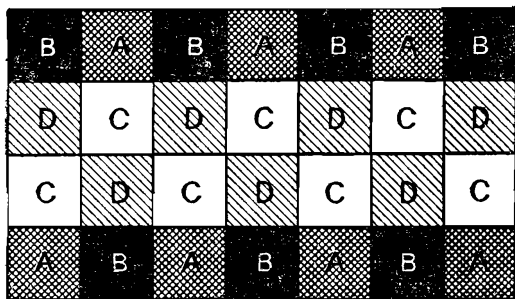


Рис. 168. Метод доказательства невозможности обхода конем всех клеток доски $4 \times n$ по замкнутому маршруту, предложенный Голомбом.

ствуют замкнутые маршруты, имеют размеры 5×6 и 3×10 . Если одна сторона доски содержит менее 3 клеток, то обойти все клетки такой доски ходом коня становится невозможным. Если к стороне доски примыкает менее 4 клеток, то на такой доске невозможны замкнутые маршруты.

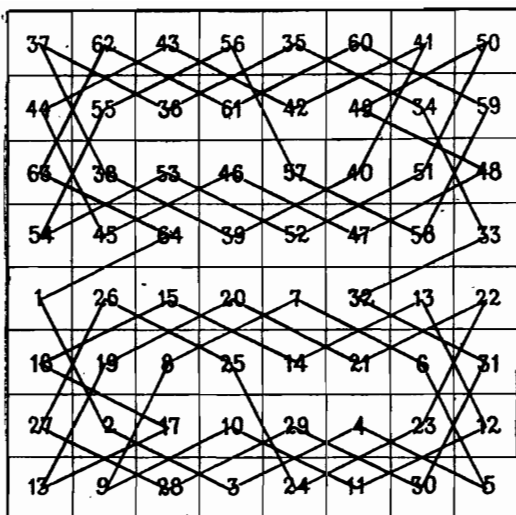
Доказательство невозможности обхода конем всех клеток доски по тому или иному маршруту проще и изящнее всего проводить, определенным образом раскрашивая клетки доски. Ярким примером «могущества» этого метода служит предложенное Голомбом доказательство невозможности обхода конем всех клеток любой прямоугольной доски, одна из сторон которой содержит четыре клетки, по замкнутому маршруту. Клетки доски $4 \times n$ раскрашивают в четыре цвета (рис. 168). Заметим, что с клеток *A* конь может пойти лишь на клетки *C* и, наоборот, на клетки *A* конь переходит лишь с клеток *C*. Таким образом, на пути коня клетка *C* должна предшествовать любой клетке *A* и следовать непосредственно за ней. Число клеток *A* и *C* одинаково, и все они должны лежать на замкнутом маршруте коня, пролегающем по клеткам доски. Единственный способ «нанизать» на замкнутую ломаную все клетки *A* и *C* заключается в том, чтобы обойти стороной все клетки *B* и *D*. Действительно, стоит коню перейти с клетки *C* на клетку *D*, как для того, чтобы вернуться на клетку *A*, ему предварительно придется побывать на другой клетке *C*. Это означает, что на замкнутом маршруте число

клеток C превосходит число клеток A . Поскольку в действительности число клеток A и C одинаково, полученное противоречие доказывает, что замкнутый маршрут невозможен.

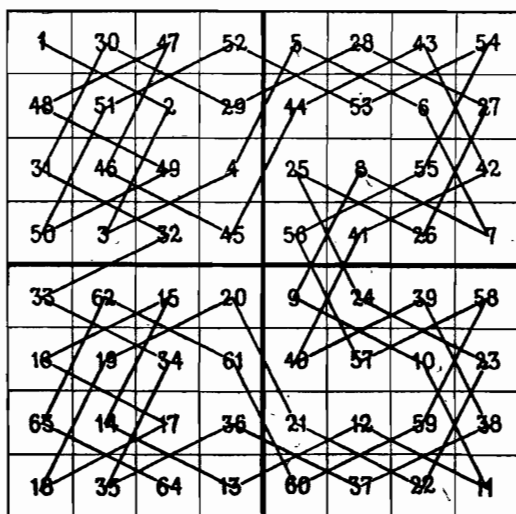
Никто не знает, сколькими различными способами можно обойти ходом коня все клетки стандартной шахматной доски 8×8 . Лишь одна разновидность маршрутов насчитывает около миллиона вариантов. Обычно при решении задачи об обходе конем клеток шахматной доски ограничиваются рассмотрением маршрутов, обладающих необычной симметрией или (если клетки доски перенумерованы в порядке обхода) порождающих матрицу с замечательными арифметическими свойствами. Например, замкнутый маршрут на рис. 169 — одно из многочисленных решений задачи, найденных в 1759 г. Эйлером, — сначала пролегает по верхней половине доски и лишь затем переходит на ее нижнюю половину. Решение Эйлера обладает еще одной любопытной особенностью: разность между любыми двумя числами, расположенными симметрично относительно центра доски (на прямой, проходящей через него), всегда равна 32.

На рис. 170 изображен открытый маршрут, следуя которым конь также обходит все клетки шахматной доски. Это решение задачи было опубликовано в 1848 г. Вильямом Беверли. Маршрут Беверли был первым из «полумагических» маршрутов: сумма чисел, стоящих в любой «строке» и в любом «столбце», равна 260. Стать «полностью магическим» маршруту Беверли мешает то обстоятельство, что сумма чисел, стоящих на главных диагоналях, отлична от 260. Если шахматную доску с маршрутом Беверли разрезать на четыре доски 4×4 (вдоль жирных линий, показанных на рис. 170), то каждая из «четвертушек» вновь будет полумагическим квадратом (с константой, одинаковой для всех четырех квадратов и равной 130). Если каждый из квадратов 4×4 в свою очередь «четвертовать», то сумма чисел, стоящих в клетках любого из квадратов 2×2 , также будет равна 130. Если клетки доски перенумеровать в обратном порядке, начав с конца маршрута и двигаясь к началу, то получится «полумагический» квадрат, двойственный первому.

Существует ли магический маршрут, следуя которым, конь может обойти все клетки шахматной доски, побывав на каждой лишь один раз? Это самый трудный из



Р и с. 169. Решение задачи об обходе конем всех клеток шахматной доски, предложенное Эйлером.



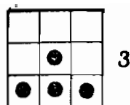
Р и с. 170. Первый полумагический обход конем всех клеток шахматной доски.

Сумма чисел, стоящих в клетках любой горизонтали или вертикали, равна 260.

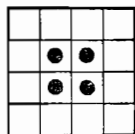
вопросов теории, остающихся пока без ответа. Известно множество полумагических маршрутов, как открытых, так и замкнутых, но ни у одного из них сумма чисел, стоящих на диагонали, не равна сумме чисел, стоящих по одной горизонтали или вертикали. Доказано, что магические маршруты возможны лишь на досках, порядки которых кратны 4. Поскольку на доске 4-го порядка магический маршрут не существует, обычная шахматная доска 8×8 является квадратной доской наименьших размеров, для которой вопрос остается открытым. Не известен ни один магический маршрут, позволяющий обойти ходом коня все клетки доски 12×12 , однако для досок 16, 20, 24, 32, 40, 48 и 64-го порядков магические маршруты построены.

Чему равно наибольшее число коней, которых можно разместить на шахматной доске так, чтобы никакие два коня не атаковали друг друга? Интуитивно ясно, что ответом должно служить число 32: коней нужно разместить либо на 32 черных, либо на 32 белых полях. Доказать это утверждение не так просто. Один из способов доказательства состоит в том, что шахматную доску разбивают на прямоугольники 2×4 . Конь, стоящий на любой из 8 клеток такого прямоугольника, может держать под ударом лишь одного коня. Следовательно, общее число не атакующих друг друга коней, которые могут разместиться в прямоугольнике, не превышает 4. Поскольку вся доска подразделяется на 8 таких прямоугольников, общее число коней, которых можно расставить на ней так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу, не превышает 32.

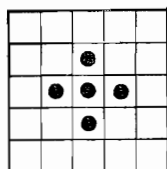
Другое, более тонкое, доказательство того же факта использует существование маршрутов, позволяющих обойти ходом коня все клетки шахматной доски, не побывав ни на одной из них дважды. Как мы уже знаем, при таком однократном обходе конем всех клеток шахматной доски черные и белые поля чередуются. Ясно, что разместить в вершинах ломаной, служащей маршрутом «кругосветного» путешествия, более 32 коней невозможно. Не менее очевидно, что при наиболее плотной расстановке коней в вершинах ломаной интервал между ними должен составлять одну вершину, то есть все не атакующие друг друга кони расположатся либо только на черных, либо только на белых полях. Иначе говоря, если



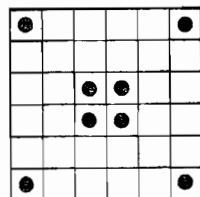
3



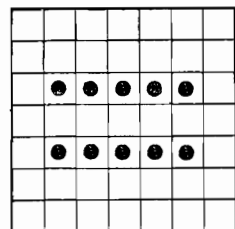
4



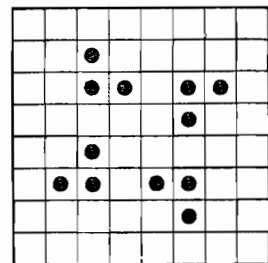
5



6



7



8

Рис. 171. Решение задачи о расстановке минимального числа коней, угрожающих всем незанятым клеткам на досках размером от 3×3 до 8×8 .

бы на шахматной доске можно было бы разместить 33 коня так, что никакие два из них не угрожали бы друг другу, то одно из звеньев любой ломаной, служащей маршрутом «кругосветного» путешествия коня по клеткам шахматной доски, начиналось и заканчивалось бы на полях одного цвета. Но это невозможно, поскольку конь всегда ходит с поля одного цвета на поле другого цвета. Таким образом, из одного лишь существования ломаной, позволяющей обойти ходом коня все клетки шахматной доски, не побывав ни на одной из них дважды, следует, что максимальное число коней, которых можно расставить на доске так, чтобы никакие два коня не угрожали друг другу, равно 32. В качестве «бесплатного приложения» мы получаем доказательство того, что две, казалось бы, различные задачи — об обходе конем всех клеток шахматной доски и о расстановке максимального числа не атакующих друг друга коней — по существу эквивалентны.

Приведенное нами доказательство допускает обобщения на случай доски любого четного порядка, на которой существуют замк-

нутые маршруты. На досках нечетных порядков маршруты должны начинаться и заканчиваться на полях одного цвета. Следовательно, для таких досок задача о размещении максимального числа не атакующих друг друга коней имеет единственное решение: кони должны располагаться на клетках того же цвета, что и центральное поле.

От поиска максимума обратимся теперь к поиску минимума. Чему равно наименьшее число коней, которых можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая из свободных клеток находилась под ударом по крайней мере одного коня? Ниже указано, чему равно минимальное число коней для досок от 3-го до 10-го порядка, а также сколько различных (с точностью до поворотов и отражений) решений задачи существует в каждом случае.

Порядок доски	Минимальное число коней	Число различных решений
3	4	2
4	4	3
5	5	8
6	8	22
7	10	3
8	12	1
9	14	1 (?)
10	16	2 (?)

Для досок порядка 11, 12, 13, 14 и 15 лучшие из известных решений содержат соответственно 22, 24, 28, 34 и 37 коней. Достигается ли в этих решениях минимум, не известно.

Примеры решения задачи о расстановке минимального числа коней, угрожающих не занятым клеткам доски порядка от 3 до 8, приведены на рис. 171. Единственное решение для обычной шахматной доски (8-го порядка) неоднократно публиковалось. Решения задачи для досок 9 и 10-го порядков не столь известны. Вопросительные знаки в таблице означают, что точное число решений для этих досок не установлено. Решение для доски 9×9 представлено на рис. 172. Есть основания полагать, что оно единственно. Два решения для доски 10×10 приведены на рис. 173. Правое решение обнаружено совсем недавно.

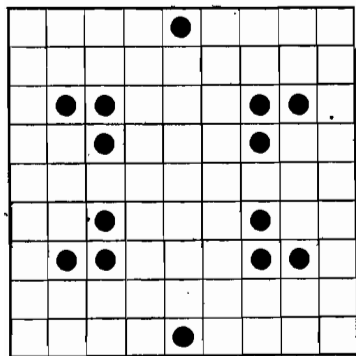


Рис. 172. Решение задачи о расстановке минимального числа коней, угрожающих всем незанятым клеткам на доске 9×9 .

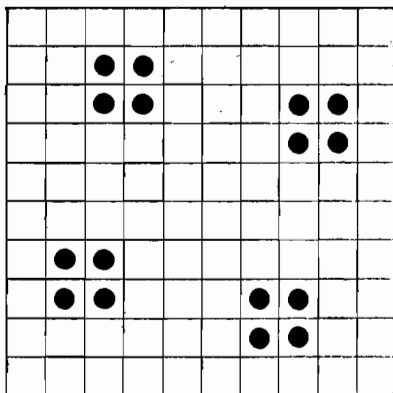
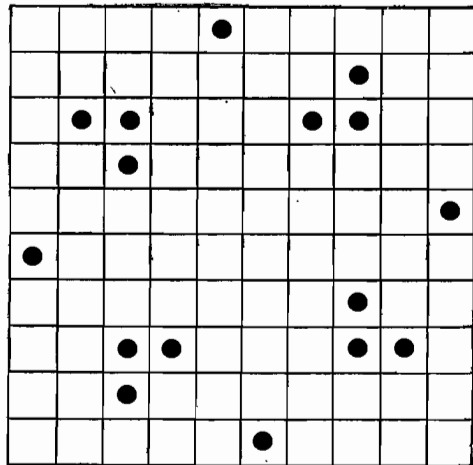


Рис. 173. Два решения задачи о расстановке минимального числа коней, угрожающих всем незанятым клеткам на досках 10×10 .

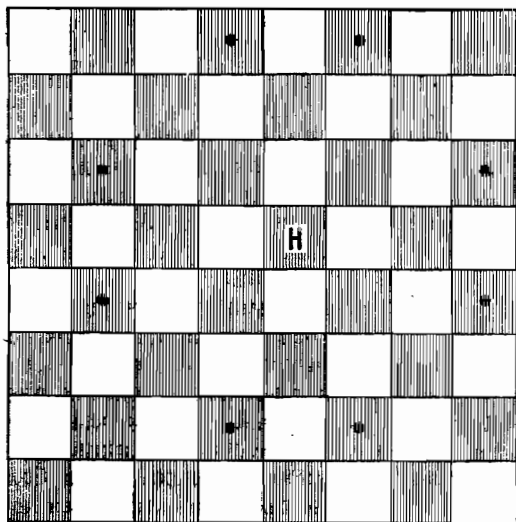


Интересно отметить, что на доске 7-го порядка все занятые конями клетки находятся под ударом. На доске 8-го порядка под ударом находятся 4 занятые клетки. Если ввести дополнительное условие, потребовав, чтобы расставленные на доске кони угрожали лишь незанятым клеткам, то для каждой из этих досок минимальное число коней увеличится. Так, для доски 7-го порядка удалось получить решение с 13 конями, для доски 8-го порядка — с 15. (Минимальность числа коней в обоих случаях остается недоказанной.)

Задачу о расстановке минимального числа коней, держащих под ударом все клетки доски независимо от того, пусты они или заняты, проще всего решать «графически», нарисовав на кальке две схемы расстановки коней: одну — с минимальным числом коней, угрожающих всем черным полям, другую — с минимальным числом коней, держащих «под прицелом» все белые поля. Наложив схемы друг на друга различными способами, мы получим различные решения полной задачи. Как показал Дьюдени, на шахматной доске существуют лишь две схемы расстановки семи коней (семь — наименьшее из возможных чисел), которые держат под ударом либо все белые, либо все черные поля. Комбинируя их всеми возможными способами, мы получаем лишь три различных способа расстановки 14 коней, угрожающих всем 64 клеткам. (Все остальные решения задачи сводятся к этим трем поворотам и зеркальным отражениям доски.)

Около 20 лет назад Голомб изобрел игру, сочетающую в себе особенности шашек и шахмат. Свой «гибрид» Голомб, по понятным причинам, назвал «шашматы». Так же как и при игре в шашки, в шашматы играют на 32 черных полях обычной 64-клеточной доски. Поскольку конь не может все время оставаться только на черных полях, Голомбу пришлось ввести своеобразную замену коня — фигуру, которую он впоследствии назвал «няня».

Няня ходит так же, как конь, только первый шаг делает «шире» на одну клетку (иначе говоря, няня перепрыгивает через две клетки по вертикали или горизонтали, затем поворачивает на 90° и «приземляется» на соседней клетке). Восемь возможных ходов няни, стоящей на поле вблизи центра доски, изображены на рис. 174.



Р и с. 174. Восемь возможных ходов «няни».

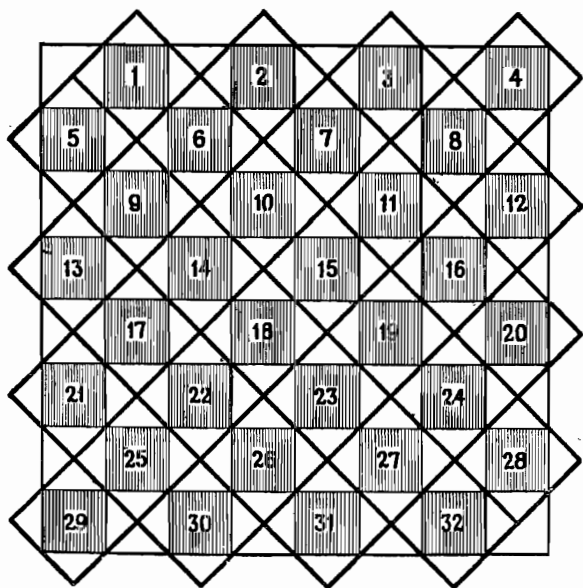
Другую фигуру Голомб ввел, не зная о том, что она ходит так же, как «верблюд» в персидском варианте игры в шахматы, известном еще в XIV в. Сложные правила этой игры и описание доски дошло до нас в сохранившейся рукописи. Персидские шахматы известны также под названием тамерлановых шахмат. (По преданию, Тамерлан любил играть в эту игру.) Помимо двух верблюдов, каждая из сторон в тамерлановых шахматах располагает двумя «аспидами» (фигурами, соответствующими нашему коню) и двумя очень сильными фигурами — «жирафами». Ходит жираф так: сначала передвигается на одну клетку по диагонали, а затем — под прямым углом к направлению первоначального движения — на любое расстояние до первой клетки, занятой другой фигурой.

Но вернемся к шашматам.

— С изобретением няни, — пишет Голомб, — передо мной сразу же встали два вопроса. 1) Можно ли ходом няни обойти все клетки шахматной доски так, чтобы ни на одной из них не побывать дважды? 2) У скольких нянек чужое дитя будет без присмотра? (Более точная формулировка второго вопроса гласит: чему равно мак-

симальное число нянь, которых можно разместить на шахматной доске так, чтобы никакие две няни не угрожали друг другу?)

Чтобы ответить на первый вопрос, Голомб воспользовался преобразованием шахматной доски, предложенным его коллегой Л. Уэлчем (рис. 175). Ступенчатая доска, каждая клетка которой вдвое больше клетки шахматной доски, накладывается на шахматную доску так, что каждое черное поле оказывается вписанным в одну из клеток ступенчатой доски. В любую игру, которая происходит на одних лишь черных полях шахматной доски, можно играть и на ступенчатой доске. Необходимо лишь надлежащим образом видоизменить правила игры. Поскольку преобразование Уэлча переводит горизонтали и вертикали шахматной доски в диагонали ступенчатой доски, и наоборот, ход слона на шахматной доске переходит в ход ладьи на ступенчатой (и наоборот, ход ладьи на шахматной доске преобразуется в ход слона на ступенчатой доске). В шашки на ступенчатой



Р и с. 175. Преобразование шахматной доски, предложенное Уэлчем.

доске играют, расставляя черные на клетках с номерами от 1 до 12 и белые на клетках с номерами от 21 до 32 и делая ходы не по диагоналям, как на обычной доске, а по «горизонталям» и «вертикалям». (Интересно, не приходила ли кому-нибудь в голову мысль воспользоваться тем, что при игре в шашки ходы совершаются лишь на поля одного цвета, и играть на одной доске «в четыре руки» одновременно две партии: одну — на белых, а другую — на черных полях?)

Еще более удивительную метаморфозу претерпевают ходы няни: при переходе от обычной шахматной доски к ступенчатой няня превращается... в коня! Следовательно, обход няней всех черных клеток шахматной доски соответствует обходу всех клеток ступенчатой доски ходом коня. Обойти же конем по одному разу все клетки ступенчатой доски можно, например, по следующему замкнутому маршруту: 1—14—2—5—10—23—17—29—26—32—20—8—19—22—9—21—18—30—27—15—3—6—11—24—12—7—4—16—28—31—25—13. Отнеся эти числа к черным клеткам шахматной доски, получим замкнутый маршрут, следуя которым няня посетит по одному и только по одному разу все черные поля.

Чтобы преодолеть расстояние между любыми двумя клетками шахматной доски, разделенными одним ходом няни, коню требуется два хода. Это навело Голомба на мысль заняться поиском таких маршрутов «кругосветных» путешествий коня по шахматной доске, которые после «прореживания» (опускания каждой второй остановки) превращались в маршруты няни. Более тщательный анализ показал, однако, что в угол доски конь попадет с поля, расположенного по диагонали рядом с тем полем, на котором окажется конь, когда покинет угловую клетку. Обе клетки — та, с которой конь отправился в угол, и та, на которую он приземлился, выйдя из угла, — расположены так, что перейти из одной в другую ходом няни решительно невозможно.

«Так, — пишет Голомб, — развеялась мечта легко и просто извлекать кругосветные маршруты няни из маршрутов коня».

Вторая задача Голомба — о максимальном числе «нянек, оставляющих дитя без присмотра», — решается так же, как аналогичная задача о расстановке максимального числа не атакующих друг друга коней. Поскольку

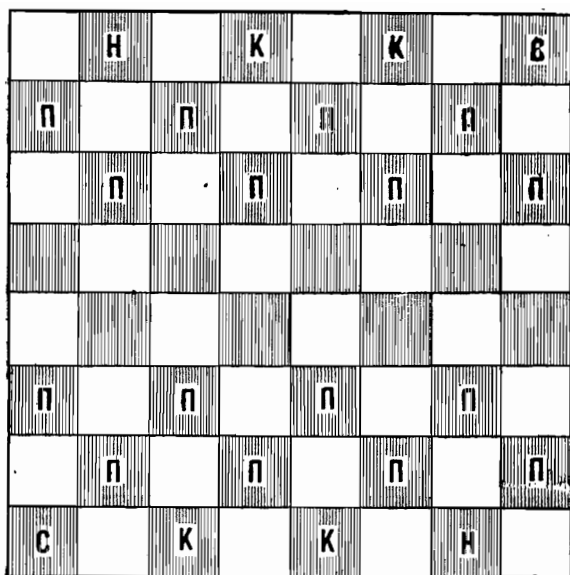


Рис. 176. Расстановка фигур перед началом игры в «шашматы» Голомба.

ломаная, обходящая ходом няни все черные клетки шахматной доски, существует, максимальное число нянь, из которых любые две не угрожают друг другу, равно 16 — числу вершин ломаной, взятых через одну. В зависимости от того, какие вершины ломаной оставлены, а какие опущены, существуют два решения: одно с 16 четными вершинами, другое — с 16 нечетными вершинами. На шахматной доске выбранные клетки образуют квадратную решетку, узлы которой занимают половину полей одного цвета. Если клетки ступенчатой доски раскрасить в шахматном порядке, то выбранные клетки совпадут либо со всеми черными, либо со всеми белыми клетками.

Для тех, кого заинтересуют шашматы Голомба, приводим расположение фигур в начале партии (рис. 176). Восемь пешек (П) ходят так же, как шашки. Два короля (К) ходят так же, как король в шахматах, слон (С) — как шахматный слон, а как ходит няня (Н), мы уже объясняли. Так же как и конь, няня может перепрыгивать через фигуры, стоящие между начальным и

конечным полями ее очередного хода. Взятие пешек и королей происходит так же, как в шашках (перепрыгиванием через жертву), взятие слона и няни — так же, как в шахматах (занятием поля, на котором стоит слон или няня). Брать пешки и королей противника обязательно. Если одновременно имеется возможность взять фигуру противника по «шашечному» и по «шахматному» образцу (то есть одновременно под ударом находятся пешка или король противника и его слон или няня), то игроку предоставляется право выбора, какой из двух возможностей воспользоваться. Взятие слона и няни сулит большие преимущества в дальнейшем развитии партии и потому предпочтительнее. Пешка, дошедшая до последней горизонтали, обязательно превращается (по выбору игрока) в одну из трех фигур, в короля, слона или в няню.

Играющие делают ходы по очереди. Цель игры для каждого игрока — взять обоих королей противника. Проигравшим считается тот, кто первым лишится двух своих королей.

«Поэтому чрезвычайно важно решить, — пишет Голломб, — стоит ли превращать пешку, дошедшую до последней горизонтали, в короля (что обеспечивает лучшие шансы в защите) или же в слона или няню (что повышает шансы в нападении). Как и в шашках, игроку, у которого все фигуры при очередном ходе оказываются запертыми, засчитывается поражение».

ГЛАВА 25

ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

1. Перед вами одна из тех редких поистине блестящих головоломок, которые решаются с одного взгляда, если (и это чрезвычайно важное условие!) вы сумеете найти правильный подход к их решению. Беда лишь

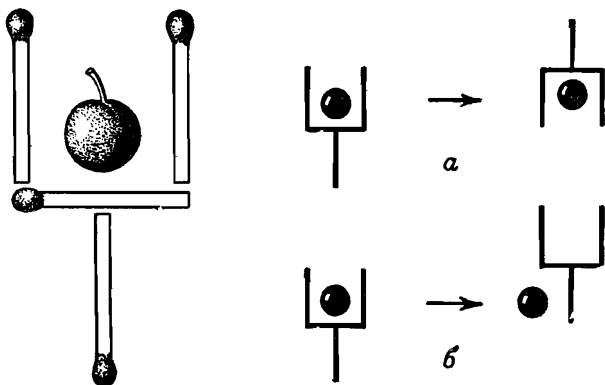


Рис. 177. Головоломка с четырьмя спичками.

в том, что найти ключ к решению не так-то просто: хитроумные составители подобного рода задач умудряются сформулировать их условия столь искусно, что вы, сами того не замечая, попадаете в расставленную ловушку и направляете свою мысль по неверному пути.

Известны случаи, когда люди с высокоразвитым интеллектом, в течение 20 минут безуспешно пытались решить задачу, о которой сейчас пойдет речь, после чего заявляли, что она вообще не имеет решения.

Расположите четыре спички так, как показано на рис. 177, слева. Сумеете ли вы, передвинув две и только две спички, переместить бокал так, чтобы вишня оказалась *снаружи*. Бокал может переворачиваться вверх дном, подниматься или опускаться, но непременно должен сохранять свою форму. На рис. 177, а показано, каким образом, передвинув две спички, можно перевернуть бокал вверх дном.

Интересующую нас задачу таким способом решить нельзя, поскольку и после того, как бокал опрокинут, вишня остается *внутри* него. На рис. 177, б показано, как можно извлечь вишню из бокала, однако наша задача по-прежнему остается нерешенной, поскольку при этом приходится передвинуть не две, а три спички.

2. Определить наибольшие размеры куба, который можно полностью завернуть в выкройку, вырезанную из листа бумаги, имеющего форму квадрата со стороной

в 3 см? (Выкройка должна быть связной, то есть не распадаться на отдельные куски.)

3. Каждый член «Клуба ЛП» принадлежит либо к числу правдолюбцев, имеющих похвальное обыкновение правдиво отвечать на любой заданный им вопрос, или лжецов по призванию, безудержно лгущих, о чем бы их ни спрашивали. Когда я впервые посетил этот клуб, его члены (среди которых не было ни одной женщины) сидели за круглым столом и завтракали. Поскольку отличить по внешнему виду правдолюбца от лжеца решительно невозможно, я спросил у каждого члена клуба по очереди, к какой из двух категорий он принадлежит. Собранные мной сведения оказались не особенно обнадеживающими: каждый член клуба стремился уверить меня в том, что он правдолюбец! Я решил предпринять еще одну попытку и на этот раз спросить у каждого члена клуба, кто сидит за столом рядом с ним: лжец или правдолюбец. К моему удивлению, все члены клуба в один голос заявили, что сосед слева — лжец.

Вернувшись домой и разбирая заметки, сделанные за завтраком в клубе, я обнаружил, что забыл записать, сколько человек сидело за столом. Позвонив президенту клуба, я узнал, что членами клуба состоят 37 человек. Положив телефонную трубку, я понял, что полагаться на эту цифру было бы крайне опрометчиво, поскольку мне неизвестно, кто избран президентом клуба — лжец или правдолюбец. Поразмыслив, я решил позвонить секретарю клуба, сидевшему за завтраком рядом с президентом.

— Как ни прискорбно, — сообщил мне секретарь, — но должен сказать вам, что наш президент — безудержный лжец. В действительности за столом сидело 40 человек.

Кому мне было верить — президенту или секретарю? И вдруг я понял, что установить истину совсем просто.

Как на основе всех полученных сведений определить число людей, сидевших за столом?

4. Два брата получили в наследство стадо овец. Продав стадо, они выручили за каждую овцу столько долларов, сколько овец было в стаде. Желая упростить последующие расчеты, братья обменяли все деньги на де-

сятидолларовые купюры. Лишь небольшую сумму (меньше 10 долларов) им пришлось взять серебряными монетами достоинством в 1 доллар. Разложив купюры и монеты на столе, братья приступили к дележу наследства. Каждый из братьев по очереди брал по десятидолларовой купюре до тех пор, пока на столе остались лишь серебряные монеты.

— Так нечестно, — сказал младший из братьев старшему. — Ты взял первую и последнюю купюры. Следовательно, тебе досталось на 10 долларов больше, чем мне.

Чтобы хотя бы частично восполнить ущерб, старший брат предложил младшему взять все серебро, но младший был по-прежнему недоволен.

— Ты дал мне меньше 10 долларов, — заявил он, — и поэтому должен дать мне еще.

— Правильно, — согласился старший брат. — Я выпишу тебе чек на такую сумму, что наши доли станут одинаковыми.

Так он и сделал.

Не могли бы вы сказать, на какую сумму выписал чек старший брат?

Сколь ни скудными могут показаться сообщенные сведения, тем не менее они позволяют однозначно решить задачу.

5. Квадрат, расчерченный на 9 клеток, на котором обычно играют в крестики и нолики, можно рассматривать как конфигурацию из 9 клеток, расположенных в 8 рядов (3 вертикали, 3 горизонтали и 2 диагонали) по 3 клетки в каждом ряду. Но 9 клеток можно расположить и в 9 и даже в 10 рядов так, что в каждом ряду окажется по 3 клетки. Математик из Глазго Томас О'Бейрн перепробовал все топологически различные конфигурации из 9 рядов с тем, чтобы выяснить, какие из этих конфигураций пригодны для игры в крестики и нолики. Оказалось, что во всех конфигурациях, кроме изображенной на рис. 178, ситуация тривиальна: выигрывает тот, кто делает первый ход.

Для игры в тригекс (так О'Бейрн назвал изобретенную им игру) каждый из игроков должен запастись четырьмя фишками. Делая ходы по очереди, игроки выставляют на кружки по одной фишке. Выигравшим

считается тот, кто первым сумеет занять три кружка, расположенные на одной прямой.

Предположим, что оба игрока в тригекс придерживаются оптимальной стратегии. Что можно сказать в этом случае об исходе игры?

Кто выиграет: первый или второй? А может быть, игра закончится вничью?

Конфигурация О'Бейрна, помимо замечательных топологических и комбинаторных свойств, обладает необычной метрической «особенностью»: какой бы отрезок прямой, проходящей через три кружка, мы не взяли, средний кружок разбивает его на части, длины которых находятся в «золотом» отношении друг к другу.

6. Как-то раз шотландский математик Ч. Ленгфорд наблюдал за тем, как его малолетний сынишка играет разноцветными кубиками. В наборе было по два кубика каждого цвета. Ребенок сложил из кубиков башню. Два красных кубика оказались разделенными одним кубиком, два синих — двумя кубиками и два желтых — тремя кубиками. Обозначив красные кубики цифрой 1, синие — цифрой 2 и желтые — цифрой 3, мы сможем изо-

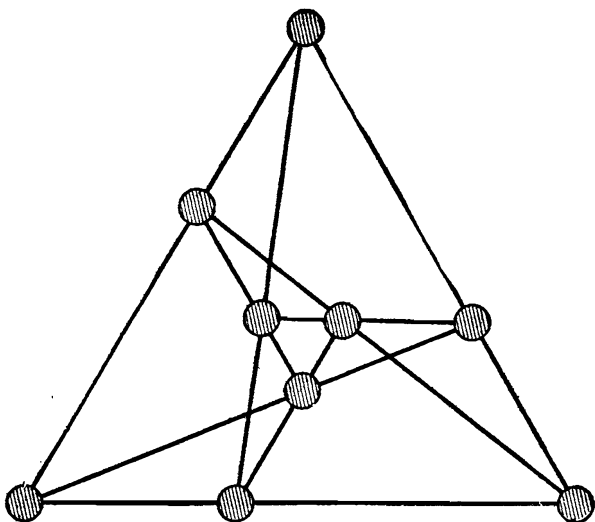


Рис. 178. Конфигурация для игры в тригекс О'Бейрна.

бразить расположение кубиков башни в виде последовательности цифр: 312132.

Это единственное (если не считать последовательности 231213, получающейся при чтении последовательности 312132 в обратном порядке) решение задачи о размещении трех пар цифр, при котором единицы разделены одной цифрой, двойки — двумя цифрами и тройки — тремя цифрами.

Ленгфорд попытался решить ту же задачу для четырех пар цифр и обнаружил, что она также допускает единственное решение. Сумеете ли вы найти это решение?

В общем случае задача Ленгфорда формулируется так.

Имеется два одинаковых упорядоченных набора из n различных предметов каждый. Эти $2n$ предметов требуется расставить в ряд так, чтобы первые предметы наборов были разделены одним предметом, вторые — двумя, третьи — тремя и т. д.

Решения задачи Ленгфорда при $n = 5$ и $n = 6$ не существует. Известно 26 различных решений при $n = 7$, 150 решений — при $n = 8$, 17 792 решения — при $n = 11$ и 108 144 решения — при $n = 12$. Решения существуют лишь при n , кратных 4 или дающих при делении на 4 остаток, равный 3. Подсчет числа различных решений производился с помощью ЭВМ. Общая формула, позволяющая указывать число различных решений для данного n (если таковые существуют), не известна.

7. Эта геометрическая задача решается легко и просто, если взяться за нее «с того конца». Вот как она формулируется.

Имеются два квадрата: один — со стороной 3 см, другой — со стороной в 4 см (рис. 179). Вершина D большего квадрата совпадает с центром меньшего квадрата. Большой квадрат поворачивают вокруг вершины D до тех пор, пока точка B пересечения сторон квадратов не разделит сторону AC в отношении 2:1. За сколько времени вы сумеете вычислить площадь заштрихованной фигуры, по которой перекрываются оба квадрата?

8. Султан Фертилии, желая увеличить численность женского населения страны, дабы его подданным было легче пополнять свои гаремы, издал указ, по которому

женщинам разрешалось иметь детей лишь до рождения первого сына.

— Повинуясь моему указу, — пояснил свой замысел владыка Фертилии, — женщины не смогут иметь по несколько сыновей. У них может быть четверо дочерей и один сын, десять дочерей и один сын, на худой конец, даже просто единственный сын, но никогда два, а тем более три сына!

Ясно, что соотношение между численностью женского и мужского населения Фертилии на благо мужчин должно измениться в пользу женщин.

Прав ли султан Фертилии? Нет, хотя в своем заблуждении он отнюдь не одинок: многие, не будучи владыками Фертилии, придерживаются того же ошибочного мнения.

Рассмотрим всех матерей, имеющих лишь по одному ребенку. У половины из них — сыновья, у половины — дочери. Матери дочерей, воспользовавшись своим правом, производят на свет по второму ребенку, причем соотношение мальчиков и девочек среди «вторых» детей снова будет 1:1. Счастливицы, родившие девочек, получают право на прибавление семейства и, воспользовавшись им, производят на свет третьего ребенка.

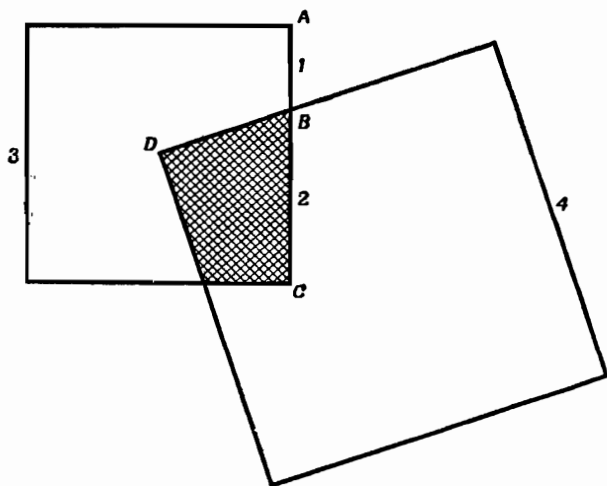


Рис. 179. Задача о перекрывающихся квадратах.

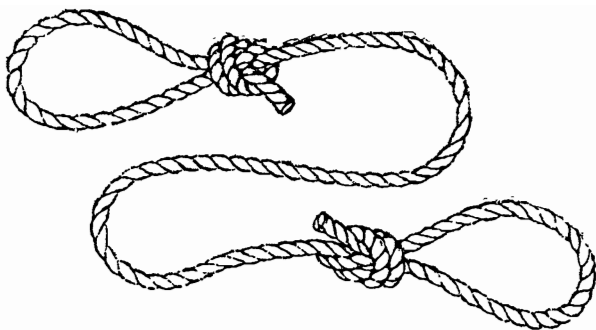


Рис. 180. Головоломка с завязыванием узла.

И снова мальчиков «третьего порядка» будет столько же, сколько девочек. Таким образом, независимо от числа «раундов» и числа детей у каждой матери соотношение между мальчиками и девочками неизменно остается равным 1 : 1.

Отсюда тотчас же возникает следующая вероятностная задача. Предположим, что в Фертилии неукоснительно соблюдается воля султана, все родители обладают завидным долголетием, в достаточной мере сохраняют способность к деторождению и заботятся о прибавлении семейства вплоть до появления первого сына (после чего мать семейства утрачивает право на рождение детей). При рождении очередного ребенка он с вероятностью $\frac{1}{2}$ может быть девочкой и с той же вероятностью мальчиком. Спрашивается, сколько детей в среднем будет у каждой фертилийской матери по истечении достаточно большого промежутка времени?

9. Возьмите кусок бельевой веревки длиной примерно в полтора метра и концы его свяжите в петли (рис. 180). Размеры петель должны быть такими, чтобы в них можно было продеть руку. Можно ли, надев одну петлю на левую, а другую на правую руку, завязать веревку простым узлом?

С веревкой разрешается проделывать любые манипуляции. Нельзя лишь снимать петли с рук, разрезать веревку или ослаблять узлы, которыми были затянуты петли.

ОТВЕТЫ

1. Головоломка со спичками решается так, как показано на рис. 181.

2. В условии задачи ничего не говорится о том, заходят ли друг на друга части выкройки, в которую завернут куб, или нет, поэтому мы рассмотрим обе возможности.

Если выкройка подогнана точно и над каждой точкой завернутого в нее куба оказывается лишь один слой бумаги (иначе говоря, части выкройки нигде не перекрываются), то самый большой куб, какой только можно завернуть в выкройку, имеет длину ребра, равную $\frac{3}{4} \sqrt{2}$ см.

Форма выкройки изображена на рис. 182. Пунктиром показаны линии сгиба.

Если выкройка сделана «с запасом» так, что части ее перекрываются (условию задачи такое предположение не противоречит), то максимальные размеры заворачиваемого в нее куба... больше, чем в случае точно подогнанной выкройки! Более того, пересоставляя (например, вырезая в одном месте и подклеивая в другом) части квадратного листа, можно построить выкройку, способную служить оберткой кубу с поверхностью, сколь угодно мало отличающейся от площади квадрата, из которого вырезают выкройку.

Один из способов получения более «емкой» выкройки состоит в том, что из квадратного листа бумаги вырезают «покрышки» для двух противоположных граней куба, а боковую поверхность куба заворачивают в ленту, склеенную из остатков квадратного листа с таким расчетом, чтобы части ленты как можно меньше заходили друг на друга. По словам автора этого решения, «предположив, что запас терпения у нас неограниченно велик, а толщина листа бумаги бесконечно мала, мы сумеем построить таким способом выкройку, в которую можно завернуть куб, сколь угодно мало отличающийся от заветного предела — куба с ребром в $\sqrt{\frac{3}{2}}$ см».

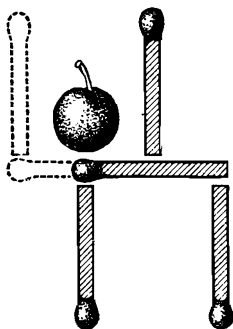


Рис. 181. Решение головоломки с четырьмя спичками.

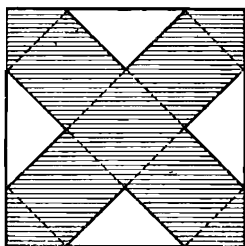


Рис. 182. Решение задачи о кубе (части выкройки не перекрываются).

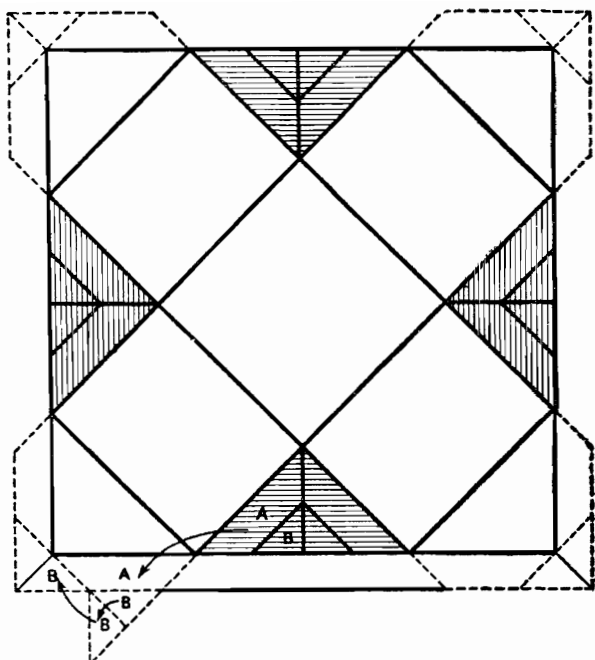


Рис. 183. Обертка для куба максимальных размеров.

Другой способ решения той же задачи состоит в построении увеличенной копии выкройки, изображенной на рис. 182 и позволяющей заворачивать в один слой (без наложения частей) куб максимальных размеров. Способ построения выкройки показан на рис. 183. Увеличив центральный квадрат, мы тем самым увеличиваем примыкающие к нему прямоугольники и угловые треугольники. Заштрихованные «уголки», разрезанные надлежащим образом, используются для наращивания угловых треугольников.

Поскольку площадь участков выкройки, налегающих друг на друга, можно сделать сколь угодно малой, этот метод позволяет получать выкройки, способные оборачивать лишь кубы, длина ребра которых в пределе стремится к $\sqrt[3]{2}$ см.

3. Поскольку каждый из сидящих за столом либо лжец, либо правдолюбец и каждый утверждает, что сидящий слева от него лжец, число сидящих за столом должно быть четно, причем лжецы и правдолюбцы должны чередоваться. (Если бы число сидящих за столом было нечетно, то при любом способе размещения всегда найдется по крайней мере один член клуба, который будет утверждать, что его сосед слева правдолюбец.) Таким образом, когда президент сообщил, что в списке членов клуба числится 37 человек, он лгал. Отсюда следует, что секретарь, сидевший за столом рядом

с президентом, должен быть правдолюбом. Поэтому названное им число членов клуба соответствует действительности.

Итак, «Клуб ЛП» насчитывает 40 человек.

4. Поскольку за каждую овцу братья получили столько долларов, сколько овец в стаде, общая сумма их выручки составила n^2 долларов, где n — число овец в стаде. Эту сумму они обменяли в банке на десятидолларовые банкноты и несколько серебряных долларов (число монет меньше 10).

Поскольку братья брали десятидолларовые купюры по очереди и первая и последняя купюры достались старшему брату, число десятков в n^2 должно быть нечетным. Квадрат любого числа, кратного 10, содержит четное число десятков. Следовательно, последняя цифра числа n (n — число овец в стаде) должна быть такой, что квадрат ее содержит нечетное число десятков. Этому условию удовлетворяют лишь две цифры: 4 и 6 (их квадраты равны соответственно 16 и 36). Оба квадрата оканчиваются цифрой 6, следовательно, число n^2 (сумма денег, вырученных братьями от продажи стада) также оканчивается цифрой 6. Таким образом, после обмена денег в банке у братьев было 6 серебряных долларов. После того как младший брат взял себе серебряные доллары, старший остался ему должен 4 доллара. Следовательно, чтобы уровнять полученные доли наследства, старший брат выписал младшему чек на 2 доллара.

Любопытно отметить, что многие сильные математики, успешно доведя решение задачи почти до конца, упускали из виду, что чек должен быть выписан не на 4, а всего лишь на 2 доллара.

5. При игре в тригекс победу одержит тот из игроков, кто делает первый ход, но лишь в том случае, если, открывая игру, он занимает один из черных кружков (рис. 184). Независимо от первого хода противника первый игрок всегда может сделать свой второй ход так, что ответный (второй) ход противника будет заранее предопределен. Третьим ходом первый игрок занимает такой кружок, что на доске образуются сразу два ряда, каждый из которых содержит по две его фишки. На следующем, четвертом, ходу первый игрок одерживает победу.

Если, открывая игру, первый игрок занимает один из угловых кружков, то второй игрок может свести партию вничью, заняв другой угловой кружок. Если же первый игрок, начиная игру, занимает одну из вершин равностороннего треугольника, расположенного внутри большого треугольника, то второй игрок, заняв ответным ходом другую вершину того же равностороннего треугольника, может обеспечить себе ничью.

6. Единственное (с точностью до чтения его в обратном порядке)

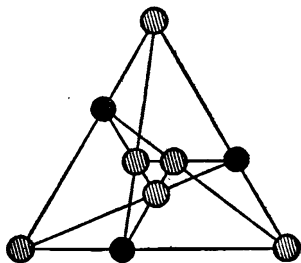
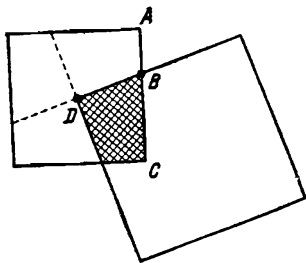


Рис. 184. Выигрышные ходы для первого игрока в тригекс.

Рис. 185. Решение задачи о перекрывающихся квадратах.



решение задачи Ленгфорда с четырьмя парами цифр имеет вид:
4 1 3 1 2 4 3 2.

7. Продолжим стороны большего квадрата до пересечения со сторонами меньшего квадрата (рис. 185). Нетрудно видеть, что меньший квадрат при этом разделится на четыре конгруэнтные части, поскольку площадь всего квадрата составляет 9 см^2 , площадь заштрихованной части составляет $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ см}^2$. Любопытно, что площадь заштрихованной фигуры, по которой перекрываются квадраты, не зависит от положения большого квадрата (разумеется, если его вершина D неизменно совпадает с центром меньшего квадрата). Та часть условия задачи, в которой говорится о том, что точка пересечения B сторон квадрата делит AC в отношении $2:1$, совершенно излишня и введена лишь для того, чтобы «сбить с толку» читателей.

8. Пусть n — число матерей в Фертилии за весь рассматриваемый промежуток ее истории. Половина матерей имеют первенца сына, что составляет $\frac{n}{2}$ детей. Половина остальных матерей ($\frac{n}{4}$) имеет двух детей (младший ребенок сын), что дает прибавку к общему числу детей в $2 \cdot \frac{n}{4}$ ребенка. У $\frac{n}{8}$ матерей Фертилии по 3 ребенка, что составляет $3 \cdot \frac{n}{8}$ и т. д. Полное число детей равно сумме ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$, умноженной на n . При вычислении среднего числа детей, приходящихся на одну мать, эту величину необходимо разделить на n . Таким образом, среднее число детей у матерей Фертилии при n , стремящемся к бесконечности, стремится к сумме ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$.

Вычислить ее можно с помощью следующего простого приема. Разделим каждый член ряда на 2 и вычтем получившийся ряд из исходного. В результате мы придем к бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, сумма которой, очевидно, равна 1.

Поскольку сумма прогрессии составляет лишь половину суммы ряда, последняя равна 2. Итак, мы приходим к несколько парадоксальному выводу: в среднем у каждой фертилийской матери будет лишь 2 ребенка.

Существует и другое, более краткое, решение той же задачи. Поскольку известно, что численность мальчиков относится к численности девочек, как $1:1$, мы заключаем, что при рассмотрении достаточно продолжительного периода истории Фертилии мальчиков будет столько же, сколько и девочек. Каждая мать имеет лишь одного сына. Следовательно, в среднем у нее должна быть и одна дочь. Таким образом, в среднем на каждую мать Фертилии приходится по два ребенка.

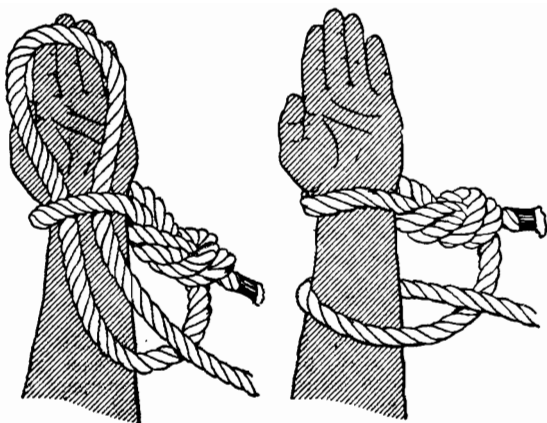


Рис. 186. Решение головоломки с узлом.

9. Чтобы завязать простым узлом веревку, один конец которой привязан к вашей левой, а другой — к правой руке, проденьте среднюю часть сложенной вдвое веревки под петлю, охватывающую вашу левую кисть (рис. 186). Надень веревку на левую руку, протяните ее назад. Вербка охватит вашу левую руку так, как показано на рис. 186, справа. Снимите теперь нижнюю петлю с левой руки. Как только вы пронесете петлю над кистью левой руки, веревка окажется завязанной простым узлом.

Продев сложенную вдвое веревку под петлю на левой руке, перевернув ее на пол оборота вправо и лишь затем надев вновь образовавшуюся петлю на левую руку, вы получите прямой узел.

Если сложенную вдвое веревку сначала продеть сквозь кольцо, а затем проделать все манипуляции, необходимые для завязывания любого из узлов, то кольцо окажется «привязанным»: снять его с веревки, не развязывая узел, будет невозможно.

ГЛАВА 26

ТЕОРИЯ ИГР В ИГРАХ

Некоторые результаты теории игр, красивой и быстро развивающейся отрасли современной математики, были предвосхищены в начале 20-х годов этого столетия в работах французского математика Эмиля Бореля, но основ-

ная теорема теории игр — теорема о минимаксе — была доказана лишь в 1926 г. Джоном фон Нейманом. Теорема о минимаксе послужила краеугольным камнем в величественном и прекрасном фундаменте теории игр, заложенном почти исключительно его трудами. Вышедшая в 1944 г. книга «Теория игр и экономическое поведение»*, написанная Нейманом в сотрудничестве с Оскаром Моргенштерном, оказала глубокое влияние на широкие круги экономистов. За время, прошедшее с тех пор, теория игр превратилась в фантастический сплав алгебры, геометрии, теории множеств и топологии, а ее применения охватывают конфликтные ситуации в различных областях человеческой деятельности, будь то экономика, военное дело или борьба фирм-конкурентов. Предпринимались попытки применить теорию игр и ко всем остальным разновидностям конфликтных ситуаций.

Обширную часть теории игр составляет так называемая теория игр двух участников с нулевой суммой. Термин этот означает, что конфликтная ситуация возникает между двумя участниками (или, если число участников больше, между двумя коалициями) и проигрыш одного из участников служит выигрышем другому. В этой главе мы познакомим читателей с интересной карточной игрой для двух участников с нулевой суммой, придуманной известным специалистом по теории игр Руфусом Айзексом, но сначала нам необходимо овладеть основными понятиями теории игр.

Начнем с тривиальной игры. Участники ее A и B одновременно выбрасывают один или два пальца, после чего B уплачивает A столько долларов, сколько пальцев выбросили A и B , вместе взятые. Шансы на выигрыш обоих участников игры, очевидно, не одинаковы, поскольку игрок A всегда выигрывает. Как следует играть A , чтобы его выигрыш был как можно большим, и как следует играть B , чтобы его проигрыш был как можно меньшим? Во многих играх для каждого из участников существуют многочисленные и довольно сложные стратегии, но в данном случае у каждого из игроков имеются лишь две возможности: он может выбросить либо один, либо два пальца. Поэтому «матрицу

* Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, М., изд-во «Наука», 1970.

В



Рис. 187. Матрица платежей тривиальной игры.

А

	2	3
	3	4

платежей» для нашей тривиальной игры можно изобразить в виде квадрата 2×2 (рис. 187). Две стратегии игрока А условно изображены слева, две стратегии игрока

В — сверху. В клетках, стоящих на пересечении строк и столбцов указано, сколько долларов игрок В уплачивает игроку А при соответствующей комбинации стратегий. Так, если игрок А выбрасывает один палец, а игрок В — два пальца, то В уплачивает А сумму, стоящую в клетке на пересечении первой строки и второго столбца, то есть три доллара. (Платежи всегда указываются как суммы, выплачиваемые игроком В игроку А. В тех случаях, когда в действительности В получает деньги от А, считается, что В выплачивает А отрицательную сумму денег.)

Выбросив один палец, игрок А может выиграть не меньше 2 долларов, выбросив два пальца, — не меньше 3. Наибольший из этих минимальных выигрышей (3 доллара, указанные в клетке, стоящей в левом нижнем углу матрицы) называется *максимином* (максимумом минимумов).

Выбросив один палец, игрок В может проиграть не больше 3 долларов, выбросив два пальца, — не больше четырех долларов. Наименьший из этих максимальных проигрышей (им снова оказываются 3 доллара в нижнем левом углу матрицы платежей) называется *минимаксом* (минимумом максимумов). Если (как в данном случае) клетка, содержащая максимин, совпадает с клеткой, содержащей минимакс, игра называется строго определенной, а о клетке говорят, что она содержит *седловую точку* игры. Оптимальная стратегия для каждого игрока определяется соответственно той строкой или столбцом, которые содержат седловую точку. Игрок А, выбрасывая два пальца, максимизирует свой выигрыш; В, выбрасывая один палец, минимизирует свой проиг-

рыш. Если каждый из игроков будет придерживаться оптимальной стратегии, то A будет получать выигрыш в 3 доллара. Эта величина называется *ценой игры*. Придерживаясь оптимальной стратегии, игрок обеспечивает себе получение платежа (быть может, отрицательного), который равен цене игры или превосходит ее. Избрав неоптимальную стратегию, игрок всегда может столкнуться с такой стратегией противника, при которой получаемый им платеж будет меньше цены игры. В рассматриваемом нами случае игра столь тривиальна, что оптимальные стратегии обоих игроков очевидны.

Седловая точка существует не у всех игр. Например, если мы превратим нашу тривиальную игру в разновидность игры в чет и нечет, ее матрица платежей станет такой, как показано на рис. 188. Когда оба игрока выбрасывают одинаковое число пальцев, доллар выигрывает игрок A . Когда один из игроков выбрасывает два пальца, а другой лишь один палец, доллар выигрывает игрок B . Для игрока A максимум равен -1 , для B минимум равен 1 . Таким образом, при игре в чет и нечет седловой точки не существует. Отсюда следует, что ни одна из стратегий не является предпочтительной ни для A , ни для B . Было бы глупо, если бы A вздумал, например, всегда выбрасывать два пальца, так как отнюдь не исключено, что игроку B пришло бы в голову выбрасывать один палец. Чтобы повысить свои шансы на выигрыш, игроки A и B должны в определенных пропорциях смешивать обе стратегии. Определить оптимальное соотношение между пропорциями трудно, но симметрия игры в чет и нечет наводит на мысль, что оптимальной пропорцией служит отношение $1:1$.

Здесь мы подходим к необычайно важному вопросу теории игр: чтобы смешанная стратегия была эффективной, выбор между «чистыми» стратегиями должен производиться случайным образом. Смешанная стратегия, основанная не на случайном выборе, таит в себе опасность проигрыша для того, кто ею будет пользоваться. Предположим, что игрок A решил придерживаться смешанной стратегии, выбрасывая попеременно то один, то два пальца. Раскрыв нехитрую закономерность в поведении своего противника, B легко обеспечит себе выигрыш. Разумеется, ничто не мешает A вести более тонкую смешанную стратегию, но и тогда игрок B

В

А




		
	1	-1
	-1	1

Рис. 188. Матрица платежей игры в чет и нечет.

В

А




		
	1	-2
	-7	8

Рис. 189. Матрица платежей игры Р. Айзекса «Угадайка».

имеет шанс, разгадав ее, обеспечить себе верный выигрыш. Любопытно, что даже в тех случаях, когда А пытается выбирать смешанную стратегию случайным образом, он подсознательно вносит в нее определенную закономерность. Когда один из создателей теории информации Клод Шеннон и его коллега Д. В. Хагельберджер построили две машины для игры в чет и нечет, оба автомата, играя с людьми, избравшими стратегию нажатием одной из двух кнопок, неизменно одерживали победу над своими противниками. Автоматы анализировали ходы противника, обнаруживали скрытую в них закономерность, носящую вполне детерминированный, а не случайный характер, и соответственно строили свою стратегию. Автоматы Шеннона и Хагельберджера анализировали игру противника различными методами, поэтому их можно было заставлять играть друг с другом, что они и делали «под громкие восторженные крики присутствовавших жителей, заключающих пари относительно того, какая из машин выигрывает».

Единственный способ понизить до нуля свои платежи при игре с такими автоматами — это воспользоваться при выборе стратегии простейшим «датчиком случайных чисел», например, подбрасывать монетку и выбирать кнопку в зависимости от исхода бросания.

Любопытным примером игры с весьма нетривиальной смешанной стратегией служит карточная игра, матрица платежей которой изображена на рис. 189. У игрока А имеется «двулика» карта: туз любой из чер-

ных мастей, склеенный рубашкой с восьмеркой красной масти. У игрока *B* также имеется двусторонняя карта: красная двойка, склеенная рубашкой с черной семеркой. Игроки выбирают одну из сторон своих необычных карт и одновременно показывают ее противнику. Игрок *A* выигрывает, если цвета выбранных половинок совпали, игрок *B* выигрывает, если цвета оказались различными. В том и в другом случаях сумма платежа в долларах равна значению карты, показанной победителем.

На первый взгляд может показаться, что оба игрока имеют равные шансы на выигрыш (или, говоря более точно, что игра имеет нулевую сумму), поскольку сумма выигрышей *A* ($8 + 1 = 9$) совпадает с суммой выигрышей *B* ($2 + 7 = 9$). В действительности более высокие шансы на выигрыш имеет игрок *B*: при надлежащем выборе смешанной стратегии он может выиграть в среднем по 1 доллару на каждые три игры. Поскольку каждое из чисел 1 или 8, стоящих на побочной диагонали, больше любого из двух остальных платежей, мы сразу заключаем, что седловой точки не существует. (Игра с матрицей платежей 2×2 имеет седловую точку в том и только в том случае, если по крайней мере одно из чисел на главной и побочной диагоналях совпадает с одним из двух остальных чисел.) Следовательно, игроки должны избирать смешанные стратегии.

Приведем один из способов, позволяющих вычислять смешанную стратегию для каждого игрока, не останавливаясь на обосновании его правильности. Рассмотрим стратегию игрока *A*, соответствующую верхней строке матрицы платежей. Вычтем второе число из первого: $1 - (-2) = 3$, и сделаем то же самое с элементами второй строки: $-7 - 8 = -15$. Отбросив минус, образуем дробь, числитель которой равен второму, а знаменатель первому числу: $^{15}/_3 = ^5/_1$. Дробь эта означает, что в оптимальной для *A* смешанной стратегии первая и вторая строки должны быть представлены в отношении 5:1, то есть игрок *A* должен показывать туз в 5 раз чаще, чем семерку. Удобным «датчиком случайных чисел» для *A* может служить обычная игральная кость. Туза *A* может, например, показывать, если выпадет 1, 2, 3, 4 и 5, а семерку, — если выпадет 6. Разумеется, показаний «датчика» противник видеть не должен, иначе он сможет парировать ходы.

Оптимальная стратегия для игрока B вычисляется аналогично. Из чисел, стоящих в первой строке, вычтем числа, стоящие во второй. Для первого столбца разность составит 8, для второго — 10. Отбросив минус, образуем дробь, в числителе которой стоит второе, а в знаменателе первое число: $10/8 = 5/4$. Дробь эта означает, что в оптимальной смешанной стратегии игрок B должен показывать семерку пять раз на каждые четыре раза, когда он показывает двойку. В качестве «датчика случайных чисел» B может воспользоваться таблицей однозначных случайных чисел и показывать семерку всякий раз, когда ему встретится 1, 2, 3, 4 или 5, и двойку, когда ему встретится 6, 7, 8 или 9.

Вычислить цену игры (средние размеры платежа, выплачиваемого игроком B игроку A) можно с помощью простой формулы. Если элементы матрицы платежей 2×2 , стоящие в первой строке, обозначить (по порядку слева направо) a и b , а элементы второй строки c и d , то цена игры будет определяться выражением

$$\frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

В рассматриваемом нами случае цена игры равна $-1/3$. Иначе говоря, игрок A , избрав оптимальную стратегию, в среднем проигрывает по $1/3$ доллара на каждую игру. Игрок B , следуя своей оптимальной стратегии, в среднем выигрывает по $1/3$ доллара на каждую игру. Тот факт, что каждая матричная игра независимо от того, есть ли у нее седловая точка или нет, имеет цену и цена игры может быть достигнута каждым игроком с помощью по крайней мере одной оптимальной стратегии, составляет содержание знаменитой теоремы о минимаксе, впервые доказанной Нейманом. В правильности ее читатели могут убедиться, составляя матрицу платежей, вычисляя цену игры и находя оптимальные стратегии для игроков при различном выборе карт (иначе говоря, рассматривая семейство матричных карточных игр, однотипных с описанной, но отличающихся от нее тем, что рубашками склеены другие пары карт).

В большинстве игр с двумя участниками, разыгрываемых на специальных досках (например, в шашках и шахматах), участники по очереди делают ходы до тех пор, пока либо один из них не выиграет, либо партия

не закончится вничью. Поскольку число возможных комбинаций чрезвычайно велико, а число оптимальных стратегий принимает астрономические значения, матрица платежей для таких игр имеет слишком большие размеры, чтобы ее можно было выписать в явном виде. Даже для столь простой игры, как крестики и нолики, потребовалась бы матрица, содержащая десятки тысяч элементов, каждый из которых равен 1, -1 или 0. Если игра конечна (каждый участник может совершить лишь конечное число ходов и перед каждым ходом имеет лишь конечное число возможных выборов) и с полной информацией (оба игрока в любой момент располагают всеми сведениями о предыстории игры — всех ходах, предшествовавших очередному ходу), то можно доказать (впервые это было сделано Нейманом), что игра имеет седловую точку. Теорема Неймана означает, что существует по крайней мере одна оптимальная стратегия, всегда обеспечивающая выигрыш первому или второму участнику игры, и что у обоих участников имеются чистые стратегии, следуя которым они всегда могут свести игру вничью.

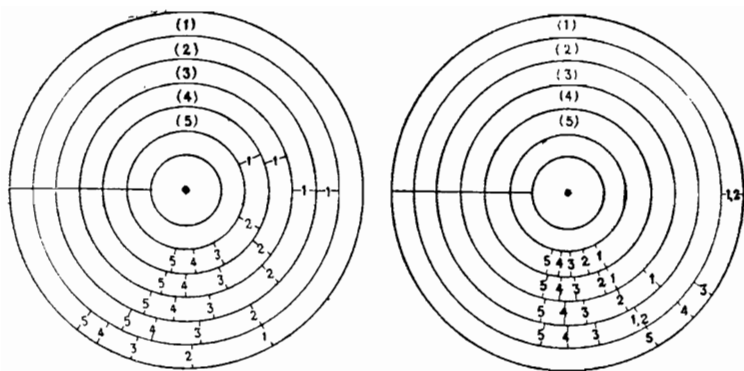
Почти во всех карточных играх участники делают ходы по очереди, но не располагают полной информацией. Одинаковая рубашка карт по существу и предназначена для того, чтобы скрывать от игрока определенную часть информации. В играх с неполной информацией оптимальные стратегии смешанные. Это означает, что в большинстве или даже во всех ходах игрок может принять оптимальное решение лишь с той или иной вероятностью и цена игры представляет собой средний выигрыш максимизирующего участника при очень большом (строго говоря, при бесконечно большом) числе сыгранных партий. Например, при игре в покер оптимальной является смешанная стратегия, хотя сама игра, так же, как шашки и шахматы, столь сложна, что полностью проанализировать удалось лишь ее существенно упрощенные варианты. Карточная игра Айзекса, названная его дочерью Эллен «Угадайкой» замечательна тем, что представляет собой игру с неполной информацией, достаточно усложненную «блефом», чтобы было интересно играть, и в то же время достаточно простую, чтобы она допускала полный анализ. Играют в «Угадайку» вдвоем, делая ходы по очереди.

Для игры в «Угадайку» необходимо взять одиннадцать игральных карт от туза (значение которого считается равным 1) до валета (которому приписывается значение 11). Отобранные карты тщательно тасуются, после чего из них на удачу извлекается одна карта и кладется на стол вверх рубашкой. (Ни один из игроков не знает, какая именно карта извлечена.) Остальные десять карт раздаются игрокам поровну. Цель игры заключается в том, чтобы угадать, какая карта лежит на столе. Для этого игрокам разрешается задавать друг другу вопросы примерно следующего содержания: «У вас имеется такая-то и такая-то карта?» Каждый игрок должен правдиво отвечать на вопросы противника. Спрашивать об одной и той же карте дважды запрещается.

В любой момент каждый из игроков вместо того, чтобы задавать очередной вопрос, может назвать карту, которая, по его мнению, лежит на столе. Карту переворачивают. Если значение карты угадано верно, назвавший ее участник игры выигрывает, в противном случае ему засчитывается проигрыш. Таким образом, чтобы хорошо играть в «Угадайку», игроку необходимо собрать как можно больше информации (и в то же время сообщить противнику как можно меньше информации) и, улучшив момент, назвать перевернутую карту.

Чтобы ввести в заблуждение противника, каждый игрок — и в этом состоит одна из замечательных особенностей «Угадайки» — время от времени прибегает к блефу, задавая противнику вопрос о карте, которая в действительности находится у него самого в руках. Если бы противники не блефовали, то каждый из них, услышав вопрос об отсутствующей у него карте, мог бы с уверенностью заключить, что только эта карта может лежать на столе, и, назвав ее, выиграть. Таким образом, при игре в «Угадайку» блеф составляет существенную часть стратегии, позволяющей игроку не только держать в тайне собственные карты, но и наводить противника на неверные заключения относительно перевернутой карты.

Если игрок *A*, задав вопрос о какой-то карте, например о валете, получил утвердительный ответ, то оба игрока знают, что у *B* есть эта карта. Поскольку задавать дважды вопрос об одной и той же карте нельзя



Р и с. 190. Диски «датчиков случайных чисел».

Левый диск показывает, когда следует блефовать, правый — когда называть перевернутую карту.

и ясно, что на столе лежит другая карта, игрок *В* откладывает названную карту на стол рубашкой вниз.

Если у игрока *В* нет на руках валета, то он отвечает на вопрос противника отрицательно и ... ставит себя, хотя и не надолго, в затруднительное положение. Игрок *В* может считать, что *А* не блефует. Тогда *В* называет валета и заканчивает игру, выигрывая ее в том случае, если его подозрения подтвердятся. Если *В* не называет валета, а перевернутая карта в действительности является валетом, то *А* (задавший вопрос о валете) заведомо назовет валета на следующем ходу, поскольку ему достоверно известно, что на столе лежит именно валет. Следовательно, если игрок *А* на следующем ходу не назовет валета, то это означает, что на предыдущем ходу он блефовал и что валет находится у него. Поскольку обоим игрокам ясно, где находится валет, он в дальнейшем не играет никакой роли, а потому его можно открыто выложить на стол. Таким образом, по мере развития партии, «взятки» на руках у игроков уменьшаются. Можно считать, что каждый раз, когда на стол выкладывается очередная карта, игроки начинают новую игру с меньшим числом карт.

Мы не можем проводить здесь пробный анализ карточной игры Айзекса и поэтому ограничимся лишь тем, что объясним оптимальные стратегии и укажем, как

ими пользоваться с помощью двух датчиков случайных чисел, имеющих вид вертушек с дисками (рис. 190).

Сыграв $3n$ партий в «Угадайку», — первые n партий без вертушек, в следующих n партиях вертушками разрешается пользоваться только игроку A , в последних n партиях вертушками может пользоваться только игрок B , — читатели смогут на собственном опыте убедиться в эффективности избираемых стратегий. (Если оба игрока пользуются датчиками случайных чисел, игра утрачивает интерес, поскольку исход ее определяется игрой случая.)

Перечертив кружки, изображенные на рис. 190, на ватманской бумаге или на плотном картоне, вырежьте их и насадите на ось. Запуская вертушки, следите за тем, чтобы их «показания» не были видны вашему противнику.

Первая вертушка говорит вам о том, когда следует блефовать. Цифры в скобках означают число имеющихся у вас карт, цифры, нанесенные рядом с делениями, разбросанными по всему диску, — число карт у вашего противника. Предположим, что у вас имеются три карты, а у вашего противника две. Сосредоточив внимание на кольце диска, помеченном цифрой 3 в скобках, запустите вертушку. Если она остановится на той части обода диска, которая при обходе его по часовой стрелке заключена между продолжением деления с цифрой 2 в третьем кольце и горизонтальной прямой, изображенной на рис. 190, слева, вы при очередном ходе блефуете. В противном случае вы задаете противнику вопрос об одной из карт, которые могли бы находиться у него в руках.

Независимо от того, блефуете ли вы или называете карту, ее необходимо выбирать наугад, случайным образом. Для этого вам также понадобится датчик случайных чисел. Проще всего воспользоваться еще одной — третьей — вертушкой, окружность которой разделена на одиннадцать равных частей, которые перенумерованы числами от 1 до 11. Например, если первая вертушка рекомендует вам блефовать и у вас имеются двойка, четверка, семерка и восьмерка, вы запускаете третью вертушку до тех пор, пока она не остановится на одном из этих чисел. Если под рукой нет третьей вертушки, то можно просто выбрать наугад любую из четырех карт.

Вероятность того, что ваш противник сумеет извлечь для себя выгоды из невольно допущенных вами отклонений от случайного распределения карт, столь мала, что ею можно пренебречь. В дальнейшем мы будем предполагать, что третьей вертушки вообще нет.

Вторая вертушка служит для того, чтобы случайным образом выбрать карту для очередного вопроса после того, как на предыдущий вопрос ваш противник ответит отрицательно. На диске этой вертушки цифры в скобках означают число карт, имеющих у вашего противника. Цифры с делениями соответствуют числу карт, оставшихся у вас.

Как и в первом случае, вы выбираете интересующее вас кольцо диска и запускаете вертушку. Если она остановится на части обода диска, заключенной (при обходе обода по часовой стрелке) между соответствующей отметкой и горизонтальной линией, изображенной на рис. 190, справа, вы называете карту, о которой спрашивали на предыдущем ходу. В противном случае ваши действия зависят от того, сколько карт осталось у вашего противника — одна или больше. Если у противника осталась лишь одна карта, то вы называете ту карту, о которой еще не спрашивали. Если число карт у противника больше одной (и у вас имеется по крайней мере одна карта), то вы должны задать очередной вопрос. Чтобы решить, стоит ли вам блефовать, вы запускаете первую вертушку, но кольцо выбираете так, будто число карт у вашего противника стало на одну меньше. Это объясняется тем, что если ваш противник, задавая свой последний вопрос, не блефовал, то ваш отрицательный ответ позволит ему выиграть на следующем ходу. Следовательно, вы должны действовать так, как если бы он блефовал, а игру необходимо было бы продолжать. Но в этом случае карта, о которой спрашивал ваш противник, выходит из игры после вашего отрицательного ответа, хотя ее выкладывают на стол лишь после следующего хода противника.

Помимо перечисленных выше случаев, вы можете называть перевернутую карту лишь при следующих обстоятельствах:

1. Если перевернутая карта вам достаточно известна. (Так может случиться, если на свой честно, без блефа, заданный вопрос вы получите отрицательный ответ и

ваш противник не одержит победы, назвав следующим ходом перевернутую карту. В свою очередь это может случиться, когда у противника не останется ни одной карты.)

2. Если у вас не осталось ни одной карты, а ваш противник сохранил одну или несколько карт. (Действительно, если вы не назовете карту, то ваш противник непременно назовет карту на следующем ходу и одержит победу. Если и у вас, и у противника осталось лишь по одной карте, то безразлично, зададите ли вы вопрос противнику или назовете перевернутую карту: вероятность выиграть равна $\frac{1}{2}$, причем выигрыш достигается и в том, и в другом случае.)

Вероятность выигрыша для игрока, совершающего очередной ход, следующая:

		Число карт у игрока				
		1	2	3	4	5
Число карт у противника	1	0,5	0,667	0,668	0,733	0,75
	2	0,5	0,556	0,625	0,648	0,680
	3	0,4	0,512	0,548	0,597	0,619
	4	0,375	0,450	0,513	0,543	0,581
	5	0,333	0,423	0,467	0,512	0,538

Числа, стоящие сверху у каждого столбца, показывают, сколько карт осталось на руках у игрока. Числа, стоящие слева у каждой строки, показывают, сколько карт осталось у его противника. Если предположить, что в начале игры оба участника при выборе оптимальной стратегии используют датчики случайных чисел, то вероятность выигрыша для первого игрока составит 0,538, то есть немного больше $\frac{1}{2}$. Если первый игрок получает по 1 доллару за каждый выигрыш и 0 долларов за каждый проигрыш, то цена игры в «Угадайку» равна 0,538 доллара, или 538 долларам за 1000 игр.

Рис. 191. «Военная игра»
Р. Айзекса.

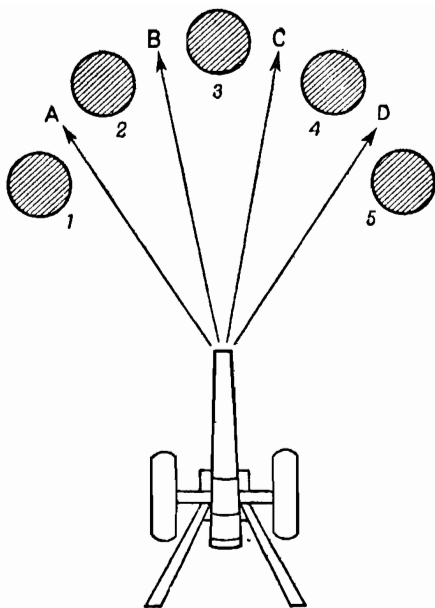
Предположим теперь, что после каждой игры проигравший уплачивает победителю 1 доллар.

Поскольку первый игрок выигрывает в среднем 538 игр из каждой 1000, он получит 538 долларов и уплатит своему противнику 462 доллара. Таким образом, его чистая прибыль составит 76 долларов, или в среднем 0,076 доллара на игру.

При таком способе платежей цена игры равна величине, чуть меньшей восьми центов за игру. Шансы первого игрока значительно возрастают, если второй игрок при определении оптимальной стратегии не обращается к датчикам случайных чисел. При «экспериментальном» сравнении различных способов выбора оптимальной стратегии преимущество, связанное с использованием датчиков случайных чисел, весьма ощутимо.

Для того чтобы читатель мог проверить, сколь глубоко он усвоил изложенные нами элементарные понятия теории игр, мы предлагаем его вниманию следующую сильно упрощенную модель «военного конфликта». На примере этой игры Айзекс, выступая перед военной аудиторией, объяснял, что такое смешанная стратегия.

Один из участников игры — «пехотинец» — может по своему желанию прятаться в любом из пяти окопов, изображенных на рис. 191. Другой участник — «артиллерист» — может стрелять по любому из четырех промежутков *A*, *B*, *C* и *D* между окопами. Солдат считается убитым, если снаряд разрывается рядом с окопом,



в котором он прячется. Например, выстрелив в точку *B*, артиллерист поражает своего противника, если тот находится в любом из окопов 2 или 3.

«Необходимость смешанной стратегии, — пишет Айзекс, — можно понять, проследив за рассуждениями пехотинца, который думает примерно так: „Окопы 1 и 5 артиллерист может поразить лишь одним выстрелом, в то время как все остальные окопы можно поразить двумя способами, попав в точку, расположенную справа или слева от них. Следовательно, мне лучше всего спрятаться либо в окопе 1, либо в окопе 5“».

К сожалению, артиллерист, предвидя подобные рассуждения, может вести огонь только по *A* и *D*. Если пехотинец догадается о намерении артиллериста обстреливать лишь только первый и последний окопы, он спрячется в окопе 3. Но артиллерист снова может одержать верх, прицелившись в точку *B* или *C* и поразив центральный окоп. Таким образом, все попытки перехитрить противника приводят лишь к хаосу. Единственный способ обмануть противника для каждого участника игры состоит лишь в том, чтобы избрать смешанную стратегию.

Предположим, что платеж равен 1 в том случае, если артиллеристу удастся поразить окоп с пехотинцем, и 0, если пехотинец остается в живых. Тогда цена игры совпадает с вероятностью поражения окопа, в котором прячется от обстрела пехотинец. Какие стратегии оптимальны для пехотинца и артиллериста и чему равна цена игры?

ОТВЕТЫ

Ответы на заданные вопросы нетрудно получить, выписав матрицу игры (в отличие от игр, рассмотренных нами в начале игры, «военная игра» Айзекса имеет не квадратную, а прямоугольную матрицу 4×5) и воспользовавшись общими методами, излагаемыми в курсах теории игр. «Однако в столь простых случаях, как рассматриваемая нами игра, — пишет ее создатель Р. Айзекс, — можно после нескольких партий научиться угадывать, а затем проверять решение».

Для пехотинца оптимальная стратегия заключается в том, чтобы прятаться только в окопах 1, 3 и 5, причем каждый из них выбирать наугад с вероятностью $1/3$. Артиллерист может избрать любую из бесконечного множества оптимальных стратегий. Окопам *A* и *D* артиллерист приписывает вероятности, равные $1/3$, а окопам *B* и *C* — любые две вероятности, сумма которых равна $1/3$. (Например, он

может считать, что поражение окопов B и C равновероятно и приписать каждому из них вероятность $1/6$, но может рассудить иначе и приписать окопу B вероятность $1/3$, а окопу C — вероятность 0).

Чтобы убедиться в оптимальности стратегий пехотинца и артиллериста, оценим прежде всего шансы пехотинца на выживание. Если артиллерист целится в точку A , пехотинец с вероятностью $2/3$ остается в живых. То же можно сказать и в том случае, когда артиллерист целится в точку D . Если артиллерист стреляет по промежутку B , то он попадает в пехотинца, лишь когда тот прячется в окопе 3, поэтому вероятность избежать смерти для пехотинца и в этом случае оказывается равной $2/3$. То же самое повторяется, когда артиллерист стреляет по промежутку C . Поскольку при любом выборе стратегии артиллериста пехотинец выживает с вероятностью $2/3$, он с той же вероятностью остается в живых и при любой смешанной стратегии артиллериста. Таким образом, избранная пехотинцем стратегия позволяет ему остаться в живых с вероятностью не меньше $2/3$.

Обратимся теперь к стратегии артиллериста. Если пехотинец находится в окопе 1, артиллерист поражает его с вероятностью $1/3$. Если пехотинец прячется в окопе 2, то он погибает лишь после того, как артиллерист попадает в A или B . Следовательно, вероятность накрытия в этом случае равна $1/3$ плюс вероятность, приписанная артиллеристом цели B . Если пехотинец ищет укрытия в окопе 3, то он погибает лишь в том случае, если снаряд попадает в B или в C . Суммарная вероятность попадания в B или в C равна $1/3$, следовательно, вероятность поражения пехотинца, находящегося в окопе 3, также равна $1/3$. Если пехотинец прячется в окопе 4, то вероятность поражения его равна $1/3$ плюс вероятность попадания в C . Наконец, если пехотинец оказывается в окопе 5, то вероятность поражения равна $1/3$. Таким образом, стратегия артиллериста гарантирует ему поражение цели с вероятностью не меньше $1/3$.

Если платеж артиллеристу составляет 1 при поражении цели и 0 при промахе, то цена игры равна $1/3$. Артиллерист может выбирать любую из бесконечного множества стратегий, гарантирующих ему накрытие цели с вероятностью, большей или равной $1/3$. Разумеется, выступая против менее смышленного противника, он мог бы добиться и лучших результатов. Рассчитывать на более высокий результат в борьбе с достойным противником артиллеристу не приходится, поскольку, как мы видели, у пехотинца имеется стратегия, обеспечивающая ему выживание с вероятностью $2/3$.

Аналогичные соображения можно высказать и относительно стратегии пехотинца. Придерживаясь оптимальной стратегии, он может понизить свой «платеж» до $1/3$, но не может рассчитывать на лучший результат, поскольку у артиллериста всегда имеется способ поразить противника с вероятностью, которая больше или равна $1/3$. В качестве самостоятельного упражнения читателю предлагается доказать, что иных оптимальных стратегий ни у артиллериста, ни у пехотинца нет.

«Угадать решение не так трудно, как может показаться, — добавляет Айзекс. — Читатель легко убедится в этом, построив обобщенные стратегии для случая n окопов. На случай нечетного n предыдущее решение переносится почти тривиальным образом, но при четных n встречаются кое-какие трудности. Впрочем, и их можно преодолеть без особого труда».

«ДЕРЕВЬЯ» И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

«Связный граф» — это множество точек (вершин), соединенных отрезками прямых (ребрами) так, что для любых двух вершин можно указать соединяющий их путь, который целиком состоит из ребер графа. Если граф не содержит замкнутых путей или, что то же самое, если от одной его вершины к любой другой ведет лишь один путь, составленный из ребер графа, то такой граф называется деревом.

Разумеется, обычное дерево, под раскидистой кроной которого мы ищем защиты от палящих лучей солнца, можно рассматривать как великолепную трехмерную модель «древесного» графа. В виде деревьев растут некоторые кристаллы (так называемые дендриты). Реки и их притоки вычерчивают гигантские графы на поверхности Земли. Некоторые хрупкие тела при ударе растрескиваются так, что мелкие трещины под микроскопом образуют изящные древовидные узоры. Сильные электрические разряды иногда также напоминают на фотографиях деревья с хорошо развитой кроной.

Простейшее дерево в теории графов представляет собой отрезок прямой, соединяющий две точки. Три точки также можно соединить лишь одним-единственным способом, чтобы получилось дерево, зато среди графов с четырьмя вершинами уже можно обнаружить два топологически различных типа деревьев. Пять вершин порождают «лес», или множество, из трех деревьев, а шесть вершин — непроходимую «чащу» из шести деревьев (рис. 192). Взаимное расположение вершин и форма ребер («ветвей») несущественны, поскольку нас интересуют лишь топологические свойства графов. Можно представить себе, что все вершины — это одинаковые шарики, а ребра — соединяющие шарики пружинки. По-

сколько мы не различаем вершины графов, они называются свободными деревьями в отличие от деревьев с корнем, у которых имеется одна выделенная вершина, или деревьев с мечеными вершинами, у которых все вершины считаются различными.

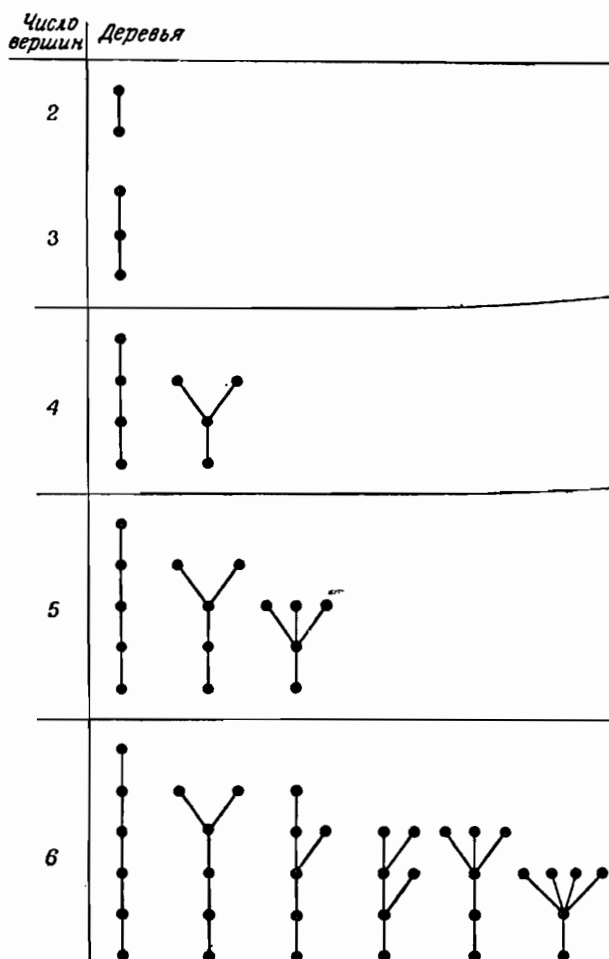
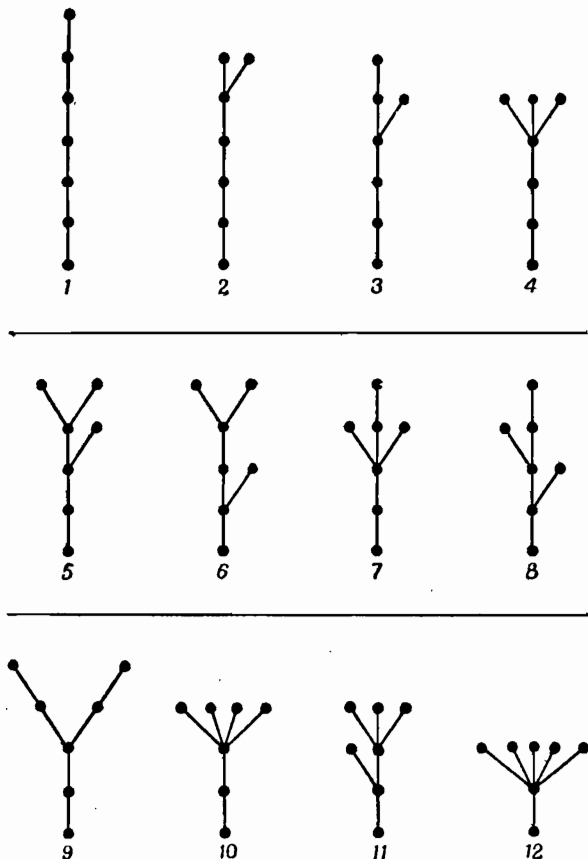


Рис. 192. Топологически различные деревья с числом вершин от 2 до 6.

Существуют и другие типы деревьев, для которых терминология еще не установилась. Задача об определении числа различных деревьев заданного типа с n вершинами уводит нас в дебри комбинаторного анализа. Существует 11 свободных деревьев с семью вершинами и 23 — с восемью. Далее, в порядке возрастания числа вершин следуют «заросли» из 23, 47, 106, 235, 551 ... деревьев. На рис. 193 изображено двенадцать деревьев с семью вершинами, из которых два топологически эквивалентны. Сумеете ли вы отыскать деревья-близнецы?



Р и с. 193. Двенадцать деревьев с семью вершинами. Два дерева топологически эквивалентны.

В качестве другого самостоятельного упражнения мы рекомендуем читателю начертить 23 топологически различных дерева с восемью вершинами.

Ясно, что каждое дерево с n вершинами имеет $n - 1$ ребер, а лес с n вершинами и k деревьями — $(n - k)$ ребер. Другая, не менее очевидная теорема гласит: если у дерева удалить любое ребро, оно распадется на несвязные куски (так, после удаления конечного ребра останется конечная вершина и «обрубленное» дерево).

Математики не уделяли должного внимания исследованию деревьев вплоть до конца XIX в., но древовидные графы использовались еще в глубокой древности. С помощью деревьев удобно было изображать различного рода отношения (например, родственные отношения принято было изображать с помощью генеалогического дерева) или классификацию, связанную с разбиением того или иного множества на классы, подклассы и т. д. Одно из наиболее часто употребляемых в средневековой метафизике деревьев ввел в своем комментарии к Аристотелю живший в III в. римский философ и противник христианства Порфирий. По существу дерево Порфирия представляло собой не что иное, как привычное нам «двоичное дерево», возникающее при дихотомии — разбиении множества на две взаимоисключающие части по какому-то признаку (элементы одной части обладают этим признаком, а элементы другой — его отрицанием). По классификации Порфирия материя — *summa generis* — подразделяется на телесную и бестелесную; телесная материя в свою очередь делится на живую и неживую. Живая материя распадается на способную воспринимать ощущения (животные) и не способную воспринимать их (растения). Животные подразделяются на наделенных разумом (человек) и лишенных разума, и лишь наделенные разумом образуют множество индивидуумов — *infama species*, — соответствующих вершинам графа. После изобретения гравюры философы эпохи Возрождения любили украшать издания своих трудов пышными изображениями дерева Порфирия.

Французский логик и математик Пьер де ля Раме, убитый в Варфоломеевскую ночь, был настолько захвачен идеей разбиения множества на взаимно дополняющие подмножества и так часто применял двоичное дерево в своих исследованиях, касавшихся самых разных

вопросов, что в честь его оно стало называться деревом Раме. Последним из философов, всерьез относившихся к двоичному дереву, насколько можно судить, был Джереми Бентам, живший в начале XIX в. Хотя Бентам признавал, что ко многим областям науки (например, к ботанике) полное дерево Раме неприменимо и что, подобно яблоку, множество можно разделить на половинки тысячами различнейших способов, тем не менее он был убежден, что дихотомическое разбиение представляет собой одно из могущественных средств анализа.

Бентам писал о «несравненной красоте дерева Раме», а один из разделов своего философского труда назвал так: «Как посадить энциклопедическое дерево Раме в любом разделе искусства и науки».

В наши дни философы редко обращаются к графам-деревьям, зато ими охотно пользуются математики, физики, химики, биологи, инженеры. Деревья можно встретить в трудах по строению химических соединений, теории электрических цепей, проблемам эволюции биологических видов, исследованиям операций, теории игр и во всевозможных комбинаторных задачах. Один из самых поразительных примеров неожиданного применения графов-деревьев к комбинаторной задаче (карточной игре солитер) приведен при обсуждении теории деревьев в книге Д. Кнута «Основные алгоритмы» — первом из семи томов серии «Искусство программирования для ЭВМ» *.

Карточная игра солитер известна также под названием «часы», «путешественники» и «одинаковые четверки». Колоду карт делят на тринадцать равных стопок по четыре карты в каждой. Стопки раскладывают так, как показано на рис. 194, рубашками вверх (стопки карт образуют как бы циферблат часов, отсюда одно из названий игры — «часы»). Тринадцатую стопку карт, обозначенную буквой К («король»), кладут в центре. Открыв верхнюю карту центральной стопки, подкладывают ее вверх картинкой под стопку, лежащую на той «цифре», которая совпадает со значением открытой карты. Например, если верхней картой в центральной стопке оказалась четверка, ее подкладывают под стопку, обо-

* Русский перевод книги Д. Кнута готовится к печати издательством «Мир». — *Прим. перев.*

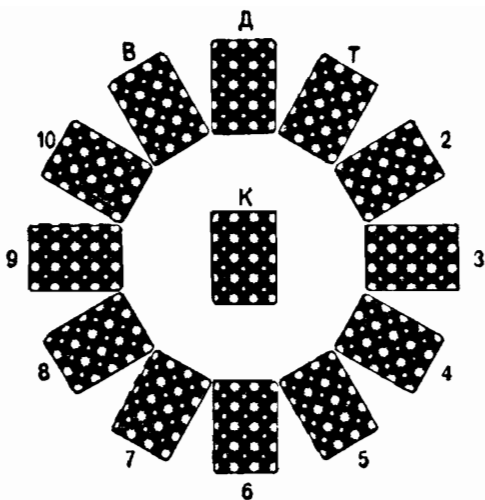
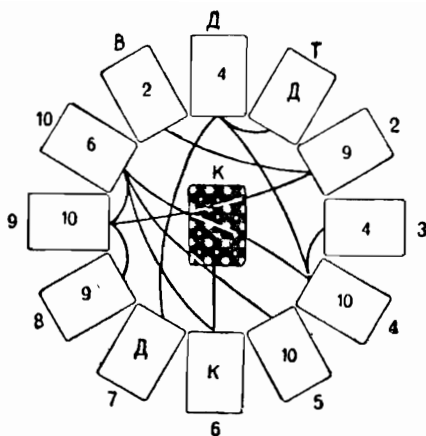


Рис. 194. Исходная раскладка карт при игре в солитер.

значенную на рис. 194 цифрой 4; если верхней картой оказался валет, его подкладывают вверх картинкой под стопку, лежащую на 11 «часах». Затем открывают верхнюю карту той стопки, под которую была подложена карта, и поступают с ней так же, как и с предыдущей картой. Затем все повторяется сначала. Если значение открытой карты совпадает с «показанием часов» (например, открывая верхнюю карту в стопке, обозначенной числом 7, вы обнаружите семерку), то ее подкладывают снизу под ту же стопку, в которой она лежала, а затем открывают следующую карту в той же стопке. Если, подложив карту под стопку, вы обнаружите, что в стопке не осталось больше перевернутых карт (иначе говоря, если стопка состоит из четырех одинаковых по значению карт, например четырех дам, четырех десятков и т. п., обращенных рубашкой вниз), то вы переходите к следующей по ходу часовой стрелки стопке.

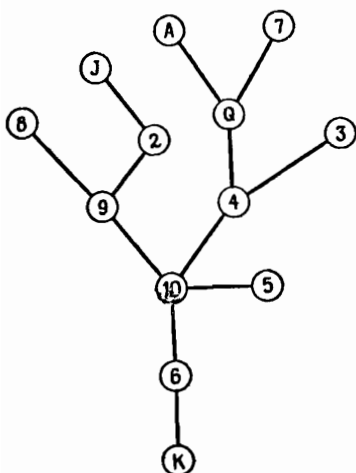
Считается, что игра удалась, если вы сумеете перевернуть вверх картинкой все 52 карты.

Если четвертый король будет открыт раньше, чем последняя карта, позиция считается «запертой», а партия в солитер — не удавшейся.



Р и с. 195. Нижние карты и соединяющие их линии, образующие дерево.

Солитер — игра чисто механическая, не требующая ни особого искусства, ни умения. В своей книге Д. Кнут доказывает, что вероятность удачной партии в солитер составляет в точности $1/13$ и что при достаточно продолжительной серии игр среднее число открытых карт равно 42,4. Еще более удивителен открытый Кнутом простой способ, позволяющий по картам, лежащим в основании



стопок, заранее предсказывать исход игры. Нарисуем циферблат, заменив каждую цифру значением нижней карты в той стопке, которая ее «закрывает». (Неизвестной остается лишь нижняя карта центральной стопки.) Каждую карту соединим линией с цифрой на циферблате, которая совпадает со значением карты (рис. 195).

Р и с. 196. Связи между картами, изображенные в виде дерева.

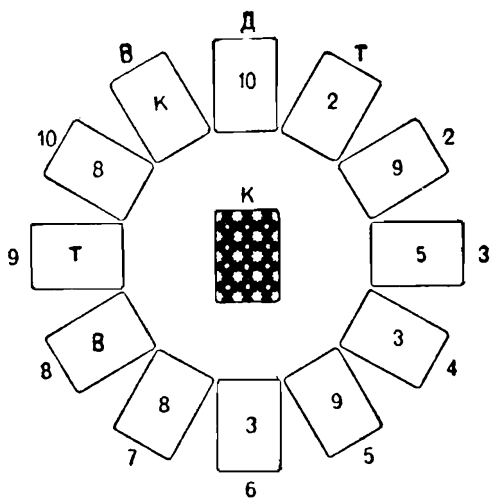


Рис. 197. Начальная раскладка карт.

Если карта лежит на «своем месте», то есть если ее значение и номер стопки совпадают, то линии проводить не нужно. Перечертим получившийся граф так, чтобы выявить его «древесную» структуру (рис. 196). Игра «выходит» в том и только в том случае, если построенный граф является деревом и среди его вершин представлены все тринадцать стопок. Относительное расположение остальных сорока карт не влияет на исход игры!

При начальной раскладке, изображенной на рис. 195, солитер завершается удачно. Другая начальная раскладка изображена на рис. 197. Требуется, построив для нее граф, определить исход игры, а затем, сыграв партию в солитер, проверить правильность предсказания.

Доказательство того, что построение графа позволяет с уверенностью предсказывать исход игры, можно найти в книге Кнута. Написанная живо и увлекательно, эта книга не только служит вводным томом фундаментального обзора современного состояния вычислительной математики, но и изобилует свежим материалом, представляющим интерес для любителей занимательной математики.

Условимся говорить, что дерево «осеняет» данное множество, если все точки множества (и только они)

служат вершинами дерева. Одним из первых результатов в теории деревьев была доказанная в прошлом веке А. Кэли теорема о том, что число деревьев, осеяющих множество из n меченых (и потому отличимых друг от друга) точек, равно 2^{n-2} . (Кэли был одним из основателей теории деревьев, развитой им в 1875 г. как метод нахождения числа различных изомеров углеводородов.) Предположим, что четыре города A , B , C и D мы соединяем дорогами, имеющими в плане форму дерева, осеяющего множество точек A , B , C и D . Сколько существует различных вариантов дорожной сети? Некоторые из осеяющих деревьев топологически эквивалентны, но мы считаем их различными, поскольку вершины графа (города A , B , C , D) меченые. Пересечения ребер графа (перекрестки дорог) вершинами не считаются, поскольку в противном случае число вершин у дерева было бы больше четырех.

Предположим теперь, что имеются n городов и требуется построить такую сеть железных дорог, чтобы любые два города были соединены железнодорожной веткой. Пути могут пересекаться, но их пересечения не считаются новыми вершинами графа. Иначе говоря, путешественник может пересаживаться с поезда на поезд лишь в городах. Каким образом следует построить железнодорожную сеть (граф, осеяющий множество из n точек), чтобы протяженность путей была наименьшей?

Нетрудно видеть, что минимальный граф непременно будет деревом. Действительно, если граф — не дерево, то суммарную длину его ребер можно уменьшить, удалив одно ребро и разорвав один из имевшихся в нем замкнутых маршрутов. При этом все n вершин его останутся по-прежнему связанными между собой другими ребрами графа. Поскольку разрывание любой замкнутой петли приводит к уменьшению суммарной протяженности ребер графа и не нарушает его связности, минимальный граф с необходимостью будет деревом.

Для отыскания минимального дерева разработано несколько алгоритмов (методов). Приводимый ниже алгоритм принадлежит известному польскому математику Гуго Штейнгаузу.

Выбрав любой город, соединим его отрезком прямой с ближайшим к нему соседним городом. Прделаем то

же самое и со всеми остальными городами. Если полученная сеть охватывает все города, то наиболее экономичный граф построен и задача решена. Если вместо единого дерева получился «лес» несвязных деревьев, то необходимо выбрать одно из деревьев и провести кратчайший путь, соединяющий город на этом дереве с городом на другом дереве. То же самое следует проделать и с остальными деревьями. Если и на этот раз сеть распадется на «лес» несвязных деревьев, то ту же процедуру следует повторить с новыми деревьями. Построенное по методу Штейнгауза экономичное дерево имеет минимальную суммарную длину ребер, причем его ветви (ребра) не пересекаются. Если у какого-то города окажутся два ближайших соседа, то вы можете остановить свой выбор на любом из них. Это никак не скажется на решении задачи. Если число ближайших соседей больше двух, то у данного множества городов существует несколько экономичных деревьев.

Задачу о построении наиболее экономичного дерева не следует смешивать с задачей о коммивояжере — знаменитой нерешенной проблеме теории графов. В этой задаче требуется найти кратчайший маршрут, следуя которым коммивояжер может посетить по одному и только по одному разу несколько городов и вернуться в исходный пункт. Для отыскания приближенного решения задачи о коммивояжере в случае большого числа городов составлены хорошие программы для ЭВМ, но общего метода, позволяющего находить точное решение задачи для любого города, пока не известно (разумеется, если не считать тривиального перебора всех возможных маршрутов коммивояжера).

Структура наиболее экономичного дерева редко изменяется, если вершинами графа считать не только точки исходного множества, но и точки пересечения соединяющих их линий. Здесь сразу же возникает классическая задача: как построить железную дорогу, соединяющую четыре города, расположенных в вершинах квадрата, чтобы общая протяженность путей была минимальной? Для простоты мы будем считать, что сторона квадрата имеет длину в один километр. Еще раз напоминаем, что дерево, осеняющее вершины квадрата, теперь может иметь одну или несколько дополнительных вершин (число его вершин не обязательно должно быть равно

четырем). Постоив дерево, осеняющее вершины квадрата, читатель может попытаться решить более трудную задачу: построить дерево, осеняющее вершины правильного пятиугольника.

ОТВЕТЫ

Среди двенадцати деревьев с семью вершинами топологически эквивалентны деревья 5 и 8.

При начальной раскладке карт, изображенной на рис. 197, солитер не выходит. Граф этой раскладки не является деревом. Он не только не связан, но и один из его связанных компонентов (кусов) содержит замкнутую петлю.

На рис. 198 показано, как провести минимальную по протяженности путей железнодорожную сеть между городами, расположенными в вершинах квадрата и правильного пятиугольника. Углы, отмеченные точками, равны 120° .

Может показаться, что диагонали, соединяющие вершины квадрата, образуют более экономичную сеть (их суммарная длина равна $2\sqrt{2} \approx 2,828 \dots$), но сеть, изображенная слева на рис. 198, экономичнее: длина всех путей этой сети составляет лишь $1 + \sqrt{3} \approx 2,732$. Минимальность этой сети доказана в книге Гуго Штейнгауза «Сто задач» (М., Физматгиз, 1959, задача 75). Если длину стороны правильного пятиугольника принять за единицу, то общая протяженность минимальной сети внутри него составит $3,891 \dots$.

Минимальная сеть для равностороннего треугольника имеет четвертую вершину в центре треугольника. Минимальными сетями для правильных многоугольников с числом сторон $n \geq 6$ служат периметры этих многоугольников, из которых выброшена одна сторона. О более общей задаче отыскания минимальной сети, соединяющей n точек на плоскости, и об использовании для ее решения поверхностного натяжения мыльной пленки рассказывается в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» (изд. 2-е, М., изд-во «Просвещение», 1967).

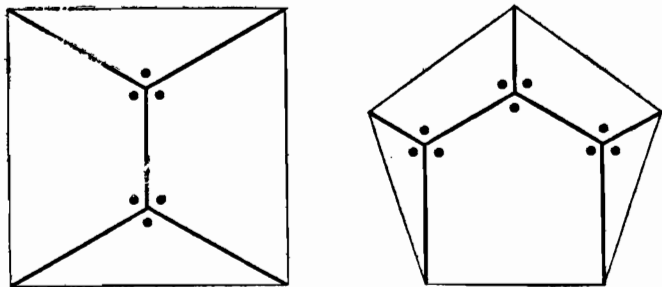


Рис. 198. Минимальные сети, связывающие вершины квадрата и правильного пятиугольника.

ГЛАВА 28

КРАТКИЙ ТРАКТАТ О БЕСПОЛЕЗНОЙ КРАСОТЕ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ

Трудно найти хотя бы еще одно подмножество множества натуральных чисел, которое могло бы сравниться с совершенными числами и тесно связанными с ними дружественными числами необычной историей, удивительными свойствами, бесполезностью и непроницаемостью окутывающей их тайны.

Совершенным называется число, равное сумме всех своих делителей (включая 1, но исключая само число). Наименьшее из совершенных чисел 6 равно сумме трех своих делителей 1, 2 и 3. За ним следует число $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Ранние комментаторы Ветхого завета усматривали в совершенстве чисел 6 и 28 особый смысл. Разве не за 6 дней был сотворен мир, восклицали они, и разве Луна обращается вокруг Земли не за 28 суток?

Первым крупным достижением теории совершенных чисел была теорема Евклида о том, что число $2^{n-1}(2^n - 1)$ — четное и совершенное, если число $2^n - 1$ — простое. (Число $2^n - 1$ может быть простым лишь в том случае, если прост показатель степени n . Обратное утверждение неверно: если показатель степени n прост, то число $2^n - 1$ отнюдь не обязательно должно быть — и в действительности редко бывает — простым числом.) Лишь 2000 лет спустя Эйлер доказал, что формула Евклида содержит все четные совершенные числа. Поскольку ни одно нечетное совершенное число не известно (и, по-видимому, не существует), мы будем в дальнейшем для краткости говорить о совершенных числах, понимая под ними четные совершенные числа.

Попытаемся, не вдаваясь в доказательства, интуитивно разобраться в формуле Евклида и понять, что она

устанавливает тесную связь между совершенными числами и членами геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, ...

Древняя легенда рассказывает, что индийский царь, ознакомившись с игрой в шахматы, пришел в неописуемый восторг и приказал выдать ее изобретателю любую награду, какую тот только пожелает. Изобретатель попросил, казалось бы, весьма скромное вознаграждение: одно зернышко пшеницы за первую клетку доски, два — за вторую, четыре — за третью и т. д. За каждую клетку он просил вдвое больше зерен, чем за предыдущую. Награда за последнюю, 64-ю, клетку должна была бы составить $2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ зерен, а всего царь должен был бы уплатить изобретателю $2^{64} - 1$ зерен пшеницы, что в огромное число раз превышает число зерен в ежегодном урожае пшеницы, собираемом во всем мире!

Если на каждой клетке шахматной доски мы напишем, сколько зерен пшеницы причиталось бы за нее изо-

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Рис. 199. Шахматная доска, в клетки которой вписаны последовательные степени числа 2 от нулевой до шестидесяти третьей. Клетки, обведенные рамкой, порождают числа Мерсенна.

бретателю шахмат (рис. 199), а затем снимем с каждой клетки по одному зерну, то число оставшихся зерен будет в точности соответствовать выражению, стоящему в скобках в формуле Евклида. Если это число простое, то, умножив его на число зерен, предназначавшихся в качестве вознаграждения за предыдущую клетку (то есть на 2^{n-1}), мы получим совершенное число! Простые числа вида $2^n - 1$ называются числами Мерсенна в честь занимавшегося их изучением французского математика XVII в. На рис. 199 те клетки, которые после вычитания 1 из вписанного в них числа порождают числа Мерсенна, обведены рамкой. Умножив числа Мерсенна на степени 2, стоящие в клетках, предшествующих заштрихованным, мы получим 9 первых совершенных чисел.

Формула Евклида позволяет без труда доказывать многочисленные, иногда весьма неожиданные, но красивые свойства совершенных чисел. Например, все совершенные числа треугольные. Это означает, что, взяв совершенное число зерен, мы всегда сможем разложить их в виде равностороннего треугольника так же, как 15 бильярдных шаров. Иначе говоря, всякое совершенное число совпадает с одной из частичных сумм ряда $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$. Не менее легко доказывается другое любопытное свойство совершенных чисел: все совершенные числа, кроме 6, можно представить в виде частичных сумм ряда кубов последовательных нечетных чисел $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$. Еще более удивительно, что сумма величин, обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна 2. Например, взяв делители совершенного числа 28, получим

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

Вычет любого совершенного числа, кроме 6, по модулю 9 (или, что то же, остаток от деления на 9) равен 1. Для доказательства этого утверждения необходимо показать, что при нечетных n числа $2^{n-1}(2^n - 1)$ сравнимы по модулю 9 (то есть при делении на 9 дают одинаковый остаток) с 1, а поскольку все простые числа, кроме 2, нечетны, совершенные числа также сравнимы с 1 по модулю 9. Единственное четное простое число 2 порождает единственное совершенное число 6, дающее при делении на 9 остаток, отличный от 1.

Поскольку совершенные числа тесно связаны со степенями 2, заранее ясно, что в двоичной записи совершенных чисел должна наблюдаться какая-то простая закономерность. И она действительно наблюдается, позволяя по формуле Евклида мгновенно выписывать двоичное представление любого совершенного числа. Попробуйте самостоятельно обнаружить эту закономерность, а затем доказать, что сформулированное вами правило применимо ко всем без исключения совершенным числам.

В теории совершенных чисел имеются два фундаментальных вопроса, ответы на которые до сих пор не известны. Существует ли нечетное совершенное число? Существует ли наибольшее совершенное число?

Ни одного нечетного совершенного числа до сих пор обнаружить не удалось, как не удалось, впрочем, и доказать, что оно не существует.

Ответ на второй вопрос, разумеется, зависит от того, существует ли бесконечно много чисел Мерсенна, поскольку каждое число Мерсенна немедленно порождает совершенное число. При подстановке вместо n в формуле $2^n - 1$ первых четырех чисел Мерсенна (3, 7, 31 и 127) каждый раз возникает новое число Мерсенна. В течение более чем 70 лет математики надеялись, что таким образом им удастся получить бесконечно много чисел Мерсенна, но уже следующему, пятому, числу Мерсенна суждено было развеять эти надежды. В 1953 г. с помощью ЭВМ удалось показать, что число $2^{8191} - 1$ составное ($8191 = 2^{13} - 1$ — пятое число Мерсенна). Никому не известно, существует ли наибольшее число Мерсенна или их последовательность неограниченна.

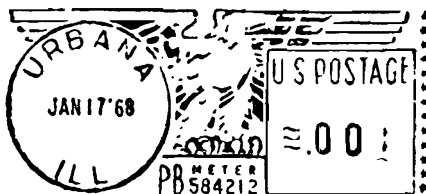
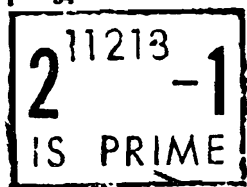
Питер Барлоу в своей «Теории чисел», выпущенной в свет в 1811 г., приведя девятое совершенное число, сопроводил его весьма любопытным примечанием: «Оно навсегда останется наибольшим из когда-либо открытых совершенных чисел, поскольку, принимая во внимание их бесполезность, трудно предположить, чтобы кто-нибудь стал затрачивать усилия на получение больших совершенных чисел». В 1876 г. французский математик Эдуард Люка, автор давно уже ставшего классическим четырехтомного труда по занимательной математике, называл следующего кандидата в совершенные числа: $2^{126}(2^{127} - 1)$. Стоящее в скобках двенадцатое число

Мерсенна лишь на 1 меньше числа зерен пшеницы, которое получил бы за последнюю клетку второй доски изобретатель шахмат, если бы царь, расщедлившись, решил не ограничиваться одной доской и, продолжая удваивать вознаграждение, перешел на следующую доску. Позднее Люка высказал сомнение в том, что число $2^{127} - 1$ простое, но, как выяснилось впоследствии, оно действительно оказалось простым. Число $2^{127} - 1$ стало самым большим из чисел Мерсенна, найденных без помощи современных ЭВМ. На помещенной здесь таблице приве-

23 известных совершенных числа

	Формула	Число	Число знаков
1	$2^1 (2^2 - 1)$	6	1
2	$2^2 (2^3 - 1)$	28	2
3	$2^4 (2^5 - 1)$	496	3
4	$2^6 (2^7 - 1)$	8 128	4
5	$2^{12} (2^{13} - 1)$	33 550 336	8
6	$2^{16} (2^{17} - 1)$	8 589 869 056	10
7	$2^{18} (2^{19} - 1)$		12
8	$2^{30} (2^{31} - 1)$	137 438 691 328	19
9	$2^{60} (2^{61} - 1)$	2 305 843 008 139 952 128	37
10	$2^{88} (2^{89} - 1)$		54
11	$2^{106} (2^{107} - 1)$		65
12	$2^{126} (2^{127} - 1)$		77
13	$2^{520} (2^{521} - 1)$		314
14	$2^{606} (2^{607} - 1)$		366
15	$2^{1278} (2^{1279} - 1)$		770
16	$2^{2202} (2^{2203} - 1)$		1 327
17	$2^{2280} (2^{2281} - 1)$		1 373
18	$2^{3216} (2^{3217} - 1)$		1 937
19	$2^{4252} (2^{4253} - 1)$		2 561
20	$2^{4422} (2^{4423} - 1)$		2 663
21	$2^{9688} (2^{9689} - 1)$		5 834
22	$2^{9940} (2^{9941} - 1)$		5 985
23	$2^{11212} (2^{11213} - 1)$		6 751

дены формулы 23-совершенных чисел, указано число знаков в каждом из них, и если числа не слишком велики, то выписаны и сами числа. Последнее из совершенных



Р и с. 200. Почтовый штемпель, извещающий об открытии 23-го числа Мерсенна.

чисел, имеющее 22425 делителей, было найдено в 1963 г., когда ЭВМ Университета штата Иллинойс обнаружила 23-е число Мерсенна. Математический факультет университета был так горд открытием 23-го числа Мерсенна, что ставил на конвертах специальный штемпель, извещающий об этом событии (рис. 200). На рис. 201 это число приведено полностью в том виде, как его отпечата- тала ЭВМ.

Не менее загадочно, чем сами совершенные числа, ведут себя их последние цифры. Пользуясь формулой Евклида, можно показать, что любое четное совершенное число должно заканчиваться цифрой 6 или 8. Если число заканчивается восьмеркой, то ей непременно предшествует цифра 2. Если же четное совершенное число заканчивается шестеркой, то его предпоследней цифрой должна быть 1, 3, 5 или 7 (исключениями являются лишь числа 6 и 496). Древним были известны первые четыре совершенных числа 6, 28, 496 и 8128. Наблюдая чередование шестерок и восьмерок в последующих цифрах, они весьма опрометчиво заключили, что замеченная периодичность будет наблюдаться и у последних совершенных чисел. Это утверждение было подхвачено и догматически повторялось многими математиками не только в древности, но и в эпоху Возрождения, в особенности после того, как оказалось, что пятое совершенное число, правильно приведенное в одной рукописи XV в. (автор ее так и остался неизвестным), оканчивается 6. Увы, открытие шестого совершенного числа похоронило надежды на столь простую закономерность: оно также заканчивалось шестеркой! Последние цифры 23 известных в настоящее время совершенных чисел образуют последовательность: 6, 8, 6, 8, 6, 6, 8, 8, 6, 6, 8, 8,

27631	38107	15094	74563	32570	74108	78930	85350	71537	34244	50164	18881	80178	93905	48789	41430	14572	57571	56575	87064
78418	39674	70706	74633	49718	80530	50875	41682	16243	25680	55582	60711	10691	94660	74008	73056	06936	08305	71590	24277
49342	28866	18396	63091	85433	46251	45374	84258	65598	23842	35046	02922	79078	01410	90716	33484	39547	74109	33972	60096
90967	70918	43944	55575	42211	15477	34376	02069	79650	03708	78849	93478	01297	72778	78532	80743	22345	54020	93557	18023
10429	92316	75884	32457	03610	41108	50980	43976	90384	50365	51402	23496	23383	66575	12071	99601	69735	27327	36111	92684
64547	91701	73452	70113	79148	17510	78208	21297	62894	67956	31098	98076	74922	50494	83425	40733	34414	12162	78339	39461
53921	25289	32010	72613	66892	93688	81566	54916	71395	17471	04526	63709	17575	36037	74156	85576	65183	13827	61372	72816
96692	63352	96663	63787	28653	97699	41609	10777	71835	93336	00268	01245	17633	45149	04395	94324	82383	64572	51219	40639
14326	35639	22560	45560	42396	00430	77993	61927	37900	05864	05420	76309	23208	13392	26249	29420	76312	93326	80338	18471
55525	78206	39308	88994	86655	70202	40381	58563	13578	94977	97676	46261	84532	79567	29767	24920	52623	11752	01478	62478
13331	83401	50844	75386	74052	66122	17340	57972	12374	14485	80372	53554	63022	00953	63010	08145	86752	47046	04618	84203
90935	55206	19532	82409	51895	10704	07932	84825	09546	25301	51872	82399	71717	64140	66331	58043	09008	61194	25785	80931
06474	84915	94407	47632	24377	85848	82542	39211	70614	03820	40294	83257	16297	92993	88940	69587	73754	48948	88110	83452
93394	32780	84527	29789	83413	51401	93912	41966	17994	84795	21032	82381	12742	21870	06345	41149	74365	72872	32843	42636
93488	04678	99347	10624	03393	96785	76761	50371	60019	66502	52168	25011	77931	78488	01200	05054	22821	36255	05205	00289
72445	98958	52366	82747	78516	19190	50325	48531	15029	40313	21780	89005	19575	11043	01340	27728	27303	00683	65112	95878
95060	19675	31218	82187	78865	70240	07291	78418	65185	89977	78851	03067	43945	89610	86452	58766	41569	28256	64174	47861
61533	05144	85227	38845	06435	05925	54106	06458	42732	38641	05066	65763	63144	47514	26909	49329	53219	92421	25946	99157
65500	91545	21173	42032	32758	82043	32762	54066	17963	03295	20335	72563	53360	40560	67832	11154	73359	04084	43381	69197
47615	81716	10066	20557	36700	03771	94730	01343	18155	60750	15907	78401	42254	45712	24546	03679	32344	70894	95446	
84254	30412	36778	53761	94310	03013	90805	68383	42077	26286	18722	64510	97075	06566	92818	28000	33981	70434	39910	62002
85979	45655	22774	91388	32377	56792	72006	55437	88640	70217	74415	59278	27235	08230	92843	68353	41966	79156	22967	61018
34243	78782	04200	82774	02861	72128	84576	38673	36057	69491	22410	08665	92577	36066	62414	67280	15908	86055	23486	34588
08822	27855	50570	63092	76349	41503	45476	71180	61829	63528	64263	00550	92222	54318	49976	81941	26787	06304	74603	44175
58102	92983	20171	22635	52344	39676	81630	99191	27574	20633	44077	19021	87541	38915	80871	52904	91878	29308	41213	34009
10419	75631	30215	40478	43660	41784	46757	73899	86320	83586	28799	22340	85162	63437	54067	71169	70732	32139	88284	94377
91221	71985	95360	56979	02291	78176	82865	46287	87818	04150	66635	46004	71641	04095	48377	72017	37444	62685	50430	
69582	62103	04316	33636	53113	84093	49002	13323	72463	46337	39774	27405	89667	38275	44203	12657	43745	81980	33523	20056
37229	31959	23692	88171	37527	67022	60450	91175	50605	40225	01666	77552	14932	07364	36541	99488	47701	83639	09377	09575
78999	84580	77577	51266	21113	05790	57174	49417	22201	80765	30243	91611	67059	40451	30425	62063	18299	29773	83030	95152
43054	97722	39514	96482	16018	38628	86144	63019	36017	71054	67775	03109	26303	09947	47397	61857	62073	73447	72544	14271
35362	42656	08636	60327	15763	56830	45447	97181	67188	01639	86954	75251	46305	65557	18437	17916	87546	91401	20724	97856
85867	18527	58660	24396	02335	28351	39449	80064	32703	02781	04224	14497	18836	88541	68978	47962	67391	47608	74963	98191

END OF JOB.

Рис. 201. Двадцать третье число Мерсенна $2^{11213} - 1$, отпечатанное ЭВМ.

6, 8, 8, 6, 6, 6, 8, 6, 6, 6. В ней явно ощущается некая закономерность: сначала цифры 6 и 8 чередуются, затем начинают чередоваться группы 66 и 88, их сменяет «одинокая» 6, вслед за которой идет цифровой палиндром 6668666. Попробуют ли цифры что-то сказать нам или замеченный порядок случаен? Если последовательность последних цифр известных совершенных чисел разбить на тройки, то окажется, что ни одна тройка не состоит из одних лишь шестерок или из одних лишь восьмерок. Если замеченная закономерность выполняется и дальше, то следующее совершенное число должно оканчиваться цифрами 28, однако до сих пор еще никому не удалось найти надежное правило, позволяющее предсказывать последнюю цифру следующего, пока неизвестного совершенного числа. В то же время найти последнюю цифру любого совершенного числа, если известна его формула Евклида, совсем нетрудно. Как это сделать?

Дружественные числа возникли как непосредственное обобщение совершенных чисел. Возьмем любое число и, сложив его делители, найдем второе число, затем, сложив делители второго числа, третье число и так до тех пор, пока мы не вернемся (если это вообще возможно) к исходному числу. Если исходное число восстанавливается на первом же шаге, то цепочка состоит лишь из одного звена, а исходное число совершенно. Если цепочка состоит из двух звеньев, то образующие ее два числа называются дружественными. Каждое из дружественных чисел равно сумме делителей другого числа. Наименьшие из дружественных чисел 220 и 284 были известны еще пифагорейцам, которые считали их символом дружбы. В средние века эти числа играли роль при составлении гороскопов. Считалось, что талисманы с числами 220 и 284 способствуют укреплению любви.

Следующая пара дружественных чисел 17 296 и 18 416 была открыта французским юристом и математиком Пьером Ферма лишь в 1636 г. Ферма и Декарт независимо друг от друга открыли правило, позволяющее находить некоторые пары дружественных чисел, не зная, что это правило задолго до них (в IX в.) было открыто одним арабским астрономом. Пользуясь своим правилом, Декарт обнаружил третью пару дружественных чисел: 9 363 584 и 9 437 056. В XVIII в. Эйлер составил список, содержащий 64 пары дружественных чисел (две

из них, как выяснилось позднее, были включены в список ошибочно). Еще одну пару обнаружил в 1830 г. французский математик Лежандр. Шестнадцатилетний итальянец Николо Паганини (тезка знаменитого скрипача) в 1867 г. потряс математический мир сообщением о том, что числа 1184 и 1210 дружественные! Эту пару, ближайшую к 220 и 284, «проглядели» все знаменитые математики, занимавшиеся изучением дружественных чисел. Хотя Паганини совершил свое открытие скорее всего методом проб и ошибок, имя его оказалось навсегда вписанным в историю теории чисел.

В настоящее время известно более 600 пар дружественных чисел, многие из которых содержат более 30 знаков. Вот пары дружественных чисел, не превышающих 100 000:

1	220	284
2	1 184	1 210
3	2 620	2 924
4	5 020	5 564
5	6 232	6 368
6	10 744	10 856
7	12 285	14 595
8	17 296	18 416
9	63 020	76 084
10	66 928	66 992
11	67 095	71 145
12	69 615	87 633
13	79 750	88 730

Все известные пары дружественных чисел содержат либо два четных, либо (гораздо реже) два нечетных числа, однако до сих пор никто не доказал, что не существуют пары дружественных чисел различной четности. Высказывалось (также не доказанное) предположение, что все нечетные дружественные числа кратны 3. Другая непонятная особенность дружественных чисел заключается в том, что сумма чисел, образующих четно-четную пару, всегда кратна 9. Формула, позволяющая получать все пары дружественных чисел, до сих пор не известна. Мы не знаем даже, конечно или бесконечно множество таких пар.

Если цепочка, приводящая обратно к исходному числу, содержит более двух звеньев, то образующие ее числа называются «общительными». Известны лишь две цепочки общительных чисел. Их открыл в 1918 г. французский математик Пуле. Одна из них содержит 5 звеньев (12 496, 14 288, 15 472, 14 536, 14 264), а другая поистине удивительная цепочка, начинающаяся с 14 316 (стоит приписать слева 3, и вы получите десятичное разложение числа π с четырьмя верными знаками после запятой!), — 28 звеньев! Существуют ли «толпы» — цепочки из трех звеньев — не известно.

ОТВЕТЫ

Чтобы представить совершенное число $2^{n-1}(2^n - 1)$ в двоичной форме, нужно выписать подряд n единиц и приписать к ним справа $(n - 1)$ нулей. Например, совершенное число $2^{5-1}(2^5 - 1) = 496$ в двоичной форме имеет вид 111 110 000.

Нетрудно понять, на чем основано это правило. Число 2^n в двоичной системе записывается в виде единицы с n нулями. Следовательно, множителю 2^{n-1} в формуле Евклида после перехода к двоичной системе соответствует единица с $(n - 1)$ нулями. Число 2^{n-1} , поскольку оно лишь на 1 меньше n -й степени двойки, в двоичной системе записывается в виде n единиц. Таким образом, произведение чисел 2^{n-1} и $(2^n - 1)$ в двоичной системе записывается в виде n единиц, вслед за которыми идет $(n - 1)$ нулей.

Небесполезным и приятным развлечением может стать проверка теоремы о том, что сумма величин, обратных делителям любого совершенного числа, включая самое число, равна 2, если слагаемые записывать в двоичной системе.

Правила, позволяющие определять последнюю цифру совершенного числа по формуле Евклида с соответствующим значением n , можно формулировать по-разному. Следующее правило, по-видимому, наиболее просто. Оно применимо ко всем совершенным числам, кроме 6. Разделите на 2 показатель двойки, стоящей перед скобкой в формуле Евклида. (Если показатель содержит более двух знаков, то делить на 2 нужно лишь число, образованное двумя последними цифрами.) Если частное четно, то совершенное число заканчивается шестеркой, нечетное — восьмеркой. Например, 23-е совершенное число представимо в виде $2^{11} 2^{12} (2^{11} 2^{13} - 1)$. Разделив 12 на 2, получим 6. Поскольку 6 — число четное, 23-е совершенное число оканчивается шестеркой.

Интересно исследовать последние цифры совершенных чисел в системах, отличных от двоичной и десятичной. Если основание системы кратно 3, то все совершенные числа, кроме 6, заканчиваются единицей. Если основание системы кратно 6 (к таким системам, в частности, принадлежит двенадцатеричная, или дуодецимальная, система с основанием 12), то все совершенные числа, кроме 6, оканчиваются четверкой!

ГЛАВА 29

23 ПРОСТЫЕ, НО КАВЕРЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. У некоего фермера 8 свиней: три розовых, четыре бурых и одна черная. Сколько свиней могут сказать, что в этом небольшом стаде найдется по крайней мере еще одна свинья такой же «масти», как и ее собственная?

2. Среди жителей некоторой африканской деревни 800 женщин. Три процента из них носят по одной серьге, половина женщин, составляющих остальные 97%, носит по две серьги, а другая половина вообще не носит серег. Сколько серег можно насчитать в ушах у всего женского населения деревни? Задачу решите «в уме», не прибегая к карандашу и бумаге.

3. Правильный выпуклый многогранник можно поставить на горизонтальную плоскость любой гранью. Поскольку центр тяжести правильного многоугольника совпадает с его центром, положение его будет устойчиво, на какую бы грань его ни поставили. Нетрудно построить неправильные многогранники, которые, если их поставить некоторыми гранями на горизонтальную плоскость, будут неустойчивы и опрокинутся. Можно ли построить модель такого неправильного многогранника, который будет неустойчив, на какую бы грань его ни поставили?

4. Восстановите недостающее число (оно указано многоточием) в последовательности: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, ..., 10 000, 1 111 111 111 111 111. (Примечание. Недостающее число записано в троичной системе.)

5. 16 одинаковых монет расположены в шахматном порядке то вверх гербом, то вверх решеткой в виде квадрата (рис. 202). Как, дотронувшись не более чем до



Рис. 202. Задача о шестнадцати монетах.

двух монет, перестроить квадрат так, чтобы в каждой горизонтали все четыре монеты были обращены вверх либо только гербами, либо только решетками?

6. Логик, оказавшись случайно в небольшом городке и желая хоть как-то убить время, решил подстричься. В городке имеются лишь два мастера (у каждого из них своя парикмахерская). Заглянув к одному мастеру, логик увидел, что в салоне грязно, сам мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне другого мастера было идеально чисто, а владелец его был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Логик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?

7. К доске для игры в обычные крестики и нолики добавлена одна-единственная клетка (рис. 203). Может ли игрок, делающий первый ход, обеспечить себе на новой доске верный выигрыш?

8. Секретарь отпечатала четыре письма четырем разным людям и надела четыре конверта. Предположим, что она вкладывает письма в конверты наугад. Какова вероятность того, что ровно три письма окажутся вложенными в конверты с адресами тех лиц, кому они предназначены?

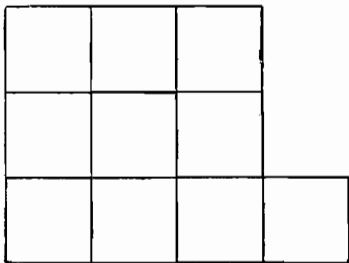


Рис. 203. Новая доска с десятью клетками для игры в крестики и нолики.

9. Рассмотрим три точки: центр правильного многогранника и любые две из его вершин. Эти три точки копланарны (лежат в одной плоскости). Верно ли аналогичное утверждение для всех неправильных многогранников?

10. На поверхности сферы наугад выбраны три точки. Чему равна вероятность того, что все три точки окажутся в одном полушарии?

11. Муж подарил жене в день ее рождения миниатюрный усеченный конус, верхнее основание которого слегка выпукло. Конус металлический, позолоченный, поверхность его покрыта небольшими углублениями. Что муж подарил жене?

12. Из точки C к окружности проведены две касательные (рис. 204). Отрезки касательных CX и CY равны, и каждый имеет в длину 10 единиц. На окружности между точками касания X и Y наугад выбирается точка P , через которую проводится касательная AB . Чему равен периметр треугольника ABC ?

13. Сумма в девять тысяч, девять сотен и девять долларов записывается в виде \$ 9909. Можете ли вы быстро записать сумму в двенадцать тысяч, двенадцать сотен и двенадцать долларов?

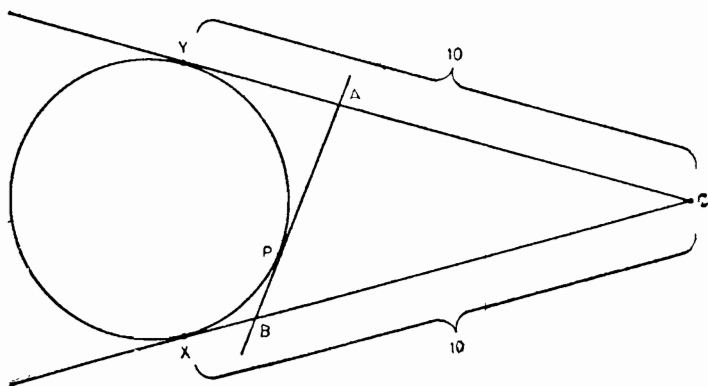


Рис. 204. Задача о касательной.

14. Химик обнаружил, что некоторая реакция протекает в течение 80 мин., если он в пиджаке. Если же он без пиджака, то та же самая реакция протекает за 1 час 20 мин. Как вы это объясняете?

15. Длина и ширина горизонтальных и вертикальных колец бумажных игрушек, изображенных на рис. 205, одинакова. Обе игрушки почти одинаковы: единственное различие между ними состоит лишь в том, что горизонтальное кольцо правой игрушки перекручено на пол-оборота. Если левую игрушку разрезать вдоль пунктирной линии, то получится квадратная рамка, показанная на рис. 205. А что будет, если разрезать вдоль пунктирной линии вторую игрушку? (Отвечать на вопрос следует до того, как вы проделаете эксперимент на бумажной модели.)

16. Равносторонний треугольник и правильный шестиугольник имеют одинаковые периметры. Чему равна площадь шестиугольника, если площадь равностороннего треугольника равна 2?

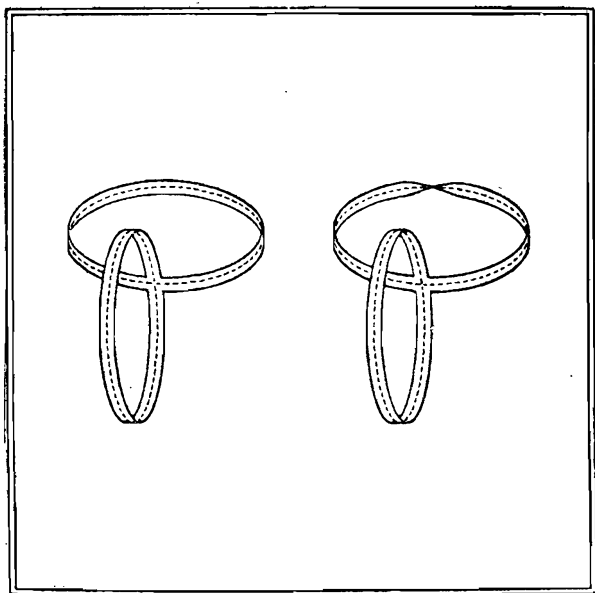


Рис. 205. Топологическая задача.

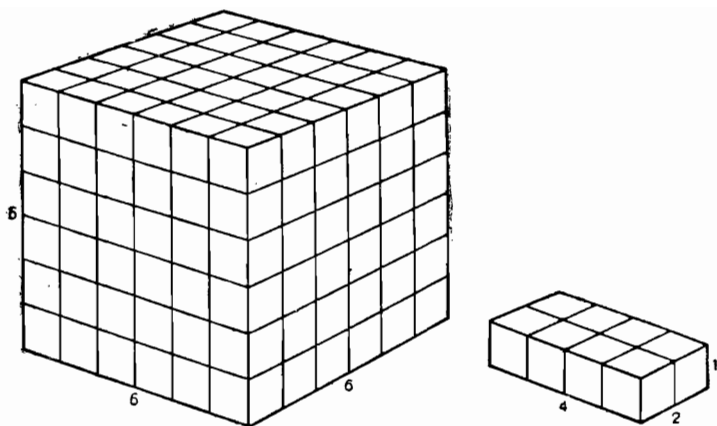


Рис. 206. Задача о составлении куба из кирпичей.

17. Можно ли составить куб $6 \times 6 \times 6$ из 27 кирпичей-параллелепипедов размером $1 \times 2 \times 4$ (рис. 206)?

18. Посетитель ресторана обнаружил в чашке кофе муху и, подозвав официанта, попросил его принести другую чашку кофе. Едва пригубив вновь принесенную чашку, посетитель вне себя от ярости воскликнул:

— Но это та же самая чашка кофе!

Каким образом он разгадал «хитрость» официанта?

19. Лист металла имеет форму квадрата 2×2 м², к противоположным сторонам которого пристроены два полукруга (рис. 207). Из середины листа вырезается круг диаметром в 2 м. Чему равна площадь оставшейся части листа?

20. — Ручаюсь, — сказал продавец в зоомагазине, — что этот попугай будет повторять любое услышанное слово.

Обрадованный покупатель приобрел чудо-птицу, но, придя домой, обнаружил, что попугай «нем, как рыба». Тем не менее продавец не лгал.

Не могли бы вы объяснить кажущееся противоречие?

21. Из вершины квадрата со стороной в 3 см требуется провести два отрезка прямых, делящих площадь

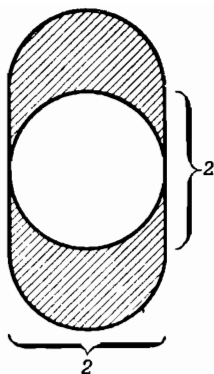


Рис. 207. Задача о круглом отверстии в листе металла.

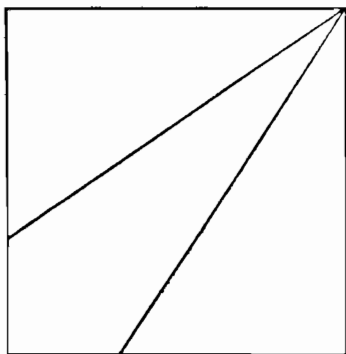


Рис. 208. Трисекция квадрата.

квадрата на три равные части (рис. 208). Чему равна длина каждого отрезка?

22. Внутренний диаметр трехметрового отрезка трубы равен 4 см. С одного конца в трубу вводят шар диаметром в 3 см, с другого — шар диаметром в 2 см. Можно ли с помощью стержня протолкнуть каждый шар сквозь трубу?

23. Назовите не менее трех способов измерения высоты большого здания с помощью барометра.

ОТВЕТЫ

1. Ни одна, поскольку свиньи не говорят.

2. Если половина из 97% женщин носит по две серьги, а другая половина вообще не носит серег, то число серег, приходящихся на эту часть женского населения деревни такое же, как если бы все женщины носили по одной серьге. Следовательно, при подсчете общего числа серег можно считать, что все женщины деревни носят по одной серьге, а поскольку в деревне живут 800 женщин, то и серег 800.

3. Нет. Если бы такой многогранник существовал, то можно было бы построить вечный двигатель, поскольку он бы все время опрокидывался.

4. Каждый член последовательности представляет собой не что иное, как число 16, записанное каждый раз в системе счисления с другим основанием. Сначала идет число 16, записанное в «шест-

надцатеричной» системе счисления, затем — в пятнадцатеричной и т. д. Основания систем расположены в порядке убывания от 16 до 1 (последнее число 1 111 111 111 111 — не что иное, как число 16 в «единичной» системе счисления с основанием 1).

5. Поставив указательный и средний палец на первую и третью монеты верхнего ряда, передвиньте их так, чтобы они коснулись снизу первой и третьей монеты нижнего ряда, после чего подвиньте первый и третий столбец и заполните пустые места в первом ряду. Все монеты в первом и третьем ряду окажутся обращенными вверх решетками, во втором и четвертом — вверх гербами.

6. Поскольку в городке всего лишь два парикмахера, каждый мастер вынужден подстригаться у другого. Логик выбрал того из мастеров, кто лучше подстриг своего конкурента.

7. Да. Заняв любой из углов, игрок, открывающий партию в обычные крестики и нолики, обеспечивает себе выигрыш, если его противник не займет центр доски. Поэтому после того, как первый игрок поставит крестик в правый нижний угол, его противник должен поставить нолик в центральную клетку, даже если бы десятой клетки не было. Ход играющего крестиками, изображенный на рис. 209, обеспечивает ему победу на следующем ходе.

8. Вероятность равна нулю: если три письма попали в конверты с адресами тех лиц, кому они предназначены, то и четвертое письмо оказалось в «правильном» конверте.

9. Да. Любые три точки пространства всегда копланарны.

10. Единице (достоверное событие). Любые три точки на поверхности сферы всегда лежат в одном полушарии.

11. Позолоченный наперсток.

12. Периметр треугольника ABC равен 20 единицам. Поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности из точки, лежащей вне ее, равны, то $YA = AP$ и $BP = XB$. Но отрезок $AP + BP$ служит стороной треугольника ABC , поэтому, как нетрудно видеть, периметр треугольника равен 20 единицам.

Рассматриваемая нами задача принадлежит к числу тех любопытных задач, которые можно решать различными способами, если предположить, что решение существует. Например, воспользовавшись тем, что положение точки P на дуге XU выбирается наугад, мы можем сдвинуть P до предела (до совпадения с точкой X или Y). В обоих случаях одна из сторон треугольника ABC стягивается в точку,

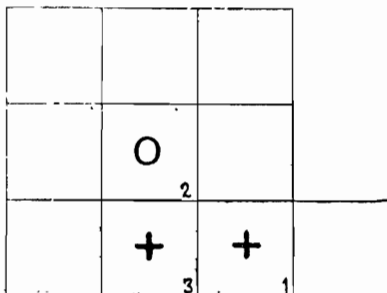


Рис. 209. Игра в крестики и нолики на десятиклеточной доске.

сторона AB , наоборот, растягивается до 10 единиц. Таким образом, стороны вырожденного треугольника имеют в длину 10, 10 и 0 единиц, а его периметр — 20.

13. 13 212.

14. 80 мин. — то же самое, что и 1 час 20 мин.

15. Разрезав вторую игрушку, вы получите такую же квадратную рамку, как и при разрезании первой.

16. Площадь правильного шестиугольника равна 6 (рис. 210).

17. Нельзя. Представим себе, что куб $6 \times 6 \times 6$ составлен из 27 кубиков $2 \times 2 \times 2$, покрашенных в черный и белый цвет и расположенных в шахматном порядке. Поскольку число 27 нечетное, 13 кубиков будут одного, а 14 — другого цвета. Как бы мы ни располагали кирпич $1 \times 2 \times 4$ внутри куба, половина составляющих его единичных кубиков окажутся черными и половина белыми. Следовательно, если бы большой куб можно было сложить из кирпичей, то половина единичных кубиков была бы черной и половина белой. Это противоречит ранее доказанному утверждению о том, что число черных и белых кубиков $2 \times 2 \times 2$ (и, следовательно, черных и белых единичных кубиков) различно. Следовательно, сложить куб $6 \times 6 \times 6$ из 27 кирпичей $1 \times 2 \times 4$ невозможно.

18. Кофе в чашке был сладким: прежде чем посетитель обнаружил муху, он успел положить в кофе сахар.

19. Два полукруга, пристроенных к квадрату, могут заполнить круглое отверстие в середине листа, поэтому площадь оставшейся части металлического листа равна площади квадрата со стороной в 2 м, то есть составляет 4 м^2 .

20. Продавец действительно не лгал: попугай был глухим.

21. Площадь квадрата составляет 9 см^2 . Следовательно, каждый из прямоугольных треугольников, отсеченных проведенными отрезками, имеет площадь, равную 3 см^2 . Поскольку больший катет треугольника равен 3 см, его меньший катет равен 2 см, а гипотенуза — один из отрезков, делящих квадрат на три равные части, — $\sqrt{13} \text{ см}$.

22. Можно, если шары проталкивать не одновременно, а по очереди.

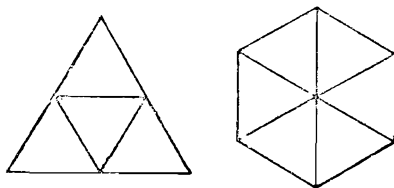


Рис. 210. Задача о равностороннем треугольнике и правильном шестиугольнике.

23. Называем пять способов измерения высоты здания с помощью барометра. 1) Привязав барометр к концу нити, спущенной с крыши здания, разматывать нить до тех пор, пока барометр не коснется мостовой, после чего измерить длину пути. 2) Сбросить барометр с крыши здания и, измерив время t его падения, вычислить пройденное расстояние по формуле $h = gt^2/2$, где h — высота здания, g — ускорение свободного падения. 3) В солнечный день измерить отношение длины барометра к длине отбрасываемой им тени и, разделив длину тени, отбрасываемой зданием, на это отношение, вычислить высоту здания. 4) Записать показания барометра у основания и на крыше здания, вычислить высоту по формуле, связывающей высоту над уровнем моря с барометрическим давлением. 5) Найти коменданта здания и предложить ему барометр, если он сумеет правильно назвать высоту здания.

ГЛАВА 30

СЧЕТ НА ПАЛЬЦАХ

Антропологам еще предстоит найти племя, члены которого находились на столь низком уровне развития, что не умели считать. Долгое время среди ученых бытовало мнение, будто первобытные люди умели считать только до двух, так как для обозначения чисел у многих племен были лишь слова «один», «два» и «много». Способность первобытных людей с одного взгляда определять, что в стаде недостает одной овцы, при таком подходе казалась сверхъестественной и необъяснимой. Некоторые антропологи полагали, что первобытные пастухи обладали феноменальной памятью и способностью удерживать в голове нечто вроде фотографического изображения всего стада в целом. Однако, как показали более поздние исследования, употребление одного и того же слова для всех чисел больше 2 отнюдь не означает, что первобытный человек не сознавал различия между пятью и шестью камешками, так же как употребление им одного и того же слова для обозначения голубого и зеленого цвета не означает, что он не ощущал различия между зеленой травой и голубым небом. Выяснилось,

что племена с ограниченным запасом слов для обозначения чисел владели довольно хитроумными способами счета на пальцах рук и ног, привлекая порой и другие части тела. Например, вместо того чтобы запоминать слово, означающее 15, первобытный человек мог запомнить, что он остановился на большом пальце левой ноги.

Системы счисления, принятые у первобытных народов, как правило, имеют основание 5, 10 или 20. По единодушному мнению всех антропологов (разделявшемся таким авторитетом, как Аристотель), это связано с тем, что у человека на одной руке — 5 пальцев, на двух руках — 10 и на руках и на ногах — 20 пальцев. Из общего правила имеются довольно многочисленные исключения. Некоторые автохтонные* культуры в Африке, Австралии и Южной Америке используют двоичную систему. Реже встречается троичная система. Так, одно из племен в Бразилии пользуется при счете тремя суставами каждого пальца. Еще реже встречается четверичная система — главным образом у индейских племен в Южной Америке и у индейцев юки в Калифорнии, считающих на промежутках между пальцами.

Пятиричная система счисления (с основанием 5) была распространена гораздо шире, чем все остальные. На многих языках «пять» и «рука» либо полностью совпадают, либо тесно связаны с общим более древним словом. Например, «пенча» по-персидски означает «рука», а «панча» на санскрите означает «пять». Индейцы племени таманакос в Южной Америке употребляют для обозначения числа 5 то же слово, что и для обозначения «всей руки». Слово «шесть» по-таманакски означает «один палец на другой руке», семь — «два пальца на другой руке» и т. д. для восьми и девяти. Десять называется «двумя руками». Желая назвать число от 11 до 14, таманакос протягивают вперед обе руки и считают: «Один на ноге, два на ноге» и т. д. до тех пор, пока не доходят до 15 — «всей ноги». Затем, как нетрудно догадаться, следует «один на другой ноге» (число 16) и т. д. до 19. Число 20 по-таманакски означает «один индеец», 21 — «один на руке у другого индейца». «Два индейца» означают 40, «три индейца» — 60. У жителей древней Явы и у ацтеков продолжительность недели составляла

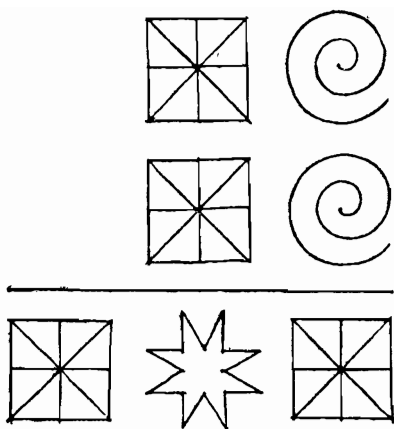
* Коренные. — *Прим. перев.*

5 дней. Некоторые историки считают, что римское число X (десять) составлено из двух римских пятерок V (одна из них перевернута), а число V в свою очередь возникло из стилизованного изображения человеческой руки.

Во многих языках слова, служащие для обозначения чисел, нередко совпадают с названиями пальцев рук, ног или других частей человеческого тела. Так, английское слово *digit* (цифра) происходит от латинского слова *finger* — палец и свидетельствует о том, что англосаксы на ранних этапах своего развития считали на пальцах. Здесь также имеются довольно забавные исключения. На языке маори число 4 обозначается тем же словом, что и собака. Вероятно, это связано с тем, что у собаки четыре ноги. На языке вымершего племени южноамериканских индейцев абипонес слово 4 означало «птичью лапу» — «три пальца впереди и один сзади».

Системы счисления с основаниями 6 и 9 у первобытных племен встречаются чрезвычайно редко. По-видимому, это объясняется тем, что, когда у людей возникала потребность называть числа больше 5, они обычно начинали считать не на одной, а сразу на двух руках и принимали десятичную систему счисления. Основание 10 использовали древние китайцы, египтяне, греки и римляне. Одной из достопримечательностей математики древнего мира по праву считается шестидесятеричная система, заимствованная вавилонянами у шумеров. С помощью этой системы древние вавилоняне достигли замечательных успехов в математике. Принятое нами деление часа на 60 минут, минуты — на 60 секунд и наши угловые меры — отзвуки вавилонской шестидесятеричной системы. В настоящее время наиболее распространенным (даже среди наиболее отсталых племен) является основание 10. Как показало произведенное в 20-х годах обследование 70 африканских племен, все они пользовались десятичной системой счисления.

Если основанием системы служит число больше 5, то оно редко бывает простым. Так, в «Кратком очерке истории математики» У. У. Роуза Болла, опубликованном в 1908 г., упоминается семеричная система счисления западноафриканского племени бола и одиннадцатеричная система древних маори. Широкое распространение получили двадцатеричные системы, среди которых особое место занимает система майя. Создатели ее



Р и с. 211. Сложение двух чисел в «венерианских» обозначениях.

использовали нуль и позиционные обозначения, поэтому система майя была одной из лучших систем счисления, принятых в древнем мире, и оставляла далеко позади неуклюжую римскую систему. Отзвуки двадцатеричной системы и поныне встречаются в таких языках, как французский (в котором число 80 передается, как *quatre-vingts* — «четырежды двадцать»), английский и в особенности датский, где числительные представляют собой любопытную смесь десятичной и двадцатеричной систем.

Очевидная связь между основаниями 5 и 10 наиболее распространенных систем счисления и числом пальцев на одной и двух руках навела многих писателей-фантастов на мысль о том, что основания систем счисления внеземных цивилизаций также должны быть связаны с числом пальцев обитателей других планет.

Представим себе, что телекамера ракеты, совершившей посадку на поверхность Венеры, передает на Землю «пример на сложение», нацарапанный кем-то из аборигенов на расположенной вблизи от места посадки скале, который показан на рис. 211. Предположим, что жители Венеры так же, как и мы, пользуются позиционной системой обозначений, а в качестве основания выбрали число пальцев на руке. Спрашивается, сколько пальцев на руке у жителя Венеры?

В настоящее время общепринятой является десятичная система и человечество вряд ли откажется от нее в пользу системы с каким-нибудь другим основанием, несмотря на то что, например, двенадцатеричная система обладает рядом преимуществ по сравнению с ней. Так, основание двенадцатеричной системы имеет 4 делителя, в то время как основание десятичной системы лишь два. Двенадцатеричная система находила немало горячих приверженцев на протяжении веков. Рядом преимуществ, в основном с точки зрения специалистов по теории чисел, обладают системы счисления с простым основанием. В пользу систем с основанием 7 и 11 высказывался, например, известный французский математик XVIII в. Лагранж.

Другие математики отстаивали системы с основаниями, равными различным степеням числа 2, в частности 8 и 16.

«Нет сомнения в том, что наши предки изобрели десятичную систему, считая на пальцах, — писал в конце прошлого века американский математик В. Джонсон. — Мы же, если учесть достоинства восьмеричной системы, должны испытывать чувство глубокого сожаления от того, что наши предки не пропускали больших пальцев, хотя природа достаточно ясно выделила их среди прочих пальцев руки как бы для того, чтобы уберечь человеческий род от возможной ошибки.»

Рассказывая о недесятичных системах счисления в гл. 36 книги «Математические досуги», я упомянул о странной номенклатуре, разработанной двумя математиками, отдававшими предпочтение шестнадцатеричной системе счисления. К этому следует добавить, что восьмеричная (или смешанная двоично-восьмеричная) система уже давно находится «на вооружении» ЭВМ, а шестнадцатеричная система с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E и F составляет важную часть языка некоторых современных вычислительных устройств.

Первобытные племена отличаются одно от другого не только выбором основания системы счисления, но и способами счета. Большинство людей — «правши», они лучше владеют правой рукой, поэтому счет обычно начинается с пальцев левой руки. У одних племен счет

ведется по раз и навсегда установленному порядку, у других — меняется от случая к случаю. Считая, люди могут начинать с большого пальца или мизинца, дотрагиваться до соответствующего пальца левой руки указательным пальцем правой руки, загибать пальцы на левой руке или, наоборот, начать с пальцев, сжатых в кулак, и разгибать их по мере счета. На Андаманских островах, расположенных в Бенгальском заливе, местные жители начинают счет с мизинца и дотрагиваются до называемых пальцев левой руки кончиком носа. Жители одного из островов в Торресовом проливе между Австралией и Новой Гвинеей считают до 5 на пальцах левой руки, затем, вместо того чтобы переходить на правую руку, дотрагиваются указательным пальцем правой руки до запястья левой руки, левого локтя, левого плеча, соска левой груди и грудины, после чего продолжают счет на правой половине тела, дотрагиваясь по очереди до соска правой груди, правого плеча и т. д. Математики обратили внимание на то, что те части тела, до которых при счете дотрагиваются, выражают порядковые номера (первый, второй, третий и т. д.) элементов пересчитываемого множества, в то время как вытянутые одновременно пальцы выражают кардинальные числа (мощности) этих множеств.

Древние греки разработали сложную систему условных обозначений, позволяющую считать на пальцах от единицы до нескольких тысяч. Об этой системе упоминает «отец истории» Геродот, но до нас о ней дошли лишь отдельные отрывочные сведения. Не менее сложные системы «палечных» числовых обозначений, разработанные в древнем Китае и других странах Востока, сохранились до нашего времени и используются при заключении сделок на базарах, когда запрашиваемую или предлагаемую цену нужно показать тайком от открывающих. Римская система обозначений чисел на пальцах описана многими древнеримскими авторами. В VIII в. преподобный Беде посвятил первую главу своего трактата «О вычислении времени» (речь шла о вычислении различных знаменательных дат, и в частности даты важнейшего христианского праздника пасхи) римской системе числовых обозначений на пальцах, которую он расширил, доведя до миллиона. (Миллион по Беде обозначали хлопком в ладоши.)

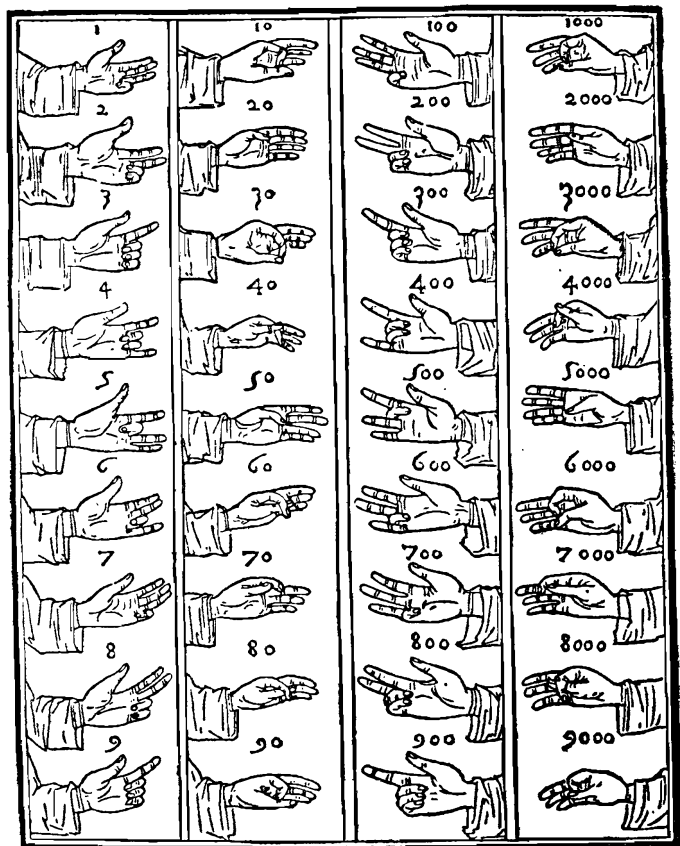


Рис. 212. Иллюстрация из книги Луки Пачоли (1494 г.).

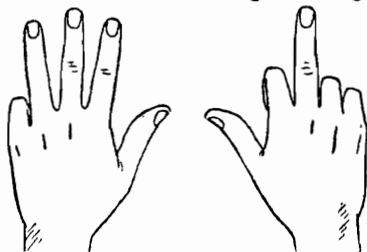
Счету на пальцах уделяло внимание большинство учебников арифметики в эпоху Средневековья и Возрождения. На рис. 212 воспроизведена иллюстрация из первой итальянской математической книги, оставившей заметный след в истории науки. Она вышла в свет в 1494 г. Ее автор францисканский монах Лука Пачоли впоследствии написал книгу о золотом сечении, иллюстрации к которой были выполнены его другом Леонардо да Винчи. Именно эту систему числовых обозначений имел в виду римский поэт Ювенал, когда писал в «Сатирах»: «Тот счастлив, кто... к концу годы свои

на правой считает руке», то есть счастлив тот, кто доживет до 100 лет (пальцы правой руки для обозначения сотен были нововведением системы, описанной в трактате Пачоли). Каждый (или почти каждый) символ существует в двух зеркально-симметричных вариантах: для правой и для левой руки. Многие символы из-за плохого качества гравюры, не передающей мелких различий, кажутся одинаковыми. Обозначения чисел на пальцах порождали и некоторые мистические толкования. Так, число 30 считалось символом супружества: большой и указательный палец, образуя кольцо, знаменовали узы, связывающие мужа и жену. Число 60 считалось символом вдовства: кольцо разрывалось.

Во всех старых методах счета на пальцах использовалась десятичная система счисления, однако ничто не мешает приспособить пальцы для счета в системах счисления с любым другим основанием. Особенно легко «перестроить» нашу природную вычислительную машину для работы в простейшей — двоичной — системе: поднятый или опущенный палец можно сравнить с триггерными устройствами тех современных ЭВМ, которые используют двоичную систему. В одном из возможных вариантов двоичного счета на пальцах в «нулевом» положении обе руки сжаты в кулак и обращены тыльной стороной ладоней вверх. Вытянутый палец соответствует единице (в соответствующем разряде). На пальцах рук можно «изобразить» любое двоичное число от 1 до 1111111111 (последнее число эквивалентно в десятичной системе числу 1023). Единице соответствует вытянутый мизинец правой руки, числу 10 (в двоичной системе) — вытянутый безымянный палец правой руки. Два вытянутых пальца — мизинец и безымянный — означают двоичное число 11 (или десятичное 3). На рис. 213 показано, как выглядит отложенное на пальцах двоичное число 500. Немного попрактиковавшись, можно научиться не только быстро откладывать на пальцах нужные двоичные числа, но и производить двоичное сложение и вычитание. Руки можно использовать и как вычислительную машину для решения не слишком сложных задач двузначной логики (при этом единица будет соответствовать истинным, а нуль — ложным высказываниям).

Любое двоичное число, записанное с помощью одних лишь единиц, в десятичной системе имеет вид $2^k - 1$,

0 1 1 1 1 1 0 1 0 0



Р и с. 213. Двоичное число 500, отложенное на пальцах.

где k — некоторое целое положительное число. Например, число 1023, или двоичное число 1111111111, для изображения которого требуется вытянуть все 10 пальцев, равно $2^{10} - 1$. В связи с этим возникает интересная задача. Предположим, что нам нужно вычесть из 1023 или любого меньшего числа, изображаемого «частокотом» единиц, некоторое число n . Можете ли вы указать способ, позволяющий произвести вычитание на пальцах быстро и легко?

Поскольку в Средние века и в эпоху Возрождения лишь немногие знали таблицу умножения дальше, чем $5 \times 5 = 25$, и умели считать на абакe, было разработано множество простых методов, позволяющих получать произведения чисел от 6 до 10. Один из наиболее употребительных методов, названный в одной книге 1492 г. «старинным правилом», заключался в использовании дополнений сомножителей до 10. (Дополнением числа n до 10 называется число $10 - n$.) Чтобы умножить 7 на 8, по старинному правилу нужно было взять дополнения 7 и 8 до 10, то есть числа 3 и 2. Разность между любым из сомножителей и дополнением другого сомножителя до 10 равна 5 — числу десятков в произведении 7 на 8. Произведение самих дополнений 3 и 2 равно 6. Приписав 6 справа к 5, находим ответ: $7 \times 8 = 56$.

Вспомогательным вычислительным устройством при таких выкладках нередко служили пальцы рук. Каждому пальцу на правой и на левой руке приписывали определенное число: мизинцу — 6, безымянному пальцу — 7, среднему — 8, указательному — 9 и большому — 10. Чтобы умножить 7 на 8, «семеркой» на одной руке касались

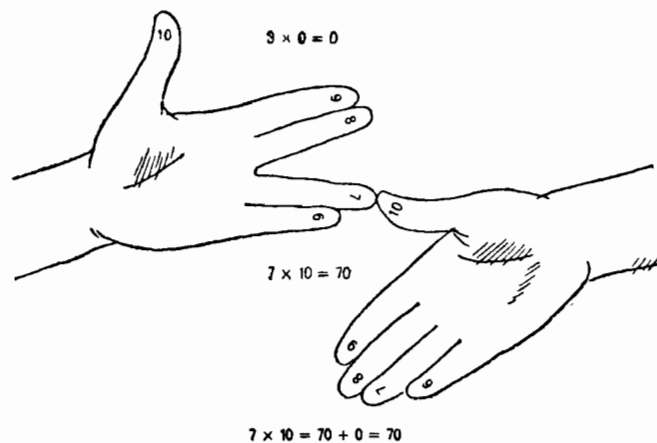
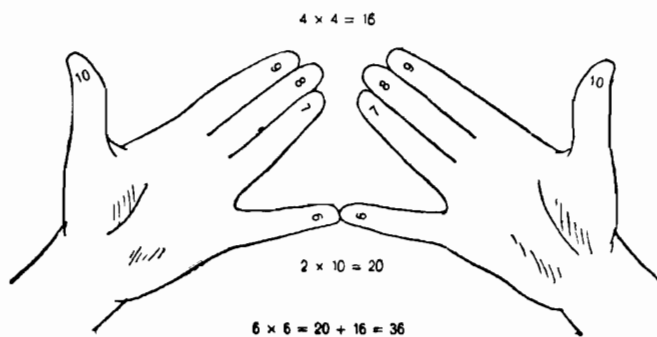
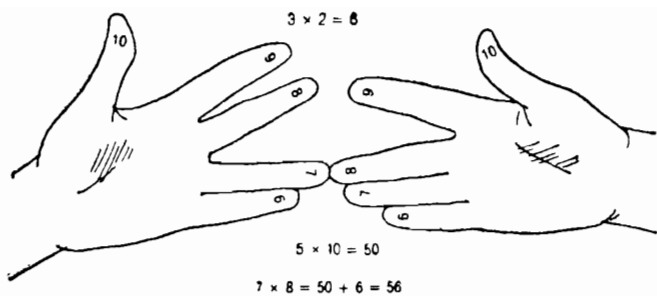


Рис. 214. Умножение на пальцах чисел от 6 до 10.

«восьмерки» на другой руке (рис. 214, вверху). Обратим внимание на пальцы рук, оказавшиеся выше соприкоснувшихся пальцев 7 и 8. На правой руке выше «восьмерки» оказалось два пальца, на левой выше «семерки» — три пальца. И в том, и в другом случае число пальцев над сомножителем указывает его дополнение до 10. Условимся называть эти пальцы верхними, а остальные — нижними. Число нижних пальцев на обеих руках указывает число десятков в ответе (в нашем случае их 5), произведение числа верхних пальцев на каждой руке дает число единиц (это произведение равно $2 \times 3 = 6$). В эпоху Возрождения умножение на пальцах было распространено по всей Европе.

В настоящее время этот метод имеет большую педагогическую ценность не только потому, что позволяет заинтересовать школьников младших классов, но и своей тесной связью с умножением биномов.

Вернемся к уже рассмотренному примеру — вычисление произведения 7×8 . Вместо дополнения каждого сомножителя до 10 представим его в виде $(5 + k)$, то есть запишем 7 в виде $(5 + 2)$, а 8 в виде $(5 + 3)$. Расположив биномы один под другим, произведем умножение:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 5 + 2 \\
 \quad 5 + 3 \\
 \hline
 \quad 15 + 6 \\
 25 + 10 \\
 \hline
 25 + 25 + 6 = 56
 \end{array}$$

Два первых слагаемых в последней строке составляют в сумме число нижних пальцев на обеих руках, умноженное на 10. Последнее слагаемое равно произведению верхних пальцев.

Умножение на пальцах нетрудно обобщить и на числа больше 10, хотя для тех пятерок чисел, у которых «замыкающее» число оканчивается на 5, правила приходится слегка изменять. Рассмотрим, например, числа 11, 12, 13, 14 и 15. Пусть требуется вычислить произведение 13×14 . Распределив числа по пальцам так, как показано на рис. 215, коснемся «четырнадцатым» пальцем одной руки (какой именно — правой или левой, — безразлично) «тринадцатого» пальца другой руки.

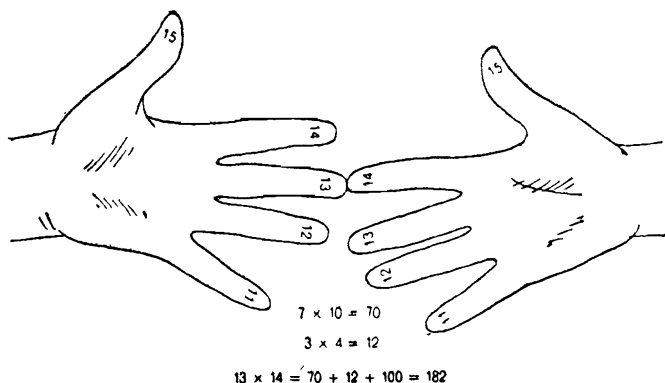


Рис. 215. Умножение на пальцах чисел от 11 до 15.

Умножив на 10 число нижних пальцев на обеих руках, получим 70. Вместо того чтобы прибавить к 70 произведение числа верхних пальцев на каждой руке, мы вычисляем произведение числа нижних пальцев на каждой руке $3 \times 4 = 12$ и прибавляем его к 70. Наконец, к полученной сумме требуется прибавить постоянную — число 100. Таким образом, окончательный ответ: $13 \times 14 = 100 + 70 + 12 = 182$.

Принцип действия ручной вычислительной машины проще всего («на пальцах») можно объяснить, если снова воспользоваться умножением биномов;

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{r} 10 + 3 \\ 10 + 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} 40 + 12 \\ 100 + 30 \end{array} \\
 \hline
 100 + 70 + 12 = 182
 \end{array}$$

Первое слагаемое — аддитивная постоянная, равно 100, за ним идет 70 — умноженное на 10 число нижних пальцев на обеих руках, и 12 — произведение числа нижних пальцев на левой руке на число нижних пальцев на правой руке.

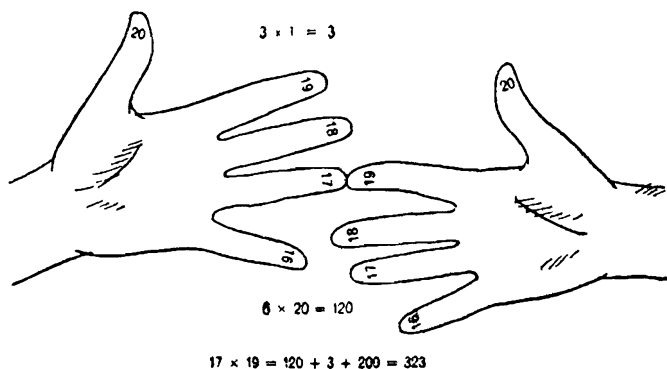
Для чисел из пятерок, в которых последнее число заканчивается нулем, правила умножения по существу такие же, как для чисел от 6 до 10, только число нижних пальцев на обеих руках умножается на другой ко-

эффицент и аддитивная постоянная имеет другое значение. Например, при умножении 17 на 19 (рис. 216) число нижних пальцев на обеих руках следует умножать на 20, а постоянная равна 200. Записав оба сомножителя в виде биномов, получим

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 10 + 7 \\
 \quad 10 + 9 \\
 \hline
 \quad \quad 90 + 63 \\
 100 + 70 \\
 \hline
 100 + 160 + 63 = 323
 \end{array}$$

Если слагаемые в последней сумме распределить несколько иначе, а именно $(100 + 100) + (60 + 60) + 3$, то число 323 можно будет представить в виде $200 + 120 + 3$. Первое слагаемое 200 означает постоянную, слагаемое 120 — умноженное на 20 число нижних пальцев на обеих руках, а последнее слагаемое 3 — произведение числа верхних пальцев на правой и левой руке в отдельности.

Для чисел от 1 до 50 коэффициенты, на которые надлежит умножать число нижних пальцев на обеих руках, и константы указаны в таблице. Если последнее число пятерки, в которую попадают интересующие нас числа, оканчивается нулем, то умножение производится по первой схеме, учитывающей верхние пальцы (так же как числа, заключенные в интервале от 6 до 10). Для чисел,



Р и с. 216. Умножение на пальцах чисел от 16 до 20.

**Таблица коэффициентов и аддитивных постоянных
для умножения на пальцах чисел от 1 до 50**

Десятки	Пятерки	Коэффициент, на который умножается число нижних пальцев на обеих руках	Постоянная
1	1—5	0	0
	6—10	10	0
2	11—15	10	100
	16—20	20	200
3	21—25	20	400
	26—30	30	600
4	31—35	30	900
	36—40	40	1200
5	41—45	40	1600
	46—50	50	2000

попадающих в пятерку, в которой последнее число оканчивается цифрой 5, умножение производится по второй схеме, игнорирующей верхние и учитывающей лишь нижние пальцы (по этой схеме мы умножали числа, заключенные в интервале от 11 до 15). Коэффициент, на который умножается число нижних пальцев на обеих руках, для первой схемы равен $10d$ (d — номер десятка), для второй $10(d-1)$. Постоянная для первой схемы (пятерок, последнее число которых оканчивается нулем) равна $100d(d-1)$, для второй схемы (пятерок, последнее число которых оканчивается цифрой 5) — $100(d-1)^2$.

Существуют формулы, позволяющие не различать пятерки, оканчивающиеся нулем, и пятерки, оканчивающиеся цифрой 5. Можно воспользоваться, например, следующим алгебраическим тождеством:

$$\begin{aligned}
 (a+x)(a+y) &= \\
 &= 2a(x+y) + (a-x)(a-y),
 \end{aligned}$$

переписав его в виде

$$\begin{aligned}(a+x)(a+y) &= \\ &= a(x+y) + xy + a^2,\end{aligned}$$

где x и y — последние цифры сомножителей, а число a — первое число пятерки — принимает значения 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

Можно ли умножать на пальцах числа, принадлежащие различным пятеркам, например 17×64 ? Оказывается, можно. Правда, при этом число нижних пальцев на левой и на правой руке приходится умножать на различные коэффициенты, вследствие чего весь метод несколько усложняется. Кроме того, большое число всегда можно разбить на несколько меньших, с которыми вычислительная машина «ручного» действия легко справляется, произвести умножение, а затем сложить результаты. Например, произведение 9×13 на пальцах можно вычислить, найдя 9×6 и 9×7 и сложив полученные результаты.

ОТВЕТЫ

Единственная расшифровка таинственной надписи, переданной с Венеры, имеет вид: $12 + 12 = 101$ (в троичной системе), или $5 + 5 = 10$ в более привычной для нас десятичной системе. Таким образом, на руке у жителей Венеры, вероятнее всего, 3 пальца.

Вычитать на пальцах в двоичной системе из числа вида $2^k - 1$ любое не превосходящее его число n проще всего так. Изобразив на пальцах в двоичной системе число n (как это делается, мы уже объясняли), разогнем все согнутые пальцы и, наоборот, согнем все пальцы, остававшиеся прямыми, что соответствует замене всех единиц нулями и всех нулей единицами. Прочитав новое число, «отложенное» на пальцах, получим ответ.

ГЛАВА 31

БУЛЕВА АЛГЕБРА, ДИАГРАММЫ ВЕННА И ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ*

Основателем формальной логики по праву считается Аристотель, хотя основное внимание он уделил рассмот-

* Полезным дополнением к этой главе может служить книга С. Г. Гиндикина «Алгебра логики в задачах», М., изд-во «Наука», 1972. — *Прим. перев.*

рению силлогизмов. Сейчас, когда логика переживает «вторую молодость» — период бурного развития — и силлогистика давно уже отошла на задний план, трудно поверить, что на протяжении двух тысячелетий логики в основном занимались изучением силлогизмов и что в 1797 г. Иммануил Кант писал о логике как о «замкнутой и завершенной теории».

«Приступая к силлогистическому выводу, — иронически заметил однажды Бертран Рассел, — вы должны заранее знать, что все люди смертны и что Сократ — человек. Отсюда вы делаете совершенно неожиданный для себя вывод о том, что Сократ смертен. Подобная форма умозаключений встречается на практике, хотя и чрезвычайно редко».

Далее Рассел говорит о единственном примере использования силлогистического вывода, о котором ему когда-либо приходилось слышать. В 1901 г. редакция философского журнала *Mind*, выходящего в Англии, выпустила специальный рождественский номер, не содержащий ни одной серьезной статьи. Все материалы номера носили юмористический характер. Это были шутки, пародии, литературные мистификации и т. п.

Получив рождественский выпуск журнала и обнаружив в нем какое-то объявление, один немецкий философ принялся рассуждать так: «Все, что напечатано в этом номере, — не более чем шутка. Объявление напечатано в этом номере. Следовательно, объявление — шутка».

«Если вы хотите стать логиком, — писал Рассел, — я могу настоятельно посоветовать вам лишь одно: не изучайте традиционную логику. На нее стоило тратить силы во времена Аристотеля, но тогда и птолемея астрономия была вполне достойна изучения».

Поворотный пункт в истории логики наступил в 1847 г., когда Джордж Буль (1815—1864), ученый-самоучка, сын бедного английского сапожника, опубликовал статью «Математический анализ логики». Эта и некоторые другие работы принесли Булю известность, и он, не имея ученой степени, получил приглашение занять должность профессора математики в Куинз-Колледж ирландского города Корка. Там он написал свой знаменитый трактат «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и

вероятности», вышедший в свет в 1854 г. в Лондоне. Основная идея труда — замена всех слов, употребляемых в формальной логике, символами — высказывалась и до «Исследований законов мышления», но Буль был первым, кому удалось разработать практически пригодную систему. У его современников (как математиков, так и философов) столь замечательное достижение не вызвало особого интереса. Не этим ли, в частности, объясняется крайне сочувственное и терпимое отношение Буля к чудачкам, не признанным официальной наукой того времени? Об одном из таких чудачков — жителе города Корка по имени Джон Уолш — Буль написал статью, опубликованную в журнале *Philosophical Magazine*. Известный английский логик Август Де Морган назвал эту статью Буля «единственной биографией самого необычного героя, о которой ему когда-либо приходилось слышать».

Немногие современники, сумевшие по достоинству оценить гений Буля (среди них особое место занимает немецкий математик Эрнст Шрёдер), быстро усовершенствовали несколько неуклюжие обозначения, предложенные самим Булем. Впрочем, все «пороки» первоначального варианта системы Буля были обусловлены стремлением ее автора сделать систему как можно более похожей на традиционную алгебру. В настоящее время, говоря о булевой алгебре, математик имеет в виду абстрактную систему символов, свойства которой описываются аксиоматически. Современная булева алгебра представляет собой не что иное, как упрощенный вариант системы, предложенный Булем в 1854 г.

Булеву алгебру, так же как и все другие абстрактные алгебры, можно интерпретировать множеством различных способов. Сам Буль интерпретировал свою систему в духе Аристотеля как алгебру классов и их отношений, но, выйдя за узкие рамки силлогистики, значительно расширил старую логику классов. Поскольку математики давно отказались от первоначальных обозначений, принятых в работе Буля, булеву алгебру в настоящее время принято записывать в обозначениях теории множеств. Под множеством современные математики понимают то же, что Буль подразумевал, говоря о классе: любой набор «индивидуальных» элементов, рассматриваемых как единое целое. Множество

может быть конечным (например, множество чисел 1, 2, 3; жителей штата Небраска с зелеными глазами; вершин куба; планет солнечной системы или любое другое множество, все элементы которого перечислены в списке конечных размеров). Множество может быть бесконечным (таково, например, множество всех четных чисел и, быть может, множество всех звезд во Вселенной). Выделим некоторое конечное или бесконечное множество и будем рассматривать все его «собственные подмножества» (в их число входит само множество и пустое множество, не содержащее ни одного элемента). Определив на «множестве всех собственных подмножеств данного множества» операцию теоретико-множественного включения (например, множество чисел 1, 2, 3 содержится — «включено» — в множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5), мы построим булеву алгебру множеств.

Множества, подмножества и их элементы принято обозначать буквами. Универсальное множество (самое большое из рассматриваемых множеств) обозначают буквой U , пустое множество — символом $\emptyset$. Объединение, или сумма, множеств a и b (все элементы, содержащиеся в множествах a и b) записывается в виде $a \cup b$. Так, объединением множеств чисел 1, 2 и 3, 4, 5 служит множество чисел 1, 2, 3, 4, 5. Пересечение множеств a и b (все элементы, принадлежащие одновременно множеству a и множеству b) записывается в виде $a \cap b$. Так, пересечение множеств чисел 1, 2, 3 и 3, 4, 5 состоит из числа 3. Если два множества a и b «равны» (например, множество нечетных чисел совпадает с множеством чисел, дающих при делении на 2 остаток 1), то между их символами ставят знак равенства: $a = b$. Дополнение множества a — все элементы универсального множества, не принадлежащие множеству a , обозначают символом a' . Так, если универсальным множеством выбран набор чисел 1, 2, 3, 4, 5, то дополнением множества чисел 1, 2 служит множество чисел 3, 4, 5. Основное бинарное («двухместное») отношение — принадлежность элемента a множеству b — обозначают специальным символом $\in$: $a \in b$ (a есть элемент множества b).

Для сравнения приведем первоначальную булевскую символику. Элементы классов, классы и подклассы Буль обозначал буквами, универсальный класс — единицей,

пустой — нулем. Объединение классов a и b записывалось в виде $a + b$. (Объединение, или сумму, классов Буль понимал в «исключительном» смысле, считая, что в $a + b$ входят лишь те элементы классов a и b , которые не принадлежат одновременно a и b . Объединение классов во «включительном» смысле — как класс элементов, принадлежащих по крайней мере одному из классов-слагаемых, — впервые ввел английский логик и экономист Джевонс. Интерпретация Джевонса оказалась намного удобнее и стала впоследствии общепринятой.) Пересечение классов a и b Буль обозначал $a \times b$, равенство — символом $a = b$, знаком минус — вычитание (изъятие) элементов одного множества из другого множества. Дополнение множества x Буль записывал в виде $1 - x$. Для включения одного класса в другой специального символа не было, но то, что все элементы класса a являются в то же время элементами класса b (в современных обозначениях $a \subseteq b$), в обозначениях Буля можно написать различными способами, например как $a \times b = a$ — пересечение классов a и b совпадает с классом a .

Булеву алгебру множеств можно наглядно изобразить с помощью изящных диаграмм, или кругов, названных в честь предложившего их английского логика Венна. Круги Венна используют для наглядного изображения в булевой алгебре топологических свойств плоскости. Пусть два перекрывающихся круга обозначают объединение двух множеств (рис. 217). В качестве одного множества выберем множество однозначных чисел, в качестве другого — множество 10 первых простых чисел. Прямоугольник, охватывающий оба круга, соответствует универсальному множеству. Часть прямоугольника, лежащая вне кругов, закрашена в темный цвет. Она соответствует пустому множеству — пустому потому, что других чисел, кроме тех, которые находятся в кругах, мы не рассматриваем. Шестнадцать чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19, 23 и 29 образуют сумму двух рассматриваемых множеств. Общая часть кругов содержит пересечение множеств — простые однозначные числа 2, 3, 5 и 7.

Условимся всегда закрашивать в темный цвет или заштриховывать пустое множество. Посмотрим, каким образом диаграмма Венна с тремя кругами позволяет

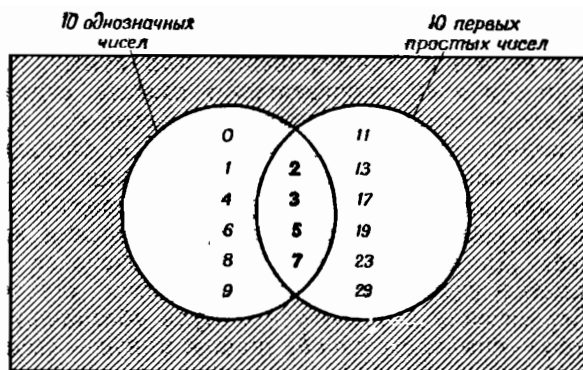


Рис. 217. Изображение объединения двух множеств (теоретико-множественной суммы) с помощью диаграммы Венна.

доказывать древний силлогизм, столь презрительно процитированный Расселом. Пусть круги обозначают соответственно множества людей, смертных и Сократов (последнее множество — единичное, оно содержит лишь один элемент). Первую посылку «Все люди смертны» мы изобразили на диаграмме, заштриховав ту часть множества людей, которая лежит вне множества смертных, чтобы показать, что эта часть множества людей пуста (рис. 218, слева). Вторую посылку «Сократ — человек» мы изобразим на диаграмме, заштриховав ту часть множества Сократов, которая лежит вне множества людей (рис. 218, справа). Проверим, верно ли заключение «Сократ смертен». Мы видим, что множество всех Сократов (та часть круга, которая отмечена точкой) лежит внутри круга, содержащего множество всех смертных. Следовательно, заключение силлогизма правильно. Так, используя топологические свойства простых замкнутых кривых, мы получили метод построения диаграмм, изоморфный булевой алгебре множеств.

Мысль о другой необычайно важной интерпретации булевой алгебры высказал еще сам Буль. Он заметил, что если сопоставить истинным высказываниям единицу, а ложным — нуль, то его систему можно будет распространить на высказывания, которые принимают лишь два значения истинности, то есть могут быть либо истинными, либо ложными. Сам Буль не осуществил

намеченную программу. Ее выполнили последователи Буля, создавшие исчисление высказываний. Этот раздел математической логики занимается изучением высказываний, которые могут быть либо истинными, либо ложными и соединены бинарными («двухместными») связками типа «Если p , то q », «Либо p , либо q , но не оба», «Либо p , либо q , либо оба», «Если и только если p , то q », «Не p и не q » и т. д. В таблице на стр. 381 показано соответствие между обозначениями булевой алгебры множеств и вычисления высказываний.

**Соответствие между обозначениями
двух интерпретаций булевой алгебры:
исчисления высказываний и булевой алгебры множеств**

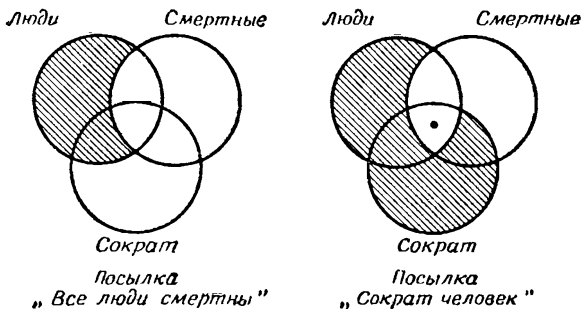
Булева алгебра множеств	Исчисление высказываний
U (универсальное множество)	$И$ (истина)
$\emptyset$ (пустое множество)	$Л$ (ложь)
$a, b, c, \dots$ (множества, подмножества, элементы множеств)	$p, q, r, \dots$ (высказывания)
$a \cup b$ (объединение множеств — все элементы, принадлежащие множествам a и b)	$p \vee q$ (дизъюнкция — либо p , либо q , либо оба высказывания истинны)
$a \cap b$ (пересечение множеств — элементы, принадлежащие одновременно множествам a и b)	$p \wedge q$ (конъюнкция — оба высказывания p и q истинны)
$a = b$ (равенство — множества a и b содержат одни и те же элементы)	$p \equiv q$ (эквивалентность — высказывание q истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание p)
a' (дополнение — все элементы U , не принадлежащие a)	$\sim p$ (отрицание — высказывание p ложно)
$a \in b$ (включение — a есть элемент множества b)	$p \supset q$ (импликация — если p истинно, то q истинно)

Изоморфизм, существующий между булевой алгеброй множеств и исчислением высказываний, нетрудно понять на примере уже рассмотренного нами силлогизма о Сократе. Вместо того чтобы переводить посылку «Все люди смертны» на язык теории множеств, мы заменим ее двумя высказываниями, соединенными связкой, которая известна под названием импликации: «Если x человек, то x смертен». С помощью кругов

Венна это составное высказывание изображается так же, как и отношение между множеством всех людей и множеством смертных. Более того, все бинарные операции исчисления высказываний допускают наглядное представление с помощью кругов Венна. Таким образом, диаграммы Венна можно использовать для решения не слишком сложных задач исчисления высказываний. К сожалению, это неизвестно большинству авторов учебников формальной логики. Они используют диаграммы Венна лишь для наглядного изображения логики отношений между классами, но не применяют их к области, где те не менее (а в действительности даже более) эффективны, — к исчислению высказываний. Более высокая эффективность кругов Венна в исчислении высказываний обусловлена тем, что в этом исчислении не рассматривается так называемый квантор существования, утверждающий, что некоторый класс непуст, поскольку тот содержит по крайней мере один элемент. В традиционной логике вместо квантора существования употребляют слово «некоторые» (например, «некоторые яблоки зеленые»). Именно для того, чтобы включить в свою систему такие высказывания, Булю пришлось пойти на чрезвычайные ухищрения.

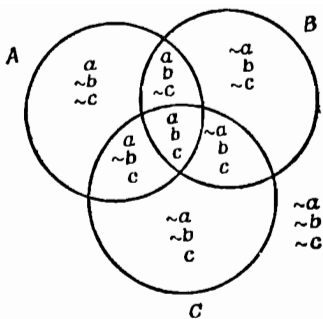
Чтобы убедиться в том, как легко круги Венна «расправляются» с некоторыми типами логических задач, рассмотрим следующие посылки о трех бизнесменах: Абнере (*A*), Билле (*B*) и Чарлзе (*C*), имеющих обыкновение завтракать друг с другом каждый рабочий день.

1. Если *A* заказывает martini, то *B* также заказывает martini.



Р и с. 218. Решение силлогизма с помощью диаграммы Венна.

Рис. 219. Условия задачи о трех бизнесменах, изображенные на диаграмме Венна.



2. Либо B , либо C заказывают картины, но никогда не делают этого в один и тот же день.

3. Либо A , либо C всегда заказывают картины, причем иногда делают это вместе.

4. Если C заказывает картины, то A также заказывает картины.

Что можно сказать о каждом из бизнесменов?

Изобразим посылки с помощью кругов Венна. Истинным условимся считать высказывание о том, что данное лицо заказало картины, ложным — о том, что оно воздержалось от заказа. Три пересекающихся круга разделяют плоскость на 8 частей, каждой из которых соответствует определенная комбинация значений истинности наших булевских переменных a , b и c (рис. 219). (Переменная a означает, что картины заказал Абнер, b — Билл и c — Чарлз). Так, часть плоскости, помеченная символами a , $\sim b$, c , соответствует высказыванию «Абнер и Чарлз заказали картины, Билл воздержался». Заштриховав те части плоскости, которые перечисленные выше четыре посылки позволяют считать пустыми (или, что то же, соответствующими ложным комбинациям переменных), выведите заключение о том, кто из трех бизнесменов заказывает картины.

Булева алгебра допускает и многие другие интерпретации. Ее можно рассматривать как частный случай *кольца* или *структуры* и интерпретировать на языке комбинаторики, теории информации, графов, матриц и метаматематических теорий дедуктивных систем. Одной из наиболее важных интерпретаций булевой алгебры, нашедшей широкое применение при разработке ЭВМ, в последние годы стали релейно-контактные схемы. Впрочем, значение этой интерпретации булевой алгебры выходит далеко за рамки теории электрических цепей. Она

применима к любому типу передачи энергии по каналам, соединительные узлы которых позволяют включать и выключать поток энергии, а также направлять его из одного канала в другой.

Поток энергии может принимать самые различные формы. Речь может идти о потоке жидкости или газа в трубопроводе, о лазерном луче или о механической энергии, как, например, в «логической машине», изобретенной Джевансом для решения задач булевой алгебры. Если бы обитатели некоторой планеты обладали тонким обонянием, то в своих вычислительных устройствах они могли бы использовать запахи, подавая соответствующий «букет» на вход и «вынюхивая» ответ задачи на выходе. Независимо от того, что представляет собой поток энергии, до сих пор нас интересуют лишь два его состояния (либо он есть, либо его нет), существует изоморфизм между этими двумя состояниями и двумя значениями истинности, которые могут принимать переменные в исчислении высказываний. Каждой связке, используемой в исчислении высказываний,

соответствует определенная релейно-контактная схема. Три такие схемы изображены на рис. 220. Нижнюю схему удобно использовать в тех случаях, когда одну и ту же лампу требуется включать или выключать из двух различных мест, например при входе и выходе из длинного коридора. Нетрудно видеть, что,

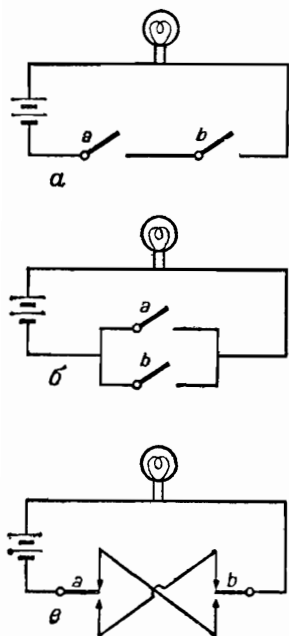


Рис. 220. Контактные схемы, реализующие три связки исчисления высказываний.

a — схема, реализующая связку «и». Лампа горит лишь в том случае, если оба контакта *a* и *b* замкнуты; *б* — схема, реализующая неисключающее «или». Лампа горит лишь в том случае, если по крайней мере один из контактов замкнут (либо *a*, либо *b*, либо оба); *в* — схема, реализующая исключающее «или». Лампа горит лишь в том случае, если замкнут только один контакт (либо *a*, либо *b*, но не оба).

какой бы из выключателей ни сработал «состояние» лампы изменяется на противоположное: если она была выключена, то загорается свет, если же она была включена, то свет гаснет.

Впервые мысль о применении булевой алгебры к теории электрических цепей была высказана в 1910 г. П. Эренфестом. Первым фундаментальным исследованием, обратившим внимание инженеров, занимавшихся проектированием ЭВМ, на возможность анализа электрических цепей с помощью булевой алгебры, была опубликованная в декабре 1938 г. статья Клода Шеннона «Символический анализ релейно-контактных схем». В основу ее была положена его диссертация (1937 г.)^{*}.

После выхода в свет статьи Шеннона проектирование любой ЭВМ не обходилось без применения булевой алгебры. Особенно ценной оказалась возможность упрощать релейно-контактные схемы и тем самым экономить дорогостоящие материалы. Электрическую схему «переводят» на язык исчисления высказываний, полученную формулу минимизируют с помощью различных приемов, а упрощенную формулу вновь переводят на язык электрических схем. Переключателями в современных ЭВМ служат не громоздкие магнитные реле и не диоды, а транзисторы и другие миниатюрные полупроводниковые детали, но поиск минимальных схем и поныне ведется с помощью булевой алгебры. После появления исторической работы Шеннона специалисты по математической логике работали почти в полном отрыве от своих коллег в других странах, что приводило к ненужному дублированию. Джерард Пиль в своей книге «Наука на службе человеку» сообщает, что американские математики нескольких крупных корпораций в течение 5 лет трудились над проблемами теории релейно-контактных схем. На работу было израсходовано 200 000 долларов, а в итоге ее были получены результаты, опубликованные в советских научных журналах задолго до того, как американские математики приступили к работе!

В заключение приведем еще одну весьма любопытную интерпретацию булевой алгебры. Рассмотрим множество из 8 чисел: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Числа эти

^{*} К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, М., ИЛ, 1963.

представляют собой не что иное, как делители числа 30. Определим «объединение» двух чисел как их наименьшее общее кратное, а «пересечение» — как наибольший общий делитель. Теоретико-множественное включение (« b содержится в a ») заменится отношением « b есть делитель числа a ». Универсальным множеством будет число 30, пустым — число 1, дополнением числа a — число $30/a$.

При таком несколько необычном понимании булевых операций множество делителей числа 30 превращается в булеву алгебру! Какую бы теорему абстрактной теории булевых алгебр мы ни взяли, ей будет соответствовать некая теорема о делителях числа 30. Например, в булевой алгебре множество дополнения дополнения множества a совпадает с самим множеством a . В исчислении высказываний отрицание отрицания эквивалентно отсутствию отрицания, или, что то же, лишь нечетное число отрицаний приводит к отрицанию высказывания. Применим эту теорему к числу 3. Его дополнением в рассматриваемом нами универсальном множестве служит число $30/3 = 10$. Дополнение числа 10 равно $30/10 = 3$. Итак, мы снова возвращаемся к исходному числу 3.

Рассмотрим далее два знаменитых правила булевой алгебры — так называемые законы Де Моргана. В теоретико-множественной трактовке булевой алгебры они имеют вид

$$(a \cup b)' = a' \cap b',$$

$$(a \cap b)' = a' \cup b',$$

а в вычислении высказываний

$$\sim (a \vee b) \equiv \sim a \wedge \sim b,$$

$$\sim (a \wedge b) \equiv \sim a \vee \sim b.$$

Подставив вместо a и b любые два множителя числа 30 и интерпретируя символы так, как объяснялось выше, читатель может убедиться в том, что законы Де Моргана выполняются и в нашей необычной системе. Существование двух законов Де Моргана не случайно. В этом проявляется знаменитый принцип двойственности булевых алгебр. Формулируется он следующим образом: истинность любой теоремы теории булевых ал-

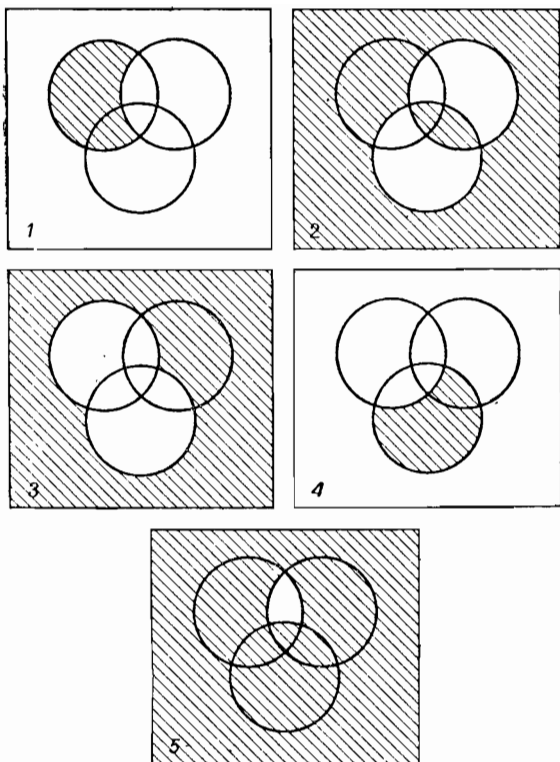


Рис. 221. Решение задачи о трех бизнесменах с помощью диаграммы Венна.

гебр не изменится, если объединения множеств заменить их пересечениями (и, наоборот, пересечения заменить объединениями), поменять местами универсальное и пустое множество и изменить на обратное теоретико-множественное включение. Более того, производя шаг за шагом указанные преобразования в доказательстве теоремы, мы получим доказательство двойственной теоремы! (Столь же изящный принцип двойственности выполняется в проективной геометрии, только там речь идет о замене прямых точками и точек прямыми.)

Множество чисел 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 и 210 — шестнадцать делителей числа

210 — также образуют булеву алгебру (роль универсального множества на этот раз выполняет число 210, а дополнением числа a служит число $210/a$). Можете ли вы указать простой способ построения булевых алгебр на множествах, состоящих из 2^n чисел, где n — любое натуральное число?

ОТВЕТЫ

Диаграммы Венна для задачи о трех бизнесменах представлены на рис. 221. Каждая из четырех посылок изображена на первых четырех диаграммах. Наложив их одна на другую, получим пятую диаграмму, из которой следует, что если посылки истинны, то единственно возможной комбинацией значений истинности является $a, b, \sim c$, то есть переменные a и b истинны, переменная c ложна. Таким образом, Абнер и Билл всегда заказывают мартини, а Чарлз всегда воздерживается.

Булеву алгебру из 2^n делителей одного числа при любом натуральном n можно построить следующим образом. Рассмотрим множество n различных простых чисел, например при $n = 3$ множество 2, 3, 5. Выпишем все возможные произведения этих чисел, дополним их нулем (пустое множество) и исходными числами. Заменим 0 на 1. Получится уже знакомый нам набор чисел 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Взяв четыре простых числа 2, 3, 5, 7, мы получим набор из $2^4 = 16$ делителей числа 210. Доказательство того, что множество получаемых таким способом чисел всегда образует булеву алгебру, предоставляем читателю.

ГЛАВА 32

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Величайшим математиком Европы в период Средневековья был Леонардо из Пизы, более известный по своему прозвищу Фибоначчи (*Fibonacci* — сокращение от *filius Bonacci* — сын Боначчи). Родившись в итальянском городе Пиза, Леонардо получил начальное образование в Алжире, где его наставниками были арабы. От них-то Леонардо и узнал о существовании индийской («арабской») десятичной системы с ее позиционными

обозначениями и нулем. Леонардо быстро осознал превосходство десятичной системы над широко распространенной в то время громоздкой и неуклюжей римской системой. В своем наиболее известном труде *Liber abaci* (что буквально означает «Книга об абак»; в действительности же сочинение Фибоначчи, задуманное как учебник для купцов, представляло собой обширный трактат по арифметике и алгебре, нечто вроде математической энциклопедии своего времени) Леонардо горячо отстаивал достоинства десятичной системы. На итальянских купцов — современников Леонардо его аргументы не произвели особого впечатления, но его книге была уготовлена более завидная судьба: она стала тем сочинением, по которому европейцы ознакомились с индийской десятичной системой. Работа над «Книгой об абак» была закончена в 1202 г., но до нас дошло лишь более позднее издание 1228 г., посвященное знаменитому астрологу того времени.

По иронии судьбы Леонардо, внесший существенный вклад в развитие математики, в наши дни известен в основном потому, что живший в прошлом веке французский математик Эдуард Люка (автор ставшего классическим четырехтомного труда по занимательной математике) назвал именем Фибоначчи числовую последовательность, возникающую в одной довольно тривиальной задаче из «Книги об абак». Вот эта задача в том виде, как ее формулирует сам Фибоначчи.

«Некто поместил пару кроликов в загоне, огороженном со всех сторон, дабы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство дают они со второго месяца после своего рождения. Поскольку первая пара в первом месяце дает потомство, то удвой число кроликов, и в первом месяце окажутся две пары. Из них одна, а именно первая, пара дает потомство и в следующем месяце, так что во втором месяце окажется три пары. Из них две пары в следующем месяце будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще две пары кроликов и число пар кроликов достигнет пяти. Из них пять пар произведут другие пять пар, которые, сложенные с восемью парами, дадут в пятом месяце тринадцать пар. Из них пять пар, рожденных в пятом месяце, не дают

Количество
месяцев

Всего
пар

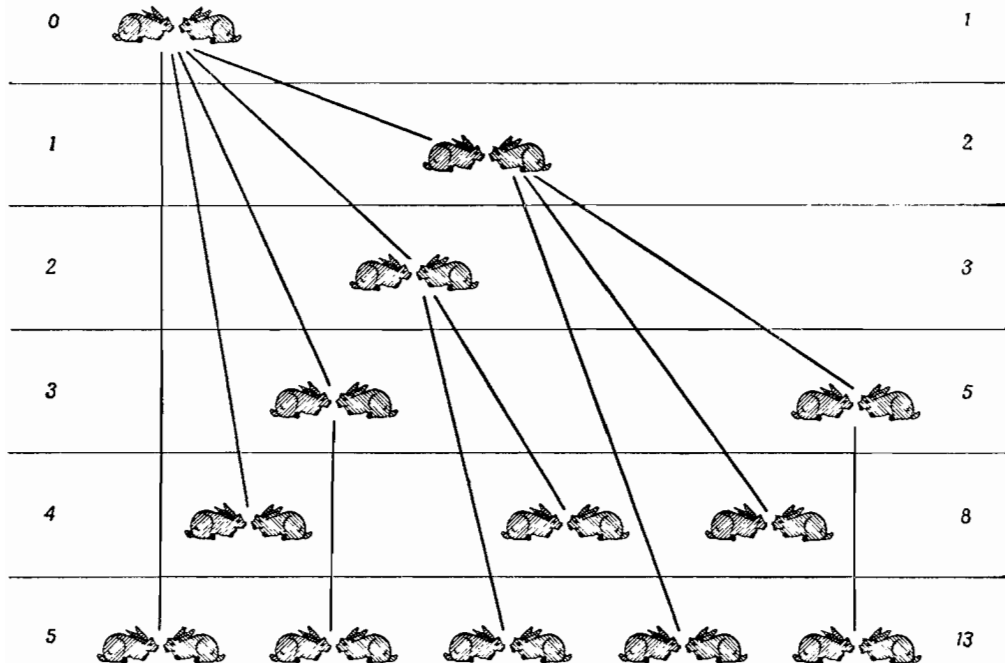


Рис. 222. Граф к задаче Фибоначчи о кроликах.

в том же месяце потомства, а остальные восемь пар дают, так что в шестом месяце оказывается двадцать одна пара. Сложенные с тринадцатью парами, которые родятся в седьмом месяце, они дают тридцать четыре пары. Сложенные с 21 парой, рожденной в восьмом месяце, эти пары составят пятьдесят пар. Сложенные с тридцатью четырьмя парами, рожденными в девятом месяце, последние дают восемьдесят девять пар; сложенные в свою очередь с пятьюдесятью пятью парами, которые рождаются в десятом месяце, они дают в этом месяце сто сорок четыре пары. Сложенные с восемьюдесятью девятью парами, которые рождаются в одиннадцатом месяце, они дают в этом месяце двести тридцать три пары. Сложенные вновь со ста сорока четырьмя парами, рожденными в последнем месяце, они дают триста семьдесят семь пар. Столько пар произвела первая пара в загоне к концу одного года».

На графе (дереве), изображенном на рис. 222, показано, как происходит размножение кроликов в течение первых пяти месяцев. Нетрудно видеть, что количество пар кроликов в конце каждого из месяцев образует последовательность 1, 2, 3, 5, 8, ... Каждый член этой последовательности, как заметил Фибоначчи, равен сумме двух предшествующих членов.

Сам Фибоначчи не стал заниматься изучением свойств ряда, который носит ныне его имя. Лишь в начале XIX в. работы, посвященные необычным свойствам чисел Фибоначчи, начали, как выразился один математик, «размножаться, как фибоначчиевы кролики». Люка изучил последовательности (носящие в настоящее время название «обобщенных последовательностей Фибоначчи»), которые начинаются с *любых* двух целых положительных чисел, а каждый их член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Простейшую из таких последовательностей, имеющую вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., Люка назвал последовательностью Фибоначчи. По традиции положение каждого члена последовательности указывается нижним индексом, так что $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ и т. д. Первые 50 чисел Фибоначчи представлены в таблице, помещенной на стр. 392.

Ряд Фибоначчи привлекал внимание математиков своей загадочной особенностью возникать в самых неожиданных местах. Немалую роль в популярности ряда

Первые 50 чисел Фибоначчи

n	F_n	n	F_n
1	1	26	121 393
2	1	27	196 418
3	2	28	317 811
4	3	29	514 229
5	5	30	832 040
6	8	31	1 346 269
7	13	32	2 178 309
8	21	33	3 524 578
9	34	34	5 702 887
10	55	35	9 227 465
11	89	36	14 930 352
12	144	37	24 157 817
13	233	38	39 088 169
14	377	39	63 245 986
15	610	40	102 334 155
16	987	41	165 580 141
17	1 597	42	267 914 296
18	2 584	43	433 494 437
19	4 181	44	701 408 733
20	6 765	45	1 134 903 170
21	10 946	46	1 836 311 903
22	17 711	47	2 971 215 073
23	28 657	48	4 807 526 976
24	46 368	49	7 778 742 049
25	75 025	50	12 586 269 025

Фибоначчи сыграла и его простота. Даже любитель, познания которого в математике не выходят за пределы школьного курса арифметики, может изучать свойства ряда и доказывать нескончаемое множество интереснейших теорем. В последнее время интерес к ряду Фибоначчи вновь оживился в связи с поиском оптимальных методов программирования для ЭВМ. Оказалось, что числа Фибоначчи с успехом применяются при машинной сортировке и обработке информации, генерировании случайных чисел и в методах, позволяющих быстро нахо-

дить приближенные значения максимумов и минимумов сложных функций, производные которых не известны*.

В США с 1963 г. издается даже специальный журнал *Fibonacci Quarterly*, посвященный изучению чисел Фибоначчи и их различных обобщений (например, чисел «трибоначчи», образующих последовательность, каждый член которой равен сумме трех предыдущих), а также других «целых чисел, обладающих какими-либо специальными свойствами».

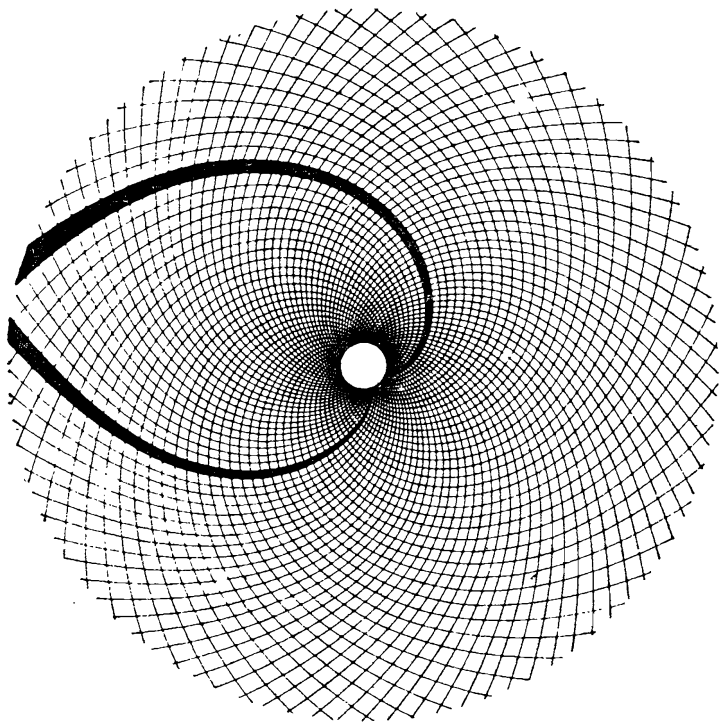
Наиболее замечательное свойство ряда Фибоначчи (разделяемое, впрочем, и обобщенными рядами Фибоначчи) состоит в том, что отношение двух последовательных членов ряда попеременно то больше, то меньше отношения золотого сечения и с возрастанием номера члена ряда разность между его отношением к предыдущему члену ряда Фибоначчи и отношением золотого сечения стремится к нулю. Таким образом, отношение золотого сечения ϕ — знаменитое иррациональное число, равное 1,61803 ..., можно представить в виде $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Золотому сечению и тесно связанному с ним ряду Фибоначчи, их проявлениям в природе, приложениям к искусству, архитектуре и даже поэзии посвящена обширная литература. Профессор классической филологии Принстонского университета Дж. Дакуорт в своей книге «Структурные схемы и пропорции «Энеиды» Вергилия» утверждает, что Вергилий и другие римские поэты той эпохи сознательно использовали размеры, связанные с числами Фибоначчи. О золотом сечении и числах Фибоначчи уже рассказывалось в гл. 23 книги «Математические головоломки и развлечения»**.

Числа Фибоначчи, пожалуй, удивительнее всего возникают при подсчете числа семян в спиральях, образующих «корзинку» подсолнуха. Как показано на рис. 223,

* Свойствам чисел Фибоначчи и их многочисленным приложениям посвящена брошюра Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (изд. 2-е; дополненное, М., изд-во «Наука», 1964 — серия «Популярные лекции по математике», вып. 6). — *Прим. перев.*

** См. также книгу Г. Вейля «Симметрия» (М., изд-во «Наука», 1968) и статью А. Д. Бензукидзе «Золотое сечение», опубликованную в журнале *Квант* (1973, № 8, стр. 22—27). О связи золотого сечения с шестнадцатисложным стихом «шайри», которым написана поэма Шота Руставели «Витязь в тигровой шкуре», рассказывается на стр. 34 и 53 того же номера *Кванта*. — *Прим. перев.*



Р и с. 223. Корзинка подсолнуха с 55 логарифмическими спиралями, закручивающимися по часовой стрелке, и 89 логарифмическими спиралями, закручивающимися против часовой стрелки.

головка подсолнуха как бы соткана из логарифмических спиралей, образующих два семейства: к одному относятся спирали, закручивающиеся по часовой стрелке, к другому — против часовой стрелки. Число спиралей в семействах различно и приближенно совпадает с двумя последовательными числами Фибоначчи. У подсолнуха средних размеров корзинка обычно содержит 34 спирали одного и 55 другого типа. У отдельных крупных экземпляров число спиралей достигает 89 и 144, а в корзинке одного гигантского подсолнуха насчитали 144 правых и 233 левых спиралей!

Тесная связь между отношением золотого сечения и числами Фибоначчи становится понятной, если n -е чис-

ло Фибоначчи представить в виде

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Эта формула позволяет точно вычислять любое число Фибоначчи, но при больших n выкладки становятся довольно громоздкими, хотя, воспользовавшись таблицами логарифмов, можно получить хорошее приближение F_n . Впрочем, вычислить F_n можно гораздо проще: для этого достаточно возвести в n -ю степень отношение золотого сечения φ , разделить полученное число на $\sqrt{5}$, а результат округлить до ближайшего целого числа. Обе формулы для F_n не рекуррентные: они позволяют вычислять F_n непосредственно по номеру n . Рекуррентный же алгоритм состоит из ряда шагов, каждый из которых использует предыдущие шаги. Простейший пример рекуррентного алгоритма мы получим, вычисляя F_n по формуле

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{при } n \geq 3).$$

Сумму n первых членов ряда Фибоначчи лучше всего находить, вычитая единицу из F_{n+2} . Например, чтобы ответить на вопрос «Чему равна сумма 20 первых чисел Фибоначчи?», нужно взять F_{22} , равное 17711, и вычесть из него 1. Таким образом, искомая сумма равна 17710.

Назовем еще несколько хорошо известных свойств чисел Фибоначчи. Большинство из них доказывается совсем просто.

1. Квадрат любого числа F_n на единицу отличается от произведения $F_{n-1} \cdot F_{n+1}$. Знак разности $F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1}$ при переходе от n к $n+1$ меняется на противоположный. Как и многие другие свойства ряда Фибоначчи, это чередование знаков оказывается общим свойством обобщенного ряда Фибоначчи, начинающегося с любых двух целых чисел. Разность между квадратом члена обобщенного ряда Фибоначчи и произведением предыдущего и последующего членов равна постоянной, знак которой при переходе от n к $n+1$ меняется на противоположный. Простейший из обобщенных рядов Фибоначчи 1, 3, 4, 7, 11, 18 ... (называемый рядом Люка) имеет постоянную разность, равную 5.

2. Сумма квадратов любых двух последовательных членов ряда Фибоначчи F_n^2 и F_{n+1}^2 равна F_{2n+1}^2 : $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}^2$.

$+ F_{n+1}' = F_{2n+1}'$. Индекс последнего числа должен быть четным. Это следует из более общей теоремы о сумме квадратов последовательных членов ряда Фибоначчи, которая всегда равна квадрату некоторого числа Фибоначчи с нечетным индексом.

3. Для любых четырех последовательных членов ряда Фибоначчи A, B, C и D справедливо соотношение $C^2 - B^2 = AD$.

4. Последние цифры чисел Фибоначчи образуют периодическую последовательность с периодом 60. Если от каждого числа Фибоначчи брать по две последние цифры, то они также образуют периодическую последовательность с периодом, равным 300. Периодичность наблюдается и в последовательностях, образованных тремя, четырьмя, пятью и т. д. последними цифрами ряда Фибоначчи. Для трех цифр период равен 1500, для четырех — 15 000, для пяти — 150 000.

5. Для любого целого числа m существует бесконечно много чисел Фибоначчи, делящихся на m без остатка, причем по крайней мере одно такое число — среди m^2 первых членов ряда Фибоначчи.

6. Каждое третье число Фибоначчи делится на 2, каждое четвертое — на 3, каждое пятое — на 5, каждое шестое — на 8 и т. д. (делители сами образуют ряд Фибоначчи). Последовательные члены ряда Фибоначчи, так же как и последовательные члены ряда Люка, просты, то есть не имеют общих делителей, кроме 1.

7. Если не считать $F_4 = 3$, то всякое число Фибоначчи, которое просто, имеет простой индекс (например, число 253 просто и индекс его, равный 13, также прост). Иначе говоря, если индекс числа Фибоначчи выражается составным (непростым) числом, то и само число Фибоначчи составное. К сожалению, обратное утверждение справедливо не всегда: простой индекс отнюдь не означает, что соответствующее число Фибоначчи просто. Первым контрпримером служит $F_{19} = 4181$. Индекс его прост, но само число разлагается на множители, отличные от 1: $4181 = 37 \times 113$.

Если обратная теорема выполнялась во всех без исключения случаях, то был бы решен самый трудный из вопросов о числах Фибоначчи, ответ на который пока остается неизвестным: существует ли бесконечно много простых чисел Фибоначчи? Мы знаем, что простых чисел

бесконечно много, поэтому если бы числа Фибоначчи с простыми индексами были просты, то и простых чисел Фибоначчи было бы бесконечно много. Пока же никто не знает, существует ли наибольшее простое число Фибоначчи (то есть обрывается ли последовательность простых чисел Фибоначчи или продолжается неограниченно далеко).

8. Если исключить тривиальные случаи 0 и 1 (0 рассматривается как число Фибоначчи с нулевым индексом: $F_0 = 0$), то единственным квадратом среди чисел Фибоначчи является $F_{12} = 144$. Любопытно, что оно совпадает с квадратом своего индекса. Долгое время не удавалось установить, существует ли $F_n > 144$, которое было бы полным квадратом. Вопрос был отрицательно решен в 1963 г. английским математиком Дж. Коном. Он также показал, что числа 1 и 4 являются единственными квадратами среди членов ряда Люка.

9. Величину, обратную $F_{11} = 89$, можно получить, выписав подряд после запятой члены ряда Фибоначчи и сложив их следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 0,0112358 \\
 13 \\
 21 \\
 34 \\
 55 \\
 89 \\
 144 \\
 233 \\
 \vdots \\
 \hline
 0,011235955040673 \dots = 1/89
 \end{array}$$

Перечень свойств чисел Фибоначчи можно было бы продолжать еще долго. Не менее обширным было бы перечисление примеров того, как ряд Фибоначчи возникает в различных физических и математических задачах. (В гл. 17 настоящей книги мы уже отмечали его «появление» на диагоналях треугольника Паскаля.) В 1963 г. Лео Мозер занялся изучением путей, проходимых лучом света, наклонно падающего на две сложенные вместе стеклянные пластинки. Луч, не претерпевший ни одного

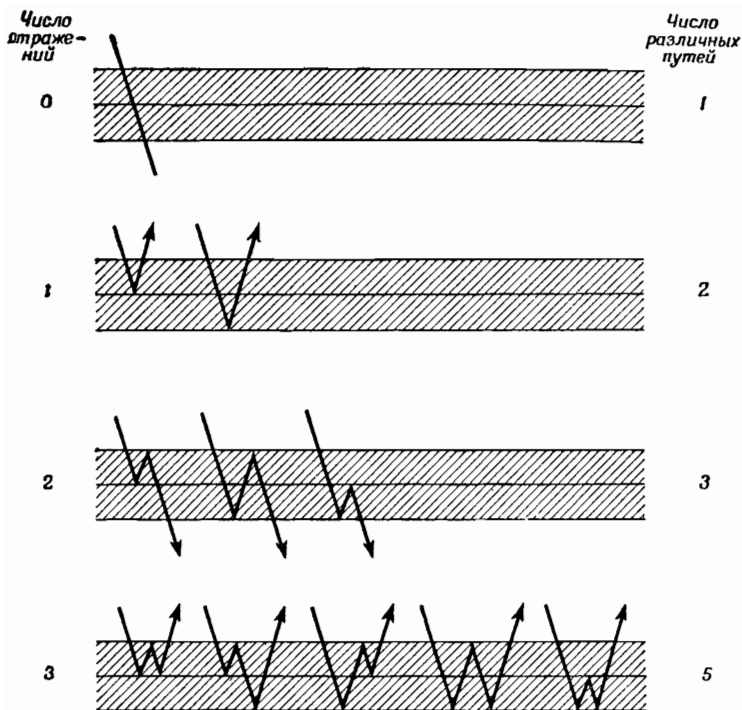


Рис. 224. Задача об отражении наклонно падающего луча света от двух стеклянных пластинок.

отражения, проходит сквозь пластинки по одному пути (рис. 224). Если луч претерпевает одно отражение, то возникают два пути. При двух отражениях число путей равно трем, при трех — пяти. При больших значениях числа отражений числа возможных путей образуют ряд Фибоначчи: при n отражениях число путей равно F_{n+2} .

Та же последовательность возникает и при рассмотрении различных путей, по которым пчела может ползать по сотам (рис. 225). Соты простираются вправо как угодно далеко. Предположим, что пчела всегда переползает из одной ячейки на соседнюю справа. Нетрудно видеть, что из ячейки, в которой пчела изображена на рис. 224, в ячейку 0 ведет один путь, в ячейку 1 — два пути, в ячейку 2 — три пути, в ячейку 3 — пять путей

и т. д. Так же как и в задаче об отражении луча света, при n ячейках число возможных путей равно F_{n+2} .

Рассмотрим теперь «фибоначчиев ним» — игру, изобретенную несколько лет назад Робертом Гаскеллом. Для игры в фибоначчиев ним нужно взять n фишек (кашечек, пуговиц, монет и т. п.). Играющие делают ходы по очереди. Тот, кто открывает игру, не может забрать все фишки, но, начиная со второго хода, каждому из игроков разрешается забирать любое число фишек, если при этом не нарушаются следующие правила. При очередном ходе каждый игрок должен взять не менее одной фишки, но не более удвоенного числа фишек, взятых его противником при предыдущем ходе. Например, если один игрок во время предыдущего хода взял три фишки, то его противник следующим ходом может взять не больше шести фишек. Выигрывает тот, кто берет последнюю фишку.

Если число фишек в начале игры совпадает с одним из чисел Фибоначчи, то тот из игроков, кто делает второй ход, всегда может выиграть, в противном случае выигрывает игрок, делающий первый ход. Предположим, что в начале игры имеется 20 фишек (20 — «нефибоначчиево» число). Сколько фишек должен взять на первом ходу игрок, открывающий игру, чтобы обеспечить себе выигрыш?

С числами Фибоначчи связан и следующий малоизвестный прием «молниеносного» устного счета. Повернувшись к зрителю спиной, попросите его написать одно под другим любые два числа и, сложив их, получить третье число, равное сумме первых двух. Подписав третье число под вторым и сложив последние два числа, зритель получит четвертое число и т. д. до тех пор, пока у него не образуется столбик из 10 чисел — отрезок обобщенного ряда Фибоначчи, у которого любой член,

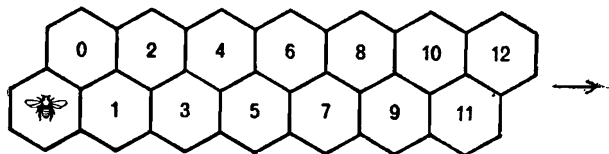


Рис. 225. Задача о пчеле, ползающей по сотам. Для n ячеек существует F_{n+2} различных путей.

кроме случайно выбранных двух первых членов, равен сумме двух предыдущих членов. Вы поворачиваетесь к зрителю, подводите черту под последним (десятым) числом и тотчас же выписываете сумму всех 10 чисел.

Секрет чудодейственного трюка прост: чтобы получить ответ, вы должны лишь умножить на 11 седьмое число. Это нетрудно сделать в уме. Предположим, что седьмое число равно 928. Ясно, что произведение 928×11 оканчивается цифрой 8. Прибавив к 8 следующую цифру 2, получим 10. Следовательно, второй справа цифрой произведения будет 0, а 1 мы переносим в следующий разряд. Сумма следующих двух цифр 9 и 2 равна 11. Добавив перенесенную из предыдущего разряда 1, получаем 12. Итак, третья справа цифра произведения равна 2. Записав 2 слева от 0, снова переносим 1 в следующий разряд. Прибавив ее к 9, получаем 10. Эту десятку приписываем слева к трем уже найденным цифрам 208 и получаем полную сумму 10 208. Таким образом, двигаясь справа налево, вы должны попарно складывать цифры седьмого числа, перенося в случае необходимости единицу в следующий разряд. Можете ли вы объяснить, почему сумма 10 первых членов обобщенного ряда Фибоначчи всегда равна седьмому члену, умноженному на 11?

ОТВЕТЫ

Представим число 20 (число фишек в начале игры) в виде суммы чисел Фибоначчи так, чтобы первым слагаемым было наибольшее из чисел Фибоначчи, не превосходящих 20 ($F_7 = 13$), затем шло следующее по величине ($F_5 = 5$) и т. д. Мы получим разложение $20 = F_7 + F_5 + F_2 = 13 + 5 + 2$. Каждое натуральное число можно разложить в сумму чисел Фибоначчи, расположенных в порядке убывания одним и только одним способом. Если число фишек в начале игры совпадает с одним из чисел Фибоначчи, то разложение состоит из одного-единственного слагаемого: самого числа. Ни одно разложение такого рода не содержит двух последовательных чисел Фибоначчи.

Последнее слагаемое в разложении (равно в рассматриваемом нами случае 2) показывает, сколько фишек должен взять игрок, делающий первый ход. Правила игры в фибоначчиев ним запрещают второму игроку брать более четырех фишек, поэтому он никак не может уменьшить число оставшихся фишек (равное 18) до ближайшего числа Фибоначчи $F_7 = 13$. Предположим, что второй игрок взял четыре фишки и на столе осталось 14 фишек. Разложив 14 в сумму чисел Фибоначчи, расположенных в порядке убывания ($14 = F_7 + F_2 = 13 + 1$), его противник увидит, что следующим ходом он должен забрать одну фишку. Придерживаясь этой стратегии, первый игрок всегда сумеет обеспечить себе выигрыш.

Если число фишек в начале игры совпадает с одним из чисел Фибоначчи, например с $F_{12} = 144$, то второй игрок всегда может выиграть. Действительно, ничто не мешает первому игроку, открывая игру, взять $F_{10} = 55$ фишек, но тогда второй игрок тотчас же выиграет, взяв оставшиеся $F_{11} = 89$ фишек, поскольку $89 < 2 \cdot 55$. Таким образом, первый игрок вынужден, открывая игру, забирать столько фишек, чтобы число оставшихся фишек не совпадало ни с одним из членов ряда Фибоначчи. Но тогда второй игрок заведомо обеспечит себе выигрыш, следуя стратегии, которая ранее обеспечивала выигрыш первому игроку.

Докажем, что сумма первых десяти членов любого обобщенного ряда Фибоначчи всегда равна седьмому члену, умноженному на 11. Пусть a и b — два первых члена обобщенного ряда Фибоначчи. Запишем первые 10 его членов и их сумму в виде

$$\begin{array}{rcl}
 1. & a & \\
 2. & & b \\
 3. & a + & b \\
 4. & a + & 2b \\
 5. & 2a + & 3b \\
 6. & 3a + & 5b \\
 7. & 5a + & 8b \\
 8. & 8a + & 13b \\
 9. & 13a + & 21b \\
 10. & 21a + & 34b \\
 \hline
 & 55a + & 88b
 \end{array}$$

Ясно, что $55a + 88b = 11(5a + 8b)$. Обратите внимание на то, что коэффициенты при a и b образуют две последовательности Фибоначчи.

ГЛАВА 33

НОВЫЕ ИГРЫ: «ГОНКИ», «СИМ» И «ЩЕЛК!»

Среди многочисленных математических игр, появившихся в последнее время, особое место занимают игры в имитацию, моделирующие самые разнообразные явления в природе и в обществе: вооруженные конфликты, загрязнение окружающей среды, операции на бирже, размножение микроорганизмов и т. д.

В этой главе мы расскажем о трех новых необычных играх. Чтобы играть в них, не требуется ни специальных досок, ни иного «оборудования». Необходимо лишь иметь лист бумаги (для первой игры необходимо взять бумагу в клеточку), карандаш и набор фишек (для третьей игры).

В первой игре — «Гонки» — весьма точно воссоздается атмосфера автомобильных гонок. Изобретатель игры не известен.

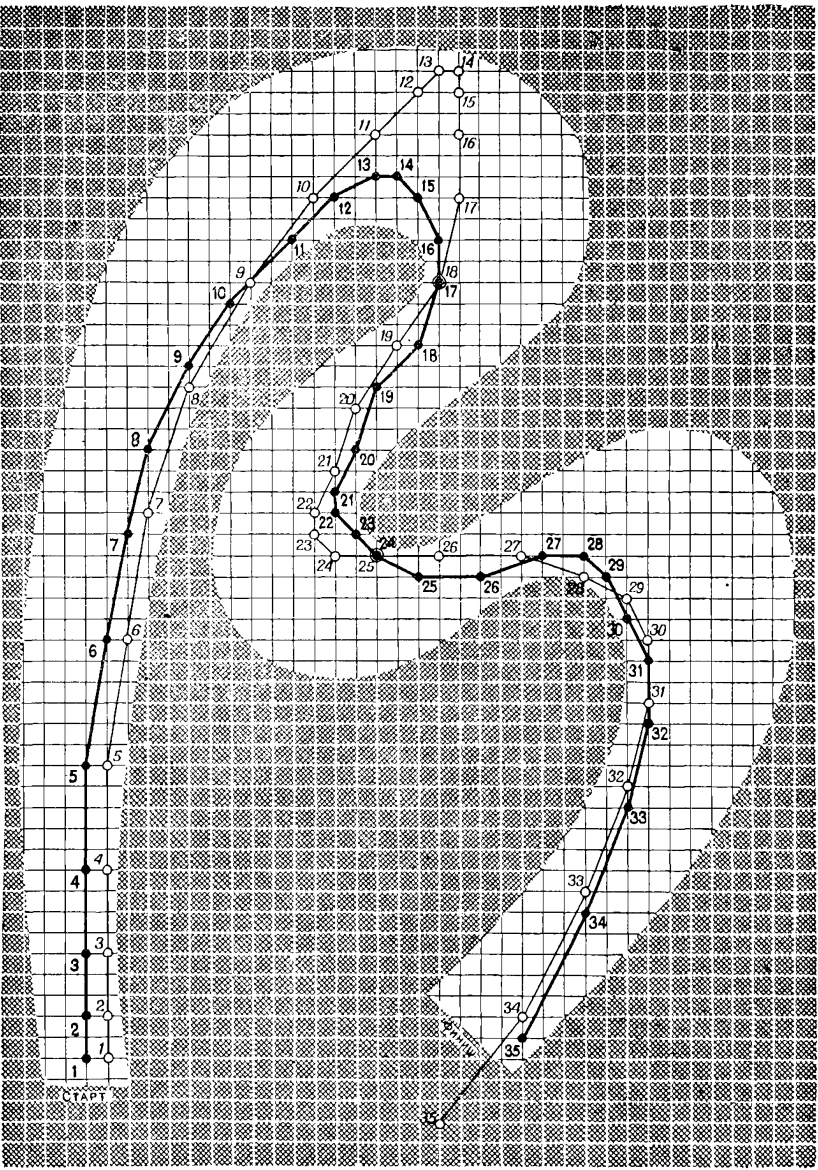
Играют в «Гонки» на листе бумаги в клеточку. Прежде всего необходимо начертить «трек». Он должен быть достаточно широким, чтобы в нем свободно умещались автомобили «гонщиков». Трек может быть любой длины и формы, но чтобы «Гонки» были интереснее, следует включить в него несколько крутых поворотов (рис. 226). Каждый гонщик «вооружается» карандашом своего цвета (на рис. 226 один гонщик проводит толстые, другой — тонкие линии). Машины выстраиваются на старте (участники игры ставят точки в узлах сетки, расположенных на одной горизонтали). На рис. 226 мы для простоты будем рассматривать случай, когда в гонках участвуют лишь две машины. Кому отправляться первым, решает жребий. В партии, изображенной на рис. 226, первый ход делает гонщик, изображающий свой путь толстой линией.

Может быть, вы подумали, что дальнейшие ходы определяются с помощью датчика случайных чисел? Ничуть не бывало! Каждый гонщик, дождавшись своего хода, движется вперед по треку от одного узла сетки к другому, придерживаясь следующих трех правил:

1. Новый узел и отрезок прямой, соединяющий его с предыдущим узлом, не должны выходить за пределы трека.

2. Две машины не могут одновременно находиться в одном и том же узле сетки. Иначе говоря, второе правило запрещает столкновение машин. Например, в партии, изображенной на рис. 225, гонщик, ведущий тонкую линию, предпочел бы на 22-м ходу занять узел, в котором оказался на 22-м ходу его противник, но, поскольку правилами игры столкновение запрещено, он вынужден свернуть в сторону.

3. Разгон и торможение регулируются следующим остроумным способом. Предположим, что на предыдущем



Р и с. 226. «Трек» для игры в «Гонки».

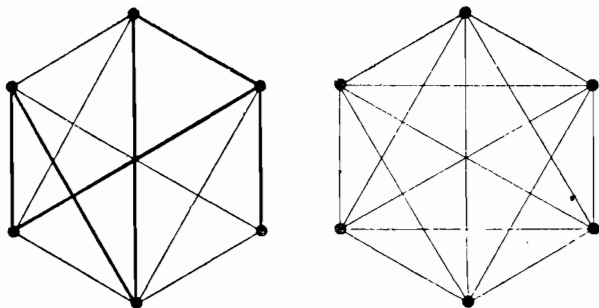
ходу вы переместились на k единиц по вертикали и на m единиц по горизонтали, а при очередном ходе — на k' единиц по вертикали и на m' единиц по горизонтали. Согласно третьему правилу, модуль разности между k и k' должен быть равен либо 0, либо 1 (иначе говоря, разности $k - k'$ разрешается принимать значения -1 , 0 и $+1$). Модуль разности $m - m'$ также может быть равен 0 или 1. Таким образом, каждый гонщик либо сохраняет скорость, либо изменяет ее на единицу по вертикали (вверх или вниз — безразлично) и по горизонтали (вправо или влево). Следовательно, третье правило разрешает каждому гонщику на первом ходу удалиться от его места на старте не более чем на одну единицу по вертикали, горизонтали или на длину диагонали единичного квадрата.

Выигрывает тот из гонщиков, кто первым пересечет линию финиша. Гонщик, столкнувшийся с машиной соперника или оказавшийся за пределами трека, выбывает из игры. На рис. 226 гонщик, ведущий толстую линию, при прохождении первого «виража» тормозит слишком медленно и его заносит так сильно, что он едва не врежется в «стенку» трека. Зато он великолепно проходит второй вираж и выигрывает гонки, пересекая линию финиша на один ход раньше своего соперника.

Вторая игра называется «Сим» в честь ее изобретателя Густава Симмонса, специалиста по теории графов, придумавшего «Сим» во время работы над диссертацией. Аналогичные идеи высказывались другими математиками и раньше, но Симмонс был первым, кто придал игре законченную форму, опубликовал ее и подробно проанализировал с помощью ЭВМ. Название игры было выбрано по созвучию с известной игрой в ним.

Играют в «Сим» так. На листе бумаги в вершинах правильного шестиугольника расставляют точки. Соединяя попарно вершины шестиугольника отрезками прямых всеми возможными способами, мы получаем 15 отрезков. Они образуют так называемый полный граф вершин шестиугольника (рис. 227). Играют в «Сим» вдвоем. Каждый из игроков по очереди проводит (своим цветом) одно из ребер полного графа. Проигравшим считается тот, кто первым вычертит треугольник «своего» цвета.

Выбор шестиугольника, разумеется, не случаен. Можно показать, что если ребра хроматического графа окра-



Р и с. 227. Игра в «Сим».

шены лишь в две краски, то шесть — наименьшее число точек, полный хроматический граф которых заведомо содержит «монохроматический» треугольник (со сторонами одного цвета).

Изобретатель «Сима» доказывает эту теорему следующим образом.

«Рассмотрим любую вершину полного «бихроматического» (с ребрами красного и синего цвета) графа вершин шестиугольника. Поскольку из нее исходят пять ребер, по крайней мере три из них должны быть одного и того же цвета, например синими. Если одно из трех ребер, соединяющих противоположные концы этих синих ребер, было синим, то оно замыкало бы периметр монохроматического (синего) треугольника. Если же все три ребра, соединяющие концы синих ребер, красные, то они также образуют монохроматический (красный) треугольник. Следовательно, на полном графе должен существовать по крайней мере один монохроматический треугольник, ничья при игре в «Сим» невозможна».

Несколько сложнее доказывается более сильное утверждение: на полном графе с шестью вершинами должно существовать по крайней мере два монохроматических треугольника. Известный специалист по теории графов Френк Харари назвал граф игры в «Сим» «графом знакомств», потому что этот граф решает одну старую головоломку. Формулируется она так: «Докажите, что из любых шести людей всегда можно выделить троих, которые либо все знакомы, либо все незнакомы между собой. Харари не только доказал, что в полном

бихроматическом графе всегда найдется по крайней мере два монохроматических треугольника, но и получить гораздо более сильный результат. Оказывается, что в полном бихроматическом графе вершин шестиугольника, содержащем ровно два монохроматических треугольника, треугольники будут различных цветов в том и только в том случае, если они имеют лишь одну общую вершину.

Поскольку игра в «Сим» не может закончиться вничью, первый или второй игрок непременно должен выиграть. Подробный анализ, проведенный Симмонсом с помощью ЭВМ, показал, что при рациональной стратегии второй игрок всегда мог бы обеспечить себе выигрыш. Из-за симметрии правильного шестиугольника все первые ходы одинаковы. Как показали расчеты на ЭВМ, второй игрок мог бы одержать победу независимо от того, каким ходом он ответит на первый ход своего противника. (В действительности из-за симметрии шестиугольника существуют лишь два неэквивалентных вторых хода: второй игрок может провести ребро, либо связанное с ребром, проведенным первым игроком, либо лежащее в стороне от него.) После того как первый игрок сделает свой второй ход, ровно половина оставшихся ходов ведет к победе второго игрока и ровно половина — к его поражению (разумеется, при условии, что оба игрока будут придерживаться рациональных стратегий). Если 14 ходов не принесли победы ни одному из игроков, то первый игрок, проведя ребро на следующем ходу, непременно замкнет два монохроматических треугольника своего цвета. Вид графа, не принесшего после 14 ходов победы ни одному из игроков, всегда один и тот же (точнее, все графы, не приносящие после 14 ходов победы ни одному из игроков, топологически эквивалентны). Не сумеете ли вы так раскрасить в два цвета 14 ребер графа игры в «Сим», чтобы в нем было по 7 ребер одного и другого цвета и не содержалось ни одного монохроматического треугольника?

Самый интересный из вопросов, возникающих при анализе игры в «Сим», можно сформулировать следующим образом. Существует ли сравнительно простая стратегия, позволяющая второму игроку одерживать победу и избавляющая его от необходимости запоминать правильные ответы на любой ход противника? Даже имея

под рукой полное дерево игры (такое дерево было получено Симмонсом с помощью ЭВМ), второй игрок с трудом может пользоваться своей «шпаргалкой», поскольку отождествлять позицию, возникающую в игре, с той или иной вершиной довольно сложно.

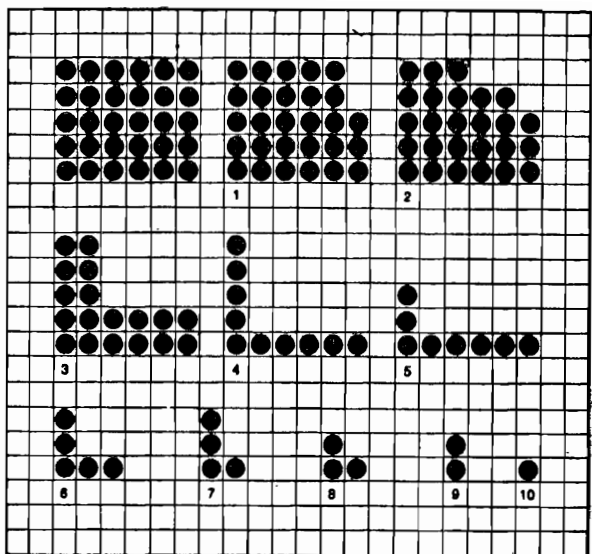
В «Сим» можно играть и на других графах. На полных графах для трех и четырех точек игра тривиальна, при числе точек, большем шести, — слишком сложна. Игра в «Сим» на полном графе вершин правильного пятиугольника вполне содержательна и интересна. Хотя ничьи теоретически возможны, не доказано, что они возникнут в том случае, если оба игрока будут придерживаться оптимальных стратегий.

Третью игру, названную нами «Щелк!», изобрел уже известный нашим читателям Дэвид Гейл (в гл. 5 книги «Математические досуги» мы рассказывали о топологической игре Гейла «Бридж-ит»). «Щелк!» принадлежит к числу игр того же типа, что и ним.

Для игры в «Щелк!» необходимо запастись фишками (если фишек под рукой нет, играть в «Щелк!» можно на бумаге в клеточку, ставя и зачеркивая нолики). Фишки выстраивают в форме прямоугольника (рис. 228). Играют в «Щелк!» вдвоем, игроки делают ходы по очереди.

Каждый ход состоит в следующем. Игрок выбирает любую фишку, мысленно проводит через ее центр два взаимно перпендикулярных луча: один горизонтальный — на восток от центра фишки и один вертикальный на север от него. Все фишки, оказавшиеся внутри прямого угла, образованного лучами, игрок снимает. Таким образом, игроки по очереди как бы откусывают прямоугольные куски от прямоугольного же кекера, вгрызаясь в него с северо-востока (щелкание их «челюстей» звучит в названии игры). Выигрывает тот, кто заставит противника взять «отравленную» фишку, стоящую в левом нижнем углу. Обращение игры (игра, в которой выигрывает тот, кто берет отравленную фишку) тривиально, поскольку первый игрок всегда может взять отравленную фишку на первом же ходу, «проглотив» весь прямоугольник.

Что известно об игре в «Щелк!»? Во-первых, стратегии, обеспечивающие выигрыш в двух частных случаях.

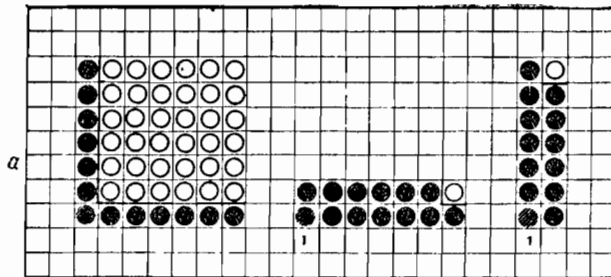


Р и с. 228. Игра в «Щелк!».

В исходной позиции фишки расставлены в виде прямоугольника 5×6 .

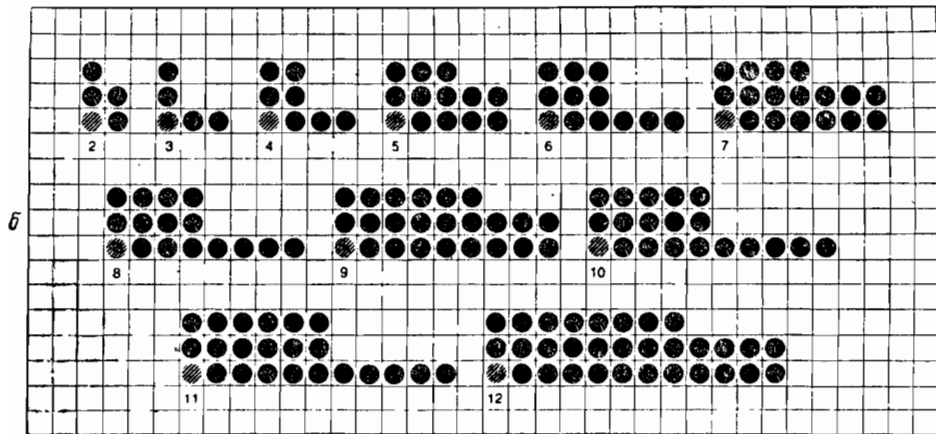
1. Если фишки в начале игры выстроены в виде квадрата, то первый игрок выигрывает, откусив квадрат, вдоль стороны которого уместается лишь на одну фишку меньше, чем вдоль стороны исходного квадрата. После такого хода остается лишь один горизонтальный и один вертикальный ряд фишек, образующих прямой угол с вершиной в «отравленной» фишке (рис. 229, а). Начиная со своего следующего хода, первый игрок отвечает на ходы противника «по симметрии»: если противник снимает k фишек с вертикали, он снимает k фишек с горизонтали, и наоборот. В конце концов противнику не остается ничего другого, кроме как «принять яд» — взять отравленную фишку.

2. Если в начале игры фишки выстроены в виде прямоугольника $2 \times n$, то первый игрок всегда может добиться победы, «откусывая» фишку, расположенную в правом верхнем углу (рис. 229, а). В нижнем ряду после этого останется на одну фишку больше, чем в верхнем. Эту ситуацию первый игрок и должен восстанавливать



Р и с. 229. Первые ходы, обеспечивающие выигрыш при игре в «Щелк!».

a — в исходной позиции фишки расставлены в виде квадрата и прямоугольников $2 \times n$ и $n \times 2$; *b* — в исходной позиции фишки расставлены в виде прямоугольников $3 \times n$ с n от 2 до 12.



после каждого своего последующего хода. Нетрудно видеть, что он всегда может «откусить» необходимую часть крекера и что такая стратегия гарантирует ему выигрыш. Аналогичная стратегия обеспечивает выигрыш первому игроку и в том случае, если в начале игры фишки выстроены в виде прямоугольника $n \times 2$. Единственное отличие состоит лишь в том, что после очередного хода первого игрока левый ряд должен быть на одну фишку выше правого.

Во-вторых (именно это и придает игре в «Щелк!» особый интерес), хотя общая стратегия, обеспечивающая выигрыш первому игроку, не известна, тем не менее можно весьма просто доказать, что первый игрок всегда может выиграть. Так же как и аналогичные доказательства для игры в «Бридж-ит», гекс, обобщенные крестики и нолики, доказательство существования выигрышной стратегии для первого игрока при игре в «Щелк!» неконструктивно. Оно лишь утверждает, что выигрышная ситуация существует, ничего не сообщая о том, как ее найти.

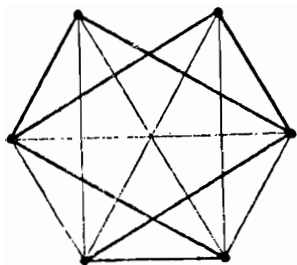
Существенную роль в доказательстве играет взятие фишки, стоящей в правом верхнем углу. Имеются две возможности: либо этот ход ведет к выигрышу, либо к поражению. Если взятие первым игроком фишки, стоящей в правом верхнем углу, ведет к проигрышу, то второй игрок может парировать его ходом, ведущим к выигрышу. Иначе говоря, второй игрок, делая свой первый ход, может откусить от оставшегося крекера такую часть, что позиция станет заведомо проигрышной для первого игрока. Однако, независимо от того, как пойдет второй игрок, он оставит после себя позицию, которую мог бы оставить после своего первого хода первый игрок, «откуси» он кусок побольше. Следовательно, если бы у второго игрока имелся в запасе ответный ход, парирующий начальный ход первого игрока и обеспечивающий выигрыш второму игроку, то первый игрок мог бы выиграть, изменив свой начальный ход так, чтобы оставшаяся после него позиция совпадала с позицией, которая ранее принесла бы победу второму игроку.

Короче говоря, первый игрок выигрывает всегда. В одном случае ему достаточно было бы взять на первом ходу правую верхнюю фишку, в другом пришлось бы сделать более сложный ход.

«Мы привыкли, что в математике неконструктивные («чистые») доказательства существования обычно бывают доказательствами от противного, — пишет Гейл. — Тем более замечательно, что приведенное выше доказательство принадлежит к совсем иному типу. Мы начали не с предположения о том, что первый игрок проигрывает игру, и не пришли к противоречию. Мы доказали прямо и непосредственно, что для первого игрока существует стратегия, обеспечивающая ему выигрыш. Словечко «нет» не употреблялось нами на протяжении всего доказательства. Разумеется, мы неявно использовали тот факт, что в играх рассматриваемого типа первый или второй игрок непременно выигрывает. Но даже доказательство этого факта можно провести с помощью простых рассуждений по индукции, нигде не используя закона исключенного третьего».

Если не считать нескольких любопытных эмпирических результатов, полученных Гейлом с помощью ЭВМ при анализе игр с начальным расположением фишек в виде прямоугольников $3 \times n$ при $n \leq 100$, то об игре «Щелк!» ничего больше не известно. Для прямоугольников $3 \times n$ всегда существует один-единственный первый ход, гарантирующий выигрыш. На рис. 229, б выигрышные ходы показаны для n от 2 до 12. Поворот и отражение в зеркале дадут выигрышные ходы для фишек, выстроенных в виде прямоугольников $3 \times n$ с n от 2 до 12 (вследствие симметрии между играми с начальным расположением фишек в виде прямоугольников $m \times n$ и $n \times m$).

Первый ход, ведущий к выигрышу для прямоугольника высотой в 3 фишки, непременно должен отсекай кусок высотой не более двух фишек. (Откусив кусок высотой в 3 фишки, первый игрок оставил бы после себя прямоугольник меньших размеров и тем самым уступил бы победу своему сопернику.) Примерно в 58% первых ходов, обеспечивающих выигрыш, отсекаемый кусок имеет в высоту 2 фишки, в остальных 42% — 1 фишку. При увеличении n выигрышные ходы либо остаются неизменными, либо увеличивается ширина «откусываемых» прямоугольников. Неполный анализ всех досок $3 \times n$ с $n \leq 177$ показал, что единственным исключением из замеченного правила является $n = 88$. Первый ход, гарантирующий выигрыш, для прямоугольника 3×88



Р и с. 230. Партия в «Сим», заканчивающаяся на пятнадцатом ходу.

состоит в откусывании прямоугольника 2×36 , лишь на одну фишку более узкого, чем прямоугольник 2×37 , обеспечивающий победу для исходного прямоугольника 3×87 .

«Подобные явления, — замечает Гейл, — приводят к убеждению, что найти простую формулировку для выигрышной стратегии будет чрезвычайно трудно».

Относительно игры в «Щелк!» высказаны две пока еще не доказанные гипотезы.

1. Независимо от формы исходного прямоугольника всегда существует лишь один ход, обеспечивающий выигрыш первому игроку.

2. Взятие фишки из правого верхнего угла приводит к поражению всегда, кроме тех случаев, когда фишки выстроены в виде прямоугольников $2 \times n$ (или $n \times 2$).

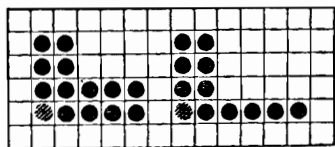
Вторая гипотеза была проверена (и оказалась верной) лишь для прямоугольников $3 \times n$.

Можете ли вы указать первые ходы, обеспечивающие выигрыш для прямоугольников 4×5 и 4×6 ?

ОТВЕТЫ

Граф, получающийся при игре в «Сим» после 14 ходов и не содержащий ни одного монохроматического треугольника, изображен на рис. 230. Это единственный граф, если не считать топологически эквивалентных вариантов.

Первые ходы, обеспечивающие выигрыш при игре в «Щелк!» для исходных прямоугольников 4×5 и 4×6 , показаны на рис. 231. Оба хода единственны.



Р и с. 231. Первые ходы, обеспечивающие выигрыш при игре в «Щелк!».

В исходной позиции фишки расставлены в виде прямоугольников 4×5 и 4×6 .

Изобретатель игры в «Шелк!» Гейл рассмотрел случай, когда в исходной позиции фишки выстроены в виде полубесконечных (бесконечных в одну сторону) полос шириной в n фишек. Ему удалось доказать, что при $n \neq 2$ первый игрок всегда выигрывает, а при $n = 2$ — проигрывает.

ГЛАВА 34

ДВЕНАДЦАТЬ ЗАДАЧ

Задачи этой главы можно решать в любой последовательности. Однако прежде чем приступать к решению более сложных задач, рекомендуем провести «разминку».

Итак, приступаем к «разминке».

а. Как проще всего отмерить 15 мин., необходимые для варки яиц, имея под рукой семи- и одиннадцатиминутные песочные часы?

б. Водитель проезжает 5000 км на машине с одним запасным колесом, время от времени меняя колеса, чтобы все покрышки изнашивались одинаково. Сколько километров проедет каждое колесо к концу путешествия?

в. Найдите основание системы, отличное от 3 и 10, в которой число 121 было бы полным квадратом.

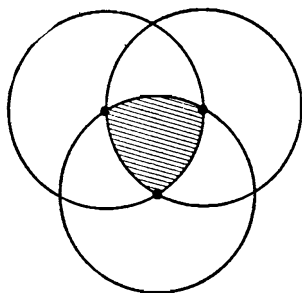
г. Докажите, что поскольку трисекция произвольного угла неосуществима с помощью циркуля и линейки, то ни один член геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... не кратен 3.

д. Некий грек родился седьмого января 40 г. до н. э. и умер седьмого января 40 г. н. э. Сколько лет он прожил?

е. Некая женщина либо всегда лжет, либо всегда говорит правду, либо всегда чередует правду и ложь. Как, задав ей два вопроса, которые требуют односложных ответов «да» и «нет», определить, какому из трех типов поведения она следует?

Теперь вы уже обрели «спортивную форму» и можете смело приступать к решению более трудных задач.

Рис. 232. Задача о трех пересекающихся кругах.



1. Посетитель бара оставил на стойке три отпечатка доннышка своего стакана, сделав их так аккуратно, что каждая окружность проходит через

центры двух других (рис. 232). Бармен полагает, что общая часть всех трех кругов (на рис. 232 она выделена темным цветом) составляет $\frac{1}{4}$ площади круга, а посетитель считает, что площадь общей части больше $\frac{1}{4}$. Кто из них прав?

2. Двадцать четыре участника важных переговоров проводят заседания за круглым столом, сидя на одинаковом расстоянии друг от друга. Место каждого участника за столом указано карточкой с его именем. Как-то раз после бурного обсуждения одного из пунктов повестки дня в кулуарах участники переговоров, сев за стол, обнаружили, что по ошибке каждый из них занял не свое место. Точное расположение участников за столом не известно. Можно ли тем не менее повернуть стол так, чтобы по крайней мере двое из участников переговоров оказались против карточек с их именами?

Более трудная задача возникает в том случае, если один из участников сразу оказывается на своем месте. Можно ли в этом случае так повернуть стол, чтобы по крайней мере двое из участников переговоров оказались против карточек с их именами?

3. В окне одного магазина я увидел оригинальный настольный календарь (рис. 233). Дату указывали цифры на передних гранях двух кубиков. На каждой грани кубика стоит по одной цифре от 0 до 9. Переставляя кубики, можно изобразить на календаре любую дату от 01, 02, 03, ... до 31.

Какие цифры скрыты на невидимых гранях кубиков?

Ответ на этот вопрос несколько труднее, чем может показаться на первый взгляд.

Р и с. 233. Настольный календарь.

Какие цифры скрыты на невидимых гранях кубиков?



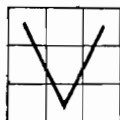
4. Новая разновидность классической задачи об обходе конем всех клеток шахматной доски возникает, если ввести дополнительное условие: потребовать, чтобы маршрут коня не имел точек самопересечения. (Маршрут имеет вид ломаной, соединяющей клетки, на которых конь стоит в начале и в конце каждого хода.) Возникает вопрос: каковы наиболее длинные маршруты коня без самопересечений на досках различных размеров?

На рис. 234 показаны некоторые из маршрутов коня без самопересечений на досках размером от 3×3 до 8×8 . Особый интерес представляет маршрут на доске 7×7 : замкнутые маршруты редко достигают максимальной протяженности, а это именно такой редкий случай, обладающий к тому же высокой симметрией.

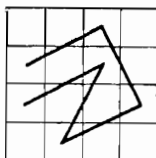
Дональд Кнут с помощью ЭВМ нашел все возможные маршруты без пересечений на досках, размеры которых не превосходят обычной шахматной доски 8×8 . (Маршруты, переходящие друг в друга при поворотах и зеркальных отражениях, считаются тождественными.) Оказалось, что на доске 3×3 имеется два маршрута, на доске 4×4 — пять маршрутов, на доске 5×5 — четыре маршрута, на доске 6×6 — один маршрут, на доске 7×7 — четырнадцать маршрутов и на доске 8×8 (обычная шахматная доска) — четыре маршрута.

Особенно интересным оказался единственный маршрут на доске 6×6 : предшественникам Кнута, работавшим без ЭВМ, не удалось обнаружить этот маршрут, состоящий из 17 ходов коня. Удастся ли вам одержать верх над ЭВМ и обнаружить уникальный маршрут?

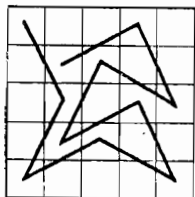
При отыскании его ЭВМ перебрала 88 466 возможных маршрутов. (При отыскании самых длинных маршрутов без самопересечений на доске 7×7 ЭВМ пришлось перебрать 10 874 673 «кандидатов», а на доске 8×8 — 3 137 317 289 различных маршрутов.)



2 хода



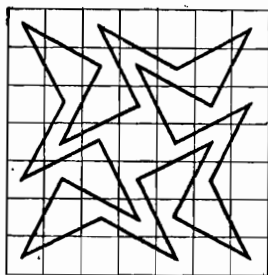
5 ходов



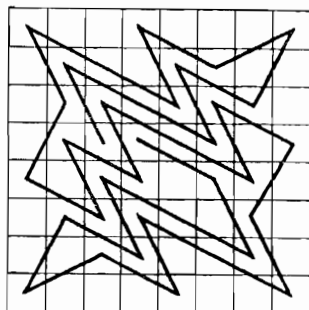
10 ходов



16 ходов



24 хода



35 ходов

Рис. 234. Обход конем всех клеток доски размером от 3×3 до 8×8 по маршрутам без самопересечений.

Протяженность маршрута на доске 6×6 можно увеличить.

5. Математики, занимающиеся теорией вероятностей, очень любят задачи, в которых таинственный некто извлекает черные и белые шары из урн, ящиков, мешков и т. п. Задачи эти формулируются просто, но решать их порой бывает достаточно трудно, а различное толкование пространства элементарных событий автором задачи и тем, кто ее решает, приводит к парадоксам, которыми так славится теория вероятностей.

Рассмотрим, например, пятую из «Полуночных задач, придуманных в часы бессонницы» Льюисом Кэрролом*: «Урна содержит один шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В урну кладут белый шар, после чего ее содержимое перемешивают и вытаскивают наудачу один шар, который оказывается белым. Какова после этого вероятность вытащить белый шар?»

«На первый взгляд может показаться, — начинает свое решение Кэррол, — что, после того как мы добавили в урну один белый шар и извлекли из нее один белый шар, возникла ситуация, тождественная исходной и, следовательно, вероятность вытащить белый шар вновь стала такой, какой она была сначала, то есть $\frac{1}{2}$. Однако те, кто так думает, заблуждаются».

Далее Кэррол довольно сложным способом доказывает, что вероятность еще раз извлечь из урны белый шар в действительности равна $\frac{2}{3}$.

Задачу Кэррола можно решить иначе, чем решал ее автор. Пусть Ч — означает черный шар, Б(1) — белый шар, который мог находиться в урне до того, как в нее добавили белый шар, а Б(2) — добавленный белый шар. После извлечения из урны белого шара возможны три равновероятных исхода:

Внутри урны	Снаружи урны
Б(1)	Б(2)
Б(2)	Б(1)
Ч	Б(2)

В двух случаях из трех внутри урны остается белый шар. Следовательно, вероятность извлечь из урны во второй раз белый шар равна $\frac{2}{3}$.

Еще более удивительный ответ имеет современный вариант задачи Кэррола. В урне имеется несколько черных и несколько белых шаров. Точное число белых и черных шаров не известно, но по крайней мере по одному шару каждого цвета в урне есть. Шары извлекаются из урны по следующим правилам. Сначала из урны наудачу извлекается один шар и откладывается в сторону, затем наудачу извлекается второй шар. Если второй шар по цвету совпадает с первым, то его также

* Полностью эти задачи помещены в книге: Льюис Кэррол, История с узелками, М., изд-во «Мир», 1973. — Прим. перев.

откладывают в сторону и извлекают из урны третий шар.

Вообще, если извлеченный из урны очередной шар того же цвета, что и предыдущий, то его откладывают в сторону. Если же извлеченный шар оказывается другого цвета, чем предыдущий, его снова кладут в урну и, тщательно перемешав ее содержимое, извлекают из урны следующий шар. Иначе говоря, извлеченный из урны шар откладывают в сторону лишь в том случае, если происходит «смена цвета».

Оказывается, что независимо от начального соотношения между числом черных и белых шаров в урне существует фиксированная вероятность того, что последний извлеченный из урны шар будет черного цвета. Чему равна эта вероятность?

6. Повернувшись к приятелю спиной, попросите его нарисовать на листе бумаги несколько кружков, расположенных в один ряд, и закрыть их правой рукой так, чтобы большой палец пришелся на первый кружок слева.

Повернувшись затем к приятелю лицом, вы заявляете, что можете на пари, не глядя на нарисованные им кружки, написать число, равное числу всех возможных исходов бросания кружков, если бы те вдруг стали монетами (для двух монет число возможных исходов равно 4: герб — герб, герб — решетка, решетка — герб и решетка — решетка; для трех монет — 8 и т. д.).

Сколько кружков нарисовал ваш приятель, вам не известно. Тем не менее вы легко можете выиграть пари. Каким образом?

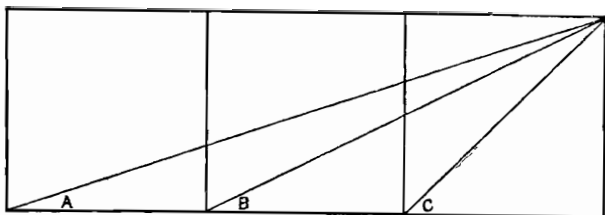
7. Происхождение этого криптарифма не известно, хотя он несомненно принадлежит к числу лучших задач подобного рода и незнаком большинству читателей.

Требуется восстановить левую и правую части «зашифрованного» равенства

$$\frac{EVE}{DID} = 0, \text{ TALKTALKTALK} \dots *$$

Каждая буква означает одну и только одну цифру (в том числе и нуль), и каждой цифре соответствует одна и

* «Ева болтала, болтала, болтала...» (англ.).



Р и с. 235. Геометрическая задача.

Докажите, что $\angle C = \angle A + \angle B$.

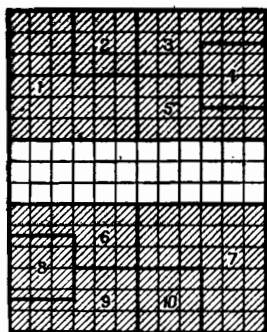
только одна буква. Числитель и знаменатель дроби EVE/DID не имеют общих множителей. В правой части равенства стоит периодическая дробь с четырехзначным периодом. Криптарифм имеет единственное решение.

Напомним, что простейший способ приведения периодической дроби с n -значным периодом к несократимому виду заключается в следующем. Нужно взять число, стоящее в периоде, записать его в виде числителя дроби, в знаменателе которой стоят n девяток, и сократить общие множители, если таковые найдутся.

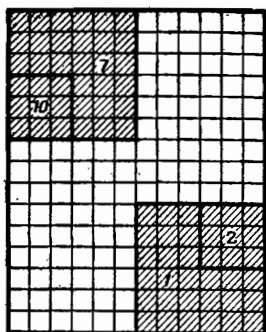
8. Не прибегая к тригонометрии, докажите с помощью одной лишь элементарной геометрии, что угол C на рис. 235 равен сумме углов A и B .

9. На рис. 236 изображена замечательная головоломка, придуманная математиком Э. Эскоттом. В прямоугольной коробочке находятся 10 блоков. Их форма и относительные размеры ясны из рис. 236. Требуется, передвигая за один раз лишь один блок, перестроить их так, чтобы в конечной позиции блоки 1 и 2 поменялись местами с блоками 7 и 10 (положение остальных блоков несущественно). Ни один из передвигаемых блоков нельзя поворачивать, даже если пустое пространство позволяет выполнить маневр. Блоки можно сдвигать вправо, влево, вверх и вниз, но их ориентация должна оставаться неизменной.

Головоломка Эскотта, по-видимому, наиболее трудная из головоломок подобного типа. (О других, менее сложных, мы рассказывали в гл. 33 книги «Математические досуги».) Самое короткое из известных решений содержит 66 ходов (ходом считается любое перемещение



Начальная
позиция



Конечная
позиция

Р и с. 236. Головоломка Эскотта.

одного блока, даже если ему приходится двигаться не по прямой, а углом).

10. Задачи о взвешивании различных грузов на равноплечих весах пользуются широкой известностью. Мы приводим две новые задачи на эту полюбившуюся читателям тему.

Первая задача. Имеется 6 гирь: 2 красные, 2 белые и 2 синие. Внешне любая пара выглядит совершенно одинаково, но одна из гирь в каждой паре весит чуть больше другой. Все три более тяжелые гири (красная, белая и синяя) имеют одинаковый вес. Все три более легкие гири также равны по весу.

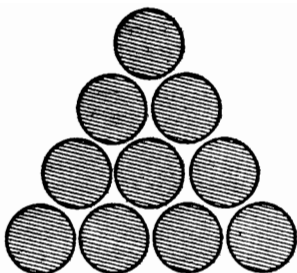
Можно ли определить, какая из гирь в каждой паре тяжелее с помощью двух взвешиваний на равноплечих весах?

Вторая задача. Имеется шесть гирь, выглядящих внешне совершенно одинаково и даже выкрашенных в один и тот же цвет: три гири одного и три гири другого (чуть большего) веса. Определите с помощью трех взвешиваний на равноплечих весах, к какой из двух ка-

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Р и с. 237 Задача о десятизначном числе.

Р и с. 238. Японская головоломка с монетами.



тегорий относится каждая из 6 гирь — к тяжелым или к легким.

11. В 10 клеток, изображенных на рис. 237, требуется вписать десятизначное число (по одной цифре в каждую клетку) так, чтобы цифра, стоящая в клетке 0, указывала число нулей в записи числа, цифра, стоящая в клетке 1, — число единиц и т. д. вплоть до цифры, стоящей в клетке 9, которая должна указывать число девяток в десятичной записи числа.

12. Эту остроумную головоломку с монетами придумал известный японский составитель головоломок Кобон Фуджимура. Расположите 10 монет треугольником (рис. 238).

Чему равно наименьшее число монет, которые необходимо изъять из треугольника, чтобы центры любых трех оставшихся монет не были расположены в вершинах равностороннего треугольника?

ОТВЕТЫ

а. Положив яйцо в воду, пустите одновременно семи- и одиннадцатиминутные часы. По истечении 7 мин переверните семиминутные часы в первый, а по истечении 11 мин (когда весь песок из верхней половины одиннадцатиминутных часов пересыплется в нижнюю половину) — во второй раз. Песок перестанет пересыпаться из верхней половины семиминутных часов в нижнюю как раз к концу пятнадцатой минуты.

Некоторые из читателей обратили мое внимание на то, что условие задачи допускает неоднозначное толкование. Все зависит от того, как понимать выражение «проще всего».

Если простоту способа варки яиц оценивать по продолжительности всех операций, то приведенное выше решение (на варку яиц затрачивается 15 мин, при этом часы приходится переворачивать 4 раза: сначала семи- и одиннадцатиминутные часы для того, чтобы их «пустить», затем еще два раза одни лишь семиминутные часы) следует признать наилучшим.

Если же простоту способа варки яиц оценивать по тому, сколько раз приходится переворачивать часы, чтобы отмерить нужный промежуток времени, то предпочтение следует отдать другому

решению. Правда, в этом решении на все операции, связанные с варкой яиц, уходит 22 мин (при этом яйца варятся 15 мин, так что условие задачи не нарушается!), но песочные часы приходится переворачивать лишь 3 раза. Перевернув одновременно семи- и одиннадцатиминутные часы, начинаем отсчет времени. После того как верхняя половина семиминутных часов опустеет, кладем яйцо в кипящую воду. (Первые семь минут уходят на то, чтобы довести воду до кипения.) Дождавшись, когда весь песок из верхней половины одиннадцатиминутных часов пересыплется в нижнюю, переворачиваем их. Когда верхняя половина одиннадцатиминутных песочных часов снова опустеет, с момента начала варки яиц пройдет ровно 15 мин.

б. Каждая покрывка «отдыхает» на протяжении $\frac{1}{5}$ всего пути. Следовательно, к концу путешествия каждое колесо успеет проехать $\frac{4}{5}$ от 5000 км, или 4000 км.

в. Число 121 является полным квадратом в любой системе с целым положительным основанием. Действительно, в любой системе с основанием $k > 2$ справедливо равенство $11^2 = 121$ (обе части равенства записаны в k -ичной системе).

г. Любой угол можно разделить пополам с помощью циркуля и линейки. Повторяя деление несколько раз, мы можем разделить угол на 2, 4, 8, 16, ... и т. д. равных частей. Если бы какой-то член этой геометрической прогрессии был кратен 3, то это бы означало, что, деля угол последовательно несколько раз пополам, мы осуществили его трисекцию с помощью циркуля и линейки. Поскольку невозможность трисекции с помощью циркуля и линейки доказана, мы заключаем, что среди членов геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... нет чисел, кратных 3.

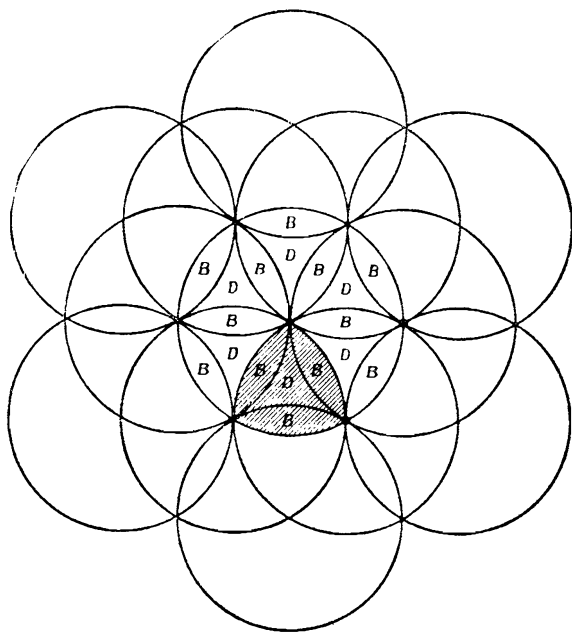
д. Грек прожил 79 лет. Нулевого года н.э. не было.

е. Женщине следует дважды задать один и тот же вопрос: «Чередуете ли вы правду с ложью?» Услышав в ответ два раза «нет», вы поймете, что женщина всегда говорит правду. Два утвердительных ответа будут означать, что перед вами закоренелая лгунья, одно «да» и одно «нет» — что перед вами женщина, говорящая то ложь, то правду.

Решение допускает обобщение: вывод о том, к какому из трех типов относится поведение женщины, можно получить, задав ей дважды любой вопрос, ответ на который заведомо известен.

1. Семейство окружностей, каждая из которых проходит через центры двух других, заполняет всю плоскость, образуя нечто вроде узора на обоях (рис. 239). Каждый круг состоит из шести криволинейных треугольников D и 12 «бананов» B . Следовательно, четверть круга должна была бы занимать такую же площадь, как полтора криволинейных треугольника D и три «банана». Общая же часть трех кругов (на рис. 239 она выделена темным цветом) состоит лишь из одного криволинейного треугольника и трех бананов. Следовательно, ее площадь меньше площади четверти круга на половину площади криволинейного треугольника D . Выкладки показывают, что площадь общей части трех кругов составляет немногим больше 0,22 площади круга.

2. Предположим, что ни один участник переговоров не сидит против карточки со своим именем. Докажем, что стол в этом слу-



Р и с. 239. Решение задачи о трех пересекающихся кругах.

чае можно повернуть так, чтобы по крайней мере двое участников оказались против своих карточек.

Воспользуемся так называемым принципом Дирихле: невозможно разместить n предметов в $n - 1$ ячейках так, чтобы в каждой ячейке было по одному предмету.

Примем за исходное положение стола, в котором ни один участник переговоров не сидит «на своем месте». Поворачивая стол относительно исходного положения на $k/24$ долю окружности, где $1 \leq k \leq 23$, мы всегда можем добиться, чтобы любой из них оказался против карточки со своим именем. Участников переговоров 24, а положений стола, отличных от исходного, — 23. Следовательно, стол всегда можно повернуть так, что в новом положении по крайней мере двое из участников переговоров окажутся против карточек с их именами. Приведенное доказательство применимо независимо от того, четно или нечетно число мест.

Предположим теперь, что один участник переговоров сразу же садится на свое место (против карточки со своим именем).

Докажем, что стол и в этом случае всегда можно повернуть так, чтобы по крайней мере двое участников переговоров оказались против карточек со своими именами. (Приводимое ниже доказательство применимо лишь к случаю, когда число участников переговоров n четно.)

Будем рассуждать от противного. Пусть n — четное число участников переговоров. Обозначим участников переговоров номерами от 0 до $n-1$ в той последовательности, в какой они должны сидеть за столом. Если участник d оказывается на месте p , то стол нужно повернуть на угол $r/n \cdot 360^\circ$ (где $r = p - d$, если $p - d \geq 0$, и $r = p - d + n$, если $p - d < 0$), прежде чем этот участник окажется против своей карточки. Величины d и p могут принимать значения от 0 до $n-1$, причем каждое значение они принимают один и только один раз. Но то же можно сказать и о переменной r , ибо в противном случае два участника переговоров одновременно могли бы оказаться против карточек со своими именами. Суммируя выражения для угла поворота стола «по всем делегатам», получаем

$$S = S - S + nk, \text{ где } S = \frac{n(n-1)}{2} - \text{сумма натуральных чисел}$$

от 1 до $n-1$ (точнее, сумма целых неотрицательных чисел 0, 1, ..., ..., $n-1$), а k — некоторое целое число. Решая это уравнение относительно n , находим: $n = 2k + 1$ — нечетное число, что противоречит исходному предположению.

Рассмотренная нами задача эквивалентна задаче о размещении не атакующих друг друга ферзей на цилиндрической шахматной доске в том случае, если все ферзи атакуют лишь по диагоналям, наклоненным в одну и ту же сторону (либо только влево, либо только вправо). Задача о размещении ферзей на цилиндрических досках четного порядка не имеет решения.

Приведенное выше решение несколько упрощается, если воспользоваться сравнениями по модулю n .

3. Цифры 0, 1 и 2 должны стоять на гранях каждого куба. Таким образом, для семи остальных чисел имеется лишь шесть граней. Задача была бы неразрешима, если бы цифру 6 нельзя было использовать дважды: в «прямом» виде — как шестерку и в «перевернутом» — как девятку. На рис. 233 на гранях правого кубика видны цифры 3, 4, 5. Следовательно, на его невидимых гранях должны стоять цифры 0, 1 и 2. На гранях левого куба видны цифры 1 и 2. Следовательно, на его скрытых гранях должны стоять цифры 0, 6 (она же 9), 7 и 8.

4. Единственный маршрут коня наибольшей протяженности (без самопересечений) на доске 6×6 изображен на рис. 240.

5. Искомая вероятность равна $1/2$.

В условии задачи говорится о том, что независимо от начального соотношения между числом черных и белых шаров в урне, существует фиксированная

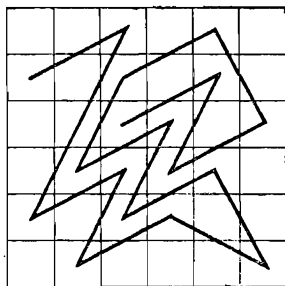


Рис. 240. Единственный маршрут коня максимальной протяженности на доске 6×6 без самопересечений.

вероятность извлечь из нее последним черный шар. Но тогда вероятность извлечь последним белый шар также фиксирована. Поскольку то и другое событие равновероятны, искомая вероятность равна $1/2$.

Доказать, что вероятность извлечь последним черный шар действительно фиксирована, можно по индукции, начав с урны, содержащей до испытания лишь два шара.

Задача допускает обобщение на случай смеси шаров, окрашенных в n цветов. Вероятность извлечь последним шар i -го цвета ($i=1, 2, \dots, n$) равна $1/n$ (правила извлечения остаются прежними).

6. Чтобы выиграть пари, напишите единицу на листе бумаги слева от кончика большого пальца правой руки вашего приятеля. После того как он уберет руку, на листе окажется единица с n нулями — нарисованными им кружками — «монетами». Будем считать, что это число записано в двоичной системе. В десятичной системе ему соответствует число 2^n , равное числу всех возможных исходов бросания n монет.

7. В рассматриваемом примере с криптарифмом дробь $TALK/9999$ после сокращения общих множителей числителя и знаменателя должна совпадать с дробью EVE/DID . Следовательно, число DID есть делитель числа 9999. Среди всех делителей числа 9999 лишь у трех трехзначных чисел первая и последняя цифры совпадают: у 101, 303 и 909.

Если $DID = 101$, то $EVE/101 = TALK/9999$, откуда $EVE = TALK/99$. Умножив правую и левую части последнего равенства на 99, получим $TALK = 99 \cdot EVE$. Число EVE не может быть равно 101 (поскольку по предположению $DID = 101$), а любое число, превосходящее 101, при умножении на 99 дает пятизначное произведение. Таким образом, предположение о том, что $DID = 101$, отпадает.

Если $DID = 909$, то $EVE/909 = TALK/9999$ и $EVE = TALK/11$. Умножая обе части последнего равенства на 11, получим $TALK = 11 \cdot EVE$. Следовательно, последние цифры чисел $TALK$ и EVE должны были бы совпадать вопреки условию задачи. Следовательно, предположение о том, что $DID = 909$, также отпадает.

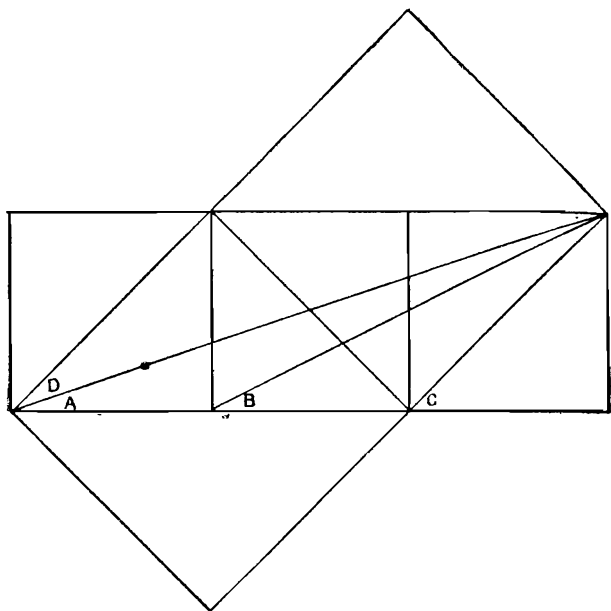
Остается единственным возможным вариант $DID = 303$. Поскольку число EVE должно быть меньше 303, E может означать 1 или 2. Из 14 возможных чисел (121, 141, ..., 292) лишь 242 приводит к периодической дроби 0, TALKTALK..., в которой все цифры отличаются от цифр, входящих в числа EVE и DID .

Итак, единственное решение криптарифма имеет вид

$$\frac{242}{303} = 0,798679867986 \dots$$

Если бы по условию задачи дробь EVE/DID не была приведена к несократимому виду, то криптарифм имел бы второе решение: $212/606 = 0,349834983498\dots$ («Ева болтала бы вдвое больше»).

8. Доказать, что угол C равен сумме углов A и B , можно многими способами. Приведем лишь одно доказательство (рис. 241). Построим квадраты, изображенные на рис. 241 пунктиром. Углы B и D равны как соответственные углы подобных прямоугольных треугольников. Поскольку $\angle A + \angle D = \angle C$, мы, заменив угол D равным ему углом B , сразу же получаем: $\angle C = \angle A + \angle B$, что и требовалось доказать.



Р и с. 241. Решение геометрической задачи о трех углах.

9. Для удобства разобьем самое короткое из известных решений головоломки Эскотта (в 66 ходов) на серии, каждая из которых, кроме последней, состоит из 5 ходов. Блок, если не оговорено противное, сдвигается на максимальное расстояние в указанном направлении.

I серия. Блок 7 сдвигаем вверх, блок 10 — также вверх, блок 9 — вправо на половину свободного расстояния, блок 6 — вверх и блок 8 — вниз.

II серия. Блок 10 сдвигаем сначала влево на половину расстояния, затем вниз, блок 7 — вниз, блок 6 — вправо, блок 1 — вниз и блок 5 — влево.

III серия. Блок 6 сдвигаем влево, блок 4 — вниз, блок 5 — вправо, блок 2 — вниз и блок 3 — влево.

IV серия. Блок 5 сдвигаем вверх, блок 2 — вправо, блок 6 — вверх и влево, блок 2 — влево и блок 4 — вверх.

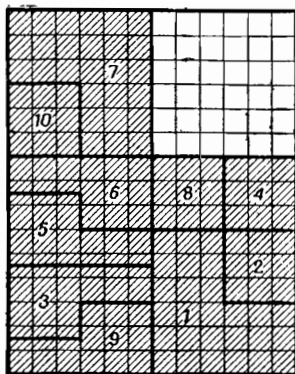
V серия. Блок 7 сдвигаем вверх, блок 9 — вправо, блок 10 — вниз, блок 1 — вниз и блок 7 — влево.

VI серия. Блок 4 сдвигаем вниз, блок 2 — вправо и вниз, блок 6 — вправо, блок 3 — вниз и блок 5 — влево.

VII серия. Блок 6 сдвигаем вверх и влево, блок 2 — вверх, блок 4 — вверх, блок 7 — вправо и блок 1 — вправо.

VIII серия. Блок 3 сдвигаем вниз, блок 5 — вниз, блок 6 — влево, блок 4 — влево и вверх, блок 7 — вверх.

Рис. 242. Расположение блоков в решенной головоломке Эскотта.



IX серия. Блок 1 сдвигаем вправо, блок 8 — вверх до тех пор, пока его нижнее ребро не дойдет до горизонтальной оси, проходящей через центр блока 10. Затем сдвигаем блок 10 вверх на половину расстояния, блок 9 — влево, а блок 3 — вниз.

X серия. Блок 1 сдвигаем вниз, блок 7 — вниз, блок 4 — вниз, блок 2 — вниз и блок 6 — вправо на половину расстояния.

XI серия. Блок 5 сдвигаем вверх, блок 4 — все время влево и затем вниз, блок 2 — влево и вниз, блок 5 — вниз и блок 6 — влево.

XII серия. Блок 7 сдвигаем вверх, блок 2 вводим в вырез блока 1, блок 4 сдвигаем вправо, вниз и снова вправо до тех пор, пока он не окажется на блоке 2, блок 3 — вверх, блок 10 — вверх, вправо и еще раз вверх.

XIII серия. Блок 8 сдвигаем вверх, вправо, вверх и вправо, блок 3 — вниз, блок 5 — вниз, блок 6 — вниз и блок 10 — влево.

Наконец, перемещаем блок 7 в конечную позицию (рис. 242).

10. *Решение первой задачи.* Положим на одну чашу весов красную и белую гири, а на другую — синюю и белую гири.

Если чаши весов окажутся в равновесии, то вы будете знать, что на каждой чаше находится по одной тяжелой и по одной легкой гире. Сняв с весов синюю и красную гири, вы оставите на чашах по белой гире и узнаете не только, какая из них тяжелее, но и какая из снятых гирь — красной и синей — была тяжелой и какая легкой. Тем самым вы определите, какая из гирь, оставшихся в стороне, тяжелая и какая легкая.

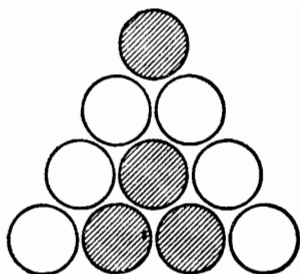
Если при первом взвешивании окажется, что одна чаша весов перетягивает другую, то вы сможете лишь утверждать, что белая гиря на опустившейся чаше тяжелее белой гири на поднявшейся чаше, но останетесь в неведении относительно веса красной и синей гирь.

Переложите обе белые гири на одну чашу весов, а красную и синюю гири — на другую (все четыре гири — те же, что и при первом взвешивании). Обозначим красную гирю буквой К, а синюю — буквой С. Возможны 3 исхода.

а) Чаша с двумя белыми гирями опустилась. Обе гири К и С на другой чаше весов легче.

б) Чаша с гирями К и С опустилась. Обе гири К и С тяжелые.

в) Чаши весов находятся в равновесии. Та из гирь К или С, которая при первом взвешивании находилась на опустившейся чаше, тяжелая, а другая легкая.



Как и в первом случае, данные, полученные после двух взвешиваний, позволяют установить, какая из гирь, не подвергшихся взвешиванию, тяжелая и какая легкая.

Решение второй задачи. Обозначим гири A, B, C, D, E и F .

Положим на одну чашу весов гирю A , а на другую гирю B . Предположим, что опустилась чаша с гирей B . Сняв гирю B , поставим на ту же чашу гирю C . Если обе чаши окажутся в равновесии, то гири A и C легкие. Следовательно, среди гирь D, E и F должны быть две тяжелые и одна легкая. Выберем любые две из гирь D, E и F и положим их по одной на чаши весов (третье взвешивание). Если чаши уравновесятся, то выбранные гири тяжелые, а оставшаяся легкая. Если же одна из чаш опустилась, то находившаяся в ней гиря (так же как и оставшаяся третья гиря) тяжелая, а гиря в поднявшейся чаше весов легкая.

Предположим теперь, что чаши с гирями A и B находятся в равновесии. Снова снимаем гирю B и вместо нее ставим гирю C . Если равновесие не нарушится, то A, B и C — гири одного, а D, E и F — другого веса. Следовательно, положив на одну из чаш весов любую из гирь первой группы, а на другую — любую из гирь второй группы, мы следующим взвешиванием установим, какая из групп содержит тяжелые и какая — легкие гири.

Если же при втором взвешивании равновесие нарушится, то можно сказать, с какой из двух возможных комбинаций гирь A, B и C мы имеем дело: с двумя тяжелыми и одной легкой или с двумя легкими и одной тяжелой. Распределение легких и тяжелых гирь в группе D, E и F известно, поэтому, произведя еще одно взвешивание (поставив по одной гире на каждую чашу весов), мы установим, какая из гирь D, E, F легкая и какая тяжелая.

11. Единственное решение задачи имеет вид 6 210 001 000. (Доказательство единственности решения слишком громоздко, чтобы его можно было привести здесь.) Если число клеток меньше 10, то единственными решениями (в десятичной системе) служат числа 1 210, 2 020 (четыре клетки), 21 200 (пять клеток), 3 211 000 (семь клеток), 42 101 000 (восемь клеток) и 521 001 000 (девять клеток).

12. Четыре монеты, которые необходимо изъять, чтобы центры любых трех из оставшихся монет не были расположены в вершинах никакого равностороннего треугольника, на рис. 243 показаны темным цветом. Решение единственно с точностью до поворотов всего треугольника как целого. Вследствие симметрии фигуры относительно вертикальной оси зеркальное отражение не приводит к новому решению.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ И С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО ЛИШЬ ЦИРКУЛЯ

Нередко можно услышать мнение, будто древние греки, следуя традиции, родоначальником которой по преданию считается Платон, производили геометрические построения только с помощью циркуля и линейки. Это неверно. Греческие геометры пользовались и многими другими инструментами, в том числе устройствами для трисекции угла. Правда, построения с помощью циркуля и линейки они считали более изящными и ценили выше, чем построения, производимые с помощью других инструментов. Лишь через 2000 лет удалось выяснить, что настойчивые попытки греческих геометров решить с помощью циркуля и линейки три великие задачи древности — о трисекции угла, о квадратуре круга и об удвоении куба — были обречены на неудачу.

Позднее геометры развлекались, накладывая на инструменты, используемые при решении задач на построение, еще более ограничительные условия. Живший в X в. персидский астроном и математик Абул-Вефа написал первый трактат, посвященный построениям

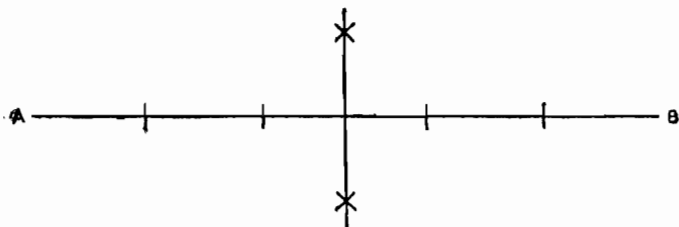


Рис. 244. Деление пополам отрезка прямой с помощью «заржавевшего» циркуля.

с помощью неклассических инструментов — линейки и циркуля с фиксированным раствором, названным впоследствии «заржавевшим циркулем». Особенно просто с помощью линейки и заржавевшего циркуля проводится деление пополам отрезка прямой и угла. На рис. 244 показано, как легко решается с помощью заржавевшего циркуля задача о делении отрезка, длина которого более чем вдвое превосходит раствор циркуля. Многие из решений Абул-Вефа, в частности предложенный им метод построения правильного пятиугольника, необычайно остроумны и до сих пор остались непревзойденными по простоте и изяществу.

Геометрии построений с помощью циркуля с фиксированным раствором много внимания уделяли Леонардо да Винчи и другие математики эпохи Возрождения, но следующий важный шаг в ее развитии был сделан в 1673 г., когда в Амстердаме вышла небольшая (объемом всего лишь в 24 страницы) брошюра *Compendium Euclidis Curiosum* («Собрание евклидовых курьезов»). Как выяснилось впоследствии, ее автором был датский геометр Георг Мор, о котором мы еще будем говорить в этой главе. В 1694 г. лондонский землемер Вильям Лейбурн выпустил книгу «Приятное с полезным», в которой геометрия построений с помощью циркуля с фиксированным раствором излагалась как математическая забава. В частности, раздел, посвященный таким построениям, носил название «О том, как без циркулей с помощью одной лишь двузубой вилки для мяса или других инструментов, раствор коих нельзя ни увеличить, ни уменьшить, и простой линейки совершать многие приятные и забавные геометрические действия».

В XIX в. французский математик Жан Понселе высказал основные идеи доказательства, проведенного впоследствии швейцарским геометром Якобом Штейнером, того, что *все* построения, осуществимые с помощью циркуля и линейки осуществимы и с помощью циркуля с фиксированным раствором и линейки. Точнее, Понселе и Штейнер доказали, что всякое построение, осуществимое с помощью циркуля и линейки, можно осуществить с помощью одной лишь линейки, если на плоскости задан один-единственный круг и его центр. Позднее, уже в начале XX в., было показано, что необходимо даже не весь «круг Понселе — Штейнера», а лю-

бая, сколь угодно малая дуга его окружности и центр! (В задачах на построение считается, что окружность задана, если известен ее центр и точка на ней.)

Геометрическими построениями с помощью одной линейки, линейки с двумя отмеченными точками, линейки с двумя параллельными ребрами, «линейки» с двумя ребрами, сходящимися под прямым или каким-нибудь другим углом, занимались многие известные математики. В 1797 г. итальянский геометр Лоренцо Маскерони поразил математический мир, опубликовав работу «Геометрия циркуля», в которой показал, что каждое построение, осуществимое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить, имея лишь циркуль с произвольным (нефиксированным) раствором. Поскольку провести прямую с помощью одного лишь циркуля невозможно, в работе Маскерони предполагалось, что прямая определяется двумя точками, которые получались засечками циркуля.

Построения с помощью одного лишь циркуля до сих пор принято называть построениями Маскерони, хотя в 1928 г. выяснилось, что более чем за сто лет до Маскерони те же результаты получил Георг Мора. Свою теорию он изложил в небольшой книжке *Euclides Danicus* («Датский Евклид»), вышедшей в 1672 г. в Дании и в Голландии. Датский студент случайно наткнулся на книгу Мора в букинистическом магазине и показал ее своему руководителю — профессору Копенгагенского университета Иоганну Хельмслеву. Сознывая значение находки, Хельмслев подготовил к печати факсимильное издание книги Мора вместе с ее немецким переводом.

В настоящее время геометры утратили интерес к построениям Мора — Маскерони, но многие задачи на построение с помощью неклассических инструментов все еще находят горячих поклонников среди любителей занимательной математики, с увлечением ищущих новых способов решения известных задач, позволяющих осуществить построение за меньшее число шагов. Иногда им действительно удается превзойти методы Мора и Маскерони.

Рассмотрим, например, простейшее из пяти предложенных Маскерони решений задачи № 66 из его книги «Геометрия циркуля» — задачи о нахождении середины отрезка AB (рис. 245).

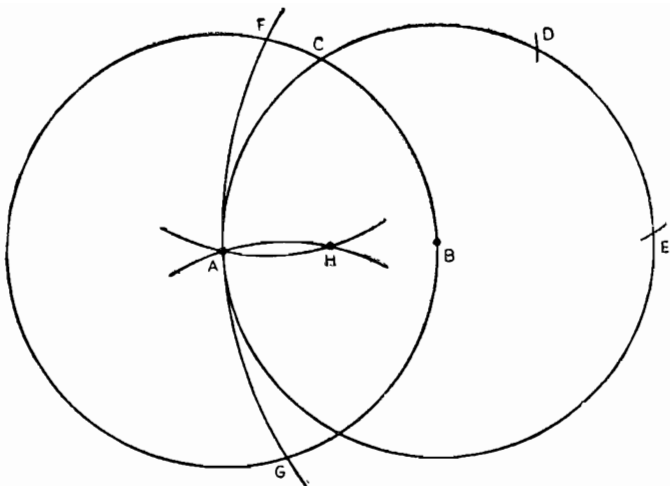


Рис. 245. Метод нахождения середины H отрезка AB , предложенный Маскерони.

Проведем две окружности с центрами в точках A и B радиусом AB . Не меняя раствора циркуля, сделаем две засечки D и E дугами с центром в точках C и D . (Читатели, может быть, помнят, что именно так начинается решение задачи о делении окружности на шесть равных частей или, если мы возьмем точки деления не подряд, а через одну, на три равные части.) Точка E лежит на продолжении отрезка AE , причем $AE = 2AB$. (Повторяя то же построение еще раз вправо, мы, очевидно, получим отрезок, длина которого в любое целое число раз превосходит длину отрезка AB .) С центром в точке E проведем дугу радиуса AE , пересекающую левую окружность в точках F и G . Радиусом AB проведем две дуги, пересекающиеся в точке H , выбрав за их центры точки F и G .

Мы утверждаем, что H — середина отрезка AB . Действительно, равнобедренные треугольники AFH и AHE имеют общий угол при основании FAE и поэтому подобны. Отрезок AF вдвое меньше отрезка AE . Следовательно, $AH = \frac{1}{2}AB$. Простое доказательство правильности проведенного построения с помощью инверсии можно найти в книге Куранта и Роббинса «Что такое

математика?» (изд. 2-е, изд-во «Просвещение», 1967)'. Интересно заметить, что если отрезок AB был задан не своими концами, а проведен, как в обычных задачах на построение с помощью циркуля и линейки, то для нахождения его середины понадобились бы лишь две последние дуги. При этом число шагов, за которые осуществляется построение, сократилось бы до шести.

Впрочем, приведенное выше построение также сокращается на один шаг, если заметить, что расстояние между точками пересечения левой и правой окружностей на рис. 245 равно CE , в силу чего точку E можно найти непосредственно, минуя вспомогательное построение, связанное с отысканием точки D .

Этот же способ позволяет уменьшить на 1 число дуг, необходимых для деления пополам отрезка прямой, заданного в «готовом» виде (а не только концами), отыскания четырех вершин квадрата, вписанного в данную

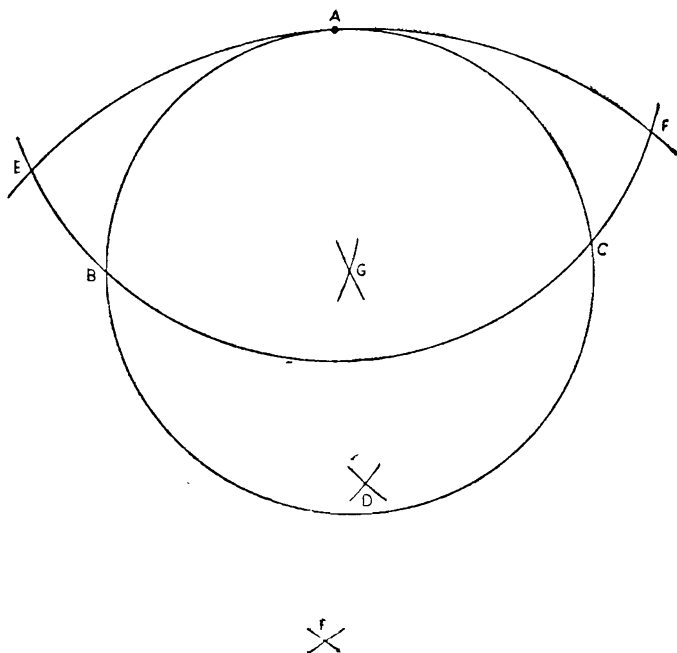


Рис. 246. Отыскание центра заданной окружности с помощью циркуля.

окружность («задача Наполеона»), и построения двух вершин квадрата по двум заданным смежным вершинам.

Другая знаменитая задача, решенная Маскерони, формулируется так: пользуясь одним лишь циркулем, найти центр данной окружности. Метод самого Маскерони слишком сложен, чтобы его можно было воспроизвести здесь, поэтому мы ограничимся лишь более простым построением, изображенным на рис. 246. Автор его не известен. С центром в точке A проведем дугу произвольного радиуса, пересекающую данную окружность в точках B и C . Сделаем две засечки радиусом AB , выбрав центры дуг в точках B и C . Точку пересечения проведенных дуг обозначим D . (В зависимости от раствора циркуля, которым мы провели первую дугу, точка D может оказаться и внутри данной окружности, и вне ее.) С центром в точке D проведем дугу радиуса AD , пересекающую первую дугу в точках E и F . Сделав засечки радиусом AE из точек E и F , получим точку G . Она-то и будет центром окружности. Доказывается это сравнительно просто, если заметить, что равнобедренные треугольники DEA и GEA имеют при основании общий угол и, следовательно, подобны.

Третья знаменитая задача из книги Маскерони известна под названием «задачи Наполеона». По преданию, Наполеон Бонапарт предложил ее автору «Геометрии циркуля». Наполеон был большим любителем математики, в особенности геометрии, и с уважением относился к ведущим французским математикам своего времени. Правда, единственным из них, с кем Наполеон поддерживал дружеские отношения, был создатель начертательной геометрии Гаспар Монж, о котором Наполеон как-то сказал: «Монж любит меня так же пылко, как иные своих избранных».

Подобно Монжу, юный Маскерони был горячим поклонником Наполеона и Французской революции. Круг его интересов был достаточно широк. Будучи профессором математики Университета в Павии, Маскерони писал стихи, которые высоко ценились итальянскими критиками. Его книга «Задачи для землемеров» (1793 г.) вышла со стихотворным посвящением Наполеону. Встреча Маскерони с Наполеоном произошла в 1796 г., после побед молодого генерала в Северной Италии. Выпустив в следующем году свою «Геометрию циркуля», Маске-

рони вновь предпослал стихотворное посвящение Наполеону.

Наполеон владел многими из предложенных Маскерони методов построения с помощью циркуля. Беседуя как-то раз со знаменитыми французскими математиками, Лагранжем и Лапласом, маленький генерал поразил столпов французской математики тем, что объяснил им некоторые из предложенных Маскерони решений. Ни Лаплас, ни Лагранж до разговора с Наполеоном не подозревали о существовании «Геометрии циркуля».

«Генерал, — почтительно заметил Лаплас, — мы ожидали чего угодно, только не урока геометрии».

Не известно, в какой мере этот анекдот соответствует истине. Бесспорно лишь одно: именно Наполеон познакомил французских математиков с работой Маскерони. Французский перевод «Геометрии циркуля» был опубликован в Париже в 1798 г. — всего лишь через год после выхода в свет итальянского оригинала.

«Задача Наполеона» формулируется так. Пользуясь только циркулем, разделить окружность с заданным центром на четыре равные дуги. Иначе говоря, с по-

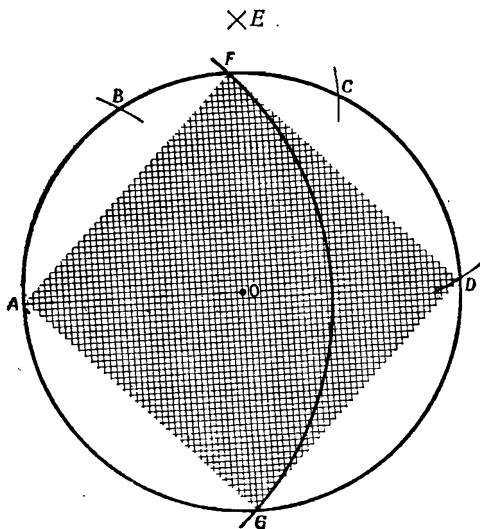
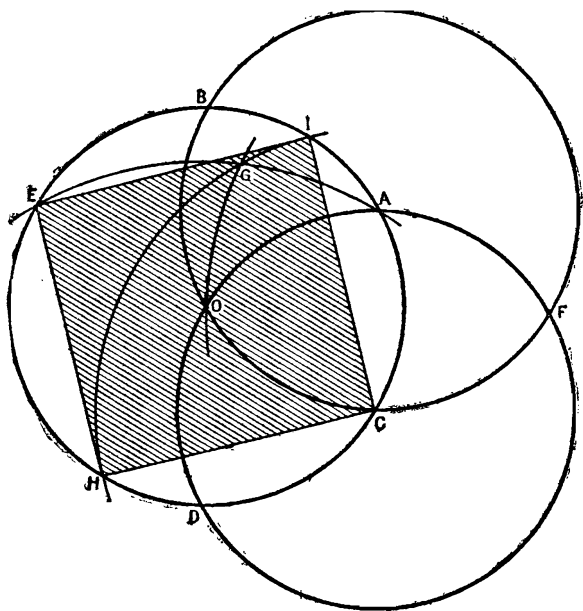


Рис. 247. Решение задачи Наполеона, предложенное Маскерони.



Р и с. 248. Решение задачи Наполеона, предложенное Чини.

мощью циркуля требуется найти вершины квадрата, вписанного в окружность с отмеченным центром. На рис. 247 изображено изящное решение задачи Наполеона, предложенное Маскерони. Для отыскания вершин вписанного квадрата требуется провести 6 дуг. С центром в произвольной точке окружности A и радиусом, равным радиусу окружности, сделаем засечку и получим точку B . Не меняя раствора циркуля, сделаем засечку из точки B (получим точку C) и C (получим точку D). С центром в точках A и D проведем две дуги, пересекающиеся в точке E . С центром в точке A проведем дугу радиуса OE , пересекающую данную окружность в точках F и G . Точки A, F, D и G служат вершинами квадрата, вписанного в исходную окружность.

Американскому математику Фитчу Чини удалось найти более «экономный» способ решения задачи Наполеона: для нахождения вершин вписанного квадрата ему нужно провести лишь 5 дуг.

Решение Чини представлено на рис. 248. Приняв за центр произвольную точку A данной окружности, проведем вторую окружность того же радиуса, что и первая, затем, не меняя раствора циркуля, — третью окружность с центром в точке пересечения C первых двух окружностей. С центром в точке D проведем дугу радиуса DA , пересекающую исходную окружность в точке E . С центром в точке F проведем дугу радиуса FO , пересекающую только что проведенную дугу в точке G . Наконец, с центром в точке C проведем дугу радиуса CG , пересекающую исходную окружность в точках H и I . Точки E, I, C и H служат вершинами квадрата, вписанного в исходную окружность.

Менее известны тесно связанные между собой следующие две задачи Маскерони:

1. Даны две смежные вершины квадрата. Требуется построить две другие вершины.

2. Даны две вершины квадрата, расположенные на концах одной диагонали. Найти две другие вершины квадрата. Решения обеих задач приведены в ответах.

ОТВЕТЫ

Решение первой задачи изображено на рис. 249. Для построения двух смежных вершин квадрата требуется провести 8 дуг. Вершины квадрата A и B заданы. Приняв каждую из них за центр, проведем две окружности радиусом, равным стороне квадрата. Не меняя рас-

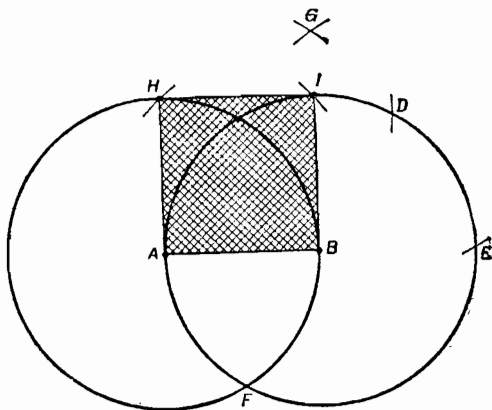


Рис. 249. Решение первой задачи Маскерони.

Построить с помощью циркуля квадрат по двум смежным вершинам.

твора циркуля, сделаем на окружностях засечки D и E из точек C и D . Раствором циркуля, равным отрезку CF , проведем из точек A и E две дуги, пересекающиеся в точке G , затем радиусом GB из точек A и B — две дуги, пересекающиеся в точках H и I . Эти точки и будут двумя искомыми вершинами квадрата.

Решение второй задачи Маскерони, известное довольно давно (рис. 250), требует проведения 9 дуг. Пусть A и B — заданные вершины квадрата, расположенные на концах диагонали. С центром в точке B проведем окружность радиуса AB . Не меняя раствора циркуля, проведем дуги C , D и E с центрами соответственно в точках A и E и радиусом CE проведем две дуги, пересекающиеся в точке F . С центром в точке E и радиусом BF проведем дугу, пересекающуюся с предыдущей дугой в точке G . С центрами в точках A и B и радиусом BG проведем две дуги, пересекающиеся в точках H и I . Точки A , H , B и I — вершины искомого квадрата.

Другое, более изящное решение той же задачи было найдено совсем недавно. Оно требует проведения лишь 6 дуг (рис. 251). Пусть A и B — заданные вершины квадрата. Радиусом AB проведем две окружности: одну с центром в вершине A , другую с центром в вершине B . С центром в точке C и радиусом CD проведем дугу EDF . С центром в точке F и радиусом AF проведем дугу GAN . Приняв точки E и F за центры окружностей, проведем две дуги радиуса EG , пересекающиеся в точках X и Y . Нетрудно доказать, что A , X , B , Y — вершины искомого квадрата.

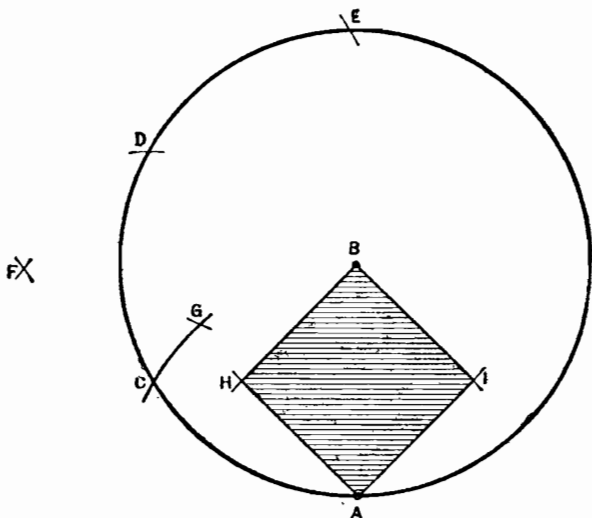
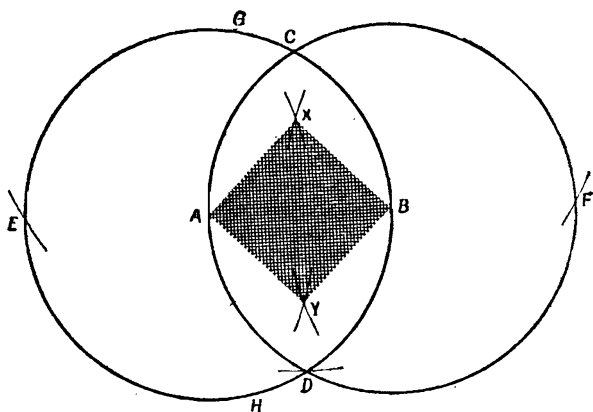


Рис. 250. Старое решение второй задачи Маскерони.

Построить с помощью циркуля квадрат по двум диагонально противоположным вершинам.

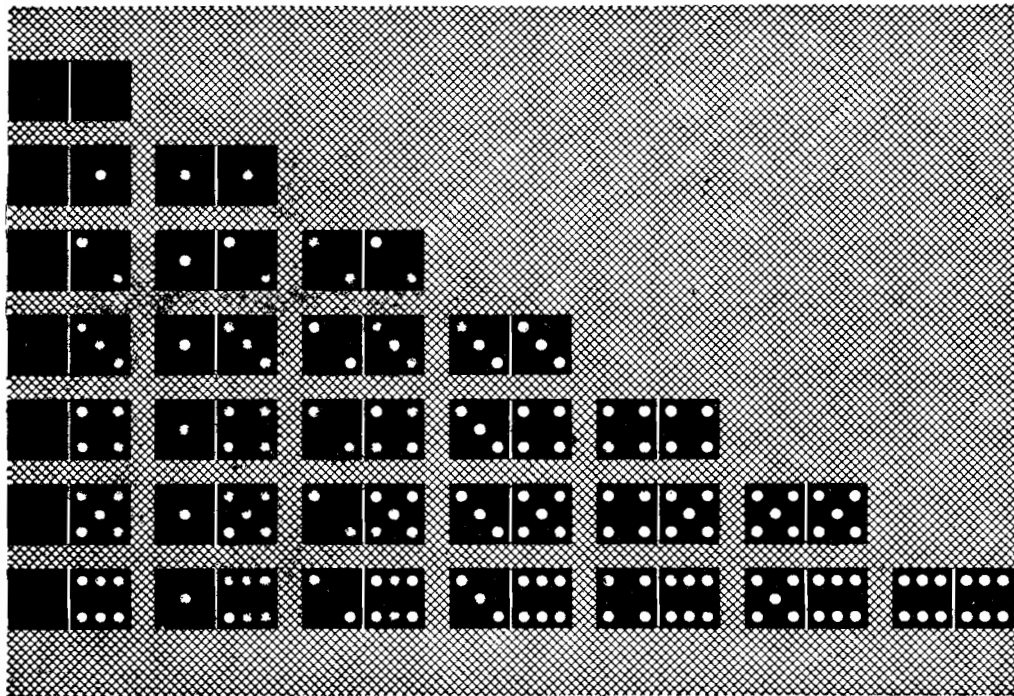


Р и с. 251. Новое решение второй задачи Маскерони.

ГЛАВА 36

ИГРА В ДОМИНО И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

О возникновении и ранней истории домино известно удивительно мало. В европейской литературе упоминания о домино не встречаются до середины XVIII в., когда в эту игру впервые начали играть в Италии и во Франции. Позднее игра в домино распространилась по всей континентальной Европе, а оттуда — в Англию и Америку. Обычный набор западных домино состоит из 28 костей, на половинках которых проставлены все возможные комбинации чисел от 0 до 6 (рис. 252). Каждая цифра повторяется 8 раз. Существуют расширенные наборы, от «дубля» 0—0 (две пустые половинки) до 9—9 (такой набор содержит 55 костей) или до 12—12 (91 кость). Расширенные наборы позволяют увеличивать число играющих в домино, но встречаются редко. Кости



Р и с. 252. Полный набор из 28 костей европейского домино.

домино обычно делаются черными, цифры на них указываются белыми точками. Свое название игра получила от сходства костей с черной полумаской — домино, — которую надевали на маскарадах.

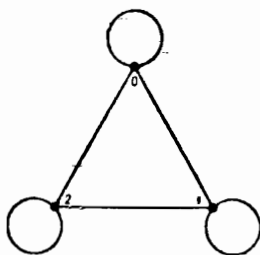
Был ли европейский вариант игры в домино изобретен независимо от восточного домино или завезен из Китая, не известно. В Китае игра в домино пользовалась известностью за несколько столетий до того, как она стала известной в Европе. В китайском домино — куат пай — нет пустых половинок: набор содержит 21 кость со всеми комбинациями от 1—1 до 6—6 и еще 11 «копий» некоторых костей. Всего в китайском домино 32 кости. Так же как в китайском варианте игры в кости, единица и четверки в китайском домино отмечаются красными точками. Все остальные числа изображаются белыми (если кости черные) или черными (если кости белые) точками. Единственное исключение составляет дубль 6—6: на каждой половине кости ставятся по 3 красные точки. В корейском варианте домино кости выглядят так же, как и в китайском, но единица изображается более крупной точкой, чем все остальные числа. Каждая кость в китайском домино имеет свое весьма красочное название: 6—6 называется «небо», 1—1 — «земля», 5—5 — «цветок сливы», 6—5 — «голова тигра» и т. д.

Китайские домино часто делают не из привычных для нас материалов — дерева, слоновой кости или пластмассы, — а из картона. Играя картонными домино, их раздают и выкладывают на стол так же, как шахматы. Как в Европе, так и в Китае существует множество вариантов игры в домино. Японские любители домино не имеют своего «национального» набора костей и вынуждены довольствоваться обычным европейским набором. В «Энциклопедии Британника» говорится, что некоторые племена эскимосов пользуются наборами домино из 60 и даже из 148 костей и время от времени проводят турниры, в которых участники в азарте игры порой ставят «на кон» и проигрывают своих жен.

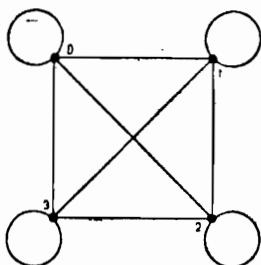
Одна из самых старых комбинаторных задач, возникающих в связи с домино, формулируется так. Определить число способов, которыми можно выложить в ряд полный набор костей домино так, чтобы на соприкасающихся половинках стояли одинаковые числа (то есть с



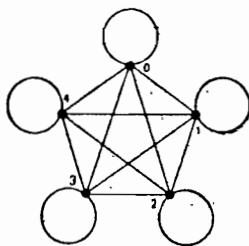
a



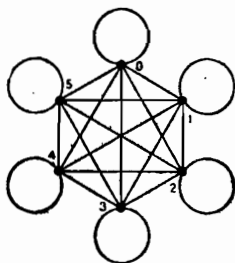
d



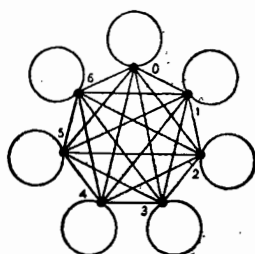
g



z



d



e

Рис. 253. Графы для решения задачи о выстраивании полных наборов домино в один ряд.

соблюдением обычного правила). Полный набор включает в себя все пары чисел от $0-0$ до $n-n$. Эта задача интересна тем, что допускает «перевод» на язык графов (рис. 253). Действительно, оставив в стороне тривиальный случай полного набора, состоящего из одной-единственной кости $0-0$, рассмотрим простейший полный набор из трех костей: $0-0$, $0-1$, $1-1$ (рис. 253, а). Прямая, соединяющая точку 0 с точкой 1 , соответствует кости $0-1$. Замкнутые линии соответствуют «дублям». Число способов, которыми кости полного набора можно выложить в ряд с соблюдением правила игры в домино, совпадает с числом способов, которыми можно обойти весь граф, не проходя ни одно ребро дважды. Для рассматриваемого нами случая существуют два таких обхода, отличающихся лишь направлениями. Следовательно, полный набор из костей $0-0$, $0-1$ и $1-1$ можно выложить в ряд лишь двумя способами: $0-0$, $0-1$, $1-1$ и $1-1$, $1-0$, $0-0$.

При переходе к следующему полному набору из 6 костей от $0-0$ до $2-2$ задача становится менее тривиальной. Треугольный граф в этом случае (рис. 253, б); так же как и в предыдущем, можно обойти двумя способами, отличающимися один от другого лишь направлением обхода, но в отличие от уже рассмотренного нами случая маршрут становится замкнутым. Следовательно, кости домино также образуют замкнутый круг: $0-0$, $0-1$, $1-1$, $1-2$, $2-2$, $2-0$ (начало первого звена цепочки сцеплено с концом последнего). Поскольку этот круг можно разорвать в 6 различных местах, задача о выкладывании в ряд полного набора костей домино от $0-0$ до $2-2$ допускает 6 различных решений. Если считать различными «взаимно обратные» ряды вида $0-0$, $0-1$, $1-1$, $1-2$, $2-2$, $2-0$ и $0-2$, $2-2$, $2-1$, $1-1$, $1-0$, $0-0$, то число решений возрастает вдвое и становится равным 12.

Решение задачи о выстраивании в ряд полного набора из 10 костей домино (от $0-0$ до $3-3$) таит любопытную неожиданность (рис. 235, в). Все четыре вершины графа в этом случае нечетны, то есть в каждой из них сходится по нечетному числу ребер (точка пересечения диагоналей не считается вершиной графа). Правило, позволяющее определять, можно ли обойти все ребра

графа, побывав на каждом из них один и только один раз, сформулировал еще в 1736 г. Эйлер. (Великий математик открыл правило, решая знаменитую задачу о семи кенигсбергских мостах.) Обход графа возможен в том и только в том случае, если либо все вершины графа четны, либо он содержит ровно 2 нечетные вершины. В первом случае маршрут обхода всегда замкнут, он начинается и заканчивается в одной и той же вершине графа. Во втором случае обход должен начинаться в одной, а заканчиваться в другой нечетной вершине. Поскольку в рассматриваемом случае граф содержит 4 нечетные вершины, обойти его, побывав на каждом ребре один и только один раз, невозможно. Следовательно, задача о выстраивании в ряд полного набора из 10 домино не имеет решения.

То же можно доказать и по-другому, не обращаясь к правилу Эйлера. Каждое число в полном наборе из 10 костей домино встречается 5 раз. Поскольку внутри ряда каждое число по правилам игры в домино, требующим, чтобы кости «стыковались» половинками с одинаковыми числами, повторяется четное число раз, оно непременно должно стоять на одной из свободных половинок. Но чисел в полном наборе из 10 костей четыре, а концов у ряда лишь два. Следовательно, выстроить в один ряд полный набор из 10 костей домино невозможно. (Самое большее, что можно сделать, это разбить граф на два подграфа, удовлетворяющих правилу Эйлера, и выстроить полный набор из 10 костей в 2 ряда, соответствующих подграфам.)

«Подный» граф множества пяти точек (пять точек, попарно соединенных всеми возможными способами), «дополненный» замкнутыми петлями у каждой вершины, соответствует полному набору из 15 костей домино от 0—0 до 4—4 (рис. 253, г). Поскольку все вершины графа четны, его можно вычертить одним росчерком, не отрывая перо от бумаги и не обводя ребра дважды. (Как и во всех остальных случаях, точки пересечения ребер графа внутри многоугольника не принадлежат к числу вершин графа.) Подсчет числа различных способов обхода графа не составляет особого труда. Каждый из замкнутых маршрутов соответствует кольцу, выложенному из полного набора. Разрывая кольцо в 15 местах, мы будем каждый раз получать решение задачи о вы-

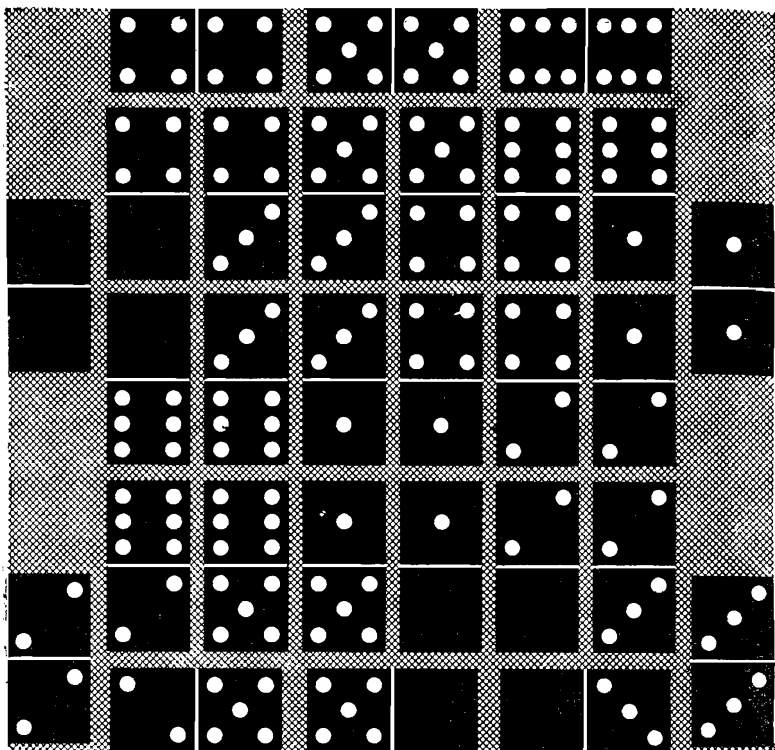
страивании в ряд полного набора из 15 костей домино. Дьюдени подсчитал, что ребра полного графа правильного пятиугольника (без замкнутых петель у вершин) можно обойти 264 различными способами, каждый из которых соответствует кольцу, выложенному из костей домино. Например, обход вершин графа в последовательности 3024... соответствует кольцу, первыми звеньями которого служат кости домино 3—0, 0—2, 2—4, ... Пять дублей можно вставить в каждое кольцо $2^5 = 32$ способами. Таким образом, число различных колец, выложенных из полного набора (15 костей) домино, равно $264 \times 32 = 8448$. Каждое кольцо можно разорвать в 15 местах. Таким образом, задача о выстраивании в ряд полного набора из 15 костей домино допускает всего $8448 \times 15 = 126\,720$ различных решений.

Шестиугольный граф (рис. 253, *д*) содержит 6 нечетных вершин. Следовательно, полный набор из 21 кости домино от 0—0 до 5—5 нельзя выстроить в один ряд (но можно выстроить в три ряда).

Обычный набор из 28 костей домино от 0—0 до 6—6 имеет семиугольный граф (рис. 253, *е*). Число 28 — второе совершенное число (напомним, что совершенными называются числа, равные сумме своих делителей: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Все совершенные числа одновременно являются треугольными числами, то есть представимы в виде сумм последовательных натуральных чисел (например, $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$). Взглянув на рис. 252, вы сразу поймете, что каждое треугольное число равно числу костей в одном из полных наборов домино. Все вершины семиугольного графа четны. Следовательно, его ребра можно обойти по непрерывному маршруту так, чтобы каждое ребро было пройдено один и только один раз. Общее число различных обходов равно 7 959 229 931 520. Таким образом, полный набор из 28 костей домино можно выстроить в один ряд ровно 7 959 229 931 520 способами!

Любой полный набор, за исключением набора 0—0, 0—1, 1—1, можно выстроить в один ряд в том и только в том случае, если максимальное из чисел, стоящих на половинках костей, четно.

Цепочка из 28 костей домино должна быть замкнутой. На этом основан старинный фокус. Исполнитель его тайком берет любую кость, отличную от дубля, и выхо-



Р и с. 254. «Кадриль» Эдуарда Люка.

дит из комнаты. Зрители выстраивают оставшиеся кости в один ряд, а исполнитель, едва успев войти, не глядя, называет числа, стоящие на свободных концах ряда: это те самые числа, которые стоят на «похищенной» им кости. (Фокус можно показывать еще более эффективно, заранее предсказывая числа, например выписывая их на листке бумаги.) Чтобы фокус можно было повторить, исполнитель, перемешивая кости на столе, незаметно подкладывает взятую им кость и берет новую.

Было предложено много задач, в которых из полного набора домино при тех или иных ограничениях выстраивают какой-нибудь симметричный многоугольник. Например, Эдуард Люка во втором томе своих «Математи-

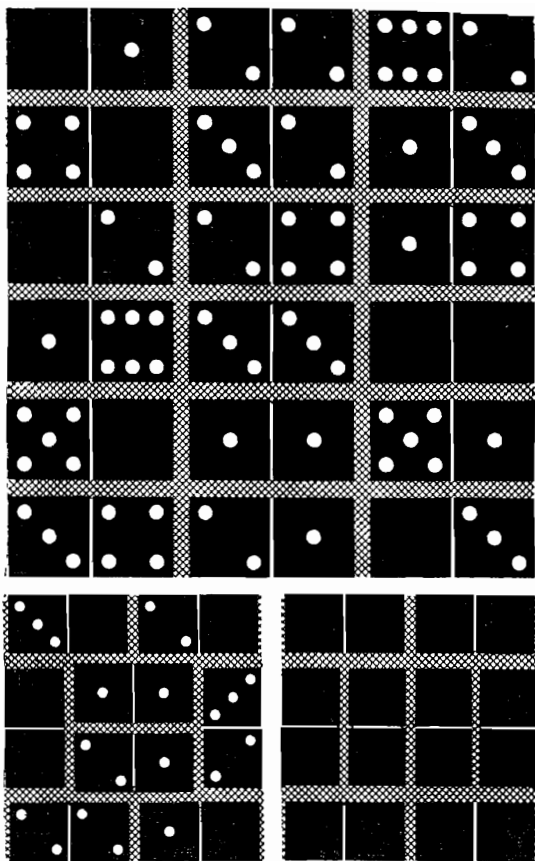


Рис. 255. Магические квадраты из домино.

ческих развлечений» ввел так называемую «кадриль» — многоугольник, в котором кости домино расположены так, что половинки с одинаковыми числами образуют квадраты 2×2 , если считать, что ширина кости равна единице. Доказано, что «кадриль», приведенная в книге Люка (рис. 254), допускает единственное решение с точностью до перестановок чисел и отражений всей фигуры как целого.

Не менее известна и другая старинная задача — составление из домино магических квадратов. Квадрат называется магическим, если сумма всех чисел, стоящих по горизонтали, вертикали или на любой из двух диагоналей, имеет одно и то же значение. Обычного набора домино (28 костей) может хватить для составления магических квадратов лишь второго, четвертого и шестого порядков. (Квадраты нечетных порядков содержат нечетное число клеток, поэтому их невозможно сложить из домино, не оставив «пробела» в одну пустую клетку.)

Составить из домино магический квадрат второго порядка невозможно: даже если не считать диагоналей, то для этого потребовалось бы два одинаковых дубля.

Магический квадрат шестого порядка с минимальной постоянной 13 (рис. 255) можно превратить в магический квадрат с максимальной постоянной 23, если каждое число заменить другим, дополняющим его до 6. Оба квадрата называются «взаимно-обратными» относительно числа 6. Докажем, что постоянная магического квадрата шестого порядка, составленного из костей домино, достигает минимума при $k = 13$ и максимума при $k = 23$. Действительно, квадрат шестого порядка содержит число клеток, кратное 6. Поскольку 78 и 138 — наименьшее и наибольшее из чисел, кратных 6, которые можно представить в виде суммы чисел, стоящих на 18 костях домино, то $78/6 = 13$ и $138/6 = 23$ — минимальное и максимальное значения постоянной магического квадрата шестого порядка.

Для магического квадрата четвертого порядка, составленного из костей домино обычного набора, наибольшее и наименьшее значения постоянной, равны $20/4 = 5$ и $76/4 = 19$. Составив магический квадрат с минимальной постоянной 5 (на рис. 255 он изображен внизу слева), мы сможем превратить его в магический квадрат с максимальной постоянной 19, если каждое число заменим его дополнением до 6. Постоянная магических квадратов четвертого порядка может принимать любые значения от 5 до 19. Можете ли вы, расставив кости домино так, как показано на рис. 255, внизу справа, построить магический квадрат четвертого порядка с постоянной 10?

Замечательную игру-головоломку, в которой используются кости домино, изобрел варшавский кинокритик

Лех Пияновский. Играть в нее можно при любом числе участников, но для простоты мы будем предполагать, что играют двое.

Каждый из участников, попросив партнера отвернуться, перемешивает 28 костей домино, лежащих на столе обратной стороной вверх, и составляет из них наугад прямоугольник 7×8 . Затем он, не нарушая расположения костей, переворачивает их и записывает на листке бумаги, какие цифры оказались в единичных квадратах, образуемых половинками костей домино. Прямоугольник с заполненными клетками играющие передают партнеру. (На другом листке бумаги, который участник оставляет у себя, он не только заполняет еди-

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

a

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

б

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

в

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

г

Рис. 256. Игра-головоломка Леха Пияновского.
Поиск решения,

2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

а

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

б

Рис. 257. Две задачи Пияновского на составление прямоугольников из домино.

нические клетки, но и указывает расположение костей домино.) Выигрывает тот, кто первым сумеет составить из домино прямоугольник, приводящий к такому же распределению чисел, как на листке, полученном от партнера. Следует иметь в виду, что прямоугольники с одними и теми же числами в соответственных клетках иногда можно составить из домино несколькими способами. В этом случае играющий не обязательно должен восстанавливать именно ту схему расположения костей домино, из которой исходил его партнер. Победителем считается тот, кто первым сумеет обнаружить любой способ составления прямоугольника 7×8 , при котором числа в единичных квадратах будут совпадать с числами на листке, полученном от партнера.

Предположим, что партнер передал вам сетку с числами, изображенную на рис. 256, а. Как приступить к решению головоломки? С чего начать? Автор игры Пия-

3	4	1	2
3	1	5	1
2	1	3	4
2	4	1	3

2	1	4	3
2	4	0	4
3	4	2	1
3	1	4	2

Рис. 258. Магические квадраты 4-го порядка с постоянной, равной 10.

Р и с. 259. Игра-головоломка
Пияновского.
Решения задач.

а

2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

б

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

новский советует прежде всего составить список всех 28 костей домино, а затем отметить на сетке с числами те места, которые могут быть заняты одной и только одной костью. В рассматриваемом нами случае кости 4—5, 2—2, 3—6 и 4—4 могут быть расположены лишь так, как показано на рис. 256, б. К уже установленным костям домино мы сразу же можем добавить дубли 0—0 и 3—3 (иначе между костями домино образовались бы пустоты). Поскольку все остальные комбинации 0—0 и 3—3 нельзя закрыть одной костью (дубли 0—0 и 3—3 уже вышли из игры), это обстоятельство мы отметим, разделив черточками нули и тройки в тех местах, где они встречаются по два (рис. 256, б).

Кость 2—5 может занимать либо горизонтальное, либо вертикальное положение (на рис. 256, в оба положения показаны пунктиром). Предположим, что кость 2—5 занимает вертикальное положение. В этом случае кость 0—1 должна расположиться так, как показано на рис. 256, в, что позволяет однозначно указать места для костей 1—3 и 0—4. (Если эти кости положить где-нибудь в другом месте, то возникнет необходимость в еще одной кости 0—1.) Кроме того, мы можем нанести на сетку еще несколько «демаркационных» линий. Продолжая решение, мы в конце концов получим прямоугольник, составленный из домино так, как показано на рис. 256, г.

Если кость 2—5 «положить» горизонтально, то получатся еще 3 решения.

Более трудная задача изображена на рис. 257, а. Она допускает единственное решение. Справившись с ней, читатель может испытать свои силы на решении чрезвычайно трудной задачи, изображенной на рис. 257, б. Эта задача имеет 8 решений.

ОТВЕТЫ

Задачу о составлении из костей домино магического квадрата с постоянной 10 можно решать многими способами. Два решения изображены на рис. 258. Оба квадрата взаимно обратны относительно числа 5.

Единственное решение головоломки Пияновского, изображенной на рис. 257, а, представлено на рис. 259, а.

Вторая (очень трудная) задача, как уже говорилось, допускает 8 решений. Одно из них представлено на рис. 259, б.

Переставив кости 1—6 и 2—1, расположенные в квадрате, закрашенном в темный цвет, мы получим еще одно решение. Два решения возникнут, если расположить кости 1—6 и 2—1 двумя различными способами в том же квадрате, но горизонтально. Наконец, существует еще одна схема расположения костей домино, на которой имеются два квадрата второго порядка с взаимозаменяемыми костями. Она порождает еще 4 решения,

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА 1. ТРУДНОСТИ И ПАРАДОКСЫ, СВЯЗАННЫЕ С БЕСКОНЕЧНЫМИ РЯДАМИ И ПОНЯТИЕМ ПРЕ- ДЕЛА	7
ГЛАВА 2. ПОЛИАМОНДЫ	20
ГЛАВА 3. ТЕТРАЭДРЫ В ПРИРОДЕ И В АРХИТЕКТУРЕ	31
ГЛАВА 4. СЕМЬ КОРОТКИХ ЗАДАЧ	44
ГЛАВА 5. РЕШЕТКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ	55
ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ И РАЗ- ВЛЕЧЕНИЯ МИСТЕРА О'ГАРА, ПОЧТАЛЬОНА	70
ГЛАВА 7. ПЕНТАМИНО И ПОЛИОМИНО: ПЯТЬ ИГР И СЕРИЯ ЗАДАЧ	81
ГЛАВА 8. ВОСЕМЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ	95
ГЛАВА 9. ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ НУМИЗМАТИКА	110
ГЛАВА 10. ИЕРАРХИЯ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ	123
ГЛАВА 11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИСКУССТВО МОРИЦА ЭШЕРА	136
ГЛАВА 12. НЕЗАДАЧИ С ЗАДАЧАМИ	147
ГЛАВА 13. О ТРИСЕКЦИИ УГЛА И ТЕХ, КТО УПОРНО (НО ТЩЕТНО) ПЫТАЕТСЯ РЕШИТЬ ЭТУ ДРЕВНЮЮ ЗАДАЧУ	158
ГЛАВА 14. ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА	168
ГЛАВА 15. СТЕГАНОЕ ОДЕЯЛО МИССИС ПЕРКИНС	180
ГЛАВА 16. МОЖНО ЛИ НАГЛЯДНО ПРЕДСТАВИТЬ СЕБЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНУЮ ФИГУРУ?	189
ГЛАВА 17. НЕИСЧЕРПАЕМОЕ ОЧАРОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬ- НИКА ПАСКАЛЯ	201
ГЛАВА 18. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ ИГР С ДВУМЯ УЧАСТНИКАМИ	214
ГЛАВА 19. СЕМЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ	230

ГЛАВА 20. СЕКРЕТЫ ЭСТРАДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ . . .	244
ГЛАВА 21. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ И УГА- ДЫВАНИЕ ДНЕЙ НЕДЕЛИ ПО НАЗВАННЫМ ДАТАМ	256
ГЛАВА 22. ПОЛИГЕКС И ПОЛИАБОЛО	267
ГЛАВА 23. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИГРЫ «РАССАДА» И «БРЮССЕЛЬСКАЯ КАПУСТА»	281
ГЛАВА 24. ХОДОМ КОНЯ	290
ГЛАВА 25. ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ	304
ГЛАВА 26. ТЕОРИЯ ИГР В ИГРАХ	316
ГЛАВА 27. «ДЕРЕВЬЯ» И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ КОМБИ- НАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ	332
ГЛАВА 28. КРАТКИЙ ТРАКТАТ О БЕСПОЛЕЗНОЙ КРА- СОТЕ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ	343
ГЛАВА 29. 23 ПРОСТЫЕ, НО КАВЕРЗНЫЕ ЗАДАЧИ . . .	353
ГЛАВА 30. СЧЕТ НА ПАЛЬЦАХ	361
ГЛАВА 31. БУЛЕВА АЛГЕБРА, ДИАГРАММЫ ВЕННА И ИС- ЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	375
ГЛАВА 32. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ	388
ГЛАВА 33. НОВЫЕ ИГРЫ «ГОНКИ», «СИМ» И «ЩЕЛК!» .	401
ГЛАВА 34. ДВЕНАДЦАТЬ ЗАДАЧ	413
ГЛАВА 35. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПО- МОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ И С ПО- МОЩЬЮ ОДНОГО ЛИШЬ ЦИРКУЛЯ	429
ГЛАВА 36. ИГРА В ДОМИНО И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ КОМ- БИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ	439

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении и качестве перевода просим присылать по адресу:
129820 Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2,
издательство «Мир»

В 1974 году

для любителей занимательной математики
издательство «Мир»

выпустит в свет книги занимательных задач
и головоломок

ГУГО ШТЕЙНГАУЗА И ГЕНРИ Э. ДЬЮДЕНИ

Следите за поступлениями!

Мартин Гарднер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НОВЕЛЛЫ

Редактор *А. Г. Белевцева*

Художник *С. И. Мухин*

Художественный редактор *Ю. Л. Максимов*

Технический редактор *В. П. Сизова*

Корректор *Т. С. Лаврова*

Сдано в набор 24/IX 1973 г.

Подписано к печати 14/XII 1973 г.

Бумага тип. № 3 84X108¹/₃₂ = 7,13 бум. л.

23,94 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 23,81 Изд. № 12/7212

Цена 1 р. 33 к: Зак. № 799

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли,

198052, Ленинград, Л-52,

Измайловский проспект, 29