
У. Болл, Г. Коксетер

Математические

эссе

и развлечения

Перевод с английского

Н. И. ПЛУЖНИКОВОЙ, А. С. ПОПОВА,
Г. М. ЦУКЕРМАН

под редакцией д-ра физ.-мат. наук,
проф. И. М. ЯГЛОМА



МОСКВА «МИР» 1986

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = N.$$

MATHEMATICAL RECREATIONS AND ESSAYS

by
W. W. ROUSE BALL
and
H. S. M. COXETER

Twelfth Edition

UNIVERSITY OF TORONTO PRESS,
1974



ББК 22.1
Б.79
УДК 51

Болл У., Коксетер Г.

Б 79 Математические эссе и развлечения. Пер. с англ./Под ред. с предисл. и примеч. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1986. — 474 с., ил.

Классическая книга английского математика У. Болла, впервые вышедшая в свет в 1892 г., представляет собой уникальное собрание математических развлечений: задач, эссе, головоломок. Переработанная и дополненная известным канадским математиком, одним из старейшин современной геометрии Г. Коксетером, эта яркая и многоплановая книга пользуется большой популярностью среди любителей математики разных стран.

Адресована широкому кругу читателей, интересующихся занимательной математикой.

Б 1702010000—157
041(01)—86 8—86, ч. 1

ББК 22.1

*Редакция научно-популярной и
научно-фантастической литературы*

© Twelfth Edition
Trinity College, Cambridge,
1974.
© перевод на русский язык,
примечания «Мир», 1986.



ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Жанр книги У. Р. Болла и Г. С. М. Коксетера, которую мы предлагаем вниманию советского читателя, определить нетрудно: это не учебник и не монография, не справочник и не задачник, это — научно-популярная книга по математике. Возник этот жанр очень давно — пожалуй, раньше, чем остальные названные здесь типы книг. Когда потребовалось учить (и учиться) математике, люди прежде всего обратились к забавным задачам и к загадочным историям; «учить играя» — был первый лозунг, первое методическое указание. В древности, в догреческий период европейской (да и неевропейской тоже) цивилизации, «наука наук» — математика — не знала точных определений и формализованных правил: только примеры, только указания «делай, как я». Запомнить эти примеры было легче всего, если они облекались в достаточно выразительную — смешную или даже страшную — форму. Поэтому первые пособия по математике, используемые в Вавилоне и Древнем Египте, в древних Индии и Китае, в школах (ушедших, почти не оставив материальных следов своего существования) великих латино-американских, африканских и тихоокеанских островных цивилизаций, представляли собой сборники занимательных задач и поучительных историй. Эта форма оставалась почти единственной даже и тогда, когда люди накопили уже достаточно впечатляющий запас знаний: древние египтяне и вавилоняне знали формулу объема усеченной пирамиды, которая — в силу ее сложности — давно исключена из школьного курса математики; вавилоняне (а может быть, и египтяне) задолго до прославленного грека Пифагора Самосского (VI в. до н. э.) были знакомы не только с самим (достаточно сложным, даже изощренным!) понятием «пифагоровых треугольников» (см. с. 68—69 настоящей книги), но и с формулами, позволяющими эти треугольники отыскивать, а пособия по математике, используемые для обучения вавилонских жрецов и египетских писцов, на наш сегодняшний взгляд, безусловно, относились к научно-популярному, пожалуй, даже к развлекательному жанру. Понятие доказательства в том смысле, в каком понимаем мы этот термин сейчас, впервые сложилось в ионийской школе Фалеса Милетского и в почти современной с ней южноитальянской школе Пифагора. Однако можно предполагать, что существовавшие в пифаго-

рейской школе (и не дошедшие до нас) пособия, составившиеся под непосредственным влиянием самого Пифагора, имели еще развлекательный характер, и лишь позже сложился тот тип (и стиль) учебника математики, который почти без изменения основных методических и методологических установок дошел от античных времен до наших дней. Но и во времена Евклида, и позже в Греции наряду с сухими учебниками «евклидова» типа были весьма популярны и разного рода «антологии занимательных задач», а скажем, обсуждение математической по своей сути задачи об *удвоении куба* всегда связывалось с различными вариантами интригующей истории про божий гнев и делосского оракула (см. гл. XII настоящей книги). Закат же античной культуры в IV—V вв. привел к «временному» (затянувшемуся, однако, более чем на 1000 лет!) отказу от задаваемой «Началами» Евклида строгой формы учебников — и все средневековые пособия по математике [включая и выдающиеся книги Леонардо Пизанского (Фибоначчи, 1180—1240)] снова обрели форму сборников математизированных новелл или математических развлечений.

Такая «устойчивость жанра» не удивительна: ведь для большинства людей, интересующихся математикой, первые живые впечатления от этой науки связываются с задачами или целыми книгами «развлекательного» плана. И вряд ли можно переоценить то значение, которое имел для роста математической культуры в нашей стране скромный выпускник Ленинградской лесной академии и страстный любитель математики Яков Исидорович Перельман (1882—1942), по научно-популярным книгам которого впервые «входили в математику» не только мы, но и наши отцы и деды. Примерно такую же роль сыграл в системе математического просвещения в Англии и США выпускник Кембриджского университета, историк математики и педагог У. У. Роуз Болл (1850—1925), перу которого принадлежит ряд книг математического содержания («Краткая история математики», «История математического образования в Кембридже» и др.), а также выдержавший многочисленные издания (десять изданий за период с 1882 по 1937 г.) и пользовавшийся исключительной популярностью во всех англоязычных странах сборник «Математические развлечения и задачи».

В 1939 г. издательство Торонтского университета в Канаде приняло решение переиздать «старую, но вечно

молодую» книгу Роуза Болла. Однако простое повторение предыдущих изданий книги, впервые увидевшей свет почти 50 лет назад, показалось неоправданным. Переработка книги Болла была поручена крупнейшему из канадских математиков, профессору университета г. Торонто Гарольду Скотту Макдональду Коксетеру, известному ученому и педагогу, члену Канадской, Английской (Королевское общество) и ряда других академий и научных обществ, автору многих монографий, учебников и научно-популярных книг (целый ряд книг и статей Коксетера переведен и на русский язык). Подготовленное Коксетером издание книги Болла (имеющее теперь двух авторов и новое название — «Математические эссе и развлечения») вышло в свет в 1939 г., после чего оно также многократно переиздавалось; в 1974 г. Коксетер снова переработал его — и настоящая книга представляет собой перевод одного из переизданий этого последнего (12-го) варианта книги.

Сложная история книги и наличие у нее двух — различающихся и по эпохе, и по стилю — авторов привела к некоторой ее разноплановости, которую, впрочем, скорее можно считать достоинством, чем недостатком этого сочинения. Книга рассчитана на разные категории читателей — она может представлять интерес и для школьников, и для учителей, и для студентов физико-математических и технических факультетов, а частично даже для преподавателей вузов. Разумеется, обширный пласт ее читателей (как и всех книг подобного рода) могут составить любители математики, не получившие никакого специального образования. Авторы неоднократно предупреждают о том, что первые главы книги идейно беднее последующих (пожалуй, кроме глав XII и XIII, также рассчитанных на малоопытных читателей); кроме того, в большинстве глав первые их разделы проще заключительных. Однако эта книга ни в коей мере не предполагает последовательного ее изучения: она состоит из множества абсолютно не связанных друг с другом тем, или эссе, так что любой читатель вполне может найти в ней материал по силам и по вкусу. Содержательность книги отчасти повышается за счет того, что авторы нередко опускают доказательства, — это позволяет рассматривать настоящую книгу и как задачник (впрочем, довольно трудный), и как пособие для самостоятельной работы.

Книга имеет довольно сложную структуру, и мы считаем целесообразным сказать несколько слов по этому

поводу. Библиографические указания авторов, к сожалению, в большинстве своем недостаточно полны и мало-доступны русскому читателю; поэтому мы сочли необходимым дополнить книгу отдельным разделом «Примечания», который в основном сводится к ссылкам на русскую литературу по темам книги [примечания нумеруются в каждой главе отдельно и указываются малыми числами над строчками текста (¹, ² и т. д.)]. Список дополнительной литературы помещен в конце книги, а авторские ссылки на литературу — в конце глав; при этом цифры в квадратных скобках ([1], [2] и т. д.) в тексте книги отсылают читателя исключительно к литературе, указанной авторами; цифры же в «Примечаниях» — если не указано иное — относятся к дополнительной литературе.

Говоря о содержании книги, нельзя не отметить определенную его пестроту, что, на мой взгляд, не является недостатком. У. У. Роуз Болл при составлении своей книги широко пользовался классическими (иногда очень древними) сочинениями из области математических развлечений (Баше, Озанам, Люка, Крайчик), разумеется, называя каждый раз те книги, из которых он черпал материал; возможно, кому-то покажется несколько архаичным и содержание гл. XII. Но порожденная современной компьютерной эрой «математическая революция», которая, в частности, выразилась в резком росте значения комбинаторики и иных «конечных» (т. е. не связанных с дифференциальным и интегральным исчислением и непрерывными процессами) тем¹, сделала актуальными многие из старинных задач этой книги; некоторые из них тесно связаны с комбинаторными расчетами или столь важными для ЭВМ недесятичными системами счисления². Со своей стороны Г. С. М. Коксетер поста-

¹ Ср., например, Яглом И. М. Элементарная математика прежде и теперь. — М.: Знание, 1972. [Своеобразным отражением тех тенденций в современной математике, о которых здесь говорится, является возникновение в последние десятилетия влиятельной «фрактальной» школы (см. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. — San Francisco: Freeman, 1982), глава которой Бенуа Мандельброт (с некоторой, впрочем, долей полемического преувеличения) постулирует: „В мире вообще не существует «школьных» непрерывных функций и гладко текущих процессов — только «фрактальные», изломанные, нигде не дифференцируемые; лишь слабость того математического аппарата, которым мы владеем, заставляет нас заменять их идеализированными гладкими функциями и процессами.“]

² «Вторую молодость» ряда рассмотренных здесь древних задач иллюстрирует и включение одной из них (см. «Третий пример»

рался еще более «актуализировать» содержание книги, дополнив ее некоторыми близкими современной науке темами и освежив изложение Болла ссылками на последние результаты. В первую очередь, пожалуй, здесь следует сказать о прибавленном Коксетером к книге Болла обстоятельном эссе о многогранниках (гл. V). Теория выпуклых многогранников переживает сегодня новый расцвет, что обусловлено ее связью с задачами оптимизации, и в частности линейного программирования; теория симметрии многогранников интересна в связи с тем значением, которое имеют в современной науке — в математике, физике, биологии, не говоря уж о кристаллографии — соображения симметрии; тесно связанная с учением о многогранниках тема о плотнейших упаковках шаров, которой завершает Коксетер гл. V книги, находит серьезнейшие применения в современной теории связи (в теории кодирования) и т. д. В качестве других примеров «актуальных» тем, затронутых в книге, можно назвать, скажем, широкое использование так называемых конечных полей Галуа (см. последний раздел гл. II), обстоятельное обсуждение вопроса о конечных геометриях, разбор родственных задач (ср. со сказанным в примечаниях редактора по поводу гл. X) и специальную гл. XIV, посвященную криптографии, впрочем (НТР на месте не стоит!), заметно уже отставшую от современной «компьютерной» трактовки соответствующих проблем (см. сказанное редактором по поводу гл. XIV).

В заключение мне хочется не только пожелать читателю успеха в постижении этой содержательной и не такой уж простой книги, но и посоветовать ему не пренебрегать указанными там библиографическими источниками, которые, безусловно, позволят ему значительно расширить свой кругозор в области не только математических развлечений, но и просто математики. Замечу, кроме того, что многие из затронутых в этой книге тем и задач (иные из них до сих пор еще не решены!) открывают достаточно прямой путь в «большую науку».

Наконец, мне хочется поблагодарить Дональда Коксетера за помощь, оказанную в работе над книгой, в частности за присылку исправлений и дополнений, разумеется, учтенных в русском варианте «Математических эссе и развлечений».

И. М. Яглом

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга содержит различные задачи того типа, который принято относить к области математических развлечений, а также ряд эссе по близким вопросам. Мы не касались здесь тем, понимание которых требует серьезных математических знаний. Считаю своим долгом предупредить читателя, что изложенные в книге результаты, как правило, не имеют практического значения, и, кроме того, в основном они не новы. Вместе с тем многие из обсуждающихся вопросов, на мой взгляд, достаточно интересны — гарантией этого может служить то, что большинство из них связаны с именами выдающихся математиков. Впервые книга увидела свет в 1892 г., и естественно, что при переизданиях в нее добавлено довольно много нового материала.

В своем теперешнем виде книга состоит из шестнадцати глав. Многие вопросы, упомянутые в первых четырех главах, весьма тривиальны. Некоторые из них изложены в работах, вполне доступных широкому читателю; поэтому я не касался этих вопросов, отсылая читателя к соответствующим источникам. Те же вопросы, которые не рассматривались в других работах, я счел разумным включить в книгу — и это уже дело читателя опустить их при чтении или бегло просмотреть. Кроме того, при обсуждении задач, решения которых слишком длинны или сложны, я обычно ограничивался указанием статей или книг, где подробно изложены способы их решения, а также несколькими иллюстративными примерами. В книге встречаются и такие задачи, которые еще ждут своего решения.

Везде, где это было возможно, я приводил ссылки на имеющиеся первоисточники рассматриваемых задач и решений. В тех случаях, когда дается формулировка какой-то теоремы, обычно указывается авторитетный источник, где можно найти ее доказательство. За некоторым исключением, я старался всюду указывать основополагающие труды. Однако, даже потратив немало времени на проверку библиографических ссылок, я не беру на себя смелость утверждать, что они абсолютно безошибочны.

У. У. Роуз Болл
1922 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ОДИННАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Занимаясь редактированием и переработкой восхитительной книги Роуза Болла, я стремился сохранить ее живость и поэтому подбирал такой дополнительный материал, который, как мне кажется, мог бы понравиться самому автору.

Беседы со многими математиками привели меня к решению исключить гл. V, VIII и XV десятого издания. (С нитяными фигурами читатель может ознакомиться по девятому и десятому изданиям книги Р. Болла и по его известной книжке на эту тему.) Было также решено разбить гл. XII на отдельные части, распределив их между гл. I, III, IV и XI.

По сравнению с предыдущими изданиями книга претерпела существенные изменения: полностью обновлена гл. V, в основном — гл. II, IX и в значительной степени — гл. III и VII; кроме того, гл. XIV, посвященная криптографии и шифрам, была целиком переработана Абрахамом Синковым, специалистом по криптоанализу министерства обороны США. Ему, как и многим другим моим консультантам, я приношу искреннюю благодарность. Особую признательность мне хотелось бы выразить Д. Х. Лемеру за глубокий и содержательный разбор рукописи гл. II, Дж. М. Андреасу, предоставившему многие рисунки для гл. V, а также П. С. Дончиану — за фотографии сделанных им моделей (помещенные на с. 143 и 148).

Г. С. М. Коксетер

*Университет г. Торонто
Январь 1938*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание настоящей книги (вышедшее под несколько иным заголовком — «Математические развлечения и задачи») состоялось 80 лет назад. Я признателен издательству Торонтского университета за предпринятые им усилия продлить жизнь книге, опубликовав это новое издание. Мне хочется искренне поблагодарить за помощь многих моих друзей и коллег: Дж. Х. Х. Чока, который переработал ту часть гл. II, где говорится о распределении простых чисел; Д. Х. Лемера, Дж. Ч. П. Миллера и Джона Селфриджа, сообщивших мне о последних результатах по разложению больших чисел; Фредерика Каннингема-младшего, который предоставил мне новые данные о задаче Какея (гл. III); Р. М. Фута и И. Дж. Э. Кани, которые просмотрели библиографические ссылки, дали немало полезных рекомендаций и добавили раздел, посвященный полимино (гл. IV); У. Т. Татта, давшего более современное изложение теории графов (гл. I X); Чендлера Дэвиса и Дональда Кнута, благодаря которым читатель сможет познакомиться с замечательным понятием кривой дракона, и особенно Дж. Дж. Зейделя, который взял на себя нелегкий труд заменить гл. X книги Роуза Болла (посвященную задаче Киркмана о школьницах) более широким и интересным введением в комбинаторную теорию, включившим несколько его собственных оригинальных идей.

За время, минувшее с 1939 г. — когда вышло в свет 11-е издание настоящей книги, — применение электронных вычислительных машин значительно облегчило многие арифметические расчеты. Хотя Евклид еще более двух тысяч лет назад установил, что простых чисел бесконечно много, самым большим простым числом, известным математикам в явном виде в период 1877—1947 гг., было число $2^{127} - 1$. С тех пор многое изменилось: ЭВМ позволили Лемеру и др. найти простые числа, состоящие из тысяч цифр. Однако математикам не следует смотреть на вычислительную машину как на «чудовище Франкенштейна», ибо остались еще арифметические задачи (вроде той, решение которой помещено на форзаце), непосильные для машины, но не устоявшие перед изобретательностью и искусством математика.

В значительной степени переработана гл. VIII; этим мы стремились воздать должное д-ру Г. Рингелю и по-

койному профессору Дж. У. Т. Янгсу за их блестящие достижения в решении проблемы раскрашивания карт на многосвязных поверхностях. Правило Тремо прохождения лабиринтов заменено более совершенным правилом, принадлежащим Тарри (гл. IX). Во многом откорректировано исследование числа π (гл. XII). Наконец, эссе о чудо-вычислителях (гл. XIII) пополнено краткой биографией профессора А. К. Айткена из Эдинбурга.

Как, вероятно, заметит читатель, многие главы книги написаны от первого лица. Почти во всех случаях можно без опасений считать, что местоимение «я» относится к старшему из авторов — Роузу Боллу.

Буду очень признателен читателям, которые сочтут для себя возможным поделиться своим мнением о книге, а также сообщить обо всех обнаруженных ошибках или неясностях.

Г. С. М. Коксетер

*Университет г. Торонто
Январь 1972*

Люди всегда были особенно искусны в изобретении игр; здесь нет границ свободному полету мысли... Сначала игры строились на одних лишь числах, затем появились игры, учитывающие ситуацию... За играми, включающими числа и ситуации, с неизбежностью последовали игры, в которые входят передвижения. Остается только пожелать, чтобы был создан целый курс игр, трактуемых математически.

*Г. Лейбниц
(Из письма к де Монмору,
29 июля 1715 г.)*

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Я начну книгу с описания некоторых развлечений, связанных с арифметикой. Не раз отмечалось, какой большой интерес вызывает выявление необычных соотношений между числами, поэтому подобные задачи обязательно включаются в большинство книг по занимательной математике. Хотя для тех, кто знаком с началами алгебры, решение таких задач очевидно, многие неискушенные читатели находят в них не меньшее очарование, чем математик-профессионал в заумных теоремах из «высшей арифметики» (теории чисел). Эта глава целиком посвящена элементарным задачам.

Прежде всего мне хотелось бы предупредить читателя, что большая часть рассматриваемых здесь задач взята из двух источников. Во-первых, это классическая книга «Игры и задачи, основанные на математике» [1] Гаспара Клода Баше де Мезириака¹. Ее первое издание вышло в свет в 1612, второе — в 1624 г.; ссылки на эту работу даются по изданию 1624 г. Некоторые задачи взяты Баше из сочинений Алкуина, Пачоли из Бурго, Тартальи, Кардано; возможно, какие-то из них имеют восточное происхождение, однако я не пытался выяснить это, чтобы добавить соответствующие ссылки. Второй источник, который я имел в виду, — это книга Озанама² «Математические и физические развлечения» [2]. Ее первое издание, вышедшее в Париже в 1694 г., в основном представляет собой компиляцию работ Баше, Мидорга и Лёрешона. Эта часть книги превосходна, чего, увы, нельзя сказать о дополнениях, принадлежащих Озанаму. В сборнике *Biographie Universelle* упоминаются последующие издания этой книги в 1720, 1735, 1741, 1778 и 1790 гг. Несомненно, эти ссылки правильны, однако мне известны лишь некоторые из перечисленных изданий (их я видел сам). Одно из них вышло в 1696 г. в Амстердаме. В 1723 г. (через шесть лет после смерти Озанама) книга была издана в трех томах с добавле-

нием четвертого тома, содержащего, в частности, приложение, посвященное головоломкам. Новые издания выходили в 1741, 1750 (на втором томе указан 1749 г.), 1770 и 1790 гг. Предполагается, что издание 1750 г. было отредактировано Монтуклой, который, однако, поставил условие, чтобы в этой связи его имя не упоминалось. Первая ссылка на исправления, внесенные Монтуклой, была сделана лишь в издании 1790 г., хотя редактор упомянут там как господин М***. Монтукла исключил большинство ошибочных рассуждений, содержащихся в предыдущих изданиях, и добавил ряд исторических справок, но, к сожалению, не решился избавить книгу от многочисленных присущих ей тривиальностей и трюизмов. Английский перевод первого варианта книги вышел в 1708 г. и выдержал, насколько мне известно, четыре издания, последнее из которых было опубликовано в Дублине в 1790 г. Отредактированное Монтуклой издание 1790 г., переведенное на английский язык Хаттоном, было выпущено в 1803, 1814 и (в одном томе) 1840 гг. Мои ссылки на эту работу относятся к изданиям 1803 и 1840 гг.

После такого вступления перейдем непосредственно к рассмотрению некоторых типичных элементарных задач арифметического характера. На протяжении почти трех веков они составляли существенную часть большинства сборников математических развлечений. Мы включили их в нашу книгу потому, что они представляют определенный исторический — но отнюдь не математический — интерес, и математику я бы порекомендовал просто пропустить эту главу.

Многие из представленных здесь задач имеют характер фокусов или головоломок; следуя традиции, я излагаю их в такой же форме. Должен заметить, что большинство из них вряд ли может вызвать интерес у публики, если только не подготовить тщательно их исполнение: позаботиться о том, чтобы замаскировать предварительно проделанные операции, или попытаться оформить результат так, чтобы он выглядел неожиданным. Но наша книга не руководство по демонстрации фокусов, поэтому вы не найдете в ней рекомендаций соответствующего свойства — я лишь перечисляю шаги, которые должны привести к успеху. Некоторые фокусы могут заинтересовать нематематика и сегодня, но стоит только перевести все операции на строгий математический язык, как их секрет тотчас раскроется.

КАК НАЙТИ ЗАДУМАННОЕ ЧИСЛО

Существует множество способов найти задуманное кем-то целое положительное число по результатам произведенных над ним действий. Ограничимся лишь несколькими примерами. Всякий, кто знаком с арифметикой, без труда придумает другие фокусы того же рода.

Первый способ ([1], задача I, с. 53). (i) Попросите утроить задуманное число. (ii) Выясните, четно или нечетно полученное произведение. Если оно четно, то его следует далее разделить пополам; если нечетно, — прибавить к нему 1 и разделить пополам. (iii) Полученный результат следует умножить на 3. (iv) Попросите разделить это произведение на 9 и узнайте целую часть частного. Допустим, в ответе получилось n . (v) В таком случае задуманное число равно $2n$ или $2n + 1$ в зависимости от того, четным или нечетным был результат шага (i).

Доказательство очевидно. Любое четное число имеет вид $2n$, и проделанные над ним операции дают: (i) $6n$ (четное число); (ii) $6n/2 = 3n$; (iii) $3 \times 3n = 9n$; (iv) $9n/9 = n$; (v) $2n$. Нечетное же число имеет вид $2n + 1$; поэтому те же операции над ним приводят к ответу: (i) $6n + 3$ (нечетное число); (ii) $(6n + 3 + 1)/2 = 3n + 2$; (iii) $3(3n + 2) = 9n + 6$; (iv) $(9n + 6)/9 = n + \text{остаток}$; (v) $2n + 1$. Итак, в обоих случаях указанное правило работает безупречно.

Второй способ. ([1], задача IV, с. 74). Предложите задумавшему число проделать над ним следующие операции: (i) умножить задуманное число на 5; (ii) прибавить к произведению 6; (iii) умножить сумму на 4; (iv) прибавить к произведению 9; (v) умножить полученную сумму на 5. Если теперь из последнего результата вычесть 165 и разность разделить на 100, то получится задуманное число.

В самом деле, пусть задумано число n . Тогда указанная последовательность операций приводит к следующему результату: (i) $5n$; (ii) $5n + 6$; (iii) $20n + 24$; (iv) $20n + 33$; (v) $100n + 165$. Отсюда и следует изложенное выше правило.

Третий способ ([1], задача V, с. 80). Попросите задумавшего число выполнить следующие операции: (i) умножить число на любое другое, названное вами, скажем на a ; (ii) разделить произведение еще на одно число, скажем на b ; (iii) умножить частное на c ;

(iv) разделить произведение на d ; (v) разделить результат на задуманное число; (vi) прибавить к частному задуманное число. Вычитая из полученного результата ac/ba , вы определите задуманное число.

В самом деле, пусть n — задуманное число. Тогда в результате первых четырех операций получается nac/bd . Операция (v) дает ac/bd , а (vi) приводит к $n + ac/bd$. Но ac/bd нам известно, и, вычитая его, мы получаем n .

Разумеется, в качестве чисел a, b, c и d можно брать любые положительные числа. Пусть, например, $a = 12$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 3$; тогда достаточно вычесть 7 из конечного результата — и задуманное число определено.

Четвертый способ (см. [3])*. Попросите кого-то задумать число меньше 90 и произвести над ним следующие операции: (i) умножить на 10 и прибавить любое число меньше 10, скажем число a (однако число a он должен назвать); (ii) разделить полученный результат на 3 и назвать остаток — допустим, это будет число b ; (iii) умножить частное, полученное на предыдущем шаге, на 10 и прибавить любое число меньше 10, например число c (которое загадывающий также должен вам сообщить); (iv) разделить результат шага (iii) на 3 и назвать остаток (пусть он равен d), а также третью справа цифру частного (предположим, это будет e). Теперь вы без труда найдете задуманное число. Действительно, пусть оно имеет вид $9x + y$, где $x \leq 9$, $y \leq 8$, и пусть r — остаток от деления $a - b + 3(c - d)$ на 9; тогда $x = e$, $y = 9 - r$.

Это несложно доказать. Если задуманное число равно $9x + y$, то после шага (i) мы получим число $90x + 10y + a$. Пусть $y + a = 3n + b$; тогда частное, полученное в результате шага (ii), равно $30x + 3y + n$. Шаг (iii) приводит к числу $300x + 30y + 10n + c$. Если $n + c = 3m + d$, то частное, полученное в результате шага (iv), равно $100x + 10y + 3n + m$; обозначим его через Q . Третьей цифрой числа Q должно быть x , так как в силу $y \leq 8$ и $a \leq 9$ обязательно $n \leq 5$, а неравенства $n \leq 5$ и $c \leq 9$ вместе дают $m \leq 4$. Следовательно, $10y + 3n + m \leq 99$, и, значит, третья цифра числа Q (т. е. число сотен в нем) равна x .

* Говорят, что этот пример придумал в детстве Джеймс Клерк Максвелл. Нельзя не заметить, насколько он отличается от приведенных выше простеньких задачек Баше.

Далее, из равенств $y + a = 3n + b$ и $n + c = 3m + d$ получаем $9m - y = a - b + 3(c - d)$. Отсюда вытекает, что если r — остаток от деления $a - b + 3(c - d)$ на 9, то $y = 9 - r$. (Это, безусловно, так, если остаток r мы считаем положительным; если же число $a - b + 3(c - d)$ отрицательно, то проще взять за y абсолютную величину соответствующего числа. Можно также исключить этот нежелательный случай, удачно подобрав a и c .) Итак, нам известны оба числа x и y , а значит, и задуманное число $9x + y$.

Пятый способ ([1], задача VI, с. 84, 87). Попросите кого-нибудь задумать число меньше 60 и выполнить следующие операции: (i) разделить задуманное число на 3 и назвать остаток (пусть он равен a); (ii) разделить задуманное число на 4 и назвать остаток (пусть он равен b); (iii) разделить задуманное число на 5 и назвать остаток (допустим, теперь он равен c). Тогда задуманное число равно остатку от деления $40a + 45b + 36c$ на 60.

Этот метод нахождения задуманного числа можно обобщить следующим образом. Предположим, что $a', b', c', \dots$ — взаимно простые числа, произведение которых равно p . Пусть n — произвольное число, меньшее p , и $a, b, c, \dots$ — остатки от деления n соответственно на $a', b', c', \dots$. Найдем число A , которое делится на произведение $b'c'd' \dots$ и на 1 больше некоего числа, кратного a' (т. е. при делении A на a' получается остаток, равный 1). Затем найдем число B , которое делится на $a'c'd' \dots$ и на 1 больше числа, кратного b' . Аналогичным образом построим далее числа $C, D, \dots$. (Теория чисел дает общие правила нахождения чисел $A, B, C, \dots$; однако при малых значениях $a', b', c', \dots$ эти числа можно отыскать непосредственно.) Теперь докажем, что n равно остатку от деления $Aa + Bb + Cc + \dots$ на p .

Пусть $Aa + Bb + Cc + \dots = N$; через $M(x)$ обозначим любое число, кратное x . Тогда $A = M(a') + 1$ и, значит, $Aa = M(a') + a$; поэтому, если разделить первое слагаемое суммы N (т. е. число Aa) на a' , то в остатке получится a . Далее, поскольку B кратно $a'c'd' \dots$, Bb делится на a' ; то же справедливо и в применении к Cc, Dd и т. д. Итак, каждое слагаемое суммы N (кроме первого) делится на a' ; поэтому остаток от деления N на a' равен остатку от деления первого слагаемого, т. е. равен a . Но a — это остаток, полученный при делении

на a' задуманного числа n . Следовательно,

$$N - n = M(a');$$

аналогично

$$N - n = M(b'),$$

$$N - n = M(c')$$

.

Однако $a', b', c', \dots$ — взаимно простые числа, поэтому

$$N - n = M(a'b'c' \dots) = M(p),$$

т. е.

$$N = M(p) + n.$$

А так как по условию $n < p$, при делении N на p в остатке получается n .

Правило Баше применимо в случае, когда $a' = 3$, $b' = 4$, $c' = 5$, $p = 60$, $A = 40$, $B = 45$, $C = 36$. Если задуманное число меньше 420, то можно взять $a' = 3$, $b' = 4$, $c' = 5$, $d' = 7$, $p' = 420$, $A = 280$, $B = 105$, $C = 336$, $D = 120$.

КАК НАЙТИ РЕЗУЛЬТАТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЙ НАД НЕИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛОМ, НЕ ЗАДАВАЯ НАВОДЯЩИХ ВОПРОСОВ

Задачи подобного типа построены на том, что путем подбора подходящей последовательности действий задуманное число исключается из окончательного ответа. Мы ограничимся четырьмя примерами таких задач-фокусов.

Первый пример ([1], задача VII, с. 102). Предложите кому-нибудь задумать число (скажем, это будет число n) и произвести над ним далее следующие операции: (i) умножить n на любое число, скажем a ; (ii) прибавить число b ; (iii) разделить сумму на c . Затем попросите (iv) найти (a/c) -ю часть от задуманного числа и (v) вычесть ее из результата шага (iii). После первых трех операций получается число $(na + b)/c$; результат шага (iv) равен na/c ; следовательно, разность равна b/c , т. е. известна вам заранее.

Так, если $a = 6$, $b = 12$, $c = 4$, то $a/c = 1\frac{1}{2}$ и окончательный результат всегда равен 3.

Второй пример ([1], задача XIII, с. 123) *. (i) Попросите одного из играющих, скажем A , взять любое количество фишек (допустим, он взял n фишек); попросите теперь другого игрока B взять в p раз больше фишек, чем у A (p — любое число, названное вами). (ii) Попросите затем A передать B часть его фишек, например q (q — опять любое названное вами число), и, наконец, (iii) попросите B отдать A в p раз больше фишек, чем было у A после предыдущего шага. В результате у B останется $q(p+1)$ фишек, т. е. известное вам число фишек; и тогда вы либо просто сразу называете его, либо придумываете какой-то более эффектный способ окончания игры.

Действительно, после шага (ii) количество фишек у B равно $pn + q$, а количество фишек у A равно $n - q$. На шаге (iii) B отдает $p(n - q)$ фишек A ; следовательно, у него остается $(pn + q) - p(n - q) = q(p + 1)$ фишек.

Например, после того как A взял какое-то число фишек, вы можете выбрать $p = 2$ и попросить B взять в два раза больше фишек, чем A . Затем, выбрав q равным, скажем, 3, вы можете попросить A отдать B три его фишки. Далее B отдает A в два раза больше фишек, чем было до этого у A , — и вы заранее знаете, что в результате у B останется $3(2 + 1) = 9$ фишек.

Эту игру (как и некоторые другие, описанные ниже) можно провести и с одним партнером, считая, что A — это его правая рука, а B — левая (но при этом левая рука должна знать, что делает правая!).

Третий пример. Попросите кого-нибудь выполнить следующие операции: (i) написать произвольное трехзначное число, в котором первая и последняя цифры различаются больше чем на единицу; (ii) переставить цифры выбранного числа в обратном порядке, образовав тем самым новое число; (iii) найти разность двух записанных чисел; (iv) образовать новое число, переставив в обратном порядке цифры полученной разности; (v) сложить результаты операций (iii) и (iv). Тогда в сумме обязательно получится число 1089.

Проиллюстрируем это правило на конкретном примере, что одновременно позволяет и объяснить его

* Баше представил этот трюк в более общей, но, по существу, менее эффективной форме.

(в записи справа мы имеем право считать, что $a \geq \geq c + 1$. Почему?):

(i)	237	$100a + 10b + c$
(ii)	732	$100c + 10b + a$
(iii)	495	$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$
(iv)	594	$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$
(v)	1089	$900 + 180 + 9$

В этом примере окончательный ответ зависит только от основания позиционной системы счисления, в которой записаны рассматриваемые числа. Если это основание равно r , то окончательный результат будет равен $(r - 1)(r + 1)^2$; в частности, при $r = 10$ получаем $9 \times 11^2 = 1089$. Аналогичные трюки можно придумать и с числами больше 999 (как?).

Четвертый пример. Описанный здесь трюк с отрицательными числами предложил Норман Эннинг. Предложите кому-нибудь выполнить следующие операции: (i) задумать произвольное число, большее 1 (не обязательно целое); (ii) образовать число, обратное ему (так, числом, обратным 2, является $1/2$, и наоборот); (iii) образовать новое число путем вычитания предыдущего из 1; (iv) найти число, обратное последнему; (v) снова вычесть результат из 1; (vi) снова найти обратное число; (vii) прибавить к результату задуманное число. В ответе у нас всегда будет получаться 1.

Предположим, задуманное число равно $3/2$. Тогда получаем:

(i) $3/2$; (ii) $2/3$; (iii) $1/3$; (iv) 3; (v) -2 ; (vi) $-1/2$; (vii) 1.

Объясним это правило в общем виде, показав, что ответ не зависит от задуманного числа:

(i) a ; (ii) $1/a$; (iii) $(a - 1)/a$; (iv) $a/(a - 1)$; (v) $1/(1 - a)$; (vi) $1 - a$; (vii) 1.

Пользуясь величиной $\sec \theta = \sqrt{a^*}$, эту последовательность шагов можно также записать следующим образом:

* Смысл используемого здесь угла θ объясняется в [4].

(i) $\sec^2 \theta$; (ii) $\cos^2 \theta$; (iii) $\sin^2 \theta$; (iv) $\operatorname{cosec}^2 \theta$; (v) $-\operatorname{ctg}^2 \theta$; (vi) $-\operatorname{tg}^2 \theta$; (vii) 1.

Возможно, шаг (vii) лучше было бы сформулировать так: «снова вычесть полученное число из 1»; тогда в результате мы нашли бы задуманное число.

Прежде чем переходить к другим трюкам, стоит упомянуть о пятом издании «Игр и задач» Баше [5]* *revue simplifiée et augmentée par A. Labosne* (пересмотренном, упрощенном и дополненном А. Лабосном).

ЗАДАЧИ О ДВУХ ЧИСЛАХ

Теперь приведем два примера задач с двумя неизвестными числами.

Первый пример ([1], задача IX, с. 107). Допустим, заданы два числа — четное и нечетное. Одному играющему *A* предлагается выбрать одно из них, а другому *B* достается оставшееся число. Требуется узнать, какое из чисел — четное или нечетное — выбрал *A*. Попросите *A* умножить выбранное им число на 2 (или на любое другое четное число), а *B* пусть умножит свое число на 3 (или на любое другое нечетное число). Попросите их затем сложить полученные произведения и назвать сумму. Если она четна, то, значит, *A* выбрал нечетное число, а если она нечетна, то четное. Обоснование этого правила очевидно.

Второй пример [6]. Попросите кого-нибудь задумать два положительных числа (не обязательно различных и целых) и выполнить следующие операции: (i) образовать третье число, прибавив ко второму единицу и разделив результат на первое; (ii) образовать четвертое число, прибавив к третьему единицу и разделив результат на второе; ... (v) построить седьмое число, прибавив к шестому единицу и разделив результат на пятое. Шестое и седьмое числа совпадут с первым и вторым, так как мы получили периодическую последовательность с периодом 5. (Этот вывод легко проверить, обозначив первое и второе числа через *a* и *b* и проделав над ними указанные операции.)

* Оно включает краткую биографию Баше вместе с его портретом. По ознакомлении с ней может сложиться впечатление, что Баше написал свою книгу с целью обучения собственных семерых детей. Однако на самом деле впервые книга вышла задолго до его женитьбы.

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМОЙ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

Многие правила нахождения двух или более чисел основываются на том, что в арифметике целое число изображается последовательностью цифр, в которой каждая цифра обозначает произведение этой цифры на некоторую степень числа 10, а само исходное число равно сумме этих произведений. Например, число 2017 можно записать в виде $(2 \cdot 10^3) + (0 \cdot 10^2) + (1 \cdot 10) + 7$. Таким образом, 2 означает здесь две тысячи (т. е. произведение $2 \cdot 10^3$); цифра 0 — нуль сотен (произведение $0 \cdot 10^2$), 1 — один десяток (произведение $1 \cdot 10$), а 7 — семь единиц. Итак, численное значение каждой цифры зависит от того, на каком месте она стоит в числе. Приведем три примера, показывающих, какие фокусы можно проделывать с целыми числами.

Первый пример*. Широко известен такой фокус. Фокусник просит какого-нибудь мальчика из зрителей бросить две игральные кости и запомнить выпавшие числа или вытащить наугад одну костяшку домино и запомнить числа на каждой ее половинке. Затем мальчику предлагается выбрать одно из двух чисел, умножить его на 5, прибавить 7, удвоить полученную сумму и прибавить к ответу второе число. Узнав найденное таким образом число, фокусник мысленно вычитает из него 14 и получает двузначное число, две цифры которого равны двум исходным числам.

В самом деле, допустим, что выпали числа a и b . Каждое из них меньше 10 (ибо мы имеем дело с игральными костями или домино). В результате проделанных операций получаем: $5a$; $5a + 7$; $10a + 14$; $10a + 14 + b$. Таким образом, если из окончательного ответа вычесть 14, то останется двузначное число, цифры в котором совпадают с исходными числами. Чтобы лучше замаскировать все эти манипуляции с числами, можно провести аналогичный фокус с применением другой системы счисления.

* Некоторые вопросы подобного типа ставили Баше ([1], задача XII, с 117), Утред или Лик ([7], задача XXXIV), а также Озанам ([2], ч. I, гл. X). Автором книги [7] скорее всего является Лик, однако в каталогах эта работа обычно указывается как принадлежащая Утреду (так поступил и я). Собранные в книге задачи основаны на аналогичной работе Лёрешона (известного также под именем Эттен), опубликованной в 1626 г.

Второй пример (подобный пример см. [1], задача XII, с. 117). Если аналогичным образом выбрать три числа, например a , b , c , каждое из которых меньше 10, то их можно угадать так: (i) взять одно из чисел (скажем, a) и умножить его на 2; (ii) к полученному произведению прибавить 3; (iii) умножить результат на 5 и к произведению прибавить 7; (iv) к последней сумме прибавить второе число, b ; (v) умножить результат на 2; (vi) к этому произведению прибавить 3; (vii) умножить результат на 5 и прибавить третье число, c . Ответ, как нетрудно видеть, будет равен $100a + 10b + c + 235$. Следовательно, если окончательный результат известен, то достаточно вычесть из него 235, — тогда цифры оставшегося трехзначного числа совпадут с исходными тремя числами.

Третий пример*. К тому же типу задач относится следующее правило определения возраста. Попросите вашего собеседника задумать число (желательно не большее 10) и (i) возвести его в квадрат; (ii) вычесть из полученного числа 1; (iii) умножить результат на задуманное число; (iv) утроить полученное произведение; (v) прибавить к результату свой возраст; (vi) назвать сумму цифр полученного ответа. После этого вам остается угадать возраст своего собеседника с точностью до 9 лет, так как названная сумма цифр с точностью до кратного 9 совпадает с суммой цифр искомого числа — возраста вашего собеседника, т. е. указывает остаток от деления на 9 числа лет, которое вы хотите найти.

Алгебраическое доказательство правила очевидно. Пусть a — возраст, b — задуманное число. Перечисленные выше действия дают: (i) b^2 ; (ii) $b^2 - 1$; (iii) $b(b^2 - 1)$; (iv) $3b(b^2 - 1)$; (v) $a + 3b(b^2 - 1)$; (vi) сумму цифр a (с точностью до кратного 9), поскольку $3b(b^2 - 1) [= 3(b - 1)b(b + 1)]$ всегда делится на 9.

Другие примеры [8]. К тому же типу задач относится и более трудная проблема нахождения всех чисел, являющихся целыми кратными полученных из них «перевертышей» (т. е. чисел, полученных перестановкой цифр в обратном порядке)³. Например, среди четырехзначных чисел таким свойством обладают $8712 = 4 \times \times 2178$ и $9801 = 9 \times 1089$.

Можно также попытаться найти два числа, перевернутое произведение которых равно произведению пере-

* Этот пример принадлежит Ройалу В. Хиту.

вернутых сомножителей. Например: $312 \times 221 = 68952$; $213 \times 122 = 25986$. Число 698 896 замечательно тем, что оно является полным квадратом, совпадает со своим «перевертышем» и имеет четную сумму цифр.

Только четыре числа обладают тем свойством, что они равны сумме кубов своих цифр [9]: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$; $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$; $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$; $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

Интересными свойствами обладает периодическая десятичная дробь, представляющая число $1/7$. Как показал Троицкий (см. [10]), числа 142 857 (период этой дроби) и 285 714 — единственные числа, меньшие миллиона, из которых в результате перестановки первой слева цифры в самый конец (после самой правой) получаются числа, кратные исходным.

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ О ЧИСЛАХ И ИХ ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ

Здесь я приведу две-три задачи, которые, как мне кажется, неизвестны большинству составителей сборников занимательных задач и головоломок.

Первая задача формулируется так. Возьмем любое трехзначное число, у которого первая и последняя цифры различны. Переставим его цифры в обратном порядке. Вычтем перевернутое число из исходного. Тогда по последней цифре разности можно узнать все остальные ее цифры.

В самом деле, допустим, что имеется число $100a + 10b + c$; тогда перевернутое число записывается в виде $100c + 10b + a$, а разность этих двух чисел равна $(100a + c) - (100c + a)$, т. е. $99(a - c)$. Но $a - c$ не может превосходить 9, и, значит, искомой разностью могут быть только числа 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891. Во всех случаях предпоследняя цифра равна 9, а цифра перед ней (если она есть) равна разности между 9 и последней цифрой. Итак, если известна последняя цифра, то нетрудно найти и искомую разность.

Вторая задача немного напоминает первую и формулируется так: (i) возьмите любое число; (ii) переставьте его цифры в обратном порядке; (iii) найдите разность между числами (ii) и (i); (iv) умножьте полученную разность на любое (целое) число, которое только придет вам в голову; (v) вычеркните какую-либо цифру (отличную от нуля) полученного числа; (vi) назовите полу-

ченное таким образом число. Вычеркнутую цифру можно теперь узнать, вычитая сумму цифр названного числа из ближайшего превосходящего ее числа, кратного 9. Подобный вывод с очевидностью следует из того, что результат операции (iv) делится на 9, а сумма цифр любого кратного девяти числа сама делится на 9.

Обе эти задачи — типичные примеры многочисленных задач подобного рода.

Третья задача. Известно, что при пагинации (т. е. нумерации страниц) книги понадобилось n литер с цифрами; сколько страниц в книге, если, например, $n = 3001$?

Ответить на этот вопрос несложно. Для первых 999 страниц потребуется $9 + 180 + 2700$ литер. Остальных 112 литер хватит для нумерации еще 28 страниц. Таким образом, общее число страниц равно $999 + 28$, т. е. 1027.

Четвертая задача. Целые числа, начиная от 1, записываются подряд друг за другом. Какая цифра стоит на n -м месте, если, например, $n = 500\,000$?

Числа от 1 до 99 999 включительно займут 488 889 разрядов; следовательно, нам нужна 11 111-я цифра в последовательности шестизначных чисел начиная от 100 000. Имеем: $11\,111 = 6 \times 1851 + 5$. Следовательно, требуется узнать пятую цифру числа 101 851 — это цифра 5.

Эмпирические задачи. Можно привести множество эмпирических задач, подобных следующей. Требуется при помощи десяти цифр 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 записать числа, сумма которых равна единице; при этом каждая цифра должна быть использована один и только один раз; допускаются все общепринятые обозначения дробей*.

Можно рассмотреть и другие задачи, например при помощи тех же десяти цифр представить числа, сумма которых равна 100; при помощи девяти цифр 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 представить числа, в сумме дающие 100, и т. д. Таких задач очень много, но для их решения не требуется почти никаких математических знаний.

Задача о четырех цифрах. Эта задача, на мой взгляд, интереснее предыдущих. Нужно выразить при помощи четырех цифр 1, 2, 3, 4 последовательные целые числа, начиная с 1, и продвигаться вперед как можно дальше. При этом каждая из четырех цифр в представлении каж-

* Включая обозначения вида n для десятичной дроби с нулевой целой частью и $a \dots b$ для бесконечной периодической дроби с нулевой целой частью и периодом $a \dots b$. — *Прим. перев.*

дого числа должна быть использована один и только один раз. Если допускаются десятичная форма записи (включая десятичные дроби) *, алгебраические суммы, произведения и положительные целые степени, то можно дойти до числа 88. Если допустить еще символы квадратного корня и факториала (повторяющиеся при желании любое конечное число раз), то можно добраться до числа 276, а с добавлением дробных показателей — до 312. Можно поставить много аналогичных задач, разрешив, например, использование четырех из пяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5. При помощи пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, используя каждую из них один и только один раз, мне удалось дойти до чисел 3832 и 4282 в зависимости от того, исключалось или допускалось применение отрицательных и дробных показателей.

Задача о четырех четверках. Рассмотрим еще одно традиционное развлечение: при помощи четырех четверок, используя обычные арифметические и алгебраические обозначения, выразить последовательные числа, начиная от 1 и продвигаясь вперед как можно дальше. Разумеется, все зависит от того, что понимать под обычными обозначениями. а. Если разрешены только десятичная запись (например, числа типа 44), десятичные дроби, скобки и знаки сложения, вычитания, умножения и деления, то можно представить нужным образом каждое число вплоть до 22 включительно [например, $22 = (4 + 4) / (.4) + 4$]. б. Если включен также символ квадратного корня (который при желании можно повторять любое конечное число раз), то удастся дойти до 30. Заметим, однако, что, хотя число 2 выражается с использованием квадратного корня при помощи одной четверки, отсюда не следует возможность такого представления для 2. в. Если допустить также использование символов факториалов, то удастся записать каждое число вплоть до 112 (например, $99 = 4 \times 4! + \sqrt{4 / (.4)}$). г. Наконец, если допустить употребление целых показателей, выражающихся одной или несколькими четверками, и разрешить употребление квадратного корня бесконечное число раз, то можно достичь числа 156. д. Если же пойти на дальнейшие уступки и к целым показателям добавить субфакториалы **, то можно добраться до 877.

* См. предыдущее примечание. — *Прим. перев.*

** Субфакториал n равен $n!(1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + \dots \pm 1/n!)$.
О применении субфакториалов в задаче о четырех четверках см. *Mathematical Gazette*, May 1912.

Эта задача типична для целого класса задач такого рода. Так, при условии (в) (но без использования показателей степени) с помощью четырех единиц можно дойти до 34, с помощью четырех двоек — до 36, с помощью четырех троек — до 46, четырех пятерок — до 36, четырех шестерок — до 30, четырех семерок — до 25, четырех восьмерок — до 36, четырех девяток — до 130. Например, как заметил Т. Хаджи, $67 = \sqrt{9!/(9 \times 9)} + 9$.

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НАБОРАМИ ПРОНУМЕРОВАННЫХ ПРЕДМЕТОВ

Любой набор последовательно пронумерованных предметов позволяет проиллюстрировать характер задач, основанных на элементарных свойствах целых чисел. В качестве примеров перечислю несколько общеизвестных фокусов. Для демонстрации первых двух обычно используют наручные часы, последние четыре показывают при помощи колоды игральных карт.

Первый пример ([1], задача XX, с. 28, см. также [7], с. 28). Предложите кому-нибудь задумать любое число из тех, что имеются на циферблате наручных часов, скажем число m , и указать там же другое число, допустим n . Если начиная от n этот человек будет подряд постукивать по каждой отметке на циферблате, обозначающей часы, двигаясь против часовой стрелки и отсчитывая про себя удары $m, m+1, \dots$, то $(n+12)$ -й удар придется как раз на задуманное им число m . Например, если, задумав число V, человек указал сначала число IX, то, отстукивая назад IX, VIII, VII, VI, ... и считая соответствующие удары как 5, 6, 7, 8, ..., на 21-м ударе он окажется на цифре V.

Объяснение этого правила очевидно. В конце концов человек укажет на $(n+12-m)$ -ю отметку от той, с которой начал, а поскольку отсчет велся против часовой стрелки, то, чтобы достичь m , нужно было пройти $n-m$ отметок. То, что пройдено еще 12 отметок на циферблате, ничего не меняет, так как при этом был описан один полный круг. Число $n+12-m$ всегда положительно, так как n положительно, а m меньше 12. Поэтому, проходя $n+12-m$ отметок, мы получаем правило, которое справедливо как при $m > n$, так и в случае $m < n$.

Второй пример. Рассмотрим еще одну известную задачу, в которой используется циферблат часов. Если указывать часы, двигаясь от VII против часовой стрел-

ки: VI, V, ... и считать часы начиная с какой-то выбранной отметки (скажем, если выбрано X, то первым считается 11-й удар), то 20-м будет выбранный час.

В самом деле, допустим, что выбран час n . Тогда 8-й удар придется на XII часов и будет засчитан как $(n + 8)$ -й, а удар, засчитанный как $(n + p)$ -й, придется на $20 - p$. Подставляя $p = 20 - n$, получаем, что удар, засчитанный как 20-й, придется на выбранное число n . Разумеется, отметки на циферблате, на которые приходятся первые семь ударов, несущественны. Кроме того, ясно, что можно начинать с VIII и считать до 21, начинать с IX и считать до 22, и т. д.

Третий пример. Приведем еще один простой пример. Предложите кому-нибудь выбрать из колоды в n карт одну из первых m карт и запомнить (но не называть вслух) ее номер по порядку начиная от верхней карты в колоде. Допустим, что это карта с номером x . Затем, взяв колоду, переложите верхние m карт в обратном порядке (это легко сделать незаметным перемешиванием), после чего переместите y карт (где $y < n - m$) из нижней части колоды наверх. Тогда выбранная вначале карта станет $(y + m - x + 1)$ -й сверху. Верните зрителю перетасованную таким образом колоду и попросите его считать верхнюю карту как $(x + 1)$ -ю, следующую как $(x + 2)$ -ю и т. д. Тогда выбранная ранее карта окажется $(y + m + 1)$ -й. Так как y и m можно выбрать произвольно и, показывая фокус, каждый раз изменять их, то неискушенному в арифметике зрителю нелегко будет раскрыть секрет фокуса.

Четвертый пример (частный случай этого примера см. [1], задача XVII, с. 138). На произвольно выбранную карту положите сверху еще столько карт, чтобы их число в сумме с числом очков первой карты составляло 12. Например, если взята пятерка треф, то на нее нужно положить еще 7 карт. Фигурам можно придать любое количество очков — часто они считаются десятками. Прodelайте то же самое с другой картой, построив вторую стопку. Это можно делать три-четыре раза или столько, на сколько в колоде хватит карт. Если в конце концов получилось p стопок и осталось еще r карт, то сумма очков всех нижних карт во всех стопках равна $13(p - 4) + r$.

Действительно, если нижняя карта в стопке имеет x очков, то всего в этой стопке $13 - x$ карт, причем это верно для любой стопки. Всего в колоде 52 карты — это

число должно равняться сумме количества карт в p стопках плюс r оставшихся карт. Следовательно,

$$(13 - x_1) + (13 - x_2) + \dots + (13 - x_p) + r = 52,$$

$$13p - (x_1 + x_2 + \dots + x_p) + r = 52,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 13p - 52 + r = 13(p - 4) + r.$$

В более общем случае, когда колода состоит из n карт и в каждой стопке сумма очков нижней карты и количества лежащих на ней карт равна m , сумма очков всех нижних карт во всех стопках составит $(m + 1)p + r - n$. Например, при игре в преферанс колода содержит $n = 32$ карты; в этом случае удобно взять $m = 15$.

Пятый пример. Легко заметить, что при «снятии» колоды относительное расположение карт (если мы условимся считать верхнюю карту следующей непосредственно за нижней) не меняется. На этом и основан рассматриваемый фокус ([1], задача XIX, с. 152). Возьмите колоду и кладите открытые карты на стол (одну на другую), считая их: один, два, три и т. д. Запомните первую карту. Предложите кому-нибудь из зрителей выбрать одну карту и запомнить ее номер. Возьмите колоду в руки и попросите зрителей «снять» ее сколько угодно раз (но при этом следите за тем, чтобы карты не перемешивались). Попросите назвать номер выбранной карты. Выкладывая карты на стол и, дойдя до той, которая была первой, начинайте (про себя) считать: один, два, ... Выбранная зрителем карта появится под названным номером. Если случится так, что колода закончилась, а вы еще не дошли до названного числа, нужно взять в руки первые карты, которые вы ранее не считали, и продолжать выкладывать карты, не прерывая счета.

Шестой пример. И еще одна простая задача того же типа. Возьмите полную колоду и отбросьте из нее все фигуры. Остальные 40 карт в открытом виде разложите по мастям в четыре горизонтальных ряда. В первом ряду расположите масть A в порядке 1, 2, ..., 10; во втором ряду — масть B в порядке 10, 1, 2, ..., 9; в третьем ряду — масть C в порядке 9, 10, 1, ..., 8 и в последнем — масть D в порядке 8, 9, 10, 1, ..., 7. Затем возьмите первую карту ряда 1, положите ее на первую карту ряда 2, эти две карты на первую карту ряда 3 и затем все три на первую карту ряда 4. Теперь переверните эту стопку рубашкой вверх. Таким же способом соберите

карты второго столбца, переверните стопку и положите ее под первую. Продолжайте действовать так, пока не соберете все карты. Попросите зрителя назвать какую-нибудь карту. Допустим, она имеет n очков. Если это масть A , то она будет в вашей колоде $4n$ -й; если масть B , то $(4n + 3)$ -й; если масть C , то $(4n + 6)$ -й; если масть D , то $(4n + 9)$ -й. Таким образом, пересчитывая карты (если понадобится, циклически), вы найдете нужную вам. Форму исполнения легко изменить; при желании можно пользоваться и полной колодой. Объяснение этого фокуса очевидно.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Далее рассмотрим класс задач, где требуется восстановить первоначальный вид арифметических выражений, в которых стерты некоторые цифры. Среди таких задач попадаются как легкие, так и достаточно трудные. В последнее время подобного рода упражнения привлекают большое внимание. Я приведу примеры трех типов восстановления.

Класс А. Одна группа восстановлений основана на хорошо известных предложениях о том, что каждое целое число

$$a + 10b + 10^2c + 10^3d + \dots$$

равно любому из выражений следующего вида [через $M(\cdot)$ обозначено кратное числа, стоящего в скобках]:

$$M(9) + a + b + c + d + \dots,$$

$$M(11) + a - b + c - d + \dots,$$

$$M(33) + (a + 10b) + (c + 10d) + (e + 10f) + \dots,$$

$$M(101) + (a + 10b) - (c + 10d) + (e + 10f) - \dots,$$

$$M(m) + (a + 10b + 10^2c) + (d + 10e + 10^2f) + \dots,$$

$$M(n) + (a + 10b + 10^2c) - (d + 10e + 10^2f) + \dots,$$

где в предпоследней строке $m = 27$, либо 37 , либо 111 , а в последней строке $n = 7, 11, 13, 77, 91$ либо 143 .

Подобные задачи встречаются довольно часто. Рассмотрим четыре простых примера из этого класса.

(i) Произведение 417 и $.1\dots$ равно $9\dots057$. Требуется найти недостающие цифры, каждая из которых обозначена одной точкой. Записав неизвестные цифры множителя буквами a, b, c, d и последовательно перемножая сомножители (начиная от конца), найдем шаг за шагом, что $d = 1$, $c = 2$, $b = 9$. Так как произведение

состоит из семи цифр, значит, $a = 2$. Таким образом, произведение равно 9 141 057.

(ii) Семизначное число 70..34. нацело делится на 792. Требуется найти недостающие цифры (каждой из них отвечает одна точка). Так как $792 = 8 \times 9 \times 11$, нетрудно убедиться, что искомое число есть 7 054 344.

(iii) Пятизначное число 4.18. делится на 101. Найдите пропущенные цифры ([11], с. 55).

Обозначим две пропущенные цифры (в порядке справа налево) буквами x и y . Воспользуемся предложением, касающимся деления на 101, заметив, что ни одно из неизвестных не превосходит 9, и положив ради удобства $y = 10 - z$. Из полученного уравнения найдем, что $z = 1$, $x = 7$, $y = 9$. Итак, наше число равно 49187.

(iv) Четырехзначное число .8.. делится на 1287. Найдите пропущенные цифры ([11], с. 57).

Обозначим эти цифры (снова в порядке справа налево) буквами x , y , z . Имеем $1287 = 9 \times 11 \times 13$. Применяя подходящие предложения и учитывая, что ни одно из неизвестных x , y , z не превышает 9, получаем $x = 1$, $y = 6$, $z = 3$. Искомое число есть 3861.

(v) Несколько более трудный пример того же типа. Пусть известно, что число 6.80.8..51 нацело делится на 73 и 137. Требуется найти пропущенные цифры ([11], с. 60). Этих данных вполне достаточно для нахождения искомого числа, которое равно 6 780 187 951.

Класс В. Рассмотренные далее примеры относятся к другому, более трудному классу задач на восстановление. Анализ данных, необходимый для их решения, не сводится к набору простых правил.

(i) Начнем с более легкого примера, который, как считается, ведет свое начало из древнеиндийской математики. Требуется восстановить пропущенные цифры в записи деления столбиком шестизначного числа на трехзначное с трехзначным ответом ([12], т. XXVIII, с. 37):

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots \overline{) \dots\dots} \\
 \underline{.0\dots\dots} \\
 \dots\dots \\
 \underline{.50\dots\dots} \\
 \dots\dots \\
 \underline{.4\dots\dots}
 \end{array}$$

Решение его не составляет труда. Делитель равен 213, частное 573, и это решение единственно.

(ii) В качестве более трудного примера приведу задачу, предложенную в 1921 г. проф. Шу из Дельфта. Некоторое семизначное число при делении на шестизначное дает в ответе число с двузначной целой частью и дробной частью из десяти цифр, причем последние девять периодически повторяются. В приведенной ниже записи период этой бесконечной десятичной дроби отме-

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots \overline{) \dots\dots\dots} \\
 \dots\dots\dots \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

чен чертой наверху. Требуется восстановить запись ([12], т. XXIX, с. 211). Эта задача замечательна тем, что в ней не задана ни одна цифра.

Ответ: делимое равно 7 752 341, а делитель 667 334.

Приведем еще три примера арифметического восстановления*. Они решаются очень длинно и требуют большой работы по подбору нужных цифр.

(iii) Первая из задач Бервика формулируется так. В приведенной ниже записи деления столбиком стерты все цифры, кроме стоящих на своих местах семи семерок. Каждая стертая цифра может принимать значения 1, 2, ..., 9, а также 0 (за исключением начала строки). Обратите внимание, что каждая ступенька состоит из двух чисел, имеющих одинаковое количество цифр. Требуется полностью восстановить приведенную ниже запись деления.

$$\begin{array}{r}
 \dots 7 \dots \dots \dots | \dots 7 \dots \\
 \dots \dots \dots \quad \dots 7 \dots \\
 \hline
 \dots \dots 7 \dots \\
 \dots \dots \dots \\
 \hline
 \dots 7 \dots \dots \\
 \dots 7 \dots \dots \\
 \hline
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots 7 \dots \\
 \hline
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots \\
 \hline
 \end{array}$$

Задача имеет единственное решение: делитель равен 125 473, а частное 58 781.

* Все эти примеры принадлежат У. Бервику. Задача с семерками взята из [13], задача с четверками — из [14], т. X, с. 43, 359—360; задача с пятерками — из [14], т. X, с. 361 и т. XI, с. 8.

(iv) Эта задача аналогична предыдущей. Требуется восстановить все цифры в следующей записи деления, где сохранились только четыре четверки:

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots 4 \overline{) \dots} \\
 \dots \quad .4\dots \\
 \hline
 \dots 4. \\
 \dots \\
 \hline
 \dots \\
 .4. \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \hline
 \end{array}$$

Эта задача имеет четыре решения: делителям 846, 848, 943, 949 соответствуют частные 1419, 1418, 1418, 1416.

Можно, добавив пятую четверку, записать эту задачу таким образом:

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots 4 \overline{) \dots} \\
 \dots \quad .4\dots \\
 \hline
 \dots 4. \\
 \dots 4 \\
 \hline
 \dots \\
 .4. \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \hline
 \end{array}$$

Теперь она будет иметь единственное решение. Возможно, кому-то такая формулировка понравится больше.

(v) Наконец, в третьей задаче Бервика требуется восстановить запись деления, в которой уничтожены все цифры, кроме пяти пятерок.

$$\begin{array}{r}
 .55..5. \overline{) \dots} \\
 ..5.. \quad .5. \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \hline
 \dots \\
 \dots \\
 \hline
 \end{array}$$

Эта задача имеет единственное решение: делитель равен 3926, а частное 652.

Класс С. К третьему классу задач с пропущенными цифрами относятся такие, где требуется найти численные значения некоторых символов, представляющих конкретные числа. Ограничимся двумя примерами.

(i) Наиболее простой из них следующий. Результат умножения bc на bc равен abc , где каждая буква соответствует определенной цифре. Какие это цифры? Нетрудно убедиться, что bc — это 25 и, следовательно, a соответствует 6.

(ii) Приведем еще один пример. Требуется определить, какие цифры скрываются за буквами в следующей записи деления [15]:

$$\begin{array}{r}
 cdeeb \overline{) ab} \\
 ceb \quad bfb \\
 \hline
 gge \\
 gch \\
 \hline
 ceb \\
 ceb \\
 \hline
 \end{array}$$

Рассуждаем таким образом. Поскольку произведение b на b оканчивается на b , символ b может обозначать лишь 1, 5 или 6. Но произведение ab на b — трехзначное число, значит, 1 не подходит. Результат вычитания h из e равен e , значит, h равно 0, и, следовательно, если $b = 5$, то f четно, а если $b = 6$, то $f = 5$. Далее,

вычитая c из g , получаем c , поэтому $g = 2c$, откуда видно, что c не превосходит 4, а b не может быть равно 6. Прodelав еще несколько подобных прикидок, мы убедимся, что речь идет о делении числа 19 775 на 35.

Можно было бы также составить смешанные примеры на восстановление пропущенных цифр, в которых соединялись бы все трудности, встретившиеся нам выше. Их можно было бы еще усложнить, отказавшись от десятичной системы счисления. Однако подобные ухищрения не сделают рассматриваемые задачи более интересными.

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С КАЛЕНДАРЕМ

В предшествующих изданиях настоящей книги приводилась формула Гаусса и Целлера, позволяющая ответить на все обычные вопросы о датах, днях недели, праздниках и т. д. Я приведу еще две легкие, но изящные задачи несколько иного характера, относящиеся к григорианскому календарю.

Первая из них принадлежит, как мне кажется, Фаури. В период между 1725 и 1875 г. французы выиграли два сражения: первую победу они одержали 22 апреля какого-то года, а вторую — спустя 4382 дня, тоже 22 апреля. Известно, что сумма цифр лет этих двух сражений равна 40. Требуется назвать даты сражений.

Прежде всего заметим, что $4382 = 12 \times 365 + 2$. Значит, вторая битва состоялась через 12 лет после первой; на это время пришлось всего 2 високосных года, откуда сразу следует, что указанный 12-летний промежуток обязательно включает в себя 1800 год. Итак, ответами могут быть только следующие пары: 1788 и 1800; 1789 и 1801; ... ; 1800 и 1812. Среди этих пар только 1796 и 1808 имеют сумму цифр 40. Следовательно, сражения состоялись 22 апреля 1796 г. (битва при Мондови под командованием Наполеона) и 22 апреля 1808 г. (при Экмюле под командованием Даву).

Во второй задаче требуется показать, что попеременно первый или последний день каждого столетия приходится на понедельник. Для этого достаточно знать одну конкретную дату и тот факт, что григорианский цикл завершается за 400 лет (за 20 871 неделю). Тот же принцип служит подоплекой утверждения Брауна (см. [16]) относительно того, что тринадцатое число месяца приходится на пятницу чаще, чем на любой другой день недели⁴.

Прежде чем покончить с элементарными примерами, упомянем еще несколько задач, которые веками входили почти в каждое собрание математических развлечений, а значит, «по праву давности» могут претендовать на место и в этой книге.

Первый пример дает хорошее представление о целом классе подобных задач. Некто отправился к источнику за водой с двумя кувшинами емкостью в 3 и 5 пинт. Как сможет он принести домой ровно 4 пинты воды? Решение здесь не составляет никакого труда.

Второй пример*. Рассмотрим еще одну задачу того же типа. Три хулигана отняли у одного гражданина сосуд, содержащий 24 унции бальзама. Как ни торопились они скрыться, все же успели купить у продавца стеклянной посуды три флакона. Добравшись до безопасного места, они захотели разделить добычу на равные доли, но обнаружили, что купленные флаконы вмещают соответственно 5, 11 и 13 унций. Как же следует им поступить? Решение подобных задач требует подробного разбирательства всевозможных вариантов переливания.

Третий пример ([1], задача XXII, с. 170). В качестве следующего примера рассмотрим довольно известную игру. Участвуют в ней двое, *A* и *B*: сначала *A* называет какое-нибудь число, меньшее, скажем, шести; затем *B* прибавляет к нему любое число, меньшее шести, и называет полученную сумму; далее *A* делает то же самое и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет определенное (заранее заданное) число, скажем 50. Ясно, что если *A* назовет 43, то, какую бы сумму ни назвал *B*, следующим ходом *A* выиграет. Если *A* назовет 36, то *B* не сможет помешать ему следующим ходом назвать 43. Рассуждая таким образом, убеждаемся, что «ключевыми числами» служат здесь члены арифметической прогрессии 43, 36, 29, 22, 15, 8, 1 — и, следовательно, выигрывает здесь всегда тот, кто начинает.

В общем случае эта задача выглядит аналогично: если на каждом ходу можно к уже имеющемуся числу прибавлять не более m , а для победы нужно назвать

* Некоторые аналогичные задачи приведены в: [1] (приложение, задача III, с. 206; задача IX, с. 233); [7], с. 174, а также [2] (изд. 1803 г., т. I, с. 174; изд. 1840 г., с. 79). Более ранние примеры встречаются в сочинениях Тарталья. См. также [19] в литературе к гл. II, с. 11 и [17].

число n , то ключевые числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $m + 1$, наименьший член которой равен остатку от деления n на $m + 1$.

В ту же игру можно играть иначе, располагая на столе кучку из p монет (либо спичек или других каких-то предметов), из которых играющие забирают монеты по очереди, но каждый раз не более m монет. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. Здесь ключевые числа — кратные $m + 1$. Первый игрок, которому удастся оставить на столе число монет, кратное $m + 1$, может выиграть. Может быть, интереснее считать того, кто берет последнюю монету, проигравшим — в таком случае ключевые числа на единицу больше кратных $m + 1$.

Рассмотрим еще одну разновидность той же игры [18]. Расположим p фишек по окружности, и пусть два игрока по очереди вынимают фишки, но не более m фишек, причем таких, которые следуют по окружности друг за другом; число m должно быть больше 1, но меньше p . Здесь всегда может выиграть второй игрок.

Все эти игры достаточно просты, но если дополнительно потребовать, чтобы каждый игрок не прибавлял одно и то же число более трех раз, то анализ задачи существенно усложнится. Поскольку описание обобщенной задачи никогда не встречалось мне в публикациях, остановлюсь на ней подробнее. Допустим, что каждому из двух игроков выдано по 18 карт: три шестерки, три пятерки, три четверки, три тройки, три двойки и три туза (единицы). Игроки по очереди выкладывают по одной карте: сначала A , затем B . Выигрывает тот, кто первым положит карту, которая в сумме со всеми предыдущими даст ровно 50 очков, но если число очков превзойдет 50, то ему засчитывается проигрыш. Необязательно пользоваться картами, можно просто записывать числа на листе бумаги.

Предположим, игра ведется так: A выкладывает четверку и, значит, называет число 4; B кладет тройку и называет число 7 ($= 4 + 3$); A кладет туза (1) и называет 8 ($= 7 + 1$); B выкладывает шестерку и называет 14 ($= 8 + 6$); A кладет тройку и называет 17 ($= 14 + 3$); B выкладывает четверку и называет 21 ($= 17 + 4$); A тоже кладет четверку и называет 25 ($= 21 + 4$); B кладет пятерку и называет 30 ($= 25 + 5$); A кладет еще одну четверку и называет 34 ($= 30 + 4$); B тоже кладет четверку и называет 38 ($= 34 + 4$); A кладет пятерку,

называя $43 (= 38 + 5)$. Теперь *B* легко может выиграть, выложив тройку (его сумма будет равна $46 = 43 + 3$), так как у *A* больше нет четверок, а если он положит карту, меньшую четверки, то *B* следующим ходом наберет требуемые 50 очков.

Пусть игра ведется по-другому: *A*, 6; *B*, 3; *A*, 1; *B*, 6; *A*, 3; *B*, 4; *A*, 2; *B*, 5; *A*, 1; *B*, 5; *A*, 2; *B*, 5; *A*, 2; *B*, 3. Теперь *A* вынужден положить туза (1) — после чего *B* тоже выкладывает туза (1) и выигрывает.

Можно предложить еще один вариант этой игры. На стол кладется условленное число карт из колоды, например по четыре туза, двойки, тройки, четверки, пятерки и шестерки — всего 24 карты. Игроки *A* и *B* по очереди берут по одной карте. Счет ведется по сумме очков на всех картах, взятых как *A*, так и *B*. Выигрывает тот, кто первым возьмет такую карту, что сумма очков становится равной 50 (или другому установленному заранее числу). Если же игрок вынужден взять такую карту, что сумма очков превысит 50, то он проигрывает.

Допустим, что игра развивается так: *A* вынимает шестерку (счет 6); *B* вынимает двойку (счет 8); *A* — пятерку (13); *B* — двойку (15); *A* — пятерку (20); *B* — двойку (22); *A* — пятерку (27); *B* — двойку (29); *A* — пятерку (34); *B* — шестерку (40); *A* — туза (41); *B* — четверку (45); *A* — тройку (48). Двоек больше не остается, и *B* берет туза (49), после чего *A* тоже берет туза и выигрывает.

В этом варианте игры ее участники стремятся достичь одного из ключевых чисел, причем так, чтобы осталось достаточно разных карт для достижения каждого последующего ключевого числа. Количество карт, их достоинство и окончательное число, которое требуется назвать, можно менять как угодно. Чем выше это окончательное число, тем труднее предсказать результат и угадать, есть ли преимущество у того, кто начинает игру.

Четвертый пример. Приведем теперь более сложную задачу. Допустим, что трое людей *P*, *Q*, *R* поделили между собой три вещи, которые мы обозначим соответственно буквами *a*, *e*, *i*. Требуется узнать, кому какая из них досталась ([1], задача XXV, с. 187).

Выложите на стол 24 фишки. Попросите *P* взять одну фишку, *Q* — две и *R* — три. Затем отвернитесь и попросите того, кому досталась вещь *a*, взять столько же фишек, сколько у него уже есть; того, кому досталась вещь

е, взять вдвое больше фишек, чем у него уже есть; а того, кому досталась вещь i , — вчетверо больше, чем он взял в первый раз. Теперь посмотрите, сколько фишек осталось на столе. Распределить три вещи между P , Q , R можно шестью разными способами; при этом на столе остается разное число фишек. Этот остаток может равняться 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7. Баше придумал мнемоническую фразу, позволяющую сразу узнать результат: *Par fer* (1) *César* (2) *jadis* (3) *devint* (5) *si grand* (6) *prince* (7) (это звучит приблизительно так: «Меч сделал Цезаря всемогущим владыкой»). Каждому остатку соответствует слово или два слова, содержащие две гласные. Так, например, остатку 5 соответствует слово *devint*. По первой гласной в нем мы узнаем, какая вещь досталась P , по второй — ту, что получил Q , ну а оставшейся, естественно, завладел R .

Обобщение. В своем сообщении [19] о втором издании настоящей книги Бурле попутно предложил более изящное решение последней задачи и обобщил ее на случай n лиц $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, каждый из которых выбрал какой-то один из n предметов, например из набора костей домино или карт. Требуется узнать, какая карта или кость досталась каждому игроку.

Для обозначения костей домино вместо букв воспользуемся числами $0, 1, \dots, n-1$. Пусть P_1 получил одну фишку, P_2 — две фишки и т. д.; P_k получит k фишек. Запомните число оставшихся на столе фишек. Затем попросите того, кто выбрал кость 0 , взять еще столько же фишек, сколько у него было, или в более общем виде: пусть тот, кто выбрал кость h , возьмет в n^h раз большее число фишек, чем у него было. Так, если P_k выбрал кость h , он должен взять $n^h k$ фишек. После этого общее число взятых со стола фишек окажется равным $\sum n^h k$. Если разделить эту сумму на n , то остаток покажет, у кого кость 0 ; разделив полученное частное на n , вы узнаете, у кого кость 1 ; разделив новое частное на n , по остатку можете узнать, кто выбрал кость 2 , и т. д. Иными словами, если представить число взятых со стола фишек в системе счисления с основанием n и если кость h находится у P_k , то $(h+1)$ -й справа цифрой этого числа будет k .

Таким образом, в задаче Баше с тремя лицами и тремя костями следует сначала дать Q одну фишку, R — две, а P не дать ни одной. Затем попросим того, кто выбрал кость 0 (или a), взять столько фишек, сколько

у него было; тот, кто выбрал кость 1 (или e), пусть возьмет втрое больше, чем у него было, а владелец кости 2 (или i) — в 9 раз больше, чем у него было. Зная исходное число фишек, найдем общее число фишек, взятых P , Q и R , с учетом трех, розданных Q и R раньше. Остаток от деления этого общего числа фишек на 3 скажет нам, у кого кость a (для P остаток равен нулю, для Q — единице, для R — двум). Разделив частное на 3, мы по остатку узнаем, у кого кость e , а последнее частное укажет владельца кости i .

Задачи о путешественниках в пустыне. Еще один широко известный пример связан с нахождением максимального расстояния, на которое может удалиться в пустыню с базы путешественник, если он способен унести запас продуктов на a дней. Ему разрешается возобновлять запас на той же базе ровно n раз и делать склады на маршруте. Ответ: максимальное удаление возможно на

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) a$$

ходовых дней, если он должен вернуться на базу, и на

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) a$$

ходовых дней в противном случае [20].

Задача Иосифа. Эта задача восходит к античным временам⁵. Требуется расположить людей по кругу с таким расчетом, что, если каждый m -й будет убит, то определенные лица останутся в живых. Подобные задачи легко разрешаются эмпирически.

В «Египтиаде»⁶ рассказывается, что такой уловкой Иосиф однажды спас свою жизнь. Согласно этому рассказу, после захвата Иотапаты римлянами Иосиф вместе с сорока иудейскими воинами бежал и спрятался в пещере. Иосиф возмутился, узнав, что все воины — кроме него и еще одного человека — решили лучше покончить с собой, чем попасть в руки завоевателей. Опасаясь открыто выступить против такого решения, он как будто бы согласился и предложил сделать это организованно: всем встать в круг и убивать каждого третьего до тех пор, пока не останется один человек, который должен совершить самоубийство. После этого Иосиф якобы поставил себя и своего единомышленника соответственно на 31 и 16-е места.

В средние века та же задача была известна в иной формулировке. Корабль с 30 пассажирами на борту, среди которых 15 христиан и 15 турок, попал в шторм, и для спасения судна и команды половину пассажиров нужно было сбросить в море. Пассажиров выстраивали в круг и каждого 9-го (начиная с определенного места) отправляли за борт. Требуется узнать, как следует расположить пассажиров, чтобы все христиане были спасены ([1], задача XXIII, с. 174)*. Нужно расставить пассажиров следующим образом; XXXHTTTTXXHTXXX THTTXXTTTHTTXXT. Расстановку можно восстановить по расположению гласных букв в строке: From numbers' aid and art, never will fame depart (служи искусству чисел — и слава вечно пребудет с тобой). Буква *a* отвечает число 1, *e* — число 2, *i* — 3, *o* — 4 и *u* — число 5. Значит, порядок таков: *o* христиан, *u* турок и т. д.

Если за борт бросают каждого десятого, мнемоническая строка выглядит так: Rex parhi cum gente bona dat signa serena (король Пафоса вместе с добрым народом являют знамение славы). Восточный вариант этой задачи звучал примерно так. Жил-был богатый скотовод, у которого было 30 детей, 15 от первой жены, которая умерла, и 15 от второй. Вторая жена упорно добивалась, чтобы все имущество унаследовал ее старший сын. Поэтому однажды она сказала мужу: «Дорогой, ты стареешь. Нужно бы решить, кто станет твоим наследником. Давай поставим 30 наших детей в круг и, начиная от кого-нибудь, будем исключать каждого десятого до тех пор, пока не останется один — ему и достанется твое имущество». Мужу это предложение показалось вполне разумным. Так и порешили. Однако скотовод сильно разволновался, когда заметил, что первые 14 исключенных все оказались детьми от первой жены; теперь подходила очередь последнего ее сына. Тогда он предложил вести отсчет от этого мальчика в обратную сторону. Вынужденная немедленно принять решение, жена подумала, что шансы теперь 15 к 1 в пользу ее детей, и быстро согласилась. Кто же стал наследником?

В общем случае в круг выстраиваются n человек; когда кто-то выбывает, круг смыкается. Начиная с любого места, мы неизменно движемся по кругу и исключаем каждого m -го человека до тех пор, пока их не останется всего r . Пусть один из r оставшихся первоначаль-

* Еще раньше ту же задачу сформулировал Таргалья.

но занимал p -е место. Если бы исходное количество людей было $n + 1$, он должен был стоять на $(p + m)$ -м месте в случае $p + m \leq n + 1$ и на $(p + m - n - 1)$ -м месте в случае $p + m > n + 1$. Таким образом, если всего должно остаться r человек, то при добавлении к исходной группе еще одного участника первоначальные положения этих счастливцев сдвигаются по кругу на m мест вперед [21].

Теперь предположим, что в случае n человек последний уцелевший ($r = 1$) стоял первоначально на p -м месте, а в случае $n + x$ человек оставшийся занимал y -е место. Тогда, если ограничиться наименьшим значением x , при котором $y < m$, имеет место равенство $y = (p + mx) - (n + x)$.

На основании этой теоремы можно для любого заданного n быстро подсчитать, на каком месте стоял тот, кто остался в круге. На самом деле Тэйт нашел значения n , при которых уцелеет тот, кто занимает p -е место, при $p < m$, а затем, многократно применяя ту же теорему, установил место, на котором должен находиться уцелевший, для промежуточных значений n .

Рассмотрим, к примеру, задачу Иосифа, в которой $m = 3$. Как мы знаем, последний оставшийся в живых из 41 человека занимал сначала 31-е место. Допустим, что в случае $41 + x$ человек он занимал вначале y -е место. Тогда, рассматривая лишь наименьшее значение x , при котором $y < m$, получаем $y = (31 + 3x) - (41 + x) = 2x - 10$. Нужно взять такое значение x , при котором y положительно и меньше m (т. е. для данной задачи $y = 1$ или 2). Этим условиям удовлетворяет $x = 6$, т. е. $y = 2$. Таким образом, если бы было 47 человек, последним оказался бы тот, кто вначале занимал второе место. Аналогично в случае $47 + x$ участников уцелевший должен был бы стоять на y -м месте, где (при тех же условиях, что и выше) $y = (2 + 3x) - (47 + x) = 2x - 45$. При $x = 23$ получаем $y = 1$. Таким образом, в случае 70 человек счастливчик должен был вначале быть первым. Продолжая этот процесс, нетрудно убедиться, что для $n \leq 2\,000\,000$ тот, кто хочет остаться в живых, должен стоять на первом месте при $n = 4, 6, 9, 31, 70, 105, 355, 799, 1798, 2697, 9103, 20\,482, 30\,723, 69\,127, 155\,536, 233\,304, 349\,956, 524\,934$ или $787\,401$ и на втором месте при $n = 2, 3, 14, 21, 47, 158, 237, 533, 1199, 4046, 6069, 13\,655, 46\,085, 103\,691, 1\,181\,102$ или $1\,771\,653$. Эти результаты позволяют при помощи

многократного применения теоремы найти исходное положение уцелевшего при любом промежуточном значении n . Так, в случае, когда группа людей, подвергающаяся «тримации» (т. е. исключению каждого третьего), состоит из 1000 человек, предусмотрительный математик выберет 604-е место; если в группе 100 000 человек, то он предпочтет 92 620-е место, а если 1 000 000 — то 637 798-е.

Аналогично, если 100 человек подвергаются «децимации» (т. е. исключению каждого десятого), останется тот, кто вначале занимал 26-е место. Следовательно, в случае 227 человек выживет тот, кто стоял первым.

Были предложены модификации исходной задачи. Допустим, например [22], что пять христиан и пять турок расставлены по кругу следующим образом: THTHTHTHT. Предположим, что если начать отсчет с a -го места и выбирать каждого h -го человека, то обреченными окажутся все турки, но если начать с b -го места и выбирать каждого k -го, пострадают все христиане. Задача состоит в том, чтобы найти a , b , h и k . Ответ: $a = 1$, $h = 11$, $b = 9$, $k = 29$.

Я предлагаю аналогичную задачу: найти такую расстановку по кругу s турок и s христиан, чтобы при отсчете начиная с некоторого конкретного места, скажем первого, и выборе каждого h -го человека в число избранных попали все турки, а при том же начале отсчета и выборе каждого k -го человека среди избранных оказались все христиане. (Конечно, есть опасность, что исполнитель, которому поручен выбор жертв, собьется и отсчитает k вместо h или наоборот и тем самым обречет на гибель не тех, кого он хотел.) Задача состоит в том, чтобы для любого заданного значения s найти нужную расстановку и подходящие значения h и k . Ясно, что при $s = 2$ для расстановки вида THTT решением будет $h = 4$, $k = 3$. При $s = 3$ для расстановки вида THTHTT решением будет $h = 7$, $k = 8$. Если $s = 4$, то для расстановки вида THTTHTTHTT решением будет $h = 9$, $k = 5$. И вообще, как впервые указал Суинден, чтобы из $2s$ человек выбрать s человек, занимавших вначале последовательные места с номерами s , $s + 1$, ..., $2s - 1$, нужно взять в качестве h наименьшее общее кратное чисел $s + 1$, $s + 2$, ..., $2s - 1$; другие s человек будут выбраны при $k = h + 1$, хотя, возможно, существует и более простое решение с другой начальной расстановкой.

Расположить этих людей так, чтобы n конкретных лиц были выбраны в определенном порядке друг за другом, по-видимому, невозможно.

ИГРА НИМ И ДРУГИЕ АНАЛОГИЧНЫЕ ИГРЫ*

Существует несколько игр, в которых двое играющих A и B , руководствуясь определенными правилами, по очереди вынимают то или иное число фишек из одной или нескольких кучек — побеждает тот, кто берет последнюю фишку⁷. Примером такой игры может служить третья из рассмотренных в предыдущем разделе средневековых задач: это игра с одной кучкой фишек, и сделать ход в ней — значит взять из кучки любое число фишек от 1 до m включительно. Многие подобные игры поддаются исследованию с помощью числа Шпрага — Гранди [23] $G(C)$. Пустой позиции O , не содержащей фишек, отвечает $G(O) = 0$. Комбинацию кучек, состоящих соответственно из $x, y, \dots$ фишек, обозначим $C = (x, y, \dots)$ и предположим, что допустимые ходы переводят C в другие комбинации: $D, E, \dots$. Тогда $G(C)$ есть наименьшее целое неотрицательное число, отличное от $G(D), G(E), \dots$. Это позволяет по индукции определить $G(C)$ для любой комбинации C , разрешенной правилами игры. Так, в упомянутой средневековой задаче $G(x)$ равно остатку от деления x на $m + 1$.

Если $G(C) > 0$, то игрок, делающий следующий ход, допустим, это игрок A , может обеспечить себе выигрыш, если ему удастся перейти к «безопасной» комбинации S с $G(S) = 0$. Действительно, по определению $G(S)$ в этом случае либо S — пустая позиция, и тогда A уже выиграл, либо B следующим ходом должен перейти к «опасной» позиции U с $G(U) > 0$ — и тогда все повторяется снова. Такая игра после конечного числа ходов заканчивается победой A .

К подобным играм относится ним [24]. Имеется произвольное число кучек фишек, и игроки по очереди выбирают одну какую-то кучку и вынимают из нее любое число фишек (но хотя бы одну обязательно). Тогда $G(x, y, \dots)$ равно ним-сумме $x, y, \dots$, где операция ним-сложения определяется следующим образом: запишем $x, y, \dots$ в двоичной форме; затем сложим эти числа стол-

* Данный вариант этого раздела любезно предоставлен нам С. Э. Б. Смитом.

биком (без переноса в старший разряд) и, наконец, заменим цифры в полученной сумме их остатками от деления на 2. В результате получается двоичное число. Найдем, к примеру, ним-сумму $3 +_{\text{ним}} 7 +_{\text{ним}} 9$:

десятичное	число	3	=	двоичное	число	11	
»	»	7	=	»	»	111	
»	»	9	=	»	»	1001	
сумма без переноса в старший разряд						1123	
ним-сумма						1101	= десятичное число
						13	= $G(3, 7, 9)$.

Доказательство того, что найденная таким образом величина удовлетворяет определению числа Шпрага — Гранди, сводится к доказательству того, что если $G(C) > h \geq 0$, то существует ход, ведущий от C к некоторой комбинации D , причем $G(D) = h$. Так, в приведенном выше примере $h =$ десятичное 11 = двоичное 1011. Это число отличается от $G(C) = 1101$ двумя средними цифрами. Перейдя во второй кучке от $7 = 0111$ фишек к $1 = 0001$, мы добьемся нужного изменения ним-суммы, так что $D = (3, 1, 9)$ и $G(D) = 11$. Такое изменение возможно всегда. Безопасными являются комбинации с нулевой ним-суммой, например (x, x) в случае двух кучек и $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 7)$ в случае трех кучек. В указанных тройках каждое число равно ним-сумме двух остальных: $1 +_{\text{ним}} 2 = 3$, $1 +_{\text{ним}} 3 = 2$ и т. д. Отсюда можно вывести, что, например, $(1 +_{\text{ним}} 3) +_{\text{ним}} (7 +_{\text{ним}} 5) = 2 +_{\text{ним}} 2 = 0$, и, таким образом, $(1, 3, 7, 5)$ — безопасная комбинация для игры ним.

В одном из вариантов игры ним разрешается брать не более m фишек из одной кучки. В этом случае $G(x, y, \dots)$ равно ним-сумме $x', y', \dots$ — остатков от деления на $m + 1$ соответственно $x, y, \dots$. Если сделать еще один шаг в направлении дальнейшего обобщения игры и потребовать, чтобы число взятых при одном ходе фишек было элементом некоторого «допустимого» множества натуральных чисел, то $G(x, y, \dots)$ будет ним-суммой $G(x), G(y), \dots$, где $G(x)$ — число Шпрага — Гранди для одной кучки из x фишек. Безопасными комбинациями по-прежнему будут те, для которых $G(x, y, \dots) = 0$. Так, если ввести условие, что число взятых фишек должно быть полным квадратом, то $G(x) = 0, 1, 0, 1, 2$ в соответствии с тем, какой остаток — 0, 1, 2, 3, 4 — дает x при делении на 5, и отсюда уже можно получить безопасные комбинации в случае большего числа кучек.

Игра Мура [25]. Правила *игры Мура*, которую можно также назвать k -ним, те же, что и в обычной игре ним (1-ним), но здесь разрешается брать фишки из любого количества кучек, не превосходящего k . Комбинация $(x, y, \dots)$ безопасна, если при сложении столбиком (без переноса в старший разряд) чисел $x, y, \dots$, представленных в двоичной форме, все цифры полученной суммы делятся на $k + 1$. Если в игре k ним считать проигравшим того, кто взял последнюю фишку, то безопасными останутся те же самые комбинации, с той лишь поправкой, что в случае, когда каждая кучка состоит из одной-единственной фишки, число кучек должно на 1 превышать кратное $k + 1$.

Если продолжать модификацию игры k -ним и ввести условие, что число фишек, взятых из каждой кучки, принадлежит «допустимому» множеству, то общий анализ игры станет достаточно сложным. Но если ограничиться $k + 1$ кучками из $x_1, x_2, \dots, x_{(k+1)}$ фишек и по-прежнему засчитывать победу тому, кто возьмет последнюю фишку, то безопасными будут позиции, удовлетворяющие условию $G(x_1) = G(x_2) = \dots = G(x_{k+1})$. Если число кучек меньше $k + 1$, то все $G(x_i)$ должны равняться нулю.

«Кегли» [26]. В этой игре⁸ фишки разложены в ряд, и при каждом ходе убирается одна какая-либо фишка или две соседние. При этом ряд может разбиться на два меньших ряда. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю фишку. Здесь по-прежнему выполняется правило: $G(x, y, \dots)$ равно ним-сумме $G(x), G(y), \dots$. Значениями $G(x)$ для $x = 0, 1, 2, \dots$ являются соответственно 0, 1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 2, 6, 4, 1, ... Как показал Р. Гай, начиная от $x = 71$ последовательность становится периодической с периодом 12. Существует вариант этой игры, называемый «сдвоенные кегли»: за один ход разрешается убрать пару или тройку соседних фишек. В этом случае последовательность значений $G(x)$ принимает вид 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 1, ..., т. е. каждый элемент предыдущей последовательности повторяется дважды. Если разрешается убрать либо пару соседних фишек, либо одну стоящую отдельно фишку, то для $x = 0, 1, 2, \dots$ получается последовательность 0, 1, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 1, 1, 3, 2, 2, 3, ... ; начиная с $x = 33$ она становится периодической с периодом 34.

Игра Витхоффа. В. Витхофф (см. [27]) придумал игру с двумя кучками фишек, в которой разрешается брать сколько угодно фишек из одной кучки или по-

ровну из двух⁹. Выигрывает игрок, взявший последнюю фишку. Безопасными комбинациями игры Витхоффа являются (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), ..., т. е. r -я безопасная комбинация имеет вид $(x, x+r)$, где x — целая часть числа $\tau r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)r$, а значит, $x+r$ — целая часть числа $\tau^2 r$. В этой последовательности каждое натуральное число встречается ровно один раз¹⁰, поэтому между любыми двумя соседними натуральными числами должно лежать либо одно кратное τ , либо одно кратное τ^2 . Т. О'Бейрн [28] заметил, что если взятие последней фишки рассматривать как проигрыш, то последовательность безопасных комбинаций почти не изменится: лишь вначале вместо (1, 2) нужно поставить (0, 1) и (2, 2).

Число $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,6180339887 \dots$ заинтриговало профессионалов и любителей математики еще во времена пифагорейцев, которые впервые заинтересовались правильным пятиугольником и рассмотрели отношение его диагонали к стороне¹¹. Мы снова встретимся с этим числом на с. 67, 68 и 145. Одно из его самых удивительных свойств относится к теории рациональных приближений иррациональных чисел. Согласно теореме Адольфа Гурвица (см. [29])¹², если $0 < c \leq \sqrt{5}$, то для любого заданного иррационального числа ξ найдется бесконечно много рациональных чисел h/k , удовлетворяющих неравенству

$$|\xi - h/k| < 1/ck^2;$$

если же $c > \sqrt{5}$, то существуют такие иррациональные числа — и одним из них как раз является число τ , — что это неравенство выполнено лишь для конечного множества рациональных чисел h/k .

ПРИЛОЖЕНИЕ

К с. 27. Рассмотрим несколько решений задач о десяти цифрах: $35/70 + 148/296 = 1$ или $.01234 + .98765 = 1$ и $50 + 49 + 1/2 + 38/76 = 100$. Примеры решений задачи о девяти цифрах: $1.234 + 98.765 = 100$ или $97 + 8/12 + 4/6 + 5/3 = 100$. Более изящное решение принадлежит Перельману*: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100$; здесь цифры использованы в естественном порядке.

К с. 39. Существует несколько способов поделить 24 унции имеющимися подручными средствами. Наиболее изящное решение принадлежит Э. Харберу:

* Несколько сотен решений подобных задач см. в [30].

Емкость флаконов (в унциях)	24	13	11	5
Вначале они содержат	24	0	0	0
Результаты переливаний				
первого	8	0	11	5
второго	8	5	11	0
третьего	8	13	3	0
четвертого	8	8	3	5

1. Bachet C.-G. Problèmes plaisans et délectables. — Lyons, 1624.
2. Ozanam. Récréations mathématiques et physiques, 1803; 1840.
3. *Educational Times* (London), May 1, 1895, vol. XLVIII, p. 234.
4. Coxeter H. S. M. Non-Euclidean Geometry. — Toronto, 1968, p. 105.
5. Bachet C.-G. Problèmes plaisans et délectables (ed. A. Blanchard). — Paris, 1959.
6. Lyness R. C. *Mathematical Gazette*, 1942, vol. XXVI, p. 42 (Note 1581); 1945, vol. XXIX, p. 231 (Note 1847). Ср. также Coxeter H. S. M., *Acta Arithmetica*, 1971, vol. XVIII, pp. 297—310.
7. Oughtred (or) Leak. *Mathematical Recreations*. — London, 1653.
8. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), vol. XV, 1908, pp. 228, 278; vol. XVI, 1909, p. 34; vol. XIX, 1912, p. 128; см. также [19], в литературе к гл. II, pp. 55, 59.
9. Sphinx (Bruxelles), 1937, pp. 72, 87.
10. L'Echiquier, 1930, p. 663.
11. Delens P. Problèmes d'Arithmétique amusante. — Paris, 1914.
12. *American Mathematical Monthly*, 1921, vol. XXVIII; 1922, vol. XXIX.
13. *School World*, July and October 1906, vol. VIII, pp. 280, 320.
14. *Mathematical Gazette*, 1920.
15. *Strand Magazine*, September — October 1921.
16. *American Mathematical Monthly*, 1933, vol. XL, p. 607.
17. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. Пер. с англ. — М.: Наука, 1978, с. 110—116.
18. Loyd S. *Tit-Bits* (London), July 17, August 7 1897.
19. *Bulletin des Sciences mathématiques* (Paris), 1893, vol. XVII, pp. 105—107.
20. Gale D. *American Mathematical Monthly*, 1970, vol. LXXVII, pp. 493—501.
21. Tait P. G. *Collected Scientific Papers*. — Cambridge, vol. II, 1900, pp. 432—435.
22. Dudeney H. E. *Tit-Bits* (London), October 14 and 28 1905.
23. Sprague R. *Tôhoku Journal of Mathematics*, 1936, vol. XLI, p. 438; Grundy P. M., *Eureka*, 1939, vol. II, p. 6.
24. Bouton C. L. *Annals of Mathematics*, 1902, ser. 2, vol. III, pp. 35—39.
25. *Annals of Mathematics*, 1910, ser. 2, vol. XI, pp. 90—94.
26. Loyd S. *Cyclopedia of Tricks and Puzzles*. — New York, 1914, p. 232; Guy R. K., Smith C. A. B. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1956, vol. LII, p. 514.
27. Wythoff W. A. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1907, p. 199; см. также Coxeter H. S. M. The Golden Section, Phylotaxis and Wythoff's game, *Scripta Mathematica*, 1953, vol. XIX, pp. 135—143.
28. O'Beirne T. H. *Puzzles and Paradoxes*. — Oxford, 1965, pp. 109, 134—138.
29. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. Пер. с англ. — М.: Мир, 1974, с. 37.
30. Sphinx, 1935, pp. 95, 111, 112, 124, 125.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ (продолжение)

Эта глава посвящена арифметическим софизмам; в нее включено также несколько дополнительных задач арифметического характера, а в конце ее мы коснемся также одной-двух проблем «высшей арифметики» (теории чисел).

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ

Вначале приведем несколько примеров рассуждений *, которые ведут к явно неверным результатам арифметического характера; сами же рассуждения связаны как с арифметикой, так и с алгеброй. Некоторые из этих софизмов настолько очевидны, что при подготовке первого и второго изданий настоящей книги я ими пренебрег. Однако некоторые мои корреспонденты не согласились с подобным решением, поэтому здесь я счел эти софизмы достойными упоминания ¹.

Первый софизм. Приведем один из самых старых (но далеко не самых интересных!) примеров такого типа. Допустим, что $a = b$; тогда $ab = a^2 \Rightarrow ab - b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b(a - b) = (a + b)(a - b) \Rightarrow b = a + b \Rightarrow b = 2b \Rightarrow 1 = 2$.

* Первый и второй из приведенных ниже софизмов хорошо известны; не нов также и третий, хотя, насколько я помню, самая ранняя работа, в которой я его видел, — это моя «Алгебра» [1]. Четвертый софизм приведен в книге [2], шестой принадлежит Г. Уокеру и, по-моему, опубликован здесь впервые; седьмой принадлежит Д'Аламберу, а восьмой — Ф. Гэлтону. Вероятно, стоит отметить, что 1) «механическое доказательство» равенства $1 = 2$ приведено Р. Шартром в журнале [3] и 2) как указал Ж. Бертран, из теоремы интегрального исчисления (утверждающей, что в случае конечных пределов интегрирования безразлично, в каком порядке оно выполняется) можно вывести, что $1 = -1$. Действительно, согласно этой теореме, интеграл по x (от $x = 0$ до $x = 1$) интеграла по y (от $y = 0$ до $y = 1$) от некоторой функции φ равен интегралу по y (от $y = 0$ до $y = 1$) интеграла по x (от $x = 0$ до $x = 1$) от φ ; отсюда для $\varphi = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ получаем $\pi/4 = -\pi/4$.

Второй софизм. Другой пример принадлежит Иоганну Бернулли. Известно, что $(-1)^2 = 1$. Прологарифмируем это равенство: $2 \log(-1) = \log 1 = 0 \Rightarrow \log(-1) = 0 \Rightarrow -1 = e^0 \Rightarrow -1 = 1$.

Данное рассуждение можно представить иначе. Пусть x таково, что $e^x = -1$. Возведем обе части этого равенства в квадрат: $e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow e^x = e^0$. Но так как $e^x = -1$, а $e^0 = 1$, то $-1 = 1$.

В этих примерах ошибка очевидна. В следующих она скрыта более умело.

Третий софизм². Известно, что

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

При $x = 1$ этот ряд сходится; следовательно,

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots,$$

т. е.

$$2 \log 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \dots$$

Объединяя дроби с одинаковым знаменателем, получаем

$$\begin{aligned} 2 \log 2 &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2. \end{aligned}$$

Отсюда $2 = 1$.

Четвертый софизм. Этот пример очень похож на предыдущий. Имеем:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \\ &= \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right)\right\} - \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \\ &= \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right\} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = 0. \end{aligned}$$

Пятый софизм. Известно, что $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
Значит, $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$, откуда $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1}$, т. е. $-1 = 1$.

Шестой софизм. Приведенное ниже рассуждение основывается на утверждении, что алгебраическое тождество выполняется при **любых** значениях входящих в него символов; оно и адресовано только тем, кому это известно. Рассмотрим тождество

$$\sqrt{x-y} = i \sqrt{y-x}, \quad (i)$$

где i равно либо $+\sqrt{-1}$, либо $-\sqrt{-1}$. Это тождество должно выполняться при любых численных значениях x и y . Сначала положим $x = a$, $y = b$:

$$\sqrt{a-b} = i \sqrt{b-a}, \quad (ii)$$

а затем $x = b$, $y = a$:

$$\sqrt{b-a} = i \sqrt{a-b}. \quad (iii)$$

Но так как (i) — тождество, символ i в равенствах (ii) и (iii) должен иметь одинаковый смысл, т. е. в обоих случаях представлять либо $+\sqrt{-1}$, либо $-\sqrt{-1}$. Следовательно, из (ii) и (iii) получаем

$$\sqrt{a-b} \sqrt{b-a} = i^2 \sqrt{b-a} \sqrt{a-b} \Rightarrow 1 = i^2,$$

откуда $1 = -1$.

Седьмой софизм. Этот софизм принадлежит Д'Аламберу (см. [4]). Известно, что если произведение двух чисел равно произведению двух других чисел, то эти числа составляют пропорцию, а из определения пропорции следует, что если ее первый член больше второго, то третий больше четвертого. Пусть $ad = bc$; тогда $a : b = c : d$, и если $a > b$, то $c > d$. Положим теперь $a = d = 1$ и $b = c = -1$. Эти четыре числа удовлетворяют соотношению $ad = bc$ и условию $a > b$. Значит, $c > d$, т. е. $-1 > 1$, что, разумеется, абсурдно³.

Восьмой софизм. Много разнообразных парадоксов связано с теорией вероятностей. Приведем несколько примеров. Допустим [5], что некто собирается бросить три монеты и посмотреть, что выпадет на каждой из них: герб или решетка. Ясно, что вероятность выпадения

на всех трех монетах герба равна $(1/2)^3$, т. е. $1/8$; то же самое относится и к выпадению решетки. Значит, вероятность того, что все три монеты выпадут одинаково (т. е. либо все три гербом, либо все три решеткой), равна $1/8 + 1/8 = 1/4$. Но из трех монет две всегда ложатся одинаково, а для третьей вероятность выпадения герба равна $1/2$ и выпадения решетки тоже равна $1/2$; поэтому вероятность того, что эта монета выпадет так же, как две другие, равна $1/2$. Предлагаю читателю разобраться, верно ли хотя бы какое-нибудь из этих двух противоречивых утверждений, и если да, то какое именно.

Парадокс второго туза. Допустим, что один из игроков в бридж (или вист) объявил, что среди 13 сданных ему карт есть туз. Обозначим через p вероятность того, что среди остальных его карт имеется второй туз. Теперь предположим, что игрок объявил, что среди 13 сданных ему карт находится туз червей. Тогда вероятность q того, что среди остальных его карт имеется второй туз, больше p . В самом деле*, число комбинаций с тузом, которые могут оказаться на руках, равно $C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$, а с двумя или более тузами $C_{52}^{13} - C_{48}^{13} - 4C_{48}^{12}$. Следовательно, $p = 1 - 4C_{48}^{12} / \{C_{52}^{13} - C_{48}^{13}\} = 5359/14498$. Но число комбинаций с тузом червей равно C_{51}^{12} , а число комбинаций, содержащих этот и еще какой-нибудь туз, $C_{51}^{12} - C_{48}^{12}$. Следовательно, $q = 1 - C_{48}^{12} / C_{51}^{12} = 11686/20825$. Таким образом, $p < 1/2 < q$; этот результат на первый взгляд представляется нелепым.

Санкт-Петербургский парадокс [6]. Это широко известный пример⁴. Игрок бросает монету до тех пор, пока не выпадет герб. Если это произойдет при первом бросании, то банк платит игроку 1 руб. В противном случае игрок бросает монету еще раз. Если герб выпадет при втором бросании, банк платит 2 руб., при третьем — 4 руб. и т. д., т. е. выплата каждый раз удваивается. Таким образом, если герб выпадет при (но не раньше!) n -м бросании монеты, то игрок получит 2^{n-1} руб. Какой взнос в банк должен предварительно сделать игрок, чтобы игра была одинаково выгодна и ему, и банку (т. е. чтобы она была честной)?

Игрок получит от банка 1 руб. с вероятностью $1/2$, 2 руб. — с вероятностью $1/4$ и т. д. Следовательно, сред-

* Это рассуждение принадлежит Де Люри.

няя выплата, которой он вправе ожидать, составит

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} + \dots = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

т. е. сумма выплаты бесконечна.

Среди различных вариантов этой задачи, позволяющих получить конечный результат, один из наиболее интересных принадлежит Габриэлю Крамеру (около 1730 г.); он изложил его в письме Николаю Бернулли [7]. Крамер предположил, что капитал банка ограничен и составляет, например, 2^{24} руб. Тогда с вероятностью $1/2^n$ игрок получит 2^{n-1} руб. после n -го бросания, но это утверждение остается в силе только до тех пор, пока $n < 25$; при выпадении герба в дальнейших бросаниях он все равно получит только 2^{24} руб. Так как

$$\sum_1^{24} \frac{2^{n-1}}{2^n} + \sum_{25}^{\infty} \frac{2^{24}}{2^n} = 12 + 1 = 13,$$

то взнос составляет 13 руб. — а это уже вполне разумная цифра.

ЕЩЕ О ВЕРОЯТНОСТЯХ

Теперь рассмотрим задачу (принадлежащую Гарольду Давенпорту), которая у многих вызывает удивление⁵. Если известны дни рождения более чем 23 человек, то более вероятно то, что среди них окажутся две одинаковые даты (совпадающие и по числу, и по месяцу), чем то, что все они будут разными. Рассмотрим вероятность того, что все дни рождения n человек различны, т. е. что при случайном выборе n дней из 365 ни один не повторится. Общее число выборок равно 365^n , а число выборок без повторений составляет $365 \cdot 364 \cdot \dots \times (365 - n + 1)$. Следовательно, искомая вероятность* равна $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1) / 365^n$. Рассматриваемые события были бы равновероятными, если бы это

* Для проверки вычислений заметим, что при $n = 366$ здесь, как и должно быть, получается 0. (Ради простоты я пренебрег случаем, когда день рождения приходится на 29 февраля; это не отражается на результате, за исключением указанного крайнего случая.)

число равнялось $1/2$:

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) = \frac{1}{2}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получаем приближенную формулу

$$\frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \dots + \frac{n-1}{365} = \ln 2;$$

отсюда $n(n-1) = 506$, т. е. $n = 23$.

Путаница. Еще одна похожая задача [8]. Допустим, вы написали письма каждому из n своих друзей и написали n конвертов; затем в спешке наугад разложили письма по конвертам и запечатали их. Сколькими способами можно все перепутать, поместив каждое письмо не в свой конверт? Обозначим это число через X_n . Допустим, что первое письмо попало в a -й конверт, а в первом конверте оказалось b -е письмо (где $a \neq b$ и $b = 1$). Если $a = b$, то остальные $n-2$ письма можно положить каждое не в свой конверт X_{n-2} способами. Так как $a (=b)$ может принимать любое значение от 2 до n , то пока рассмотрено всего $(n-1)X_{n-2}$ случаев. В остальных случаях $a \neq b$. Фиксируем b (но a может принимать любые значения от 2 до n , кроме b); при этом в остальные $n-1$ конвертов требуется разложить оставшиеся $n-1$ писем так, чтобы первое письмо не попало в b -й конверт. Число способов, которыми это можно сделать, совпадает с X_{n-1} , так как ситуация эквивалентна исходной задаче для $n-1$ писем, если считать, что первому письму соответствует b -й конверт. Так как b может иметь $n-1$ значений, эта ситуация охватывает $(n-1)X_{n-1}$ случаев. Значит,

$$X_n = (n-1)(X_{n-1} + X_{n-2}).$$

Из последнего соотношения* легко находить одно за другим числа X_n . Ясно, что $X_1 = 0$, $X_2 = 1$; таким образом, $X_3 = 2$, $X_4 = 9$, $X_5 = 44$, $X_6 = 265$ и т. д. В явном виде формула для X_n выглядит так:

$$X_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

(выражение, стоящее справа, называется «суб-факториал n »). Но произвольно разложить n писем в n конвер-

* Еще проще соотношение $X_n = nX_{n-1} + (-1)^n$ ($X_1 = 0$).

тов можно $n!$ способами; поэтому вероятность столь вопиющей ошибки равна

$$\frac{X_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!}.$$

Правая часть этой формулы представляет собой начало ряда для числа e^{-1} ($=0,367879 \dots$); поэтому можно сказать, что эта вероятность приближенно равна $1/e$ (погрешность меньше $1/(n+1)!$, что при $n=6$ составляет примерно 0,0002).

Допустим, что две колоды карт (одну из них заранее хорошенько перетасовали) сравниваются карта за картой. Какова вероятность того, что, открывая карту за картой в обеих колодах, мы не встретим ни одного совпадения? Это другая форма рассмотренной выше задачи. Ответ равен примерно $1/e$ (для колоды из 52 карт погрешность будет меньше 10^{-69}). Многие люди готовы держать пари, что совпадений никогда не будет, чем может воспользоваться ловкач, знающий, что $e > 2$.

Смешанные задачи. К приведенным примерам можно добавить еще несколько стандартных занимательных задач.

Первая из них такова. Два клерка, A и B , нанимаются на работу на следующих условиях: A будет получать годовой оклад 100 фунтов с повышением на 20 фунтов в каждом следующем году, а B начинает с того же годового оклада 100 фунтов, но с повышением на 5 фунтов каждые полгода. В обоих случаях выплата производится за полугодие. Спрашивается, кто из них оказывается в более выгодных условиях? Ответ: B . Действительно, по истечении первого года A получит 100 фунтов, а B — 50 и 55, т. е. 105 фунтов, за второй год A получит 120 фунтов, а B — 60 и 65, т. е. всего 125 фунтов. И так B всегда будет получать на 5 фунтов в год больше, чем A .

Еще одна простая арифметическая задача. В церкви на клиросе, где размещается хор, есть четыре ряда желобков, в которые вставляются карточки с номерами четырех молитв или гимнов, выбранных для данной службы. Молитвенник содержит 700 текстов. Какое наименьшее число карточек, по одной цифре на каждой, нужно иметь в запасе, чтобы можно было выставить номера любых четырех различных текстов? Как изменится результат, если вместо девятки разрешается пользоваться перевернутой шестеркой? Ответ: 86 и 81. А ка-

ким будет ответ, если цифры написаны и на обратной стороне каждой карточки?

Третью задачу можно сформулировать так. Некто держит пари с равными шансами (например, он утверждает, что при бросании монеты выпадет герб) на сумму, составляющую $(1/n)$ -ю долю от имеющихся у него денег. Игра повторяется многократно, и каждый раз ставка равна $(1/n)$ -й части суммы, которой он располагает в данный момент. Если в конце игры число выигрышей совпадет с числом проигрышей, то каким будет для него такой результат? Оказывается, играющий все же останется в накладе.

Приведем еще одну простую задачу, на вопрос которой часто отвечают неправильно. Два одинаковых бокала наполнены до половины — один вином, а второй водой. Из первого бокала чайную ложку вина перелили в бокал с водой, а затем чайную ложку полученной смеси перелили в первый бокал с вином. Спрашивается, чего больше: воды в вине первого бокала или вина в воде второго? Как показывает опыт, большинство людей отвечают, что вина в воде больше, однако на самом деле это не так: разумеется, вина в воде будет столько же, сколько воды в вине, — и так будет обстоять дело, сколько бы раз мы ни производили переливание.

ЗАДАЧИ О ПЕРЕСТАНОВКАХ

Много интересных задач связано с перестановками и сочетаниями⁶. Даже небольшое количество предметов можно скомбинировать огромным числом способов! Например, из 12 разноцветных стержней одинаковой длины остов куба можно сложить 19 958 400 способами [9], а число различных комбинаций карт, которые могут оказаться на руках при игре в бридж (колода состоит из 52 карт; каждый из играющих получает 13 карт), равно $(52!)/(13!)^4$, т. е.

53 644 737 765 488 792 839 237 440 000.

Голосование. Приведем два простых примера. 1. Если за первого из двух баллотирующихся кандидатов подано a голосов, за второго — b , причем $a > b$, то вероятность того, что при подсчете число голосов, поданных за первого кандидата, все время будет оставаться больше, чем число голосов, поданных за второго, равна $(a - b)/(a + b)$. 2. Допустим, что в выборах участвует

r выборщиков и каждый из них располагает r голосами, из которых не более s могут быть поданы за одного кандидата, причем всего должно быть избрано n человек. Тогда наименьшее число сторонников данного кандидата, гарантирующее его избрание, должно превосходить $pr/(ns + r)$.

Рыцари круглого стола. Гораздо труднее следующая задача: сколько существует способов расположить n человек за круглым столом так, чтобы ни в каких двух расположениях какое-либо лицо не имело справа и слева одинаковых соседей. Известно, что n человек можно расположить в круг $(n-1)!/2$ разными способами. При этом число расположений, таких, что пара соседей у каждого лица всегда будет разной, не превосходит $(n-1)(n-2)/2$, поскольку именно таким числом способов можно посадить одного конкретного человека между всеми возможными парами остальных. На самом же деле искомое число равно этому последнему выражению, т. е. всегда можно указать $(n-1)(n-2)/2$ вариантов расположения лиц за круглым столом, таких, что ни у кого не будет одинаковой пары соседей.

Известны решения для разных значений n . Существует, например, 21 вариант расположения восьми человек ($n=8$) * с соблюдением указанного условия (мысленно замкните каждый круг, посадив последнего из лиц рядом с первым, и убедитесь, что всякий раз каждый из восьми человек будет иметь новую пару соседей):

1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 5 6 8 7 4 3	1 2 7 8 4 3 5 6
1 3 5 2 7 4 8 6	1 3 7 4 6 8 2 5	1 3 8 6 2 5 7 4
1 4 2 6 3 8 5 7	1 4 3 8 7 5 6 2	1 4 5 7 6 2 3 8
1 5 6 4 3 7 8 2	1 5 7 3 8 2 6 4	1 5 8 2 4 6 3 7
1 6 2 7 5 3 8 4	1 6 3 5 8 4 2 7	1 6 4 8 2 7 3 5
1 7 4 2 5 8 6 3	1 7 6 3 2 4 5 8	1 7 8 5 6 3 4 2
1 8 2 3 7 6 4 5	1 8 4 5 3 2 7 6	1 8 6 7 4 5 2 3

Отыскивать такие расположения — дело долгое и отнюдь не легкое.

Задача о супружеских парах [11]. Рассмотрим еще одну трудную задачу о перестановках. Найти x спосо-

* Это решение сообщил мне Э. Бергхольт в мае 1906 г. [10]. Дьюдени приводил эту задачу в 1905 г. для $n=6$ и сообщил мне, что для четных n решения нашел Э. Бьюли; сам же Дьюдени нашел общий метод решения, применимый и к нечетным n . В математических журналах появилось много работ на эту тему.

бов, которыми можно рассадить за круглым столом n супружеских пар (попеременно мужчин и женщин) так, чтобы женщины занимали определенные заранее места и ни один из мужчин не оказался бы рядом со своей женой.

Для решения этой весьма нелегкой задачи придется воспользоваться теорией диссонирующих подстановок [12]. Ограничусь тем, что укажу результаты для $n \leq 10$: $n = 3$, $x = 1$; $n = 4$, $x = 2$; $n = 5$, $x = 13$; $n = 6$, $x = 80$; $n = 7$, $x = 579$; $n = 8$, $x = 4738$; $n = 9$, $x = 43\,387$; $n = 10$, $x = 439\,792$.

ЗАДАЧИ БАШЕ О ГИРЯХ*

Большое число достаточно легких задач, приведенных в гл. I, принадлежат Баше или включены в его классический сборник. Среди предложенных им более трудных задач были задачи, связанные с определением наименьшего числа гирь, необходимых для взвешивания любого предмета, вес которого измеряется целым числом граммов в пределах от 1 до 40 включительно. Баше приводит два варианта задачи с наборами гирь: (i) 1, 2, 4, 8, 16 и 32 г и (ii) 1, 3, 9 и 27 г.

Как указал в 1556 г. Тарталья [13], с первым набором задача решается при условии, что гири разрешается класть только на одну чашу весов.

Баше предполагал, что гири можно ставить на обе чаши. В этом случае второй набор содержит наименьшее возможное число гирь. Баше рассуждал следующим образом. Чтобы отвесить 1 г, нужно иметь гирю в 1 г. Чтобы отвесить 2 г, требуется еще либо двухграммовая, либо трехграммовая гиря. Присоединение двухграммовой гири позволяет отвесить 1, 2 и 3 г, в то время как присоединение трехграммовой дает 1, 3 — 1, 3 и 3 + 1 г. Дополнив этот набор гирей в 9 г, можно получить любой вес от 1 до 13 г — этот диапазон больше того, который можно было бы получить добавлением какой-либо гири меньшего веса. Рассуждая аналогично, можно убедиться, что гири в 1, 3, 9 и 27 г составляют набор, достаточный для получения любого веса от 1 до 40 г, а набор гирь в 1, 3, 3^2 , ..., 3^{n-1} г позволяет определить вес в

* Задача V, с. 215 (см. [1] в литературе к гл. I).

любое целое число граммов от 1 до $(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1})$, т. е. до $(3^n - 1)/2$.

Чтобы найти набор гирь, нужный для определения любого заданного веса, требуется всего лишь выразить число граммов в троичной системе счисления; единственное отличие от троичной системы в ее обычном понимании заключается в том, что при нахождении цифр этого представления набор остатков от деления на степени тройки должен иметь вид 0, 1 и -1 , т. е. остаток 2 нужно записывать в виде $3 - 1$, и тогда частное на единицу увеличится, а в остатке мы будем иметь число -1 . Представление чисел в недесятичных системах счисления объясняется во многих учебниках по алгебре.

Рассуждения Баше не доказывают ни единственности предложенного им набора, ни его минимальности. Эти пробелы были восполнены Мак-Магоном, который рассмотрел гораздо более трудную задачу (задача Баше не более чем ее частный случай): найти *всевозможные* наборы гирь (необязательно разных), позволяющие получить любое целое число граммов от 1 до n включительно, в случае когда (i) гири разрешается ставить только на одну чашу весов, (ii) на обе. Мак-Магон исследовал также вопрос о том, как изменятся полученные результаты, если налагается одно из двух следующих условий (или даже оба): а) никакие другие взвешивания невозможны, б) каждое взвешивание осуществимо одним-единственным способом [14].

В случае (i) метод решения состоит в следующем: выражение $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ разлагается на множители, каждый из которых имеет вид $1 + x^a + x^{2a} + \dots + x^{ma}$; число решений зависит от свойств делимости числа $n + 1$. В случае (ii) выражение $x^{-n} + x^{-n+1} + \dots + x^{-1} + 1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n$ разлагается на множители, каждый из которых имеет вид $x^{-ma} + \dots + x^{-a} + 1 + x^a + \dots + x^{ma}$; число решений зависит от свойств делимости числа $2n + 1$.

Задача Баше относится к случаю (ii), $n = 40$. Исследование Мак-Магона показывает, что $x^{-40} + x^{-39} + \dots + 1 + \dots + x^{39} + x^{40}$ можно разложить требуемым образом восемью способами. Первый способ определен самим этим выражением: $a = 1$, $m = 40$. Далее, исходное выражение равно отношению $(1 - x^{81})/x^{40}(1 - x)$, которое можно разложить в произведение $(1 - x^3)/x(1 - x)$ и $(1 - x^{81})/x^{39}(1 - x^3)$; тем самым определен второй способ разложения на множители тре-

буемого вида: для первого множителя $a = 1, m = 1$, для второго $a = 3, m = 13$. Третий способ определяется аналогичным разложением на два множителя с $a = 1, m = 4$ и $a = 9, m = 4$. Четвертым способом исходное выражение разлагается на три множителя: $a = 1, m = 1$ для первого; $a = 3, m = 1$ для второго и $a = 9, m = 4$ для третьего. Пятый способ: два множителя с $a = 1, m = 13$ и $a = 27, m = 1$. Шестой способ: три множителя, для которых соответственно $a = 1, m = 1$; $a = 3, m = 4$; $a = 27, m = 1$. Седьмой способ: три множителя, для которых соответственно $a = 1, m = 4$; $a = 9, m = 1$; $a = 27, m = 1$. Восьмой способ: четыре множителя, для которых $a = 1, m = 1$; $a = 3, m = 1$; $a = 9, m = 1$; $a = 27, m = 1$.

Эти результаты показывают, что имеется восемь наборов гирь, позволяющих отвесить любое целое число граммов от 1 до 40 при соблюдении условий (ii), а) и б); перечислим эти восемь решений (где w^p обозначает p гирь весом w каждая): 1^{40} ; $1, 3^{13}$; $1^4, 9^4$; $1, 3, 9^4$; $1^{13}, 27$; $1, 3^4, 27$; $1^4, 9, 27$; $1, 3, 9, 27$. Последнее из решений как раз и принадлежит Баше. Мы видим, что этот набор действительно содержит наименьшее число гирь и, более того, только в нем одном все гири разные.

ДЕСЯТИЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДРОБИ $1/n$

Примерно в 1920 г. Дж. Миллер (тогда он еще учился в школе) изобрел замечательный способ ускоренного подсчета выражений некоторых простых дробей в виде периодических десятичных дробей. Во избежание осложнений будем предполагать, что n не делится ни на 2, ни на 5. Первые несколько цифр вычисляются обычным делением. Затем к полученному результату прибавляют 1 и делят на 2. Тем самым мы находим начальные цифры десятичного представления дроби m/n , где $m = (n+1)/2$. Если m четно, то снова делят на 2, если нечетно, прибавляют 1 и делят на 2. Эту процедуру продолжают до тех пор, пока для какого-то кратного дроби $1/n$ не получится последовательность цифр, уже встретившаяся в исходном представлении самой дроби $1/n$. Если повторившиеся цифры окажутся ближе к запятой, то последующие цифры можно переносить в исходное выражение для $1/n$ и продолжать действие до тех пор, пока не будет исчерпан весь период. На удивление простым ока-

ывается случай $n = 19$:

$$\frac{20}{19} = 1,05263157894736842\dot{1},$$

$$\frac{10}{19} = 0,526315789473684210,$$

где точки над цифрами указывают начало и конец периода. Здесь достаточно найти первые три цифры, а затем переносить каждую новую цифру из второй строки в первую и продолжать деление на 2.

При $n = 17$ и $n = 47$ придется трижды разделить на 2, прежде чем выявится повторяющаяся последовательность из трех цифр (они выделены жирным шрифтом):

$$\frac{18}{17} = 1,05882 \dots$$

$$\frac{48}{47} = 1,02127 \dots$$

$$\frac{26}{17} = 1,52941 \dots$$

$$\frac{24}{47} = 0,51063 \dots$$

$$\frac{30}{17} = 1,76470 \dots$$

$$\frac{12}{47} = 0,25531 \dots$$

$$\frac{15}{17} = 0,88235 \dots$$

$$\frac{6}{47} = 0,12765 \dots$$

В последнем случае вместо трехкратного деления на 2 можно сразу делить первую строку на 8 и переносить полученные цифры (по одной или по две) из четвертой строки в первую, не заботясь о заполнении промежуточных выражений.

В случае $n = 81$ приходится делить $82/81 = 1,01234\dots$ на 2 шесть раз (не забывая прибавлять 1 при нечетном числителе), пока не встретятся цифры 234. Вместо того чтобы и дальше шесть раз делить на 2, будем дважды делить на 8 и заполнять только первую, четвертую и седьмую строки:

$$\frac{568}{81} = 7,0123456790 \dots,$$

$$\frac{152}{81} = 1,8765432098 \dots,$$

$$\frac{19}{81} = 0,2345679012 \dots$$

Таким образом, $1/81 = 0,012345679$.

Если знакомая последовательность цифр встретится дальше от запятой, процедуру можно видоизменить: переносить цифры из первого ряда в следующий, а затем, умножая последний на 2 (или деля на 5), продолжать предыдущий ряд. Например, в случае $n = 49$ получаем

$$\frac{50}{49} = 1,0204081632653061224489795918367346938775\dot{1},$$

$$\frac{25}{49} = 0,51020408163265306122448979591836734693877\dot{5}.$$

ДЕСЯТИЧНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

Всякое положительное число можно однозначно представить в виде десятичной дроби. Если число рационально (т. е. выражается в виде простой дроби), то отвечающая ему десятичная дробь либо где-то обрывается (т. е. конечна), либо с какого-то места начинает повторяться (т. е. является бесконечной периодической десятичной дробью). Наоборот, для иррациональных чисел, как в случае $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ или $\pi = 3,14159265\dots$, она не обрывается и не повторяется. Если перейти к другой системе счисления, после запятой получится, конечно, совсем иная последовательность цифр. При этом отвечающая данному рациональному числу «систематическая» дробь может быть конечной в одной системе счисления и бесконечной периодической — в другой. Так, в системе с основанием 7 вместо привычного выражения $1/7 = 0,14285\dot{7}$ получаем $1/7 = 0,1$. Если задано целое число, выраженное в десятичной системе счисления, то для представления в системе с основанием p его следует делить на p снова и снова, записывая последовательные остатки. Расположенные в обратном порядке, они и будут цифрами искомого представления. Для представления дробей существует другое правило: дробь следует *умножать* на p снова и снова, оперируя на каждом шаге только с дробной частью. Цифрами искомого нового представления будут последовательные целые части произведений (на этот раз взятые в том же порядке). Так, например, в двоичной системе

$$\sqrt{2}(=\sqrt{10}) = 1,011010100000100111100\dots,$$

$$\pi = 11,00100100001111101101\dots$$

Ход вычислений здесь соответственно таков:

1,41421356	3,14159265
0,82842712	0,28318530
1,65685424	0,56637060
1,3137085	1,1327412
0,6274170	0,2654824
1,2548340	0,5309648
0,509668	1,061930
и т. д.	и т. д.

После записи 1,0110101 в выражении для $\sqrt{2}$ идут подряд пять нулей, поэтому выписанное число (двоичная дробь) является очень хорошим приближением для $\sqrt{2}$. И действительно, делая расчеты в двоичной системе, находим, что $(1,0110101)^2 = 1,111111111001$. Хорошим приближением для π можно считать $11,001 = 3^{1/7}$.

В некоторой степени аналогичным образом каждое положительное число можно однозначно выразить в виде обыкновенной непрерывной дроби⁷:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \dots$$

(считаем, что каждая косая черта в правой части относится ко всему, что за ней следует). Здесь все a_i — положительные целые числа, за исключением a_0 , которое может равняться 0. Например*:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/\dots, \\ e &= 2 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + 1/ \\ &\quad 1 + 1/6 + 1/1 + 1/1 + 1/8 + 1/\dots, \\ \pi &= 3 + 1/7 + 1/15 + 1/1 + 1/292 + 1/1 + 1/1 + 1/ \\ &\quad 1 + 1/2 + 1/1 + 1/3 + 1/1 + 1/\dots\end{aligned}$$

* В то время как неполные частные ($a_1, a_2, \dots$) непрерывных дробей для $\sqrt{2}$ и e подчиняются простым закономерностям, для π никаких закономерностей пока не выявлено. Наибольшее известное неполное частное $a_{451} = 20776$; см. [15].

Представление чисел в виде непрерывных дробей удобнее десятичного в трех отношениях: (i) оно конечно для рациональных чисел и периодически для квадратичных иррациональностей; (ii) оно не зависит ни от какой конкретной системы счисления (кроме тривиального момента — записи неполных частных a_i); (iii) оно приводит в некотором смысле к наилучшим возможным рациональным приближениям⁷ (это будет проиллюстрировано геометрически в следующей главе, см. с. 98).

Рациональные приближения

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{b_2}{c_2} = \frac{1 + a_0 a_1}{a_1}, \quad \frac{b_3}{c_3} = \frac{a_0 + a_0 a_1 a_2 + a_2}{1 + a_1 a_2}, \dots,$$

которые получаются при обрыве непрерывной дроби на каком-то определенном шаге, называются *подходящими дробями*. Они обладают многими замечательными свойствами. Числители и знаменатели подходящих дробей определяются рекуррентными формулами

$$b_{n+1} = b_{n-1} + a_n b_n, \quad c_{n+1} = c_{n-1} + a_n c_n.$$

В качестве примера перечислим первые шесть подходящих дробей, отвечающих числам $\sqrt{2}$, e и π : $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$; $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$; $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103933}{33102}$, $\frac{104348}{33215}$.

Простейшая иррациональная непрерывная дробь имеет вид

$$\tau = 1 + 1/1 + 1/1 + 1/1 + 1/\dots;$$

она удовлетворяет уравнению $\tau = 1 + 1/\tau$ и, следовательно, будучи заведомо положительной, равна $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$ (ср. с описанием игры Витхоффа на с. 50). Ей соответствуют подходящие дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, ..., числители и знаменатели которых по отдельности образуют последовательность чисел Фибоначчи⁸:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots,$$

каждое число которой равно сумме двух предыдущих. Замечено (см., например, [16]), что отношения чисел Фибоначчи, взятых через одно, измеряют угол между соседними листьями на стебле растений, точнее говоря, определяют, какую долю полного оборота составляет этот угол: $\frac{1}{2}$ — для вяза и липы, $\frac{1}{3}$ — для бука и лещины, $\frac{2}{5}$ — для дуба и яблони, $\frac{3}{8}$ — для тополя и

розы, $5/13$ — для ивы и миндаля и т. д.⁹ Это подходящие дроби для

$$\tau^{-2} = 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/\dots$$

Число τ тесно связано с метрическими свойствами некоторых правильных многоугольников и многогранников — пятиугольника, десятиугольника, додекаэдра, икосаэдра, — так как оно равно $2 \cos(\pi/5)$. Деление отрезка на две части так, что одна часть в τ раз больше другой или одна часть составляет $1/\tau$ от целого отрезка, называют *золотым сечением*¹⁰. Символ τ выбран как начальная буква греческого $\tau\omicron\mu\eta$ (сечение). Число Фибоначчи с номером n равно

$$\{\tau^n - (-\tau)^{-n}\}/\sqrt{5}.$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Если стороны прямоугольного треугольника находятся в рациональном отношении, то, изменив масштаб, можно сделать их целыми взаимно простыми (в совокупности) числами. По теореме Пифагора стороны x, y, z такого «примитивного» треугольника удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$ (z — гипотенуза)¹¹. Общее решение этого уравнения в целых числах (с точностью до перестановки x и y) имеет вид (см. [2], с. 531)

$$x = b^2 - c^2, \quad y = 2bc, \quad z = b^2 + c^2,$$

где b и c — произвольные взаимно простые целые числа, одно четное, второе нечетное, причем $b > c$. Значения $b = 2, c = 1$ отвечают известному решению — треугольнику со сторонами 3, 4, 5 ([17], с. 26 и далее); x и z всегда нечетны, а y делится на 4. Либо x , либо y делится на 3, и одно из трех чисел x, y, z обязательно делится на 5; поэтому xy всегда делится на 12, а xyz — на 60.

Первые 12 примитивных треугольников даны в приведенной ниже таблице. В нее вошли все треугольники, для которых $z < 80$, и все, для которых $x + y + z < 180$. Д. Лемер доказал [18], что число примитивных треугольников, гипотенуза которых меньше X , приближенно выражается дробью $X/2\pi$, а число примитивных треугольников с периметром меньше X приближенно равно $(X \ln 2)/\pi^2$. Заметим, что $80/2\pi \approx 12,73$ и $(180 \ln 2)/\pi^2 \approx 12,64$.

Таблица 2.1

b	c	x	y	z	$\frac{x+y+z}{=2b(b+c)}$	b	c	x	y	z	$\frac{x+y+z}{=2b(b+c)}$
2	1	3	4	5	12	5	4	9	40	41	90
3	2	5	12	13	30	7	2	45	28	53	126
4	1	15	8	17	40	6	5	11	60	61	132
4	3	7	24	25	56	8	1	63	16	65	144
5	2	21	20	29	70	7	4	33	56	65	154
6	1	35	12	37	84	8	3	55	48	73	176

Если $b - c = 1$, то $z - y = 1$; примерами служат первый, второй, четвертый, седьмой и девятый треугольники, указанные в таблице. Если c и b — идущие один за другим элементы последовательности 1, 2, 5, 12, 29, 70, ..., т. е. ([19], с. 106) если b/c — подходящая дробь непрерывной дроби

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots,$$

то $|x - y| = 1$, как в первом и пятом треугольниках.

Как показал Ф. Хоппенот, сумма квадратов $n + 1$ последовательных целых чисел, наибольшее из которых имеет вид $2n(n + 1)$, равна сумме квадратов n последующих целых чисел. Так, $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$, $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$ и т. д. Как аналог равенства $3^2 + 4^2 = 5^2$ можно рассматривать и равенство $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в целых числах; то же относится к уравнению $x^4 + y^4 = z^4$. Эйлер (см. [21]) * высказал гипотезу¹², что это утверждение верно и для уравнения $x^4 + y^4 + z^4 = v^4$; в настоящее время установлено, что если решение последнего уравнения и существует, то v должно превосходить 220 000. С другой стороны, уравнение $x^4 + y^4 = z^4 + v^4$ имеет бесконечно много решений [22].

ТРЕУГОЛЬНЫЕ И ПИРАМИДАЛЬНЫЕ ЧИСЛА [23]

Треугольные числа

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ..., $n(n + 1)/2$, ...

* Существуют или нет три целых x, y, z , для которых все четыре числа $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ являются квадратами, — не установлено (см. [71]).

— это частные суммы (расходящегося) ряда $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ из натуральных чисел. Их название объясняется тем, что такое число точек (или одинаковых кругов) легко укладывается в треугольную конфигурацию: одна точка вверху, две под ней, три под ними и т. д. Числа 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, ... — одновременно и треугольные, и квадратные¹³; общая формула для таких чисел имеет вид b^2c^2 , где b/c — любая подходящая дробь непрерывной дроби для $\sqrt{2}$.

Частные суммы последовательности треугольных чисел называются *тетраэдральными числами* (раньше их часто именовали *пирамидальными числами*):

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ..., $n(n+1)(n+2)/6$, ...

Они определяют число одинаковых шаров, укладываемых в тетраэдральную конфигурацию. Аналогично суммы последовательности квадратов (т. е. частные суммы ряда $1 + 4 + 9 + 25 + 36 + \dots + n^2 + \dots$) — это *пирамидальные числа*

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, ..., $n(n+1)(2n+1)/6$

Суммы последовательности кубов (начиная от 1) являются квадратами треугольных чисел; суммы *пар* последовательных треугольных чисел — это квадратные числа, а суммы *пар* последовательных тетраэдральных чисел — пирамидальные числа.

Единственное число (> 1), которое одновременно является и квадратным и пирамидальным, — это 4900. Впервые это предположил Э. Люка в 1875 г., а доказал Ватсон в 1918 г., причем доказательство это отнюдь не элементарно [24].

ДЕЛИМОСТЬ

Если разность двух целых чисел x и y кратна некоторому p , то x и y называют *сравнимыми по модулю p* ; записывают это следующим образом:

$$x - y \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{или} \quad x \equiv y \pmod{p}.$$

Всякое целое число сравнимо по модулю p с одним и только с одним из p *вычетов* 0, 1, 2, ..., $p-1$ (т. е. остатков от деления на p). Можно построить арифметику вычетов, вполне аналогичную арифметике обычных целых чисел¹⁴. В ней определены сложение, вычитание

и умножение. Например, в арифметике вычетов по модулю 6

$$3 + 4 \equiv 1, \quad 3 - 4 \equiv 5, \quad 3 \times 4 \equiv 0.$$

Такая арифметика особенно интересна, если p — простое число (так мы и будем считать в этой главе). Понятие простого числа определяется следующим образом.

Простым называется целое число, большее 1, которое имеет лишь два положительных делителя: 1 и само это число. (Исключив 1 из множества простых чисел, мы можем утверждать, что всякое натуральное число однозначно разлагается на простые множители; например, $504 = 2^3 3^2 7$.) Среди первых ста чисел натурального ряда 25 простых: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Евклид в своих «Началах» (книга IX, теорема 20) показал, что простых чисел бесконечно много. Он рассуждал примерно так. Рассмотрим произведение $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p$ всех простых чисел по некоторое p . Ясно, что число $P + 1$ не делится ни на одно из них. Следовательно, оно имеет простой делитель, превосходящий p (быть может, совпадающий с самим $P + 1$). Значит, для любого заданного простого числа найдется большее его простое число¹⁵.

Среди многих предложенных явных формул простых чисел самой удачной оказалась принадлежащая Эйлеру [25] квадратичная форма $x^2 + x + 41$, которая дает простые числа для $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$. Х. Старк [26] доказал, что не существует формы $x^2 + x + A$ с $A \geq 41$, все значения которой были бы простыми для $A - 1$ последовательных значений x .

Конечно, рассматривая какое-то целое число N , желательно уметь сразу сказать, простое оно или составное, не проверяя каждое простое число, меньшее $\sqrt{N}$, как его возможный делитель. Приведем два подобных критерия¹⁶.

Дж. Вильсон открыл (1770), а Лагранж доказал (1773), что число N простое *тогда и только тогда*, когда $(N - 1)! + 1$ делится на N . Например, $(7 - 1)! + 1 = 721$ делится на 7, а $(9 - 1)! + 1 = 40321$ не делится на 9. Теорема Вильсона — это скорее теоретический, чем практический критерий простоты числа; ведь если N настолько велико, что есть основания сомневаться в том, простое это число или составное, то определить, делится ли на него $(N - 1)! + 1$, дело более трудоемкое, чем

проверить для каждого простого числа, меньшего $\sqrt{N}$, не является ли оно делителем N .

Ферма открыл (1640), а Эйлер доказал (1736), что если p простое и a не делится на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p . Случай $a = 2$ был известен китайцам еще в 500 гг. до н.э. Они сформулировали также обратное утверждение: если N делит $2^{N-1} - 1$, то N простое. Это утверждение было заново открыто и «доказано» Лейбницем в 1680 г. Однако оно неверно¹⁷; оно нарушается для $N = 341 = 11 \times 31$ и для бесконечного множества других N . Современные критерии простоты числа основаны на следующем обращении теоремы Ферма, принадлежащем Люка [27] *: если $a^x - 1$ делится на N , когда $x = N - 1$, но не делится, когда x — собственный делитель $N - 1$, то N — простое число. Некоторые модификации как условия, так и заключения этой обратной теоремы [28] приводят к эффективным критериям, которые используются при составлении таблиц простых чисел.

Примерно в 1930 г. Д. Х. Лемер (отец которого составил первую обширную таблицу делителей чисел и список простых чисел [29]) изобрел фотоэлектрическое числовое решето, с помощью которого большие числа можно разлагать на множители с поразительной быстротой. В течение последующих 40 лет он вместе со своими помощниками постоянно совершенствовал это изобретение, превратив его в конце концов в электронное решето [30] ** с быстродействием миллион значений в секунду (что в 7 раз превышает быстродействие машины IBM 7090).

Если вы хотите развлечься, то предложите приятелю быстро доказать, что *сумма любых двух нечетных простых чисел, идущих подряд, равна произведению трех целых чисел, больших 1*; например, $7 + 11 = 2 \times 3 \times 3$, $11 + 13 = 2 \times 3 \times 4$. Сделать это совсем не так трудно, как может показаться сначала.

ТЕОРЕМА О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Основная теорема арифметики (которая утверждает, что всякое натуральное число однозначно разлагается на простые множители) была представлена Эйлером

* Интересное обсуждение теоремы Ферма см. [17], с. 182—185.

** Интересно написанный обзор развития теории решет, связанного с именами Виго Бруна, Атле Сельберга и др. см. в [20].

(1737) в следующей изящной форме¹⁸:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

где произведения берутся по всем простым p ,

Число простых чисел, не превосходящих X , обозначается $\pi(X)$. Так, $\pi(2) = 1$, $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$ и т. д. Изучив таблицу простых чисел, меньших 400 000, Лежандр (1808) заключил, что при больших X значение $\pi(X)$ приближенно равно¹⁸

$$X/(\log X - B),$$

где B — константа, близкая к 1. Абель (в одном письме от 1823 г.) называл эту теорему «самой замечательной во всей математике». Гаусс (1849) независимо установил, что при большом X , но сравнительно малом x число простых чисел, заключенных между X и $X+x$ (или между $X-x$ и X), приближенно равно $x/(\log X)$, так что

$$\pi(X) \sim \int_2^X \frac{dt}{\log t}.$$

Оба этих приближения следуют из знаменитой *теоремы о простых числах*¹⁸, которая утверждает, что отношение $\pi(X)$ к $X/(\log X)$ стремится к 1, когда X стремится к ∞ . Впервые эта теорема была доказана (независимо) Адамаром и Валле Пуссенном [31] в 1896 г. Спустя 52 года Сельберг и Эрдёш [32] нашли совершенно элементарное (правда, весьма длинное) доказательство теоремы о простых числах. Это было довольно удивительно, так как прежде для ее доказательства всегда привлекался аппарат теории функций комплексного переменного, в частности идея (восходящая к Риману [33]) о связи поведения функции $\pi(X)$ с расположением нулей дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

в комплексной s -плоскости. Точнее говоря, гипотеза Римана, которая до сих пор кажется неприступной, утверждает, что *все* невестественные нули функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. Отсюда, заменив $X/(\log X)$ более

удобным интегральным логарифмом

$$\operatorname{li} X = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^X \right) \frac{dt}{\log t},$$

можно вывести, что для некоторой положительной постоянной c

$$|\operatorname{li} X - \pi(X)| < cX^{1/2} \log X.$$

Это утверждение значительно сильнее любого из известных уточнений теоремы о простых числах [34].

Что касается численной проверки этого утверждения, то известны, например, следующие значения:

$$\operatorname{li} 10^9 = 50849235 \quad \text{и} \quad \pi(10^9) = 50847534.$$

(Первое число округлено до ближайшего целого, для второго приведено точное значение.) Хотя во всех известных случаях $\operatorname{li} X > \pi(X)$, Дж. Литтлвуд доказал (1914), что, «зайдя достаточно далеко», мы достигнем в конце концов значения X , для которого верно обратное неравенство; более того, установлено [35], что таких значений существует бесконечно много!

А. де Полиньяк [36] высказал предположение, что всякое четное число можно представить в виде разности последовательных простых чисел бесконечным числом способов. В частности, для четного числа 2 отсюда следовало бы, что существует бесконечно много пар простых чисел-близнецов, состоящих из двух следующих друг за другом нечетных чисел:

$$5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73; \dots$$

Гипотезу де Полиньяка, как и гипотезу о числах-близнецах, до сих пор не удалось ни доказать, ни опровергнуть. В пользу этих гипотез свидетельствует то, что, например, в интервале $10^{12} \pm 10^4$ найдено 36 пар простых чисел-близнецов. Особенно эффектна среди них пара

$$9 \cdot 2^{211} \pm 1,$$

меньший элемент которой найден Лемером, а больший — Робинсоном [36].

Легко доказать¹⁹, что сумма обратных величин всех простых чисел, меньших X , неограниченно увеличивается с ростом X . Если же рассматривать сумму обратных величин только простых чисел-близнецов, меньших X , то

при возрастании X она остается ограниченной. Этот факт, установленный Бруном, показывает, что простых чисел-близнецов во всяком случае не «слишком много».

Этой гипотезе в чем-то аналогична теорема Гольдбаха, утверждающая, что всякое четное число, большее 4, можно представить в виде суммы двух нечетных простых чисел. Это было проверено вплоть до 10 000 и для отдельных малых областей очень больших чисел. И. М. Виноградов [37] доказал в 1937 г., что всякое достаточно большое нечетное число равно сумме трех простых²⁰, а Эстерман [38] обнаружил, что в некотором смысле почти все четные числа являются суммой двух простых.

ЧИСЛА МЕРСЕННА

Интересное утверждение (верное, правда, лишь отчасти) о простом или составном характере чисел вида $2^p - 1$ содержится в работе Мерсенна «Физико-математические размышления» (Cogitata Physico-Mathematica), опубликованной в 1644 г. В предисловии к ней высказано утверждение, касающееся совершенных чисел; из него следует, что единственными значениями p , меньшими 257, для которых $2^p - 1$ — простое число, являются числа 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257. Сегодня это утверждение не производит такого впечатления, как когда-то, ибо в нем было обнаружено пять ошибок. В 1883 г. И. М. Первушин установил, что число $2^{61} - 1$ является простым [39]. В 1903 г. Ф. Коул нашел разложение

$$2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287.$$

В 1911 и 1914 гг. Р. Пауэрс [40] нашел, что числа $(2^{89} - 1)$ и $(2^{107} - 1)$ — простые, а в 1922 г. М. Крайчик ([41], с. 31) показал, что $(2^{257} - 1)$ — составное число²¹.

Современная методика была разработана Люка [42] в 1877 г. и применена им для проверки утверждения Мерсенна о простоте числа $2^{127} - 1 = (170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727)$. В течение 75 лет (до июля 1951 г.) это число оставалось самым большим простым числом, известным в явном виде. В 1931 г. Д. Х. Лемер ([41], с. 32, 164) свел методику Люка к одному критерию:

число $2^p - 1$ (где $p > 2$) является простым тогда и только тогда, когда оно делит v_{p-1} , где $v_1 = 4$ и $v_{n+1} = v_n^2 - 2$.

В качестве иллюстрации отметим, что $2^3 - 1$ делит $v_2 = 14$; $2^4 - 1$ не делит $v_3 = 194$; $2^5 - 1$ делит $v_4 = 37\,634$.

Этот мощный критерий был применен (с помощью ЭВМ) ко всем числам Мерсенна с $p < 22\,000$. Оказалось, что $2^p - 1$ является простым числом ровно в 25 случаях, а именно * при

$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701$.

Брайан Такерман на машине IBM 360/91 примерно за 40 мин доказал, что v_{19936} делится на $2^{19937} - 1$. Соответствующее 24-е число Мерсенна содержит 6002 цифры.

В настоящее время с помощью современных компьютеров найдено полное разложение на множители всех чисел Мерсенна $2^p - 1$, где $p \leq 257$ (и p — простое, см. [68]). Вот несколько впечатляющих примеров.

$$2^{211} - 1 = 15193 \cdot 60272956433833849161 \cdot 359387504495823757388199894268773153439$$

(Дж. Дэвис, Д. Холдридж и Г. Симмонс),

$$2^{251} - 1 = 503 \cdot 54217 \times 178230287214063289511 \times 61676882198695257501367 \cdot 12070396178249893039969681$$

(Дж. Дэвис, Д. Холдридж и Г. Симмонс),

$$2^{257} - 1 = 535006138814359 \times 1155685395246619182673033 \times 374550598501810936581776630096313181393$$

(М. Пенк и Р. Бейли).

Джиллис высказал предположение, что число простых чисел Мерсенна, меньших X , примерно равно

$$\frac{2 \log \log X}{\log 2}.$$

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Теория *совершенных чисел* опирается непосредственно на теорию чисел Мерсенна. Число называется совершенным, если оно равно сумме своих собственных делителей. Так, например, 6 и 28 — совершенные числа; $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Эти числа все-

* Случаи 521 и 607 найдены Д. Х. Лемером и Р. М. Робинсоном; 1279, 2203 и 2281 — Лемером; 3217 — А. Андерсоном и Г. Ризелем; 4253 и 4423 — А. Гурвицем; 9689, 9941 и 11 213 — Д. Джиллисом [43] и 19 937 — Брайаном Такерманом ([44], 1971).

гда волновали мистиков: ведь бог «сотворил» Землю за 6 дней, а лунный месяц составляет 28 дней.

Евклид доказал, что $2^{p-1}(2^p - 1)$ — совершенное число, если число $(2^p - 1)$ — простое. И действительно, делителями $2^{p-1}(2^p - 1)$ (включая само это число) будут тогда 2^n и $2^n(2^p - 1)$ для $n = 0, 1, 2, \dots, p-1$, а, как мы знаем, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{p-1} = 2^p - 1$.

Эйлер показал, что эта формула исчерпывает *все четные* совершенные числа. Следующее упрощенное доказательство предложил Диксон [45] *. Пусть $2^n q$ (где q нечетно и $n > 0$) — совершенное число. Тогда $2^{n+1}q = (2^{n+1} - 1)s$, где s — сумма всех делителей q . Значит, $s = q + d$, где $d = q/(2^{n+1} - 1)$. Таким образом, d — делитель q и потому q и d — единственные делители q . Следовательно, $d = 1$ и $q = 2^{n+1} - 1$ является простым числом.

Значениям $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ отвечают простые числа Мерсенна 3, 7, 31, 127, 8191, 131 071, 524 287, 2 147 483 647 и совершенные числа 6, 28, 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128. Легко видеть, что две последние цифры четного совершенного числа всегда либо 28, либо 6 после нечетной цифры (за исключением самого числа 6). Кроме того, каждое четное совершенное число²² (помимо 6) сравнимо с 1 по модулю 9.

ЧИСЛА ФЕРМА

Ферма обогатил математику множеством новых теорем. Все они либо были доказаны, либо не вызывают сомнений в своей справедливости — за одним исключением²³. Им оказалась *теорема о степенях двойки*, которая утверждает, что все числа вида $2^m + 1$, где $m = 2^n$, — простые [47]. Правда, Ферма добавлял, что при всей убежденности в истинности этого утверждения

* Есть основания думать, что все совершенные числа четны. Во всяком случае, как установил Брайан Такерман ([44], 1968), среди нечетных чисел, меньших 10^{36} , совершенных нет. Дж. Сильвестр выдвинул гипотезу, которая была доказана И. С. Градштейном [46], согласно которой если нечетное совершенное число существует, то оно должно иметь не меньше шести различных простых делителей. Из существования нечетного совершенного числа следовало бы существование двух или более нечетных чисел, обратные величины которых в сумме дают 1. Вероятно, поиск таких нечетных чисел скорее мог бы увенчаться успехом, чем поиск нечетного совершенного числа.

он так и не смог получить убедительное доказательство его.

Можно показать, что если m не является степенью двойки, то число $2^m + 1$ составное, но отсюда, разумеется, не следует, что $2^m + 1$ простое, если m равно степени двойки, скажем $m = 2^n$. И действительно, эта теорема неверна. В 1732 г. Эйлер [48] показал, что при $n = 5$ получается число $4\,294\,967\,297$, которое равно $641 \times 6\,700\,417$. Обозначим

$$F_n = 2^{2^n} + 1;$$

тогда $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$. М. Крайчик [49] нашел способ, как установить, что F_5 делится на 641, не проводя самого деления: число

$$641 = 5^4 + 2^4 = 2^7 \times 5 + 1,$$

будучи делителем чисел $2^{28}(5^4 + 2^4)$ и $(2^7 \cdot 5)^4 - 1$, является также делителем их разности $2^{32} + 1$.

Теория квадратичных вычетов Гаусса позволяет доказать, что любой простой делитель числа F_n ($n > 1$) имеет вид $2^{n+2}k + 1$, где k — целое. Например,

$$F_5 = (2^7 \times 5 + 1)(2^7 \times 52\,347 + 1),$$

и, как заметил в 1880 г. Лендри,

$$F_6 = (2^8 \times 1071 + 1)(2^8 \times 262\,814\,145\,745 + 1).$$

В 1905 и 1909 гг. Дж. Морхед и Э. Вэстерн доказали, что числа F_7 и F_8 составные. Этот вывод легче всего проверить с помощью следующего критерия:

число F_n ($n > 0$) простое тогда и только тогда, когда оно делит $3^{(F_n-1)/2} + 1$.

В течение 60 лет после того, как удалось установить, что числа F_7 и F_8 составные, так и не было найдено ни одного их делителя, хотя было доказано, что F_7 является произведением ровно двух простых множителей. Наконец, в 1970 г. М. Моррисон и Дж. Брилхарт [50] нашли эти два множителя; теперь известно, что

$$F_7 = (2^9 \times 116\,503\,103\,764\,643 + 1) \times \\ \times (2^9 \times 11\,141\,971\,095\,088\,142\,685 + 1).$$

Для $n = 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 39, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452, 1945$ известен по крайней мере один делитель F_n . Все подробности, касающиеся открытий

этих делителей (включая даты и авторов), тщательно проанализированы Р. Робинсоном в статье [51], где отмечается, что известны все делители, меньшие 2^{35} . Составной характер числа F_{13} установлен Г. Паксоном (затратившим на это чуть больше 6 ч 15 мин машинного времени), а F_{14} — Селфриджем и Гурвицем. Одно из самых громадных чисел, когда-либо изучавшихся, — это число F_{1945} . Выписать его в явном виде — невозможная задача, так как число цифр в нем значительно превосходит число частиц во Вселенной (которое, по оценкам А. Эддингтона, составляет 51×2^{260}).

Эти результаты подтверждают гипотезу, что при $n > 4$ все числа F_n составные, однако никаких подходов к доказательству названной гипотезы пока не существует.

ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Теперь перейдем к другому утверждению Ферма, которое до сих пор не доказано. Это утверждение*, известное под названием *великой* или *последней теоремы Ферма*²⁴, состоит в следующем: не существует целых значений x, y, z ($xyz \neq 0$), удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$, где n — целое число, большее 2. Невероятная популярность этой теоремы связана с тем, что, хотя и нет оснований сомневаться в ее справедливости, никому до сих пор не удалось дать ее общее доказательство.

Ферма, по-видимому, установил ее сначала** для случая $n = 3$, а затем $n = 4$. Для первого случая доказательство утеряно, но для второго сохранилось***; на его основе Эйлер [56]**** дал аналогичное доказательство для случая $n = 3$. Эти доказательства проводились следующим методом: сначала доказывалось, что если существуют три целых значения x, y, z , удовлетворяющих

* Формулировку этой теоремы, данную самим Ферма, можно найти на полях принадлежавшей Ферма «Арифметики» Диофанта (Toulouse, 1670, p. 61) (книга II, после задачи 8). См. также ([52], с. 53). Библиографические ссылки см. в книге Л. Э. Диксона [45], т. II, гл. 26; см. также работу [53], повторно изданную в книге [54]. Морделл ссылается на уравнение $x^n + y^n = z^n$ как на «самое знаменитое из всех диофантовых уравнений».

** См. письмо Ферма, процитированное в книге [55].

*** См. заметку Ферма на с. 339 «Арифметики» Диофанта, а также [52], с. 127.

**** У Эйлера имеется одно упущение, но его можно восполнить.

уравнению, то найдутся три других (меньших) целых значения, тоже удовлетворяющих ему; таким способом мы приходим в конце концов к трем значениям, которые должны удовлетворять уравнению, но не удовлетворяют ему, откуда следует, что целочисленного решения не существует. В общем случае этот метод неприменим.

К формулировке теоремы в общем случае Ферма пришел позднее. Ее можно было бы доказать в предположении, что всякое целое допускает единственное разложение на простые множители. Верное для *рациональных* целых чисел, это предположение не выполняется для *алгебраических* целых, которые определяются как корни полиномиальных уравнений вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

с рациональными коэффициентами a_i . Например, в кольце алгебраических целых $a + b\sqrt{10}$, где a и b — рациональные целые числа, число 6 имеет два различных разложения на простые множители:

$$6 = 2 \times 3 = (4 - \sqrt{10})(4 + \sqrt{10}).$$

Подобным же образом уравнение Ферма при некоторых n приводит к выражениям, допускающим несколько различных разложений. Возможно, доказательство Ферма опиралось на такое ошибочное предположение; однако это всего лишь ничем не подтвержденная гипотеза. Во всяком случае, Ферма утверждал, что располагает убедительным доказательством — *demonstratio mirabilis sapientiae* — этой теоремы. А поскольку ни одна теорема о числах, о доказательстве которой заявлял Ферма, не была впоследствии признана неверной, это, безусловно, повышает доверие к его утверждениям; более того, сделав лишь однажды в своих рукописях неверный вывод (о том, что F_n — простые числа), Ферма тут же признался, что не мог получить удовлетворительного доказательства этого факта.

Следует помнить, что Ферма был первоклассным математиком и специально изучал теорию чисел. Этот предмет отличается особым изяществом и сам по себе необычайно интересен, но польза от него невелика; поэтому долгое время теорией чисел занимались немногие математики. Этим объясняется, что некоторые сформулированные Ферма самые простые теоремы были дока-

заны лишь более века спустя, а потому неудивительно, что доказательство теоремы, которую он установил уже к концу своей жизни, вызвало большие трудности.

В 1823 г. Лежандр [58] получил доказательство теоремы Ферма для случая $n = 5$, в 1832 г. Лежен Дирихле [59] дал доказательство для $n = 14$, а в 1840 г. Ламе и Лебег [60] получили доказательство для $n = 7$.

Очевидно, что при доказательстве теоремы Ферма для $n > 4$ можно ограничиться простыми n . В 1849 г. Куммер* доказал ее для всех «регулярных» простых чисел. (Простое число p называется *регулярным*, если оно не делит ни один из знаменателей чисел Бернулли** $B_1, B_2, \dots, B_{(p-3)/2}$.) Куммер обнаружил, что среди простых чисел, меньших 164, «иррегулярными» являются только 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 157. С помощью быстродействующего калькулятора SWAC Дж. Селфридж и Б. Поллок [62] нашли все иррегулярные простые, меньшие 25 000, и, проверив каждое из них, пришли к выводу, что при $n < 25\,000$ теорема Ферма верна. Были установлены и другие критерии. Например, А. Виферих [63] показал, что если уравнение Ферма имеет решение в целых числах, взаимно простых с n (где n — нечетное простое), то $2^{n-1} - 1$ делится на n^2 . В этом варианте доказательство было продолжено Дж. Б. Россером и Д. Х. Лемером [64] соответственно до $n = 41\,000\,000$ и $250\,000\,000$. Тому, кто сможет получить (до 2007 г.) общее доказательство теоремы Ферма, уже давно обещана премия [65] в 100 000 марок²⁵.

Хотя задача Ферма остается нерешенной, она сыграла большую роль в теории чисел, так как способствовала разработке многих современных методов этой области математики, а возникшие на этой основе теории, вероятно, важнее, чем доказательство самой теоремы. Естественно, строилось немало предположений относительно того, как сам Ферма получил свой результат. Те его доказательства, которые сохранились до наших дней, не выходят за пределы элементарной геометрии и

* Ссылки на статьи Куммера см. в работе [61].

** Числа Бернулли появляются в разложении

$$\frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1 - \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 - \frac{B_3}{6!} x^6 - \dots$$

Значения первых восьми чисел Бернулли таковы: $1/6, 1/80, 1/42, 1/80, 5/66, 691/2730, 7/6, 3617/510$.

алгебры, некоторые из них вообще не содержат математических символов. Это привело кое-кого к мысли, что Ферма пользовался только элементарными алгебраическими методами. Возможно и так; однако одно его замечание — по-моему, не очень известное, — говорит скорее об обратном. В свое время Ферма предложил английским математикам следующую задачу: доказать, что уравнение $x^2 + 2 = y^3$ имеет единственное решение в целых числах; этим решением, очевидно, является $x = 5$, $y = 3$. Этому вопросу посвящена его заметка*; там Ферма говорит, что нетрудно найти решение в рациональных дробях, но что он придумал совершенно новый метод — *sane pulcherrima et subtilissima*, — позволяющий находить решения в целых числах. Ферма собирался написать специальную работу** о своих исследованиях в теории чисел, но не осуществил этого намерения; поэтому мы, к сожалению, очень мало знаем о его методах. Тем не менее я осмелюсь предположить, что немалую роль в его исследованиях играли непрерывные дроби. В подтверждение этой гипотезы могу сказать, что некоторые из хорошо известных результатов Ферма, в частности теорема о том, что всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов***, сравнительно легко выводятся из свойств этих дробей.

ПОЛЯ ГАЛУА

Обычные свойства сложения и умножения чисел в вещественном, рациональном или комплексном поле (такие, как ассоциативность, дистрибутивность и коммутативность, а также возможность деления на любой элемент, кроме нуля), сохраняются также в полях с конечным числом q элементов. Можно доказать [66], что такое число q всегда есть степень некоторого простого числа: $q = p^n$, где p — простое, а n — натуральное число; при этом для всякого такого q существует ровно одно поле, состоящее из q элементов. Оно обозначается $GF(q)$ и называется полем Галуа²⁶ в честь Эвариста Га-

* В книге «Арифметика» Диофанта (книга VI, предложение 19, с. 320); см. также [52], с. 122.

** См. заметки в «Арифметике» Диофанта (книга IV, предложение 31, с. 181), а также [52], с. 82.

*** См. заметки в «Арифметике» Диофанта (книга III, предложение 22, с. 127), а также [52], с. 65.

луа (1811—1832), блестящие успехи которого в математике были прерваны ранней гибелью на дуэли [67]. В частности, $GF(p)$ — это поле классов вычетов по модулю p , и все его p элементов записываются как $0, 1, \dots, p-1$, где через 0 принято обозначать множество всех кратных p , через 1 — множество всех целых, при делении на p дающих в остатке 1 , и т. д. Разумеется, вместо $p-1$ можно писать -1 . Например, мы знаем, что $641 = 1 + 2^7 \times 5 = 2^4 + 5^4$, поэтому в $GF(641)$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} 2^7 \times 5 &= -1, & 2^4 &= -5^4, & 2^7 &= -1/5, \\ 2^8 &= -2/5, & 2^{32} &= (-2/5)^4 = 2^4/5^4 = -1. \end{aligned}$$

Именно таким путем Крайчик [49] подтвердил, что 641 делит $2^{32} + 1$. Утверждение $a = b$ в $GF(p)$ имеет тот же смысл, что

$$a \equiv b \pmod{p}$$

(эта запись означает: a сравнимо с b по модулю p), а именно, оба они означают, что $a - b$ делится на p .

Запись $a \equiv b \pmod{m}$ используется и в том случае, когда m — составное число, но при этом классы вычетов образуют не поле, а кольцо. Например, в кольце вычетов по модулю 4 элемент 2 не имеет обратного, так как $2 \times 2 = 0$. Таким образом, хотя это кольцо состоит из четырех элементов, оно совсем не похоже на поле $GF(4)$. Чтобы подчеркнуть это различие, обычно вместо $GF(4)$ пишут $GF(2^2)$.

При $n > 1$ поле $GF(p^n)$ можно представить как поле классов эквивалентности многочленов с коэффициентами из поля $GF(p)$; два таких многочлена объявляются эквивалентными, если их разность делится на некоторый заданный неприводимый (или простой) многочлен степени n . Тогда каждый из p^n элементов поля $GF(p^n)$ можно выразить в виде многочлена степени меньше n . (Хотя неприводимых многочленов степени n , вообще говоря, несколько, все они приводят к одному и тому же полю $GF(p^n)$.)

Часто бывает удобно оперировать отдельно коэффициентами, скажем вместо $x^3 + 2x + 1$ писать 1021 (при $x = 10$ это привычная запись числа в десятичной системе). Пусть, к примеру, 1021 выбрано в качестве модуля для $GF(3^3)$; тогда типичное сложение выглядит так (слева складываются многочлены, справа — коэффи-

циенты):

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \quad 121 \\ \underline{2x + 2} \quad 22 \\ x^2 + x \quad 110 \end{array}$$

а типичное умножение — так:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \quad 121 \\ \underline{x} \quad 10 \\ x^3 + 2x^2 + x \quad 1210 \\ \underline{x^3 + 2x + 1} \quad 1021 \\ 2x^2 + 2x + 2 \quad 222 \end{array}$$

(На последнем шаге вычитается модуль 1021.) Известно, что каждый элемент, кроме нуля, есть степень какого-то «примитивного» элемента. Например, в рассмотренном представлении $GF(3^3)$ каждый ненулевой элемент есть степень 10 или x :

$$x^0 = 1, \quad x^1 = 10, \quad x^2 = 100, \quad x^3 = 1000 = 12, \dots, \\ x^{13} = 2, \dots, x^{26} = 1.$$

Элементы $1, x^2, x^4, \dots$ являются квадратами, а $x^3, x^5, \dots$ (при нечетном p) не являются квадратами. Чтобы включить нулевой элемент, можно считать, что $x^\infty = 0$, это в достаточной мере согласуется с правилом $x^a x^b = x^{a+b}$.

Интересную задачу, которую можно решать над любым, в частности над конечным, полем, представляет собой исследование решений алгебраического уравнения вида

$$ay^l + bz^m + c = 0.$$

В случаях $(l, m) = (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4)$ формулы для числа решений были известны еще Гауссу [69]. Однако глубокое освещение эта проблема получила гораздо позднее (с помощью теории полей алгебраических функций) благодаря выдающемуся достижению Андре Вейля [70]. С полем функций, которое определяется таким уравнением, можно связать некую дзета-функцию, аналогичную дзета-функции Римана в случае рационального поля (подробнее об этой теории см. [57]), и сформулировать гипотезу о расположении ее нулей точно так же, как в классическом случае. Вейль сумел доказать этот

так называемый «конечный аналог» гипотезы Римана, дав тем самым мощный толчок развитию не только теории чисел, но и алгебраической геометрии над конечными полями.

1. Ball W. W. R. *Algebra*. — Cambridge, 1890, p. 430.
2. Chrystal G. *Algebra*. — Edinburgh, 1889, vol. II, p. 159.
3. Chartres R. *Knowledge*, July 1891.
4. *Opuscles Mathématiques* (Paris), 1761, vol. I, p. 201.
5. *Nature*, February 15, March 1 1894, vol. XLIX, pp. 365—366, 413.
6. Kamke E. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. — Leipzig, 1932, S. 82—89.
7. Todhunter I. A *History of the Mathematical Theory of Probability*. — London, 1865, p. 221 (art. 391).
8. de Montmort P. R. *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*. — Paris, 1713, p. 132; Coolidge J. L. *An Introduction to Mathematical Probability*. — Oxford, 1925, p. 24; Durell C. V., Robson A. *Advanced Algebra*. — London, 1937, p. 459. См. также Aitken A. C. *Determinants and Matrices*. — Edinburgh, 1956, p. 135.
9. *Mathematical Tripos*. — Cambridge, Pt. I, 1894.
10. *The Secretary and The Queen*, August 1906.
11. Lucas E. *Théorie des Nombres*. — Paris, 1891, pp. 215, 491—495.
12. MacMahon P. A. *Combinatory Analysis*, vol. I. — Cambridge, 1915, pp. 253—256; Halmos P., Vaughan H. E. *American Journal of Mathematics*, 1950, vol. LXXII, pp. 214—215; Newman D. J. *American Mathematical Monthly*, 1958, vol. LXV, p. 611.
13. *Trattato de' numeri e misura*. — Venice, 1556, vol. II, bk. I, ch. XVI, art. 32.
14. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1886, vol. XXI, pp. 367—373. Описание метода дано в журнале *Nature*, Dec. 4, 1890, vol. XLII, pp. 113—114.
15. Lehman R. S. *Ballistic Research Laboratories Report N 1066* (Aberdeen Proving Ground, MD, February 1959).
16. Кокстер (Коксетер) Г. С. М. *Введение в геометрию*. Пер. с англ. — М.: Наука, 1966, с. 247—252.
17. Bell E. T. *Numerology*. — Baltimore, 1933.
18. *American Journal of Mathematics*, 1900, vol. XXII, p. 38.
19. Kraitchik M. *La mathématique des Jeux*. — Bruxelles, 1930.
20. Halbertstam H., Roth K. F. *Sequences*, 1966, vol. I, ch. IV.
21. *Commentationes Arithmeticae Collectae*. — Спб., 1849, т. I, с. 473—476; т. II, с. 450—456.
22. *Sphinx*, 1937, p. 98.
23. Dudeney H. E. *Amusements in Mathematics*. — London, 1917, pp. 26, 167.
24. Lucas E. *Nouvelles Annales de Mathématique* (2), 1875, vol. XIV, p. 336; Watson G. N. *Messenger of Mathematics* (new series), 1918, vol. XLVIII, pp. 1—22.
25. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences*. — Berlin, 1772, p. 36.
26. *Michigan Mathematical Journal*, 1967, vol. XIV, pp. 1—27.
27. Lucas E. *Théorie des Nombres*. — Paris, 1891, pp. 423, 441.
28. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1927, vol. XXXIII, pp. 327—340.
29. Lehmer D. N. *Factor Tables for the First Ten Millions*. — Washington, 1909; List of Prime Numbers from 1 to 10 006 721,

- Washington, 1914. (В последней книге особенно увлекательно введение.)
30. Brillhart J. D., Selfridge J. L. *Mathematics of Computation*, 1967, vol. XXI, pp. 87—96.
 31. Hadamard J. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1896, vol. XXIV, pp. 199—220; de la Vallée Poussin C.-J. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896, vol. XX, pp. 183—256.
 32. *Annals of Mathematics*, 1949, ser. 2, vol. L, pp. 305—315.
 33. *Monatsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1859, S. 671—680.
 34. Ингам А. Е. Распределение простых чисел. Пер. с англ. — М. — Л.: ОНТИ, 1936.
 35. Lehman R. S. *Acta Arithmetica*, 1966, vol. XI, pp. 397—410.
 36. de Polignac A. *Nouvelles Annales de Mathématique*, 1849, vol. VIII, p. 428; Robinson R. M. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1958, vol. IX, p. 674.
 37. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Труды Математического института АН СССР, т. XXIII. — М. — Л.: 1947, с. 101. (Переиздание: М.: Наука, 1971.)
 38. *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, 1938, vol. XLIV, pp. 307—314.
 39. Archibald R. C. *Scripta Mathematica*, 1935, vol. III, p. 117.
 40. *American Mathematical Monthly*, 1911, vol. XVIII, pp. 195—197; *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, 1919, vol. XIII, p. 39.
 41. Sphinx, 1931.
 42. *American Journal of Mathematics*, 1878, vol. I, p. 316.
 43. *Mathematics of Computation*, 1964, vol. XVIII, pp. 93—97.
 44. *Notices of the American Mathematical Society*, 1971, vol. XVIII, p. 608; 1968, vol. XV, p. 226.
 45. Dickson L. E. *American Mathematical Monthly*, 1911, vol. XVIII, p. 109; см. также книгу того же автора Dickson L. E. *History of the Theory of Numbers*. — Washington, 1919 (vol. II), 1920 (vol. II).
 46. Градштейн И. С. О нечетных совершенных числах. — Математический сборник, 1925, т. 32, с. 476—510.
 47. Письмо от 18 октября 1640 г. См. Опега. — Toulouse, 1679, p. 162 или [52], p. 143.
 48. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. — СПб., 1738, т. VI, с. 104; см. также *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. — СПб., 1764, т. IX, с. 101, или *Commentationes Arithmeticae Collectae*. — СПб., 1849, т. I, с. 2, 357.
 49. Krätchik M. *Théorie des Nombres*, vol. II. — Paris, 1926, p. 21.
 50. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1971, vol. LXXVII, p. 264.
 51. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1958, vol. IX, p. 679.
 52. Brassinne. *Précis*. — Paris, 1853.
 53. Mordell L. J. *Fermat's Last Theorem*. — Cambridge, 1921.
 54. Klein F. et al. *Famous Problems and other Monographs*. — New York, 1955.
 55. Ball W. W. R. *History of Mathematics*. — New York, Dover reprint, 4th ed. 1960, ch. XV.
 56. Euler L. *Algebra* (English trans. 1797), vol. II, ch. XV, p. 247.
 57. Eichler M. *Algebraic Numbers and Functions*. — New York, 1966, § 5.1 (перевод с немецкого издания 1963 г.).

58. Legendre A. *Théorie des Nombres*.— Paris, 1830, vol. II, pp. 361—368 (см. также pp. 5, 6).
59. *Crelle's Journal*, 1832, vol. IX, pp. 390—393.
60. *Liouville's Journal*, 1841, vol. V, pp. 195—215, 276—279, 348—349.
61. Vandiver H. S. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1929, vol. XXXI, pp. 613—642.
62. *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, 1955, vol. XLI, pp. 970—973.
63. *Crelle's Journal* 1909, vol. CXXXVI, pp. 293—302.
64. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1941, vol. XLVII, p. 142.
65. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. XV, pp. 217—218.
66. Birkhoff G, MacLane S. *A Survey of Modern Algebra* (3rd ed.).— New York, 1965, p. 413. См. также книгу Диксона [45].
67. Инфельд Л. Эварист Галуа. Пер. с англ. — М.: Молодая гвардия, 1965.
68. Brillhart J. D., Lehmer D. H., Tucherman B., Waystaff S. S., Jr. *Contemporary Mathematics*, vol. XXII, 1983.
69. Gauss C. F. *Werke*, 1900, Bd. I, S. 445—449.
70. Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. — Paris, 1948.
71. Lander L. J., Parkin T. R., Selfridge J. L. *Mathematics of Computation*, 1967, vol. XXI, pp. 446—459.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

В двух следующих главах я собираюсь изложить некоторые геометрические задачи, головоломки и игры, не требующие применения алгебры или арифметики¹. Настоящая глава в основном касается вопросов, которые формально выглядят как геометрические теоремы, а в следующей главе описаны разного рода развлечения.

В соответствии с принципом, которым я руководствовался при построении этой книги (о чем говорится в предисловии), подробное обсуждение теорем с использованием «серьезной» математики здесь не проводится. Кроме того, я совсем не упоминаю (за одним-двумя исключениями) о многочисленных геометрических парадоксах, основанных на неспособности нашего зрения правильно сравнивать размеры фигур после изменения их относительного расположения. Такого рода иллюзии обусловлены неточной интерпретацией мозгом зрительных ощущений и не связаны с логическим мышлением; поэтому я считаю, что они не имеют никакого отношения к математике.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ²

Большинству читателей, вероятно, знаком логический ряд геометрических теорем, связываемых с именем Евклида; однако не все знают, что у Евклида эти теоремы сопровождалась упражнениями. Имелось три серии упражнений: две содержали легкие теоремы и задачи, а третья — геометрические софизмы, в которых учащийся должен был найти ошибки.

Собрание софизмов, подготовленных самим Евклидом, утрачено. Не сохранилось никаких письменных свидетельств о характере этих ошибочных утверждений или выводов, но в качестве иллюстрации я приведу несколько доказательств, приводящих к явно неправильным результатам. Надеюсь, они позабавят читателей, не знав-

ших их ранее. Попробуйте проявить сообразительность и самостоятельно разобраться, где тут кроются ошибки.

Первый софизм*. Доказать, что прямой угол равен тупому. Пусть дан прямоугольник $ABCD$. Отрезок AE лежит вне прямоугольника и равен стороне AB или CD ; он образует острый угол со стороной AB , как показано на рис. 3.1. Поскольку CB и CE не параллельны, их серединные перпендикуляры HO и KO пересекаются в некоторой точке O , которую мы соединим с точками A , E , C и D .

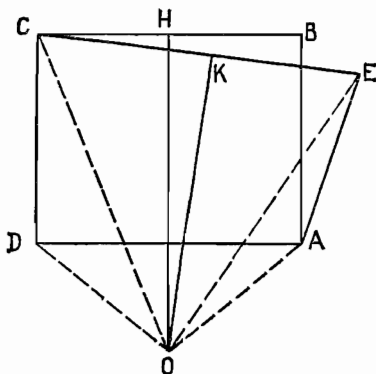


Рис. 3.1

Треугольники ODC и OAE , очевидно, конгруэнтны. Действительно, $OC = OE$, поскольку KO — серединный перпендикуляр отрезка CE ; аналогично $OD = OA$, так как HO — серединный перпендикуляр к CB и DA . Кроме того, по построению $AE = DC$. Стало быть, три стороны треугольника ODC равны соответственным сторонам треугольника OAE . Значит, по теореме 8 книги I «Начал» Евклида эти треугольники конгруэнтны и, следовательно, угол ODC равен углу OAE .

Кроме того, поскольку HO — серединный перпендикуляр к DA , угол ODA равен углу OAD .

Следовательно, угол ADC (разность углов ODC и ODA) равен углу DAE (разности углов OAE и OAD). Но угол ADC прямой, а угол DAE заведомо является

* Мне кажется, что этот и четвертый софизмы впервые были опубликованы в этой книге. Они особенно заинтересовали Ч. Л. Доджсона (Льюиса Кэрролла); в его книге [1] они представлены в том же виде, как и у меня.

тупым. Таким образом, мы доказали то, чего не может быть.

Второй софизм *. Доказать, что часть отрезка равна целому отрезку. Пусть ABC — некий треугольник. Для определенности предположим, что он разносторонний, причем угол B острый и угол A больше угла C . Из точки A проведем прямую AD под углом BAD (равным углу C) к BA , пересекающую BC в точке D (рис. 3.2).

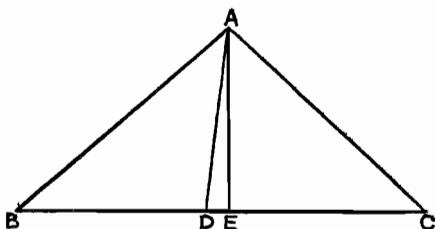


Рис. 3.2

Треугольники ABC и ABD имеют равные углы; поэтому, согласно теореме 19 книги VI «Начал» Евклида,

$$\triangle ABC : \triangle ABD = AC^2 : AD^2.$$

Кроме того, треугольники ABC и ABD имеют одну и ту же высоту. Следовательно, по теореме 1 книги VI

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ABD} = BC : BD,$$

откуда

$$AC^2 : AD^2 = BC : BD,$$

т. е.

$$\frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD}.$$

Отсюда по теореме 13 книги II получаем

$$\begin{aligned} (AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE)/BC &= (AB^2 + BD^2 - 2BD \cdot BE)/BD \Rightarrow \\ \Rightarrow AB^2/BC + BC - 2BE &= AB^2/BD + BD - 2BE \Rightarrow \\ \Rightarrow AB^2/BC - BD &= AB^2/BD - BC \Rightarrow \\ \Rightarrow (AB^2 - BC \cdot BD)/BC &= (AB^2 - BC \cdot BD)/BD \Rightarrow \\ \Rightarrow BC &= BD. \end{aligned}$$

* См. заметку М. Кокоза в [2].

Итак, мы опять пришли к результату, который невозможен.

Третий софизм [3]. Доказать, что сумма длин двух сторон произвольного треугольника равна длине третьей стороны. Пусть задан треугольник ABC . Дополним его до параллелограмма со сторонами AB и BC . Разделим AB на $n + 1$ равных частей и через точки деления проведем n прямых, параллельных BC . Точно так же разделим BC на $n + 1$ равных частей и через точки деления проведем n прямых, параллельных AB . В результате параллелограмм $ABCD$ разделится на $(n + 1)^2$ равных параллелограммов, подобных первоначальному.

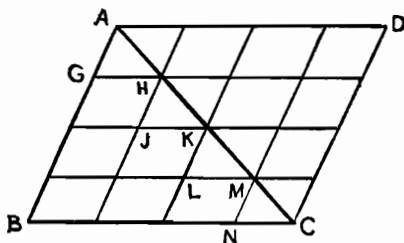


Рис. 3.3

Рис. 3.3 соответствует случаю $n = 3$. Рассматривая параллелограммы, расположенные вдоль диагонали AC , получаем

$$AB + BC = AG + HJ + KL + MN + GH + JK + LM + NC.$$

Аналогичное равенство имеет место при любом сколь угодно большом n . Пусть теперь n неограниченно возрастает. Тогда отрезки AG , GH и т. д. становятся все меньше и меньше, а точки G , J , L , ..., неограниченно приближаясь к диагонали AC , в конце концов оказываются лежащими на ней. Тогда сумма отрезков AG и GH обращается в AH ; то же самое происходит с другими аналогичными парами отрезков. В итоге получаем результат, который невозможен:

$$AB + BC = AN + HK + KM + MC = AC.$$

Четвертый софизм. Доказать, что всякий треугольник равнобедренный. Пусть ABC — произвольный треугольник. Проведем биссектрису AO угла BAC и серединный перпендикуляр DO отрезка BC .

Первый случай. Предположим, что DO и AO не пересекаются. Тогда они параллельны. Значит, $AO \perp BC$; следовательно, $AB = AC$.

Второй случай. Пусть DO и AO пересекаются в точке O . Опустим из O перпендикуляры OE на сторону AC и OF на AB ; кроме того, соединим точку O с B и C .

Предположим сначала, что O лежит внутри треугольника (рис. 3.4, а). Тогда точка E принадлежит стороне AC , а F — стороне AB . Треугольники AOF и AOE конгруэнтны, так как AO — их общая сторона, $\angle OAF = \angle OAE$ и $\angle OFA = \angle OEA$ ($=90^\circ$). Следовательно,

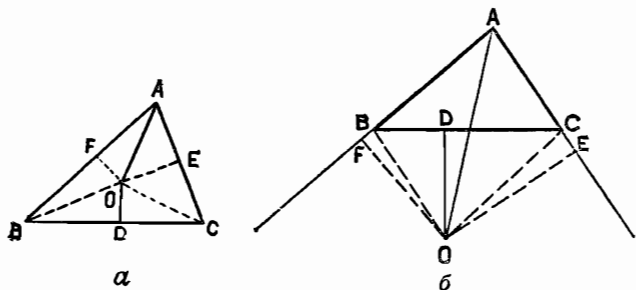


Рис. 3.4

$AF = AE$. Треугольники BOF и COE тоже конгруэнтны. Действительно, так как OD — серединный перпендикуляр к отрезку BC , то $OB = OC$, а так как треугольники AOF и AOE конгруэнтны, то $OF = OE$. Наконец, в этих треугольниках $\angle F = \angle E$ ($=90^\circ$). Итак, согласно теоремам 47 и 8 книги I «Начал» Евклида, треугольники BOF и COE конгруэнтны, и, значит, $FB = EC$. Следовательно,

$$AF + FB = AE + EC, \text{ т. е. } AB = AC.$$

То же доказательство справедливо в случае, когда DO и AO пересекаются в точке D , а также в случае, когда они пересекаются вне стороны BC , но так близко к ней, что точки E и F по-прежнему принадлежат сторонам AC и AB (а не их продолжениям!).

Теперь рассмотрим случай, когда DO и AO пересекаются вне треугольника, а точки E и F попадают на продолжения сторон AC и AB (рис. 3.4, б). По тем же соображениям, что и выше, из конгруэнтности треугольников AOF и AOE следует равенство $AF = AE$, а из

конгруэнтности треугольников BOF и COE — равенство $FB = EC$. Значит,

$$AF - FB = AE - AC, \text{ т. е. } AB = AC.$$

Итак, независимо от того, пересекаются или нет DO и AO и где именно они пересекаются — внутри треугольника или снаружи, всегда имеет место равенство $AB = AC$. Следовательно, **всякий** треугольник является равнобедренным, что в действительности, конечно, невозможно.

Пятый софизм*. Доказать, что $\pi/4$ равно $\pi/3$. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного $\triangle DBC$

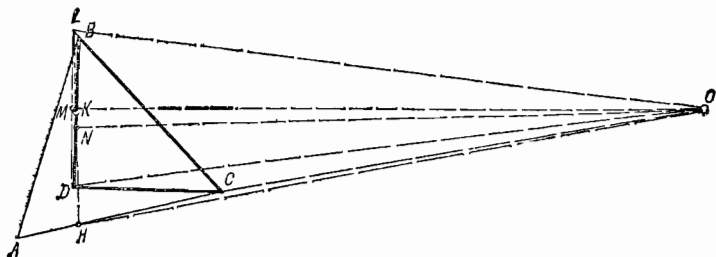


Рис. 3.5

построим равносторонний $\triangle ABC$ так, чтобы его вершина A лежала по ту же сторону от BC , что и D . На CA отложим отрезок CH , равный CD . Разделим BD пополам и соединим полученную точку K с H . Пусть продолжение HK пересекается с продолжением BC в точке L . Соединим D с L и проведем серединные перпендикуляры MO и NO отрезков DL и HL . Так как DL и HL пересекаются, то пересекаются и их серединные перпендикуляры. Более того, поскольку $\angle BDC = 90^\circ$, MO и NO оба отклоняются от DC и, значит, точка пересечения находится по другую сторону от DL по сравнению с точкой A . Соединим теперь O с точками C , D , H и L .

Так как треугольники OMD и OML конгруэнтны, $OD = OL$. По аналогичным соображениям $OL = OH$; поэтому $OD = OH$. Рассмотрим теперь $\triangle OCD$ и $\triangle OCH$. В них $OD = OH$, $CD = CH$ по построению, а OC — общая сторона этих треугольников. Следовательно, по теореме 8 книги I «Начал» Евклида $\angle OCD = \angle OCH$.

* Этот остроумный софизм принадлежит капитану Тертону. Он появился впервые в третьем издании настоящей книги,

Стало быть, $\angle BCD = \angle BCH$, т. е. $\pi/4 = \pi/3$, что абсурдно!

Шестой софизм [4]. Доказать, что если две противоположные стороны четырехугольника равны, то две другие стороны параллельны. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, в котором сторона AB равна стороне DC . Проведем серединные перпендикуляры MO и NO отрезков AD и BC .

Если $MO \parallel NO$, то $AD \parallel BC$ (ибо $AD \perp MO$, $BC \perp NO$).

Пусть теперь MO и NO пересекаются в точке O , которая находится либо внутри четырехугольника $ABCD$ (рис. 3.6, а), либо снаружи (рис. 3.6, б). Соединим точку O с точками A, B, C, D .

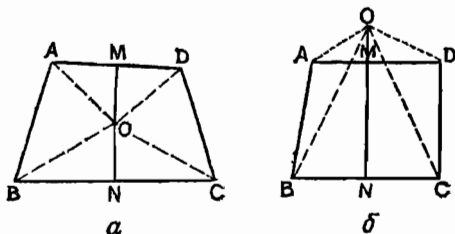


Рис. 3.6

Так как OM — серединный перпендикуляр к AD , то $OA = OD$ и $\angle OAM = \angle ODM$. Аналогично $OB = OC$ и $\angle OBN = \angle OCN$. Кроме того, по предположению $AB = DC$; значит, по теореме 8 книги I «Начал» Евклида треугольники OAB и ODC конгруэнтны и потому $\angle AOB = \angle DOC$.

Итак, на левом рисунке сумма углов AOM, AOB равна сумме углов DOM, DOC , а на правом рисунке разность углов AOM, AOB равна разности углов DOM, DOC . Следовательно, в обоих случаях $\angle MOB = \angle MOC$, т. е. отрезок OM (или его продолжение) делит угол BOC пополам. Но $\angle NOB = \angle NOC$, т. е. ON делит пополам угол BOC . Значит, ON и OM имеют одинаковое направление. Но тогда отрезки AD и BC , перпендикулярные этому направлению, должны быть параллельны. Однако этот результат, вообще говоря, конечно, неверен, и приведенное доказательство явно ошибочно.

Седьмой софизм*. Следующее ниже рассуждение взято из учебника по теории электричества, выпущен-

* С этим и следующим софизмами меня ознакомил Р. Шартр.

ного в 1889 г. двумя выдающимися математиками; оно рассматривается там всерьез. Данный вектор $\overline{OP}$ длины l можно разложить бесконечным числом способов на два вектора $\overline{OM}$ и $\overline{MP}$ длины l' и l'' ; при этом можно добиться того, чтобы отношение l'/l'' принимало любое наперед заданное значение в пределах от нуля до бесконечности. Допустим, что все векторы отнесены к декартовым ортогональным осям Ox , Oy и что $\overline{OP}$, $\overline{OM}$, $\overline{MP}$ образуют с осью Ox соответственно углы θ , θ' , θ'' . Тогда, проектируя равенство $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$ на оси Oy , Ox , получаем

$$\begin{aligned} l \sin \theta &= l' \sin \theta' + l'' \sin \theta'', \\ l \cos \theta &= l' \cos \theta' + l'' \cos \theta'', \end{aligned}$$

в силу чего

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n \sin \theta' + \sin \theta''}{n \cos \theta' + \cos \theta''},$$

где $n = l'/l''$. Этот результат верен при произвольном значении n . Но если n может принимать любые значения (например, $n = \infty$ или $n = 0$), то $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta''$, что, разумеется, невозможно.

Восьмой софизм. Здесь мы приведем ошибочный метод вычисления числа π , основанный на хорошо известных квадратурных формулах. Площадь, ограниченная половиной эллипса и его малой осью b , равна (в общепринятых обозначениях) $\pi ab/2$. Если сдвигать центр эллипса бесконечно вдоль его большей оси a , то эллипс вырождается в параболу — и в этом предельном положении площадь сегмента параболы равна двум третям площади описанного вокруг него прямоугольника. Но первое заключение не зависит от размеров полуосей кривой; в частности, оно должно сохранять силу при $a \rightarrow \infty$ и при $a = \infty$. Поэтому

$$\pi ab/2 = (2a/3) \times 2b \Rightarrow \pi = 8/3 (= 2^2/3).$$

Полученный результат весьма изящен — но он ошибочен.

Девятый софизм. Любой эллипс является окружностью. Фокальное расстояние произвольной точки эллипса выражается (в обычных обозначениях) через абсциссу формулой $r = a + ex$. Значит, $dr/dx = e$. Отсюда следует, что r не имеет ни максимумов, ни минимумов. Но единственная замкнутая кривая, радиус-вектор которой не допускает ни максимального, ни минимального значения, — это окружность. Стало быть, всякий эллипс есть окружность — вряд ли с этим можно согласиться!

К предыдущим примерам можно добавить несколько таких, которые, хотя, строго говоря, и не относятся к софизмам, тем не менее приводят к результатам, на первый взгляд невозможным.

Первый парадокс*. Требуется повернуть плоскую пластину (например, лист бумаги) на четыре прямых угла так, чтобы результат вращения был эквивалентен повороту на один прямой угол.

Второй парадокс. В геометрии, как и в арифметике, многие парадоксы связаны с теорией вероятностей. Приведем один очень простой пример. Палку случайным образом разламывают на три части. Если самый длинный кусок короче, чем два другие вместе взятые (т. е. если его длина меньше половины длины целой палки), то из трех кусков можно сложить треугольник («Начала» Евклида, книга I, теорема 20). Но вероятность того, что часть палки будет короче половины палки, равна $1/2$. Значит, и вероятность того, что из трех частей, на которые разломана палка, можно сложить треугольник, казалось бы, тоже равна $1/2$, что неверно — на самом деле она равна $1/4$.

Третий парадокс. Следующий пример касается разрезания фигуры и перекладывания полученных частей. Доказательство здесь, по существу, строится на обмане зрения. Подобным доказательствам не стоит доверять, если только они не подкреплены соответствующим математическим рассуждением. Хорошо известные доказательства теорем 32 и 47 книги I «Начал» Евклида можно дополнить указанным образом, и они верны. С другой стороны, я покажу сейчас, сколь обманчивым может быть нематематическое доказательство. В качестве примера рассмотрим известный парадокс**: квадратный кусок бумаги, разделенный подобно шахматной доске на 64 клетки, можно разрезать на 4 части и сложить из них фигуру, содержащую 65 таких клеток. Для этого нужно разрезать исходный квадрат на четыре куса по жирным линиям, проведенным на рис. 3.7, а. Если затем сложить

* Эту задачу мне прислал У. Рейтон.

** Я не знаю, кому принадлежит этот парадокс. Он дается во многих книгах, но самое раннее (из того, что мне удалось обнаружить) упоминание о нем содержится в [5]. Несколько подобных парадоксов можно найти у Озанама (изд. 1803 г., т. I, с. 299; см. [2] в литературе к гл. I).

их в виде прямоугольника, изображенного на рис. 3.7, б, то создается впечатление, что этот прямоугольник содержит 65 клеток.

Это «доказательство» равенства $64 = 65$, которое, как я знаю по опыту, обычно ставит в тупик нематематика, основано на том, что те края четырех кусков, которые на втором рисунке располагаются по диагонали AB , на самом деле не совпадают точно по направлению. Между ними имеется небольшой зазор в форме ромба, площадь которого равна площади одной из 64 клеток исходного квадрата, однако длина этого зазора намного превышает

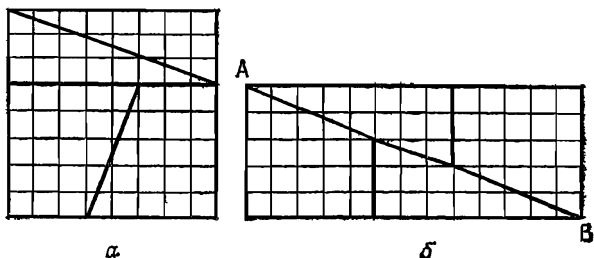


Рис. 3.7

его ширину — поэтому зрительно он кажется нам линией, а не плоской фигурой ненулевой площади. Рисунок показывает, что угол между двумя сторонами ромба в вершине A равен $\arctg \frac{2}{5} - \arctg \frac{3}{8}$, т. е. $\arctg \frac{1}{46}$, что составляет меньше $1\frac{1}{4}^\circ$. Чтобы глаз мог различить столь малый угол, разрез по линиям первого рисунка должен быть выполнен сверхточно, а полученные куски сложены сверхаккуратно.

В основе этого парадокса лежит соотношение $5 \times 13 - 8^2 = 1$. Аналогичные результаты можно получить, исходя из формул

$$13 \times 34 - 21^2 = 1, \quad 34 \times 89 - 55^2 = 1, \dots$$

или

$$5^2 - 3 \times 8 = 1, \quad 13^2 - 8 \times 21 = 1, \quad 34^2 - 21 \times 55 = 1, \dots$$

Эти соотношения связывают три последовательных числа Фибоначчи (см. с. 67). Общая формула

$$b_n c_{n+1} - c_n b_{n+1} = (-1)^n$$

имеет место для двух смежных подходящих дробей любой непрерывной дроби³.

Допустим, что доска поделена на большое число одинаковых квадратов, в вершинах которых торчат маленькие колышки. Линии колышков, ближайшие к двум смежным краям доски, будем рассматривать как оси координат. Тогда каждый колышек определяется двумя координатами, которые представляют собой неотрицательные целые числа. Если y/x — несократимая дробь, то нить, натянутая между колышками $(0, 0)$ и (x, y) , не заденет других колышков. Закрепив нить в точке (x, y) , попробуем сдвигать второй ее конец, не позволяя нити

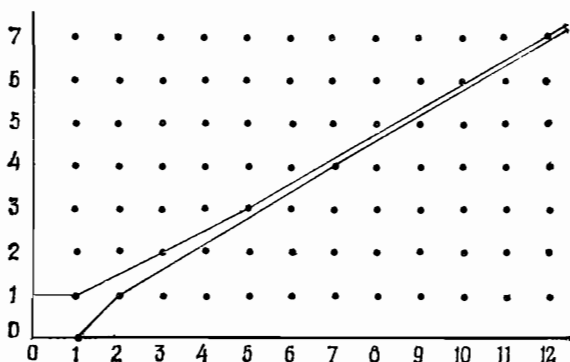


Рис. 3.8

перепрыгивать через колышки. Если закрепить свободный конец нити [ранее находившийся в начале координат $(0, 0)$] в точке $(1, 0)$ и туго натянуть ее, то, вообще говоря, между концами $(1, 0)$ и (x, y) она упрется в несколько колышков (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... Если же закрепить свободный конец нити не в точке $(1, 0)$, а в точке $(0, 1)$, то она упрется в другие колышки (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , ... Можно доказать, что последовательность $y_1/x_1, y_2/x_2, \dots$ содержит каждую вторую подходящую дробь для y/x , а $y'_1/x'_1, y'_2/x'_2, \dots$ — остальные подходящие дроби³. (Подходящая дробь y'_r/x'_r идет непосредственно перед или непосредственно за y_r/x_r , в зависимости от того, меньше или больше 1 дробь y/x .)

Из этой конструкции хорошо видно, каким образом подходящие дроби приближают y/x поочередно то с избытком, то с недостатком. Дробь y/x измеряет *градиент* нити в исходном положении. Нетрудно распространить

введенные понятия на случай нити с иррациональным градиентом, закрепленной в «бесконечности». На рис. 3.8 показан случай, когда градиент равен

$$\frac{1}{e-1} = 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/4 + 1/\dots$$

Заметим, что на участке от (1, 1) до (5, 3) нить касается колышка (3, 2), не будучи «прижатой» к нему. Дробь $3/2$ — это одна из *промежуточных дробей*, которые вместе с обыкновенными, или *главными*, подходящими дробями ($0/1, 1/1, 1/2, 3/5, 4/7, 7/12, \dots$) составляют множество наилучших приближений.

Если b_{n-1}/c_{n-1} , b_n/c_n , b_{n+1}/c_{n+1} — три последовательные подходящие дроби некоторой непрерывной дроби, то, как мы знаем,

$$b_n/c_n = (b_{n+1} - b_{n-1})/(c_{n+1} - c_{n-1}).$$

Геометрически это означает, что прямая, проходящая через точки (0, 0) и (c_n, b_n) , параллельна прямой, проходящей через (c_{n-1}, b_{n-1}) , (c_{n+1}, b_{n+1}) .

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗРЕЗАНИЯ

Задачи, в которых требуется прямолинейными разрезами разделить данную прямоугольную фигуру на части, из которых можно было бы сложить другую заданную фигуру, широко известны. Целый класс занимательных геометрических задач основан на такого рода конструкциях⁴.

Пифагорово разрезание⁵. Данное Евклидом («Начала», книга I, теорема 47) доказательство теоремы Пифагора громоздко и плохо запоминается. Гораздо проще и красивее доказательство, которое обычно приписывают индийскому математику Ариабхате, родившемуся в 466 г. н. э. Чтобы доказать равенство $a^2 + b^2 = c^2$ для прямоугольного треугольника ABC, он помещает четыре таких треугольника внутри квадрата со стороной $a + b$ (рис. 3.9). При одном расположении оставшаяся часть площади состоит из двух квадратов со сторонами a и b (рис. 3.9, а). При втором расположении, полученном параллельным переносом первых трех треугольников, оставшаяся часть площади состоит из одного квадрата со стороной c (рис. 3.9, б).

На языке «Оснований геометрии» Гильберта ([7], с. 132) можно сказать, что тем самым доказано, что

пара меньших квадратов и один больший «равновелики по дополнению»: их можно дополнить равными (но, разумеется, по-разному расположенными) частями (четырьмя треугольниками 1, 2, 3, 4) так, чтобы в результате получилась одна фигура (большой квадрат). Ве-

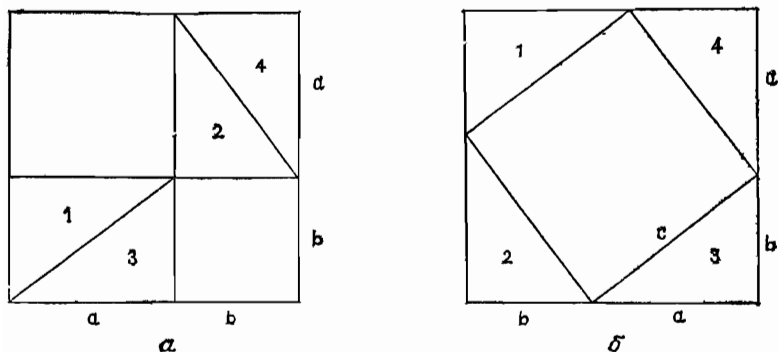


Рис. 3.9

роятно, лучше было бы показать, что рассматриваемые фигуры «равновелики по разложению», т. е. что они могут быть разложены на одинаковые, но по-разному рас-

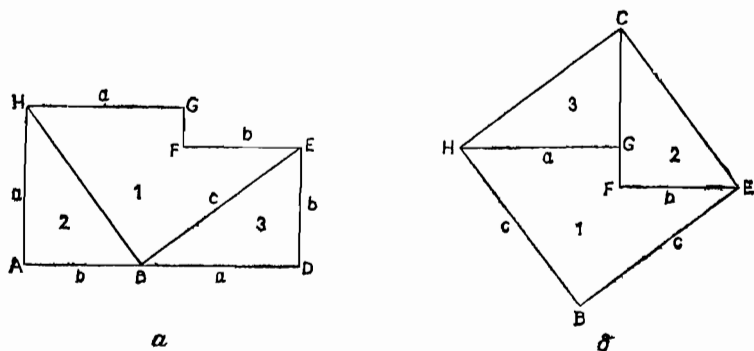


Рис. 3.10

положенные части. Этого уточнения добился Перигэл ([8]; [13], с. 32, также с. 125, 285 русск. пер.), который приложил квадраты AG и DF сторона к стороне, как на рис. 3.10, *a* (где $AH=HG=a$, $DE=EF=b$ и $a \geq b$). Разрезы BH и BE делят эту составную фигуру на три части, две из которых — треугольники ABH и BDE со сторонами a , b , c . Эти треугольники можно

сдвинуть в новые положения FEC и HGC , получив квадрат $BECH$ со стороной c (рис. 3.10, б).

Разрезание по Монтукле. Подобные доказательства нескольких аналогичных теорем известны давно, но в конце XVIII в. внимание к такому способу решения вновь было привлечено благодаря работам Монтуклы, который предложил (и решил) задачу деления прямоугольника на части, из которых можно сложить квадрат; он решил и обратную задачу. Позднее П. Басшоп и де Коатпон придумали другие решения этой задачи, содержащие соответственно разрезание на восемь и на семь частей. Первый описал также способ построения квадрата из правильного шестиугольника разрезанием последнего на пять частей и из правильного пятиугольника разрезанием его на семь частей [9].

Разрезания многоугольников. Более общая задача разрезания данного многоугольника с произвольным числом сторон и складывания из полученных частей другого

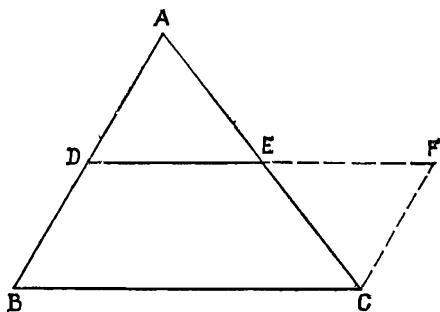


Рис. 3.11

многоугольника той же площади была поставлена Ф. Бойаи, а метод ее решения указан Гервином. Этот вопрос время от времени вновь привлекает к себе внимание⁶. Так, в 1854 г. Эзе получил решение для многоугольника и треугольника. Более общую задачу для двух многоугольников рассматривал Э. Гитель в 1895 г., Э. Хольст в 1896 [10], а позднее А. Минер [11].

Рассмотрим прежде всего разрезание треугольника, позволяющее сложить из полученных частей прямоугольник с данным основанием. Линия DE на рис. 3.11, параллельная основанию BC данного треугольника ABC и проходящая через середины боковых сторон, делит этот треугольник на две части, из которых можно сложить

параллелограмм $BCFD$. Далее проведем дугу окружности с центром в точке B и радиусом, равным требуемому основанию прямоугольника, произведем разрез CH по касательной к этой дуге и разрез BG по ее радиусу, т. е. перпендикуляр к CH . Точка G попадает либо

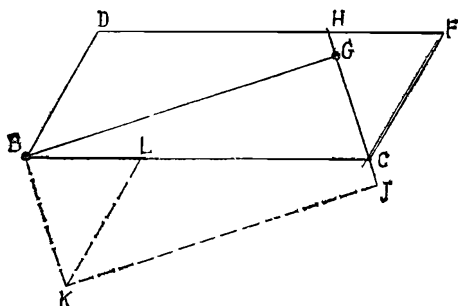


Рис. 3.12

внутри параллелограмма, как на рис. 3.12, либо вне его, как на рис. 3.13. В первом случае решение задачи очевидно (см. рис. 3.12, где $KL \parallel BD$). Во втором случае отложим на CH отрезок CJ , равный HG , и сделаем раз-

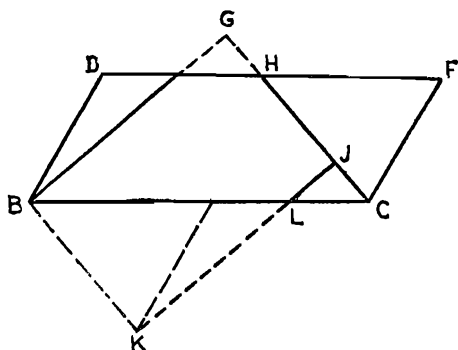


Рис. 3.13

рез $JL \parallel BG$. Тогда из полученных кусков можно сложить требуемый прямоугольник $BGJK$. Если заданное основание BG слишком длинно или слишком коротко и описанная процедура непосредственно неприменима, то нужно сначала изменить пропорции параллелограмма $BCFD$, разрезав его на три части и переложив их так, как показано на рис. 3.14 (где $E'F = BC' \geq \frac{1}{2}BC$). Разумеется, если заданное основание равно стороне квад-

рата, равновеликого данному треугольнику, то треугольник превратится таким способом в квадрат.

Любой многоугольник можно разрезать на треугольники, проведя достаточное число диагоналей. Следовательно, любой многоугольник можно превратить в прямоугольник или квадрат, преобразуя все составляющие его треугольники в прямоугольники с одним и тем же основанием и прикладывая их друг к другу.

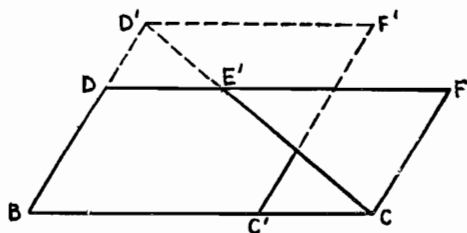


Рис. 3.14

Прямоугольник всегда может служить промежуточной фигурой при преобразовании одного многоугольника в другой. Если заданы разрезания, переводящие начальный и конечный многоугольники в один и тот же прямоугольник, то, применяя первое преобразование, мы переходим от первого многоугольника к прямоугольнику, а затем при помощи преобразования, обратного второму, переходим от прямоугольника ко второму многоугольнику.

Минимальные разрезания. Упомянутые выше авторы задавались целью найти какое-нибудь решение задачи о разрезании и, как правило, не заботились о том, чтобы получить наименьшее возможное число частей. В 1905 г. Х. М. Тейлор рассмотрел [12] частные случаи разрезания на четыре части пары треугольников, треугольника и параллелограмма, а также варианты разрезания пары параллелограммов и сформулировал требование (или хотя бы — пожелание) о нахождении наименьшего необходимого для этого числа разрезов.

Головоломки с разрезаниями. Позднее Г. Э. Дьюдени придумал много остроумных и оригинальных задач на разрезание, в которых всегда оговорено число частей (см., например, [13]). Его имя вновь привлекло внимание к этому классу задач. В качестве примеров геометрических развлечений подобного рода я выбрал следующие головоломки Дьюдени: 1) двумя прямыми разре-

зять греческий крест (т. е. крест, составленный из пяти равных квадратов) на четыре части одинаковой формы и размера, из которых можно сложить квадрат; 2) разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на четыре части, из которых можно сложить греческий крест; 3) разрезать правильный пятиугольник на шесть частей, из которых можно сложить квадрат; 4) разрезать равносторонний треугольник на четыре части, из которых можно составить квадрат. Читатель, который заинтересуется этой темой, несомненно, получит удовольствие, сравнив решение последней задачи, предложенное Дьюдени, с упомянутым выше решением Тейлора и решением Маколея, о котором речь пойдет ниже.

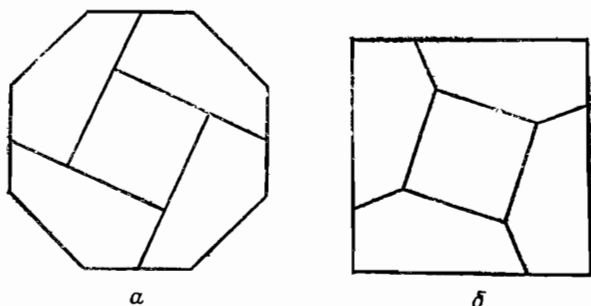


Рис. 3.15

Э. Г. Уилер и М. Гольдберг [14] разрезали правильный пятиугольник на шесть частей, составляющих равносторонний треугольник, а Дж. Треверс разрезал правильный восьмиугольник на пять частей, составляющих квадрат (рис. 3.15, а, б).

Разрезание на четыре части по Маколею. У. Х. Маколей рассматривал теорию разрезаний на четыре части пар ограниченных прямыми линиями равновеликих (т. е. равной площади) фигур [15]. Он исследовал случай пар треугольников, треугольника и параллелограмма, пар четырехугольников, пар пятиугольников, каждый с двумя равными и параллельными сторонами, пар некоторых родственных шестиугольников. Его результаты, имеющие проективный характер, выводятся из разрезаний шестиугольника. Это интересное обобщение предыдущих результатов.

Объемные разрезания. Можно ли произвольное многогранное тело разбить конечным числом плоских раз-

резом на части, составляющие любое заданное равновеликое (т. е. имеющее тот же объем) многогранное тело? Ответ на этот вопрос отрицателен. Как доказал М. Ден (см. [16]), не всякий тетраэдр можно при помощи разрезов превратить в призму. Этот результат уничтожает всякую надежду на общий метод разрезания трехмерных фигур, аналогичный разрезанию многоугольников, хотя в частных случаях подобные разрезания вполне возможны⁶.

Удвоение куба. Рассмотрим вариант «Делосской задачи» (которая описывается в гл. XII): пусть задан отрезок длиной $2^{1/3}$ ($=\sqrt[3]{2}$); требуется плоскими разрезами разделить два куба с единичным ребром на части, из которых можно сложить один куб. Задача решается двукратным преобразованием квадрата в прямоугольник с заданным основанием. «Минимальному разрезанию» отвечает метод, показанный на рис. 3.14, а не тот, который изображен на рис. 3.12.

Сначала приложим два равных куба друг к другу так, чтобы получилась квадратная призма $2 \times 1 \times 1$. Затем на одной из прямоугольных граней (2×1) отметим разрезы, позволяющие преобразовать ее в прямоугольник с основанием $2^{1/3}$, которое равно ребру удвоенного куба. Плоскости, проходящие через эти разрезы перпендикулярно грани, разделят призму на три части.

Сложим из этих частей новую призму размером $2^{1/3} \times 2^{2/3} \times 1$. Далее на одной из граней $2^{2/3} \times 1$ отметим разрезы, нужные для преобразования ее в квадрат со стороной $2^{1/3}$. Плоскости, проходящие через эти разрезы перпендикулярно грани, разделят новую призму на три части, составляющие искомый куб. Исходная призма $2 \times 1 \times 1$ при этом окажется разбитой на семь частей неправильной формы. Если эти части перепутаны, то собрать из них куб или призму — тоже нелегкая головоломка.

Эта задача была предложена У. Ф. Чини-младшим, а решена таким способом Э. Г. Уилером [17].

ДЕЛЕНИЕ КРУГА (ЦИКЛОТОМИЯ)

В возрасте 19 лет Гаусс доказал [18], что решение уравнения деления круга (циклотомического уравнения) $x^p = 1$, где p — простое число, в том случае, когда p есть одно из чисел Ферма F_m (см. с. 78), можно свести к решению последовательности квадратных уравнений.

Позднее П. Л. Ванцель [19] усилил это утверждение, заменив слово «когда» на выражение «тогда и только тогда, когда». Поскольку корни циклотомического уравнения имеют вид

$$\cos(2r\pi/p) + i \sin(2r\pi/p) \quad (r=0, 1, \dots, p-1),$$

отсюда следует, что правильный n -угольник, где n нечетно, тогда и только тогда допускает евклидово построение (т. е. построение при помощи циркуля и линейки)⁷, когда n — простое число Ферма F_m или произведение нескольких различных простых чисел Ферма. (Разумеется, нам достаточно рассматривать нечетные n , так как $(2^k n)$ -угольник получится из n -угольника после k -кратного деления пополам его центральных углов.)

Если считать, что все числа Ферма выше F_4 составные, то отсюда следует [20], что n должно быть делителем числа $3 \times 5 \times 17 \times 257 \times 65\,537 = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$. Если какой-нибудь многоугольник с большим числом сторон допускает построение циркулем и линейкой, то это число должно включать не меньше 39 457 цифр, так как первое число Ферма, о котором неизвестно, составное оно или простое, — это $F_{17}(= 2^{131\,072} + 1)$.

Построения правильного треугольника и пятиугольника общеизвестны. Из них сразу получается построение 15-угольника, так как $\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{15}\pi$; нужно только вписать треугольник и пятиугольник в одну и ту же окружность. Следующее построение 17-угольника выполнил Х. У. Ричмонд, который для сравнения дал также аналогичное построение пятиугольника.

Итак, задача состоит в том, чтобы вписать в данную окружность правильный 17-угольник с одной заданной вершиной P_0 (рис. 3.16, а). Пусть OB — радиус, перпендикулярный проходящему через P_0 диаметру, а I — такая точка на OB , что $OI = \frac{1}{4}OB$. Проведем IP_0 и отметим на OP_0 такие точки E и F , что $\angle OIE = \frac{1}{4}\angle OIP_0$, а $\angle FIE = \pi/4$. На FP_0 как на диаметре опишем окружность и обозначим через K точку ее пересечения с OB . Пусть окружность с центром E и радиусом EK пересекает OP_0 в точках N_3 (между O и P_0) и N_5 ; пусть далее $N_3P_3 \parallel N_5P_5 \parallel OB$. Тогда дуги P_0P_3 , P_0P_5 соответственно равны $\frac{3}{17}$ и $\frac{5}{17}$ длины окружности.

Доказательство [21] состоит в повторном применении тригонометрического принципа, согласно которому

корни уравнения $x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2C = 1$ равны $\operatorname{tg} C$ и $-\operatorname{ctg} C$.

В случае пятиугольника * (рис. 3.16, б) построим B так же, как выше, найдем середину J радиуса OB и отметим на OP_0 такую точку E , что JE — биссектриса угла OJP_0 ; далее, пусть $EP_1 \parallel OB$, где P_1 — точка рассматриваемой окружности. Тогда дуга P_0P_1 составляет $1/5$ длины окружности.

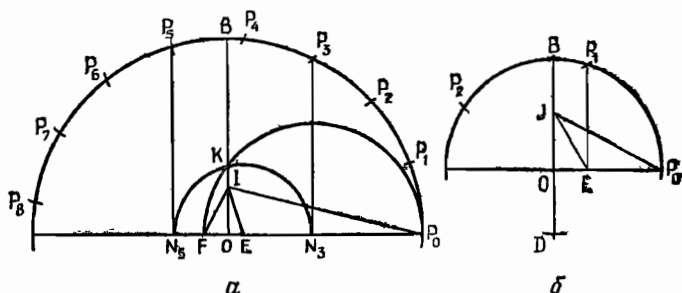


Рис. 3.16

Из сказанного также сразу получается построение правильных многоугольников с 51, 85 и 255 сторонами, а также с количеством сторон, равным любому из этих чисел, умноженному на произвольную степень двойки.

ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО ЦИРКУЛЯ

Общеизвестно, что Евклид в своих «Началах» ограничился построениями, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки (без делений). Однако позднее выяснилось, что линейка здесь не нужна [22]. Маскерони⁸ установил связную последовательность геометрических теорем, пользуясь построениями, осуществимыми одним только циркулем **. Разумеется, у него получилась логическая цепь теорем, отличная от известной нам по Евклиду.

* Чуть более простое построение правильного пятиугольника предложено Дьюдени (см. [13], с. 38). Проведем дугу радиусом JP_0 с центром J , пересекающую продолжение BO в точке D . Тогда дуга радиусом P_0D с центром P_0 пересечет исходную окружность в P_1 .

** Его работа была опубликована в Павии в 1797 г. Однако недавно стало известно, что его значительно опередил Г. Мор, работа которого Euclides Danicus («Датский Евклид») вышла в Амстердаме в 1672 г. (и была переиздана в Копенгагене в 1928 г.).

В качестве примера я выбрал такую задачу: *даны точки A и B ; найти середину отрезка AB* . Маскерони приводит целых пять вариантов этого важного построения (предложение 66). Опишем два из них. Они опираются на ранее установленный Маскерони результат о возможности построения полуокружности, если заданы ее центр и один из концов. В обоих случаях доказательство проводится непосредственно. Известны и другие решения этой задачи, причем в некоторых из них построение полуокружности не используется.

Итак, рассмотрим одно из построений Маскерони. С центром в точке B опишем полуокружность радиусом BA с концами A и C . С центрами в точках A и C проведем окружности радиусами соответственно AB и CA , пересекающиеся в точках P и Q . С центрами в P и Q опишем окружности радиусом AB . Они пересекутся в точке, расположенной точно посередине между A и B .

Теперь обратимся к другому решению Маскерони, которое в определенных случаях он считал более удобным. С центром в B опишем полуокружность радиусом BA с концами A и C . С центрами A и C радиусом AB проведем окружности, которые пересекут нашу окружность в точках H и K . С центрами A и C опишем окружности радиусом AC , которые пересекут предыдущие окружности (над AC , если считать прямую AB горизонтальной) соответственно в точках Q и P . С центрами в точках P и C опишем окружности радиусами соответственно PA и PQ . Они пересекутся в точке, лежащей посередине между A и B .

Читатель может придумать сколько угодно геометрических развлечений подобного рода: достаточно взять наугад одно из построений Евклида и посмотреть, как выполнить его с помощью одних лишь окружностей. Предлагаю для примера провести построение на заданном отрезке треугольника, подобного данному (предложение 125 «Начал»), и построение правильного пятиугольника заданного размера (предложение 137). Как бы вы ни решили эти задачи, интересно будет сравнить ваш метод построения с методом Маскерони.

ЗАДАЧА С ПЯТЬЮ ДИСКАМИ

Посетителям английских ярмарок знакома задача, в которой требуется накрыть красное поле круглой формы пятью одинаковыми тонкими дисками, выкладывая их по

одному за раз. Чем меньше диски, тем труднее это сделать. В связи с этим возникает интересная геометрическая проблема: каков минимальный размер дисков, при котором задача разрешима⁹.

Задача разрешима, если радиус каждого тонкого диска чуть больше $\frac{3}{5}$ радиуса красного круга. Разумеется, посетителю ярмарки, пожелавшему попробовать свои силы в решении этой задачи, не разрешается сдвигать диски после того, как он их положил; поэтому случаи, когда эмпирическим путем кому-то все же удастся расположить их правильно, чрезвычайно редки.

Здесь применимо такое правило. Если O — центр красного круга, a — его радиус и AOB — некоторый диаметр, отметим на OA точку P так, чтобы OP равнялось примерно $a/35$. Теперь положим первый диск так, чтобы его центр лежал на OB и точка P попала на его край. Допустим, что граница диска пересекла границу красного круга в точках C и C' по разные стороны от AB . Следующие два диска положим так, чтобы AP было хордой каждого из них. Пусть их края пересекают границу красного круга соответственно в точках D и D' (C и D находятся по одну сторону от AB). Положив следующие два диска так, чтобы CD и $C'D'$ были их хордами, мы решим задачу. Можно было бы подумать, что минимальными будут пять дисков, расположенные в вершинах некоторого правильного пятиугольника внутри красного круга, но это естественное предположение — увы! — неверно.

Ради простоты на практике диски желательно делать чуть большими, чем требует теория, и считать, что P совпадает с O .

Математический разбор этой задачи слишком длинен и насыщен техническими деталями, чтобы помещать его здесь. Видимо, большинство читателей вполне удовлетворится простым описанием результатов, подобным данному выше. Для интересующихся приведем более точные приближения [23]. Радиус красного круга примем за единицу; тогда критический радиус дисков, ниже которого задача неразрешима, равен 0,609383. Далее, $OP = 0,028547$; значит, O лежит очень близко к границе диска, который кладется первым, но не совсем на этой границе. Если три диска уложены так, что их границы проходят через O , то их радиус должен превышать 0,6099579, но эта величина практически неотличима от минимального радиуса. Если диски уложены так, что их

центры находятся в вершинах правильного пятиугольника внутри красного круга, а границы проходят через O , то их радиус должен превышать 0,6180340. Отсюда видно, что, если только диски не вырезаны с исключительной точностью, задача решается и при такой укладке, когда края всех дисков проходят через O . Возможность пользоваться столь неточным правилом следует считать серьезным недостатком этой задачи, если рассматривать ее как основу для головоломки.

Думаю, что на ярмарках используют достаточно большие диски, что позволяет применять неточное правило; однако и там надежнее действовать правильно. В моей собственной модели я незаметно нанес точку достаточно близко к центру, но вместе с тем удаленную от него настолько, чтобы тот из играющих, у кого края всех дисков пройдут через эту точку, потерпел неудачу. Организаторы развлечений, хотя и не знают точного правила или пренебрегают им, кажется, находят игру выгодной — разумеется, с их точки зрения, это надежный критерий ее достоинств.

ПРОБЛЕМА ЛЕБЕГА О ФИГУРЕ НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ

Известна одна нерешенная задача о покрытии плоской области. Для любой геометрической фигуры ее диаметр определяется как наибольшая длина отрезков, соединяющих две точки фигуры. Задача Лебега (см. [24]) заключается в том, чтобы найти *плоскую область наименьшей площади, покрывающую (в некотором положении) всякую заданную плоскую фигуру единичного диаметра*¹⁰.

Круг единичного диаметра слишком мал: он покрывает квадрат с единичной диагональю, но не покрывает равносторонний треугольник с единичной стороной. Вместе с тем описанный около этого круга правильный шестиугольник неоправданно велик. Следовательно, площадь искомой области лежит между $\pi/4$ и $\sqrt{3}/2$. Точное значение площади и форма фигуры до сих пор неизвестны.

ПРОБЛЕМА КАКЕЯ О ФИГУРЕ НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ

Проблеме Лебега в какой-то степени родственна задача нахождения фигуры наименьшей возможной площади, заметаемой прямолинейным отрезком длиной еди-

ница, который непрерывным движением в плоскости меняет свое направление на противоположное. Хотя полное решение проблемы Какея было опубликовано всего через десять лет после ее постановки, она приобрела масштабы знаменитой нерешенной проблемы. В качестве возможного решения Осгуд и Кубота предложили *гипоциклоиду Штейнера*, или *дельтоид* (гипоциклоиду с тремя острями), площадь которого равна половине площади круга единичного диаметра (см. рис. 3.17, где $AB = 1$)¹¹.

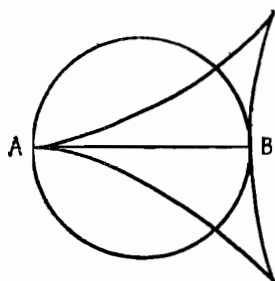


Рис. 3.17

Однако, как доказал Безикович [25], удовлетворяющей условию области наименьшей площади не существует — площадь может быть сделана сколь угодно малой! В этот поразительный факт трудно поверить, поэтому я дам здесь краткий набросок изящного доказательства Безиковича¹².

Достаточно описать фигуру, в которой единичный отрезок можно повернуть на прямой угол, так как, соединив две такие фигуры, мы получим решение задачи Какея. Начнем с треугольника ABC , в котором $AC = BC$, C — прямой угол и высота, опущенная из C на AB , равна 1. Единичный отрезок, занимающий исходное положение CA_1 , где $CA_1 = 1$, $A_1 \in CA$, с очевидностью можно повернуть внутри этого треугольника до положения CB_1 , где $CB_1 = 1$, $B_1 \in CB$. Идея Безиковича состояла в том, чтобы выполнять этот поворот «малыми порциями». Сначала разрежем треугольник ABC на очень большое число тонких треугольников, разбив AB на много равных частей и соединив C со всеми точками деления. Затем сдвинем все куски на разное расстояние вдоль AB , не изменяя при этом ни их размеров, ни формы, ни ориентации, так чтобы они как можно сильнее

перекрывались. Безикович доказал следующий удивительный факт: взяв достаточно большое число частей и сдвинув каждую часть на нужное расстояние, можно получить в результате объединения всех (перекрывающихся!) частей фигуру сколь угодно малой площади. Хотя единичный отрезок может совершить внутри этой фигуры много мелких изменений направления, непрерывный поворот на прямой угол исключается из-за невозможности для отрезка перейти от одного малого треугольника к следующему. Этот дефект устраняется добавлением к фигуре так называемых «связей», а именно путей, соединяющих последовательные треугольники. Чтобы не увеличивалась добавляемая ими площадь, эти пути делаются «окольными»: каждый из них состоит из двух длинных почти параллельных отрезков, выходящих из треугольников, которые нужно соединить, и в том месте, где они пересекаются, добавляется еще один очень тонкий треугольник высотой 1. Площадь длинной области, заключенной между двумя линиями связи, естественно, не учитывается: ведь мы двигаем отрезок по одной прямой (но площадь прямой равна нулю!), затем поворачиваем его на малый угол (здесь и приходится использовать включаемый в нашу фигуру *очень малый* сектор единичного радиуса или даже тонкий треугольник единичной высоты с крошечной площадью); потом отрезок снова скользит вдоль прямой (заметая нулевую площадь!), переходя тем самым в следующую часть исходного $\triangle ABC$. Таким образом, в законченном виде фигура напоминает кружевную паутину со множеством далеко расходящихся от нее узких петель.

Математикам не слишком понравилась эта продырявленная фигура Безиковича с ее стремлением растягиваться на большие расстояния, и они несколько лет думали, как этого избежать. Задача была поставлена по-другому: какова наименьшая площадь *односвязного* [и (или) ограниченного] множества, удовлетворяющего условию Какея? (Множество называется односвязным, если в нем нет дыр.) Между прочим, аналогичная задача для *выпуклых* множеств была решена Ю. Палем [26] еще до того, как Безикович решил общую задачу, — ответ здесь дает равносторонний треугольник площадью $1/\sqrt{3}$. Только в 1965 г. Блум и Шёнберг [27] независимо друг от друга построили односвязные фигуры, удовлетворяющие условию Какея и меньшие по площади, чем штейнеровская гипоциклоида. В построенных

ими фигурах площади стремятся к $(5 - 2\sqrt{2})\pi/24$ — что составляет примерно $\pi/11$. Затем Каннингем обнаружил, что введенные условия, а именно то, что фигура односвязна и содержится в круге радиусом 1, не вносят изменений в ответ, полученный Безиковичем: по-прежнему площадь искомой фигуры может быть сделана сколь угодно малой.

Тем не менее есть одна задача, которая до сих пор остается нерешенной. Фигура называется *звездной*, если в ней есть такая точка (*центр* звездной фигуры), которую можно соединить с любой другой точкой этой фигуры содержащимся в фигуре отрезком (пример звездной фигуры — пятиугольная звезда, или пентаграмма).

Сколь малую площадь может иметь звездная фигура, удовлетворяющая условию Какея? Примеры Блума и Шёнберга представляют собой звездные множества, откуда следует, что площади таких множеств могут сколько угодно приближаться к указанному выше числу (около $\pi/11$). (Образно говоря о типичной из полученных им фигур, Шёнберг отмечает, что она напоминает множество, которое описывает конец маятника Фуко после десяти тысяч колебаний.) С другой стороны, примеры Каннингема не являются звездными фигурами, и ему удалось доказать, что площадь звездного множества, удовлетворяющего условию Какея, не меньше $\pi/108$. Таким образом, нижняя граница площадей звездных множеств, удовлетворяющих условию Какея, имеет вполне определенную величину (заключенную между $\pi/108$ и $\pi/11$) — но ее еще предстоит найти.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К с. 96. Искомое вращение пластины можно выполнить так. Допустим, что результат должен быть эквивалентен повороту на какой-либо прямой угол вокруг некоторой точки O . Нарисуем на пластине квадрат $OABC$. Повернем пластину сначала на два прямых угла вокруг диагонали OB , а затем на два прямых угла вокруг (прежней) стороны OA , и цель будет достигнута.

1. Carroll L. Picture Book. — London, 1899, pp. 264, 266.
2. *L'Illustration* (Paris), January. 12, 1895.
3. Dudeney H. E. The Canterbury Puzzles. — London, 1919, pp. 51—54. [Дьюдени Г. Э. Кентербернские головоломки. Пер. с англ. — М.: Мир, 1979, с. 48—51.]
4. *Mathesis*, October 1893, ser. 2, vol. III, p. 224.
5. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (Leipzig), 1868, Bd. XIII, S. 162.

6. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Пер. с нем. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1935 (3-е изд.), с. 84—89.
7. Гильберт Д. Основания геометрии. Пер. с нем. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948.
8. Perigal H. *Messenger of Mathematics*, 1873, vol. II, N. S., pp. 103—106.
9. См. [2] в литературе к гл. I, 1840 ed., pp. 127—129; Busschop P. *Nouvelle Correspondance Mathématique* (Bruxelles), 1875, vol. II, p. 83; de Coatpont, там же, 1876, vol. III, p. 116.
10. Gervien P. *Crelle's Journal*, 1833, p. 228; Euzet M. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, vol. XIII, pp. 114—115; Guitel E. *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, 1895, pp. 264—267; Holst E. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896, vol. III, pp. 91—92.
11. *Mathesis*, 1931, pp. 150—152. (Изложение Майкла Гольдберга.)
12. *Messenger of Mathematics*, vol. XXXV, pp. 81—101.
13. Dudeney H. E. *Amusements in Mathematics*. — London, 1917, p. 27 et seq. (См. также Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975, с. 113 и далее.)
14. *American Mathematical Monthly*, 1952, vol. LIX, pp. 106—107.
15. *Mathematical Gazette*, 1914, vol. VII, p. 381; vol. VIII, 1915, pp. 72, 109; *Messenger of Mathematics*, vol. XLVIII, 1919, p. 159; vol. XLIX, 1919, p. 111.
16. Lenhard H. C. *Elemente der Mathematik*, 1962, Bd. XVII, S. 108—109.
17. *American Mathematical Monthly*, 1935, vol. XLII, p. 509.
18. *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801. [Гайсс К. Ф. Труды по теории чисел. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.]
19. *Liouville's Journal de Mathématiques*, 1837, vol. II, pp. 366—372.
20. См. [19] в литературе к гл. II, p. 99.
21. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1893, vol. XXVI, p. 206.
22. Goldberg M. *School Science and Mathematics*, 1925, vol. XXV, pp. 961—965.
23. Neville E. H. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1915, second ser., vol. XIV, pp. 308—326.
24. Pál J. *Danske videnskabernes selskab*. — Copenhagen. *Matematisk-fysiske meddelelser*, 1920, vol. III, № 2, pp. 1—35; Kakeya S. *Tôhoku Science Reports*, 1917, vol. VI, pp. 71—78; Coxeter H. *Eureka*, 1958, vol. XXI, p. 13.
25. Besicovitch A. S. *Mathematische Zeitschrift*, 1928, Bd. XXVII, S. 312.
26. Pál J. *Mathematische Annalen*, 1921, Bd. LXXXIII, S. 311—319.
27. Cunningham F., Jr., Schoenberg I. J. *Canadian Journal of Mathematics*, 1965, vol. XVII, pp. 946—956.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ
(продолжение)

Оставив формальные теоремы геометрии, перейдем теперь к описанию нескольких игр и головоломок, основанных на взаимном расположении тех или иных предметов; но обсуждение некоторых игр, где существенно привлечение арифметических или алгебраических соображений, я отложу до гл. X. Некоторые авторы относят шашки, солитер, шахматы и тому подобные игры к категории геометрических, а домино, триктрак и игры, связанные с бросанием костей, — к арифметическим играм. Однако подобное разделение в применении к конкретным играм требует множества достаточно искусственных оговорок — иначе оно выглядит необоснованным.

Развлечения, о которых пойдет речь, весьма просты, и математик, быть может, захочет пропустить эту главу. В ряде случаев трудно сказать, как правильнее классифицировать эти развлечения — относить их к арифметическим или геометрическим; однако эта сторона вопроса здесь несущественна.

«СТАТИЧНЫЕ» ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Из многочисленных «статичных» игр геометрического характера, т. е. таких, которые связаны с расположением предметов и не предполагают изменения этого положения в ходе игры, я упомяну лишь несколько.

Три-в-ряд. Сначала поговорим об играх типа «три-в-ряд»; известными примерами таких игр могут служить «крестики — нолики» и игра го. В этих играх обычно используется квадратная доска, разделенная на n^2 клеток. Как правило, один игрок ставит белые фишки или монеты либо рисует крестик на тех клетках, которые он занимает; его противник пользуется черными фишками или монетами либо рисует нолики на своих клетках. Выигрывает тот, кто первым займет подряд три (или любое

другое условленное число) соседние клетки по прямой. Нетрудно провести полный анализ такой игры для досок на 9 и 16 клеток — но это занятие весьма кропотливое и не особенно интересное. Большинство подобных игр известно с древних времен [1], только поэтому я и говорю о них здесь.

Три-в-ряд. Обобщение. Существует, однако, одно изящное и трудное обобщение предыдущей задачи, которое, насколько мне известно, не встречалось до этого в книгах по занимательной математике. В обобщенной задаче требуется разместить на плоскости n фишек таким образом, чтобы образовать как можно больше рядов из трех фишек, расположенных на одной прямой [2].

Легко расположить фишки так, чтобы число рядов было равно $[(n-1)^2/8]$ (т. е. целой части числа $(n-1)^2/8$). Для этого можно провести следующее построение. Пусть P — любая точка некоторой кубики L (кривой 3-го порядка). Пусть касательная к L в P вновь пересекает L в точке Q , а касательная к L в Q пересекает L в точке A . Пусть, далее, PA пересекает L в B , QB — в C , PC — в D , QD — в E и т. д. Располагать фишки нужно в точках $P, Q, A, B, \dots$. Таким образом 9 фишек можно разместить в 8 рядов, 10 фишек — в 10 рядов, 15 фишек — в 24 ряда, 81 фишку — в 800 рядов и т. д.

Как обнаружил Сильвестр, при подходящем выборе начальной точки P число рядов можно увеличить до $[(n-1)(n-2)/6]$. Так, 9 фишек можно расположить в 9 рядов, 10 фишек — в 12, 15 фишек — в 30, 81 фишку — в 1053 ряда и т. д.

Однако это не предельные числа — их можно еще увеличить. Например, Сильвестр установил, что 9 фишек можно расположить в 10 рядов по 3 фишки в каждом. Я не знаю, как укладывал фишки он сам, но это можно сделать и так. Возьмем два прямоугольника (или параллелограмма), 2365 и 4367, с общей стороной 36 и пометим их центры цифрами 1 и 8. Тогда прямые 18, 27, 36, 45 все проходят через одну точку, которую мы обозначим 9, а искомые 10 рядов по три фишки определятся всеми наборами трех различных номеров, a, b, c , удовлетворяющими сравнению $a + b + c \equiv 0 \pmod{9}$.

Сильвестр поставил вопрос, можно ли расположить n фишек (не лежащих на одной прямой) так, чтобы каждая пара оказалась на одной прямой хотя бы еще с одной фишкой. Но ему так и не суждено было узнать, что ответ на поставленный им вопрос гласит: «Нет» [3] 4

Обобщение: p -в-ряд. Предыдущая задача сразу подсказывает обобщение: расположить n фишек так, чтобы образовалось как можно больше рядов по p (и не более p) фишек в каждом. Такие задачи иногда удается решить при помощи «отправки в бесконечность» точек пересечения некоторых прямых, вслед за тем проектируя (если понадобится) полученную конфигурацию так, чтобы точки вернулись в конечную область плоскости. Одно решение подобного типа рассмотрено выше.

Приведем примеры таких задач: расположить 10 фишек в 5 рядов по 4 фишки в каждом; расположить 16 фишек в 15 рядов по 4 в каждом; расположить 18 фишек в 9 рядов по 5 фишек в каждом; наконец, расположить 19 фишек в 10 рядов по 5 фишек в каждом. Эти задачи я оставляю читателям (см. с. 139).

Замощения. Другая разновидность развлечений статического характера — построение геометрических узоров или мозаик замощением плоской области плитками заданной геометрической формы (или разбиением плоскости на плитки даного вида) ².

Если плитками (или ячейками) служат правильные многоугольники и две примыкающие друг к другу плитки имеют либо общую (целую) сторону, либо только вершину, то возможные формы плиток легко установить. Например, если мы хотим ввести ограничение, что все плитки — одинаковые правильные p -угольники, то для замощения пригодны только равносторонние треугольники, квадраты или правильные шестиугольники. В самом деле, допустим, что для заполнения области вокруг вершины понадобилось q многоугольников. Внутренний угол правильного p -угольника равен $(p - 2)\pi/p$. Значит, $q(p - 2)\pi/p = 2\pi$, откуда

$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

Так как и p , и q больше 2, достаточно рассмотреть все возможные способы разложения числа 4 на два целых положительных множителя. Обозначим через p^q правильное разбиение такого типа (составленное из p -угольников по q в каждой вершине). Тогда из предыдущего заключаем, что возможны только случаи * 6^3 , 4^4 , 3^6 .

* Аналогичная задача для многоугольников на сфере эквивалентна построению правильных многогранников (см. с. 144). Применение случая 6^3 к системе голосования, известной под названием «пропорциональное представительство», см. в статье Поля [4].

Если же допустить использование неодинаковых правильных плиток (треугольников, квадратов и т. д.), то можно построить многочисленные геометрические мозаики, покрывающие плоскую область. Случай, когда в каждой вершине смыкается одинаковое число многоугольников одних и тех же видов и в одном и том же (или в обратном) циклическом порядке, поддается аналогичному исследованию [5], которое показывает, что на этот раз имеется 8 вариантов, а именно:

$$3 \cdot 12^2; \quad 4 \cdot 6 \cdot 12; \quad 4 \cdot 8^2; \quad (3 \cdot 6)^2; \quad 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4; \\ 3^2 \cdot 4^2; \quad 3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4, \quad 3^4 \cdot 6.$$

Разбиение $3^4 \cdot 6$ (с четырьмя треугольниками и шестиугольником в каждой вершине) имеет интересную

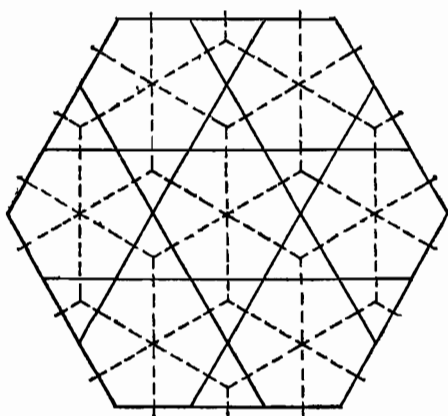


Рис. 4.1

особенность: оно существует в двух энантиоморфных формах, т. е. не совмещается со своим зеркальным отражением, если только не опрокидывается вся плоскость.

Если каждое ребро какого-нибудь такого разбиения заменить перпендикулярным к нему отрезком, соединяющим центры двух смежных ячеек, получится *двойственное* (или *взаимное*) разбиение на одинаковые (хотя и не обязательно правильные) ячейки. В этом смысле 6^3 двойственно 3^6 (и наоборот), а 4^4 самодвойственно (или, вернее, двойственно конгруэнтному ему разбиению 4^4). Разбиение $(3 \cdot 6)^2$ и двойственное ему изображены на рис. 4.1.

Аналлагматические замощения. Новое развитие придает этой теме применение цвета. Примером замощения квадратными плитками двух цветов является обычная шахматная доска: на ней белые и черные клетки чередуются. Другой вариант замощения квадратами двух цветов придумал Сильвестр [6] *; он назвал свои замощения *аналлагматическими*. Если поставить рядом любые две вертикальные или две горизонтальные полосы клеток обычной шахматной доски, то пары соседних клеток будут либо все одного цвета, либо все разных цветов. При применении той же операции в случае аналлагматического замощения ровно половина пар соседних клеток будет окрашена одинаково, а другая половина — по-разному.

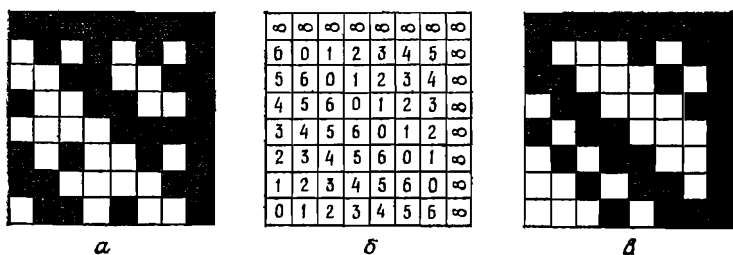


Рис. 4.2

Если m равно нечетному числу, то аналлагматическое замощение доски с m^2 клетками невозможно по самому его определению — но оно невозможно и в том случае, если m есть удвоенное нечетное число. Имеется гипотеза, согласно которой для всех m , кратных 4, такие замощения существуют — однако она пока не доказана. Первый вызывающий сомнения случай — когда $m = 188$.

Если известны решения для $m = a$ и $m = b$, то легко построить решение для $m = ab$: нужно только заменить каждую черную клетку a -замощения целым b -замощением, а каждую белую клетку a -замощения — b -замощением, противоположным использованному для черных клеток. Повторное применение этого принципа позволяет получить решение для любого m , равного целой степени двойки. Случай $m = 8$ показан на рис. 4.2, *a*.

* Изложенные здесь результаты тесно связаны с теоремами теории уравнений.

Если p — простое число вида $4k - 1$, а n — нечетное число, то в случае $m = p^n + 1$ аналогичное замощение можно построить при помощи таблицы сложения для $GF(p^n)$ (с. 82—84). Для этого надо поступить следующим образом. В нижнем ряду и левой колонке таблицы выпишем $m - 1$ элементов конечного поля $GF(p^n)$ и дополнительный «элемент» ∞ , который по определению не меняется при сложении с любым другим элементом и с самим собой. Остальная часть таблицы заполняется суммами соответствующих пар элементов. (На рис. 4.2, б показан случай $m = 8$ — здесь $p = 7$ и $n = 1$.) Каждая клетка закрашивается в белый или черный цвет в зависимости от того, является квадратом стоящее в ней число или нет; при этом вводится (несколько искусственное*) условие, что ∞ не является квадратом никакого числа. (Так, при $m = 8$ клетки с элементами 0, 1, 2, 4 — белые, а с элементами 3, 5, 6, ∞ — черные; см. рис. 4.2, в.)

Рис. 4.3 иллюстрирует случай $m = 28$ (здесь $p = n = 3$); элементы расположены в «естественном» порядке: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, ..., 221, 222, ∞ (относительно этих обозначений см. с. 83—84). Квадратами являются числа 0, 1, 20, 21, 22, 100, 102, 110, 111, 120, 121, 202, 211, 221. Проще всего вычислить их (кроме 0) как взятые через один члены последовательности степеней 10 (а именно: 1, 10, 100, 12, 120, ..., 201).

Лежащая в основе этих утверждений теория создана Г. Давенпортом и Р. Пэли [7]**. Последнему принадлежит также более сложное правило, охватывающее случай, когда $m = 2(p^n + 1)$, где p^n — число вида $4k + 1$. Сочетая эти методы, Пэли показал, как построить аналогичное замощение из m^2 клеток, когда m делится на 4 и имеет вид $2^k(p^n + 1)$, где p — нечетное простое число. (В 1961 г. случай $m = 92$ был проанализирован другим способом при помощи ЭВМ [9].)

Во всех рассмотренных замощениях есть одна целиком черная строка и один целиком черный столбец, а значит, во всех других строках и столбцах половина кле-

* Естественно было бы ожидать, что ∞ , подобно элементу 0, является своим собственным квадратом. Я избегаю здесь термина «квадратичные вычеты», потому что 0 — это, бесспорно, квадрат, хотя его и не включают в множество квадратичных вычетов.

** На самом деле Пэли не складывал, а вычитал, но соответствующие изменения тривиальны. Интересное применение этой теории (к m -мерной геометрии) принадлежит Баррау [8].

ток белая и половина — черная. Когда m — степень 4, можно построить аналлатматическое замощение, которое является «изохроматическим» в том смысле, что половина его строк (и столбцов) содержит на $\sqrt{m}$ больше черных клеток, чем белых, а вторая половина — на $\sqrt{m}$ больше белых клеток, чем черных. В 10-м издании настоящей книги такое замощение показано для $m = 16$.

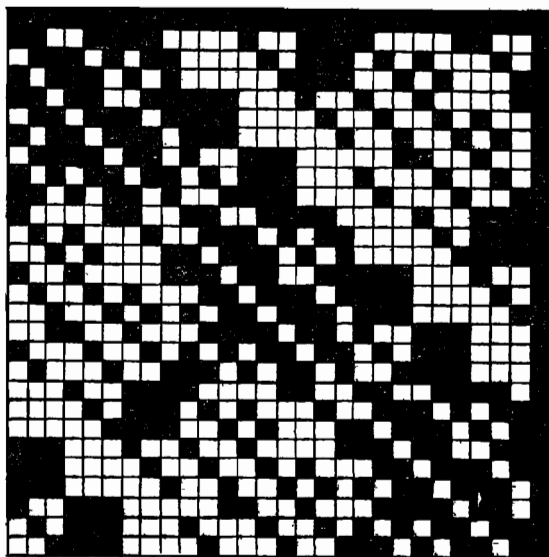


Рис. 4.3. Аналлатматическое замощение, $m = 28$

Полимино. В 1953 г. С. В. Голомб [10] придумал новую разновидность задачи замощения, с которой широкий круг читателей познакомился в 1957 г. после выхода майского номера журнала *Scientific American* [11]. Полимино — это «супердомино», составленное из связанных общей стороной единичных квадратов. Виды полимино обычно различают по количеству составляющих их квадратов. Так, *мономино* — это один единичный квадрат, *домино* — это прямоугольник из двух единичных квадратов, *тримино* — фигура, образованная тремя смежными квадратами. Далее идут *тетрамино*, *пентамино*, *гексамино*, *гептамино*, *октамино*, *наномино*, *декамино* и т. д., составленные соответственно из четырех, пяти, шести, семи, восьми, девяти, десяти и т. д. единичных

квадратов. Два *n-мино* считаются различными, если их нельзя совместить движением: параллельным переносом, поворотом или осевой симметрией.

При этом ясно, что существует единственное мономино или (известное всем) домино, но два разных тримино.

Особенно интересны пентамино*. Таких фигур в точности 12, и каждая из них напоминает (более или менее) букву латинского алфавита:

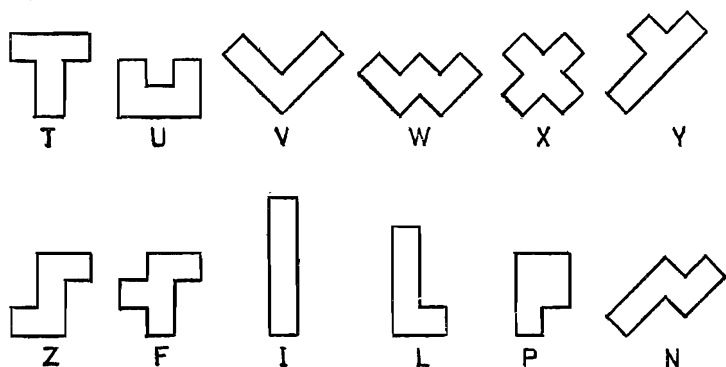


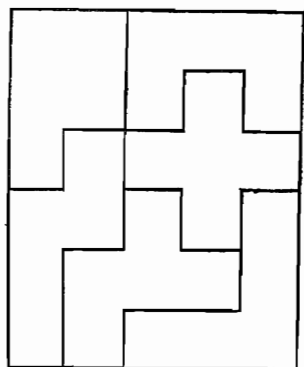
Рис. 4.4

Среди комбинаторных задач, связанных с пентамино³, назовем построение для каждого пентамино его увеличенной втрое модели из девяти других фигур, укладку копий какой-нибудь фигуры в прямоугольник (это возможно только для *L*-, *I*-, *P*- и *Y*-пентамино), а также размещение всех 12 фигур на шахматной доске, при котором произвольный заданный квадрат 2×2 остается пустым. Кроме того, все 12 пентамино можно уложить в прямоугольники размерами 3×20 , 4×15 , 5×12 или 6×10 . В случае 3×20 задача имеет единственное решение, которое достаточно ясно описывается последовательностью *V, Z, Y, W, T, F, N, L, I, P, X, U*. С другой стороны, в случае прямоугольника 6×10 существует 2339 принципиально различных решений (при помощи ЭВМ это сумел установить С. Б. Хэзелгроув из Манчестерского университета). На рис. 4.5 показан единствен-

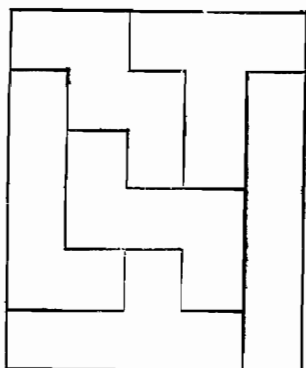
* Одна головоломка с пентамино появилась под номером 74 (Сломаинная шахматная доска) в книге Г. Э. Дьюдени «Кентерберийские головоломки» в 1919 г. (Русский перевод этой книги, переизданной в Нью-Йорке в 1958 г., см. [12]. — *Прим. перев.*)

ный способ, каким можно уложить 12 фигур пентамино в два прямоугольника размером 5×6 .

Набор пентамино можно использовать для нескольких интересных настольных игр. Одна из них описана Голомбом *. Два игрока по очереди выкладывают по одной фигуре пентамино на доску 8×8 ; игра продолжается до тех пор, пока одному игроку (проигравшему) некуда будет пойти. Игра очень увлекательна, так как требует умения и выдумки. Ее можно варьировать, заранее раздавая фигуры игрокам; это вносит некоторые изменения в стратегию.



а



б

Рис. 4.5

До сих пор остается нерешенной задача нахождения красивой формулы для $P(n)$ — числа различных n -мино. Значения $P(n)$ при малых n вычислены при помощи ЭВМ; они просуммированы в следующей таблице, которую независимо получили несколько авторов:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$P(n)$	1	1	2	5	12	35	108	369	1285	4655	17073	63600	238591	901971	3426576	13079255

Первым задачей подсчета n -мино занялся М. Иден [14], изучавший характер роста $P(n)$. Он показал, что для всех достаточно больших n справедлива оценка $(3,14)^n < P(n) < (6,75)^n$. Далее Д. Э. Кларнер [15] установил, что $(P(n))^{1/n}$ стремится к некоторому преде-

* См. [10], а также статью М. Гарднера [13]. Набор фигур для одной из таких игр, названной «Пан-Кай», изготовлен фирмой «Филипс публишерс» (1961).

лу θ , и нашел, что $3,72 < \theta$. Затем Кларнер и Райвест показали*, что $\theta < 4,65$. Итак, на 1972 г. наилучшая из полученных асимптотических (т. е. верных для всех достаточно больших n) оценок имеет вид $(3,72)^n < P(n) < (4,65)^n$. Ряд уже известных значений $P(n)$ подтверждает гипотезу о том, что с ростом n растет и отношение $P(n+1)/P(n)$. Если эта гипотеза верна, то отношение $P(n+1)/P(n)$ при каждом n дает нижнюю оценку для θ . В частности, при $n = 15$ мы получаем отсюда, что $3,817 < \theta$, — существенное (но, увы, пока не доказанное) улучшение оценки Кларнера.

Рассматривались также многомерные n -мино. Например, для $n \leq 7$ найдено число $P_3(n)$ трехмерных n -мино; соответствующие значения приведены в таблице⁴. (В этом случае «зеркально конгруэнтные», т. е. получающиеся одно из другого симметрией относительно плоскости, n -мино считаются различными; дело здесь обстоит так же, как с перчатками или ботинками: ведь мы различаем правый и левый экземпляры «одной и той же» вещи и, потеряв левую перчатку, не надеемся заменить ее еще одной правой.)

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$P_3(n)$	1	1	2	8	29	166	1023	...

Были предложены различные головоломки, использующие трехмерные полимино. Самой популярной из них стала (благодаря статье Мартина Гарднера [17] на эту тему) головоломка, придуманная Питом Хейном. В набор «Сома» входят все трехмерные n -мино, где $n \leq 4$, кроме «брусков». Их суммарный объем равен 27; одна из связанных с ними задач — сложить из них куб с ребром 3.

Статья Гарднера о кубиках «Сома» вдохновила многих читателей на изготовление наборов трехмерных n -мино. Назвав соответствующие фигуры n -кубиками, Кларнер сделал наборы тетракубиков, пентакубиков, гексакубиков и придумал множество задач об их укладке. Так, из восьми тетракубиков можно выложить любую фигуру, полученную удвоением всех размеров одного из тетракубиков. Например, ими можно заполнить коробки

* Процедура улучшения верхней оценки числа n -мино описана в [16].

размерами $2 \times 2 \times 8$ и $2 \times 4 \times 4$. Отбрасывая любой из 29 пентакубиков, можно уложить остальные 28 в коробки размерами $4 \times 5 \times 7$, $2 \times 5 \times 14$, $2 \times 7 \times 10$. Как показал путем расчетов на ЭВМ К. Дж. Баукамп, коробку размером $4 \times 5 \times 7$ можно разрезать на меньшие коробки и заполнить 28 пентакубиками более чем 84 000 000 000 способами. Одна из меньших коробок размером $3 \times 4 \times 5$ заполняется 12 «плоскими» пентакубиками, т. е. 12 «продолженными в пространство» пентамино. Кроме того, Баукамп [18] составил каталог всех решений задачи упаковки плоских пентакубиков в случае $3 \times 4 \times 5$; общее число принципиально различных решений равно 3940. Кларнер сумел уложить набор 166 гексакубиков в коробку размером $2 \times 6 \times 83$. Кроме того, отбросив гексакубик $1 \times 1 \times 6$, он уложил остальные в пять коробок размерами $2 \times 9 \times 11$. Из этих меньших коробок можно разными способами складывать коробки размерами $9 \times 10 \times 11$, $2 \times 9 \times 55$ и $2 \times 11 \times 45$. Можно также из 144 гексакубиков сложить четыре куба с ребром 6.

Задача о раскрашенном кубике. Примером развлечения, аналогичного построению мозаик или разбиений, служит задача о раскрашенном кубике [19]. Не обременяя читателя математическими строгостями, опишем эту задачу так. Куб имеет шесть граней, и, если у нас есть шесть разных красок, мы можем окрасить каждую грань в свой цвет. Меняя порядок расположения цветов, можно получить 30 кубиков, среди которых нет ни одной пары окрашенных одинаково. Возьмем из них какой-нибудь кубик K . Требуется из остальных 29 кубиков выбрать восемь так, чтобы из них можно было сложить куб с удвоенными линейными размерами, окрашенный так же, как кубик K ; причем два составляющих кубика должны примыкать друг к другу по граням одного цвета.

Найдется только один набор из восьми кубиков, удовлетворяющий этим требованиям. Его можно выделить по следующему правилу. Рассмотрим какую-нибудь грань кубика K . Она имеет четыре угла, и в каждом из них сходятся три цвета. Сделав циклические перестановки этих цветов, мы получим для каждого угла два новых кубика — и найденные в результате этой операции восемь кубиков образуют искомый набор. Далее можно убедиться, что этот набор решает нашу задачу и что это решение единственно.

Обозначим, например, наши шесть цветов буквами

a, b, c, d, e, f . Пусть кубик K лежит на столе; при этом для определенности будем считать, что грань цвета f находится внизу, грань цвета a — наверху, а грани цветов b, c, d, e обращены соответственно на восток, север, запад и юг. Обозначим такое расположение $(f; a; b, c, d, e)$. Одна циклическая перестановка цветов, сходящихся в северо-восточном углу верхней грани, приводит к кубику $(f; c; a, b, d, e)$, вторая — к кубику $(f; b; c, a, d, e)$. Точно так же циклические перестановки цветов в северо-западном углу верхней грани дадут кубики $(f; d; b, a, c, e)$ и $(f; c; b, d, a, e)$. Аналогично, исходя из юго-западного верхнего угла K , получаем кубики $(f; e; b, c, a, d)$ и $(f; d; b, c, e, a)$, а из юго-восточного — кубики $(f; e; a, c, d, b)$ и $(f; b; e, c, d, a)$.

Полученные в результате восемь кубиков нетрудно уложить в куб, окрашенный подобно K , с условием, что прилегающие грани имеют один цвет и, более того, существуют два способа такой укладки. Занумеруем кубики в том порядке, как мы перечисляли их выше. Тогда один способ можно описать так: кубики 3, 6, 8 и 2 располагаем соответственно в юго-восточном, северо-восточном, северо-западном и юго-западном углах нижней грани. Разумеется, каждый из них кладется гранью f вниз; при этом кубики 3 и 6 ориентированы на восток гранью b , кубики 2 и 8 — на запад гранью d . Кубики 7, 1, 4 и 5 располагаются в юго-восточном, северо-восточном, северо-западном и юго-западном углах верхней грани и, конечно, все гранью a кверху. При этом кубики 7 и 1 повернуты гранью b на восток, а кубики 5 и 4 — гранью d на запад.

Если кубик K не задан, задача становится труднее. По этому образцу можно придумать и «двумерные» головоломки.

Квадрирование квадрата. З. Моронь [20] обнаружил, что некий набор из девяти неравных квадратов можно уложить в виде прямоугольника размером 32×33 . Это стало началом захватывающего исследования, которое иногда называют «квадрированием квадрата»⁶. Назовем квадрат или прямоугольник *совершенным*, если его можно разрезать на попарно неравные квадраты. Составляющие квадраты будем называть его *элементами*, а их число — *порядком* совершенного квадрата. Если такой квадрат не содержит меньших совершенных прямоугольников, то назовем его *простым*, а в противном случае — *составным*. Многие совершенные квадраты полу-

чены «эмпирическим методом» — составлением каталога совершенных прямоугольников и попытками подогнать друг к другу их элементы с возможным отбрасыванием угловых квадратов. Таким способом Р. Шпраг [21] получил совершенный квадрат 55-го порядка. Р. Л. Брукс, С. Э. Б. Смит, Э. Х. Стоун и У. Т. Татт [22] аналогичным путем нашли совершенный квадрат 26-го порядка. Эти авторы, кроме того, предложили «теоретический метод», позволяющий построить совершенные квадраты порядка 39 и выше. Т. Х. Уилкоккс ([23], 1951) описал «эмпирический» совершенный квадрат порядка 24 — наименьшего известного до сих пор — с элементами 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81. С тех пор его изображают на обложке каждого номера журнала *Journal of Combinatorial Theory*. Другие совершенные квадраты низких порядков построены П. Дж. Федерико ([23], 1963). Два последних автора модифицировали теоретический метод так, что теперь с его помощью можно строить простые совершенные квадраты уменьшающихся порядков до 31. «Эмпирические» квадраты — составные. Дж. К. Уилсон при помощи машинного поиска [24] обнаружил простой совершенный квадрат порядка 25. К. Дж. Баукамп, А. Дж. У. Дейвстейн и П. Медема построили таблицы простых совершенных прямоугольников от 9-го до 15-го порядков [25]. Путем машинного поиска они установили, что простых совершенных квадратов порядка меньше 20 не существует.

В 1968 г. Р. Л. Брукс нашел первый простой совершенный прямоугольник с отношением сторон 2:1. Его порядок равен 1323. С тех пор Федерико разработал «эмпирический метод», который дает простые совершенные прямоугольники размером 2×1 намного меньших порядков — в некоторых случаях не выше 23-го порядка.

«ДИНАМИЧЕСКИЕ» ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Игры, в которых фишки или фигуры совершают определенные ходы на досках разной формы, — такие, как «лиса и гуси», солитер, триктрак, шашки и шахматы, — несравненно более интересны, чем рассмотренные выше статичные игры. Как правило, возможных передвижений фишек так много, что математическими средствами их анализ не осуществим даже с помощью современных ЭВМ. Однако в некоторых играх число ходов не столь

велико — и здесь математика может помочь в анализе имеющихся возможностей. Пару примеров подобных игры рассмотрим ниже, а пока ограничимся головоломками и простыми развлечениями.

Задачи маневрирования. Для начала хочу познакомить вас с купленной мною несколько лет назад маленькой игрушкой, которая называется «Большая северная головоломка»⁶. Это типичный пример большого числа задач, связанных с маневрами поездов; поэтому я и решил рассмотреть ее здесь, хотя она основана на совершенно неправдоподобных предположениях.

На головоломке изображен железнодорожный путь DEF с двумя боковыми ответвлениями DBA и FCA , которые соединяются на участке A (рис. 4.6). Участок A ,

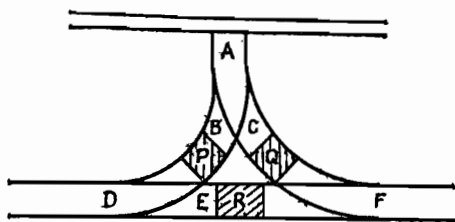


Рис. 4.6

общий для двух боковых путей, имеет достаточную длину, чтобы на нем мог разместиться один вагон, P или Q , но не целый локомотив R . Значит, если локомотив уходит на один из боковых путей, скажем DBA , он может вернуться лишь по тому же пути.

В начальном положении небольшой деревянный брусок P , разрисованный под вагон, помещен на участке B , такой же брусок Q находится на участке C , а брусок подлиннее, изображающий локомотив R , стоит на участке E . Требуется поменять местами вагоны P и Q , маневрируя при помощи локомотива R (разумеется, ни вагоны, ни локомотив двигаться по воздуху не могут).

Другая подобная головоломка, которой торговали на улицах в 1905 г., называлась «Головоломка Чифу-Чемульпо». Она устроена так. Обводной путь BGE связывает две точки B и E участка железнодорожной линии AF , заблокированного на концах, как показано на рис. 4.7. Длина участка AF равна 9 дюймам, $AB = EF = 1\frac{5}{6}$ дюйма и $AN = FK = BC = DE = \frac{1}{4}$ дюйма. На главном и обводном путях расположены восемь вагонов

с номерами от 1 до 8 длиной 1 дюйм и шириной $\frac{1}{4}$ дюйма и локомотив тех же размеров. В начальном положении вагоны стоят на линии AF в порядке 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а локомотив e — на обводном пути. Головоломка устроена так, что на главном пути одновременно может находиться не более восьми вагонов (или семь вагонов и локомотив). Если все восемь вагонов стоят на главном пути, то передвинуться на обводной путь могут только предпоследние вагоны с каждого конца, если же на главном пути меньше семи вагонов, — то два крайних с каждого конца. Если оба конца обводного пути свободны,

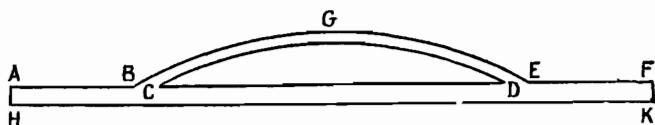


Рис. 4.7

то на главном пути может стоять не более четырех вагонов, а на обводном пути — пять вагонов или четыре вагона и локомотив. Требуется переставить вагоны в обратном порядке, так чтобы от A до F они имели номера от 8 до 1, причем сделать это при минимально возможном числе передвижений (ходов) вагонов и локомотива с обводного пути на главный и наоборот. (Вагоны движутся при помощи локомотива, и передвижения только по главному или только по обводному пути не считаются.) Головоломка решается в 26 ходов (см. с. 140), причем решить ее можно несколькими способами.

Широко распространены и другие задачи на маневрирование, но мы ограничимся двумя.

Задачи о переправе. Всем известна история о том, как перевозили через реку волка, козу и капусту. По очевидным причинам волка нельзя оставлять наедине с козой, а козу — наедине с капустой. Лодка же была так мала, что в ней помещался только перевозчик и либо волк, либо коза, либо капуста. Требуется указать способ перевозки [26].

Аналогичная задача — перевезти через реку трех мужчин и трех мальчишек на лодке, вмещающей не более одного мужчины или двоих мальчишек. Здесь требуется 15 рейсов [27].

Подобные задачи предлагали Алкуин, Тарталья и другие математики средневековья. Рассмотрим типичный пример [28]. Три очаровательные дамы вышли на про-

гулку со своими мужьями — молодыми, галантными и ревнивыми. Дорогу пересекает река, через которую им нужно переправиться. На берегу они нашли маленькую лодку, способную перевезти не более чем двоих. Как им перебраться через реку, если во избежание всякого рода подозрений было решено, что ни одна из женщин не должна оставаться в обществе постороннего мужчины в отсутствие собственного мужа? Для решения этой задачи требуется 11 рейсов. В случае двух супружеских пар понадобится пять рейсов. Подобная задача для четырех супружеских пар неразрешима.

В другой аналогичной задаче фигурируют n супружеских пар, которым нужно перебраться через реку в лодке с одним гребцом, вмещающей не более $n - 1$ человек, при том же условии, что и раньше: ни одна из женщин не может находиться в обществе постороннего мужчины в отсутствие мужа. Приведенная выше задача Алкуина соответствует случаю $n = 3$. Пусть y — необходимое число поездок с одного берега на другой. Тогда $y = 11$ при $n = 3$; $y = 9$ при $n = 4$ и $y = 7$ при $n > 4$.

Похожая задача принадлежит Э. Люка⁷ ([29], с. 15—18, 237—238). Требуется узнать, какое наименьшее число x человек должна вмещать лодка, чтобы n супружеских пар могли перебраться с ее помощью через реку таким образом, чтобы ни одна из женщин не оставалась в обществе постороннего мужчины в отсутствие мужа; предполагается, что с лодкой может справиться один гребец. Требуется найти также наименьшее число нужных для этого поездок с одного берега на другой. Как показал Деланой, если $n = 2$, то $x = 2$ и $y = 5$; если $n = 3$, то $x = 2$ и $y = 11$; если $n = 4$, то $x = 3$ и $y = 9$; если $n = 5$, то $x = 3$ и $y = 11$; наконец, если $n > 5$, то $x = 4$, а $y = 2n - 3$.

Де Фонтеней заметил, что если бы посреди реки находился остров, то всегда можно было бы переправиться при помощи лодки, рассчитанной только на двоих. Когда пар всего две или три, можно обойтись и без острова — и задача решается указанным выше способом. Решение Де Фонтеней требует $8n - 6$ рейсов. Первые девять рейсов всегда будут одни и те же независимо от числа пар; в результате одна пара оказывается переправленной на остров и одна — на другой берег. Следующие восемь рейсов потребуются для того, чтобы переправить еще одну пару с первого берега на второй. Эту серию из восьми рейсов нужно повторять до тех пор, пока на пер-

вом берегу и на острове не останется по одной паре. В результате последних семи рейсов все пары будут переправлены на другой берег. Тем не менее в случае $n > 3$, кажется, не понадобится больше $6n - 7$ переездов с берега на берег [30].

Г. Тарри предложил обобщение задачи, которое еще больше затрудняет ее решение. Вместо супружеских пар в его задаче каждый муж путешествует вместе со своим гаремом, состоящим из m жен или наложниц. Естественно предположить, что мусульманские женщины, воспитанные в условиях полной изоляции, не могут грести и потому не в состоянии обойтись без помощи мужчин. Однако христиане, вероятно, сочтут, что с них довольно трудностей путешествия и с одной женой, — поэтому я не буду испытывать их терпение подробным описанием тех мук, которые приходится испытывать в подобных обстоятельствах мусульманам.

Геодезические линии. Геометрические задачи, в которых требуется найти кратчайший путь между двумя точками искривленной поверхности, часто бывают трудными, но если речь идет о плоскости или поверхности, составленной из кусков плоскостей, то геодезические находятся сразу⁸.

Приведу один пример*. Я не стал бы этого делать, если бы не знал по опыту, что некоторые читатели не сразу находят решение. Итак, комната имеет размеры 30 футов в длину, 12 в ширину и 12 в высоту. Посредине одной из меньших боковых стен на расстоянии 1 фута от потолка сидит паук. Посредине противоположной стороны на расстоянии 11 футов от потолка сидит муха. Паук проползает весь путь до мухи и хватает ее; муха замирает, парализованная страхом. Требуется найти кратчайший путь для паука.

Чтобы решить эту задачу, нужно вырезать из бумаги развертку и сложить из нее пропорционально уменьшенную модель комнаты. Это можно сделать несколькими способами. Если развернуть модель на плоскость, можно соединить прямолинейным отрезком (целиком уместающимся на листе бумаги) точки, в которых сидят паук и муха, — это и будет кратчайший путь ме-

* Он принадлежит Г. Э. Дьюдени. Я слышал, как аналогичный вопрос предлагали для обсуждения в Кембридже в 1903 г., но в опубликованном виде встретил его впервые в газете *Daily Mail* от 1 февраля 1905 г.

жду двумя рассматриваемыми точками. Таким образом, задача сводится к вырезанию из бумаги подходящей развертки.

Ответ на поставленный вопрос дает рис. 4.8, где прямоугольник A изображает пол, B и D — длинные боковые стены, O — потолок, а точки W и F — начальные положения паука и мухи на более коротких боковых стенах. Квадрат расстояния между точками W и F равен $(32)^2 + (24)^2$, а значит, само это расстояние составляет 40 футов.

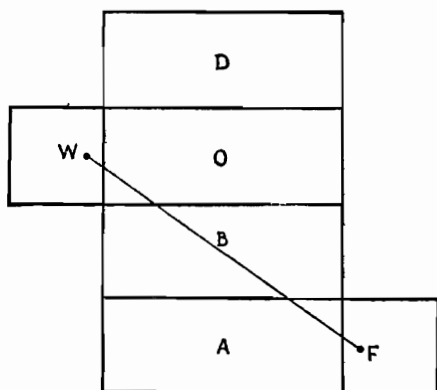


Рис. 4.8

Задачи с фишками, расположенными в ряд. Многие динамические игры и головоломки можно проиллюстрировать при помощи коробочки с фишками, особенно если имеются фишки двух цветов. Разумеется, для этой головоломки подходят также монеты, или пешки, или карты. Опишу несколько подобных игр с фишками, расположенными в один ряд.

Первая задача с фишками. Многим читателям наверняка знакома следующая задача. Десять фишек (или монет) уложены в ряд. Любую из них можно перенести над двумя ближайшими к ней фишками и положить сверху на третью фишку от исходной. Требуется, следуя этому правилу, переложить фишки так, чтобы они образовали пять пар, расположенных на равных расстояниях друг от друга.

Пронумеруем фишки в начальном положении числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Перенесем фишку 7 на 10, 5 на 2, 3 на 8, 1 на 4 и, наконец, 9 на 6. В результате

получим пары, расположенные на местах, первоначально занятых фишками 2, 4, 6, 8, 10.

Если же перенести фишку 4 на 1, 6 на 9, 8 на 3, 10 на 7 и, наконец, 2 на 5, то пары образуются на местах 1, 3, 5, 7, 9.

Если при «перепрыгивании» фишек две лежащие друг на друге фишки считать за одну, то можем найти еще два решения, аналогичные предыдущим: 1) переносим фишку 7 на фишку 10, 5 на 2, 3 на 8, 1 на 6, 9 на 4; 2) кладем фишку 4 на 1, 6 на 9, 8 на 3, 10 на 5 и, наконец, 2 на 7*.

В подобную игру можно играть и с восемью фишками, если не требовать, чтобы полученные четыре пары лежали на равных расстояниях друг от друга. Цель будет достигнута, если переложить фишку 5 на 2, 3 на 7, 4 на 1 и, наконец, 6 на 8. Такая форма задачи применима для любого большего 8 четного числа $8 + 2n$ фишек. В самом деле, переложив фишку 4 на 1, мы получим по одну сторону от этой пары ряд из $8 + 2n - 2$ фишек, который затем аналогичным способом можно свести к ряду из $8 + 2n - 4$ фишек, — в конце концов при таком способе действий у нас останется восемь фишек, которые мы сможем уложить так, как указано выше.

Более содержательным обобщением мог бы считаться случай n фишек — при условии, что каждую фишку можно перенести над m (где $m < n$) соседними с ней, последовательно расположенными фишками и опустить на следующую за ними. Например, если уложить в ряд 12 фишек и разрешить перенос фишки над тремя ближайшими фишками, то можно получить четыре стопки по три фишки в каждой. Вот одно из решений этой задачи (фишки пронумерованы последовательно): фишку 7 кладем на фишку 3, 5 на 10, 9 на 7, 12 на 8, 4 на 5, 11 на 12, 2 на 6 и 1 на 2. Если уложить в ряд 16 фишек и разрешить перенос каждой фишки над четырьмя примыкающими к ней, то можно получить четыре стопки по четыре фишки в каждой. Вот одно из решений (фишки пронумерованы последовательно): кладем фишку 8 на фишку 3, 9 на 14, 1 на 5, 16 на 12, 7 на 8, 10 на 7, 6 на 9, 15 на 16, 13 на 1, 4 на 15, 2 на 13 и 11 на 6.

* См. примечание Дж. Фицпатрика к французскому переводу третьего издания этой книги, вышедшему в Париже в 1898 г.

Вторая задача с фишками. Эта задача [32], чем-то напоминающая предыдущие, имеет японское происхождение. Положите четыре серебряные монеты (или белые фишки) и четыре медные монеты (или черные фишки) в ряд через одну вплотную друг к другу. Требуется за четыре хода (ход состоит в том, что пара лежащих рядом монет переносится на свободное место без изменения относительного расположения монет в паре) добиться того, чтобы за четырьмя лежащими подряд медными монетами следовали четыре серебряные, причем между монетами не должно быть пробелов.

Задачу можно решить следующим образом. Обозначим серебряную монету буквой *a*, медную — буквой *b*, и пусть *xx* обозначает два соседних пустых места. Тогда последовательные положения монет можно изобразить так:

Старт	<i>xxabababab</i>
После первого хода	<i>baababaxxb</i>
После второго хода	<i>baabxxaabb</i>
После третьего хода	<i>bxxbaaaabb</i>
После четвертого хода	<i>bbbbaaaaxx</i>

При выборе хода нужно руководствоваться следующим правилом. Допустим, что места монет (где пустые места также учитываются) «циклически упорядочены», т. е. условимся считать, что за последней буквой нашей записи следует первая буква. Тогда на каждом ходе нужно переносить на свободное место ту пару, которая лежит через одну монету от свободного места по заранее выбранную сторону от него (т. е. переносить следует либо все время по часовой стрелке, либо все время против нее).

Сразу приходит на ум аналогичная задача с $2n$ фишками, n белыми и n черными. При $n > 4$ эта задача решается за n ходов, однако я не нашел простого общего правила, которое годилось бы во всех случаях. Деланой описал решение этой задачи [31], рассматривая отдельно четыре случая: n имеет вид $4m$; $4m + 2$; $4m + 1$ и $4m + 3$. В первых двух случаях начальные $n/2$ ходов делают парами из разноцветных фишек, а последующие $n/2$ ходов — парами одноцветных фишек. В третьем и четвертом случаях первый ход делается по предыдущему правилу (т. е. предпоследняя и стоящая перед ней фишки отправляются в начало ряда), в следующих $(n - 1)/2$ ходах участвуют пары из разноцвет-

ных фишек, а в последних $(n - 1)/2$ ходах — пары одноцветных фишек.

Допускает решение и видоизмененная задача, которая получается, если условие отсутствия пробелов между монетами в окончательном расположении заменить требованием того, чтобы при каждом ходе пара фишек ставилась либо в начало, либо в конец ряда.

Еще один вариант этой задачи принадлежит Тэйту: он предложил ввести условие, чтобы две монеты, делающие ход, менялись местами. Тогда для решения задачи в случае 8 фишек требуется, по-видимому, пять ходов, а в общем случае $2n$ фишек требуется $n + 1$ ходов.

Задачи с фишками или пешками на шахматной доске. В следующих трех задачах используется шахматная доска и фишки или монеты двух цветов. Так как по доске удобнее двигать пешку или шашку, чем фишку, чаще я говорю об игре пешками — но это исключительно ради удобства, а совсем не потому, что описываемые игры имеют какое-то отношение к шахматам. Первая задача отличается тем, что в каждой позиции допустимо не более двух ходов; во второй и третьей задачах число ходов в каждой позиции не более четырех. При таких ограничениях возможен полный анализ задач; аналогичные задачи с большим числом допустимых ходов я решил не рассматривать.

Первая задача с пешками [33]. Из семи клеток на горизонтали шахматной доски три клетки с одного края заняты тремя белыми пешками, которые обозначены на



Рис. 4.9

рис. 4.9 буквой *a*, три клетки с другого края заняты тремя черными пешками, обозначенными буквой *b*; средняя же клетка пуста. Каждая фигура может двигаться только в одном направлении: пешки *a* — слева направо, пешки *b* — справа налево. Если клетка рядом с пешкой свободна, пешка может передвинуться на эту клетку; если на соседней клетке стоит пешка другого цвета, а следующая клетка свободна, то можно перепрыгнуть через пешку противника и занять свободную клетку. Цель игры — передвинуть все белые пешки на место черных и наоборот.

Для решения этой задачи требуется 15 ходов. Сначала ходит белая пешка, затем — поочередно две черные, три белые, три черные, три белые, далее — две черные и одна белая. Занумеруем клетки числами от 1 до 7 в естественном порядке. В исходной позиции свободной была клетка 4. Решение можно описать, указывая номер свободной клетки после каждого хода: 3, 5, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 6, 4, 2, 3, 5, 4. Шесть из этих ходов простые (пешка передвигается на соседнюю клетку), а девять других представляют собой прыжки через пешку другого цвета.

В общем случае, имея m белых пешек на одном конце горизонтального ряда из $m + n + 1$ полей и n черных пешек на другом конце, мы можем поменять их местами за $mn + m + n$ ходов, причем из них $m + n$ ходов простые, а mn представляют собой прыжки.

Вторая задача с пешками [34]. В такую же игру можно играть на прямоугольной или квадратной доске. Проиллюстрируем это на примере квадратной доски с $7 \times 7 (= 49)$ клетками. Начальная позиция показана на рис. 4.10; здесь буквой a обозначены пешки одного цве-

a	a	a	a	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b
a	a	a		b	b	b
a	a	a	b	b	b	b
a	a	a	b	b	b	b
a	a	a	b	b	b	b

Рис. 4.10

та («белые»), а буквой b — пешки другого цвета («черные»). Белым пешкам (a) разрешено двигаться «на восток» (слева направо) по горизонтали или «на юг» (вниз) по вертикали; черные пешки (b) могут двигаться «на запад» по горизонтали или «на север» по вертикали; ходы делаются по тем же правилам, что и выше.

Задача сводится к предыдущей. Пешки средней вертикали можно поменять местами за 15 ходов. В процессе этих 15 ходов каждая из семи клеток этой вертикали рано или поздно оказывается свободной — и тогда, воспользовавшись этим, можно переставить пешки соответствующей горизонтали. Для перестановки пешек на

каждой из семи горизонталей требуется 15 ходов. Значит, все пешки можно поменять местами за $15 + (7 \times 15)$ ходов, т. е. за 120 ходов.

Если таким же образом расставить $2n(n+1)$ белых пешек и $2n(n+1)$ черных на квадратной доске из $(2n+1)^2$ клеток, то их можно поменять местами за $2n(n+1)(n+2)$ ходов, причем $4n(n+1)$ из них будут простыми, а остальные $2n^2(n+1)$ — ходами-прыжками.

Третья задача с пешками. Эта задача аналогична предыдущей, но немного труднее. На 25-клеточной квадратной доске расставлены 8 белых пешек (они занимают клетки, обозначенные на рис. 4.11 строчными латинскими

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>		
<i>g</i>	<i>h</i>	*	<i>H</i>	<i>G</i>
		<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>
		<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

Рис. 4.11

буквами) и 8 черных пешек (они расположены в клетках, обозначенных прописными латинскими буквами). Клетка, обозначенная звездочкой, свободна. Пешки ходят по тем же правилам, что и выше: белые — слева направо («на восток») по горизонтали или вниз («на юг») по вертикали, черные — справа налево по горизонтали или вверх по вертикали. Цель игры — добиться, чтобы белые пешки оказались на местах, занятых вначале черными пешками, и наоборот. При этом пешкам не разрешается выходить за пределы области, обозначенной жирной линией.

Так как свободна лишь одна клетка, а ходить ни по диагонали, ни назад нельзя, то в каждый момент могут ходить не более двух пешек любого цвета. Несмотря на это, задача имеет очень много решений. Одно из них, принадлежащее Г. Э. Дьюдени, выполняется за 46 ходов:

*Hhg * Ffc * CBHh * GDFfehbag * GABHEFfdg * Hhbc **
** CFf * GHh *;*

буквы в этой последовательности обозначают те клетки, с которых делается очередной ход. Нетрудно заметить,

что первые 23 хода приводят к симметричной позиции, а следующие 22 хода сразу получаются, если записать первые 22 хода в обратном порядке, поменяв прописные буквы на строчные и наоборот. Легко сконструировать другие аналогичные игры на досках разной формы.

По всей вероятности, если бы «овчинка стоила выделки», математическую теорию игр такого сорта можно было бы разработать, пользуясь обозначениями Вандермонда, которые будут описаны в гл. VI, или аналогичным методом, применяемым в теории игры соли-тер [35].

Задачи на шахматной доске с шахматными фигурами. Существует немало математических развлечений, в которых участвуют не только пешки, но и другие шахматные фигуры. Некоторые из них приводятся в гл. VI.

Парадромные кольца. Трудности, возникающие при попытке мысленно представить себе результат перестройки некоторых простых геометрических фигур, хорошо иллюстрируются известным экспериментом с изготовлением *парадромных колец*.

Возьмем полоску бумаги или кусок ленты (скажем, 1—2 дюйма в ширину и не меньше 9—10 дюймов в длину), проведем линию посредине полоски вдоль всей ее длины от одного конца *A* до другого конца *B* и склеим концы. Мы получим обычное цилиндрическое кольцо. Если разрезать его ножницами вдоль средней линии, то оно распадется на два точно таких же кольца вдвое меньшей ширины. А теперь представим себе, что в конце *A* полоска перевернута на 180° и лишь после этого конец *A* склеен с концом *B* (т. е. внутренняя сторона полоски в конце *A* приклеена к наружной стороне в конце *B*). Тогда разрезание по той же линии, что и раньше, дает только одно кольцо⁹. Далее, допустим, что полоска закручена на полный оборот и после этого склеена в концах. Тогда аналогичное разрезание приводит к двум переплетенным кольцам. Если кто-то из читателей думает, что эти результаты легко было предвидеть и без предварительной подготовки, мы советуем ему попробовать правильно предсказать, к чему приведет аналогичное разрезание вдоль средней линии колец, получившихся во втором и третьем экспериментах.

Теория подобных разрезов принадлежит Листингу и Тэйту [36], которые рассмотрели случай, когда в конце *A* делается *m* полуоборотов (т. е. полоска перекручи-

вается на угол $m\pi$), прежде чем он склеивается с концом B .

Если m четно, то получается поверхность с двумя краями, имеющая две стороны. При разрезании этого кольца по линии, проходящей посередине между двумя краями, оно распадается на два кольца; каждое из них закручено на m полуоборотов, и они сцеплены друг с другом $m/2$ раз.

Если же m нечетно, то получается поверхность с одной стороной и одним краем. Разрезав ее по средней линии, мы получим только одно кольцо, но закрученное на $2m + 2$ полуоборотов, причем в случае, когда m больше единицы, это кольцо оказывается еще и заузленным.

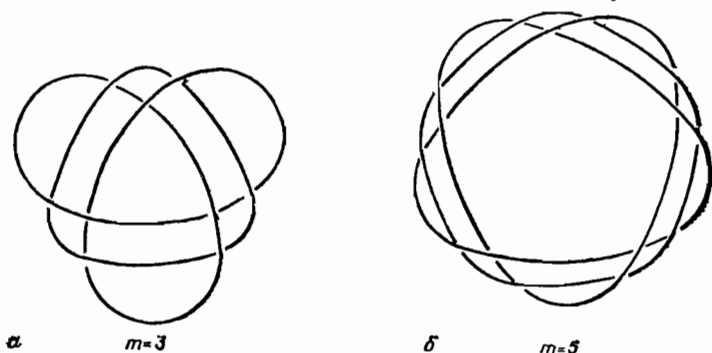


Рис. 4.12

Если же вместо бисекции выполнить трисекцию*, то образуются два сцепленных кольца: одно такое же, как исходное (средняя треть), а второе такое же, как после бисекции. На рис. 4.12, *a* и *б* показано, как зацеплены эти кольца (в случае $m=3$ и $m=5$). Исходное кольцо с $m=1$ называется лентой (или листом) Мёбиуса¹⁰.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К с. 117. Приведем один из способов, позволяющих расположить 16 фишек в 15 рядов так, как это требуется в задаче. Пять диагоналей правильного пятиугольника в пересечении образуют новый пятиугольник. Диагонали этого нового пятиугольника определяют третий пятиугольник. Общий центр трех пятиугольников и 15 вершин образуют искомую конфигурацию (см. [12], с. 40 и 236).

Расположить 18 фишек девятью рядами по 5 фишек в каждом можно таким способом. Из вершины A равностороннего треуголь-

* Это замечание принадлежит Дж. М. Андреасу.

ника $AA'A''$ проведем расположенные внутри треугольника отрезки AD , AE , образующие произвольный угол с AA' . Из A' и A'' проведем отрезки, расположенные подобным образом относительно $A'A''$ и $A''A$. Пусть $A'D'$ пересекается с $A''E''$ в точке F , а $A'E'$ пересекается с $A''D''$ в точке G . Тогда AFG — прямая. Три вершины треугольника и 15 точек пересечения прямых AD , AE , AF с подобными пучками прямых, исходящих из A' и A'' , вместе дают искомое расположение.

Чтобы расположить 19 фишек десятью рядами по 5 фишек в каждом, нужно совместить их с 19 точками пересечения 10 прямых $x = \pm a$, $x = \pm b$, $y = \pm a$, $y = \pm b$, $y = \pm x$; при этом две из этих точек находятся в бесконечности.

Рассмотрим еще один пример: расположить 28 фишек в 36 рядов по 4 фишки в каждом. Такое расположение можно получить, соединив некоторые вершины правильного девятиугольника $A_1A_2 \dots A_9$. Рассмотрим два других девятиугольника, $B_1B_2 \dots B_9$ и $C_1C_2 \dots C_9$, концентрических с первым: пусть B_1 — точка пересечения A_3A_6 с A_5A_8 , а C_1 — точка пересечения A_2A_6 с A_5A_9 ; прямая B_1B_7 содержит C_5 и C_6 ; 28-й точкой будет центр, лежащий на девяти прямых, таких, как $A_1B_1C_1$.

К с. 128. «Большая северная головоломка» решается так. (i) Локомотив R толкает вагон P на участок A . (ii) R возвращается, толкает вагон Q к P и тащит оба вагона на участок F , а затем перевозит их на E . (iii) Отцепив вагон P , R тащит вагон Q назад на участок A и оставляет его там. (iv) R возвращается к P , перевозит его на участок C и оставляет там. (v) Пройдя через F , D и B , локомотив R подходит к участку A , вытягивает оттуда вагон Q и оставляет его на участке B .

К с. 129. Одно из решений «Головоломки Чифу-Чемульпо» выглядит так. Поднимем вагоны 2, 3 и 4, т. е. переведем их поочередно на обводной путь. [Затем подтолкнем вагон 1 по главному пути к вагону 5; такое передвижение не считается ходом в этой игре.] Далее опустим вагон 4, т. е. переведем его на главный путь, и придвинем к 1. Затем поднимем вагон 8, опустим 3 в конец главного пути и оставим на время там, поднимем 6, опустим 2, опустим e , поднимем 3, поднимем 7. [Теперь столкнем вагон 5 в конец главного пути и оставим там на время.] Далее поднимем вагон 7, опустим 6, поднимем 2, опустим 4. [Затем подтолкнем e к вагону 1.] Далее опустим вагон 4 в конец главного пути и оставим на время там, опустим 2, поднимем 5, опустим 3, поднимем 6, поднимем 7, опустим 8 в конец главного пути, поднимем e , опустим 5, опустим 6, опустим 7. В процессе решения мы опустили e с одного конца обводного пути, провели по главному пути и снова подняли на обводной путь с другого конца. С таким же успехом можно было бы опустить e в одном конце главного пути и поднять назад на обводной путь с того же конца. При таком решении нужно двигать поочередно следующие вагоны: 2, 3, 4, 4, e , 8, 7, 3, 2, 6, 5, 5, 6, 3, 2, 7, 2, 5, 6, 3, 7, e , 8, 5, 6, 7.

1. Becq de Fouquières, *Les Jeux des Anciens* (second ed.). — Paris, 1873, ch. XVIII.
2. *Educational Times Reprints*, 1868, vol. VIII, p. 106; там же, 1886, vol. XLV, pp. 127—128.
3. См. [16] в литературе к гл. II, с. 105—107.
4. Pólya G. *L'Enseignement mathématique*, 1918, vol. XX, p. 367.

5. См. [19] в литературе к гл. II, pp. 272—282 (figs. 421—423, 425, 426, 432, 433, 440).
6. *Mathematical Questions from the Educational Times* (London), vol. X, 1858, pp. 74—76; vol. LV1, 1892, pp. 97—99.
7. *Journal of Mathematics and Physics* (Cambridge, Mass.), 1933, vol. XII, pp. 311—320.
8. Barrau J. A. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1906, ser. 2, vol. VII.
9. Golomb S. W., Baumert L. D., *American Mathematical Monthly*, 1963, vol. LXX, pp. 12—17; Холл М. Комбинаторика. Пер. с англ. — М.: Мир, 1970, с. 303—304.
10. Голумб С. В. Полимино. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.
11. Gardner M. *Scientific American*, 1957, vol. CXCVI, no. 5, pp. 154—156; 1957, vol. CXCVII, no. 6, pp. 126—129; 1960, vol. CCIII, no. 5, pp. 186—194; 1962, vol. CCVII, no. 5, pp. 151—159; 1969, vol. CCXXI, no. 6, pp. 122—127.
12. Дьюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки. Пер. с англ. — М.: Мир, 1979, с. 111—113.
13. Gardner M. *Scientific American*, 1965, vol. CCXIII, no. 4, p. 96—104.
14. Proceedings of the Fourth Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961, vol. IV, pp. 223—239.
15. *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, vol. XIX, pp. 851—863.
16. *Canadian Journal of Mathematics*, 1973, vol. XXV, pp. 585—602.
17. *Scientific American*, 1958, vol. CXCIX, no. 3, pp. 182—188.
18. Catalogue of Solutions of the Rectangular $3 \times 4 \times 5$ Solid Pentomino Problem, Technische Hogeschool. — Eindhoven, 1967.
19. MacMahon P. A. *London Mathematical Society Proceedings*, vol. XXIV, 1893, pp. 145—155; New Mathematical Pastimes. — Cambridge, 1921, pp. 42—46. См. также Winter F. Die Spiele der 30 bunten Würfel. — Leipzig, 1934.
20. *Przegląd matematyczno-fizyczny* (Warszawa), 1925, t. III, s. 152—153.
21. *Mathematische Zeitschrift*, 1939, Bd. XLV, S. 607—608.
22. *Duke Mathematical Journal*, 1940, vol. VII, pp. 312—340.
23. *Canadian Journal of Mathematics*, 1951, vol. III, pp. 304—308; 1963, vol. XV, pp. 350—362.
24. Tutte W. T. *American Mathematical Monthly*, 1965, vol. LXXII, pp. 29—35.
25. Technische Hogeschool, Eindhoven, 1960.
26. См. [2] в литературе к гл. I, 1803 ed., vol. I, p. 171; 1840 ed., p. 77.
27. Dudeney H. E. *The Tribune*, October, 4, 1906.
28. См. [1] в литературе к гл. I, Appendix, Problem IV, p. 212.
29. Lucas E., *Récréations mathématiques*. — Paris, 1883, vol. I.
30. См. [23] в литературе к гл. II, p. 237.
31. *Bibliotheca Mathematica*, 1896, ser. 3, vol. VI, p. 323; Tait P. G., *Philosophical Magazine*, January 1884, ser. 5, vol. XVII, p. 39; Collected Scientific Papers. — Cambridge, vol. II, 1890, p. 93.
32. *La Nature*, June 1887, p. 10.
33. См. [29], vol. II, partie 5, pp. 141—143.
34. Там же, p. 144.
35. Reiss. Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels, *Crelle's Journal*, Berlin, 1858, vol. LIV, pp. 344—379; см. также [29], vol. I, partie V, pp. 89—141.
36. Vostudien zur Topologie, Gottinger Studien, 1847, Teil X.

ГЛАВА V

МНОГОГРАННИКИ

Хотя изучение пространственных тел является мало распространенной и пренебрегаемой ветвью геометрии, но всякое важное и значительное продвижение здесь вперед будет (без сомнения) сразу признано теми, чей разум стремится постичь как чисто практические, так и рассудочные (теоретические) аспекты этой науки, и для кого это действительно предназначено.

Абрахам Шарп *

Многогранник — это пространственное тело (точнее, поверхность такого тела) с плоскими гранями и прямолинейными ребрами, устроенное так, что всякое ребро соединяет две вершины и служит общей стороной двух граней. Простейшими примерами многогранников служат пирамиды и призмы. (У пятиугольной пирамиды 6 вершин, 10 ребер и 6 граней; у пятиугольной призмы их соответственно 10, 15 и 7 — см. фигуру 7 на фото I.) Я хотел бы упомянуть еще *антипризму* (или *призмойд*), основания которой хотя и одинаковы, но расположены различно: вершины каждого из оснований лежат над сторонами другого, так что боковые ребра идут зигзагом. (Так, пятиугольная антипризма имеет 10 вершин, 20 ребер и 12 граней — фигура 9 на фото I.)

Разбиения, описанные выше на с. 117, можно рассматривать как бесконечные многогранники — они имеют грани, ребра, вершины, и лишь (менее важные!) понятия площади поверхности и объема теряют для них смысл.

СИММЕТРИЯ И СИММЕТРИИ

Если отражение пространственного тела в плоском зеркале не отличается от него самого, то тело «симметрично» в элементарном смысле этого слова; точнее будет назвать его «зеркально-симметричным». Не зеркально-симметричное тело вместе со своим зеркальным отраже-

* См. [10], с. 65.

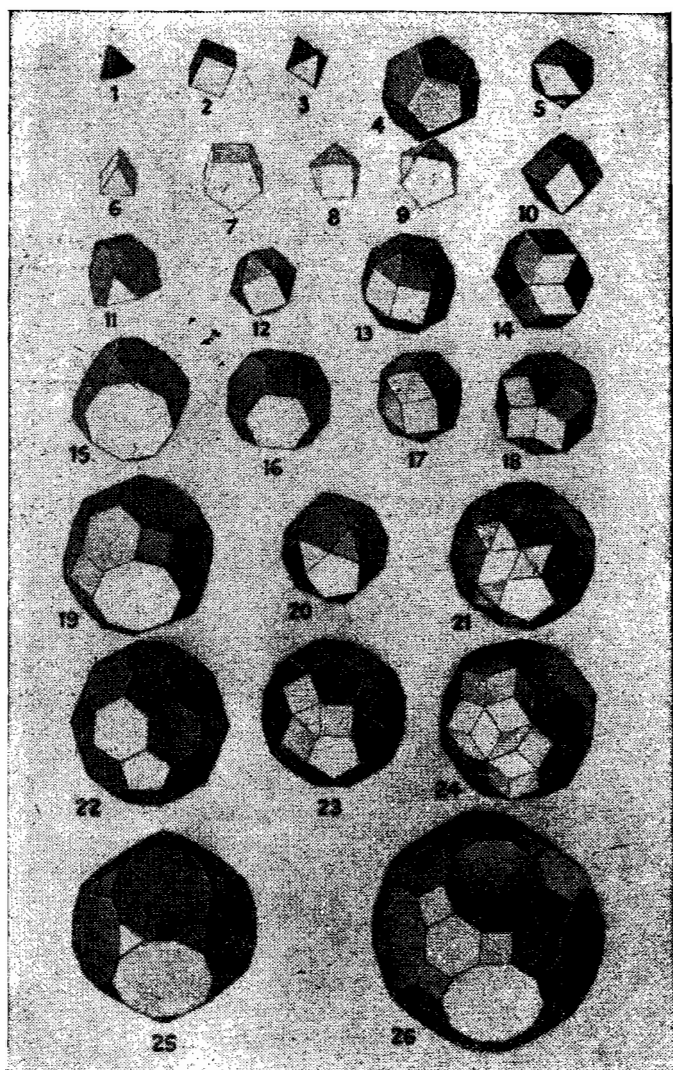


Фото I

нием образует *энантиоморфную пару*. (Простой пример — пара ботинок.) Зеркально-симметричное тело имеет хотя бы одну *плоскость симметрии*; отражение от этой плоскости не меняет ни формы, ни положения тела. Тело может также иметь *ось симметрии*, при повороте вокруг которой на 180° оно переходит в себя; такие тела часто тоже называют симметричными. Расплывчатое утверждение о том, что тело обладает некоторым числом «симметрий», или определенной «степенью симметрии», можно сделать точным, перечислив все те *симметрии*, которые допускает это тело; при этом *симметрия* (или операция симметрии) определяется как любая комбинация перемещений и зеркальных отражений, оставляющая данное тело на месте (переводящая его в самого себя).

Правильный многоугольник $ABC \dots X$ допускает симметрию (в данном случае — поворот), которая циклически переставляет его вершины: переводит A в B , B в C , ..., X в A ; соответственно этому говорят, что он обладает *поворотной симметрией* (порядка n , если речь идет о правильном n -угольнике).

ПЯТЬ ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛ

Пусть A — вершина, принадлежащая грани α некоторого многогранника. Многогранник называется *правильным*, если он допускает две следующие симметрии: одну, которая циклически переставляет вершины α , и вторую, которая циклически переставляет грани, сходящиеся в вершине A . Отсюда следует, что все грани правильны и равны, все ребра равны и все вершины имеют одинаковое «окружение». Если каждая вершина окружена q p -угольниками, то такой многогранник можно обозначить символом p^q (как на с. 117) или $\{p, q\}$.

В случае конечного многогранника грани в какой-либо одной вершине A образуют некоторый телесный угол. Внутренний угол каждой из q сходящихся в точке A граней равен $(p-2)\pi/p$; поэтому $q(p-2)\pi/p < 2\pi$, откуда

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

Но как p , так и q больше 2; поэтому нам остается только рассмотреть все возможные способы представления чисел 1, 2 или 3 в виде произведения двух положительных множителей, а затем в каждом случае построить

грань за гранью искомый многогранник. Обозначим число вершин, ребер и граней правильного многогранника соответственно через V , E и F и представим результаты в виде следующей таблицы (см. фигуры 1, 2, 3, 4, 5 на фото I, с. 143):

$\{p, q\}$	V	E	F	Название
$\{3,3\}$	4	6	4	Правильный тетраэдр
$\{4,3\}$	8	12	6	Куб
$\{4,4\}$	6	12	8	Октаэдр
$\{5,3\}$	20	30	12	Додекаэдр
$\{3,5\}$	12	30	20	Икосаэдр

Ясно, что $qV = 2E = pF$. Имеет место и менее очевидное соотношение

$$E^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1/2.$$

Оно легко следует из формулы Эйлера $F + V - E = 2$, которая будет доказана в гл. VIII на с. 252—253.

Существуют четыре способа представления тетраэдра как треугольной пирамиды, а октаэдра — как треугольной антипризмы; три способа представления октаэдра в виде четырехугольной бипирамиды, т. е. в виде двух четырехугольных пирамид, сложенных (квадратным) основанием, а куба — в виде призмы с квадратным основанием; шесть способов представления икосаэдра как пятиугольной антипризмы с двумя пятиугольными пирамидами на ее основаниях. Множество граней додекаэдра состоит из двух повернутых относительно друг друга пятиугольников, лежащих в параллельных плоскостях, каждый из которых окружен пятью другими пятиугольниками.

Икосаэдр можно вписать в октаэдр так (рис. 5.1, а), что каждая вершина икосаэдра разделит ребро октаэдра в отношении, задаваемом «золотым сечением» (см. с. 68). Куб можно вписать в додекаэдр так (рис. 5.1, б), чтобы каждое ребро куба лежало на грани додекаэдра (и соединяло две вершины этой грани, следующие через одну друг за другом).

Эти пять многогранников известны с древних времен. Самым ранним их подробным исследованием является,

вероятно, исследование Теэтета (см. [1], т. I, с. 162)*, Высказывалось мнение, что «Начала» Евклида были написаны не как общий трактат по геометрии, а лишь как подготовка всех необходимых ступеней, которые позволили бы полностью охарактеризовать пять правильных многогранников¹. Во всяком случае Евклид начинает свой трактат с построения равностороннего треугольника, а завершает его построением додекаэдра.

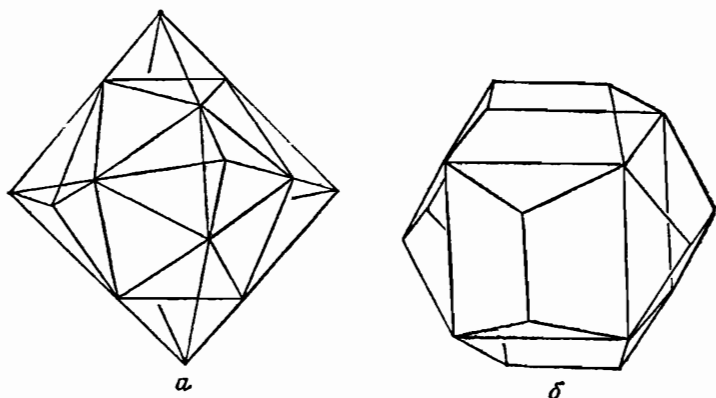


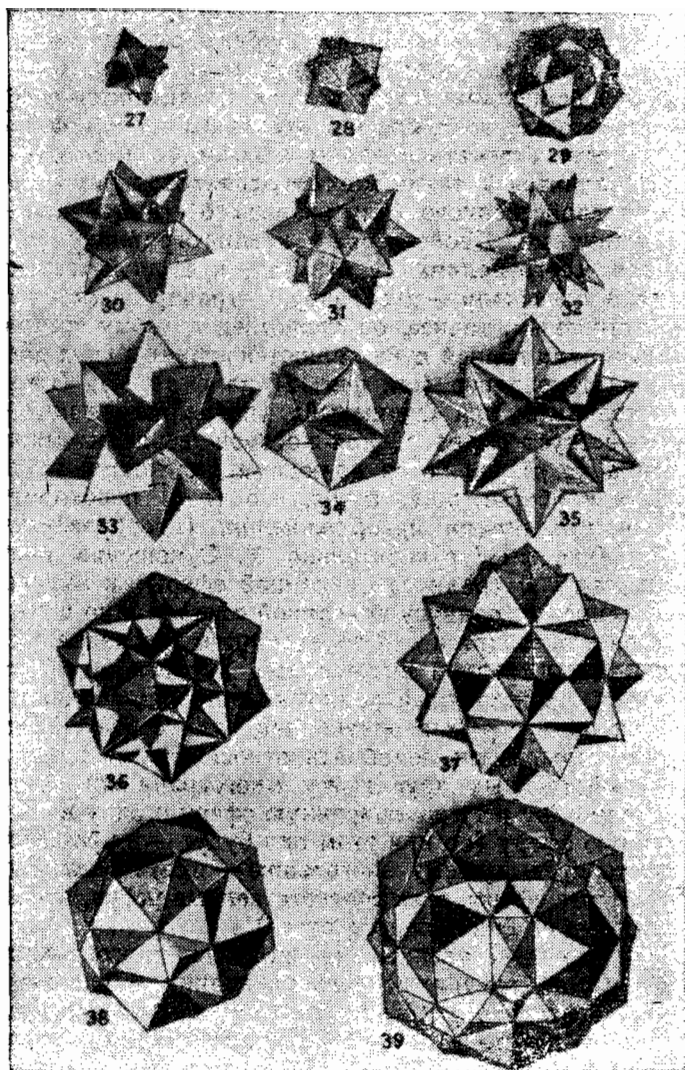
Рис. 5.1. Икосаэдр и октаэдр (а); куб и додекаэдр (б)

Мистически настроенные греки связывали правильные многогранники с четырьмя элементами мира. Кеплер [2] так обосновывал это соответствие. Из пяти правильных тел тетраэдр имеет наименьший по сравнению со своей поверхностью объем, а икосаэдр — наибольший; стало быть, эти тела проявляют свойства соответственно сухости и влажности, т. е. отвечают Огню и Воде. Куб, прочно стоящий на своем основании, соответствует устойчивой Земле, а октаэдр, который свободно вращается, будучи закрепленным в двух противоположных углах, отвечает подвижному Воздуху. Наконец, додекаэдр соответствует Вселенной, ибо существует 12 знаков зодиака. Для иллюстрации Кеплер изображал на тетраэдре костер, на икосаэдре — рыб и омара, на кубе — дерево, морковь и садовые инструменты, на октаэдре — птиц и облака, а на додекаэдре — Солнце, Луну и звезды.

* Принятое название этих многогранников «платоновы тела» связывает их с другом Теэтета Платоном — но оно, скорее, отражает общее уважение к Платону (и символизирует интерес Платона к этим телам), нежели реальные заслуги его в этой области. — *Прим. ред.*

С каждым из этих многогранников можно связать три концентрические сферы: *описанную* сферу, проходящую через все вершины; *полувписанную* сферу, касающуюся всех ребер; *вписанную* сферу, касающуюся всех граней. Рассмотрим вторую из них. Если заменить каждое ребро перпендикуляром к нему, касающимся сферы в той же точке, то ребрам, выходящим из одной вершины, будут отвечать стороны некоторого многоугольника. Получится V таких многоугольников; они будут V гранями двойственного (или взаимного) многогранника с F вершинами. Двойственным к многограннику $\{p, q\}$ является многогранник $\{q, p\}$. Так, куб двойствен октаэдру, а додекаэдр — икосаэдру. Тетраэдр является самодвойственным, точнее, он двойствен другому тетраэдру. Диагонали граней куба являются ребрами двух двойственных тетраэдров (см. фиг. 27 на фото II). Термин «двойственный», или «взаимный», употребляется потому, что существует сфера Σ , для которой вершины многогранника $\{q, p\}$ являются полюсами плоскостей граней $\{p, q\}$, и наоборот, т. е. такая, что $\{p, q\}$ переходит в $\{q, p\}$ при *полярном преобразовании* (преобразовании «двойственности»)² относительно Σ . Отношение внешнего радиуса R (радиуса описанной сферы) к внутреннему радиусу r (радиусу вписанной сферы) одно и то же для куба и октаэдра и для додекаэдра и икосаэдра. Если радиус рассмотренной выше сферы Σ равен ρ , то многогранник, двойственный данному многограннику, имеет внешний радиус ρ^2/r и внутренний радиус ρ^2/R . Таким образом, можно так подобрать относительные размеры двух двойственных друг другу многогранников, чтобы они имели одну и ту же описанную сферу и одну и ту же вписанную сферу (но при этом они будут — в противоположность предыдущему построению — иметь *разные* полувписанные сферы, а их соответственные ребра, вообще говоря, уже не будут пересекаться).

Если два двойственных правильных многогранника одного и того же внутреннего (а значит, и внешнего) радиуса поставить рядом на горизонтальной плоскости (например, на столе), то их вершины будут одинаково распределены в горизонтальных плоскостях, а именно: вершины содержатся в одних и тех же плоскостях и число вершин одного многогранника пропорционально числу вершин второго. Этот факт, обнаруженный еще Паппом (см. [1], т. II, с. 368—369), получил адекватное объяснение только в наше время, хотя по его разнообра-



Φορο II

разным обобщениям было ясно, что здесь имеет место отнюдь не простая случайность. Одно из обобщений относится к многогранникам Кеплера — Пуансо, которые будут описаны ниже. Другое обобщение касается разбиений плоскости. Рассмотрим разбиение $\{6, 3\}$ (по три шестиугольника в каждой вершине). Выбирая согласованным образом вершины шестиугольников через одну, получим треугольное разбиение $\{3, 6\}$ (которое в другом положении было бы двойственным исходному разбиению). Тогда каждый круг, концентрический с гранью (ячейкой) разбиения $\{6, 3\}$, содержит вдвое больше вершин $\{6, 3\}$, чем вершин $\{3, 6\}$. (Правда, это очевидно, так как пропущенные вершины разбиения $\{6, 3\}$ принадлежат другому разбиению $\{3, 6\}$, которое конгруэнтно рассматриваемому.)

Тот факт, что вершины шестиугольного разбиения принадлежат двум треугольным разбиениям, аналогичен нашему замечанию о том (см. с. 147), что вершины куба принадлежат двум правильным тетраэдрам. Эти тетраэдры образуют составную фигуру — *соединение*, — которую Кеплер назвал *stella octangula* (восьмиугольная звезда); их восемь граней лежат в плоскости граней октаэдра. Соединение *пяти тетраэдров*, вершины которых служат вершинами додекаэдра, а грани лежат в плоскостях граней икосаэдра, имеет два энантиоморфных варианта. Сложив вместе эти два варианта так, чтобы всего было те же 20 вершин, мы получим соединение *десяти тетраэдров*; расположенные напротив друг друга пары тетраэдров можно заменить *пятью кубами* (имеющими 20 вершин, как у додекаэдра, т. е. здесь все вершины сдвоенные)³. Изобразить один такой куб в данном додекаэдре совсем легко (см. рис. 5.1, б). Все пять вместе они образуют очень красивую модель. Наконец, взяв двойственные к пяти кубам октаэдры, мы получим соединение *пяти октаэдров*, грани которых лежат в плоскостях граней икосаэдра и каждая сдвоена. Этот икосаэдр вписан в каждый из октаэдров, как на рис. 5.1, а. (См. также фигуры 27, 33, 35, 36, 37 на фото II.)

Среди ребер правильного многогранника легко выделить неплоский многоугольник — замкнутую ломаную, или «зигзаг», где первое и второе звенья — ребра одной грани, второе и третье звенья — ребра другой грани и т. д. Эта ломаная называется *многоугольником Петри*; он имеет много применений. Каждый конечный многогранник допускает ортогональное проектирование на

плоскость, при котором один из многоугольников Петри становится правильным многоугольником, а вся оставшаяся проекция лежит внутри ограниченной им области (рис. 5.2). Несколькими простыми способами можно доказать, что многоугольник Петри многогранника $\{p, q\}$ имеет h сторон, где

$$\cos^2(\pi/h) = \cos^2(\pi/p) + \cos^2(\pi/q).$$

Эти h сторон многоугольника Петри для $\{p, q\}$ пересекаются с ребрами двойственного многогранника $\{q, p\}$, которые в свою очередь образуют многоугольник Петри для $\{q, p\}$.

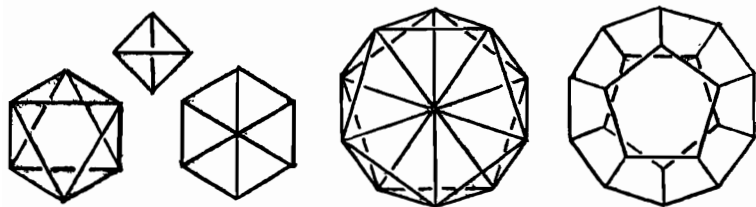


Рис. 5.2. Платоновы тела и многоугольники Петри

Правильные многогранники симметричны во многих разных смыслах. *Ось* симметрии проходит через центр каждой грани, через середину каждого ребра и через каждую вершину: всего $E + 1$ осей. Кроме того, имеется $3h/2$ плоскостей симметрии.

АРХИМЕДОВЫ ТЕЛА

Многогранник называется *однородным*, если он имеет правильные грани и допускает симметрию, которая переводит любую данную вершину в любую другую произвольно выбранную вершину. Платоновы тела однородны, так же как правильные прямые призмы и антипризмы определенной высоты, а именно такие, что их боковые грани являются соответственно квадратами и равносторонними треугольниками. Такой многогранник можно обозначать символом, указывающим число ребер у граней, примыкающих к одной вершине (в циклическом порядке). Так, n -угольная призма и антипризма — это $4^2 \cdot n$ и $3^3 \cdot n$. Легко доказать [3], что кроме уже упомянутых существует ровно 13 (конечных выпуклых) однородных

многогранников:

$$\begin{array}{ccccc} 3 \cdot 6^2, & 4 \cdot 6^2, & 3 \cdot 8^2, & 5 \cdot 6^2, & 3 \cdot 10^2, \\ 4 \cdot 6 \cdot 8, & 4 \cdot 6 \cdot 10, & (3 \cdot 4)^2, & (3 \cdot 5)^2, & 3 \cdot 4^3, \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4, & 3^4 \cdot 4, & 3^4 \cdot 5. & & \end{array}$$

Они называются *архимедовыми телами*.

Пусть σ — сумма углов граней, примыкающих к одной вершине. (Чтобы получился некоторый телесный угол, эта сумма должна быть меньше 2π .) Тогда число вершин определяется по формуле $(2\pi - \sigma)V = 4\pi$ [4]. Например, многогранник $3^4 \cdot 5$ имеет 60 вершин, так как $\sigma = (\frac{4}{3} + \frac{3}{5})\pi$.

Рассматривая два проходящих один через другой тетраэдра, составляющих *stella octangula*, можно убедиться, что их общей частью служит октаэдр. Кроме того, как мы уже видели, их ребра — это диагонали граней куба. Если по аналогии рассмотреть общую часть куба и двойственного ему октаэдра (расположенных так, что они имеют общую полувписанную сферу, т. е. что их ребра перпендикулярны и делятся пополам в точках пересечения), получится *кубооктаэдр* $(3 \cdot 4)^2$. Каждая пара соответствующих ребер (куба и октаэдра) — это диагонали ромба, и 12 таких ромбов служат гранями «полуправильного» многогранника, который называется *ромбическим додекаэдром*. (Он не однороден, но «изоэдран» — см. рис. 5.8, а.) Ребра кубооктаэдра после подходящего увеличения пересекут ребра ромбического додекаэдра (под прямыми углами); на самом деле эти два многогранника двойственны точно так же, как двойственны куб и октаэдр. Подобным же способом икосаэдр и додекаэдр приводят к *икосододекаэдру* $(3 \cdot 5)^2$ и двойственному ему *триаконтаэдру*. (См. фиг. 28, 29 на фото II и 12, 10, 20, 18 на фото I. Ср. с разбиениями, изображенными на рис. 4.1.) Грани соединения пяти кубов лежат в плоскостях 30 граней триаконтаэдра. Соответственно, соединение пяти октаэдров имеет 30 вершин икосододекаэдра.

Множество граней икосододекаэдра состоит из 20 треугольников и 12 пятиугольников (соответствующих граням двух соединенных правильных фигур). Его 60 ребер разделены пополам перпендикулярными к ним ребрами двойственного триаконтаэдра (в то время как для ребер триаконтаэдра это свойство не выполнено; см. 39 на фото II). Точки пересечения этих пар ребер (их 60)

являются вершинами многогранника, множество граней которого состоит из 20 треугольников, 12 пятиугольников и 30 прямоугольников. Немного смещая эти точки (по направлению к серединам ребер триконтаэдра), можно модифицировать прямоугольники в квадраты, и тогда получится еще одно архимедово тело: *ромбоикосододекаэдр* $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4$ (23 на фото I; ср. с разбиением $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$). Аналогичная конструкция приводит к *ромбокубооктаэдру* $3 \cdot 4^3$, грани которого составляют 8 треугольников и $6 + 12$ квадратов (см. фиг. 38 на фото II и фиг. 13 на

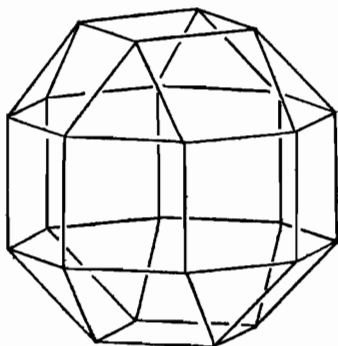


Рис. 5.3. Псевдоромбокубооктаэдр

фото I). При попытках сделать модель такого многогранника Дж. Миллер [5] случайно открыл «псевдоромбокубооктаэдр» (рис. 5.3). Он тоже имеет в качестве граней 8 треугольников и 18 квадратов и является изогональным в слабом, или «локальном», смысле (к каждой вершине примыкают один треугольник и три квадрата), но не изогонален в строгом смысле (который предполагает, что многогранник в целом выглядит одинаково, если рассматривать его поочередно в направлении к каждой вершине)⁴.

Если срезать углы куба по плоскостям, параллельным граням двойственного октаэдра, то на их месте останутся маленькие треугольники, а квадратные грани превратятся в восьмиугольники. При подходящем положении секущих плоскостей эти восьмиугольники будут правильными, и мы получим еще одно архимедово тело: *усеченный куб* $3 \cdot 8^2$ (ср. с разбиениями $4 \cdot 8^2$ и $3 \cdot 12^2$). Усеченный вариант * имеют каждое из пяти платоновых

* «Усеченный $\{p, q\}$ » — это $q(2p)^2$. См. фигуры 11, 15, 16, 25, 22 на фото I.

тел, а также кубооктаэдр и икосододекаэдр, но в последних двух случаях ($4 \cdot 6 \cdot 8$ и $4 \cdot 6 \cdot 10$) опять требуется модификация прямоугольников квадраты * (ср. с разбиением $4 \cdot 6 \cdot 12$).

Все рассмотренные архимедовы тела являются зеркально-симметричными (плоскости их симметрии перпендикулярны каждому ребру в его середине). Два остальных архимедовых тела не являются зеркально-симметричными — это *курносый куб* $3^4 \cdot 4$ и *курносый додекаэдр* $3^4 \cdot 5$ (17 и 21 на фото I). Проведем диагональ в каждом из 30 квадратов ромбоикосододекаэдра, выбирая одну из двух возможных диагоналей таким образом, чтобы через каждую из 60 вершин проходила ровно одна из этих новых линий. (Выбор диагонали в первом квадрате определяет выбор всех остальных.) В результате каждый квадрат оказывается разбитым на два равнобедренных прямоугольных треугольника; модифицируя их в равносторонние треугольники, мы получим курносый додекаэдр **. Курносый куб строится таким же способом из ромбокубооктаэдра, если оперировать только теми 12 квадратами, которые соответствуют ребрам куба (и не трогать 6 квадратов, которые отвечают его граням). Разбиение $3^4 \cdot 6$ можно рассматривать как «курносое $\{6, 3\}$ », а $3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ как «курносое $\{4, 4\}$ ». Более того, «курносый тетраэдр» — это икосаэдр $\{3, 5\}$; он получается описанным выше способом из кубооктаэдра (или «ромботетратетраэдра»).

Курносый куб и курносый додекаэдр встречаются каждый в двух энантиоморфных вариантах. Для определения их метрических свойств нужно решать кубические уравнения, в то время как для зеркально-симметричных архимедовых тел (и правильных многогранников) не требуется ничего сложнее квадратных уравнений (и хуже квадратных корней). Иначе говоря, зеркально-симметричные архимедовы тела допускают евклидово построение, а две курносые фигуры их не допускают.

* В связи с этой модификацией усеченный кубооктаэдр ($4 \cdot 6 \cdot 8$) иногда называют «большим ромбокубооктаэдром», а $3 \cdot 4^3$ в таком случае называют «малым ромбокубооктаэдром»; то же относится к усеченному икосододекаэдру и ромбоикосододекаэдру.

** Это название вряд ли можно считать удачным, поскольку данная фигура имеет такое же отношение к додекаэдру, как и к икосаэдру. Вероятно, лучше было бы назвать ее «курносый икосододекаэдр».

КОНСТРУКЦИЯ Г-ЖИ СТОТТ

Приведенное выше описание архимедовых тел восходит, по существу, к Кеплеру. Намного более изящную конструкцию зеркально-симметричных тел придумала Алисия Буль Стотт [6]. Ее метод не требует модификаций, и окончательная длина ребер такая же, как у исходного правильного многогранника. Используется про-

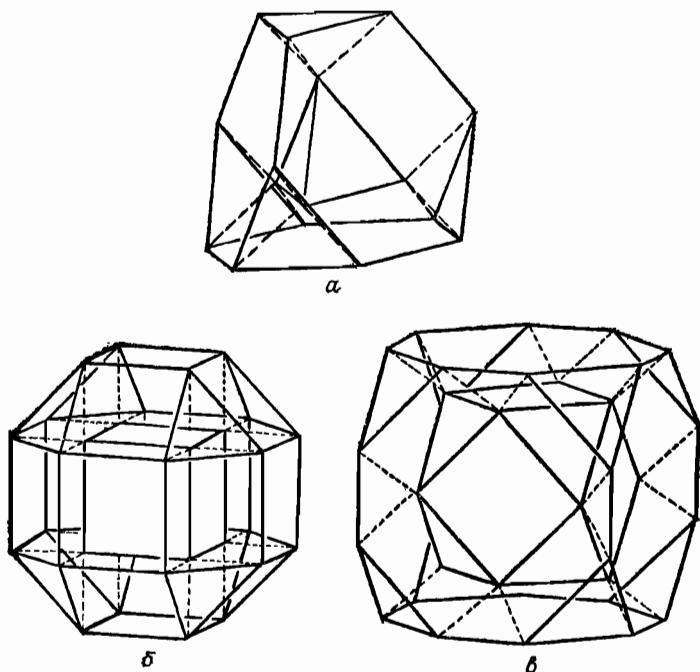


Рис. 5.4. Тетраэдр и усеченный тетраэдр (а); куб и ромбокубооктаэдр (б); усеченный куб и кубооктаэдр (в)

цесс *расширения*, при котором определенные множества элементов (а именно ребра или грани) отодвигаются от центра, сохраняя размер и ориентацию, до тех пор, пока образовавшиеся промежутки еще можно заполнять новыми правильными гранями (рис. 5.4, а). Обратный процесс называется *сжатием*. Расширяя какое-либо правильное тело по ребрам, получаем «усеченный» вариант. Расширяя куб (или октаэдр) по граням, получаем ромбокубооктаэдр $3 \cdot 4^3$. Расширяя его по 12 квадратам, соответствующим ребрам куба, или расширяя усеченный

куб по восьмиугольникам, получаем усеченный кубооктаэдр 4·6·8. Сжимая усеченный куб по треугольникам, приходим к кубооктаэдру и т. д. А. Стотт придумала для этих процессов компактные обозначения и обобщила их на многомерные пространства (на n -мерные пространства, $n > 3$) — в этих пространствах они особенно полезны.

РАВНОСТОРОННИЕ ЗОНОЭДРЫ

Многогранники, которые я собираюсь описать, впервые исследовал Е. С. Федоров [7, 8]. Интерес к ним особенно возрос после того, как П. С. Дончиан заметил, что эти многогранники можно рассматривать как трехмерные проекции n -мерных *гиперкубов* (либо *n -мерных политопов*, или *правильных ортотопов* (8-ячеек) [9]). Все ребра этих многогранников равны, а гранями, как правило, являются ромбы, но иногда и другие «параллельно-сторонние $2m$ -угольники», например центрально-симметричные равносторонние $2m$ -угольники⁶. Теория таких многогранников берет свое начало от следующей теоремы о разрезании многоугольников.

Всякий параллельно-сторонний $2m$ -угольник (в частности, всякий правильный $2m$ -угольник) можно разрезать (сколькими способами?) на $m(m-1)/2$ ромбов со сторонами одинаковой длины. Это легко доказать по индукции: ведь всякий параллельно-сторонний $2(m+1)$ -угольник можно получить из параллельно-стороннего $2m$ -угольника добавлением «полоски» из m ромбов. На самом деле пары параллельных сторон такого $2m$ -угольника могут иметь любые m различных направлений, и каждой паре направлений отвечает составляющий ромб; отсюда и получается число $m(m-1)/2$. Для двух перпендикулярных направлений ромб становится квадратом.

Рассмотрим теперь любую связку n прямых, проходящих через одну точку пространства. Предположим сначала, что никакие три из них не лежат в одной плоскости. (Описываемое построение принадлежит П. С. Дончиану.) Тогда существует многогранник, грани которого состоят из $n(n-1)$ ромбов, а ребра разбиваются на множества по $2(n-1)$ параллелей n заданным прямым. Точнее говоря, каждой паре прямых связки отвечает пара противоположащих граней со сторонами, параллельными этим прямым. Чтобы построить этот так называемый *равносторонний зоноэдр*, представим себе

плоскость, проходящую через какую-нибудь из прямых и постепенно совершающую полный оборот. Всякий раз, когда эта плоскость проходит через одну из остальных $n - 1$ прямых, берем ромб со сторонами, параллельными двум нашим прямым, и прикладываем его к ромбу, полученному на предыдущем шаге (не изменяя ориентации). Этот процесс приведет к замкнутой полоске из $2(n - 1)$ ромбов. Начав построение с другой из n прямых связки, мы получим другую такую полоску, имеющую две общие параллельные грани с предыдущей. Добавляя достаточное число таких полосок (или зон), мы построим многогранник.

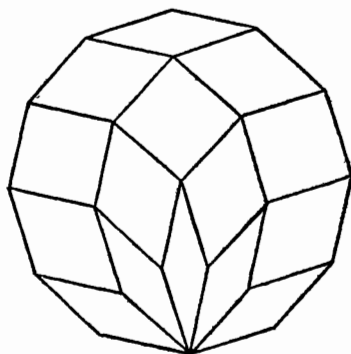


Рис. 5.5. Пятнадцать ромбов в двенадцатиугольнике

Если m из n прямых компланарны, то $m(m - 1)/2$ пар противоположащих ромбов образуют пару противоположащих параллельно-сторонних $2m$ -угольников. Если эти m прямых расположены симметрично, $2m$ -угольники будут правильными.

Таким способом при помощи трех попарно ортогональных прямых получается куб, а из трех прямых общего положения получается *ромбоэдр** (или ромбическая призма). В общем случае m компланарных прямых и одна дополнительная приводят к параллельно-сторонней $2m$ -угольной призме (она будет *прямой призмой*, если дополнительная прямая перпендикулярна плоскости, в которой лежат остальные m прямых).

* Употребляя это название, я не имею в виду, что все шесть граней представляют собой одинаковые ромбы.

Четыре «диаметра» куба (соединяющие пары противоположных вершин) приводят к ромбическому додекаэдру, шесть диаметров икосаэдра — к триаконтаэдру, а десять диаметров додекаэдра — к *эннеаконтаэдру**, грани которого состоят из 30 ромбов одного вида и 60 — другого. Шесть диаметров кубооктаэдра дают усеченный октаэдр, среди граней которого 6 квадратов и 8 правильных шестиугольников (что эквивалентно 8×3 ромбам), а 15 диаметров икосаэдра приводят к усеченному икосододекаэдру, грани которого состоят из 30 квадратов, 20 правильных шестиугольников ($= 20 \times 3$ ромбов) и 12 правильных десятиугольников ($= 12 \times 10$ ромбов). Последний пример: 9 диаметров октаэдра и кубооктаэдра (рассматриваемых вместе в соответствующем положении)** приводят к усеченному кубооктаэдру, грани которого — это 12 квадратов, 8 шестиугольников (т. е. 24 ромба) и 6 восьмиугольников (т. е. 36 ромбов). (См. фиг. 10, 18, 24, 16, 26 и 19 на фото I.)

Как в приведенных примерах, так и в общем случае полученный многогранник обладает тем же типом симметрии, что и заданная связка прямых. Если n прямых расположены симметрично вдоль некоторого конуса, то при любом n получается ромбоэдр с $n(n-1)$ гранями, имеющий центр симметрии и оси порядка n [11]. При $n=3$ все грани одинаковы; при $n=4$ или 5 можно добиться, чтобы они были одинаковы; это достигается правильным выбором прямых, а именно: угол между прямыми, взятыми через одну, должен быть дополнительным к углу между последовательными прямыми. Тогда при $n=4$ получается ромбический додекаэдр, а при $n=5$ — *ромбический икосаэдр* [12] (14 на фото I), который можно получить из триаконтаэдра, удалив какую-нибудь из зон и сложив вместе две части, на которые распалась остальная фигура. Удалив подходящую зону ромбического икосаэдра, мы приходим к новому ромбическому додекаэдру Билинского, все грани которого одинаковы, но отличаются от граней классического ромбического додекаэдра.

Общий зоноэдр Федорова можно получить из равностороннего зоноэдра удлинением или укорочением всех

* Он несколько напоминает фигуру, описанную на с. 87 книги [10].

** То есть перпендикуляров к девяти плоскостям симметрии куба (или октаэдра).

ребер каждого конкретного направления. Ромбы превращаются в параллелограммы, и «параллельно-сторонние $2m$ -угольники» перестают быть равносторонними. Заменив многоугольные грани с числом сторон более 4 соответствующим числом параллелограммов, мы придем к соотношениям $F = n(n-1)$, $E = 2F$ и $V = F + 2$. На самом деле *всякий выпуклый многогранник, все грани которого — параллелограммы, является зоноэдром* [13].

И последнее замечание на эту тему. Имеет место трехмерный аналог теоремы о том, что параллельно-сторонний $2m$ -угольник можно разрезать на $m(m-1)/2$ параллелограммов: описанный выше зоноэдр можно разрезать на $n(n-1)(n-2)/6$ параллелепипедов (по одному параллелепипеду для каждой тройки из n направлений).

МНОГОГРАННИКИ КЕПЛЕРА — ПУАНСО

Продолжим стороны правильного пятиугольника до новых пересечений; в результате мы получим звездчатый пятиугольник, или *пентаграмму*, которая долгое время трактовалась как некий мистический символ. Пентаграмму $\{5/2\}$ можно рассматривать как обобщенный

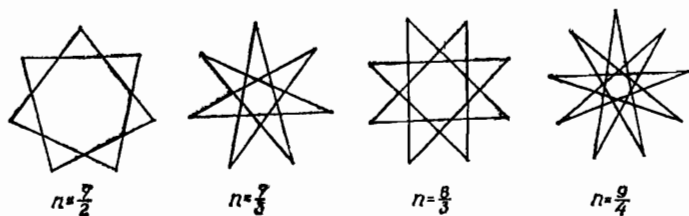


Рис. 5.6

многоугольник с пятью сторонами, дважды обходящими центр. Каждой из этих сторон отвечает центральный угол $4\pi/5$ с вершиной в центре, в то время как каждая сторона обычного правильного n -угольника вмещает угол $2\pi/n$. Таким образом, пентаграмма — это как бы n -угольник с $n = 5/2$. Аналогично каждое рациональное число $n = p/q$ (> 2) приводит к многоугольнику $\{n\}$, где числитель обозначает число сторон, а знаменатель — «плотность», или «спецификацию» (рис. 5.6).

Этот процесс «озвезднения» — перехода от выпуклых к звездчатым формам — применим и в пространстве. Звездчатые грани правильного додекаэдра примыкают по пять в 12 новых вершинах, образуя *малый звездча-*

тый додекаэдр $\{5/2, 5\}$. Эти новые вершины принадлежат также некоторому икосаэдру. Если провести ребра этого икосаэдра, но сохранить прежние плоскости граней, то получится многогранник, грани которого — 12 обычных пятиугольников, но сечения около вершин — пентаграммы. Это так называемый *большой додекаэдр* $\{5, 5/2\}$. Как подсказывает его символ, он двойствен малому звездчатому додекаэдру $\{5/2, 5\}$. Применяя процесс «озвезднения» к граням $\{5, 5/2\}$, получаем *большой звездчатый додекаэдр* $\{5/2, 3\}$, который имеет 20 вершин обычного додекаэдра. Двойственный к нему *большой икосаэдр** $\{3, 5/2\}$ имеет 20 треугольных граней, а его вершины — это вершины обычного икосаэдра. (См. фиг. 31, 34, 32, 30 на фото II.)

Итак, мы увеличили число конечных правильных многогранников с 5 до 9. Один из способов убедиться в том, что тем самым все возможности исчерпаны**, состоит в следующем. «Многоугольник Петри» многогранника $\{p, q\}$ по-прежнему характеризуется числом h , которое определяется из уравнения

$$\cos^2(\pi/h) = \cos^2(\pi/p) + \cos^2(\pi/q)$$

и в том случае, когда p и q не целые. Запишем уравнение в симметричном виде

$$\cos^2(\pi/p) + \cos^2(\pi/q) + \cos^2(\pi/k) = 1$$

(где $1/k = 1/2 - 1/h$); его рациональными решениями являются три перестановки чисел 3, 3, 4 и шесть перестановок чисел 3, 5, $5/2$, т. е. всего, как и требовалось, 9 решений.

$\{p, q\}$	V	E	F	D	Название	Открыватель
$\{5/2, 5\}$	12	30	12	3	Малый звездчатый додекаэдр	Кеплер (1619)
$\{5/2, 3\}$	20	30	12	7	Большой звездчатый додекаэдр	Кеплер
$\{5, 5/2\}$	12	30	12	3	Большой додекаэдр	Пуансо (1809)
$\{3, 5/2\}$	12	30	20	7	Большой икосаэдр	Пуансо

* Очень хорошие изображения этих фигур дал Люка; см. [29] в литературе к гл. IV, т. II, с. 206—208, 224.

** Впервые это доказал (но другим способом) Коши; см. [14].

Многогранники $\{5/2, 5\}$ и $\{5, 5/2\}$ не удовлетворяют формуле Эйлера $V - E + F = 2$, которая имеет место для всех обычных многогранников. Почему это так, мы объясним в гл. VIII (как видно, именно по этой причине Шлефли [15]* отрицал существование двух этих фигур). Однако все девять конечных правильных многогранников удовлетворяют следующей обобщенной теореме, принадлежащей А. Кэли:

$$d_V V - E + d_F F = 2D,$$

где d_F — «плотность» грани (равная 1 для обычного многогранника и 2 для пентаграммы), d_V — плотность вершины (точнее, сечения многогранника плоскостью, близкой к вершине) и D — плотность всего многогранника (т. е. число обходов граней вокруг центра).

Изучены также «архимедовы» звездчатые многогранники [16], но эта тема далеко выходит за рамки настоящей книги.

59 ИКОСАЭДРОВ

Представьте себе большой деревянный блок с (каким-то образом) нарисованным внутри него малым тетраэдром или кубом. Если сделать распилы по плоскостям граней малого тела и отбросить все куски, доходящие до поверхности блока, то останется только само это малое тело. Но если вместо тетраэдра или куба рассматривать октаэдр, то останется девять кусков: сам октаэдр и тетраэдры по одному на каждой грани, превращающие октаэдр в *stella octangula*, которая имеет вид двух взаимопроникающих тетраэдров (упомянутое выше правильное соединение). Аналогичным образом додекаэдр приводит к $1 + 12 + 30 + 20$ кускам: сам додекаэдр, 12 пятиугольных пирамид, превращающих его в малый звездчатый додекаэдр, 30 тетраэдральных клиньев, превращающих последний в большой додекаэдр, и 20 двойных треугольных пирамид, дополняющих большой додекаэдр до большого звездчатого додекаэдра.

Наконец, для икосаэдра [17] получается $1 + 20 + 30 + 60 + 20 + 60 + 120 + 12 + 30 + 60 + 60 (= 473)$ куска, из которых можно сложить 32 различных зеркально-симметричных тела, обладающих каждое полной икосаэдральной симметрией, и 27 пар энантиоморфных

* Шлефли определил $\{5/2, 3\}$, $\{3, 5/2\}$, но не определил $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$.

тел, обладающих только поворотной симметрией. В первое множество входит сам исходный икосаэдр, соединение шести октаэдров (сделанное из первых $1 + 20 + 30 + 60 + 20 + 60 + 120$ кусков) и большой додекаэдр (на него пойдут все куски, кроме 60 последних). Во второе множество входят соединение пяти тетраэдров и более сложные фигуры такого же красиво «переплетенного» вида *.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ

Как мы знаем, существует много способов симметричного заполнения плоскости правильными многоугольниками; точно так же есть много способов симметричного заполнения пространства правильными и архимедовыми телами. Ради краткости ограничимся обсуждением только таких заполнений, при которых все ребра (так же, как и вершины) имеют одинаковое «окружение». Таких пространственных разбиений ровно пять ([19], с. 75—129, рис. 12, 14, 15, 18, 33): к ребру могут примыкать (i) четыре куба; (ii) два тетраэдра и два октаэдра, расположенные через один; (iii) тетраэдр и три усеченных тетраэдра; (iv) три усеченных октаэдра; (v) октаэдр и два кубооктаэдра. Обозначим их символами $[4^4]$, $[3^4]$, $[3^2 \cdot 6^2]$, $[4 \cdot 6^2]$, $[3^2 \cdot 4]$, которые указывают на многоугольники (поверхности раздела), сходящиеся у данного ребра.

«Правильное» заполнение $[4^4]$ нам хорошо знакомо. Оно «самодвойственно» в том смысле, что центры всех кубов являются вершинами идентичного заполнения. Взятые через одну вершины этого заполнения определяют заполнение $[3^4]$: один тетраэдр вписан в каждый куб и один октаэдр окружает каждую пропущенную вершину. Это заполнение обладает особенно высокой степенью правильности (хотя и состоит из многогранников не одного вида, как $[4^4]$, а двух видов): не только все его вершины и ребра, но и треугольные грани имеют одинаковое окружение (каждый треугольник принадлежит одному многограннику обоих видов). Если соединить центры соседних многогранников отрезками, перпендикулярными общим граням, и плоскостями, перпендикулярными ребрам, получится двойственное простран-

* Тончайшая работа по изображению всех этих фигур выполнена Дж. Ф. Петри; см. [18].

ственное заполнение, скажем $[3^4]'$. Оно состоит из ромбических додекаэдров, причем некоторые вершины (те, которые раньше были центрами тетраэдров) окружены четырьмя такими додекаэдрами, а другие (бывшие центры октаэдров) — шестью.

Из $[3^4]$ можно построить заполнение $[3^2 \cdot 6^2]$, если каждый из определенного множества тетраэдров $[3^4]$ склеить с четырьмя примыкающими к нему октаэдрами

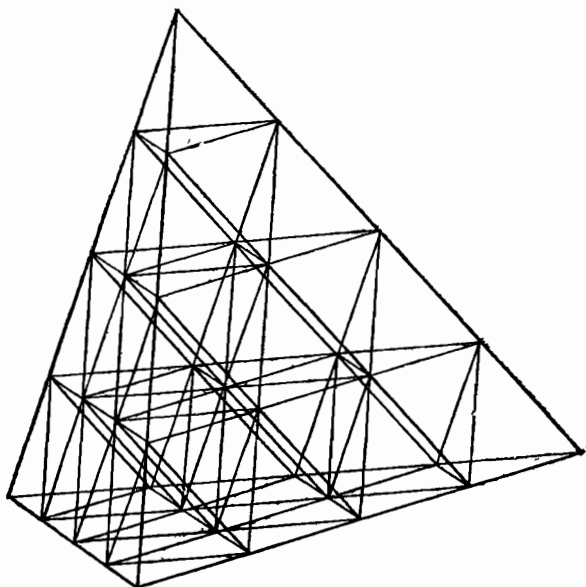


Рис. 5.7. Пространственное разбиение $[3^4]$

и с шестью другими тетраэдрами, связывающими их в пары, так, чтобы получился усеченный тетраэдр*. Таким образом, $[3^2 \cdot 6^2]$ имеет половину вершин заполнения $[3^4]$, которое в свою очередь имеет половину вершин $[4^4]$.

Пространственное заполнение усеченными октаэдрами $[4 \cdot 6^2]$ двойственно заполнению «равнобедренными» тетраэдрами (или тетрагональными бисфеноидами), вершины которого принадлежат двум двойственным друг

* Точно так же любое из разбиений плоскости 6^3 , $(3 \cdot 6)^2$, $3^4 \cdot 6$ можно получить из разбиения 3^6 , соединяя определенные группы из шести треугольников в шестиугольники.

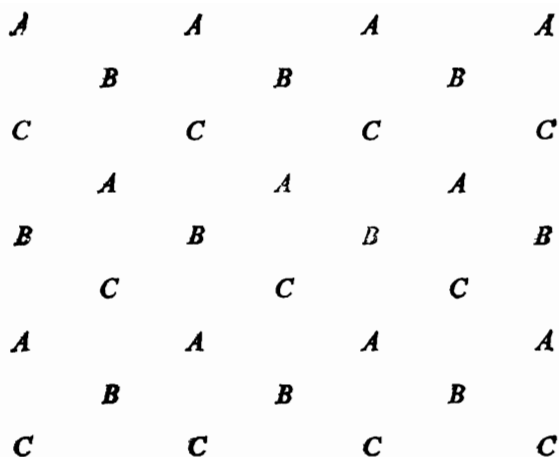
другу заполнения [4⁴] (так называемая «объемно-центрированная решетка» в кристаллографии). Вершинами заполнения [3².4] являются середины ребер (или центры квадратов) заполнения [4⁴].

УКЛАДКА ШАРОВ ИЛИ ПЛОТНАЯ УПАКОВКА ⁶

Допустим, что требуется заполнить большой ящик каким-то количеством одинаковых маленьких шариков, причем так, чтобы они лежали слоями, один поверх другого. Это можно сделать многими разными способами, из которых я опишу три. Во-первых, каждый шар может располагаться на вершукке лежащего под ним шара из предыдущего слоя, касаться четырех соседних шаров своего слоя и одного шара следующего слоя. При такой укладке каждый шар касается шести других. Во-вторых, можно слегка раздвинуть шары в каждом слое так, чтобы они уже не касались друг друга и каждый шар опирался на четыре шара находящегося под ним слоя и служил опорой четырем шарам слоя над ним. При этом «раздвижение» можно сделать так, чтобы точки касания располагались в вершинах куба. В-третьих, шары можно уложить так, чтобы каждый из них касался четырех шаров нижележащего слоя, четырех шаров своего слоя и четырех шаров вышележащего слоя. Такое расположение называется *нормальной укладкой* или *сферической плотной упаковкой*. При такой упаковке в ящик укладывается больше всего шаров. (Хотя один твердый шар может касаться не более чем двенадцати других шаров такого же размера, далее мы убедимся, что есть много разных способов упаковки одинаковых шаров, при которой каждый из них касается ровно двенадцати других.)

Указанные три упаковки можно описать следующим образом. В первой упаковке центры шаров являются вершинами пространственного заполнения [4⁴], а сами шары вписаны в кубы двойственного заполнения [4⁴]. Во второй упаковке шары вписаны в усеченные октаэдры заполнения [4.6²] (при этом они касаются шести угольников, но не достают до квадратов). В третьей упаковке шары вписаны в ромбические додекаэдры заполнения [3⁴]', а их центры служат вершинами [3⁴].

Вершины заполнения [3⁴] в ряду параллельных плоскостей образуют треугольные разбиения [3⁶].



На нашей схеме показан «план» такого расположения точек, ортогонально спроектированных на одну из плоскостей, которую мы будем считать горизонтальной. Точки *A* — это проекции точек одной плоскости, точки *B* — проекции точек следующей плоскости, точки *C* — следующей за ней плоскости; затем опять идут точки *A* и т. д. в циклическом порядке. Теперь представим себе, что каждая из этих точек есть центр шара. Тогда точки *A* дадут нам слой плотно упакованных шаров, каждый из которых касается шести других. Точки *B* определяют второй такой слой, лежащий поверх первого; при этом каждый шар из одного слоя касается трех шаров из другого слоя. Точки *C* представляют третий слой, покоящийся на втором. Однако столь же «экономичная» укладка получится и в том случае, если центры шаров третьего слоя будут располагаться снова не над точками *C*, а над точками *A*. Итак, на каждом шаге каждый новый слой может лежать или не лежать точно по вертикали над предпоследним до него слоем.

Укладка *ABCABC* ... соответствует сферической плотной упаковке; с другой стороны, укладка *ABABAB*... отвечает гексагональной плотной упаковке. В обоих случаях пространство заполнено шарами примерно на 74 %. Если сделать большое число одинаковых шариков из пластилина, обвалить их в меловой пудре, упаковать каким-либо способом и затем сжать в сплошной ком, то шарики, оказавшиеся в центре кома, будут стремиться принять форму ромбического додекаэдра или трапеце-

ромбического додекаэдра [20]. Если вместо аккуратной упаковки шарики, уложенные случайным образом, как можно плотнее «утрясти», а затем спрессовать, как раньше, получатся неправильные многогранники разных видов. Среднее число граней [21] равно не 12, а примерно 13,3. Не доказано, что одинаковые шары при такой *случайной* укладке занимают меньшую часть пространства, чем те же шары при нормальной укладке.

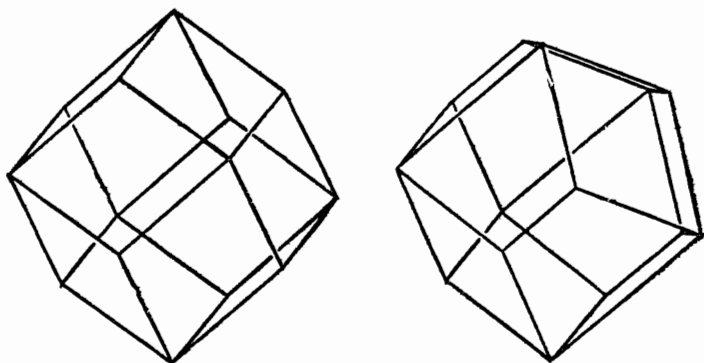


Рис. 5.8. Ромбический (*слева*) и трапецеромбический додекаэдры

Однако ясно, что при любом незначительном смещении общий объем возрастет за счет увеличения просветов.

Стоя босиком на влажном песке на берегу моря, вы, наверное, замечали, что песок вокруг ноги становится сравнительно сухим, в то время как оставляемый ногою след наполняется свежей водой. Это явление объяснил, как мне кажется, Осборн Рейнольдс. Песчинки, обкатанные морем до почти сферической формы, образуют нечто вроде случайной укладки. Под давлением ноги эта укладка нарушается, просветы между песчинками увеличиваются и заполняются водой. Когда вы убираете ногу, исходная укладка частично восстанавливается и вода остается поверх песка.

ПРАВИЛЬНЫЕ «ГУБКИ»

Определение правильного многогранника (с. 144) включает две симметрии; во всех до сих пор рассмотренных случаях это были *поворотные симметрии*. Допустив

бесконечное множество вершин, ребер и граней, можно отнести это определение к разбиениям плоскости $\{3, 6\}$, $\{6, 3\}$, $\{4, 4\}$. Нелепо рассматривать грани с бесконечным множеством сторон или вершин, окруженные бесконечным множеством граней; поэтому в данном случае указанные симметрии должны быть поворотными симметриями конечного порядка. Но «симметрические операции» не обязательно должны представлять собой «чистые» повороты вокруг определенных осей — это могут быть и *зеркальные повороты*. (Зеркальным поворотом или *поворотной симметрией* с осью l и центром O мы называем комбинацию поворота и зеркальной симметрии, которые всегда можно выбрать так, чтобы ось l поворота была перпендикулярна плоскости π симметрии, пересекая ее в некоторой точке O .) Такое преобразование переводит «внутренность» многогранника в его «внешность» и наоборот. Значит, «внутренность» идентична «внешности», и многогранник (разбивающий пространство на две одинаковые части) должен быть бесконечным. Двугранные углы при ребрах данной грани поочередно положительны и отрицательны, а ребра при одной вершине поочередно лежат то по одну, то по другую сторону от некоторой плоскости. Благодаря этому сумма углов на гранях при одной вершине больше 2π .

Можно доказать, что многогранники $\{p, q\}$ такого типа задаются целочисленными решениями уравнения

$$2 \sin (\pi / p) \sin (\pi / q) = \cos (\pi / k),$$

которых имеется пять: $\{6, 6\}$ ($k = 3$); $\{6, 4\}$ и $\{4, 6\}$ ($k = 4$); $\{3, 6\}$ ($k = 6$); $\{4, 4\}$ ($k = \infty$). Сюда вошли три разбиения плоскости, потому что в пространстве поворот плоскости можно рассматривать и как «чистый», и как зеркальный. Полученные три новые фигуры — это «губки» с k -угольными дырками*.

Гранями $\{6, 6\}$ служат шестиугольники пространственного разбиения $[3^2 \cdot 6^2]$, гранями $\{6, 4\}$ — шестиугольники разбиения $[4 \cdot 6^2]$, а гранями $\{4, 6\}$ — половина квадратов разбиения $[4^4]$. Остальные грани этих пространственных разбиений служат дырками. Две последние «губки» (открытые Петри в 1926 г.) *взаимны* в том смысле, что вершины одной из них являются центрами

* Фотографии моделей таких фигур см. в книге Коксетера ([8], с. 77), где эти три «губки» обозначены $\{6, 6|3\}$, $\{6, 4|4\}$, $\{4, 6|4\}$.

граней другой и наоборот*; $\{6, 6\}$ самовзаимна, или, точнее, взаимна другой «губке» $\{6, 6\}$, конгруэнтной первой.

Чтобы сделать модель «губки» $\{6, 6\}$, вырежьте из тонкого картона несколько наборов по четыре шестиугольника, склейте между собой шестиугольники каждого набора в форме шестиугольных граней усеченного

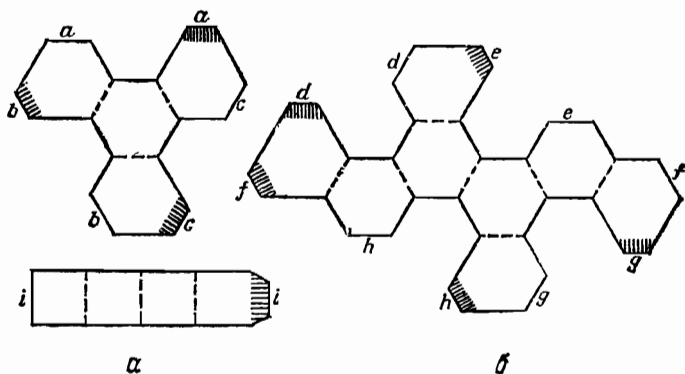


Рис. 5.9

тетраэдра ($3 \cdot 6^2$); а затем склейте между собой эти наборы, шестиугольник к шестиугольнику, следя за тем, чтобы ни одно ребро не принадлежало более чем двум граням (рис. 5.9, *а, сверху*). (В законченной модели грани окажутся двойными, что облегчает изготовление конструкции и делает ее более прочной.) Аналогично можно сделать модель $\{6, 4\}$ из наборов по восемь шестиугольников, образующих шестиугольные грани усеченных октаэдров ($4 \cdot 6^2$) (рис. 5.9, *б*). Наконец, для изготовления модели $\{4, 6\}$ воспользуйтесь колечками из четырех квадратов (рис. 5.9, *а, внизу*). Последняя модель изгибаема. Ее можно сжимать, превращая квадратные дырки в ромбические. (Однажды Дж. Ч. П. Миллер, сделав большую модель, послал ее по почте в плоском конверте.)

* Плоские разбиения могут быть взаимными в этом смысле, а конечные многогранники не могут. Центры граней октаэдра являются вершинами куба, но вершины этого октаэдра являются центрами граней другого (большого) куба.

Дж. М. Андреас и Р. М. Сталкер независимо друг от друга открыли семейство изгибаемых конечных многогранников с $2n$ вершинами, $6n$ ребрами (из которых $2n$ сдвоенных) и $4n$ треугольными гранями; n может равняться 6, 8 или любому большему целому числу. Гранями служат грани n тетраэдров, соединенных между собой в циклическом порядке по определенным парам противоположных ребер каждого, так что получается фигура наподобие кольца. При $n = 6$ эта фигура еще достаточно жесткая, но при $n = 8$ она уже может изгибаться и выворачиваться до бесконечности, как колечко

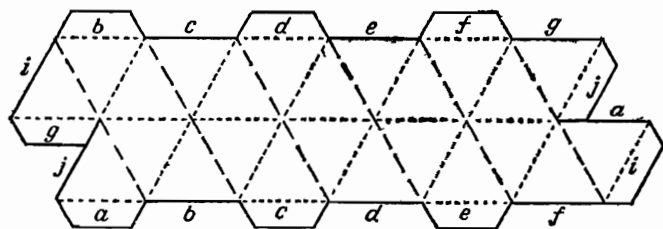


Рис. 5.10

дыма. Когда n четно, фигура стремится принять симметричную форму; особенно хороша она при $n = 10$ *. Когда n нечетно, из-за полного отсутствия симметрии картина становится, пожалуй, еще более захватывающей. При $n \geq 22$ кольцо может заузиваться.

Для изготовления модели такого кольца достаточно одного листа бумаги. В случае $n = 6$ скопируйте приведенную здесь диаграмму (рис. 5.10), вырежьте ее, сделайте сгибы по внутренним линиям — по штриховым линиям вверх, а по пунктирным вниз — и приклейте клапаны в соответствии с буквенными обозначениями. В случае когда n кратно 4, концы соединяются несколько иначе (см. рис. 7.25). При нечетном n годится любой из указанных способов.

Поскольку у нашего многогранника два типа ребер, он неправильный, и мы не потеряем в симметрии, если вместо равносторонних треугольников будем рассматривать равнобедренные. Сделав двойные ребра достаточно

* Один из «стефаноидов», описанных М. Брюкнером в его книге [22], представляет собой кольцо из десяти неправильных тетраэдров.

короткими по сравнению с остальными ребрами, можно добиться того, что и при $n = 6$ * кольцо удастся полностью вывернуть, как в случае $n \geq 8$.

КАЛЕЙДОСКОП [24]

Обычный калейдоскоп состоит, по существу, из двух плоских зеркал, наклоненных друг к другу под углом $\pi/3$ или $\pi/4$, и какого-то предмета (или набора предметов), помещенного между зеркалами так, чтобы он отражался в них обоих. В результате мы видим шесть или восемь симметрично расположенных изображений (в зависимости от угла) этого предмета, которые создают очень эффектную картину. Соединив на петлях два зеркала (без рам), мы сможем произвольно изменять угол между ними; ясно, что при угле π/n получается $2n$ изображений предмета (включая сам этот предмет). В предельном случае мы будем иметь два параллельных зеркала и теоретически бесконечное число изображений (которое на практике ограничено лишь яркостью освещения и качеством зеркал). Если рассматривается точка на биссекторной плоскости угла между зеркалами, то ее изображения лежат в вершинах правильного $2n$ -угольника. Если это точка на одном из зеркал, то ее попарно sdвоенные изображения находятся в вершинах правильного n -угольника. На практике такой точкой может быть пламя свечи или маленький шарик из пластилина или замазки.

Поставим два зеркала вертикально и присоединим к ним третье вертикально расположенное зеркало таким образом, чтобы каждая пара зеркал образовала угол, являющийся целой частью развернутого угла (т. е. угол величины π/n , где n — целое), иначе говоря, чтобы в горизонтальном сечении зеркал получался треугольник с углами π/l , π/m и π/n , где l , m и n — целые числа. Эти числа должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1,$$

имеющему все три решения: 3, 3, 3; 2, 3, 6; 2, 4, 4. Во всех случаях число изображений бесконечно. Изменяя

* Такое кольцо (из шести тетрагональных бисфеноидов) продавалось в Соединенных Штатах как детская игрушка с буквами алфавита на его 24 гранях (патент № 1997022, выданный в 1935 г.). См. также [23].

положение точечного объекта в треугольнике, мы получим вершины некоторых изогональных разбиений*. В частности, если взята вершина треугольника, точка пересечения биссектрисы с противоположной стороной или центр вписанной окружности (где пересекаются все три биссектрисы), то ячейками разбиения будут правильные многоугольники. Результаты для разных положений точки представлены на рис. 5.11 (в обозначениях с. 117—118).

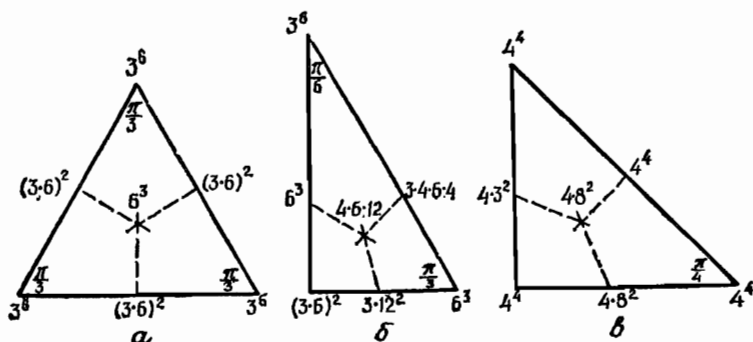


Рис. 5.11

Треугольную сетку, которую создают зеркала, можно было бы закрасить попеременно в белый и черный цвета. Выбрав подходящую точку в каждом треугольнике одного цвета (но игнорируя соответствующие точки в треугольниках другого цвета), мы получим вершины разбиения 3^6 (еще раз), $3^4 \cdot 6$ и $3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$. (Последнее однородное разбиение $3^3 \cdot 4^2$ подобным способом не получается.) На рис. 5.11, а—в можно усмотреть много соотношений между различными разбиениями, например: среди вершин 6^3 встречаются вершины 3^6 ; вершины 6^3 делят ребра (другого) разбиения 3^6 на три равные части; вершины одного разбиения 4^4 делят пополам ребра другого и т. д.

Если расположить третье зеркало не вертикально, а горизонтально, скажем поставить на него два соединенных зеркала, то число изображений уже не будет бесконечным: при угле π/n между вертикальными зерка-

* Особенно красивую картину можно увидеть, поместив между тремя зеркалами (без рам) горящую свечу. В университете шт. Миннесота этой идеей воспользовались при создании двух короткометражных научно-популярных фильмов: «Двугранные калейдоскопы» и «Симметрия куба».

лами число изображений будет равно $4n$. Изображения точки одного из вертикальных зеркал сдвигаются и образуют вершины n -угольной призмы. При таком расположении зеркал два из трех двугранных углов между ними — прямые. Естественным обобщением является случай, когда эти три угла равны π/l , π/m , π/n .

При отражении относительно плоского зеркала предмет и его изображение находятся на одинаковом расстоянии от плоскости зеркала, поэтому в таком обобщенном калейдоскопе все изображения точки лежат на сфере с центром в точке пересечения плоскостей трех зеркал. Эти плоскости высекают на ней сферический треугольник с углами π/l , π/m , π/n . Изображения этих плоскостей разбивают всю сферу на сетку (или «карту») таких треугольников, и в каждом из них получается изображение любого предмета, помещенного в первый треугольник. Следовательно, число изображений равно числу таких треугольников, заполняющих всю сферическую поверхность.

Примем радиус сферы за единицу. Тогда площадь сферы равна 4π , а площадь каждого треугольника равна $(\pi/l) + (\pi/m) + (\pi/n) - \pi$. Находим искомое число:

$$4 / \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right).$$

Оно должно быть положительным, поэтому числа l , m и n следует выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

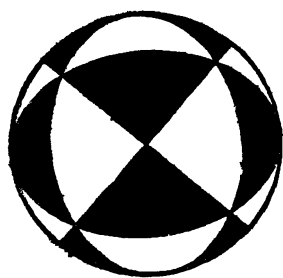
$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1,$$

которое имеет следующие решения: 2, 2, n ; 2, 3, 3; 2, 3, 4; 2, 3, 5. Первый случай уже разобран, остальные изображены на рис. 5.12 (принадлежащем Дж. Ф. Петри).

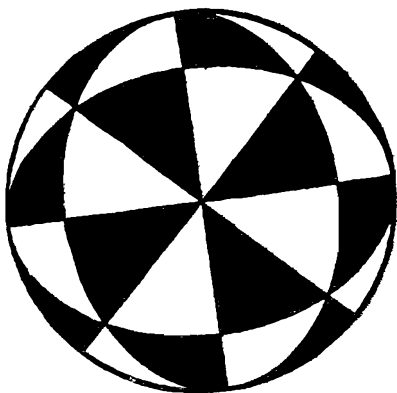
Для практического показа нужно вырезать зеркала в форме круговых секторов (одинакового и довольно большого радиуса), углы * которых равны сторонам сферического треугольника с углами π/l , π/m , π/n .

При разном положении точечного объекта в сферическом треугольнике (или в телесном угле между тремя зеркалами) мы получим вершины некоторых изогональных многогранников. В частности, если взята точка на ребре между двумя зеркалами либо на одном из зеркал на равном расстоянии от двух других или в центре сфе-

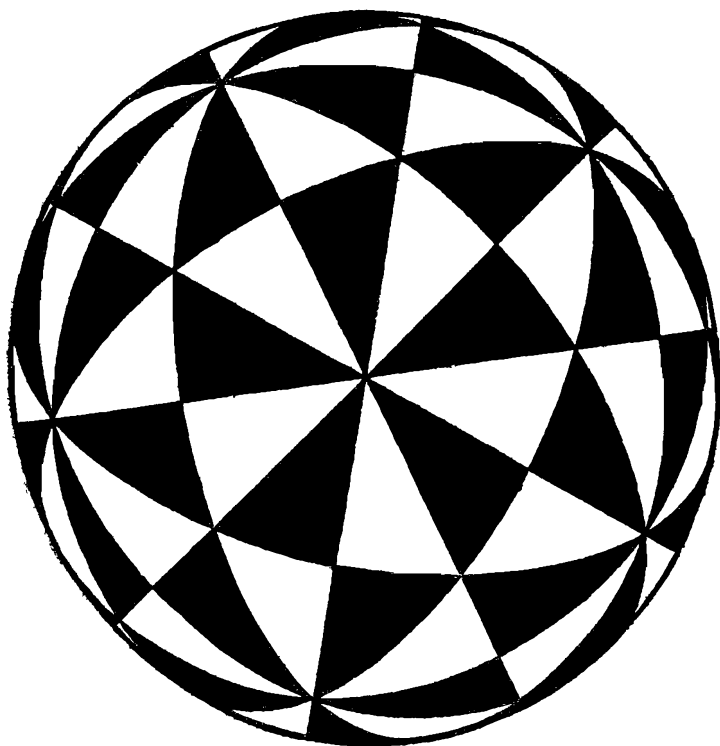
* В трех указанных случаях эти углы равны соответственно: $54^\circ 44'$, $54^\circ 44'$, $70^\circ 32'$; $35^\circ 16'$, 45° , $54^\circ 44'$; $20^\circ 54'$, $31^\circ 43'$, $37^\circ 23'$.



a



b



c

Рис. 5.12

ры, касающейся всех трех зеркал, то гранями этих многогранников будут правильные многоугольники. На рис. 5.13 можно видеть, из каких точек получаются [25] те или иные однородные многогранники; эти построения аналогичны рис. 5.11, а—в, относящимся к случаю разбиений плоскости.

Выбрав подходящую точку внутри каждого белого (или черного) треугольника [26], мы получим вершины

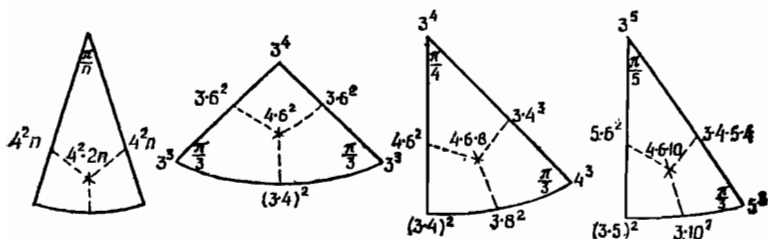


Рис. 5.13

многогранника $3^3 \cdot n$, 3^5 , $3^4 \cdot 4$ или $3^4 \cdot 5$. Выше уже говорилось, что курносый куб $3^4 \cdot 4$ имеет два энантиоморфных варианта: вершины одного из них лежат в белых треугольниках, а вершины второго — в черных. То же относится к курносому додекаэдру $3^4 \cdot 5$.

Вводя четвертое зеркало, можно получать пространственные разбиения. Четыре плоскости, наклоненные друг к другу под углами, равными целым частям развернутого угла π (т. е. углам вида π/n , где n — целое), приводят к тетраэдрам трех разных форм. Их удобно вырезать из прямоугольного блока размерами $1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Пусть $ABCD$ — горизонтальный квадрат стороной $\sqrt{2}$ на высоте 1 над таким же квадратом $A'B'C'D'$ (рис. 5.14). Срезав чередующиеся углы A' , B , C' , D плоскостями, проходящими через наборы трех других вершин, мы получим тетрагональный бисфеноид $AB'CD'$ — одну из трех упомянутых выше форм. Вторую форму имеют отрезанные угловые куски, такие, как $ABCB'$. (Из двух таких кусков можно составить фигуру той же формы, что и $AB'CD'$.) Третья форма получится, если разрезать $ABCB'$ пополам вдоль плоскости симметрии — плоскости $BB'E$, где E — середина AC . Этой половиной будет $AEBB'$. Заметим, что ребра AE , EB и BB' — это три равных отрезка в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

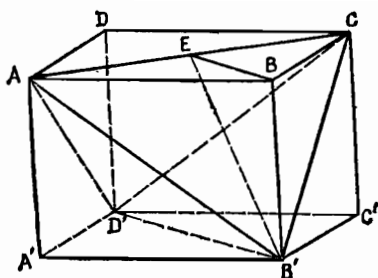


Рис. 5.14

Точечный объект в таком тетраэдре может порождать самые разнообразные ([19], рис. 17—24) пространственные разбиения. Некоторые из них указаны на рис. 5.15 (где $AB'CD'$, $ABCB'$ и $AEBB'$ изображены в том же положении, что и выше.)

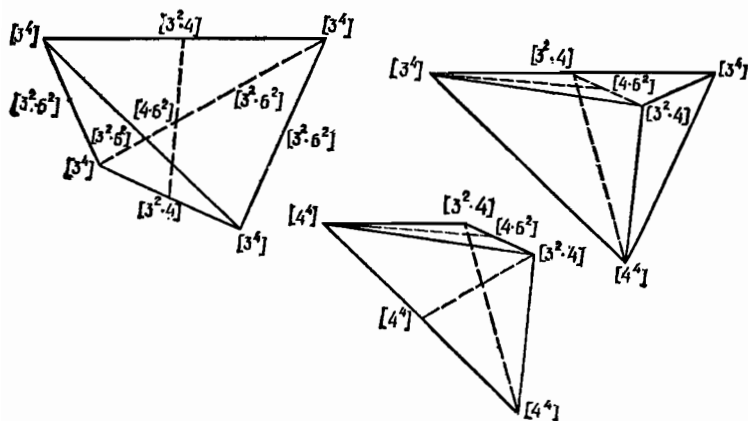


Рис. 5.15

Пять зеркал можно расположить в виде некоторых треугольных призм, что приводит к разбиениям на призмы. Шесть зеркал можно расположить под прямыми углами в виде трех пар параллельных плоскостей — так, как если бы в комнате были зеркальные стены, пол и потолок. При этом получится пространственное разбиение на прямоугольные блоки. Как доказал [27] Пойа, всякий калейдоскоп фактически эквивалентен калейдоскопу, составленному не более чем из шести зеркал.

1. Heath T. A History of Greek Mathematics. — Oxford, 1921.
2. Opera Omnia. — Frankfurt, 1864, vol. V, p. 121.
3. Walsh T. R. S. Geometriae Dedicata, 1972, vol. I, pp. 117—123.
4. Steinitz E., Rademacher H. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. — Berlin, 1934, S. 11.
5. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1930, ser. A. vol. CCXXIX, p. 336.
6. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* (Amsterdam), 1910, vol. XI, № 1.
7. *Zeitschrift für Kristallografie und Mineralogie*, 1893, Bd. XXI, S. 689.
8. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. — Л.: Изд-во АН СССР, 1953. См. также Coxeter H. Twelve Geometric Essays. — Carbondale (Ill.): Southern Illinois University Press, 1968, chap. 4.
9. Schläfli L. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1860, vol. III, p. 66: "(4, 3, 3, ..., 3)"; Hinton C. H. The Fourth Dimension. — London, 1906; Schoute P. H. Mehrdimensionale Geometrie. — Leipzig, 1905, Bd. II, S. 243—246; Sommerville D. M. Y. An Introduction to the Geometry of n Dimensions. — London, 1929, pp. 49, 171, 182, 190.
10. Sharp A. Geometry Improv'd. — London, 1717.
11. Chilton B. L., Coxeter H. S. M. *American Mathematical Monthly*, 1963, vol. LXX, pp. 946—951.
12. Bilinski S. *Gláshnik*, 1960, vol. XV, pp. 252—262.
13. Coxeter H. Regular Polytopes. — New York: Dover, 1973, p. 27.
14. *Journal de L'École Polytechnique*, 1813, vol. IX, pp. 68—86.
15. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1860, vol. III, pp. 66, 67.
16. Coxeter, Longuet-Higgins; Miller. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1954, ser. A, vol. CCXLVI, pp. 401—450.
17. Wheeler A. H. Proceedings of the International Mathematical Congress, Toronto, 1924, vol. I, pp. 701—708; Brückner M. Vielecke und Vielfache. — Leipzig, 1900 (вклейка VIII, № 2, 26; IX, № 3, 6, 11, 17, 20; X, № 3 и XI, № 14, 24).
18. Coxeter H. S. M., Du Val P., Flather H. T., Betrie J. F. Fifty-nine Icosahedra. — New York: Springer, 1982.
19. Andreini A. *Memorie della Società italiana delle Scienze*, 1905, ser. 2, vol. XIV.
20. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. Пер. с польск. — М.: Наука, 1981, с. 105.
21. Bernal J. D. *Nature*, 1959, vol. CLXXXIII, pp. 141—147; см. [16] в литературе к гл. II, с. 581—582.
22. Brückner M. Vielecke und Vielfache, S. 216 (и вклейка VIII, № 4).
23. Goldberg M. *Journal of Mathematics and Physics*, 1947, vol. XXVI, pp. 10—21.
24. Hess E. *Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie*, 1889, Bd. I, S. 54—65.
25. См. Möbius, *Gesammelte Werke*, 1861, Bd. II, S. 656 (figs. 47, 51, 54); Wythoff W. A. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*. — Amsterdam, 1918, vol. XX, pp. 966—970; Robinson G. de B. *Journal of the London Mathematical Society*, 1931, vol. VI, pp. 70—75; Coxeter H. S. M. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1935, ser. 2, vol. XXXVIII, pp. 327—339.
26. Möbius (см. [25], figs. 46, 49, 53).
27. *Annals of Mathematics*, 1934, vol. XXXV, p. 594.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Шахматная доска и шахматные фигуры издавна широко использовались в различного рода математических развлечениях, многие из которых имеют чисто геометрическую структуру; связанные с ними задачи отличаются характерными особенностями и столь многочисленны, что могут составить отдельную главу книги. Несколько задач, вполне подходящих и для включения в настоящую главу, были уже рассмотрены в гл. IV.

Обыкновенная шахматная доска состоит из 64 малых квадратиков, называемых полями доски (или клетками) и расположенных, как изображено на рис. 6.1; они составляют 8 строк (горизонталей) и 8 столбцов (вертикалей). Поля шахматной доски, как правило, попеременно выкрашены в белый и черный (реже — белый и красный) цвета. Они могут быть обозначены числами 11, 12 и т. д., где первая цифра указывает номер столбца, а вторая — номер строки, т. е. двумя цифрами в подходяще выбранной системе координат (какой?), выражающими соответственно абсциссу и ординату геометрического центра поля. В дальнейшем я буду пользоваться именно такими обозначениями. Обобщенная шахматная доска состоит из n^2 полей, образующих n строк и n столбцов. Большинство из описываемых здесь задач может быть распространено на случай доски размером $n \times n$.

Обычные шахматные фигуры — это короли, ферзи, слоны, кони, ладьи (или туры); в игре участвуют также пешки. Полагаю, что читателю известны правила, по которым двигаются по доске («ходят») эти фигуры.

Здесь я совсем не затрагиваю шахматной игры и проблем, связанных с этой игрой в обычном ее понимании. Отдельные конфигурации шахматных фигур могут быть предметом математического анализа, однако в общем случае число ходов у шахматиста столь велико, что их невозможно просчитать далеко вперед. Это

вполне очевидно, но, быть может, мне удастся еще более подчеркнуть невозможность эффективного обсуждения теории шахматной игры, если я добавлю, что, как было показано, существует 197 299 вариантов игры на уровне всего только первых четырех ходов и 71 782 раз-

18	28	38	48	58	68	78	88
17	27	37	47	57	67	77	87
16	26	36	46	56	66	76	86
15	25	35	45	55	65	75	85
14	24	34	44	54	64	74	84
13	23	33	43	53	63	73	83
12	22	32	42	52	62	72	82
11	21	31	41	51	61	71	81

Рис. 6.1

личных позиций, которые могут образоваться после первых четырех ходов (по два хода с каждой стороны), из них 16 556 позиций возникает при ходах одними лишь пешками [1].

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СИЛА ФИГУР

Прежде всего мне хотелось бы рассмотреть вопрос об оценке относительной силы различных шахматных фигур [2]. Если на каком-то поле шахматной доски стоит определенная фигура, то число полей, находящихся под боем этой фигуры, в общем случае зависит от расположения фигуры. Силу фигуры можно оценивать средним *числом полей*, которые она держит под ударом, когда ставится последовательно на **каждое** поле доски. Иначе говоря, сила фигуры может быть определена вероятностью того, что, скажем, стоящий на произвольном поле доски король окажется под шахом* (если не наложено других ограничений, то такой шах называется *простым шахом*). На какое бы поле ни ставилась фигура первоначально, всегда остается 63 других поля, на

* Здесь и далее подразумевается, что цвет короля отличается от цвета фигур. — *Прим. перев.*

которые можно поставить короля. Мы условно считаем, что король с одинаковой вероятностью может оказаться на любом из этих полей. Следовательно, вероятность того, что король окажется под шахом, равна $1/63$ от среднего числа полей, которые могут быть биты данной фигурой.

Для ладьи, поставленной на любое поле, число находящихся под ее ударом полей всегда будет равно 14. Следовательно, вероятность простого шаха здесь равна $14/63$, или $2/9$. Аналогично для шахматной доски размером $n \times n$ подобная вероятность равна $2(n-1)/(n^2-1)$, или $2/(n+1)$.

Если конь расположен на любом из 4 угловых полей, подобных полю 11, то под его боем находятся два поля; если он стоит на любом из 8 полей, подобных полям 12 и 21, то бьет **три** поля; если он стоит на любом из 4 полей, подобных полю 22, или на любом из 16 граничных полей типа 13, 14, 15, 16, то держит под ударом **четыре** поля; если конь расположен на любом из 16 полей типа 23, 24, 25, 26, то под его ударом находятся **шесть** полей; наконец, если он расположен на любом из оставшихся 16 центральных полей, то бьет **восемь** полей. Следовательно, среднее число полей, находящихся под боем коня, равно $(4 \times 2 + 8 \times 3 + 20 \times 4 + 16 \times 6 + 16 \times 8)/64$, т. е. $336/64$. Соответственно если на доске имеются конь и король, то вероятность простого шаха, который конь может объявить королю, равна $336/(64 \times 63)$, т. е. $1/12$. Для шахматной доски размером $n \times n$ такая вероятность, как нетрудно подсчитать, будет равна $8(n-2)/n^2(n+1)$.

Слон, стоящий на любом из 28 граничных полей, образующих внешнюю рамку доски, держит под ударом **семь** полей. Когда он стоит на любом из 20 полей следующей «рамки», он бьет **девять** полей. Если слон расположен на любом из 12 полей, образующих следующую, меньшую по размеру рамку, он бьет **одиннадцать** полей, а когда он стоит на одном из 4 центральных полей, то держит под боем **тринадцать** полей. Следовательно, если на доске имеются король и слон, то вероятность того, что слон объявит королю простой шах, равна $(28 \times 7 + 20 \times 9 + 12 \times 11 + 4 \times 13)/(64 \times 63)$, т. е. $5/36$. Подобным образом для шахматной доски размером $n \times n$ при четном n интересующая нас вероятность равна $2(2n-1)/3n(n+1)$. Чтобы оценить аналогичную вероятность для нечетных значений n , потребуются бо-

лее длинные рассуждения, так как в этом случае число белых полей доски отличается от числа черных. Мы не будем приводить здесь эти рассуждения, поскольку они не представляют особых трудностей, — интересующийся читатель всегда может воспроизвести их самостоятельно.

Ферзь, будучи помещенным на какое-либо поле доски, бьет все поля, которые бьют слон и ладья, поставленные на то же самое поле. Следовательно, если на доске стоят король и ферзь, то вероятность того, что король будет находиться под простым шахом, равна $(2/9) + (5/36)$, т. е. $13/36$. Аналогичным образом для доски размером $n \times n$ при четном n подобная вероятность будет равна $2(5n - 1)/3n(n + 1)$; чему равна она в случае нечетного n , попробуйте определить сами.

При указанных предположениях относительная сила ладьи, коня, слона и ферзя равна 8, 3, 5 и 13 соответственно. Согласно шахматному словарю Стонтонa, эмпирически найденные силы этих фигур оцениваются числами 548, 305, 350, 994; по данным Билгера, они составляют 540, 350, 360, 1000, при этом сила пешки принимается равной 100.

Между приведенными теоретическими и эмпирическими результатами имеется заметное расхождение. Это наводит на мысль, что, по-видимому, силу фигуры лучше всего определять величиной вероятности шаха королю, возникающего при случайной расстановке на доске фигуры и короля, причем — в противоположность тому, как мы поступали ранее — шах королю засчитывается лишь в том случае, когда король не может спастись от него, просто побив объявившую шах фигуру. Такой шах называется *истинным шахом* в отличие от простого шаха.

Путем рассуждений, аналогичных приведенным выше можно вычислить вероятности и истинного шаха, объявленного той или иной фигурой. В случае ладьи вероятность истинного шаха равна $(4 \times 12 + 24 \times 11 + 36 \times 10)/(64 \times 63)$, т. е. $1/6$; для доки размером $n \times n$ при четном n эта вероятность будет равна $2(n - 2)/n(n + 1)$. В случае коня все шахи королю будут истинными и, следовательно, вероятность истинного шаха равна $1/12$, а для шахматной доски размером $n \times n$ эта вероятность будет равна $8(n - 2)/n^2(n + 1)$. Для слона вероятность истинного шаха королю равна $364/(64 \times 63)$, т. е. $13/144$, а для шахматной доски размером $n \times n$ при четном n она составит $2(n - 2)(2n - 3)/3n^2(n + 1)$. В случае ферзя вероятность истинного шаха королю рав-

на $1036/(64 \times 63)$, т. е. $37/144$, а для доски размером $n \times n$ при четном n она будет равна $2(n-2)(5n-3)/3n^2(n+1)$.

В этих условиях относительная сила ладьи, коня, слона и ферзя равна 24, 12, 13 и 37; согласно Стонтону, эмпирические оценки дают значения, близкие к 22, 12, 14, 40, а согласно Билгеру, — 18, 12, 12, 33.

Те же самые рассуждения могут быть применены для сравнения силы комбинаций различных фигур. Например, сила двух слонов (один белопольный, другой чернопольный) и двух ладей, вычисленная по вероятности простого шаха, оказывается равной соответственно $35/124$ и $37/93$. Следовательно, с этой точки зрения ферзь сильнее двух слонов, но слабее двух ладей, как обычно и считают шахматисты.

Аналогичная задача возникает при нахождении вероятности того, что два короля, расположенные на доске случайным образом, не будут занимать смежные поля, т. е. ни один из них не будет шаховать другого. Эта вероятность равна $43/48$, и, следовательно, вероятность того, что короли будут занимать смежные поля, составляет $5/48$. Если на доске располагаются три короля, то вероятность того, что никакие два из них не занимают смежные поля, равна $1061/1488$. Соответствующие вероятности [3] для доски размером $n \times n$ равны

$$(n-1)(n-2)(n^2+3n-2)/n^2(n^2-1)$$

и

$$(n-1)(n-2)(n^4+3n^3-20n^2-30n+132)/n^2(n^2-1)(n^2-2).$$

ЗАДАЧА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ*

Одна из классических «задач на шахматной доске» формулируется так: определить число способов расстановки восьми ферзей таким образом, чтобы ни один ферзь не мог взять другого (в общем случае — это задача о расстановке n ферзей на доске размером $n \times n$). Впервые эту задачу поставил в 1850 г. Франц Наук**.

* Об истории этой задачи рассказано в [4], дальнейшие исследования, связанные с ней. см. [19] в литературе к гл. II, с. 300—356.

** Первым эту задачу сформулировал в 1848 г. немецкий шахматист М. Беццель. Проф. Ф. Наук (слепой от рождения) нашел полный набор решений и опубликовал их в 1850 г. — *Прим. перев.*

В 1874 г. С. Гюнтер [6] предложил метод решения этой задачи с использованием определителей. Так, если каждое поле шахматной доски обозначить буквой, то перечень возможных решений задачи для доски размером $n \times n$, если только они существуют, можно записать в виде определителя¹

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \dots & \dots & \dots \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & \dots & \dots & \dots \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{2n-3} & b_{2n-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \beta_{2n-2} & a_{2n-1} & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

в выражении для которого сохраняются только члены, не содержащие одинаковых букв или индексов.

Причина этого очевидна. Каждый член определителя содержит один и только один элемент из каждой строки и один и только один элемент из каждого столбца: следовательно, каждый член определителя состоит из элементов, отвечающих таким клеткам доски, при расстановке на которые ферзи не могут угрожать друг другу «ходами ладьи» (ходами по вертикали или по горизонтали). Кроме того, буквы и индексы в этом определителе выбраны таким образом, что все одинаковые буквы и все одинаковые индексы соответствуют «ходам слона» (т. е. полям, расположенным по одной диагонали); следовательно, если мы оставляем в определителе только такие члены, у которых все буквы и все индексы различны, то они будут символизировать положения, в которых ферзи не могут угрожать друг другу также и ходами по диагоналям. (Ясно, что знаки членов определителя для нас абсолютно несущественны.)

В случае обычной шахматной доски определитель имеет 8-й порядок и содержит $8!$, т. е. 40 320 членов. Совершенно очевидно, что использовать этот метод для 64-клеточной доски или для доски еще большего размера невозможно; здесь необходимо найти какой-либо эффективный способ быстрого выбора нужных нам членов определителя.

Один из таких способов был предложен Дж. У. Л. Глэшером [7] в 1874 г. — и, насколько мне известно, лучшего способа пока не найдено. Если все

способы расстановки n ферзей на доске размером $n \times n$ уже известны, то можно получить все расстановки некоторого частного вида для $n + 1$ ферзя на доске размером $(n + 1) \times (n + 1)$, после чего легко получить все другие решения для $n + 1$ ферзя на доске размером $(n + 1) \times (n + 1)$. Этот способ достаточно проиллюстрировать на одном примере.

Ясно, что при $n = 2$ или $n = 3$ задача вообще не имеет решений. При $n = 4$ в определителе Гюнтера удастся сохранить два члена, удовлетворяющие требуемым условиям, и, следовательно, дающие решения задачи, а именно члены $b_2 c_5 \gamma_3 \beta_6$ и $c_3 \beta_2 b_6 \gamma_5$. Чтобы найти решения, отвечающие случаю $n = 5$, Глэшер поступает следующим образом. Сначала выписывается определитель Гюнтера:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ e_5 & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & a_9 \end{vmatrix}.$$

Для получения расположений (если таковые имеются), содержащих элемент a_9 , достаточно приписать к a_9 те расположения, отвечающие доске с 16 полями, которые не содержат элементов a . Так как ни одно из приведенных выше выражений, отвечающих значению $n = 4$, не содержит элементов a , мы получаем два искомых расположения, а именно $b_2 c_5 \gamma_3 \beta_6 a_9$ и $c_3 \beta_2 b_6 \gamma_5 a_9$. Расположения, содержащие a_1, e_5, e_5 , можно выписать по симметрии. Полученные таким образом 8 расположений все различны; мы назовем их *расположениями первого типа*.

Выше были найдены только те расположения, которые содержали угловые поля доски (угловые элементы определителя). Таким образом, оставшиеся расположения находятся из определителя

$$\begin{vmatrix} 0 & b_2 & c_3 & d_4 & 0 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ 0 & \delta_6 & \gamma_7 & \beta_8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если образовать здесь минор элемента b_2 и проставить нули вместо всех членов, содержащих букву b или ин-

декс 2, то тем самым мы получим все расположения, содержащие элемент (поле доски) b_2 . Рассматриваемый минор таким образом сводится к единственному своему члену $d_6 a_5 \delta_4 \beta_8$. Итак, мы получили еще одно расположение, а именно: $b_2 d_6 a_5 \delta_4 \beta_8$. Из соображений симметрии можно найти подобные расположения, включающие элементы $\beta_2, \delta_4, \delta_6, \beta_8, d_6$ и d_4 . Легко видеть, что среди этих восьми расположений только два отличаются друг от друга — эти расположения можно назвать *расположениями второго типа*.

Аналогичным образом оставшиеся расположения можно получить из определителя

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_4 & c_5 & 0 \\ \gamma_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ 0 & \gamma_5 & \beta_6 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если образовать здесь минор элемента c_3 и проставить нули вместо всех членов, содержащих букву c или индекс 3, то тем самым мы получим все расположения, содержащие элемент (поле) c_3 . Но этот минор вообще равен нулю, ибо он имеет нулевую (нижнюю) строку. Отсюда следует, что расположений, содержащих c_3 , не имеется вообще, — а значит, в силу симметрии не имеется и расположений, содержащих γ_3, γ_7, c_7 . (Если бы существовали какие-либо расположения, содержащие третий элемент первого или последнего столбца (или строки) определителя, то мы назвали бы их *расположениями третьего типа*.)

Итак, всего существует **десять и только десять** решений поставленной задачи, а именно: восемь расположений первого типа, два расположения второго типа и нуль расположений третьего типа.

Рассуждая далее аналогичным образом, мы убедимся, что при $n = 6$ нет расположений первого типа, имеются четыре расположения второго типа и нет расположений третьего типа, т. е. всего в этом случае мы будем иметь четыре требуемых расположения ферзей. При $n = 7$ мы получим 16 расположений первого типа, 24 расположения второго типа, ни одного расположения третьего типа и ни одного расположения четвертого типа (определите, что это такое!), т. е. всего 40 рас-

положений ферзей. Наконец, при $n = 8$ мы получим 16 расположений первого типа, 56 расположений второго типа и 20 расположений третьего типа, т. е. всего 92 решения поставленной нами задачи.

Следует отметить, что все расположения одного типа не обязательно различны. В общем случае из любого расположения ферзей можно получить еще семь родственных ему расположений. Из этих восьми расположений первые четыре — это исходное, или «фундаментальное», расположение и еще три, получающиеся из него поворотом доски на 90° , на 180° или на 270° ; остальные четыре расположения получаются из уже имеющихся при зеркальном отражении доски (как целого). Однако в отдельных случаях зеркальные отражения расположений могут совпасть с исходными расположениями, а иногда и указанные выше повороты не дают новых расположений. Так, для шахматных досок с числом полей $4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2$ существуют соответственно 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92, 341, 1784 фундаментальных расположений ферзей, никакие два из которых не сводятся одно к другому, в то же время общее число расположений здесь соответственно равно 2, 10, 4, 40, 92, 352, 724, 2680, 14 200.

Читатель, возможно, заинтересуется приведенным ниже набором фундаментальных решений. Каждое расположение ферзей на шахматной доске определяется некоторым числом, но, поскольку необходимо, чтобы на каждой вертикали стоял только один ферзь, я введу более простую систему обозначений, чем указанная ранее, а именно: пусть первая цифра означает номер поля, занятого ферзем в первой вертикали (номер поля отсчитывается сверху или снизу по вертикали), вторая цифра — номер поля во второй вертикали и т. д. Таким образом, для доски размером 4×4 — решение 3142 означает расположение ферзей на третьем поле первой вертикали, на первом поле второй вертикали, на четвертом поле третьей вертикали и на втором поле четвертой вертикали. Введем также следующие обозначения. Если из некоторого фундаментального расположения ферзей получается только четыре расположения, то будем использовать для записи этого расположения круглые скобки (), если получается всего два расположения — квадратные скобки [], другие фундаментальные расположения, дающие по восемь расположений каждое, будем записывать без скобок.

Для доски размером 4×4 существует единственное фундаментальное решение задачи, а именно расположение [3142].

Для доски размером 5×5 существует два фундаментальных расположения ферзей, а именно: 14253 и [25314]. Можно заметить, что циклические расположения 14253, 25314, 31425, 42531, 53142 позволяют получить пять наложимых друг на друга позиций с использованием 5 белых ферзей, 5 черных, 5 красных, 5 желтых и 5 синих. Если все эти ферзи поставить на доску одновременно, то они заполнят целиком всю доску; причем окажется, что ни один ферзь не будет находиться под боем ферзей одинакового цвета.

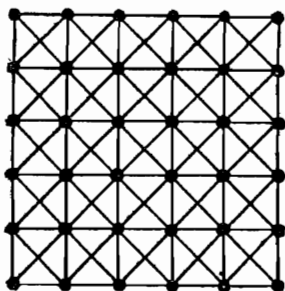


Рис. 6.2

Для доски размером 6×6 существует одно фундаментальное расположение ферзей, а именно (246135). Соответствующие ему четыре расположения также наложимы друг на друга. Для рассматриваемого случая даже была изготовлена игра, которая в свое время продавалась на улицах Лондона по пенсу за штуку. Она представляла собой небольшую деревянную доску, размеченную так, как показано на рис. 6.2, с отверстиями в точках, отмеченных кружочками. Нужно было вставить в отверстия 6 шпешков таким образом, чтобы никакие два из них не располагались на размеченных линиях.

Для доски размером 7×7 существует 6 фундаментальных расположений: 1357246, 3572461, (5724613), 4163572, 3162574, (2574136). Следует отметить, что расположение 1357246 позволяет получить циклическими перестановками семь наложимых друг на друга позиций.

Для (8×8) -доски расположения таковы, что четвертое от одного из углов доски поле всегда оказывается

занятым ферзем. В этом случае существует 12 фундаментальных решений задачи, задаваемых расположениями 41582736, 41586372, 42586137, 42736815, 42736851, 42751863, 42857136, 42861357, 46152837, (46827135), 47526138, 48157263. Приведенная классификация расположений была предложена Дж. М. Андреасом. Из них седьмое расположение — единственное, в котором не имеется трех ферзей, принадлежащих (если считать их поставленными точно в центрах полей) одной прямой. Как оказалось [8], невозможно найти 8 наложимых расположений; однако можно пятью стандартными способами выбрать 6 наложимых расположений. К некоторым из этих расположений можно добавить еще по 2 набора из 7 ферзей; таким образом, 62 поля из 64 будут заняты шестью наборами по 8 ферзей и двумя наборами по 7 ферзей, причем ни один ферзь не будет находиться под ударом ферзей из своего набора. Это выглядит так: 16837425, 27368514, 35714286, 41586372, 52473861, 68241753, 73625140, 04152637. Подобные задачи о наложениях возможны и для шахматных досок других размеров.

Норман Эннинг обнаружил, что 7 из 12 фундаментальных расположений (а именно 1-е, 2-е, 5-е, 7-е, 8-е, 9-е, 11-е из нашего списка) могут быть найдены путем подходящего выбора квадратов размером 8×8 на едином бесконечном «орнаментальном узоре». Основная картина орнамента (в орнаментальном искусстве это называется «раппорт») представляет собой два параллельных ряда из четырех полей, где последовательные поля связаны ходом коня.

Для шахматной доски произвольного размера решения задачи о ферзях можно без особого труда найти опытным путем. Следующая таблица решений была составлена Деррингтоном:

	для доски размером
2.4.1.3	4×4
2.4.1.3.5	5×5
2.4.6.1.3.5	6×6
2.4.6.1.3.5.7	7×7
2.4.6.8.3.1.7.5	8×8
2.4.1.7.9.6.3.5.8	9×9
2.4.6.8.10.1.3.5.7.9	10×10
2.4.6.8.10.1.3.5.7.9.11	11×11
2.4.6.8.10.12.1.3.5.7.9.11	12×12
2.4.6.8.10.12.1.3.5.7.9.11.13	13×13

9.7.5.3.1.13.11.6.4.2.14.12.10.8	14 × 14
15.9.7.5.3.1.13.11.6.4.2.14.12.10.8	15 × 15
2.4.6.8.10.12.14.16.1.3.5.7.9.11.13.15	16 × 16
2.4.6.8.10.12.14.16.1.3.5.7.9.11.13.15.17	17 × 17
2.4.6.8.10.12.14.16.18.1.3.5.7.9.11.13.15.17	18 × 18
2.4.6.8.10.12.14.16.18.1.3.5.7.6.11.13.15.17.19	19 × 19
12.10.8.6.4.2.20.18.16.14.9.7.5.3.1.19.17.15.13.11	20 × 20
21.12.10.8.6.4.2.20.18.16.14.9.7.5.3.1.19.17.15.13.11	21 × 21

Эту таблицу можно, разумеется, продолжить; указанное правило нарушается при n вида $6m + 2$ или $6m + 3$.

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ФИГУР

Рассмотренная задача о восьми ферзях наводит на мысль об аналогичной задаче отыскания максимального числа королей — или вообще любых других одинаковых шахматных фигур, — которые можно расставить на доске таким образом, чтобы ни одна из них не была под ударом другой фигуры. Интересно также оценить возможное число решений в каждом случае.

В задаче о королях наибольшее возможное число фигур равно 16: например, в одном из решений короли стоят на полях 11, 13, 15, 17, 31, 33, 35, 37, 51, 53, 55, 57, 71, 73, 75, 77. Случай ферзей мы уже рассмотрели выше; общее число ферзей здесь равно 8. В задаче о слонах наибольшее возможное их число равно 14 — и слоны должны располагаться на граничных полях шахматной доски; например, в одном из решений слоны стоят на полях 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87; общее число решений здесь равно 256. В случае коней наибольшее возможное число фигур равно 32 — например, их можно поставить на все белые или все черные поля (следовательно, здесь имеются два фундаментальных расположения коней). В задаче о ладьях наибольшее возможное число фигур равно 8 — и всего существует $8!$ расположений ладей требуемого типа (почему?).

ЗАДАЧА О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ФИГУР

Другая задача аналогичного вида связана с определением минимального числа королей — или любых других одинаковых шахматных фигур, — которые можно поставить на шахматную доску так, чтобы они держали под боем или занимали все поля доски.

Так, наименьшее число королей в этой задаче рав-

но 9; их можно, например, поставить на поля 11, 14, 17, 41, 44, 47, 71, 74, 77. Наименьшее число ферзей — 5, их можно, например, поставить на поля 18, 35, 41, 76, 82. Число слонов — 8, соответствующие поля — например, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48. Число коней — 12, их можно расположить, например, на полях 26, 32, 33, 35, 36, 43, 56, 63, 64, 66, 67 и 73, при этом они группируются симметричным образом в виде четырех троек коней. Наименьшее число ладей равно 8, а расположение их очевидно.

В случае ферзей эта задача обсуждалась также и для шахматной доски размером $n \times n$ при различных значениях n (см. [5] и [9], приложение, с. 244 и далее). При $n = 2$ или 3 одного ферзя можно поставить так, что он будет бить все поля доски; при этом существует одно фундаментальное расположение. При $n = 4$ требуются два ферзя и существуют 3 фундаментальных расположения, а именно расположение ферзей на полях 11 и 33 либо 12 и 42, либо 22 и 23 — всего же задача имеет 12 решений. При $n = 5$ требуются три ферзя и существует 37 фундаментальных расположений, что дает в целом 186 решений поставленной задачи. При $n = 6$ также требуется три ферзя, но существует только одно фундаментальное расположение, а именно когда ферзи расположены на полях 11, 35 и 53; это дает всего 4 решения задачи. При $n = 7$ требуется 4 ферзя, одно из 5 фундаментальных расположений задается установкой ферзей на полях 12, 26, 41, 55. При $n = 8$ существует 638 фундаментальных расположений.

Йениш предложил также задачу определения минимального числа ферзей, которые можно было бы расположить на доске размером $n \times n$ таким образом, чтобы они держали под боем все незанятые поля при условии, что ни один ферзь не бьет поле, занятое каким-либо другим ферзем. В этом случае при $n = 4$ требуется три ферзя, которые можно поставить, например, на поля 11, 23, 42, при этом существует 2 фундаментальных расположения, дающих всего 16 решений задачи. При $n = 5$ требуется три ферзя — их можно поставить, например, на поля 11, 24, 43 или 11, 34, 53; всего существует 2 фундаментальных расположения. При $n = 6$ требуется четыре ферзя, которые можно поставить на поля 13, 36, 41, 64; здесь существует 17 фундаментальных расположений. При $n = 7$ требуется также 4 ферзя, но существует только 1 фундаментальное расположение, уже упоминав-

шею в предыдущей задаче, а именно когда ферзи стоят на полях 12, 26, 41, 55; это дает всего 8 решений задачи. При $n = 8$ требуется пять ферзей и имеется не менее чем 91 фундаментальное расположение — одно из них задается, например, полями 11, 23, 37, 62, 76.

Я предлагаю читателям, интересующимся подобными вопросами, самостоятельно рассмотреть соответствующие задачи для других шахматных фигур* и определить число возможных решений в каждом случае.

Одна из задач того же типа связана с определением минимального числа ферзей (или других фигур), которые можно было бы расположить на шахматной доске таким образом, чтобы они защищали друг друга и держали под ударом все незанятые поля доски. Число ферзей в таком случае равно 5, их можно, например, поставить на поля 24, 34, 44, 54 и 84. Наименьшее число слонов равно 10, их можно поставить, например, на поля 24, 25, 34, 35, 44, 45, 64, 65, 74 и 75. Число коней должно равняться 14; их можно поставить, например, на поля 32, 33, 36, 37, 43, 44, 45, 46, 63, 64, 65, 66, 73 и 76 (это решение «полусимметрично»; возможны также две другие позиции). Число ладей в такой задаче должно быть равно 8 — расположение этих фигур очевидно. Предоставляю интересующимся читателям самостоятельно определить число решений в каждом из указанных случаев.

В связи с описываемым классом задач мне хотелось бы упомянуть еще два вопроса, близкие по смыслу к рассматриваемым и подсказанные мне капитаном Тертоном.

Первый из них касается расстановки на шахматной доске восьми ферзей таким образом, чтобы они атаковали **наименьшее возможное** число полей. Так, если ферзей поставить на поля 21, 22, 62, 71, 73, 77, 82, 87, то вне их удара окажутся 11 полей; тот же результат можно получить и при других расположениях ферзей. А можно ли разместить восемь ферзей так, чтобы вне их удара находилось более чем 11 полей? Мне не удалось преуспеть ни в нахождении такого расположения, ни в доказательстве того, что полученный ответ — окончательный!

* Подобная задача для коней рассматривалась в [10].

Другой вопрос связан с расстановкой на шахматной доске m ферзей (при $m < 5$) таким образом, чтобы они атаковали наибольшее возможное число полей. Например, четыре ферзя можно расставить на доске так, что они будут держать под боем 58 полей (помимо занимаемых ими четырех полей), и только 2 поля окажутся не под угрозой; ферзей можно поставить, скажем, на поля 35, 41, 76 и 82. Аналогичные задачи с другими фигурами читатель может попытаться решить самостоятельно.

Существует бесчисленное множество подобных задач, связанных с рассмотрением различных комбинаций шахматных фигур. Так, если ферзей поставить на поля 35, 41, 76 и 82, то они будут атаковать или занимать все поля шахматной доски, кроме двух, — а эти два поля могут быть атакованы или заняты ферзем, королем, ладьей, слоном или пешкой. Если же ферзи стоят на полях 22, 35, 43 и 54, то они атакуют или занимают все поля, кроме трех, причем два из них могут быть атакованы конем, занимающим третье поле.

ОБХОД ФИГУР ПО ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Шахматные задачи другого типа состоят в отыскании таких ходов шахматной фигуры, посредством которых она последовательно могла бы обойти все поля доски, посетив каждое из них по одному разу.

Маршрут коня². Начну с классической задачи — о маршруте коня на шахматной доске. Литература [11] на эту тему столь обширна, что я не буду даже пытаться полностью проанализировать существующие разнообразные методы решения поставленной задачи. Ограничусь лишь несколькими замечаниями о решениях, с которыми мне довелось ознакомиться непосредственно, в частности о решениях Муавра, Эйлера, Вандермонда, Варнсдорфа и Роже.

В случае шахматной доски с четным числом полей маршрут коня может быть *замкнутым* или *обратимым*, т. е. таким, что с последнего поля конь может пойти на первое, а может и не быть таковым, однако для доски с нечетным числом полей замкнутого маршрута коня наверняка не существует. В самом деле, если конь сначала находится на белом поле, то первый ход должен привести его на черное поле, а следующий — на белое, и т. д. Следовательно, если маршрут коня проходит че-

рез все поля доски, то в случае доски с нечетным числом полей конь последним ходом должен ступить на поле того же цвета, что и поле, с которого он сделал первый ход, — но с этого поля он наверняка не может перейти на первое.

Насколько мне известно, самые первые решения этой задачи были даны Монмором и Муавром* в начале XVIII в. Эти решения относятся к обычной шахматной доске с 64 полями; они были получены путем мысленного деления доски на центральный квадрат из 16 полей и окружающую его рамку шириной в два поля. Если

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

a

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

б

Рис. 6.3. Решение Муавра (а); решение Эйлера для шахматной доски 6×6 (б)

первоначально конь стоит на одном из полей рамки, то он будет обходить ее в одном и том же направлении, пока не завершит обход всех полей, после чего неизбежно перейдет в центральный квадрат. После обхода рамки нетрудно найти способ обхода оставшихся полей. Если в исходной позиции конь стоял на одном из полей центрального квадрата, то порядок обхода совершается в обратном направлении. Данный метод можно применять к квадратным и прямоугольным шахматным доскам произвольного размера, что достаточно хорошо иллюстрируется приведенным на рис. 6.3, а решением Муавра

* Эти авторы послали свои решения Бруку Тейлору, который, видимо, и предложил им указанную задачу. Мне не известно, где впервые были опубликованы эти решения; они приведены в книге Озаниама и Озаниама — Монтукла (см. [2] в гл. I, изд. 1803, т. I, с. 178; изд. 1840, с. 80).

(числа указывают последовательные ходы коня). Рядом я поместил частично сходное решение, полученное Эйлером для доски размером 6×6 (рис. 6.3, б). Чтобы воспроизвести эти решения на обычной шахматной доске, удобно воспользоваться фишками, ставя их после каждого хода коня на новое поле.

Самая ранняя попытка математического анализа этой проблемы была предпринята Леонардом Эйлером [12] в 1759 г.; это было сделано по предложению

55	58	29	40	27	44	19	22	22	25	50	39	52	35	60	57
60	39	56	43	30	21	26	45	27	40	23	36	49	58	53	34
57	54	59	28	41	18	23	20	24	21	26	51	38	61	56	59
38	51	42	31	8	25	46	17	41	28	37	48	3	54	33	62
53	32	37	<i>a</i>	47	16	9	24	20	47	42	13	32	63	4	55
50	3	52	33	36	7	12	15	29	16	19	46	43	2	7	10
1	34	5	48	<i>b</i>	14	<i>c</i>	10	18	45	14	31	12	9	64	5
4	49	2	35	6	11	<i>d</i>	13	15	30	17	44	1	6	11	8

a

b

Рис. 6.4

Л. Бертрана, который впоследствии, в 1778 г., опубликовал статью на эту тему. Метод Эйлера применим к шахматным доскам произвольных размера и формы, однако в общем случае получаемые решения не обладают симметрией, и связь между ними не видна.

Эйлер двигал коня по доске в произвольных направлениях до тех пор, пока не исчерпывал все возможные ходы. При этом может остаться несколько не пройденных конем полей — обозначим их через *a*, *b*, ... Метод Эйлера состоит в нахождении правил, которые позволяли бы включить эти свободные поля как составные части в различные маршруты коня, причем эти маршруты можно сделать обратимыми.

Метод Эйлера хорошо иллюстрирует приводимый ниже пример, который Лежандр отмечал как один из исключительно трудных. Предположим, что мы осуществили маршрут, показанный на рис. 6.4, *a*, а именно: сделали ходы 1, 2, 3, ..., 59, 60, при этом четыре поля — *a*, *b*, *c*, *d* остались непройденными.

Начнем с рассмотрения маршрута от поля 1 к полю 60 в обратном направлении. С поля 1 конем можно попасть на некоторое поле p , где p — это 32, 52 или 2. С поля 60 конь может пойти на поле q , где q — это 29, 59 или 51. Но если одно из значений p и одно из значений q отличаются на единицу, то мы можем обратить часть маршрута. В данном случае это соответствует значениям $p = 52$, $q = 51$. Итак, поля 1, 2, 3, ..., 51; 60, 59, ..., 52 образуют обход доски из 60 ходов частично в прямом, а частично в обратном направлении. Следовательно, если заменить номера 60, 59, ..., 52 на 52, 53, ..., 60, то последовательно будут пронумерованы ходы возможного обхода доски.

Прежде чем продолжить наши рассуждения, предлагаю читателям, действительно желающим разобраться в сущности метода Эйлера, построить на отдельном листке бумаги получившуюся после перенумерации новую диаграмму.

Теперь попытаемся включить в наш маршрут поля a , b , d . В построенной новой диаграмме из 60 полей с поля a конем можно пойти на поля с номерами 51, 59, 41, 25, 7, 5 и 3. Не имеет значения, какое из этих полей мы выберем; возьмем, скажем, поле 51. Если сделать это поле последним полем в маршруте из 60 ходов, то тем самым мы сможем продлить наш маршрут за счет полей a , b , d . Следовательно, если читатель добавит число 9 к каждому номеру на построенной им диаграмме и заменит номера 61, 62, ..., 69 на 1, 2, ..., 9, то он получит маршрут, начинающийся в прежней нумерации с поля 60 и заканчивающийся (также в прежней нумерации) полем 51, а ходы с номерами 61, 62 и 63 приведут нас на поля a , b и d соответственно.

Теперь нам только остается включить в маршрут поле c . Так как с поля c можно сделать ход конем на поле с новым номером 25, а с поля 63 — ход на поле с новым номером 24, то мы можем поступить так же, как это было сделано при нахождении первого «обращенного» обхода. Действительно, поля с номерами 1, 2, ..., ..., 24; 63, 62, ..., 25, c образуют требуемый маршрут коня. Следовательно, номера 63, 62, ..., 25 нам нужно заменить на номера 25, 26, ..., 63, и тогда мы сможем завершить маршрут ходом на 64-е поле — на поле c . Теперь у нас получился полный обход всех клеток шахматной доски.

Наконец, остается сделать так, чтобы этот маршрут был проходим и в обратном порядке. Для начала нужно поля с номерами 1 и 64 расположить поближе друг к другу. Поступим следующим образом. Возьмем одно из полей, на которое может пойти конь с поля 1, скажем поле 28; тогда с поля 28 можно пойти на поля 1 и 27. Следовательно, поля 64, 63, ..., 28; 1, 2, ..., 27 образуют маршрут; это можно представить на диаграмме, если номера полей 1, 2, ..., 27 заменить номерами 27, 26, ..., 1.

Теперь с поля 1 можно пойти на поля 26, 38, 54, 12, 2, 14, 16, 28, а с поля 64 — на поля 13, 43, 63, 55. Среди перечисленных полей поля 13 и 14 следуют одно за другим; поэтому поля 64, 63, ..., 14; 1, 2, ..., 13 образуют маршрут. Следовательно, после замены номеров 1, 2, ..., 13 на 13, 12, ..., 1 мы получим маршрут, позволяющий обходить всю шахматную доску в обратном порядке (он показан на рис. 6.4, б). Далее Эйлер показал, каким образом из одного заданного обхода коня можно получить семь других обходов.

Не представляет особого труда применить метод Эйлера и для нахождения такого обхода коня, который начинается в любом заданном поле и заканчивается в любом другом заданном поле.

Затем Эйлер исследовал, как модифицировать этот метод, чтобы с его помощью можно было решить данную задачу при дополнительных ограничениях.

Один из интересных примеров состоит в требовании, чтобы первые 32 хода не выводили нас за пределы одной половины шахматной доски. Порядок этих первых 32 ходов можно найти по методу Эйлера. Очевидно, что если к каждому из таких первых номеров прибавить 32, то мы получим соответствующую систему ходов от 33-го до 64-го, которые дадут обход второй половины доски; однако в общем случае поле 33 может не быть полем, на которое сможет пойти конь с поля 32, аналогично и на поле 64 конь может не попасть с поля 1.

Эйлер, однако, исследовал, как найти такие 32 первых хода, чтобы последующие ходы с 33 по 64 получались из первых путем поворота доски на 180° , при этом оба маршрута оказываются совместимыми и допускающими обход в обратном направлении. Если через x и y обозначить координаты некоторого поля, отсчитываемые от двух соседних сторон шахматной доски, то назовем **дополнительным** к нему поле с координатами x и y , от-

считываемыми от противоположных сторон доски. Например, поля (x, y) и $(9 - x, 9 - y)$ — дополнительные, где x и y — соответственно номера вертикали и горизонтали шахматной доски, отвечающих данному полю. Тогда в приведенном на диаграмме решении Эйлера номера дополнительных полей будут отличаться на 32; например, поле $(3, 7)$ дополнительно к полю $(6, 2)$, одно из них — это поле 57, другое — 25.

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

50	45	62	41	60	39	54	35
63	42	51	48	53	36	57	38
46	49	44	61	40	59	34	55
43	64	47	52	33	56	37	58
26	5	24	1	20	15	32	11
23	2	27	8	29	12	17	14
6	25	4	21	16	19	10	31
3	22	7	28	9	30	13	18

а

б

Рис. 6.5. Решение Эйлера для половины шахматной доски (а); решение Роже для половины шахматной доски (б)

Ниже мы опишем метод Роже, который также можно применить к решению задачи с тем же ограничением, задаваемым разбиением доски на две половины. Решение Роже приведено на рис. 6.5, б. В конце статьи Эйлера показывается, как его метод можно применять к шахматным доскам крестообразной или любой прямоугольной формы. Могу, в частности, еще отметить полученное Эйлером изящное симметрическое решение рассматриваемой задачи для доски размером 10×10 .

Особый интерес представляет предпринятая Вандермондом [13] попытка свести данную задачу к арифметической. Его идея заключалась в том, чтобы покрыть шахматную доску двумя или большим числом независимых маршрутов коня, взятых случайным образом, и затем найти связь между ними. Вандермонд определил положение поля на доске дробью x/y , где числитель и знаменатель — это номера поля, отсчитываемые от одной какой-то стороны доски и от смежной с ней; иначе

говоря, x и y — это координаты поля на доске. Ясно, что в последовательности дробей, соответствующих ходам коня, разность числителей двух последующих дробей может быть равна 1 или 2, в то время как разность их знаменателей должна быть равна соответственно 2 или 1. Кроме того, x и y не могут быть меньше 1 и больше 8. Введенное обозначение весьма удобно, однако Вандермонд использовал его только для нахождения частного решения задачи в случае обычной шахматной доски размером 8×8 ; примененный им метод аналогичен методу Эйлера, но пригоден только для шахматных досок **четной** размерности. Искомый маршрут в данных обозначениях представляется следующими дробями: $5/5$, $4/3$, $2/4$, $4/5$, $5/3$, $7/4$, $8/2$, $6/1$, $7/3$, $8/1$, $6/2$, $8/3$, $7/1$, $5/2$, $6/4$, $8/5$, $7/7$, $5/8$, $6/6$, $5/4$, $4/6$, $2/5$, $1/7$, $3/8$, $2/6$, $1/8$, $3/7$, $1/6$, $2/8$, $4/7$, $3/5$, $1/4$, $2/2$, $4/1$, $3/3$, $1/2$, $3/1$, $2/3$, $1/1$, $3/2$, $1/3$, $2/1$, $4/2$, $3/4$, $1/5$, $2/7$, $4/8$, $3/6$, $4/4$, $5/6$, $7/5$, $8/7$, $6/8$, $7/6$, $8/8$, $6/7$, $8/6$, $7/8$, $5/7$, $6/5$, $8/4$, $7/2$, $5/1$, $6/3$.

Этот маршрут допускает обход в обратном порядке, но он несимметричен. Если бы можно было преобразовать три дроби в конце этого ряда, то мы получили бы два симметричных обхода по тридцать два хода, связанные между собой несимметрично, это позволило бы приблизиться к решению задачи. Вандермонд также исследовал маршрут коня на поверхности куба.

В 1773 г. Коллини [14] обратил внимание на исключительную пользу симметричных маршрутов, которые не зависят от расположения начального поля, но связаны между собой так, что это позволяет всегда начинать маршруты именно с указанного поля. На этом основан современный подход к решению данной задачи. В 1825 г. этот метод был заново открыт Праттом [15], а в 1840 г. — Роже; в дальнейшем его использовали разные авторы. Метод Роже мы изложим далее.

Одно из наиболее изящных решений задачи о маршруте коня было дано в 1823 г. Варнсдорфом [16]. Правило Варнсдорфа состоит в том, что конь всегда должен ходить на одно из полей, стоя на которых он атакует наименьшее число полей, не считая пройденных ранее. Это решение несимметрично и не является обратимым; более того, его трудно осуществить практически. Справедливость этого правила не доказана, но неизвестны также и исключения из него; оно, по-видимому, применимо также к любым шахматным доскам прямоугольной

формы, которые допускают полный обход конем. Довольно примечательно, что в большинстве случаев какой-либо один неверный ход (но не из числа последних трех или четырех ходов) не влияет на окончательный результат.

Правило Варнсдорфа уточняет также, что если у коня имеются два или более свободных для хода полей, то конь может пойти на любое из них. Вообще говоря, это не так — были построены два или три весьма хитроумных маршрута, где последнее правило нарушалось; однако на практике вероятность случайно наткнуться на такой маршрут очень мала.

Изложенные методы применимы к шахматным доскам произвольной формы, в частности к прямоугольным, крестообразным и круговым (см., например, [17]).

Во всех исследованиях последних лет на решение задачи накладываются дополнительные ограничения — такие, как требование существования обратного обхода, а в более общем случае — задание начального и конечного полей маршрута.

Самое простое из известных мне решений принадлежит Де Лавернеду, но обычно его связывают с именем Роже, статья которого, опубликованная в 1840 г., привлекла всеобщее внимание к этому решению [18]. В этом решении весь маршрут разбивается на четыре цикла, которые можно комбинировать так, что это позволяет начать движение с любого поля и закончить его на любом заданном поле другого цвета. Если нам захочется избрать это последнее поле в качестве начального, то тем самым мы получим обратный маршрут. С другой стороны, это правило применимо только к квадратным шахматным доскам размером $4n \times 4n$; в частности, его нельзя использовать на доске для международных шашек размером 10×10 .

Роже начинает решение с разбиения доски размером 8×8 на четыре меньших квадрата размером 4×4 ; что же касается 16 полей, образующих меньший квадрат, то их можно разбить на 4 группы по 4 поля в каждой, причем каждая такая группа из четырех полей образует замкнутый путь коня. Все поля каждого из этих путей коня обозначим одними и теми же буквами *l*, *a*, *a* и *p*, поскольку такие пути возможны. Путь из четырех полей, помеченных согласными буквами *l*, так же, как и путь из полей, помеченных согласными буквами *p*, имеет форму ромба, а пути, помеченные соответственно гласными

e и *a*, имеют форму квадрата; это видно на любом из четырех квадратов рис. 6.6, *a*.

Далее, каждые из 16 полей, помеченных на полной доске одной и той же буквой, можно объединить в один цикл; где бы такой цикл ни начинался, мы можем закончить его на любом другом поле цикла при условии, что цвет этого поля отличается от цвета начального поля. Если не имеет значения, на каком поле заканчивается цикл, цикл можно сделать обратимым, и в этом

<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	34	51	32	15	38	53	18	3
<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	31	14	35	52	17	2	39	54
<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	50	33	16	29	56	37	4	19
<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	13	30	49	36	1	20	55	40
<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	48	63	28	9	44	57	22	5
<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	27	12	45	64	21	8	41	58
<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	62	47	10	25	60	43	6	23
<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	11	26	61	46	7	24	59	42

a

δ

Рис. 6.6. Решение Роже (*a*); решение Роже (*б*)

случае мы можем выбрать одно и то же направление движения в каждой группе (из четырех полей). Например, все поля, помеченные буквой *p*, можно объединить в один цикл, обозначенный порядковыми номерами от 1 до 16 (рис. 6.6, *б*). Аналогично все поля, помеченные буквой *a*, можно объединить в цикл с порядковыми номерами от 17 до 32, для полей *l* подойдут номера от 33 до 48; а для полей *e* — номера от 49 до 64. Каждый из указанных выше циклов симметричен и обратим. Циклы, соответствующие согласным и гласным буквам, называются циклами *противоположных* видов.

Основная задача будет решена, если мы сможем скомбинировать из полученных четырех циклов маршрут коня, который будет начинаться на любом заданном поле и заканчиваться на 64-м ходу на любом другом заданном поле другого цвета. Чтобы сделать это, Роже использует два следующих правила,

Первое. Если начальное и конечное поля обозначены соответственно согласной и гласной буквами, то возьмем чередующиеся циклы, обозначенные согласными и гласными буквами, которые начинаются с цикла из 16 полей, обозначенных буквой начального поля, и содержат цикл, обозначенный буквой конечного поля.

Второе. Если начальное и конечное поля обозначены либо согласными, либо гласными буквами, то выберем сначала некоторое поле, скажем Y , того же цикла, что и конечное поле Z , и сделаем один ход с него; далее, выберем некоторое поле X , принадлежащее одному из противоположных циклов и удаленное от поля Y на один ход. Это всегда можно сделать. Теперь, исключив поля Z и Y , можно, согласно первому правилу, пройти от начального поля к полю X за 62 хода и, следовательно, прийти в конечное поле за 64 хода.

Необходимо отметить, однако, что в обоих случаях для каждого из первых трех циклов поля должны выбираться таким образом, чтобы цикл не заканчивался на угловом поле; желательно также, чтобы цикл не заканчивался на каком-либо граничном поле доски. Тут необходима определенная осторожность. В связи с указанными ограничениями удобно выбирать эти циклы обратимыми, а направление движения в каждом цикле и в каждой их группе — одинаковым.

В качестве примера предположим, что мы начинаем движение с поля 1 на рис. 6.6, б, которое принадлежит циклу p , а заканчиваем обход на поле 64, которое принадлежит циклу e . Это соответствует первому правилу: сначала мы проходим 16 полей цикла p , затем 16 полей цикла a , потом 16 полей цикла l и, наконец, 16 полей цикла e . Один из возможных вариантов такого обхода и показан на рисунке. Так как на поле 64 можно попасть ходом коня с начального поля, наш маршрут является обратимым. Кроме того, каждый из четырех циклов на этом рисунке симметричен, обратим и проходится в одном и том же направлении: единственное место, где единообразие движения явно нарушается, — это переход с поля 32 на поле 33.

Правила нахождения обратимых маршрутов, аналогичные правилам Роже, были впоследствии предложены разными авторами; среди них особенно выделяются Полиньяк [19] и Лакьер [20], которые сформулировали свои правила с исчерпывающими подробностями. Никто из этих авторов, видимо, не был знаком с теоремами

Роже. Полиньяк, как и Роже, демонстрируя свое правило, использует для каждого из квадратов приведенные выше буквенные обозначения и утверждает, что подобное правило применимо к каждому из квадратов.

Метод Роже можно применить также к каждой из двух половин шахматной доски, как показано на рис. 6.5, б.

Метод, который Йениш рекламировал как наиболее универсальный, мало чем отличается от метода Роже,

63	22	15	40	1	42	59	18	15	20	17	36	13	64	61	34
14	39	64	21	60	17	2	43	18	37	14	21	60	35	12	63
37	62	23	16	41	4	19	58	25	16	19	44	5	62	33	56
24	13	38	61	20	57	44	3	38	45	26	59	22	55	4	11
11	36	25	52	29	46	5	56	27	24	39	6	43	10	57	54
26	51	12	33	8	55	30	45	40	49	46	23	58	3	32	9
35	10	49	28	53	32	47	6	47	28	51	42	7	30	53	2
50	27	34	9	48	7	54	31	50	41	48	29	52	1	8	31

α
 δ

Рис. 6.7. Решение Йениша (а); два совместных «полурешения» (б)

Он приводит к восьми вариантам, подобным показанному на рис. 6.7, а; интересно, что сумма номеров полей каждой вертикали и каждой горизонтали доски равна 260. Хотя это решение и симметрично, его, как мне кажется, не так легко воспроизвести, как решение Роже. Другие решения, особенно решения Муна и Вензелида, были приведены в предыдущих изданиях настоящей книги. Показанные на рис. 6.7, б два обратимых маршрута, каждый из которых обходит 32 поля, а оба охватывают всю доску, примечательны еще и в том отношении, что они образуют магический квадрат (см. [21]).

Остается все еще открытым вопрос о полном числе решений задачи об обходе доски шахматным конем. Этот вопрос упоминал Лежандр [22], однако первым, кто пытался ответить на него, был Миндинг [23]. Более поздние исследования показывают, что, с одной стороны, число возможных обходов меньше числа сочетаний из 168 по 63 (см. [9], т. II, с. 268), а с другой стороны, это

число больше 122 802 512, так как последнее равно числу обратимых маршрутов одного частного вида (см. [19] в литературе к гл. II, с. 360, 402).

Некоторые другие подобные задачи. Можно сформулировать подобные же задачи о нахождении маршрутов двигающейся по определенным правилам фигуры (например, это может быть определенная шахматная фигура, скажем король или какая-либо другая фигура), которая, начиная с заданного поля, последовательно обходит все поля доски (или не все поля, а только какие-то наперед заданные) и заканчивает обход на заданном поле. Для нахождения обходов такого вида может быть применен метод Эйлера. Например, Эйлер применил этот метод для поиска обратимого маршрута фигуры, которая ходит на два поля вперед, подобно ладье, а затем на одно поле, подобно слону (такую фигуру — наполовину ладью, а наполовину слона, можно было бы назвать, скажем, шахматным *кентавром*), последовательно обходя все черные поля доски.

61	62	63	64	1	2	3	4
60	11	58	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	22	39	40	25	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

Рис. 6.8. Магический квадрат, образованный маршрутом короля

Обратимый маршрут короля (ср. [24]). В качестве примера решения задачи подобного вида на рис. 6.8 показан обратимый маршрут короля, последовательно обходящего все поля доски. Этот маршрут интересен тем, что номера последовательных ходов короля образуют магический квадрат. Конечно, указанный маршрут соответствует также обратимому обходу всей доски ферзем.

Обратимый маршрут ладьи. Нетрудно построить обратимые маршруты для ладьи, последовательно обходящей все поля шахматной доски. Например, если ладья

начинает обход с поля 11, то она может последовательно пройти поля 18, 88, 81, 71, 77, 67, 61, 51, 57, 47, 41, 31, 37, 27, 21 и снова вернуться на поле 11 — этот маршрут симметричен. (Разумеется, этот маршрут одновременно можно рассматривать как обратимый маршрут короля или ферзя, обходящих шахматную доску.) Если начинать маршрут с любого из указанных выше полей, то ладья сделает шестнадцать ходов. Если же начинать с некоторого поля «внутри» одного из указанных ходов, то для обхода потребуется семнадцать ходов. Однако я уверен, что в большинстве случаев, с какого бы поля ни начинался обход, окажется достаточно шестнадцати ходов; правда, такой маршрут, вообще говоря, не будет симметричным. На доске размером $n \times n$ можно найти такой маршрут ладьи, при котором она, начиная с некоторого поля, будет последовательно вступать на каждое другое поле один и только один раз. Кроме того [25], начиная движение с любого поля доски, ладья при четных n будет заканчивать маршрут на поле, цвет которого отличается от цвета начального поля, а при нечетных n — на поле того же цвета, что и начальное.

Обратимый маршрут слона. Как и в других уже рассмотренных примерах, слон может обойти все поля одного цвета за семнадцать ходов, если начальное поле выбрано подходящим образом ([26], с. 225; [27], 3 декабря). Например, начиная с поля 11, можно последовательно пройти поля 55, 82, 71, 17, 28, 46, 13, 31, 86, 68, 57, 48, 15, 51, 84, 66, 88. Еще один ход возвратит слона в исходное положение. Особенность задачи о маршруте слона состоит в том, что он проходит некоторые поля доски более чем один раз.

РАЗНЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Можно сформулировать множество задач о построении маршрутов шахматных фигур на всей доске или на ее отдельных частях при различных ограничениях. Однако мне бы хотелось коснуться задач несколько иного рода и предложить читателю испытать свои силы в их решении.

Маршруты на шахматной доске. Одна из простейших задач связана с построением такого маршрута ладьи, переходящей с поля 11 на поле 88, при котором она за каждый ход перемещается на одно поле и каждое поле

доски проходит один и только один раз. Эта задача разрешима — однако я знаю, что даже для математиков-профессионалов она оказалась трудным орешком. (Неискушенный читатель может недооценить всю сложность поставленной задачи, но, попробовав решить ее, он быстро поймет, в чем здесь загвоздка.)

Другая простая задача подобного рода — пройти ферзем с поля 33 на поле 66 за пятнадцать ходов, посещая каждое поле только один раз и не пересекая свой маршрут или пройденные поля более чем один раз ([27], 3 октября).

Отчасти похожий — но более трудный — вопрос связан с определением наибольшего расстояния, которое может пройти ферзь за пять последовательных ходов со своей исходной позиции при условии, что ферзь никогда не пересекает свой маршрут и не ходит на одно и то же поле более одного раза ([27], 2 октября). При вычислении расстояния можно считать, что маршрут проходит через геометрические центры полей. Оказалось, что для доски, поля которой имеют сторону в 1 дюйм, максимальное расстояние равно 33,97 дюйма.

Другую известную задачу можно сформулировать так. Построим прямоугольную шахматную доску размером $n \times m$, начертив $m + 1$ вертикальных и $n + 1$ горизонтальных прямых. Нужно узнать возможное число маршрутов из верхнего левого угла доски в нижний правый угол при условии, что движение происходит вдоль начертанных линий, а направление движения — либо по вертикали вниз, либо по горизонтали слева направо. Ответ равен числу перестановок из $m + n$ предметов, m из которых — предметы одного вида, а n — предметы другого вида; это число равно $(m + n)! / m! n!$. Таким образом, для квадратной доски размером 4×4 (т. е. для четвертой части обычной шахматной доски), где $m = n = 4$, существует 70 таких маршрутов; для полной шахматной доски, где $m = n = 8$, имеется не менее 12 870 таких маршрутов. Для ладьи, совершающей движение по указанному правилу, существует $(m + n - 2)! / (m - 1)! (n - 1)!$ путей из верхнего левого угла в правый нижний. Аналогичные утверждения можно сформулировать для параллелепипеда.

Еще один вопрос такого рода связан с определением числа замкнутых маршрутов через $m \times n$ точек, расположенных на m горизонталях и n вертикалях доски, образующих четырехугольную сетку, причем маршрут про-

ходит через каждую точку один и только один раз (см. [28]).

Задача Гуарини. Одна из наиболее давно известных в Европе задач, связанных с шахматной доской, была предложена еще в 1512 г. О ней упоминал Люка в статье 1894 г., и я полагаю, что помимо публикаций Люка и ранних изданий настоящей книги других упоминаний этой задачи в печати не имеется³. На доске из девяти полей (рис. 6.9) два белых коня стоят на двух

a	C	d
D		B
b	A	c

Рис. 6.9

верхних угловых полях (a, d), а два черных коня стоят на двух нижних угловых полях (b, c); остальные поля остаются свободными. Требуется переставить коней таким образом, чтобы белые кони заняли поля b и c , а черные — поля a и d . Решение этой задачи очевидно.

Задачи о ферзях. Еще одна задача состоит в размещении на шахматной доске шестнадцати ферзей таким образом, чтобы никакие три из них не стояли на одной прямой ([26], с. 222; [27], 7 ноября). Одно из решений — расставить ферзей на поля 15, 16, 25, 26, 31, 32, 41, 42, 57, 58, 67, 68, 73, 74, 83, 84. Здесь, конечно, подразумевается, что каждый ферзь ставится в центр поля.

ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ⁴

Латинский квадрат порядка n состоит из n различных элементов, каждый из которых встречается n раз, а все вместе они образуют квадратную таблицу (матрицу), причем каждая строка и каждый столбец матрицы — это перестановка из наших n элементов. Если в качестве элементов взять числа $0, 1, \dots, n-1$, интерпретируемые как вычеты по модулю n , то можно получить частный вид латинского квадрата, обозначаемый символом $(1, 1)_n$ (он показан на рис. 6.10, a), и его можно построить как некую таблицу сложения (см. с. 120). В несколько более общем случае латинского квадрата типа $(\alpha, \beta)_n$ нижняя строка матрицы состоит из чисел

0, α , 2α , ... (взятых, разумеется, по модулю n), левый столбец матрицы состоит из чисел 0, β , 2β , ..., а каждый из остальных элементов матрицы определяется суммой (по модулю n) чисел, которые задают отвечающие рассматриваемому элементу столбец и строку.

Ясно, что α и β должны быть взаимно просты с n . Если к тому же числа $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ взаимно просты с n (как в случае последнего из приведенных рисунков),

2	0	1
1	2	0
0	1	2

$(1, 1)_3$
 α

2	1	0
1	0	2
0	2	1

$\delta (2, 1)_3$

1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2
0	1	2	3

$(1, 3)_4$
 β

4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3

$(2, 1)_5$
 ε

Рис. 6.10

то такой латинский квадрат называется *диагональным*: этот термин указывает на то, что n элементов каждой диагонали⁵ (так же, как элементы каждой строки и каждого столбца) все являются попарно различными.

Аналогично этому для произвольной простой степени $q = p^k$ и для любых двух элементов α , β поля $\text{GF}(p^k)$ при $\alpha\beta \neq 0$ можно построить латинский квадрат $[\alpha, \beta]_q$ как некую таблицу сложения для чисел, кратных в нашем поле Галуа числам α и β . Если $\alpha^2 \neq \beta^2$, то латинский квадрат $[\alpha, \beta]_q$ будет также диагональным. Если $q = 4$ или 9, то мы можем интерпретировать элементы поля $\text{GF}(q)$ как числа, выражаемые в системе с основанием q , и затем перевести их в десятичную систему счисления. Получившийся латинский квадрат будет отличаться от $(\alpha, \beta)_q$.

Эйлеровы квадраты. Два латинских квадрата порядка n называются *ортогональными*, если при наложении одного из них на другой каждая из n^2 упорядочен-

ных пар элементов встретится один (и только один) раз. Получившаяся из упорядоченных пар элементов матрица называется *эйлеровым* квадратом, или «греко-латинским квадратом». Последнее название возникло из-за обозначения элементов накладываемого (латинского) квадрата греческими буквами, а элементов исходного квадрата — латинскими буквами, однако более удобно использовать и в том и в другом случаях одни и те же n элементов. В приведенных ниже примерах первый (рис. 6.11, а)

а			б					в			
22	01	10	34	41	03	10	22	12	03	30	21
11	20	02	13	20	32	44	01	31	20	13	02
00	12	21	42	04	11	23	30	23	32	01	10
			21	33	40	02	14	00	11	22	33
			00	12	24	31	43				

Рис. 6.11

можно обозначить как $(12, 11)_3$, поскольку левые цифры образуют латинский квадрат $(1, 1)_3$, в то время как правые цифры образуют ортогональный ему латинский квадрат $(2, 1)_3$. Аналогично этому второй пример (рис. 6.11, б) — это $(12, 21)_5$, а вот третий (рис. 6.11, в) — это комбинация из $[1, 10]_{22}$ и $[1, 11]_{22}$ с заменой записанных в двоичной системе счисления чисел 10 и 11 «обычными» (десятичными) числами 2 и 3. Этот латинский квадрат четвертого порядка можно рассматривать как решение задачи Озанама о магическом карточном квадрате (см. [2], гл. I, изд. 1723, т. IV, с. 434): расположить в форме квадрата шестнадцать игровых карт (взятых из колоды) таким образом, чтобы ни в одной строке, ни в одном столбце и ни на одной диагонали не встретилось более двух карт одной масти или одинакового наименования.

В более общем случае два латинских квадрата $(\alpha', \beta')_n$ и $(\alpha, \beta)_n$ будут *ортогональными*, если определитель $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ будет взаимно прост с n . Поскольку числа $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ также должны быть взаимно просты с n , это возможно только при нечетных значениях n . Получающийся в результате эйлеров квадрат $(\alpha'\alpha, \beta'\beta)_n$ будет *диагональным*, если числа $\alpha \pm \beta$ и $\alpha' \pm \beta'$ взаимно про-

сты с n , как это имело место во втором из приведенных примеров (12, 21)₅.

Аналогичным образом «квадрат Галуа» $[\alpha', \beta']_q$ (порядок q которого есть целая степень простого числа) будет ортогонален квадрату $[\alpha, \beta]_q$, когда $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ в поле $GF(q)$. В частности, взаимно ортогональны все $q - 1$ латинских квадратов $[1, \beta]_q$, где β принимает все ненулевые значения из $GF(q)$. Например, каждый из двух (упомянутых выше) диагональных ортогональных латинских квадратов $[1, 10]_{2^2}$ и $[1, 11]_{2^2}$ ортогонален квадрату $[1, 1]_{2^2}$ (не являющемуся диагональным).

Однако существуют латинские квадраты порядка 4, которые не имеют ортогональных себе. Примером может служить квадрат $(1, 3)_4$ (см. рис. 6.10, в). Такой квадрат называют *нерасширяемым*.

Для двух заданных эйлеровых квадратов порядка m и n можно легко построить один квадрат порядка nm . Кроме того, поскольку латинские квадраты $(1, 1)_n$ и $(1, 2)_n$ ортогональны для каждого нечетного n , а квадраты $[1, 1]_q$ и $[1, 10]_q$ ортогональны при $q = 2^k$, где $k > 1$, то существуют как эйлеровы квадраты любого нечетного порядка, так и эйлеровы квадраты любого «чисто четного» порядка 2^k и любого «повышенно четного» порядка $2^k q$ (где q нечетно и в обоих случаях $k > 1$).

Задача Эйлера об офицерах. Название квадратов «эйлеровы» связано с именем Эйлера, который впервые поставил вопрос о возможности существования ортогональных латинских квадратов порядка «простой четности», т. е. порядка $n = 2q$, где q нечетно. Ясно, что при $n = 2$ задача о таких квадратах решения не имеет. В 1782 г. Эйлер следующим образом сформулировал задачу о квадратах шестого порядка. Возможно ли в каре размером 6×6 расставить 36 офицеров, каждый из которых имеет одно из шести различных званий и служит в одном из шести различных полков, сделав это так, чтобы в каждом ряду и в каждой шеренге было по одному офицеру каждого звания и по одному офицеру каждого полка? Эйлер предположил, что ответ на этот вопрос будет отрицательным — и спустя 118 лет это было доказано Тарри [29]. Увы! — то же самое предположение Эйлер сделал и для квадратов порядков 10, 14 и т. д. Для опровержения этого предположения читатель может обратиться к гл. X, в частности к приведенному там модифицированному эйлерову квадрату⁶.

Эйлеровы кубы. Латинский куб порядка n можно определить как куб, образованный n различными элементами, каждый из которых встречается n^2 раз, причем каждая строка, каждый столбец и каждый ряд в глубину представляют собой перестановку из n этих элементов. В частности, трехмерная таблица сложения по модулю n дает латинский куб $(\alpha, \beta, \gamma)_n$, если все числа α, β, γ взаимно просты с n . Если определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

взаимно прост с n , то три таких куба можно наложить друг на друга, образовав эйлеров куб $(\alpha''\alpha'\alpha, \beta''\beta'\beta, \gamma''\gamma'\gamma)_n$. Один из таких кубов нам понадобится далее (см. с. 237).

1. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), December 1903, vol. X, pp. 305—308; *Royal Engineers Journal* (London), August—November 1889; *British Association Transactions*, 1890, p. 745.
2. Taylor H. M. *Philosophical Magazine*, March 1876, ser. 5, vol. I, pp. 221—229.
3. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), 1897, vol. IV, p. 6; 1901, vol. VIII, p. 140.
4. Ahrens W. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*.—Leipzig, 1901, chap. IX.
5. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), 1901, vol. VIII, p. 88.
6. Günther S. *Grünert's Archiv der Mathematik und Physik*, 1874, vol. LVI, pp. 281—292.
7. Glaisher J. W. L. *Philosophical Magazine* (London), December 1874, ser. 4, vol. XLVIII, pp. 457—467.
8. Gosset Th. *The Messenger of Mathematics* (Cambridge), July 1914, vol. XLIV, p. 48.
9. de Jaenisch C. F. *Applications de l'Analyse mathématique au jeu des Échecs*, 3 vols. — СПб., 1862—1863.
10. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), 1896, vol. III, p. 58; 1897, vol. IV, pp. 15—17, 254; 1898, vol. V, pp. 87, 230—231.
11. van der Linde A. *Geschichte und Literatur des Schachspiels* (Berlin), 1874, vol. II, pp. 101—111. О самой задаче и ее истории см. [11']. Volpicelli P. *Atti della Reale Accademia dei Lincei* (Rome), 1872, vol. XXV, pp. 87—162; см. также [9] и General Parmentier, *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, 1891, 1892, 1894.
12. Euler L. *Mémoires de Berlin for 1759*.—Berlin, 1766, pp. 310—337; *Commentationes Arithmeticae Collectae*, 1849, vol. I, pp. 337—355.
13. Vandermonde. *L'Histoire de l'Académie des Sciences for 1771*.—Paris, 1774, pp. 566—574.
14. Collini. *Solution du Problème du Cavalier au jeu des Échecs*.—Mannheim, 1773.

Pratt. Studies of Chess. — London (6th ed.), 1825.

Warnsdorff H. C. Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung. — Schmalkalden, 1823; см. также [9], vol. II, pp. 56—61, 273—289.

Ciccolini T. Del Cavallo degli Scacchi. — Paris, 1836.

de Lavernède J. E. T. Mémoires der l'Académie royale du Gard. — Nîmes, 1839, pp. 151—179; Roget P. M. *Philosophical Magazine*, April 1840, ser. 3, vol. XVI, pp. 305—309; см. также *Quarterly Journal of Mathematics*, 1877, vol. XIV, pp. 354—359; *Leisure Hour*, Sept. 13, 1873, pp. 587—590; Dec. 20, 1873, pp. 813—815. De Polignac. *Comptes Rendus*, April 1861; *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1881, vol. IX, pp. 17—24.

Lacquièrre. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1880, vol. VIII, pp. 82—102, 132—158.

Rilly A. Le Problème du Cavalier des Echecs. — Troyes, 1905.

Legendre A. Théorie des Nombres. — Paris (2nd ed.), 1830, vol. II, p. 165.

Minding. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1852, vol. VII, pp. 147—156; *Crelle's Journal*, 1853, vol. XLIV, pp. 73—82.

Gherzi I. Matematica dilettevole e curiosa — Milan, 1921, p. 320 (fig. 261).

L'Intermédiaire des Mathématiciens (Paris), 1901, vol. VIII, pp. 153—154.

Dudeney H. E. Amusements in Mathematics.

Dudeney H. E. *The Tribune*, 1906.

Sainte-Marie C. F. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), vol. XI, March 1904, pp. 86—88.

Euler L. *Verhandeligen Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen*, 1782, vol. IX, pp. 85—239; *Commentationes Arithmeticae*, 1849, vol. II, pp. 202—361; Tarry G. *Comptes Rendus de l'Association Française pour l'Avancement de Science naturel*, 1900, vol. I, pp. 122—123; 1901, vol. II, pp. 170—203. См. также Fisher R. A., Yates F. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1934, vol. XXX, pp. 429—507; Sade A. *Annals of Mathematical Statistics*, 1951, vol. XXII, pp. 306—307.

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Магический квадрат — это набор целых чисел, расположенных в форме квадрата таким образом, что суммы чисел, стоящих в одной (любой!) строке, в одном (любом!) столбце и на одной (любой!) диагонали, имеют одно и то же значение. Если рассматриваемый набор чисел образует последовательность целых чисел от 1 до n^2 , то квадрат называется магическим квадратом порядка n , — легко видеть, что в этом случае сумма членов каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали должна быть равна $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$. Мы ограничимся (если специально не оговорено иное) рассмотрением только подобных магических квадратов, т. е. квадратов, образованных последовательными целыми числами, начиная с 1 и далее. (Те же самые правила распространяются на задачи, где фигурируют n^2 чисел, образующих арифметическую прогрессию.)

Таким образом, первые 16 целых чисел, расположенных, как показано на рис. 7.1, *а* и *б*, представляют собой магические квадраты четвертого порядка; здесь сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали равна 34. Подобно этому, рис. 7.2, *а* и рис. 7.11, *а* представляют собой магические квадраты пятого порядка; рис. 7.4, *б* — магический квадрат шестого порядка; рис. 7.10, *а* и рис. 7.11, *б* — магические квадраты седьмого порядка; рис. 7.9 *б*, 7.13, 7.19, 7.30 — магические квадраты восьмого порядка; рис. 7.15 и 7.20 — магические квадраты девятого порядка, а рис. 7.7 — магический квадрат десятого порядка.

Построение таких квадратов — старинное развлечение, а в те далекие времена, когда некоторым числам приписывались магические свойства, подобные построения служили предметом серьезного исследования. Магические квадраты были известны в Китае еще до нашей эры; в Европе их узнали, по-видимому, благодаря Мосхопулосу, жившему в Константинополе в начале XV в.

Известный немецкий гуманист Корнелий Агриппа (1486—1535) построил магические квадраты порядка 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; он связал их с семью астрологическими «планетами» — Сатурном, Юпитером, Марсом, Солнцем, Венерой, Меркурием и Луной. Серебряные пластинки с выгравированными магическими квадратами носили как амулеты, предохраняющие от чумы и других поветрий, а магический квадрат, показанный на рис. 7.1, *а*, изображен на знаменитой гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия», созданной им в 1514 г.; числа в середине нижней строки этого квадрата указывают дату создания

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$n=4$

а

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

$n=4$

б

Рис. 7.1

гравюры. Математическая теория построения магических квадратов была развита во Франции в XVII в.; позднее она стала излюбленной темой исследований многих авторов из разных стран*.

Далее мы воспользуемся следующими обозначениями. *Клетками* мы будем называть те поля или малые квадратики, в которые вписываются числа. Обычно (первую, вторую и т. д.) строки отсчитывают сверху, а (первый, второй и т. д.) столбцы — слева; h -я и $(n+1-h)$ -я строки (или столбцы) называются *дополнительными*; k -я клетка в h -й строке называется *противоположной* $(n+1-k)$ -й клетке в $(n+1-h)$ -й строке. Взаимно противоположные клетки симметричны друг другу относительно центра квадрата.

Магические квадраты любого порядка $n > 2$ можно строить довольно легко. Используемые для этого правила зависят от того, является ли порядок n квадрата нечетным числом (т. е. $n = 2m + 1$), «числом простой

* Краткую историю этого вопроса и соответствующую библиографию см. в [1].

четности» [т. е. $n = 2(2m + 1)$] или n есть число двойной четности (т. е. $n = 4m$). Для каждого из этих случаев ниже приводятся простейшие (из известных мне) правила построения магического квадрата.

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Магический квадрат n -го порядка при $n = 2m + 1$ можно построить по правилу де Лялубера [2]*, суть которого заключается в следующем. Прежде всего число 1 помещается в среднюю клетку верхней строки. Последующие числа размещаются в их обычном порядке по

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

$n=5$

a

31	43	00	12	24
42	04	11	23	30
03	10	22	34	41
14	21	33	40	02
20	32	44	01	13

$n=5$

b

Рис. 7.2

направлению диагонали, идущей направо и вверх от данной клетки. При этом следует иметь в виду: (i) когда достигнута верхняя строка, следующее число нужно записать в нижнюю строку так, как если бы она была помещена над верхней строкой; (ii) при достижении крайнего правого столбца следующее число записывается в крайний левый столбец так, как если бы он был помещен непосредственно рядом с крайним правым столбцом, и (iii) когда требуемая для заполнения клетка уже занята или когда достигнута верхняя клетка крайнего правого столбца, необходимо спуститься по вертикали на строку вниз и затем продолжать заполнение по основному правилу. Вероятно, рис. 7.2, *a*, на котором показан построенный по этому правилу магический квадрат пятого порядка, поможет лучше понять все сказанное.

* Де Лялубер разработал этот метод, когда служил посланником французского короля Людовика XIV в Сиаме (ныне Таиланд), в период 1687—1688 гг.

Почему таким путем мы построим именно магический квадрат, проще всего объяснить, рассматривая частный случай, например $n = 5$, и выражая все числа в пятеричной системе счисления (или в системе счисления с основанием n — для магического квадрата порядка n). Для простоты уменьшим одновременно все числа на единицу — это не повлияет на магические свойства квадрата. Получившийся квадрат можно считать *эйлеровым квадратом* (см. с. 206). Так как каждая строка и каждый столбец содержат по одной из каждого 5 возможных конечных цифр и по одной из каждого 5 возможных начальных цифр, то магические свойства строк и столбцов автоматически обеспечены; то же справедливо и для главной диагонали квадрата. Вторая же диагональ перегружена повторением цифры 2 (цифры m в случае $n = 2m + 1$), однако она также имеет требуемую сумму. Кроме того, каждое число в интервале от 0 до $n^2 - 1$ появляется в нашем квадрате один и только один раз.

Читатель может легко применить изложенное правило для построения магического квадрата третьего порядка. Такой квадрат, «ло-шу» ([3], с. 591), был символом Китайской империи Ю (2200 г. до н. э.) и до сих пор используется у некоторых восточных народов как амулет. Его можно встретить также на палубах больших пассажирских судов — площадка для игры в палубный шаффлбورد* размечена в виде магического квадрата третьего порядка.

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ПОРЯДКА ПРОСТОЙ ЧЕТНОСТИ

Магический квадрат n -го порядка при $n = 2(2m + 1)$ можно построить по следующему правилу, которое Р. Стрэчи сообщил мне в письме в августе 1918 г. Разделим квадрат на четыре равных квадрата A, B, C, D (рис. 7.3). Построим в квадрате A по правилу де Лялубера магический квадрат из чисел от 1 до u^2 , где $u = n/2$. Аналогичные магические квадраты построим в квадра-

* Эйлеров квадрат, соответствующий правилу де Лялубера, получается из квадрата $(12, 11)_n$ путем обращения порядка строк и циклической перестановки столбцов.

** Шаффлбورد — настольная игра, в которой монеты или металлические диски щелчком передвигают по расчерченной на девять клеток доске; палубный шаффлбورد — вариант этой игры с палками и деревянными дисками. — *Прим. перев.*

тах B , C , D соответственно из чисел: от $u^2 + 1$ до $2u^2$, от $2u^2 + 1$ до $3u^2$ и от $3u^2 + 1$ до $4u^2$. Ясно, что получившийся в результате составной квадрат будет магическим по столбцам. В средней строке квадрата A возьмем m клеток от середины строки к левому краю, а в каждой из оставшихся строк возьмем m клеток, ближайших к левому краю квадрата A ; числа в этих клетках поменяем местами с числами в соответствующих клетках квадрата B . Далее, возьмем числа в клетках каждого из $m - 1$ правых крайних столбцов ква-

A	C
B	D

Рис. 7.3

драта C и поменяем их местами с соответствующими числами квадрата D . Конечно, получившийся в результате квадрат остается магическим по столбцам. Теперь он будет магическим также и по строкам, и по диагоналям, так как проведенное построение эквивалентно написанию в каждом из квадратов A , B , C , D одинаковых магических квадратов порядка u из чисел от 1 до u^2 и затем наложению на них магического квадрата порядка n из четырех чисел: 0 , u^2 , $2u^2$, $3u^2$, каждое из которых повторяется u^2 раз. Каждый из составляющих квадратов является магическим, поэтому и получившийся путем их суперпозиции квадрат должен быть магическим; к тому же они составлялись таким образом, что при их суперпозиции в результирующем квадрате каждое из чисел от 1 до n^2 обязательно встретится один и только один раз.

На рис. 7.4, *a* и *б* показано применение этого правила для построения магического квадрата шестого порядка. На рис. 7.4, *a* подчеркнуты те числа квадрата A , которые менялись местами с соответствующими числами квадрата B ; на рис. 7.4, *б* представлен получившийся в результате магический квадрат; на рис. 7.5 показано, как налагается квадрат из чисел 0 , u^2 , $2u^2$, $3u^2$ на составляющие квадраты из чисел от 1 до u^2 для получения результирующего магического квадрата.

<u>8</u>	1	6	26	19	24
3	<u>5</u>	7	21	23	25
<u>4</u>	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

a

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

б

Рис. 7.4. Исходные составляющие квадраты, $n = 6$ (а); результирующий квадрат, $n = 6$ (б)

27+8	0+1	0+6	18+8	18+1	18+6
0+3	27+5	0+7	18+3	18+5	18+7
27+4	0+9	0+2	18+4	18+9	18+2
0+8	27+1	27+6	9+8	9+1	9+6
27+3	0+5	27+7	9+3	9+5	9+7
0+4	27+9	27+2	9+4	9+9	9+2

Рис. 7.5. Результирующий квадрат, $n = 6$

<u>17</u>	<u>24</u>	1	8	15	67	74	51	58	<u>65</u>
<u>32</u>	<u>5</u>	7	14	16	73	55	57	64	<u>66</u>
4	<u>6</u>	<u>13</u>	20	22	54	56	63	70	<u>72</u>
<u>10</u>	<u>12</u>	19	21	3	60	62	69	71	<u>53</u>
<u>11</u>	<u>18</u>	25	2	9	61	68	75	52	<u>59</u>
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	23	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Рис. 7.6. Исходные составляющие квадраты, $n = 10$

Поскольку это новый метод, здесь проиллюстрировано также его использование для построения магического квадрата десятого порядка: на рис. 7.6 подчеркнуты те числа в квадратах *A* и *C*, которые меняются

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Рис. 7.7. Результирующий квадрат, $n = 10$

местами с соответствующими числами в квадратах *B* и *D*; на рис. 7.7 изображен итоговый магический квадрат десятого порядка, построенный по названному методу.

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ПОРЯДКА ДВОЙНОЙ ЧЕТНОСТИ

Магический квадрат четвертого порядка (рис. 7.8, б), слегка отличающийся от квадрата на гравюре Дюрера (см. рис. 7.1, а), можно построить путем выписывания чисел от 1 до 16 в их обычном порядке в четырех строках и последующей замены чисел, стоящих в *диагональных* клетках, дополнительными к ним числами — расположенными симметрично исходным числам относительно центра квадрата (рис. 7.8, а). То же самое правило* применяется для построения магических квадратов любой двойной четности, если заменять числа, которые стоят на пересечении диагоналей каждого из составляющих

* См. [19] в литературе к гл. II, с. 176. Р. В. Хит вывел подобное правило для построения магических квадратов.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

а

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

б

Рис. 7.8 $n = 4$ (б)

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

а

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

б

Рис. 7.9 $n = 8$ (б)

большой квадрат (4×4) -квадратов. На рис. 7.9, *а* и *б* показано построение магического квадрата 8-го порядка.

ОКАЙМЛЕННЫЕ МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Заслуживает упоминания еще один общий метод построения магических квадратов произвольного порядка, принадлежащий Френиклу. Для построения по этому методу магического квадрата n -го порядка построим сначала магический квадрат $(n - 2)$ -го порядка, затем добавим к каждому его числу некоторое целое число n , наконец, «окаймим» полученный квадрат рамкой из оставшихся чисел, причем так, чтобы квадрат, к которому мы в результате придем, был магическим. Этим способом из магического квадрата 3-го порядка можно последовательно получить магические квадраты 5-го, 7-го, 9-го и т. д. порядков, т. е. квадраты любого нечетного порядка. Подобным образом из магического квадрата

4-го порядка можно последовательно получить все магические квадраты четного порядка.

Чтобы все сказанное стало более понятным, разберем хотя бы один пример. Пусть нам надо построить магический квадрат 7-го порядка (рис. 7.10, а). Сначала тем или иным способом строится внутренний магический квадрат $(n-2)$ -го порядка: сумма чисел в любом из его «характерных направлений» будет равна $(n-2)\{(n-2)^2+1\}/2$. Добавим к каждому числу

46	1	2	3	42	41	40
45	35	13	14	32	31	5
44	34	28	21	26	16	6
7	17	23	25	27	33	43
12	20	24	29	22	30	38
11	19	37	36	18	15	39
10	49	48	47	8	9	4

а

	1	2	3			
		13	14			5
			21		16	6
7	17	23	25			
12	20	24		22		
11	19			18	15	
10				8	9	4

б

Рис. 7.10. Окаймленный квадрат, $n = 7$ (а)

этого квадрата $2n-2$; тогда сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали станет равной $(n-2)\{n^2+1\}/2$. Мы еще не использовали числа $1, 2, \dots, 2n-2$ и дополнительные к ним $n^2, n^2-1, \dots, n^2-2n+3$. Эти запасные числа размещаются в $4(n-1)$ граничных клетках таким образом, чтобы дополнительные числа стояли в конце каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали внутреннего квадрата: это позволяет обеспечить равенство $n(n^2+1)/2$ суммы чисел вдоль каждого из этих направлений. Остается только добиться, чтобы сумма чисел также и вдоль каждой из граничных линий была равна той же самой величине; но такое их расположение легко получить простым подбором. Так, при определенной настойчивости шаг за шагом можно построить магический квадрат любого порядка; при этом, разумеется, необходимо соблюдать следующее условие: если внешнее окаймление квадрата убрать, то все равно остающийся квадрат по-прежнему будет магическим. Такой метод наиболее популярен у любителей математики.

Для расположения чисел в граничных клетках были предложены практические правила (см. например, [4]), правда не всегда достаточно точно сформулированные. Так, Дж. Траверс [5] предложил простое правило для построения магического квадрата нечетного порядка $n = 2m + 1$. Вместо словесного описания применим его к рассмотренному выше примеру (фактически это многократно окаймленный квадрат). На рис. 7.10, б показано соответствующее расположение чисел $1, 2, \dots, m; m + 1; m + 2, \dots, 2m; 2m + 1; 2m + 2, \dots, 3m; 3m + 1, \dots, 4m$. Теперь легко проставить дополнительные к ним числа. Интересующиеся читатели могут попытаться отыскать подобное простое правило для построения окаймленных магических квадратов четного порядка*.

ОБЩЕЕ ЧИСЛО МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА

Одна из нерешенных задач теоретического характера касается определения общего числа магических квадратов пятого (или любого более высокого) порядка. Нетрудно убедиться, что существует только один магический квадрат третьего порядка, хотя, используя отражения и повороты, его можно изобразить в 8 различных положениях. Магических квадратов четвертого порядка имеется всего 880, однако отражения и повороты позволяют представить их в 7040 вариантах. Упомянутая задача о числе магических квадратов пятого порядка решена не полностью. Из приведенного на рис. 7.2, б квадрата, построенного по методу де Лялубера, мы можем получить 720 разных квадратов; для этого первые цифры 0, 1, 2, 3, 4 фигурирующих там чисел можно переставить 5! разными способами, а последние цифры 0, 1, 3, 4 переставить 4! способами. В результате удастся получить 2880 магических квадратов пятого порядка, хотя только 720 из них будут существенно различными. Частично сходное построение предложил Баше (см. [19] в литературе к гл. II, с. 128). Он начал с помещения 1 в клетку, расположенную сразу же над центральной клеткой; метод Баше дает еще 720 различных магических квадратов пятого порядка. Существует, однако, множе-

* Несколько более сложное правило для квадратов четного порядка дано в работе [6].

ство других правил построения нечетных магических квадратов — и Лаир, используя все доступные ему методы, показал, что, избегая отражений и поворотов, можно найти 57 600 «примитивных» магических квадратов пятого порядка. С учетом имеющихся теперь других методов общее число магических квадратов пятого порядка значительно превышает 13 млн.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ И СОВЕРШЕННЫЕ КВАДРАТЫ

Несмотря на отсутствие формулы для определения общего числа магических квадратов заданного порядка, мы можем утверждать, что фактически теория построения магических квадратов разработана достаточно полно. Вследствие этого в последнее время особое внимание привлекает построение квадратов, удовлетворяющих кроме основных свойств «магичности» тем или иным дополнительным условиям. Например, при построении магических квадратов n -го порядка иногда накладывают условие, требующее, чтобы сумма двух чисел в симметрично расположенных относительно центра диагональных клетках была постоянной и равной $n^2 + 1$. Такие квадраты называются *симметрическими* (или *связанными*). Квадрат на гравюре Дюрера (см. рис. 7.1, а) симметричен: таковы же все квадраты, построенные по правилу де Лялубера (как, например, на рис. 7.2, а), и все квадраты порядка двойной четности, построенные описанным выше способом (такие, как на рис. 7.8, б и 7.9, б). Симметрических магических квадратов порядка простой четности не существует ([7], с. 308).

Среди дополнительных условий¹, введенных одним из первых, было следующее: условие «магичности» должно выполняться вдоль распадающихся на части диагоналей так же, как и вдоль обычных диагоналей*. Такие квадраты называются *совершенными*. Они известны также как «изящные», «многодиагональные» или «дьявольские» квадраты.

Совершенный магический квадрат четвертого порядка (см. [3], с. 594; общая теория таких квадратов изложена в [10]) был известен в Индии еще в XI—

* Квадраты такого вида упоминались Ф. де Лаиром, Дж. Совером и Л. Эйлером. Внимание к ним снова было привлечено А. Фростом (см. [8]), а в последующем их свойства изучали различные авторы. Помимо указанной статьи Фроста мне была весьма полезна работа [9].

XII вв. Немного отличающийся от него квадрат представлен на рис. 7.1, б. В нем сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на двух диагоналях равна 34, так же, как и сумма чисел в каждой из шести «ломанных диагоналей», образованных клетками с числами 15, 9, 2, 8; числами 10, 4, 7, 13; числами 6, 4, 11, 13; числами 3, 9, 14, 8 и, наконец, числами 10, 16, 7, 1.

Из определения следует, что если совершенный квадрат разрезать на две части вдоль линии, разделяющей любые две соседние строки или два соседних столбца, а затем эти две части поменять местами, то новый квадрат также будет совершенным магическим квадратом. Отсюда видно, что путем одного вертикального и одного горизонтального разреза и описанного переноса любой элемент квадрата можно поместить в любую заранее заданную клетку.

Как уже отмечалось, существует только один магический квадрат третьего порядка; поскольку он не совершенный, порядок совершенного магического квадрата должен быть выше трех. Кроме того, не существует совершенных магических квадратов порядка простой четности (см. [7], прим. 12). Совершенные магические квадраты нечетного порядка, не кратного трем, можно построить по методу, отчасти аналогичному правилу де Лялубера; разработаны также методы построения квадратов порядка, кратного трем.

Из 880 магических квадратов четвертого порядка 48 — совершенные. Россер и Уокер [10] установили, что имеется точно 3600 совершенных магических квадратов пятого порядка и более 6,5 млрд. совершенных квадратов восьмого порядка.

Обобщение правила де Лялубера. Удобно обозначать n^2 клеток квадрата следующими парами координат: клетки нижней строки (слева направо) — через $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(n-1, 0)$, а клетки левого крайнего столбца (снизу вверх) — через $(0, 0)$, $(0, 1)$, ..., $(0, n-1)$. В таком случае клетка (x, y) находится на пересечении $(n-y)$ -й строки и $(x+1)$ -го столбца. В этих обозначениях условия (i) и (ii) (см. с. 212) равносильны приведению координат по модулю n , так что клетки $(n+x, y)$ и $(x, n+y)$ идентичны клетке (x, y) .

По правилу де Лялубера при переходе от 1 к 2 обе наши координаты увеличиваются на единицу, — это равносильно применению «вектора»² $(1, 1)$. Аналогично переход (при «спуске») от числа n к $n+1$ осуществля-

ется применением вектора $(0, -1)$. Это правило, очевидно, можно обобщить, заменяя наши «канонические» векторы $(1, 1)$ и $(0, -1)$ какими-то другими; скажем, можно использовать вектор (a, b) — для перехода от ξ к $\xi + 1$ ($\xi = 1, 2, \dots, n-1$), а вектор $(a + a', b + b')$ — для «спуска» от $\xi'n$ к $\xi'n + 1$ ($\xi' = 1, 2, \dots, n-1$). Следовательно, переход от 1 к $n + 1$ осуществляет вектор $(n-1)(a, b) + (a + a', b + b') \equiv (a', b') \pmod{n}$; переход от 1 к $\xi'n + 1$ — вектор $(a'\xi', b'\xi')$, а переход от 1 к $\xi'n + \xi + 1$ — вектор $(a\xi + a'\xi', b\xi + b'\xi')$.

Пусть клетка (i, j) занята числом 1. Тогда координаты любого числа s можно вычислить, выражая $s - 1$ через $\xi'\xi$ по модулю n , т. е. выражая s в виде $\xi'n + \xi + 1$, где ξ' и ξ — неотрицательные целые числа, меньшие n .

Используя вектор $(a\xi + a'\xi', b\xi + b'\xi')$, находим требуемые координаты $(i + a\xi + a'\xi', j + b\xi + b'\xi')$. Любое другое число, скажем $s + X'n + X$, должно иметь другие координаты; поэтому из сравнений

$$aX + a'X' \equiv 0, \quad bX + b'X' \equiv 0 \pmod{n}$$

должно следовать $X \equiv X' \equiv 0$. А это будет выполняться, если $ab' - a'b$ взаимно просто с n . (В случае правила де Лялубера $ab' - a'b = -1$.)

Если a, b, a', b' также взаимно просты с n (и, следовательно, не равны нулю), то такой квадрат будет магическим по строкам и по столбцам. Действительно, числа в столбцах задаются n решениями сравнения вида $a\xi + a'\xi' \equiv c$, которые в свою очередь включают все положительные числа $0, 1, \dots, n-1$ для ξ и ξ' (в некоторой комбинации); аналогичное утверждение справедливо и для чисел в строках. Поскольку a, b, a', b' и $ab' - a'b$ взаимно просты с n , то n должно быть нечетным. В самом деле, если n четно, то a, b, a', b' , все должны быть нечетными, и тогда $ab' - a'b$ будет четно. Итак, мы можем утверждать, что $n = 2m + 1$.

Наконец, выберем i и j так, чтобы поставить среднее число (для которого $\xi = \xi' = m$) в центральную клетку (m, m) . Для этого требуется положить

$$i \equiv (1 - a - a')m, \quad j \equiv (1 - b - b')m.$$

(В случае правила де Лялубера $i = m, j = 2m$; следовательно, число 1 расположено в середине верхней строки.) Отсюда теперь следует, что квадрат симметрический, т. е. числа в симметрично расположенных клетках

(x, y) и $(2m - x, 2m - y)$ являются дополнительными. А это обеспечивает «магическое» свойство по диагоналям.

Этот магический квадрат удобно обозначать через $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}_n$. Тогда $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_n$ — магический квадрат де Лялубера, а $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_n$ — магический квадрат Баше. Тем самым мы доказали, что в том случае, когда a, b, a', b' и $ab' - a'b$ взаимно просты с n , можно построить такой магический квадрат.

7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12
1	14	22	10	18

α

26	21	9	4	48	36	31
44	39	34	22	17	12	7
20	8	3	47	42	30	25
38	33	28	16	11	6	43
14	2	46	41	29	24	19
32	27	15	10	5	49	37
1	45	40	35	23	18	13

δ

Рис. 7. 11. Совершенный квадрат, $n = 5$ (а); совершенный квадрат, $n = 7$ (б)

Кроме того, если числа $a + b, b - b, a' + b', a' - b'$ взаимно просты с n , то наш квадрат должен быть *совершенным*. Действительно, числа вдоль обобщенных «ломаных» диагоналей задаются n решениями сравнения $(a \pm b)\xi + (a' \pm b')\xi' \equiv c$. (При n , кратном 3, удовлетворить всем указанным условиям невозможно; для таких случаев метод, естественно, нужно модифицировать.)

Когда все условия выполнены, полученные таким способом значения i и j образуют симметрический и одновременно совершенный квадрат; разумеется, этот квадрат будет оставаться совершенным и при произвольном выборе клетки для числа 1. Например, в случае n , взаимно простого с 6, все указанные условия выполняются для квадратов $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_n$. Итак, чтобы построить совершенный квадрат пятого порядка (рис. 7.11, а), мы

можем поставить 1 в любую клетку; выполняя последовательные шаги, подобные ходу шахматного коня — одна клетка вправо и две клетки вверх, вписываем последовательно числа 2, 3, 4, 5 в каждую клетку до тех пор, пока не придем в уже занятую клетку; тогда, подобно шахматной ладье, делаем ход на одну клетку вниз — и так продолжаем, пока не заполним весь ква-

драт. Кроме того, в квадрате $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_n$ последова-

тельные числа можно вписать на каждом шаге ходом коня, как показано на рис. 7.14, б, отвечающем случаю $n=7$; однако, поскольку $ab' - a'b = -5$, такое построение невозможно при n , равном или кратном 5.

Метод Арну [11]. Если в квадратах, изображенных на рис. 7.11, а и б, уменьшить все числа на 1 и выразить их в n -ричной системе счисления (где $n=5$ или 7), то в результате мы получим квадраты, в которых легко узнать эйлеровы квадраты $(23, 44)_5$ и $(62, 43)_7$. И наоборот, нетрудно видеть, что любой диагональный эйлеров квадрат, составленный из пар цифр 00, 01, ..., ..., $(n-1)(n-1)$, становится магическим квадратом, если составляющие его числа интерпретировать как числа, выражаемые в системе счисления с основанием n .

Более того, любой эйлеров квадрат вида $(\alpha'\alpha, \beta'\beta)_n$ (даже если он не диагональный эйлеров квадрат) становится магическим квадратом, если переставить циклически его строки и столбцы, чтобы среднее число mt попало в центральную клетку (m, m) ; действительно, после этой перестановки квадрат становится симметрическим, т. е. в клетках $(m+x, m+y)$ и $(m-x, m-y)$ располагаются дополнительные числа. В самом деле, цифры числа, расположенного в клетке $(m+x, m+y)$, сравнимы с $m + \alpha'x + \beta'y$, $m + \alpha x + \beta y$ по модулю n . (Чтобы обеспечить набор чисел в интервале от 1 до n^2 вместо набора чисел от 0 до $n^2 - 1$, мы просто добавили ко всем числам единицу.)

С другой стороны, согласно обобщенному правилу де Лялубера, число $(m + \xi')n + (m + \xi) + 1$ ставится в клетку $(m + a\xi + a'\xi', m + b\xi + b'\xi')$. Эти два метода приводят к одному и тому же квадрату, если одновременно выполняются сравнения

$$\begin{aligned} x &\equiv a\xi + a'\xi', & k &\equiv b\xi + b'\xi', & \xi &\equiv ax + \beta y, \\ \xi' &= \alpha'x + \beta'x \pmod{n}, \end{aligned}$$

т. е. если

$$a\alpha + a'\alpha' \equiv b\beta + b'\beta' \equiv 1 \quad \text{и} \quad a\beta + a'\beta' \equiv b\alpha + b'\alpha' \equiv 0.$$

В этом случае матрицы $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$ вполне можно назвать «взаимно обратными матрицами», так как после умножения их друг на друга по обычному правилу умножения матриц (или определителей) мы получим единичную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$. Фактически эти два метода соответствуют двум аспектам преобразования координат³ [12]. Действительно, утверждение, что числа a, b, a', b' и $ab' - a'b$ взаимно просты с n , равносильно утверждению, что взаимно просты с n числа $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ и $\alpha\beta' - \alpha'\beta$.

Если n взаимно просто с 6, то мы можем выбрать $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, так чтобы числа $\alpha \pm \beta, \alpha' \pm \beta'$ (равно как и числа $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha\beta' - \alpha'\beta$) все были взаимно просты с n . Тогда квадрат $(\alpha'\alpha, \beta'\beta)_n$ будет не только диагональным, но и *совершенным*. (Нет необходимости делать перестановку строк и столбцов, если мы не претендуем на более высокую степень симметрии.) Простейший с этой точки зрения пример — это квадрат $(12, 21)_n$ (см. с. 206—207).

23	31	03	11
02	10	22	30
21	33	01	13
00	12	20	32

α

32	21	02	11
03	10	33	20
31	22	01	12
00	13	30	23

β

Рис. 7.12

Метод Маргосяна (см. [19], с. 148—151 в литературе к гл. II). Теперь рассмотрим обобщение метода Арну, что позволит нам строить совершенные квадраты кратного четырем порядка или кратного трем нечетного порядка (не равного, разумеется, 3). На рис. 7.12, α показан квадрат $(12, 21)_4$ (который, строго говоря, не является эйлеровым, так как 2 есть делитель 4). Хотя в таком виде этот квадрат не является магическим, он, однако, становится магическим — и даже совершен-

ным, — если каждую цифру 2 заменить на 3 (и наоборот), как это показано на рис. 7.12, б. На рис. 7.1, б изображен тот же квадрат в обычной его записи.

Обобщая, можно сказать, что для любого четного * числа α квадрат $(1\alpha, \alpha 1)_{2\alpha}$ будет совершенным магическим квадратом, если цифры $\alpha, \alpha + 1, \dots, 2\alpha - 1$ заменить на $2\alpha - 1, 2\alpha - 2, \dots, 2$. Последние цифры, стоящие в каждой строке чисел, — это какие-то цифры, каждая из которых повторяется α раз; перестановка Маргосяна приводит к тому, что эти две цифры дают одну и ту же сумму $2\alpha - 1$; аналогично это касается первых цифр чисел, выписанных в каждом столбце. Построенный по этому правилу квадрат (при $\alpha = 4$) изображен на рис. 7.13.

74	63	54	43	04	13	24	33
05	12	25	32	75	62	55	42
76	61	56	41	06	11	26	31
07	10	27	30	77	60	57	40
73	64	53	44	03	14	23	34
02	15	22	35	72	65	52	45
71	66	51	46	01	16	21	36
00	17	20	37	70	67	50	47

Рис. 7.13. Совершенный квадрат, $n = 8$ (в восьмеричной системе счисления)

Подобно этому, квадрат вида $(13, 31)_{3m}$, где m нечетно, обращается в совершенный магический квадрат, если числа $0, 1, \dots, 3m - 1$ переставить таким образом, что, когда они выписываются в их новом порядке в m строк по три числа в каждой, сумма чисел в получившихся столбцах остается той же. С этой целью $(\frac{1}{2})(m - 1)$ из m троек $0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ оставляют без изменения, если в следующих двух (из оставшихся) тройках числа циклически переставлены (различными способами), а в остальных $(\frac{1}{2})(m - 3)$ тройках числа

* Это не выполнялось бы для нечетных α , поскольку тогда не все числа в квадрате были бы различными. Действительно, в таком случае число $\alpha\beta' - \alpha'\beta (= \alpha^2 - 1)$ не было бы взаимно просто с $n (= 2\alpha)$.

35	48	52	65	78	82	05	18	22
04	17	21	34	47	51	64	77	81
63	76	80	03	16	20	33	46	50
32	45	58	62	75	88	02	15	28
01	14	27	31	44	57	61	74	87
60	73	86	00	13	26	30	43	56
38	42	55	68	72	85	08	12	25
07	11	24	37	41	54	67	71	84
66	70	83	06	10	23	36	40	53

Рис. 7.14

35	47	50	85	67	70	15	27	00
14	26	02	34	46	52	84	66	72
83	68	71	13	28	01	33	48	51
30	45	57	80	65	77	10	25	07
12	24	06	32	44	56	82	64	76
81	63	78	11	23	08	31	43	58
37	40	55	87	60	75	17	20	05
16	22	04	36	42	54	86	62	74
88	61	73	18	21	03	38	41	53

Рис. 7.15. Совершенный симметрический квадрат, $n = 9$ (в девятеричной системе счисления)

переставлены в обратном порядке. Таким образом, для квадрата девятого порядка цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5 можно оставить неизменными, если остальные цифры заменяются на тройки 7, 8, 6 (циклическая перестановка тройки 6, 7, 8 одним способом); 11, 9, 10 (то же — другим способом); 14, 13, 12 (перестановка в обратном порядке). В частном случае $m = 3$, т. е. для квадрата девятого порядка, мы можем циклически переставить строки и столбцы квадрата (13, 31), так, чтобы 44 поставить в центральную клетку (рис. 7.14), а затем циф-

ры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 заменить на 1, 2, 0, 8, 4, 5, 8, 6, 7; получившийся в результате квадрат (рис. 7.15) не только совершенен, но и симметричен ([11], с. 152—154).

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ИЗ НЕПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Хотя для *последовательных* чисел невозможно построить совершенный или симметрический магический квадрат порядка простой четности, К. Планк ([7], с. 307—316) разработал метод построения таких квадратов для чисел, которые являются почти последовательными. Для квадрата порядка n простой четности он использовал числа от 1 до $n^2 + 3$, опуская «среднее число» $(1/2)n^2 + 2$ и какие-либо другие два четных

28	1	26	36	8	21
3	35	7	27	23	25
34	24	22	2	29	9
4	32	19	12	39	14
13	17	15	37	5	33
38	11	31	6	16	18

a

28	1	26	21	8	36
3	35	7	25	23	27
34	24	22	9	29	2
38	11	31	18	16	6
13	17	15	33	5	37
4	32	19	14	39	12

б

Рис. 7.16. Совершенный квадрат, $n = 6$ (а); симметрический квадрат, $n = 6$ (б)

числа, сумма которых равна $n^2 + 4$. В частности, можно опустить просто числа, кратные $(1/4)n^2 + 1$. Сумма чисел в строке, в столбце или на диагонали такого квадрата равна $(1/2)n(n^2 + 4)$. Кроме того, для совершенного квадрата сумма чисел любого меньшего квадрата, состоящего из $(1/2n)^2$ клеток, равна $1/8n^2(n^2 + 4)$. На рис. 7.16, а и б показаны квадраты для $n = 6$, где опущены числа, кратные 10.

Другая задача для чисел, не являющихся последовательными, связана с построением магических квадратов из *простых* чисел. Первый из приведенных примеров (рис. 7.17, а) принадлежит Г. Дьюдени, второй (рис. 7.17, б) — Э. Бергхольту и К. Д. Шульдхаму. Подобные магические квадраты порядка n , равного 5, 6, ..., 12, были построены Х. А. Сэйлесом и Дж. Х. Манси [13]. (Заметим, что все перечисленные авторы не созна-

вали, что число 1, строго говоря, к простым числам не относится.) Квадраты Манси примечательны тем, что в них использованы последовательные простые числа 1, 3, 5, 7, 11, ..., 827 без единого пробела в их ряду.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

a

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

б

Рис. 7.17

На рис. 7.18 показана общая схема Бергхольта для построения любых магических квадратов четвертого порядка [14] (совершенных при $a = b = d - c = \frac{1}{2}(A - B - C + D)$, симметрических при $a + c = d = b - c$

$A - a$	$C + a + c$	$B + b - c$	$D - b$
$D + a - d$	B	C	$A - a + d$
$C - b + d$	A	D	$B + b - d$
$B + b$	$D - a - c$	$A - b + c$	$C + a$

Рис. 7.18

и $A + C = B + D$; отсюда следует невозможность существования одновременно совершенных и симметрических квадратов, так как в этом случае должно было бы выполняться $A - a = B$). Изображенный на рис. 7.17, б квадрат получается из схемы рис. 7.18 при $A = 13$, $B = 11$, $C = 37$, $D = 41$, $a = 10$, $b = 18$, $c = 24$, $d = -2$.

ДВОЙНЫЕ МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Для некоторых значений n (не меньших восьми) можно построить такой магический квадрат n -го порядка, что если числа в каждой его клетке заменить их квадратами, то получившийся в результате квадрат также будет магическим [15]*.

* Такие квадраты исследовались в работах Г. Тарри, Б. Портье, М. Коккоза, А. Рилли, И. Барбетта, У. С. Эндрюса; в частности, в работе А. Рилли [16] приведено более 200 квадратов такого типа.

17	50	43	04	32	75	66	21
31	76	65	22	14	53	40	07
00	47	54	13	25	62	71	36
26	61	72	35	03	44	57	10
45	02	11	56	60	27	34	73
63	24	37	70	46	01	12	55
52	15	06	41	77	30	23	64
74	33	20	67	51	16	05	42

Рис. 7.19. Двойной магический совершенный квадрат, $n = 8$ (в восьмеричной системе счисления)

76	82	64	15	27	00	41	53	38
11	23	08	46	52	34	75	87	60
45	57	30	71	83	68	16	22	04
62	74	86	07	10	25	33	48	51
03	18	21	32	44	56	67	70	85
37	40	55	63	78	81	02	14	26
84	66	72	20	05	17	58	31	43
28	01	13	54	36	42	80	65	77
50	35	47	88	61	73	24	06	12

Рис. 7.20. Двойной магический симметрический квадрат, $n = 9$ (в девятеричной системе счисления)

Продemonстрируем это на двух примерах. На рис. 7.19 изображен совершенный магический квадрат восьмого порядка, построенный М. Х. Шотцем [17]*. Числа выражены в восьмеричной системе счисления, чтобы можно было усмотреть лежащий в основе эйлеров квадрат. После добавления 1 ко всем элементам этого квадрата сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали станет равной 260, а сумма квадратов

* Ср. Sphinx, 1931, с. 137. Было замечено, что этот квадрат не является совершенным эйлеровым квадратом, так как его «ломанные» диагонали содержат повторяющиеся цифры (правда, их сумма всегда одна и та же).

этих чисел будет равна 11180. На рис. 7.20 показан двойной магический квадрат Р. В. Хита девятого порядка, записанный в девятеричной системе.

Тройные магические квадраты. Исследователи искали также такие магические квадраты, которые оставались бы магическими при замене исходных чисел как их квадратами, так и их кубами. Такой квадрат 64-го порядка был найден Казаласом [18]. Капитан Уильям Г. Бенсон из шт. Пенсильвания (США) сумел построить обладающий теми же свойствами магический квадрат 32-го порядка.

ДРУГИЕ «МАГИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ

Легко сформулировать множество задач, тесно связанных с магическими квадратами; приводимые ниже примеры служат лишь иллюстрацией этого.

Магические квадраты из костей домино. Обычный набор для игры в домино от «пусто—пусто» до «шесть—шесть» содержит 28 фишек. Каждая фишка имеет прямоугольную форму и разделена на два маленьких квадратика. Из этих 56 квадратиков восемь «пустых», восемь помечены одним кружком, восемь — двумя и т. д. Требуется расположить фишки домино таким образом, чтобы 56 квадратиков образовали квадрат размером 7×7 , у которого одна из граничных сторон состояла бы из «пустых» квадратиков, а сумма меток в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали квадрата равнялась бы 24. Одно из решений (см. [19]) показано на рис. 7.21.

Если выбрать из всего набора фишки того или иного типа, а остальные отбросить, то из выбранных фишек можно составлять различные магические квадраты. Для примера на рис. 7.22, а, б приведены два магических квадрата такого рода, построенные Эскоттом и Дьюдени.

Кубические и октаэдрические игральные кости. Грани куба можно пронумеровать цифрами от 1 до 6 таким способом, что сумма пар чисел на противоположных гранях всегда будет равна 7. Размеченный таким образом куб называется *игральной костью*. Игральные кости бросаются парами, и, по-видимому, во всех случаях в результатах игры не учитывается, бросаются ли идентично размеченные кости или энантиоморфные их варианты.

Другую разновидность игральных костей можно получить, пронумеровав грани многогранника от 1 до F

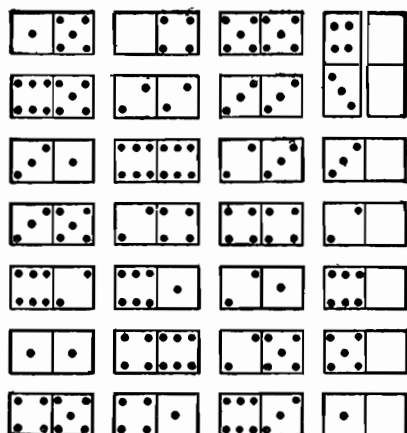


Рис. 7.21. Магический квадрат из костей домино

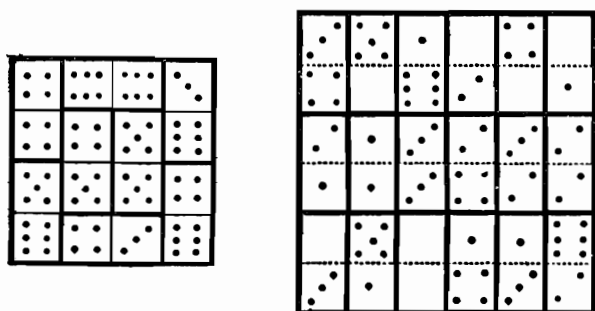


Рис. 7.22. Магические квадраты из костей домино

таким путем, чтобы сумма чисел на гранях, сходящихся в каждой вершине, была постоянной. Если в каждой вершине сходится m граней, то сумма должна быть равна $(\frac{1}{2})m(F+1)$; отсюда следует, что либо m четно, либо F нечетно. Известно, что все правильные многогранники имеют четное число граней; поэтому игральная кость такого вида может иметь лишь октаэдрическую форму (для октаэдра $m=4$, $F=8$). Грани октаэдра можно пронумеровать так, чтобы сумма отметок у сходящихся в каждой вершине граней была равна 18; это можно сделать тремя существенно различными способами, каждый из которых может быть реализован в двух энантиоморфных вариантах. Пары противоположных граней

имеют постоянную разность номеров, именно 1 и либо 2, либо 4 (см. рис. 7.23 *).

Сцепленные шестиугольники. Задача о нумерации граней вращающегося кольца из n тетраэдров (см. с. 168), такой что номера сходящихся у каждой вершины граней дают в сумме $3(4n + 1)$, по-видимому, неразрешима. Однако Р. В. Хит изящно решил соответствующую задачу для сети из $36n$ треугольников, полученной разбиением каждой грани кольца на девять треугольников. Такую сеть треугольников можно рассматривать

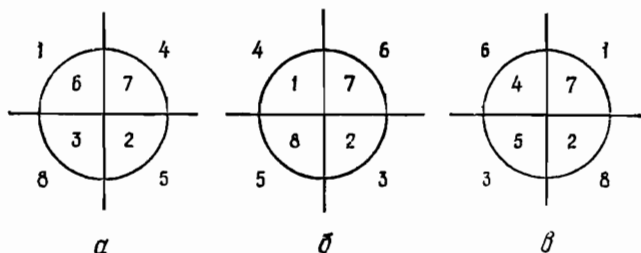


Рис. 7.23. Октаэдрическая игральная кость

как симметрическую «карту» на торе (см. с. 257) даже при $n < 6$. (В случае $n \geq 6$ такую карту можно нарисовать на вращающемся кольце девятью различными способами.)

На рис. 7.24 изображен простейший случай ($n = 2$); однако аналогичный метод применяется и в других случаях**. Шесть треугольников, сходящихся в любой из вершин, дают в сумме число $3(36n + 1)$; та же сумма получается для смежных с ними шести треугольников, образующих фигуру в виде звезды. Хит успешно решил также задачи о покрытии различных других поверхностей сцепленными шестиугольниками.

На рис. 7.25 показано выполненное Хитом специальное расположение чисел от 1 до 32 на кольце из восьми тетраэдров, которое является «магическим» в нескольких смыслах. Четыре грани каждого тетраэдра дают в сумме 66; «соответствующие» грани, взятые по одной из каждого тетраэдра, дают в сумме 132 (например, $9 + 7 +$

* Третья схема предложена Дж. М. Андреасом.

** Этот метод одинаков для всех значений n простой четности. Для n двойной четности или нечетных кольца заканчиваются так, как показано на рис. 7.25. В этом случае регулярное расположение чисел нарушается после $9n$ и $27n$.

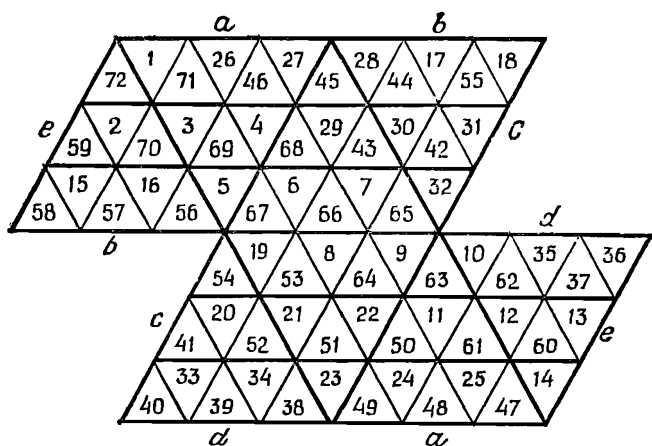


Рис. 7.24. Сцепленные шестиугольники на торе

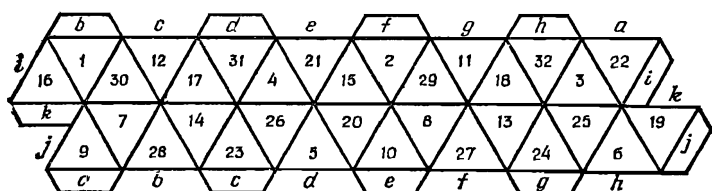


Рис. 7.25. Магическое вращающееся кольцо

$+ 17 + 31 + 10 + 8 + 18 + 32 = 132$) — то же самое получается для восьми наборов из восьми граней, которые спирально обвиваются вокруг кольца (например, $1 + 12 + 31 + 21 + 2 + 11 + 32 + 22 = 132$).

МАГИЧЕСКИЕ КУБЫ

Магический куб n -го порядка состоит из последовательных чисел от 1 до n^3 , расположенных в форме куба таким образом, что сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце, в каждом ряду и на каждой из четырех диагоналей (или «диаметров» куба) одна и та же и равна $(\frac{1}{2})n(n^3 + 1)$. Эту сумму можно получить $3n^2 + 4$ способами. Мне не известно никакого правила построения магических кубов порядка простой четности. Однако магические кубы нечетного порядка или порядка двойной четности можно строить путем естественного

обобщения методов, разработанных для построения магических квадратов.

Как и в двумерном случае (см. с. 221), мы будем постепенно переходить от клетки к клетке (точнее от кубика к кубику), только теперь «векторы» при таких ходах будут трехмерными. Действительно, определим ход (a, b, c) как передвижение на a клеток «на восток», b клеток — «на север» и c клеток — «вверх». Как и ранее, все переходы совершаются циклически, так что при любом ходе числа a, b, c приводятся по модулю n . Мы можем выполнять один и тот же ход $n - 1$ раз, пока не попадем в занятую клетку. Затем мы делаем один переход $(a + a', b + b', c + c')$; после этого совершаем еще $n - 1$ ходов (a, b, c) и т. д. При этом трудностей не возникает, пока мы не попытаемся записать число $n^2 + 1$. На этой стадии переход нужно изменить, скажем, на $(a + a' + a'', b + b' + b'', c + c' + c'')$, и переход этого нового вида следует использовать снова после каждого достижения числа, кратного n^2 (т. е. при каждом переходе на новую грань куба). Если величины a'', b'', c'' выбраны подходящим образом, то мы можем теперь заполнить весь куб. В самом деле, координата числа $\xi''n^2 + \xi'n + \xi + 1$ определяется путем применения к единице ξ шагов (a, b, c) , ξ' шагов (a', b', c') и ξ'' шагов (a'', b'', c'') . Таким образом, если единица помещена в клетку с координатами (i, j, k) , то число $\xi''n^2 + \xi'n + \xi + 1$ будет иметь координаты

$$(i + a\xi + a'\xi' + a''\xi'', \quad j + b\xi + b'\xi' + b''\xi'', \\ k + c\xi + c'\xi' + c''\xi'').$$

Чтобы различным числам всегда соответствовали различные координаты, нужно, чтобы из сравнений

$$\begin{aligned} aX + a'X' + a''X'' &\equiv 0, \\ bX + b'X' + b''X'' &\equiv 0, \\ cX + c'X' + c''X'' &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}$$

следовало $X \equiv X' \equiv X'' \equiv 0$. А это будет выполняться, если определитель

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

взаимно прост с n . Магическое свойство строк, столбцов и рядов будет обеспечено, если все миноры второго по-

рядка нашего определителя также взаимно просты с n . (Для четных n это невозможно.) Магическое свойство диагоналей будет обеспечено, если i, j, k выбраны так, чтобы среднее число попадало в центральную клетку; в этом случае куб является *симметрическим*. Удобно обозначить получившийся магический куб символом

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}_n.$$

Как только что мы установили, такой куб может быть построен при условии, что определитель выписанной матрицы и все его миноры 2-го порядка взаимно просты с n . Ясно, что эти условия удовлетворяются при любых нечетных значениях n , если

$$a = a' = b = b'' = c' = c'' = 1, \quad a'' = b' = c = 0$$

и если $i = j = k = \frac{1}{2}(n + 1)$. На практике легче всего поставить первые числа $1, n^2 + 1, 2n^2 + 1, \dots$, используя ходы $(0, 1, 1)$; затем проставить остающиеся числа $1,$

Нижний слой			Средний слой			Верхний слой		
4	12	26	20	7	15	18	23	1
11	25	6	9	14	19	22	3	17
27	5	10	13	21	8	2	16	24

Рис. 7.26. Магический куб, $n = 3$

$n + 1, 2n + 1, \dots$, используя ходы $(1, 0, 1)$; и, наконец, поместить оставшиеся числа, используя шаги $(1, 1, 0)$. На рис. 7.26 показаны три «горизонтальных» слоя магического куба

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3$$

Читателю, возможно, будет интересно попытаться применить это правило к случаю $n = 5$. Получающийся при этом куб является *совершенным* — у него не только четыре главные диагонали обладают магическим свойством, но и все «ломанные» диагонали. В таком кубе магическую сумму можно составить из элементов куба не $3n^2 + 4$, а $(3 + 4)n^2$ способами.

Можно доказать, что магический куб

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix}_n$$

будет совершенным, если все числа a , b , $a + b$ и $a^2 + \pm ab \pm b^2$ (при всех четырех возможных вариантах знаков) взаимно просты с n . Так, при $a = b = 1$ решение будет существовать при условии, что n не делится на 3 (а не только на 2); при $a = 2$, $b = 1$ существует другое решение, если n не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7.

Если a , b , $a \pm b$ и $a^2 + b^2$ взаимно просты с n , то сам магический куб не обязательно будет совершенным, однако он будет содержать совершенные магические

010	102	221	201	020	112	122	211	000
101	220	012	022	111	200	210	002	121
222	011	100	110	202	021	001	120	212

Рис. 7.27. Эйлеров куб, $n = 3$

квадраты в n слоях каждой из трех его главных плоскостей, так что «магическую сумму» здесь можно составить $(3 + 6)n^2$ способами. Например, при $a = 2$, $b = 1$ решение существует, если n не делится на 30, и в частности если n равно 7 или любому большему простому числу. Такой магический куб будет совершенным, если n не делится на 210, и в частности если $n = 11$ или любому большему простому числу. «Магическую сумму» такого куба можно составить из его элементов $(3 + 4 + \dots + 6)n^2$ способами. Как было показано Россером и Уокером, магический куб будет совершенным в указанном выше смысле только тогда, когда $n = 8$ или любому числу, кратному 8, а также когда $n = 9$ или любому большему нечетному числу.

На рис. 7.27 показан тот же самый магический куб, что и на рис. 7.26, но каждое число в нем уменьшено на 1 и записано в троичной системе счисления. С точностью до циклических перестановок слоев это и есть как раз эйлеров куб $(122, 212, 221)_3$: действительно, строка, столбец и ряд, включая 000, содержат элементы ± 122 , ± 212 , ± 221 поля $GF(3^3)$, а сам куб представляет собой таблицу сложения в строках, столбцах и ря-

232	310	032	110	013	131	213	331	230	312	030	112	011	133	211	333
020	102	220	302	201	323	001	123	022	100	222	300	203	321	003	121
212	330	012	130	033	111	233	311	210	332	010	132	031	113	231	313
000	122	200	322	221	303	021	103	002	120	202	320	223	301	023	101

Рис. 7.28. $n = 4$

60	37	12	21	7	26	55	42	57	40	9	24	6	27	54	43
13	20	61	36	50	47	2	31	16	17	64	33	51	46	3	30
56	41	8	25	11	22	59	38	53	44	5	28	10	23	58	39
1	32	49	48	62	35	14	19	4	29	52	45	63	34	15	18

Рис. 7.29. Совершенный магический куб, $n = 4$

Первый слой *Второй слой*

1	8	61	60	48	41	20	21
62	59	2	7	19	22	47	42
52	53	16	9	29	28	33	40
15	10	51	54	34	39	30	27
32	25	36	37	49	56	13	12
35	38	31	26	14	11	50	55
45	44	17	24	4	5	64	57
18	23	46	43	63	58	3	6

Четвертый слой *Третий слой*

Рис. 7.30. Магический квадрат $n = 8$ и одновременно совершенный куб, $n = 4$

дах ([11], с. 63). Поскольку матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

по модулю 3 взаимно обратны, два рассмотренных метода построения кубов снова отвечают двум способам преобразования координат.

На рис. 7.28 изображен куб $(122, 212, 221)_4$, который не является собственно эйлеровым, так как 4 делится на 2. Он будет магическим и даже совершенным, если каждую цифру 2 заменить на 3 и наоборот. Получив-

шийся в результате куб в обычных обозначениях изображен на рис. 7.29. Фактически подстановка Маргосяна (с. 226) позволяет получить совершенный куб $(1\alpha\alpha, \alpha1\alpha, \alpha\alpha1)_{2\alpha}$ для любого четного значения α .

Рис. 7.30, построенный Р. В. Хитом, замечателен тем, что он представляет собой одновременно магический квадрат восьмого порядка и совершенный куб четвертого порядка. Как магический квадрат этот рисунок обладает интересным свойством *перестановки* чисел в любой строке, в любом столбце или на любой диагонали при неизменной сумме чисел 130. Как совершенный куб он выгодно отличается от куба, изображенного на рис. 7.29, тем, что четыре горизонтальных слоя его (это четыре четверти магического квадрата восьмого порядка) являются в то же время магическими квадратами.

1. Günter S. *Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*. — Leipzig, 1876, ch. IV; Ahrens W. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. — Leipzig, 1901, chap. XII; Andrews W. S. *Magic Squares and Cubes*. — Chicago, 1917.
2. De la Loubère S. *Du Royaume de Siam*. — London, 1693, vol. II, pp. 227—247.
3. Smith D. E. *History of Mathematics*. — Boston, 1925, vol. II.
4. Smith D. E., Mikami Y. *Japanese Mathematics*. — Chicago, 1914, pp. 116—120.
5. Travers J. *Education Outlook*, 1936. Другое подходящее правило см. Heath R. V. *Scripta Mathematica*, 1936, vol. IV, p. 67.
6. Travers J. *Engineering Gazette*, August, 13, 1938, p. 6.
7. Planck C. *The Monist* (Chicago), 1919, vol. XXIX.
8. Frost A. H. *Quarterly Journal of Mathematics* (London), 1878, vol. XV, pp. 34—49.
9. McClintock E. *American Journal of Mathematics*, vol. XIX, 1897, pp. 99—120.
10. Rosser J. B., Waller R. J. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1938, vol. XLIV, pp. 416—420.
11. Arnoux G. *Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques*. — Paris, 1894, p. 51. Ср. [19], pp. 130—146 (в литературе к гл. II).
12. Veblen O. On Magic Squares, *Messenger of Mathematics*, 1908, vol. XXXVII, pp. 116—118.
13. *The Monist*, 1913, vol. XXIII, pp. 623—630.
14. *Nature*, 1910, vol. LXXXIII, p. 368; см. также Chernick J. *American Mathematical Monthly*, 1938, vol. XLV, pp. 172—175.
15. Cocoz M. *L'Illustration*, May 29, 1897.
16. Rilly A. *Études sur les Triangles et les Carrés Magiques aux deux premiers degrés*. — Troyes, 1901.
17. Schots M. H. *Bulletin de la classe de Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 1931, pp. 339—361.
18. Cazalas J. J. A. M. E. *Carrés Magiques au degré n*. — Paris: Hermann, 1934, p. 114.
19. *L'Illustration*, July 10, 1897; *Scientific American*, December 1968, vol. 221, no. 6, pp. 122—127.

ЗАДАЧИ О РАСКРАСКЕ КАРТ

Эта и последующая главы посвящены ветви математики, называемой *топологией*, где в отличие от геометрии нет необходимости в таких понятиях, как прямая линия, плоскость или сфера, расстояние и т. д. В топологии любой овал не отличают от окружности, а поверхность эллипсоида полностью равноправна со сферой; здесь игнорируются различия между любыми двумя фигурами, получающимися одна из другой путем сжатия или растягивания без разрывов и склеиваний отдельных частей (при этом невольно возникает довольно избитое сравнение с фигурами, нарисованными на куске резины). Однако в топологии шар существенно отличен от выдолбленной внутри сферы (скажем, от резинового пустотелого мяча), а и то и другое — от пузырька или *тора*. Различаются также простая замкнутая кривая и заузленная, если, конечно, они расположены в обычном (трехмерном) пространстве; в четырехмерном же пространстве любой такой узел может быть развязан без повреждения петли — и потому заузленная линия эквивалентна простой окружности.

ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Прежде всего я сформулирую знаменитое предположение, которое кажется простым и представляется верным, но которое пока еще никем не доказано¹, хотя родственные ему более сложные теоремы такого же типа устанавливаются достаточно легко. Это предположение звучит так: *требуется не более четырех красок для правильной раскраски любой карты какой-угодно страны, разбитой на отдельные области; при этом раскраска называется правильной, если никакие две соседние области не закрашены одним цветом*. Соседними считаются области, имеющие общую часть границы (линию той или иной — возможно, очень малой — длины); области,

соприкасающиеся только в отдельных точках, соседними здесь не считаются. При этом карта нарисована на односвязной поверхности, такой, как плоскость или сфера; число областей («стран» карты) конечно, и ни одна из них не состоит из двух или большего числа несвязных частей. Карта может занимать всю поверхность или часть ее. [Если карта плоская и заполняет всю плоскость, то по крайней мере одна из областей должна быть бесконечной по площади, поскольку число областей конечно; разумеется, на сфере (на «глобусе») вообще не может быть бесконечных областей («стран»)]. Некоторые карты можно раскрасить менее чем четырьмя красками — так, при правильной раскраске шахматной доски вообще можно обойтись лишь двумя красками, а для раскраски мозаики из сходящихся по три в каждом «узле» одинаковых шестиугольных плиток — тремя.

В 1853 г. Фрэнсис Гутри [1] (аспирант университетского колледжа в Лондоне) нарисовал карту Англии и отметил, что четырех красок достаточно для правильной раскраски графств на этой карте. Пытаясь сформулировать общую теорему, он обсудил ее со своим братом Фредериком, студентом Кембриджского университета, который обратился за консультацией к своему профессору Огустусу де Моргану. Де Морган весьма заинтересовался этой проблемой и упомянул о ней в письме, которое он направил в Дублин своему знаменитому другу Уильяму Гамильтону, королевскому астроному Ирландии; однако потом эта проблема была прочно забыта вплоть до 1878 г., когда Артур Кэли [2]* в своих выступлениях в математическом и географическом обществах Англии сообщил, что он занимался ею, но не смог получить строгого решения. При этом Кэли «выпустил джинна из бутылки», порекомендовав слушателям попытаться самим найти решение этой задачи.

Возможно, приводимое ниже рассуждение — правда, не являющееся формально безупречным доказательством — убедит читателя в справедливости гипотезы о четырех красках. Пусть A , B , C — три попарно граничащие области, и пусть X — еще одна область, соседняя с каждой из этих трех областей. Тогда область X должна целиком лежать либо снаружи внешней границы

* В названных здесь статьях Кэли охарактеризованы затруднения, возникающие при попытках решения задачи о четырех красках.

объединенной области ABC , либо внутри ее внутренней границы, т. е. она должна располагаться либо как X , либо как X' на рис. 8.1. В любом из этих случаев невозможно нарисовать еще какую-либо область Y , которая имела бы общую границу с A , B , C и X . Иными словами, на плоскости можно нарисовать четыре области, граничащие друг с другом, — но невозможно нарисовать пять таких областей². Если области A , B , C не все граничат друг с другом или если область X не

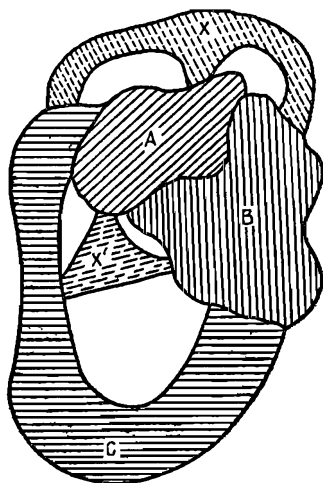


Рис. 8.1

граничит с A , или с B , или с C , то нет необходимости раскрашивать все эти области в разные цвета — таким образом, A , B , C и X во многих случаях можно правильно раскрасить 3 красками, что, однако, несколько не приближает нас к решению общей проблемы. Заметим еще, что любую из областей можно стянуть в точку и затем совсем убрать, не нарушая ничего в наших аргументах.

Таким образом, как видно из рис. 8.1, по крайней мере четыре краски нам могут потребоваться, так как здесь области (или «страны», как мы чаще будем говорить в дальнейшем) A , B , C и X обязательно должны быть раскрашены в разные цвета.

Доказательство гипотезы о четырех красках сопряжено со значительными трудностями, все попытки преодоления которых долго оказывались тщетными. Отчасти

это связано со следующим соображением. Если с помощью четырех красок мы станем раскрашивать нашу карту страна за страной, то всегда могут обнаружиться две-три новые страны, которые невозможно будет раскрасить так, чтобы они отличались от соседних с ними. В таком случае наше раскрашивание окажется неудачным. Однако, начав снова, мы, вероятно, всегда сможем перекрасить страны так, чтобы ограничиться четырьмя красками, раскрасив ими также и новые страны.

В 1879 г. Кемпе сообщил о «доказательстве»³ гипотезы четырех красок, однако в нем была обнаружена ошибка*.

В 1880 г. Тэйт опубликовал решение «задачи о красках» [7], основанное на теории графов⁴. *Граф* (в том смысле, в каком это понятие использовал Тэйт) — это просто некоторое расположение точек, называемых *вершинами* графа, причем отдельные пары вершин соединены отрезками линий, называемыми *ребрами* (ребра графа не обязательно должны быть прямолинейными)⁵. Если представить себе граф в трехмерном пространстве, то можно быть уверенным, что любые два ребра графа можно провести так, чтобы они не пересекались друг с другом; ребра могут лишь сходиться в (общих для двух ребер) вершинах графа. Примером графа может служить множество вершин и ребер многогранника. Графы встречаются в электротехнике, они применяются также в анализе структурных химических формул. В связи с последним естественно использовать понятие *валентности* (или *степени*) вершины — под этим понимается число ребер, сходящихся в рассматриваемой вершине. Так, граф называется *трехвалентным*, если все его вершины имеют валентность 3, т. е. если в каждой вершине графа сходятся три его ребра. В этом частном случае, очевидно, числа вершин и ребер графа будут соответственно равны $2m$ и $3m$, где m — некоторое целое число.

Мы ограничимся рассмотрением *связных* графов, т. е. таких, для которых в любую вершину из любой другой можно попасть, двигаясь по какой-либо последовательности (соседних) ребер графа. Ребро называется *пере-*

* Свою первую заметку Кемпе переслал через Атлантический океан, напечатав ее в [3]; однако после этого он в упрощенном виде изложил свои соображения в статьях [4] и [5]. Неточность в доказательстве Кемпе впервые была отмечена П. Хивудом ([6], с. 337).

шейком, если его удаление разбивает граф на две несвязные части. Граф называется *планарным* (или *плоским*), если его можно нарисовать на плоскости или на сфере так, чтобы никакие два ребра не пересекались между собой.

Тэйт считал, что ребра любого трехвалентного графа можно раскрасить тремя красками так, чтобы в каждой вершине сходились три ребра разного цвета. По-видимому, такую трехцветную раскраску ребер графа возможно получить только для трехвалентных планарных графов без перешейков. Для произвольного трехвалентного графа утверждение Тэйта неверно, что видно из рис. 8.2, а, б, на первом из которых изображен граф с

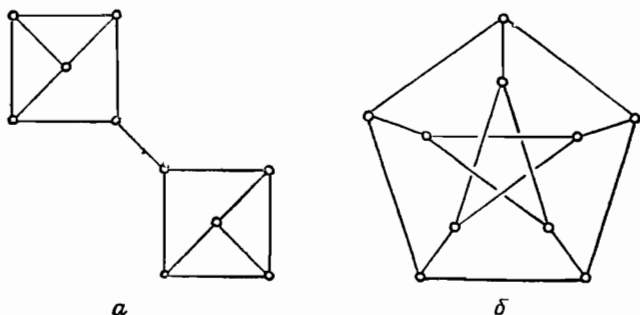


Рис. 8.2

перешейком, а на втором — существенно неплоский граф. Каждый из этих графов имеет по 10 вершин и по 15 ребер — ребра ни одного из них нельзя раскрасить в три цвета требуемым образом.

Юлиус Петерсен (1839—1910) объяснил трудность следующим образом [8, 9]*. Он доказал, что любой трехвалентный граф можно раскрасить двумя красками, скажем красной и зеленой, так, чтобы в каждой вершине сходились одно красное и два зеленых ребра. Зеленые ребра образуют многоугольные петли. По-видимому, Тэйт полагал, что двухцветную раскраску всегда можно преобразовать так, чтобы в каждом многоугольнике, имеющем четное число сторон, стороны вместо-зеленого цвета были раскрашены попеременно в голубой и желтый цвета.

* Простейший непланарный граф, который допускает раскрашивание Тэйта, имеет шесть вершин, скажем 1, 2, 3, 4, 5, 6, и девять ребер, каждое из которых соединяет нечетную вершину с четной.

Предположим, что эта усовершенствованная форма гипотезы Тэйта фактически имеет место, т. е. каждый планарный трехцветный граф без перешейков можно раскрасить требуемым образом тремя красками. Принадлежащее Тэйту доказательство того, что для правильной раскраски любой карты достаточно четырех красок, распадается на два случая.

Пусть прежде всего (случай i) на карте нет вершин, в которых сходятся больше чем три страны. Тогда границы стран карты можно считать ребрами трехвалентного графа; поэтому, согласно теореме Тэйта, границы стран можно раскрасить тремя цветами β , γ , δ так, чтобы никакие две границы одного цвета не сходились в одной вершине графа. Предположим, что мы осуществили такую раскраску ребер графа. Выберем теперь четыре цвета A , B , C , D , которыми мы будем раскрашивать страны карты. Раскрасим одну страну цветом A ; соседнюю с A страну, отделенную от нее границей цвета β , окрасим цветом B ; соседнюю с A страну, отделенную от нее границей цвета γ , — цветом C ; соседнюю с A страну, отделенную от нее границей цвета δ , — цветом D . Продолжим эту процедуру так, чтобы граница цвета β всегда разделяла страны цветов A и B или цветов C и D ; граница цвета γ всегда разделяла страны цветов A и C или D и B , а граница цвета δ — страны цветов A и D или B и C . Легко видеть, что если мы придем к некоторой стране, граничащей с уже раскрашенными странами, то, применяя указанное правило, мы получим для этой страны один и тот же цвет независимо от того, от какой из ее границ мы «будем танцевать». Это обстоятельство вытекает также из того факта, что если рассматривать β , γ , δ как обозначения некоторых операций (операций раскрашивания страны, отделенной ребром соответствующего цвета от уже закрашенной), то, скажем, операция δ может быть представлена как результат суперпозиции двух других операций β и γ , выполненных последовательно в любом порядке. Таким образом, для рассматриваемого случая проблему четырех красок можно считать решенной.

Предположим теперь (случай ii), что в некоторой точке карты сходятся четыре или более границы (рис. 8.3, а), так что отвечающий рассматриваемой карте граф уже не будет трехвалентным. Такую точку окружим маленькой областью, как показано на рис. 8.3, б; тем самым задача будет сведена к случаю (i). Малую

же дополнительную область можно раскрасить в соответствии со сказанным выше; оставшаяся часть карты раскрашивается с учетом этой малой области, которую можно затем снова стянуть в точку, получив тем самым первоначальные границы стран, т. е. вернуться к исходной карте⁴.

Для дальнейшего обсуждения проблемы ([6], с. 333)* полезно ввести понятие приведения к «стандартной» карте, более простой по сравнению с исходной и такой, что если приведенную карту можно раскрасить четырьмя красками, то это возможно и для исходной. (Более того, если приведенную карту можно правильно раскрасить

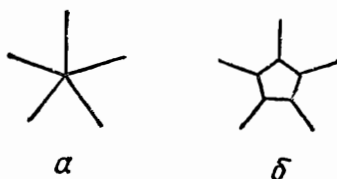


Рис. 8.3

пятью или большим числом красок, то то же самое число красок достаточно и для раскраски исходной карты.)

Мы будем считать, что рассматриваемая карта нарисована на сфере; если карта не покрывает всю сферу, то будем считать оставшуюся часть сферы еще одной страной карты. Далее, сделаем все вершины трехвалентными, но не так, как было показано на рис. 8.3, *a*, *б* (что приводит к увеличению числа стран), а по-другому — с уменьшением числа стран. Заметим, что в вершине валентности выше трех должны сходиться пары стран, не имеющих общей границы, т. е. таких, которые можно раскрасить одним и тем же цветом; учитывая это, мы можем отодвинуть два ребра от нашей вершины и объединить две страны в одну (см. рис. 8.4). Затем избавимся от стран с одной, двумя или тремя границами (мы просто удалим одну границу и объединим такую страну с соседней — рис. 8.5). После этого избавимся также и от стран, имеющих ровно четыре границы. [Из четырех стран, окружающих такую страну, по крайней мере две не являются соседними; эту пару стран можно

* Далее приводится упрощенное изложение статьи Хивуда, принадлежащее Л. А. Парсу.

объединить с рассматриваемой страной, имеющей четыре границы (рис. 8.6). Если такую приведенную карту можно раскрасить четырьмя красками, то то же самое можно сделать и с исходной картой; действительно, если мы восстановим нашу страну с четырьмя границами, то ее будут окружать самое большее страны, окрашенные в

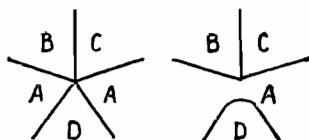


Рис. 8.4

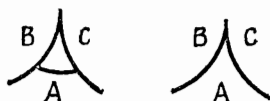


Рис. 8.5

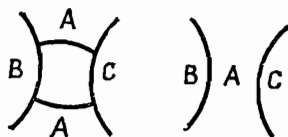


Рис. 8.6

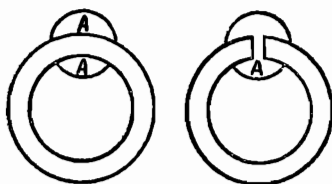


Рис. 8.7

три цвета, — и у нас в запасе останется еще одна краска, которой можно будет окрасить восстановленную страну.] Наконец, избавимся от «кольцеобразных» стран с тем, чтобы каждая страна была односвязной, — она должна быть ограничена простой непрерывной линией и не содержать внутри себя одну или более других стран. (Кольцеобразную страну можно разделить проходом, соединяющим страны, расположенные внутри и вне рассматриваемой, и затем объединить эти две страны вместе с проходом в одну страну — рис. 8.7.)

Если мы начнем с совсем простых карт, то может случиться, что после всех этапов описанного выше «приведения» (или упрощения) карты на сфере останется единственная страна (охватывающая, естественно, всю сферу), — поскольку требуемое утверждение верно для такой простой карты, оно будет верно и для исходной карты. В худшем варианте у нас останется «стандартная» карта, в которой ни одна страна не имеет меньше пяти границ.

Такую карту можно рассматривать как многогранник, имеющий F граней (стран), E ребер (границ, отделяющих соседние страны друг от друга) и V вершин (в которых сходятся более двух стран). Страну, имеющую n соседей, естественно назвать n -угольной; тогда страны F — это n -угольники, где n может иметь разные значения (но все $n \geq 5$). Так как в каждой вершине сходятся три страны, а каждое ребро разграничивает две страны, то

$$3V = 2E = \Sigma n,$$

где через Σ обозначено суммирование по n , распространенное на все F стран карты (или граней многогранника). По формуле Эйлера (которую мы докажем на с. 252—253) $F - E + V = 2$ и, значит,

$$\begin{aligned}\Sigma(6 - n) &= 6F - \Sigma n = 6F - 3\Sigma n + 2\Sigma n = \\ &= 6(F - E + V) = 12.\end{aligned}$$

Таким образом, по крайней мере для одной страны $n < 6$, т. е. на карте существует по крайней мере один пятиугольник.

Теперь мы можем методом математической индукции доказать, что стандартную карту — а значит, и произвольную карту — можно правильно раскрасить **шестью** красками. Рассмотрим страну, имеющую пять границ, и объединим ее с одной из соседних стран, исключая разделяющую эти две страны границу. Если эту новую карту можно раскрасить шестью красками, то то же самое возможно и для исходной карты. Действительно, когда мы восстановим страну с пятью границами, то с ней будут граничить всего лишь пять стран, которые могут быть окрашены в пять цветов, — и у нас останется еще шестая краска, пригодная для раскрашивания восстановленной страны. Но мы можем поступать так шаг за шагом — и тем самым *теорема о шести красках* ста-

новится доказанной. (Это более тонкий вывод, чем может показаться на первый взгляд. Действительно, после удаления одной границы полученная карта не обязательно окажется «стандартной», и, прежде чем мы сможем снова применять указанные рассуждения, нам, возможно, потребуется привести ее к «стандартной» форме описанным выше способом. В дальнейшем я буду ссылаться на это как на «грубый метод индукции».)

Весьма изощренным способом, подобным тому, что предложил Хивуд ([6], с. 337), можно показать, что на самом деле всегда достаточно и пяти красок. Рассмотрим страну P с пятью границами. Среди стран Q, R, S, T, U , граничащих с ней, должна быть по крайней мере одна пара стран, скажем Q и S , не граничащих друг с другом. Объединим Q, R, S в одну страну P' , удалив две границы страны P . Если получившуюся таким образом карту можно раскрасить пятью красками, то то же самое можно сделать и с исходной картой; действительно, для стран P', R, T, U потребуется самое большее четыре краски, — и, когда мы вернемся к исходной карте, у нас останется еще одна краска, которую можно будет использовать для закраски страны P . Поступая так же шаг за шагом, мы сможем доказать *теорему о пяти красках*.

Но это единственное, чего мы можем достичь! Перекинуть мост от пяти красок, которых всегда достаточно, к четырем краскам, которых должно быть достаточно, нам никак не удастся, если не считать случаев малого числа F стран. Поскольку разность $6 - n$ при $n > 5$ обращается в нуль или отрицательна, из приведенного выше равенства

$$\Sigma(6 - n) = 12$$

следует, что любая стандартная карта содержит (по крайней мере) двенадцать пятиугольников. Простейшая стандартная карта — это поверхность додекаэдра, которую можно раскрасить четырьмя красками. Отсюда следует, что любую карту, имеющую не более 12 стран, можно раскрасить четырьмя красками. Иными словами, любая карта, для которой требуется пять красок, должна иметь по крайней мере 13 стран, включающих не менее 12 пятиугольников.

Эти оценки были улучшены разными авторами (см. [10]). В 1922 г. Франклин показал, что карта, требующая для раскраски пять красок, должна содержать не

менее 26 стран. В 1936 г. он увеличил число стран до 32, включая по крайней мере 15 пятиугольников. Несколькими годами позже Уинн увеличил число стран до 36, среди которых по крайней мере две страны имеют более шести границ.

В своей второй статье [11] Хивуд показал, что исследуемая проблема может быть сведена к задаче из теории чисел. Рассмотрим снова граф Тэйта с $3m$ ребрами, попарно соединяющими $2m$ вершин (см. 245). В каждой вершине графа сходятся три ребра β , γ , δ . Мы можем разделить вершины на два класса — скажем на «положительные» и «отрицательные» — в соответствии с тем, в каком порядке следуют друг за другом в этой вершине ребра β , γ , δ — против часовой стрелки или по часовой стрелке; при этом каждая страна будет иметь некоторое число положительных и некоторое число отрицательных вершин. Заметим, что *разность между этими двумя числами обязательно кратна 3*. Действительно, обойдем одну за другой все границы (ребра) некоторой страны, скажем, в направлении по часовой стрелке. Далее, упорядочим циклически символы β , γ , δ в выписанном порядке: переходы $\beta \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow \delta$ и $\delta \rightarrow \beta$ будем считать положительными, а обратные переходы $\gamma \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \delta$ и $\delta \rightarrow \gamma$ — отрицательными. При этом прохождение каждой положительной вершины при обходе границы страны A определяет один шаг вперед (т. е. положительный переход от одной вершины к другой), а прохождение каждой отрицательной вершины — «шаг назад» (ср. рис. 8.8); когда же мы вернемся в исходную точку, разность между числами «шагов вперед» и «шагов назад» должна быть кратна 3, иначе мы не смогли бы вернуться к тому ребру, с которого начали. И обратно, задавая таким способом некоторое распределение вершин по двум классам и обозначая ребра последовательно через β , γ , δ , мы — в силу выдвинутых Тэйтом аргументов — убедимся, что данная карта может быть раскрашена четырьмя красками.

Разбиение $V = 2m$ вершин на положительные и отрицательные равносильно приписыванию им $2m$ чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$, имеющих значения $+1$ или -1 . Проблема раскраски связывается, таким образом, с решением системы из $m + 2 (= F)$ сравнений вида

$$x_a + x_b + \dots \equiv 0 \pmod{3}, \quad x_i \neq 0,$$

где каждое из $2m$ неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ входит в три и только в три сравнения. Интересующий нас вопрос сводится к вопросу о том, разрешима или неразрешима каждая такая система сравнений.

Рассматривая обобщенные сравнения вида

$$x_a + x_b + \dots \equiv \rho \pmod{3},$$

где ρ может принимать любое из значений 0, 1, 2, Хивуд установил [12], что по мере роста m число «неудач» (т. е. отсутствий решений системы) быстро уменьшается.

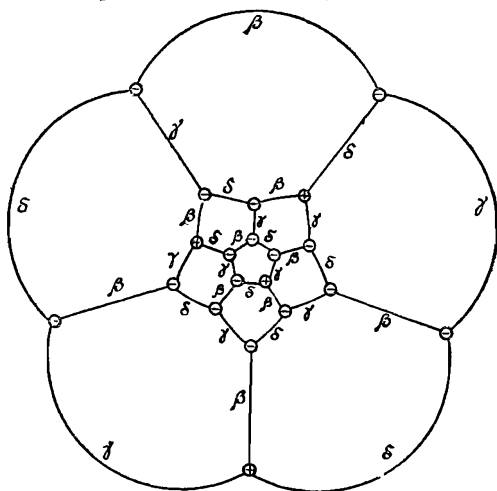


Рис. 8.8

Однако в последующей статье он показал, что такие «неудачи» (для расширенной системы сравнений) все равно неизбежно нам встретятся.

ЗАМКНУТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность называется *ориентируемой*, если заданное в одной ее точке положительное направление вращения (скажем, направление вращения против часовой стрелки) без противоречий можно по непрерывности распространить на все точки поверхности*. В трехмерном

* Точнее такое понятие вращения задается в любой точке посредством введения «директрисы», т. е. малой окружности с центром в рассматриваемой точке, снабженной стрелкой. Поверхность называется *неориентируемой*, если на ней можно найти такую замкнутую линию, при обходе которой направление директрисы меняется на обратное.

пространстве поверхность будет ориентируемой или неориентируемой в зависимости от того, является она двусторонней или односторонней. Например, «парадромные кольца» (см. с. 138) будут ориентируемыми или нет в зависимости от четности или нечетности числа m .

Для исследования топологии замкнутой поверхности* (такой, как сфера или тор) рисуем на ней некую карту, т. е. разобьем ее на F односвязных «стран», проведя E дуг (границ наших стран), соединяющих (попарно) V точек (вершин карты). При сжатии или растяжении поверхность деформируется; однако так как мы не допускаем разрывов и склеиваний поверхности, числа F , E , V при этом не меняются. Я докажу, что число $F - E + V$ характеризует саму поверхность, а не только карту на ней⁶, т. е. что если на той же поверхности другая карта имеет F' стран, E' границ и V' вершин, то $F' - E' + V' = F - E + V$.

В самом деле, предположим, что эти две карты налагаются одна на другую** и их границы, взаимно пересекая друг друга, образуют третью карту, имеющую, скажем, f областей, e границ, v вершин. Число v вершин этой карты равно сумме $V + V'$ вершин двух исходных карт*** плюс число точек пересечения границ наших двух карт⁷.

Видоизменим первую карту, прибавив эти точки пересечения в качестве новых вершин, что приведет к разбиению старых границ (на которых лежат эти новые вершины) на меньшие части. Поскольку числа E и V увеличиваются при этом на одну и ту же величину, сумма $F - E + V$ не изменится. Не использованные до сих пор границы и вершины третьей карты можно теперь добавить в виде последовательных «цепей», каждая из которых соединяет две какие-то вершины и разделяет соответствующую «страну» на две новые «страны». Пусть, например, некоторая цепь состоит из u новых границ, сходящихся в $u - 1$ новых вершинах ($u \geq 1$). Включение такой цепи увеличивает число F на 1, число E — на u и число V — на $u - 1$; однако сумма $F - E + V$ при

* То есть поверхности без границы («кромки», «края»). Для интересующихся поверхностями с краем рекомендуем книгу [13].

** Этот метод доказательства предложил мне Дж. У. Александер.

*** Без потери общности рассуждений можно считать эти $V + V'$ точек различными, так как небольшим сдвигом любую вершину карты можно сделать отличной от прежних.

этом, очевидно, остается неизменной. Продолжая этот процесс до включения всей третьей карты, мы убедимся, что $f - e + v = F - E + V$. Аналогично $f - e + v = F' - E' + V'$. Следовательно,

$$F' - E' + V' = F - E + V,$$

что и требовалось доказать.

Инвариант $\chi = F - E + V$ называют *эйлеровой характеристикой** поверхности. Для заданной поверхности можно найти ее эйлерову характеристику путем размещения на ней той или иной простой карты. Например, в случае сферы мы можем использовать вписанный в сферу тетраэдр⁸, для которого $F = V = 4$ и $E = 6$, откуда следует, что здесь $\chi = 2$. Тем самым мы доказали формулу Эйлера⁹

$$F - E + V = 2,$$

которая использовалась на с. 145 и 248.

Из любой заданной замкнутой поверхности можно получить топологически отличающуюся от нее поверхность путем добавления «ручки», которую можно представить себе как изогнутую призму, соединяющую две отдельные n -угольные области на карте, нарисованной на данной поверхности. Такая призма имеет $2n$ вершин, которые все принадлежат исходной карте, $3n$ ребер, $2n$ из которых принадлежат карте на исходной поверхности, а n не принадлежат (являются новыми), и $n + 2$ граней («стран»), две из которых (основания) суть страны, имеющиеся на поверхности карты, но новой поверхности они вообще не принадлежат — и должны быть полностью отброшены. Следовательно, добавление подобной « n -угольной ручки» не меняет число V , увеличивает число E на n , а число F — на $n - 2$, т. е. в целом уменьшает эйлерову характеристику на 2.

Наиболее общую замкнутую ориентируемую поверхность можно представить себе как сферу с p ручками¹⁰. Число p называется *родом* поверхности. Так, род сферы

* Она «характеризует» поверхность в следующем смысле: две замкнутые поверхности, обе ориентируемые или нет, имеющие одну и ту же эйлерову характеристику, обязательно гомеоморфны (или топологически эквивалентны). Некоторые авторы предпочитают изменять знак χ , т. е. определяют эйлерову характеристику как $-V + E - F$.

равен нулю, а род тора — единице. Проведенные выше рассуждения показывают, что эйлерова характеристика поверхности рода p равна $2 - 2p$; в частности, тор имеет нулевую эйлерову характеристику. Таким образом, каждая замкнутая ориентируемая поверхность имеет четную характеристику.

Характеристика неориентируемой поверхности может быть либо четной, либо нечетной (но не может превосходить 1). В обычном трехмерном пространстве не существует несамопересекающейся замкнутой неориентируемой поверхности ¹⁰.

ДВОЙСТВЕННЫЕ КАРТЫ

Для заданной произвольной карты (на замкнутой поверхности) можно определить *двойственную* к ней карту (лежащую на той же самой поверхности): каждая вершина двойственной карты лежит внутри соответствующей страны исходной карты, а каждая ее граница пересекает соответствующую границу исходной карты (ср. рис. 4.1)¹¹. Ясно, что вершины первой карты принадлежат различным странам второй, причем взаимное расположение симметрично: первая карта является двойственной для второй. Переход от основной карты к двойственной ей приводит к замене чисел F , E , V соответственно числами V , E , F .

Для «стандартной» карты двойственная ей карта состоит только из треугольных стран. Двойственные друг другу многогранники (ср., например, с 118) могут служить также примером двойственных друг другу карт.

Большой додекаэдр $\{5, \frac{5}{2}\}$ (с. 159) представляет собой карту из двенадцати пятиугольников на поверхности рода 4, так как $F - E + V = 12 - 30 + 12 = 2 - 8$. Эта карта является самодвойственной (или, точнее, двойственной к точно такой же карте); многогранники $\{5, \frac{5}{2}\}$ и $\{\frac{5}{2}, 5\}$ топологически эквивалентны (или «гомеоморфны»). В том же смысле многогранники $\{3, \frac{5}{2}\}$ и $\{\frac{5}{2}, 3\}$ эквивалентны соответственно обычным икосаэдру и додекаэдру.

Вращающееся кольцо тетраэдров (см. 168) образует карту из $4n$ треугольников на торе. Рассмотрение их дает нам дополнительное доказательство того, что род тора равен 1, так как здесь $F - E + V = 4n - 6n + 2n = 0$.

Наиболее простая неориентируемая поверхность — это *проективная плоскость*, которую можно рассматривать как сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками или как диск, у которого склеены взаимно противоположные точки ограничивающей его окружности. Простейшая карта на этой поверхности получается при проведении диаметра, разделяющего диск на две области. Так как для этой карты $F = E = 2$ и $V = 1$, то эйлерова характеристика здесь $\chi = 1$. Другая, более интересная карта (где $F = 6$, $E = 15$, $V = 10$) может быть получена из додекаэдра путем отождествления его противоположных точек.

Для стандартной карты на замкнутой поверхности из рассуждений, проведенных на с. 248, следует, что

$$\Sigma(6 - n) = 6\chi.$$

Эта величина положительна при $\chi = 1$ так же, как и при $\chi = 2$. Следовательно, «грубый метод индукции», устанавливающий, что любую карту на сфере можно раскрасить 6 красками, достаточен и для доказательства того, что *любая карта на проективной плоскости может быть правильно раскрашена 6 красками*. Изображенный на рис. 8.9 «полудодекаэдр», у которого каждые две из шести областей являются смежными, иллюстрирует наличие на проективной плоскости карт, для раскрашивания которых 6 красок *необходимо*; с другой стороны, как мы уже видели, 6 красок здесь всегда *достаточно*. Таким образом, этот случай, как оказалось, не более сложен, чем случай плоскости, а даже более прост: для проективной плоскости проблема раскрашивания карт затруднений не представляет.

Этот результат — простейший случай ($\chi = 1$) теоремы Хивуда о раскраске карт (1890): *чтобы раскрасить карту на замкнутой поверхности эйлеровой характеристики $\chi < 2$, требуется не более чем $[N]$ красок, где*

$$N = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi}),$$

а $[N]$ — целая часть N (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее N). Хивуд работал с числом $k = -\chi$; эйлерова характеристика у него в обычном виде не фигурировала. Тонкие и эффективные рассуждения Хивуда можно изложить так,

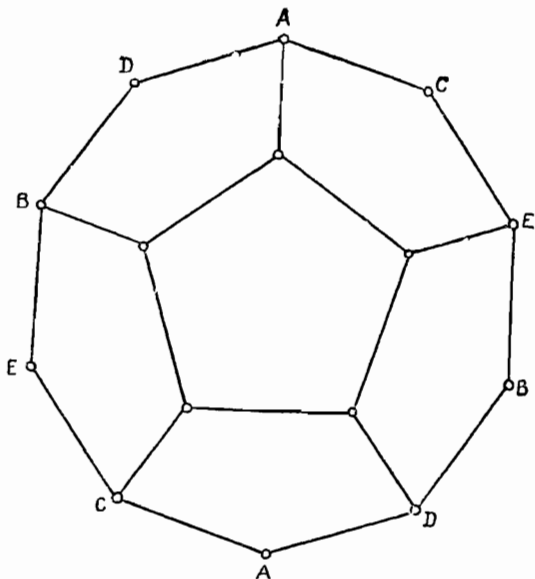


Рис. 8.9

Нам нет необходимости переходить к «стандартной» карте; все, что нам требуется, — это чтобы в каждой вершине сходились по крайней мере три страны, так что

$$3V \leq 2E = \Sigma n.$$

Поскольку $\chi = F - E + V$, а $E \leq 3(E - V)$, то $E \leq 3(F - \chi)$. Заметим еще, что N — это положительный корень квадратного уравнения $N^2 - 7N + 6\chi = 0$ или

$$6(1 - \chi/N) = N - 1.$$

Теперь мы можем доказать следующую лемму: *каждая карта на поверхности эйлеровой характеристики $\chi < 2$ включает по крайней мере одну страну, имеющую менее чем $[N]$ соседей, т. е. содержит по крайней мере один n -угольник с $n < [N]$.*

Поскольку это очевидно при $F \leq [N]$, мы можем ограничиться рассмотрением карты, включающей более $[N]$ стран, т. е. исследовать случаи $F > N$. Так как случай $\chi = 1$ уже рассматривался нами (см. с. 255), мы можем теперь предположить, что $\chi \leq 0$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma n &= 2E \leq 6(F - \chi) = 6(1 - \chi/F)F \leq 6(1 - \chi/N)F = \\ &= (N - 1)F < [N]F, \end{aligned}$$

в то время как предположение о том, что все $n \geq [N]$, приводит к неравенству $\Sigma_n \geq [N]F$. Тем самым лемма доказана.

Для доказательства собственно теоремы о раскраске карт (утверждения о том, что если $\chi < 2$, то $[N]$ красок всегда достаточно) начнем с «предположения индукции» — положим, что наша теорема справедлива для каждой карты из $F - 1$ областей. Рассмотрим теперь карту из F областей, уделяя особое внимание одной отдельной стране карты, имеющей менее $[N]$ соседей. Видоизменяя заданную карту путем стягивания этой страны в точку, мы получим новую карту, которая состоит только из $F - 1$ стран и которая может быть раскрашена $[N]$ красками. Пусть это сделано и пусть то же самое раскрашивание применено к исходной карте, т. е. ко всем ее странам, исключая упомянутую «особую» страну. Таким образом, даже если все соседние с рассматриваемой страны имеют различные цвета, то их все равно имеется самое большее $[N] - 1$; при этом у нас остается все еще $[N]$ -й цвет для нашей «особой» страны. Поскольку эти рассуждения могут быть применены при $F = [N] + 1$, затем при $F = [N] + 2$ и т. д., то тем самым теорема об $[N]$ красках установлена для всех значений F .

Например, на торе, являющемся ориентируемой поверхностью эйлеровой характеристики $\chi = 0$, достаточно семи цветов — и здесь легко нарисовать семицветную карту, состоящую из семи шестиугольников, каждый из которых граничит с шестью остальными.

На с. 139 мы исследовали удивительную поверхность, называемую *листом Мёбиуса*. Это — замкнутая поверхность, ее граница — простой контур, значит, топологически она не отличается от окружности, т. е. от границы обыкновенного (кругового) диска. Теоретически (но только не в трехмерном пространстве!) мы можем построить замкнутую поверхность, склеив по их (одинаковым!) границам обыкновенный диск и лист Мёбиуса. В такой поверхности легко узнать проективную плоскость (см., например, [14]), для которой $\chi = 1$. Другая возможная поверхность получится при сшивании двух листов Мёбиуса вдоль их (разумеется, одинаковых) границ; получаемая таким способом замкнутая поверхность называется *бутылкой Клейна* [15] — это неориентируемая поверхность эйлеровой характеристики $\chi = 0$. Поскольку эта поверхность имеет такую же эйлерову ха-

рактеристику, как и тор, по теореме Хивуда заключаем, что для раскраски карт на этой поверхности требуется самое большее семь красок. В этом частном случае мы можем утверждать большее: как доказал П. Франклин [16], *каждую карту на бутылке Клейна можно раскрасить шестью красками*. Это единственный случай, когда число $[N]$ Хивуда не является одновременно необходимым и достаточным. Путем громоздких вычислений Г. Рингель и Дж. У. Т. Янгс [17] добились успеха в доказательстве того, что *любая замкнутая поверхность, кроме «бутылки Клейна», содержит карту из $[N]$ взаимно соседних стран*, т. е. число $[N]$ красок здесь необходимо и достаточно¹².

ГОРЫ, ДОЛИНЫ И ПЕРЕВАЛЫ¹³

Возвращаясь к сфере (у которой $\chi = 2$ и $N = 4$), рассмотрим вкратце приложение формулы Эйлера к географической задаче [18] о соотношении числа гор, долин и перевалов на любой планете [разумеется, не покрытой океаном, — для Земли мы будем учитывать также и подводные «горы» или «низины» («долины»)]. *Гора (вершина)* — это некая точка, в которой достигается локальный максимум высоты, а *долина* (низина или яма) — это некая точка локального минимума высоты. Каждая из таких точек окружена системой вложенных контуров (линий постоянной высоты). *Перевал* — это точка, где линии постоянной высоты пересекаются; он характеризуется тем, что в одном направлении рассматриваемая точка представляется «самой высокой» (направление подъема на перевал и спуска с него), а в другом — самой низкой (направление того горного хребта, к которому относится перевал). Если разделить пополам углы, образованные пересекающимися линиями постоянной высоты, то мы как раз получим четыре направления, в каждом из которых можем продвигаться вдоль линии (наибольшего) наклона, либо вверх к возвышенности вдоль *водораздела*, либо вниз к долине (впадине) вдоль *русла*. Ясно, что вершины (горы) и пары соединяющих их водоразделов можно рассматривать как вершины и границы некоторой карты, каждая «страна» (долина) которой окружает одну из долин. Следовательно, если имеется F долин, E перевалов и V горных вершин, то всегда

$$F - E + V = 2.$$

Аналогично впадины и соединяющие их русла — это вершины и границы двойственной карты, каждая «страна» («плато») которой окружает одну из горных вершин.

РАСКРАШИВАНИЕ ИКОСАЭДРА

Грани тетраэдра могут быть раскрашены четырьмя заданными красками двумя энантиоморфными способами, а грани додекаэдра* — четырьмя способами, содержащими две энантиоморфных пары. Грани октаэдра и куба могут быть раскрашены соответственно двумя и тремя красками, причем только одним-единственным способом. Интересно отметить, что грани икосаэдра можно раскрасить тремя заданными красками 144 способами. Эту оценку первым получил, по-видимому, Дж. Андреас.

Легко убедиться в невозможности такой раскраски икосаэдра, при которой не имелось бы ни одной грани, окруженной тремя другими гранями одинакового цвета. Фактически всегда имеются две такие грани. Пусть у нас есть три краски: белая, черная и серая, и предположим, что одна («выделенная» или «особая») черная грань окружена тремя белыми гранями. Между каждой парой этих граней заключены две другие, которые должны быть серого и черного цвета (так как они смежные друг с другом). К каждой такой паре граней примыкают еще две грани, которые могут быть серой и черной, белой и черной, серой и белой или обе — белыми. Обозначим эти четыре возможности буквами *a*, *b*, *c*, *d* соответственно, причем эти буквы будем помечать штрихом или нет в зависимости от того, встречаются цвета «черный и серый» в той паре, из которой мы исходим, в направлении по часовой стрелке или в обратном направлении при обходе исходной черной грани. Теперь раскраску шестнадцати ($1 + 3 + 6 + 6$) граней из двадцати граней икосаэдра можно представить выражением, в котором используются три из четырех букв *a*, *b*, *c*, *d* (их повторы допускаются) со штрихами или без штрихов. Раскраска не изменится при циклической перестановке трех букв; кроме того, естественно использовать одно и то же выражение для любых двух раскрасок, полученных одна из другой простой перестановкой цветов. Запомним, что

* Изящный самораскрывающийся бумажный додекаэдр описан в книге Г. Штейнгауза ([13], с. 99—101).

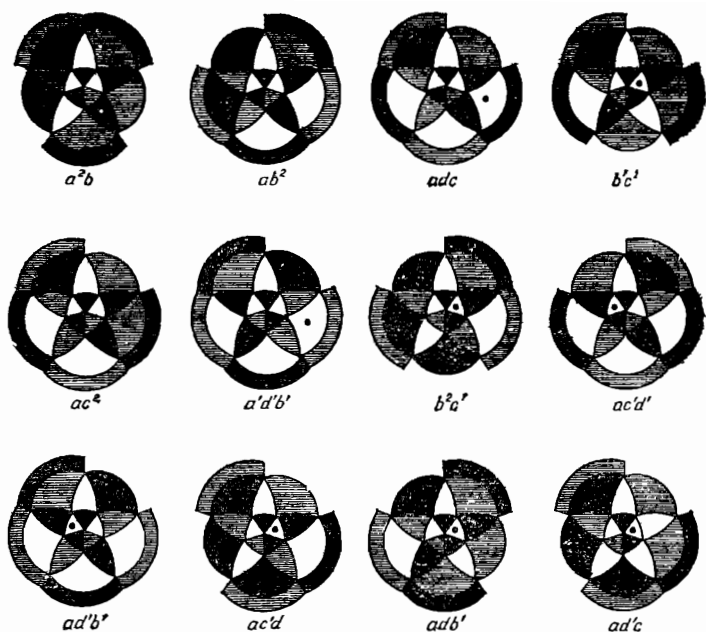


Рис. 8.10

в принятых выше обозначениях для a , b , c , d черный цвет отведен для исходной «особой» (выбранной) грани, белый — для трех окружающих ее граней, а серый — это последний, оставшийся цвет.

Если задано какое-либо раскрашивание, то мы можем получить новое раскрашивание путем замены черного цвета исходной грани на серый. Это равносильно тому, что исходная грань оставлена черной, а на всех других гранях черный и серый цвета поменялись местами, т. е., иначе говоря, b заменено на c , а c — на b , причем всюду добавлены или, наоборот, сняты штрихи. (При этом, скажем, a^2b переходит в a'^2c' .)

В изображенных на рис. 8.10 двенадцати случаях раскраска первых шестнадцати граней однозначно определяет раскраску оставшихся четырех граней икосаэдра. [Икосаэдр проектировался из центра описанной вокруг него сферы радиусами на поверхность сферы, а затем — стереографически со сферы на плоскость¹⁴. Одна из вершин икосаэдра при этом проектировалась в «бесконечно удаленную точку» (круговой) плоскости. В каж-

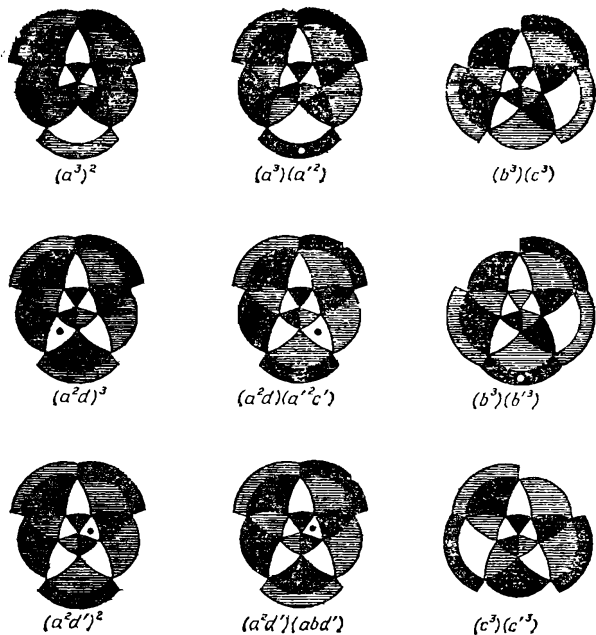


Рис. 8.11

дом случае исходная черная грань изображена чуть выше центра рисунка.]

Я уже отмечал, что существует еще вторая «особая» грань, также окруженная тремя гранями одинакового цвета. (На рис. 8.10 эта грань на всех проекциях помечена точкой.) После подходящей перестановки красок в качестве такой грани можно выбрать черную грань, окруженную белыми, а затем можно соответственно выбрать обозначения для описания раскраски применительно к этой второй грани. При этом остаются без изменения случаи a^2b , ab^2 , adc и b'^2c^2 , а ac^2 заменяется на $a'd'b'$, b^2c' — на $ac'd'$, $ad'b'$ — на $ac'd$, adb' — на $ad's$. Поскольку ни один из этих случаев не имеет преимуществ перед другим, удобно объединить два вида выражений для раскраски следующим образом: $(a^2b)^2$, $(ab^2)^2$, $(adc)^2$, $(b'^2c^2)^2$, $(ac^2)(a'd'b')$, $(b^2c')(ac'd')$, $(ad'b')(ac'd)$, $(adb')(ad's)$.

Каждый из этих восьми типов раскраски зеркально симметричен другому. Новое выражение получается путем добавления или снятия штрихов и обращением ци-

клического порядка букв в каждой их тройке. Тогда раскраска $(b^2c')(ac'd')$ переходит в энантиоморфный ей вариант $(b'^2c)(a'dc)$.

В изображенных на рис. 8.11 девяти случаях раскраска первых 16 граней не определяет однозначно раскраску остальных четырех граней; однако использование двойной записи эту неоднозначность устраняет.

Чтобы показать, что представленные раскраски и их энантиоморфные варианты исчерпывают все возможные случаи, мы просто составим список всех циклических троек букв, которые не содержат любые из выписанных здесь последовательных пар: aa' , $a'a$, ab' , ba' , $a'c$, $c'a$, bb' , $b'b$, cc' , $c'c$, bc , $c'b'$, cb , $b'd$, $d'b$, $b'd'$, db , cd , $d'c'$, cd' , dc' , d^2 , dd' , $d'd$, d'^2 . Действительно, каждая из этих пар приводит к раскраске с двумя смежными гранями одного цвета. По той же самой причине нужно исключить тройки acb' и $a'bc'$. Оставшиеся тройки — в точности те, что были рассмотрены выше.

Далее перечисление раскрасок продолжим следующим образом. Каждая из 14 раскрасок $(a^3)^2$, $(a'^3)^2$, $(a^2b)^2$, $(a'^2b')^2$, $(ab^2)^2$, $(a'b'^2)^2$, $(a^2d)^2$, $(a'^2d')^2$, $(adc)^2$, $(a'c'd')^2$, $(a^2d')^2$, $(a'^2d)^2$, $(b'c^2)^2$, $(bc'^2)^2$ не изменится при перестановке некоторой пары красок; поэтому, используя циклические перестановки красок, мы получаем отсюда 42 решения. В случае раскрасок $(b^3)(b'^3)$ или $(c^3)(c'^3)$ перестановка пар красок равносильна зеркальному отражению; это дает еще 12 решений. Наконец, следующие 15 раскрашиваний: $(a^3)(a'^3)$, $(b^3)(c^3)$, $(b'^3)(c'^3)$, $(a^2d)(a'^2c')$, $(a'^2d')(a^2c)$, $(ac^2)(a'd'b')$, $(a'c'^2)(abd)$, $(a^2d')(abd')$, $(a'^2d)(a'db')$, $(b^2c')(ac'd')$, $(b'^2c)(a'dc)$, $(ad'b')(ac'd)$, $(a'bd)(a'd'c)$, $(adb')(ad'c)$, $(a'bd')(a'c'd)$ — допускают по шесть перестановок красок и тем самым дают 90 решений, так что общее число решений равно $42 + 12 + 90 = 144$.

Шесть решений $(a^3)(a'^3)$ обладают особым свойством — они не изменяются при зеркальном отражении. Эти шесть решений можно назвать *рефлексивными*, а остальные описывать как 69 энантиоморфных пар.

Как было отмечено Л. Б. Такерманом, грани икосаэдра можно раскрасить с помощью пяти красок так, что каждая грань и три соседние с ней будут раскрашены в четыре различных цвета. Для заданных пяти красок это можно сделать четырьмя способами, разбивающимися на две энантиоморфные пары. Одну пару можно получить из другой путем какой-либо нечетной

перестановки пяти красок (например, путем взаимной замены двух цветов). Грани, раскрашенные одинаковым цветом, образуют пять правильных тетраэдров, дающих конфигурацию, описанную на с. 149 (ср. [13] в литературе к гл. V, с. 50, 106).

1. Guthrie F. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, July 19, 1880, vol. X, p. 728.
2. Cayley A. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1878, vol. IX, p. 148; *Proceedings of the Royal Geographical Society* (London), 1879, N. S., vol. I, pp. 259—261.
3. Kempe A. B. *American Journal of Mathematics*, 1879, vol. II, pp. 193—200.
4. Kempe A. B. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1879, vol. X, pp. 229—231.
5. Kempe A. B. *Nature*, February 26, 1880, vol. XXI, pp. 399—400.
6. Heawood P. J. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1890, vol. XXIV, p. 275.
7. Tait. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, July 19, 1880, vol. X, pp. 728—729; *Philosophical Magazine*, January 1884, ser. 5, vol. XVII, p. 41. См. также Coxeter H. S. *Journal of Recreational Mathematics*, 1961, vol. II, pp. 3—12, или *Leonardo*, 1971, vol. IV, pp. 273—277.
8. Petersen J. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1898, vol. V, pp. 225—227; 1899, vol. VI, pp. 36—38.
9. Petersen J. *Acta Mathematica* (Stockholm), 1891, vol. XV, pp. 193—220.
10. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1922, vol. XLIV, pp. 225—236; *Annals of Mathematics*, 1927, ser. 2, vol. XXVIII, pp. 1—15; *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1936, vol. XLII, p. 491; *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1963, ser. 3, vol. XIII, pp. 193—218.
11. Heawood P. J. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1897, vol. XXIX, pp. 277—278.
12. Heawood P. J. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1932, ser. 2, vol. XXXIII, pp. 253—286.
13. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. Пер. с польск. — М.: Наука, 1981.
14. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. Пер. с англ. — М.: Наука, 1966.
15. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Пер. с нем. — М.: Наука, 1981.
16. Franklin P. *Journal of Mathematics and Physics*, 1934, vol. XIII, pp. 363—369 (это весьма интересная работа).
17. Ringel G., Youngs J. W. T. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A.*, 1968, vol. LX, pp. 438—445. [См. Теория графов. Сб. статей. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977, с. 82—90.]
18. Cayley A., Maxwell J. C. *Philosophical Magazine*, 1859, ser. 4, vol. XVIII, pp. 264—268; 1870, ser. 4, vol. XI, pp. 421—427. См. также Moran D. A. *American Mathematical Monthly*, 1970, vol. LXXVII, p. 1096.

ЗАДАЧИ ОБ УНИКУРСАЛЬНЫХ КРИВЫХ

В этой главе будут рассмотрены некоторые задачи, возникающие в теории уникарсальных кривых. Я начну с задач и теорем Эйлера, а затем кратко изложу применение этих результатов к исследованию лабиринтов и геометрических деревьев. Вторая половина главы посвящена двойственной уникарсальной задаче, связанной с игрой Гамильтона.

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Задача Эйлера впервые упоминалась в его мемуаре [1], представленном в 1736 г. Санкт-Петербургской академии наук, в котором содержался ответ на широко обсуждавшийся тогда вопрос: можно ли совершить прогулку по Кёнигсбергу таким образом, чтобы, выйдя из произвольного пункта, пройти ровно один раз по каждому из городских мостов и вернуться в исходный пункт?

Город Кёнигсберг (ныне Калининград) стоит близ устья реки Прегель (ныне Преголя); река огибает остров Кнейпхоф (рис. 9.1). В XVIII в. в городе было семь мостов, расположенных так, как показано на том же рисунке. Легко видеть, что при таком расположении мостов задача неразрешима. Однако Эйлер не ограничился случаем Кёнигсберга и рассмотрел общую задачу для произвольного числа островов, каким угодно способом связанных мостами. Ясно, что если «сжать» острова в точки и «вытянуть» мосты в линии, то на результат это не повлияет. Таким способом мы получим некую геометрическую фигуру, которую можно назвать *сетью*. Такая сеть, соответствующая случаю Кёнигсберга, изображена на рис. 9.2, где области суши (или острова) представлены точками A, B, C, D , а мосты изображены линиями l, m, n, p, q, r, s .

Таким образом, задача Эйлера состоит в том, чтобы выяснить, можно ли обвести контур данной сети (гео-

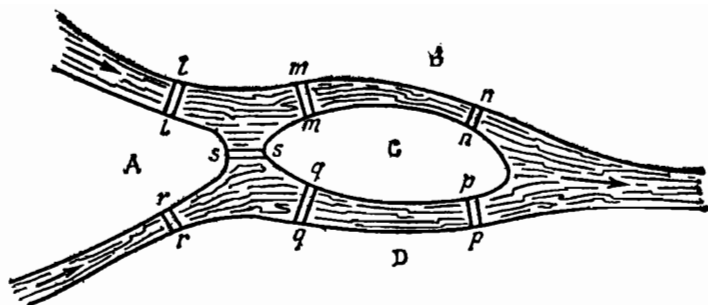


Рис. 9.1

метрической фигуры специального вида), не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии один и только один раз. В более общей формулировке вопрос звучит так: сколько раз придется оторвать карандаш от бумаги, чтобы обвести контур такой сети, не проводя ни одну линию дважды? Правила, перечисленные ниже,

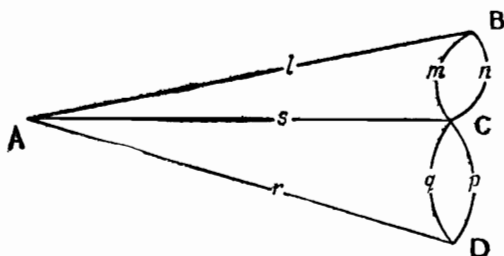


Рис. 9.2

дают ответ и на этот последний вопрос. Сеть может располагаться на плоскости или в пространстве и представлять собой какое-то количество точек, соединенных линиями, — прямыми, искривленными или извилистыми. Можно изготовить модели из стержней или кусков проволоки с крючками на концах, позволяющими соединять в одной точке любое их количество.

Теория таких сетей включает как частный случай ряд предложений, доказанных Листингом [2]*. Однако я хочу воспользоваться здесь методами Эйлера и сначала приведу несколько определений, что позволит придать нашему обсуждению более компактную форму.

* См., кроме того, статьи Тэйта [3] о «Топологии» Листинга. Задача обсуждалась также Уилсоном [4].

Узел (или остров)—это точка, из которой или в которую ведут линии. *Ветвь* (или мост или путь)—это линия, соединяющая два последовательных узла. *Конец*—это точка, которой кончается (можно также сказать—начинается) какая-либо ветвь. *Порядок* узла равен числу ветвей, кончающихся в этом узле. Узел, к которому подходит единственная ветвь, называется *свободным* узлом (или свободным концом). Узел с четным числом ветвей—это *четный* узел. Очевидно, что узел второго порядка не влияет на характер сети—его можно просто из нее исключить. Узел с нечетным числом ветвей называется *нечетным* узлом. Сеть замкнута, если она не имеет свободных концов; такую сеть часто называют *замкнутой сетью*.

Маршрут—это множество последовательных ветвей, в котором ни одна ветвь не повторяется дважды. *Замкнутый* маршрут кончается в той же точке, из которой исходит. *Уникурсальная сеть* может быть обойдена целиком за один маршрут; соответствующий ее обход называется *уникурсальным обходом*.

Теперь сформулируем результаты Эйлера. (i) Во всякой сети число нечетных узлов четно. (ii) Сеть, не имеющая нечетных узлов, допускает замкнутый уникурсальный обход с началом в любой точке сети. (iii) Сеть, имеющая два и только два нечетных узла, обходится уникурсально, если начать движение с одного нечетного узла и закончить его во втором. (iv) Сеть, имеющую больше двух нечетных узлов, нельзя полностью обойти по одному маршруту; к этому Листинг добавил следствие, утверждающее, что сеть, имеющую ровно $2n$ нечетных узлов, можно обойти посредством n отдельных маршрутов. Теперь докажем эти теоремы.

(i) *Во всякой сети число нечетных узлов четно.*

Допустим, что сеть имеет b ветвей; этим ветвям отвечают $2b$ концов. Пусть k_n —число узлов n -го порядка. Из этих узлов исходит по n ветвей; значит, в них «склеено» n концов ветвей. Итак,

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \dots + nk_n + \dots = 2b.$$

Отсюда следует, что

$$k_1 + 3k_3 + 5k_5 + \dots \text{ четно,}$$

а потому и

$$k_1 + k_3 + k_5 + \dots \text{ четно.}$$

(ii) *Сеть, не имеющая нечетных узлов, обходится уникально по замкнутому маршруту.*

Поскольку маршрут должен быть замкнутым, неважно, где он начинается. Допустим, что мы выходим из некоторого узла A . Всякий раз, когда наш маршрут проходит через какой-нибудь узел, мы подходим к нему по одному пути, а выходим из него — по другому. Нечетных узлов нет, поэтому число ветвей в каждом узле четно. Но это означает, что если мы подошли к какому-то узлу (отличному от A), то всегда найдется еще не пройденный путь, по которому можно из него выйти. Таким образом, маршрут приведет нас в конце концов к узлу A , с которого он и начался. Если к A подходит более двух ветвей, можно продолжить движение из A по еще не пройденному пути, но рано или поздно мы все равно вернемся в A .

Остается показать, что маршрут можно построить так, что он пройдет по **всем** ветвям. Допустим, что в модели каждая ветвь представляет собой отрезок проволоки с крючками на концах и что все крючки в каждом узле сцеплены вместе. Число крючков в каждом узле четно; поэтому их можно отцепить и соединить в пары — неважно каким именно способом. После этого в каждом узле будут сходить два (и только два) сцепленных между собой конца — и наша сеть обратится в одну или большее число замкнутых кривых.

Если при таком случайном разбиении на пары сходящихся в одном узле путей у нас получится одна-единственная кривая, то предложение доказано: в самом деле, выйдя из произвольной точки, мы пройдем по каждой ветви один раз и вернемся в исходную точку. Допустим теперь, что при случайном «расцеплении» узлов где-то получилась изолированная петля L , которая соприкасается с другой петлей M , скажем в узле P . Тогда нужно расцепить четыре крючка в P (а именно: два крючка петли L и два крючка петли M) и соединить их в любом другом порядке. После этого L станет частью M . Таким способом, изменяя разбиение сходящихся в отдельных вершинах путей на пары, можно постепенно связать все отдельные петли в одну-единственную большую петлю.

Рассмотрим в качестве примера случай трех островов A , B и C , от каждого из которых к каждому соседнему ведут по два моста (рис. 9.3). Самым неудачным способом разбиения сходящихся в узлах A , B и C кон-

цов на пары является такой, при котором ABA , ACA и BCB образуют отдельные петли. В этом случае нам придется расцепить крючки в A и объединить петли ABA и ACA в одну петлю $ABACA$. Точно так же, перестраивая пары из четырех крючков в B , можно объединить петлю BCB с $ABACA$, построив тем самым одну-единственную петлю.

Из рассуждений Эйлера я понял, что он пытался сформулировать пригодное на практике правило, позволяющее уникально описать такую сеть, не зная ее формы, — но это ему не удалось. Однако он добавляет, что всякую сеть можно полностью обойти за один маршрут при условии, что каждая ее часть будет пройдена

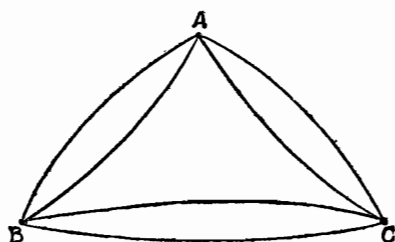


Рис. 9.3

дважды. В самом деле, если считать каждую ветвь сети сдвоенной , то у нас не будет нечетных узлов и новая сеть станет уникальной. В этих условиях всякую сеть можно обойти, не зная ее формы; правила такого обхода приводятся ниже.

(iii) *Сеть, имеющую два и только два нечетных узла, можно обойти уникально, начиная с одного нечетного узла и кончая вторым.*

Этот случай сразу сводится к (ii). Пусть A и Z — два нечетных узла. Рассмотрим новую сеть, полученную присоединением к исходной сети дополнительной ветви от A к Z . В этой новой сети все узлы, в том числе A и Z , — четные. Значит, — по второй теореме Эйлера — сеть можно обойти уникально, причем если маршрут начинается в некотором узле, то он в нем и заканчивается. Будем считать ветвь ZA первой на нашем маршруте. Если убрать ее и тем самым восстановить сеть в ее первоначальном виде, то маршрут будет начинаться в A , но заканчиваться по-прежнему в Z .

(iv) Сеть, имеющую ровно $2n$ нечетных узлов, можно полностью обойти по n отдельным маршрутам.

Начнем маршрут из нечетного узла и продолжим его до тех пор, пока он не достигнет узла, из которого уже нет выхода. Тогда этот последний узел обязательно нечетен: ведь из четного узла всегда есть выход, а проходя нечетный узел, мы используем один из сходящихся в этом узле концов для входа, а второй — для выхода; когда же мы заканчиваем в нем свой маршрут, захватывается только один конец. Если изъять пройденный маршрут, останется сеть с $2n - 2$ нечетными узлами.

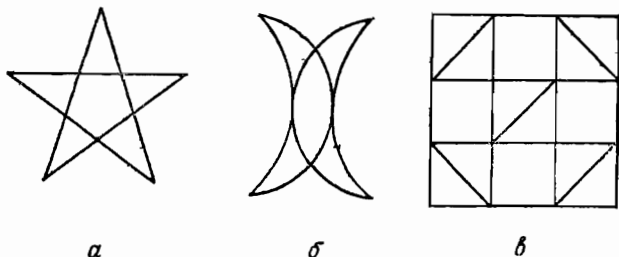


Рис. 9.4

Следовательно, после прохождения n таких маршрутов останется одна или более сетей, все узлы которых четны. Но каждая из этих сетей имеет общий узел с одним из пройденных маршрутов и, следовательно, может быть включена в этот маршрут. Таким образом, для полного обхода всей сети нам понадобится n и не более n маршрутов. Отсюда и следует утверждение Эйлера о том, что если число нечетных узлов больше 2, то сеть нельзя полностью обойти по одному маршруту.

В задаче о кёнигсбергских мостах мы имеем дело с сетью с тремя нечетными узлами. Следовательно, — по четвертой теореме Эйлера — ее нельзя обойти уникально, но два отдельных маршрута позволяют полностью обойти эту сеть.

На рис. 9.4 сети a и $б$ содержат только четные узлы, а потому каждая из них может быть обойдена уникально. Первая сеть — это знаменитая пентаграмма $\{5/2\}$ (см. с. 158). Вторая сеть представляет собой так называемый «знак Мухаммеда (Магомета)»; по преданию, он нарисовал этот символ на песке концом меча, не отрывая его от земли и не проводя ни по одной линии дважды, что вполне возможно, ибо все узлы здесь четны.

Третья сеть взята из статьи Тэйта; она содержит только два нечетных узла, и потому ее можно обойти уникарально, начав маршрут в одном нечетном узле и закончив его в другом.

Многоугольник $\{5/2\}$ был тайным знаком пифагорейцев, по которому они узнавали друг друга. Его называют утроенным треугольником или пентаграммой (звездчатым пятиугольником). Считалось, что он символизирует здоровье; по всей вероятности, его углы обозначали буквами греческого слова $\psiυεια$ (здоровье), где дифтонг $ει$ заменялся буквой θ . Авторитет по этим вопросам, Ямвлих из Халкиды¹, рассказывает такую историю. Один пифагореец, путешествуя, остановился на ночлег на постоялом дворе у дороги; здесь он тяжело заболел и слер. Путешественник был беден, но добросердечный хозяин заботливо ухаживал за ним, не жалея ничего, чтобы облегчить его страдания. Однако, несмотря на все усилия хозяина, ученому становилось все хуже. Чувствуя, что умирает, и не имея денег, чтобы расплатиться за заботы о нем, он попросил дощечку, начертил на ней пентаграмму и отдал хозяину с просьбой повесить дощечку снаружи, чтобы прохожие могли ее видеть; при это он заверил хозяина, что это принесет ему вознаграждение за доброту. Ученый умер, был с почетом похоронен, а дощечка должным образом вывешена. Прошло немало времени, и вот однажды проезжавший по дороге всадник увидел священный символ. Он спешил, зашел на постоялый двор и, выслушав рассказ хозяина, щедро вознаградил его. Возможно, вся эта история придумана; но во всяком случае она выглядит вполне правдоподобно.

В качестве другого примера уникаральной сети можно упомянуть фигуру, которая получается, если нарисовать выпуклый $(2n + 1)$ -угольник, а затем соединить каждую его вершину со всеми остальными вершинами. Уникаральной сетью образуют также ребра октаэдра. С другой стороны, шахматная доска, разделенная, как обычно, прямыми линиями на 64 клетки, имеет 28 нечетных узлов, и потому, чтобы обойти все ее границы, не проходя ни одну линию дважды, потребуется 14 отдельных росчерков. Рис. 6.2 (см. с. 185) имеет 20 нечетных узлов — значит, для его обхода потребуется 10 росчерков.

Теперь обсудим, сколькими способами можно обойти уникаральной кривую, все узлы которой четны [5].

Сначала посмотрим, как влияет на ответ путь, который начинается в узле A порядка $2n$ и возвращается в него, образуя замкнутую петлю L . Если изъять эту петлю, то снова останется сеть с одними лишь четными узлами, но порядок узла A будет теперь равен $2(n-1)$. Допустим, что исходную сеть можно было уникальсально обойти N способами, а новую N' способами. Ясно, что каждый из этих N' маршрутов $n-1$ раз проходит через A , и при каждом из этих проходов, дойдя до A , мы затем можем описать петлю L в каждом из двух возможных ее направлений. Таким образом,

$$N = 2(n-1)N'.$$

Аналогично если порядок узла A исходной сети равен $2(n+l)$ и l независимых замкнутых петель начинаются в узле A и возвращаются в него, то имеет место соотношение

$$N = 2^l n(n+1)(n+2) \dots (n+l-1)N',$$

где N' — число маршрутов, по которым можно обойти сеть, полученную из исходной удалением l этих петель.

Описанные результаты позволяют свести произвольную уникальсальную сеть к такой, которая не содержит замкнутых петель указанного вида. Допустим, что новая фигура имеет k узлов. Один узел, например A , можно удалить, заменив нашу фигуру двумя или более отдельными сетями, каждая из которых имеет не больше $k-1$ узлов. Действительно, допустим, что порядок узла A равен $2n$. Тогда $2n$ ветвей в A можно соединить в n пар $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)$ способами, причем каждая пара образует либо проходящий через узел A путь, либо (в частном случае, когда оба элемента пары снова соединяются в другом узле B) исходящую из A петлю. Этот путь или петля будут частью проходящего через A маршрута, в который они входят, и для него A будет узлом 2-го порядка, что позволяет его просто исключить из рассмотрения. Таким образом, число способов обхода исходной фигуры равно сумме чисел способов обхода $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ отдельных более простых фигур с меньшим числом узлов.

Процесс подсчета числа возможных обходов сводится к подобному поочередному удалению узла за узлом, как мы проиллюстрируем ниже на одном примере. В результате получится набор сетей без петель, имеющих только по два узла каждая. Если в одной из этих сетей каждый

узел имеет порядок $2n$, то, как легко видеть, ее можно обойти $2 \cdot (2n - 1)!$ способами.

Мы уже знаем, что сеть с двумя нечетными узлами A и B обходится уникально, если начать из A (или B) и закончить в B (или A). Следовательно, число способов ее уникального обхода будет тем же самым, что и для сети со всеми четными узлами, полученной из исходной соединением точек A и B . В самом деле, любой маршрут с началом в A и концом B можно дополнить ветвью BA , вернувшись к начальному узлу A .

Эта теория была применена Г. Тарри* для нахождения числа способов укладки разных наборов домино с максимальным четным количеством очков. Проиллюстрируем общий метод на примере.

Обычный набор состоит из 28 костей домино, помеченных следующим образом:

6—6,	6—5,	6—4,	6—3,	6—2,	6—1	6—0,
5—5,	5—4,	5—3,	5—2,	5—1,	5—0,	4—4,
4—3,	4—2,	4—1,	4—0,	3—3,	3—2,	3—1,
3—0,	2—2,	2—1,	2—0,	1—1,	1—0,	0—0.

В домино играют по разным правилам, но практически всегда кости выкладываются в одну линию, причем смежные квадраты должны быть помечены одинаково. Так, если на столе лежит кость 6—3, то со стороны шестерки к ней можно приложить только кости 6—6, 6—5, 6—4, 6—3, 6—2, 6—1 или 6—0, а со стороны тройки — лишь кости 3—5, 3—4, 3—3, 3—2, 3—1 или 3—0. Если дубли будут выложены своевременно, то, как легко видеть, такой набор образует замкнутую сеть**. Мы хотим установить, сколькими способами можно построить такую «сеть» домино.

Начнем со случая, когда набор состоит из 15 костей домино, помеченных от 0—0 до 4—4. Среди них пять дублей. Остальные десять костей можно представить сторонами и диагоналями правильного пятиугольника: 01, 02 и т. д. Пересечения диагоналей не участвуют в на-

* См. второе издание французского перевода настоящей книги (Paris, 1908, vol. II, pp. 253—263); [29], с. 143—150 в литературе к гл. IV.

** Таким образом, если убрать одно какое-нибудь домино, скажем 5—4, то цепочка остальных должна иметь на одном конце 5, а на другом 4.

шем представлении сети и потому не считаются. Если исключить их из нашего рассмотрения, то сеть, образованная сторонами и диагоналями этого пятиугольника, имеет пять четных узлов — следовательно, она уникарсальна. Всякий уникарсальный маршрут (например, $0-1, 1-3, 3-0, 0-2, 2-3, 3-4, 4-1, 1-2, 2-4, 4-0$) дает один способ расположения костей. Допустим, что имеется a таких маршрутов. На каждом из них каждый из пяти дублей может занимать одно из двух положений (к примеру, на указанном выше маршруте дубль два может находиться между $0-2$ и $2-3$ или между $1-2$ и $2-4$). Следовательно, общее число уникарсальных укладок наших 15 костей домино равно $2^5 a$. Если домино располагаются по прямой, то началом может служить любая из 15 костей — и тогда общее число укладок равно $15 \cdot 2^5 a$.

Теперь нужно найти число уникарсальных маршрутов на пятиугольнике A , изображенном на рис. 9.5. В вершине O здесь сходятся четыре отрезка (пути), из которых можно получить три пары путей. Если объединить 01 и 02 , а также 03 и 04 , то получится B . Если объединить 01 и 03 , а также 02 и 04 , получится B . Наконец, если объединить 01 с 04 , а 02 с 03 , получится Γ . Обозначим число способов уникарсального обхода B через b , B — через v и т. д. Итак, удаление вершины O пятиугольника A дает нам три «четырёхугольника»: B , B и Γ , причем имеет место соотношение $a = b + v + g$.

Рассмотрим какой-нибудь из полученных четырехугольников, например Γ . Чтобы удалить вершину 1 , нужно объединить попарно четыре пути, сходящиеся в этой вершине. При объединении 12 с верхним из путей 14 , а 13 с нижним из них получится D . Если объединить 12 с нижним из путей 14 , а 13 с верхним, то снова получится D . Объединив 12 с 13 , а два пути 14 отождествляя друг с другом, получим рис. E .

Здесь снова, как и выше, $a = 2d + e$ и аналогично $b = 2d + e$, $v = 2d + e$. Таким образом, $a = b + v + g = 6d + 3e$.

Продолжим последовательное упрощение фиг. D и E . Сначала рассмотрим D и удалим из нее узел 4 . Для простоты обозначим два пути 42 через β и β' , а два пути 43 — через γ и γ' . Мы можем объединить β с γ , а β' с γ' или β с γ' , а β' с γ — в обоих случаях получается фиг. $Ж$. Иначе мы можем объединить β с β' и γ с γ' — это приводит к фигуре $И$. Таким образом, $d = 2ж + и$. Фиг. $Ж$

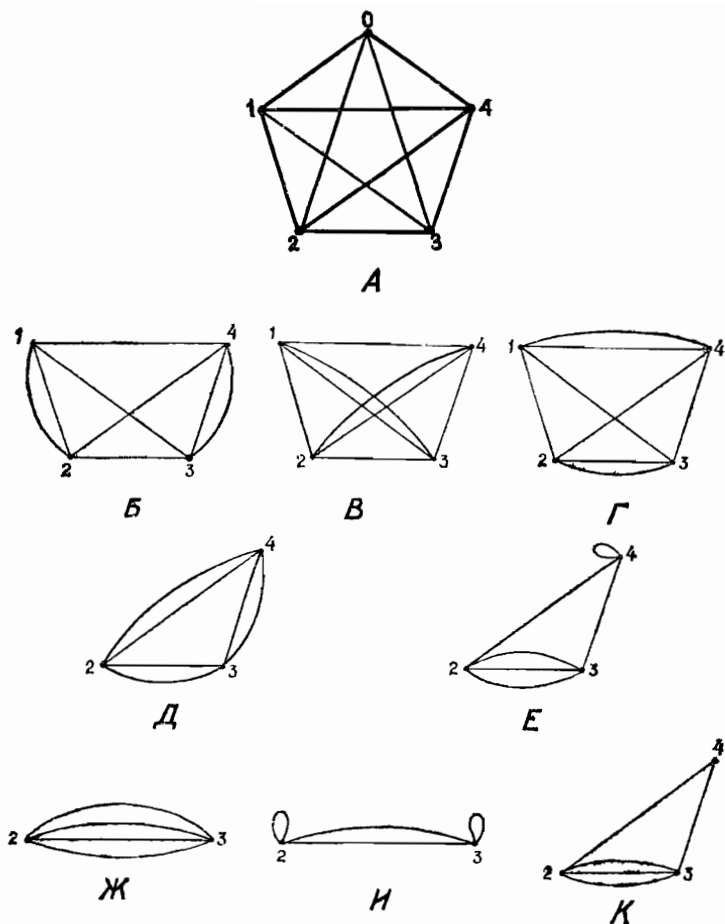


Рис. 9.5

и И имеют лишь по два узла. Следовательно, по доказанным выше формулам $\mathcal{K} = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ и $u = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Отсюда находим $\partial = 2\mathcal{K} + u = 32$.

Теперь рассмотрим фиг. Е. Она имеет петлю в узле 4. Удалив эту петлю, мы получим фиг. К и соотношение $e = 2\kappa$. Но фиг. К после объединения двух путей в вершине 4 становится эквивалентной фиг. Ж. Значит, $e = 2\kappa = 2\mathcal{K} = 24$. Итак, в результате получаем $a = 6\partial + 3e = 192 + 72 = 264$, откуда

$$N = 15 \cdot 2^5 \cdot a = 126\,720.$$

Это и есть число возможных укладок по прямой набора из 15 костей домино. Наше решение получено при условии, что расположение слева направо и симметричное ему расположение справа налево рассматриваются как различные. Если не различать таких расположений, то полученный ранее результат придется разделить пополам — и мы придем к результату 63360. Число аналогичных «замкнутых» (не имеющих концов) укладок костей домино равно $2^5 a$, т. е. 8448.

Итак, мы нашли, что число уникальных маршрутов для пятиугольника с проведенными в нем диагоналями равно 264. То же число для семиугольника равно $h = 129\,976\,320$. Следовательно, число возможных укладок по прямой обычного набора из 28 костей домино, помеченных от 0—0 до 6—6, равно $28 \cdot 3^7 \cdot h$, что составляет $7\,959\,229\,931\,520$. Число уникальных маршрутов в девятиугольнике равно $N = 2^{17} \cdot 3^{11} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 40787$. Значит, число возможных укладок по прямой набора из 45 костей домино, помеченных от 0—0 до 8—8, равно $45 \cdot 4^9 \cdot N$.

ЛАБИРИНТЫ

Все, разумеется, слышали о лабиринте Миноса на Крите и о беседке Розамунды. Существует и несколько более поздних лабиринтов; из них особенно известен лабиринт из живых изгородей в Хэмптон-Корте — довольно жалкий представитель строений этого типа. Большинство читателей наверняка пытались когда-нибудь проникнуть внутрь хотя бы одного из лабиринтов — реальных или нарисованных на бумаге. Попробуем теперь обсудить, как надо действовать, чтобы полностью обойти лабиринт, даже если его план неизвестен.

Теорию обхода лабиринтов включают приведенные выше теоремы Эйлера. Пути в лабиринте — это то, что мы раньше называли ветвями (или ребрами), а точки пересечения двух или более путей — это узлы (вершины). Вход в лабиринт, конец тупика и центр лабиринта, до которого мы должны добраться, — это свободные концы и, значит, нечетные узлы.

Если единственные нечетные узлы — это вход в лабиринт и его центр (т. е. в лабиринте нет ни одного ту-

* Эти численные результаты были получены также алгебраическими методами; см. [6].

пики), то такой лабиринт можно обойти уникально. Это следует из третьей теоремы Эйлера. Кроме того, сколько бы ни было в лабиринте нечетных узлов, всегда найдется маршрут, по которому мы сможем добраться от входа к центру, не проходя ни по какому участку дважды, хотя и обойдем при этом только часть лабиринта. Однако ни в одном из этих случаев мы не сможем составить правильный маршрут, не располагая планом лабиринта.

Если же мы воспользуемся предложением Эйлера считать каждый путь в лабиринте двойным, то план не понадобится. В этом случае можно сформулировать точные правила полного обхода любого лабиринта, даже если его план неизвестен. Конечно, проходя дважды по каждому пути лабиринта, мы достигнем центра не самой короткой дорогой, однако точное следование правилам обеспечит обход всего лабиринта, а значит, и прибытие в центр на каком-то участке маршрута; кроме того, при таком способе обхода невозможно заблудиться.

Вряд ли нужно объяснять, почему такой двойной лабиринт допускает полный обход: ведь в нем каждый узел четен и — по второй теореме Эйлера, — начав движение от входа, можно пройти весь лабиринт; при этом мы в какой-то момент пройдем через центр и в конце концов выйдем из лабиринта в том же месте, где вошли в него. В процессе обхода мы дважды пройдем по каждому пути в лабиринте, причем эти два прохода по одному и тому же участку всегда будут иметь противоположное направление.

Если лабиринт нарисован на бумаге, то путь к центру, как правило, легко находится, но в реальном лабиринте отыскать правильный маршрут, не имея плана, уже не так просто. Чтобы с уверенностью обойти лабиринт, не зная его плана, нужно каким-то способом отмечать пройденные участки и направление движения по ним — например, ставя стрелки в конце и в начале каждого пути или, что еще лучше, делая пометки на правой стенке, — в таком случае нельзя заходить на участок, где обе стенки уже помечены.

Из разнообразных практических правил, позволяющих найти дорогу в лабиринте, наиболее просты, пожалуй, правила, сформулированные Тарри [7]. Они таковы. Пройдя путь PQ к вершине Q , двигайтесь (если это возможно) по любому другому пути QR , не пройденному ранее в направлении от Q . Если же все пути от Q ,

кроме QR , уже пройдены в этом направлении или если Q — конец тупика, то возвращайтесь в P по QR .

Последовательно придерживаясь этих правил, вы вернетесь в исходную точку, пройдя каждый участок ровно по одному разу в каждом направлении. (Заметим, что это относится не только к двумерным лабиринтам. Те же правила позволяют вам выбраться из катакомб, если только у вас есть фонарь, чтобы разглядеть в пыли свои следы).

В античные времена и в средние века лабиринтов рассматриваемого типа (а именно состоящих из разветвляющихся и пересекающихся путей, по которым можно проложить маршрут к какому-то месту или строению в центре лабиринта) было мало, а быть может, не было совсем. Древние называли лабиринтами любые сложно устроенные здания с многочисленными сводами и сложными переходами*. Такое строение можно называть лабиринтом, но это не то, что обычно понимается теперь под этим термином. Изложенные выше правила позволяют полностью обойти любое строение такого типа. Я не знаю, существуют ли какие-нибудь описания беседки Розамунды, кроме тех, что дали Дрейтон, Бромтон и Найтон; по мнению некоторых исследователей, эти описания скорее всего говорят о том, что это был просто дом с запутанными и сложными переходами.

Другой разновидностью древних лабиринтов были проложенные на небольшом участке земли извилистые тропинки, ведущие к священному дереву или какой-либо другой святыне, расположенной в центре участка**. В таких лабиринтах невозможно заблудиться, но, поскольку вся плоскость участка была покрыта изгибами тропинки, путь от входа до центра мог быть довольно длинным, даже если весь лабиринт занимал небольшую площадь.

К этому типу относится в своем традиционном виде и лабиринт, построенный для Минотавра. Он изображен на оборотной стороне кносских монет, встречающихся не

* См., например, описания лабиринта у Меридского озера, данные Геродотом (кн. II, 148), Страбоном (кн. XVII, 1, 37), Диодором (кн. I, 61, 66) и Плинием («Естественная история», кн. XXXVI, 13, 84—89). См. также Вергилий («Энеида», кн. V, 588); Овидий («Метаморфозы», кн. VIII, 5, 159); Страбон (кн. VIII, 6). По поводу этих и других ссылок см. [8].

** О древних и средневековых лабиринтах (в особенности именно такого типа), см. статью Троллопа [9], откуда взята большая часть приведенных здесь исторических сведений.

столь уж редко; одна из разновидностей этого лабиринта изображена на рис. 9.6, а. Этот лабиринт устроен, в сущности, так же, как и тот, что изображен на рис. 9.6, б. Чтобы в этом убедиться, достаточно изогнуть прямоугольник в круг.

Инвардз высказал предположение [10], что этот узор на кносских монетах — копия такого же изображения на жетонах, которые жрецы выдавали как «путеводную нить» по лабиринту. Рассматривая это закрученное изображение, он предположил, что каждую круглую стену нужно заменить двумя равноудаленными стенами с коридором между ними — и тогда получится лабиринт,

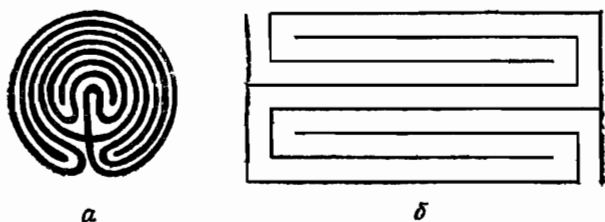


Рис. 9.6

ключом к которому служит исходное изображение. «Закодированный» в нем маршрут можно сразу определить, заметив, что по достижении узла (т. е. места, где дорога разветвляется) нужно выбирать путь, находящийся через один от того, который привел нас к узлу. Этот лабиринт можно обойти, руководствуясь простым правилом — двигаться все время вдоль правой стены (или все время вдоль левой стены). Лабиринт можно слегка усложнить, устроив несколько дополнительных барьеров, не влияющих на применимость правил обхода, — однако сделать его по-настоящему трудным невозможно. Это неплохая забава, но лежащая в ее основе гипотеза, хотя и остроумна, не имеет никаких исторических подтверждений. Согласно другой версии, искривленная линия на обороте монеты указывает форму веревки, которую держали участники некоего ритуального танца.

Изображения кносского лабиринта гравировались на греческих и римских геммах; аналогичные, но более изощренные узоры были обнаружены на многих мозаичных римских мостовых (см., например, [11]). Изображение критского лабиринта вышивалось на парадных одеждах последних римских императоров и, по-ви-

димому, именно с них были скопированы изображения, встречающиеся на стенах и полах многих церквей [12]. В более поздние времена в Италии и Франции эти настенные и напольные украшения превратились в сложнейшие завитки и спирали; но, насколько мне известно, все они представляют собой одну непрерывную линию. Из сохранившихся до наших дней самые интересные образцы подобных узоров можно видеть на стенах соборов в Лукке, Экс-ан-Провансе и Пуатье, а также на полах церквей Санта Мария ин Транстевере в Риме, Сан Витале в Равенне, Нотр-Дам в Сент-Омере и собора в Шартре. Быть может, они символизировали жизненный путь человека, изображая его как извилистую дорогу пилигрима.

В Англии в древности лабиринты обычно вырезали из дерна вблизи монастыря или жилища отшельника; есть основания думать, что прохождение лабиринта было религиозным ритуалом и при каждом повороте полагалось повторять какую-нибудь молитву. В период, следовавший за эпохой Возрождения, такие лабиринты часто называли «Троянским городком» или «Юлианским убежищем». Самые интересные из тех, что сохранились до наших дней, — это лабиринты в Роклиф Маршез (Камберленд), Эйсенби (Йоркшир), Элкбороу (Линкольншир), Уинге (Ратлендшир), Бутон-Грине (Нортгемптоншир), Комбертоне (Кембриджшир), Сэфрон Уэлдене (Эссекс) и Чилкомбе неподалеку от Винчестера.

Новые лабиринты получили распространение в эпоху Возрождения и, по-видимому, происходят из Италии; возле многих дворцов и крупных особняков, построенных в Англии во времена Тюдоров и Стюартов, были созданы лабиринты из живых изгородей. Наибольшую известность (вероятно, благодаря близости к Лондону) получили лабиринты при королевских дворцах в Саут-Уорке (Гринвич) и Хэмптон-Корте. Последний был спроектирован в 1690 г. Лондоном и Уайзом для Вильгельма III, склонного к подобным причудам. План этого лабиринта (рис. 9.7) приводится во многих путеводителях. Большинству экскурсантов он кажется довольно сложным, но на самом деле это весьма заурядное сооружение, поскольку его можно полностью обойти, следуя всегда вдоль изгороди (либо по правой, либо по левой стороне), и он не имеет узлов выше третьего порядка.

В некоторых лабиринтах маршрут к центру может разветвляться в какой-то точке, а затем ответвления

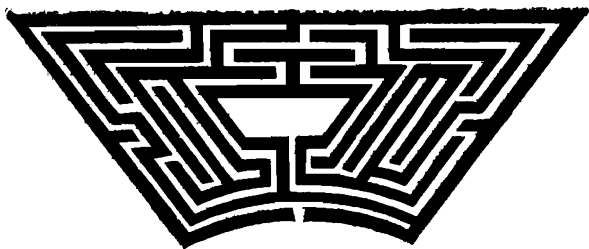


Рис. 9.7. Лабиринт в Хэмптон-Корте

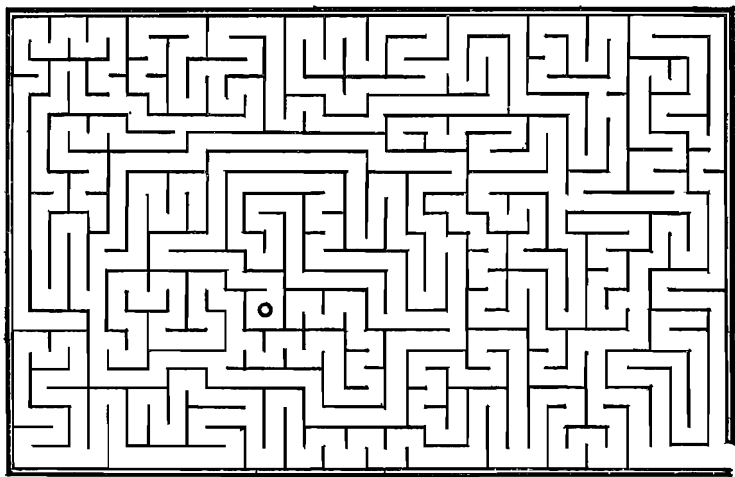


Рис. 9.8

соединяются, образуя петлю вокруг центра; если этого не происходит, то центра всегда можно достичь, пользуясь упомянутым правилом, а именно: двигаясь все время вдоль стены, которая должна оставаться либо, всегда по правую, либо, всегда по левую руку. Никакой лабиринт, который можно обойти таким образом, не заслуживает названия головоломки. Если же на маршруте встречаются упомянутые выше разветвления, то чем больше узлов и чем выше их порядок, тем сложнее лабиринт; сложность еще более возрастет, если построить мосты и туннели, т. е. соорудить лабиринт в трехмерном пространстве. В обычном саду на небольшом клочке земли малоподходящей формы нелегко устроить лабиринт, удовлетворяющий этим условиям. На рис. 9.8

приведен план лабиринта, который я соорудил у себя в саду; размеры участка не позволили проложить больше чем 36×23 путей, и здесь ни один из узлов не имеет высокого порядка.

ДЕРЕВЬЯ

Эйлер в своих исследованиях рассматривал только замкнутые сети. В задачах о лабиринтах предполагается, что в них может быть произвольное число тупиков, образующих свободные концы. Теперь сделаем следующий шаг: допустим, что каждая замкнутая часть нашей фигуры стянута в точку. В результате получается фигура, называемая *деревом*².

Возможную форму таких деревьев удобно проиллюстрировать при помощи стержней с крючками на концах. Взяв один из стержней, мы можем с обоих концов присоединить к нему по одному или больше новых таких же стержней, и т. д. Каждый свободный крючок и каждая точка, в которой сцеплены два или больше стержней, — это то, что мы раньше называли узлами, а сами стержни — это ветви, или пути.

Теория деревьев (которая уже сейчас играет важную роль в ряде разделов современного анализа и, возможно, послужит ключом к созданию теории некоторых химических и биологических процессов) берет начало в написанной в 1856 г. работе Кэли [13]. Кэли руководствовался при этом аналитическими, а не геометрическими соображениями. Здесь я только упомяну некоторые его результаты.

На пути к отысканию числа t_n деревьев с n узлами (так, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, $t_4 = 2$, ...) Кэли нашел число деревьев с n *помеченными* узлами [14]; оно равно 3^{n-2} . Кроме того, он рассматривал число T_n *корневых* деревьев с n узлами, т. е. деревьев с одним выделенным узлом, называемым *корнем*. (Это понятие возникает при перечислении однозначамещенных углеводов.) Пусть

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \quad \text{и} \quad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$$

— так называемые производящие функции (формальные ряды) для деревьев и корневых деревьев, так что

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + \dots$$

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + \dots$$

Неявно Кэли, а в явном виде Пойа получили функциональное уравнение [15]

$$T(x) = x \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} T(x^r).$$

Р. Оттер вывел очень красивую формулу [16]*, выражающую число деревьев через число корневых деревьев:

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2} \{T^2(x) - T(x^2)\}.$$

Эти результаты можно применить к другой топологической задаче: сколькими существенно разными способами

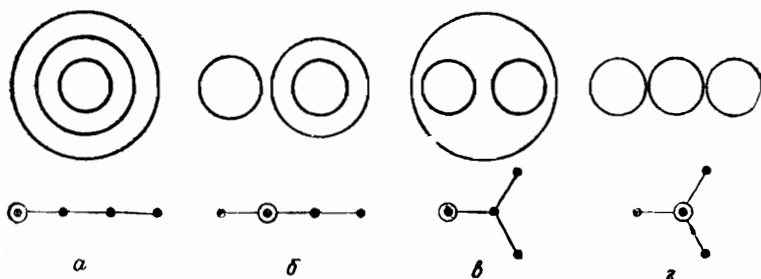


Рис. 9.9

n кругов (шаров) можно расположить без пересечения, чтобы каждый круг (шар) являлся внутренним или внешним для любого другого; в рассматриваемой конфигурации кругов двум кругам разрешается лежать либо вне друг друга, либо один внутри другого. Можно установить соответствие между n кругами и отличными от корня узлами дерева, имеющего n ветвей. Круги, не содержащиеся в других кругах, сопоставляются узлам, непосредственно соединенным с корнем. Каждый следующий узел отвечает кругу, лежащему внутри другого. Это соответствие показывает, что искомое число способов расположения кругов равно T_{n+1} . На рис. 9.9, $a-g$ (отвечающих случаю $n=3$) корень каждого дерева обведен кружком.

* В приложении (с. 266—268) к указанной здесь книге Харари приведены диаграммы всех деревьев с $n \leq 10$ вершинами.

ГАМИЛЬТОНОВА ИГРА

Теперь обратимся к задачам, в которых требуется найти маршрут, проходящий один и только один раз через каждый узел данного графа (или сети). Это задача, двойственная рассмотренной выше и намного более трудная.

Гамильтонова игра заключается в нахождении такого маршрута по ребрам правильного додекаэдра, который проходит ровно один раз через каждую вершину додекаэдра. Уильям Гамильтон [17], который изобрел эту игру (если это можно назвать игрой), обозначал двадцать вершин додекаэдра буквами, которые символизировали названия разных городов. Все возможные пути — это тридцать ребер додекаэдра. С использованием многогранника связаны большие неудобства, поэтому додекаэдр уместно заменить плоской доской, размеченной

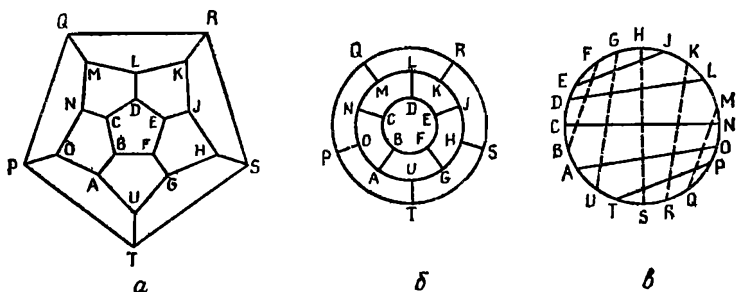


Рис. 9.10

так, как показано на рис. 9.10, а. Рис. 9.10, б и в ничуть не хуже отвечают нашим целям, а нарисовать их, пожалуй, проще.

Первая задача — объехать «весь мир», а именно: начиная от какого-либо города, побывать в каждом городе один и только один раз и вернуться в начальный пункт, причем задан порядок, в котором следует посетить первые n городов, где n не превосходит 5.

Правило Гамильтона, позволяющее это выполнить, было изложено на собрании Британской ассоциации в Дублине в 1857 г. При наших обозначениях (рис. 9.10, а—в)⁴ одно из решений дается маршрутом *ABCDEFGHIJKLMNPOQRSTU*. Всего имеется 30 решений задачи, однако все они эквивалентны с учетом группы симметрии додекаэдра.

Аналогичную игру можно построить на других многогранниках, на других фигурах на плоскости или иных поверхностях. *Гамильтоновы циклы* (проходящие через все вершины) связаны с теоремой о четырех красках (см. гл. VIII). Допустим, что такой цикл проведен по ребрам некоторой плоской карты, причем через каждую вершину карты он проходит в точности один раз. Цикл делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Всякое ребро карты, пересекающее внутреннюю область, разделяет ее на две меньшие области; каждое ребро, пересекающее одну из этих меньших областей, снова разделяет ее на две и т. д. Таким образом, если внутреннюю область пересекают в точности r ребер, то число «стран» карты, оказавшихся внутри цикла, равно $r + 1$. Более того, эти страны можно раскрасить двумя красками так, что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут окрашены в один цвет. Раскрасим одну страну красным, соседнюю с ней — зеленым, следующую — красным и т. д. Никакого противоречия не получится, так как любое внутреннее ребро обязательно пересечет внутреннюю область цикла. То же рассуждение применимо и к внешней области, в которой — если наша карта нарисована на плоскости — одна страна имеет бесконечную площадь. Следовательно, любая карта на плоскости, для которой существует гамильтонов цикл, удовлетворяет теореме о четырех красках.

П. Тэйт выдвинул следующую гипотезу: всякая стандартная карта (в том смысле, как это определялось в гл. VIII), на которой любые две страны имеют не более одной общей границы, обладает гамильтоновым циклом. В 1946 г. к этой гипотезе ([18], с. 98—101) был построен контрпример. Наиболее изящное опровержение гипотезы Тэйта было дано позднее Э. Я. Гринбергсом [19].

Гринбергс рассуждал следующим образом. Рассмотрим на стандартной карте внутреннюю область гамильтонова цикла с ее r диагоналями и $r + 1$ странами. Пусть число j -угольных стран равно f_j . Тогда число N ребер самого цикла определяется так:

$$N = \sum_{j=2}^{\infty} j f_j - 2r = \sum_{j=2}^{\infty} (j - 2) f_j + 2.$$

Пусть теперь число j -угольных стран во внешней области гамильтонова цикла равно f'_j . Заменив в предыдущем рассуждении внутреннюю область на внешней,

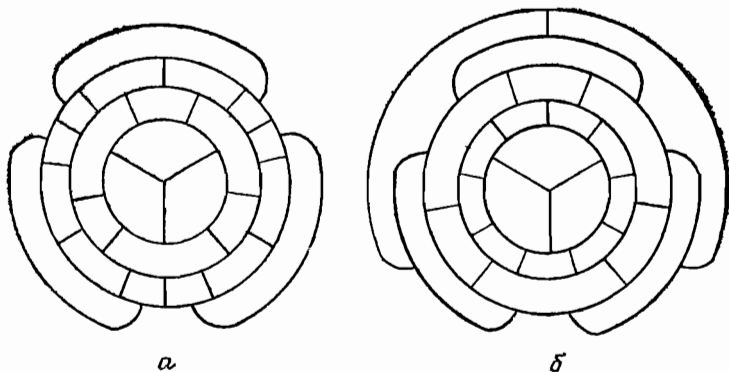


Рис. 9.11

мы убедимся, что формула для N остается верной и после замены f_j на f'_j . Вычитая одно из этих однотипных равенств из другого, получаем

$$\sum_{j=2}^{\infty} (j-2) (f_j - f'_j) = 0.$$

Допустим, что нам удалось построить карту, на которой, за одним-единственным исключением, каждая страна имеет число границ, которое при делении на 3 дает остаток 2. Для этой карты последнее равенство, очевидно, не может иметь места, и, значит, на ней нет гамильтоновых циклов. Такие карты действительно существуют. На рис. 9.11, *а* изображен пример Гринберга. На этой карте нет колец, состоящих меньше чем из пяти стран. За исключением внешнего девятиугольника, все остальные ее страны — пятиугольники и восьмиугольники.

Применив тот же метод (и заметив, что если три шестиугольника имеют общую вершину, то всякий гамильтонов цикл обязательно отделяет один из этих шестиугольников от двух других), Гринберг построил более простую карту с тем же свойством (см. рис. 9.11, *б*).

Одна теорема Смита* утверждает, что если в каждой вершине сети сходятся три ребра, то число гамильтоновых циклов сети, проходящих через любое данное ребро, четно (быть может, равно 0). Чтобы доказать

* Доказательство Смита все еще не опубликовано. Доказательство, данное в тексте, принадлежит Татту [18].

это, определим сначала *тэйтов цикл* как набор цепей, проходящих по границам карты и состоящих каждая из четного числа границ и таких цепей, что через каждую вершину карты проходит одна и только одна цепь. *Тэйтовой раскраской* назовем раскраску границ тремя красками, при которой никакие два ребра одного цвета не сходятся в одной вершине (см. выше с. 243—244). Две тэйтовы раскраски считаются одинаковыми, если они различаются только перестановкой трех цветов. Легко видеть, что справедливы следующие утверждения.

(i) При тэйтовой раскраске каждая пара цветов определяет тэйтов цикл.

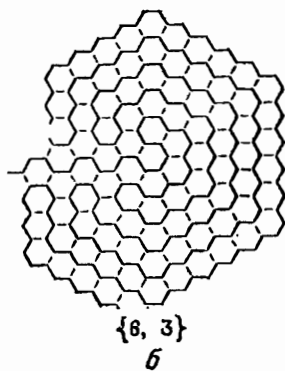
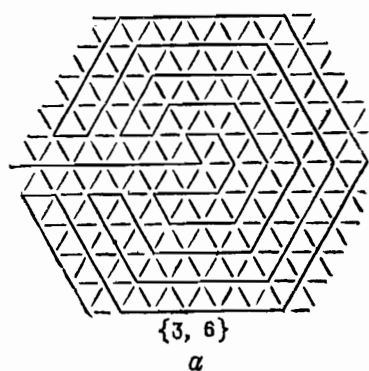


Рис. 12

(ii) Тэйтов цикл из m цепей получается таким способом ровно из 2^{m-1} различных тэйтовых раскрасок.

(iii) Из тэйтовых циклов, полученных при помощи заданной тэйтовой раскраски, ровно два проходят по каждой границе.

(iv) Гамильтонов цикл эквивалентен тэйтову циклу, для которого $m = 1$.

Исследуем теперь число тэйтовых циклов, проходящих через некоторую заданную границу A , засчитывая цикл из m цепей 2^{m-1} раз. Согласно (ii) и (iii), это число четно, так как равно удвоенному числу тэйтовых раскрасок. Но 2^{m-1} четно при всех m , кроме 1, а при $m = 1$ оно равно 1. Отсюда вытекает, что число гамильтоновых циклов, проходящих через ребро A , четно.

Как следствие теоремы Смита получаем, что если рассматриваемая сеть содержит один гамильтонов цикл, то их имеется по крайней мере три.

Задача Гамильтона была распространена на некоторые случаи, когда число городов бесконечно велико (и искомый маршрут не имеет ни начала, ни конца). Маршрут, проходящий по ребрам разбиения на квадраты $\{4, 4\}$, см. в книге Дьенеша Кёнига по теории графов [20]. Решения аналогичной задачи для других правильных разбиений ($\{3, 6\}$ и $\{6, 3\}$) показаны на рис. 9.12, *a* и *б*.

Чем-то близка гамильтоновой игре задача об обходе конем шахматной доски, о которой мы говорили в гл. VI.

КРИВЫЕ ДРАКОНА⁵

Еще одну разновидность бесконечного многоугольного пути на плоскости, в чем-то сходного с изображенными на рис. 9.12, *a, б*, можно построить, складывая длинную бумажную полосу [21]*. Начнем с горизонтальной полосы: согнем вверх ее правую половину и наложим на левую. Затем сложим полученную двойную полосу так, чтобы перегиб, расположенный ранее справа, совпал с левым краем сложенной полосы; повторим этот процесс столько раз, сколько сможем. (Практически это вряд ли удастся сделать больше семи раз, но теоретически процесс можно продолжать до бесконечности.) Если после этого бумагу снова развернуть, то на ней получится интересная последовательность сгибов. Обозначим обращенный вверх сгиб через *U*, а обращенный вниз сгиб — через *D*. Тогда начало последовательности выглядит так:

UUDUUDDUUDDUDDUUDUUDDDUUDDDUDDUU.

Первый, второй, четвертый, восьмой и т. д. сгибы, отмеченные точкой внизу, назовем «наружными». Легко видеть, что сгиб, находящийся на *k* шагов впереди наружного, всегда направлен противоположно сгибу, расположенному на *k* шагов позади. Это свойство вместе с тем фактом, что наружными могут быть только сгибы *U* (потому что полосу складывали только вверх), определяет правило, позволяющее выписать сколько угодно членов этой последовательности. Существуют и другие, эквивалентные правила. Упомяну одно из них: если $n = 2^k q$,

* Доказательства многих сформулированных здесь свойств и многочисленные рисунки см. в [22].

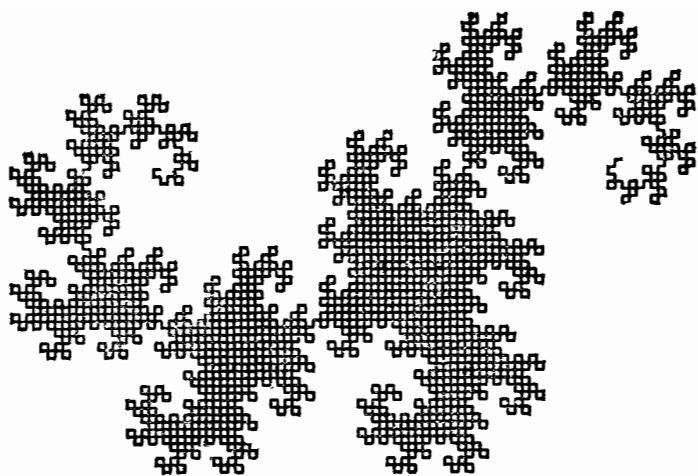


Рис. 9.13

где q нечетно, то n -й сгиб есть U или D в зависимости от того, сравнимо ли q по модулю 4 с 1 или с 3.

Далее поставим полоску вертикально и согнем бумагу на 90° в каждом сгибе в направлении этого сгиба. Полученная форма называется *кривой дракона*, ибо весьма напоминает эту симпатичную рептилию; это бесконечный многоугольный путь (рис. 9.13), захватывающий четверть всех ребер разбиения $\{4, 4\}$. В самом деле, если 3 раза повернуть полученный узор на четверть оборота (на 90°) вокруг начальной его точки, т. е. из одной и той же точки построить хвостом к хвосту четырех драконов, то они нигде не пересекутся, а при бесконечном продолжении наши 4 кривые, взятые в совокупности, ровно один раз пройдут по каждому ребру разбиения $\{4, 4\}$.

Соединим начальную точку со второй вершиной кривой дракона, вторую вершину — с четвертой и т. д. В результате получится копия исходного узора, только увеличенная в $\sqrt{2}$ раз и повернутая на 45° по часовой стрелке. (Это утверждение имеет аналог, относящийся к приведенной выше бесконечной последовательности сгибов U и D : если отбросить в этой последовательности каждый нечетный член, получится последовательность, в точности копирующая исходную.) Отсюда видно, что наружные сгибы принадлежат логарифмической спирали с полюсом в начальной точке кривой ⁶.

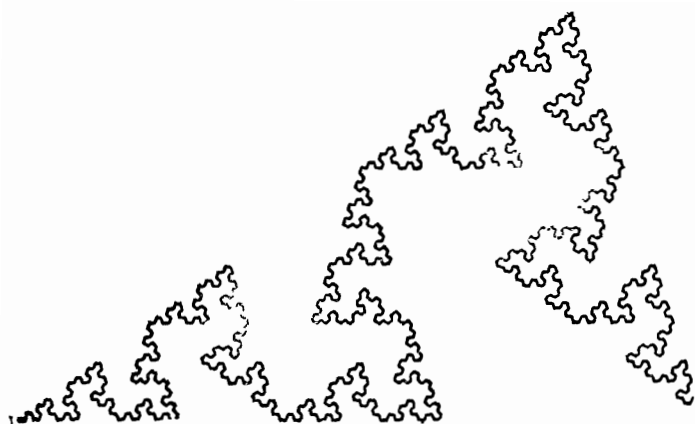
Подобное преобразование, превращающее кривую дракона в «разреженную» путем удаления части ее вершин, можно обратить и, добавив новые вершины, получить подобие, «сгущающее» исходный узор. А именно: будем рассматривать все вершины заданной кривой дракона как четные вершины другой кривой дракона с длиной ребра, равной $1/\sqrt{2}$ исходной длины. Продолжая такое сгущение до бесконечности, мы получим последовательность все более мелких узоров, которые в пределе дадут непрерывную кривую, заполняющую плоскую область [23]. Четыре такие предельные кривые, выходящие из одной точки, заполняют всю плоскость.

Исследовано много вариантов складывания. Вероятно, самым простым из них является такое, когда вместо того, чтобы сгибать полосу всегда вверх, ее сгибают поочередно то вверх, то вниз. Тогда в последовательности сгибов наружными оказываются то U , то D , но правило, связанное с наружными сгибами, сохраняется: k -й сгиб после наружного всегда направлен противоположно k -му сгибу, предшествующему ему. На рис. 9.14, *a* показан узор, который получается после разворачивания сложенной таким образом полосы и многократного сгибания ее, но не на углы 90° , а на углы в 108° . Весь получаемый таким образом узор уместится в бесконечном секторе с углом 36° . Наружные сгибы лежат поочередно то на правой, то на левой границе сектора, и третий из них находится в τ^2 раз дальше от начальной точки, чем первый. Если согнуть полосу еще немного, уменьшив углы до 90° , получится не имеющий самопересечений уникарсальный маршрут вдоль бесконечной части разбиения $\{4, 4\}$. Эта часть представляет собой сектор с углом 45° , но вдоль правой границы каждое четное ребро пропущено. (На рис. 9.14, *б* уголки закруглены, чтобы было лучше видно, как проходит этот путь.)

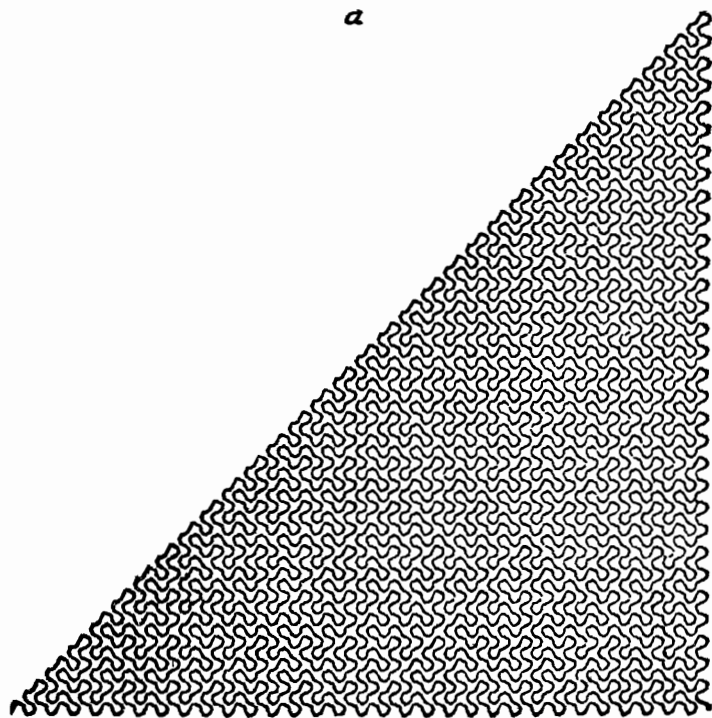
Аналогичные явления можно наблюдать и при складывании бумажной полосы на три части. Возьмем снова горизонтальную полосу бумаги и, отступив справа на одну треть длины, согнем полосу вверх, а одну треть слева согнем вниз. Затем согнем таким же способом получившуюся тройную полосу и т. д. Развернем бумагу и убедимся, что начало последовательности сгибов от центра к краям выглядит так:

$UDDUDDUUDUDDUDD | UUDUUDUDDUUDUUD.$

Наружные сгибы имеют то же значение, что и выше, но



a



б

Рис. 9.14

теперь наружным будет каждый $(3^n + 1)/2$ -й сгиб от центра в обоих направлениях. После сгибания в каждой угловой точке на 60° получится «трижды дракон» — уникальнейший маршрут, не имеющий самопересечений и идущий по ребрам разбиения $\{3, 6\}$.

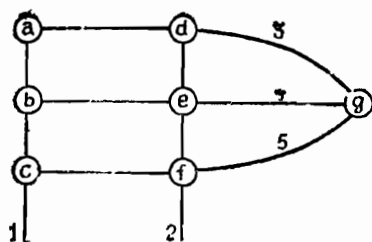
1. *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 1736.— Спб., 1741, т. VIII, с. 128—140. [Эта работа была переведена на французский язык Ш. Анри; см. [29], vol. I, pt. 2, p. 21—33 в литературе к гл. IV.]
2. Листинг И. Б. Предварительные исследования по топологии. Пер. с нем. — М.: ГНТИ, 1931.
3. *Philosophical Magazine* (London), January 1884, ser. 5, vol. XVII, pp. 30—46; *Collected Scientific Papers* (Cambridge), vol. II, 1900, pp. 85—98.
4. Wilson J. C. *Traversing of Geometrical Figures*. — Oxford, 1903.
5. Tarry G. *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, 1886, pp. 49—53.
6. Reiss M. *Annali di Matematica* (Milan), 1871, vol. V, pp. 63—120.
7. Tarry G. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1895, ser. 3, vol. XIV, pp. 187—190. См. также König D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. — New York, 1950, pp. 41—43.
8. Wiedemann A. *Herodots zweites Buch*. — Leipzig, 1890, S. 522 et seq.
9. Trollope E. *Archaeological Journal*, 1858, vol. XV, pp. 216—235.
10. *Knowledge* (London), October 1892.
11. Breton. *Pompeia*, p. 303.
12. Ozanam. *Graphia aureae urbis Romae*, pp. 92, 178.
13. Cayley A. *Philosophical Magazine*, March 1857, ser. 4, vol. XIII, pp. 172—176; *Collected Works* (Cambridge), 1890, vol. III, no. 203, pp. 242—246; см. также его статью о двойных разбиениях: *Philosophical Magazine*, November 1860, ser. 4, vol. XX, pp. 337—341.
14. Moon W. *Counting Labelled Tress* (Twelfth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress) — London: W. Clowes, 1970.
15. *Acta Mathematica*, 1937, vol. LXVIII, pp. 145—254.
16. *Annals of Mathematics*, 1948, vol. XLIX, pp. 583—599. См. также Харари Ф. *Теория графов*. Пер. с англ. — М.: Мир, 1973, с. 221—223.
17. *Quarterly Journal of Mathematics* (London), 1862, vol. V, p. 305; *Philosophical Magazine*, January 1884, ser. 5, vol. XVII, p. 42; см. также [29], vol. II, pt. VII в литературе к гл. IV).
18. Tutte W. T. *On Hamiltonian Circuits*, *Journal of the London Mathematical Society*, 1946, vol. XXI.
19. Латвийский математический ежегодник. — Рига: Зинатне, 1968, т. IV, с. 51—56.
20. König D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. — Leipzig, 1936, p. 32.
21. *Scientific American*, 1967, March, pp. 124—125; April, pp. 118—120; July, p. 115.
22. Davis C., Knuth D. *Journal of Recreational Mathematics*, 1970, vol. III, pp. 66—81, 133—149.
23. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. Пер. с польск. — М.: Наука, 1981, с. 60—61.

КОМБИНАТОРНЫЕ СХЕМЫ

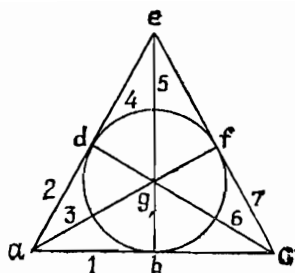
В этой главе мы вернемся к одному типу задач, которые уже рассматривались в конце гл. IV. В XIX в. считали, что эти задачи представляют интерес лишь как математические развлечения, но позднее выяснилось, что они имеют приложения к статистике. Один из важных видов комбинаторных схем приобрел новое значение после того, как в 1856 г. фон Штаудт обнаружил, что возможны геометрии, содержащие лишь конечное число точек. На протяжении сорока лет работа Штаудта оставалась забытой, но впоследствии выяснилось, что его идея исключительно плодотворна.

Проективная плоскость. Дама собирается пригласить семерых своих друзей на несколько званых обедов. Ее стол, однако, невелик, да и обед «в узком кругу», несомненно, гораздо приятнее — поэтому она решает приглашать каждый раз лишь троих гостей. Кроме того, ей хочется, чтобы каждые двое ее друзей непременно встретились за ее столом, причем она предпочла бы, чтобы они встретились лишь однажды. Тогда перед нею встает вопрос о распределении приглашений по дням. Обозначим друзей дамы буквами a, b, c, d, e, f, g , а дни, в которые будут происходить обеды, — цифрами $1, 2, 3, \dots$.

Без ограничения общности можно предположить, что в первый день были приглашены друзья a, b, c — в противном случае мы могли бы просто изменить обозначения ее друзей. Однако, составляя список приглашенных на второй день, дама оказалась перед дилеммой: следует ли ей пригласить кого-то одного из друзей, входивших в тройку $\{a, b, c\}$, или ей лучше пригласить трех совсем других друзей, скажем $\{d, e, f\}$? Покажем, что, выбрав второй вариант для второго дня, дама непременно попадет в затруднительное положение. Действительно, для дальнейших дней она должна комбинировать g с одним из $\{a, b, c\}$ и одним из $\{d, e, f\}$. Она может подобрать таким образом комбинации для третьего, четвертого или



α



δ

Рис. 10.1

пятого дней — но тут, как видно из рис. 10.1, α , она полностью исчерпает свои возможности. Для шестого дня не остается ни одного человека, которого можно было бы свести за столом, скажем, с a и e и, чтобы при этом он не встречался ни с одним из них ранее. Итак, в этом случае распределить приглашения так, как того хотелось бы хозяйке, не удастся.

Отсюда заключаем, что для второго дня нужно выбрать другую возможность. В самом деле, мы установили, что на любые два различных дня лишь один гость может быть приглашен дважды. Зная это, легко дополнить схему приглашений и убедиться, что обеды будут продолжаться семь дней. Например, решение составляют следующие столбцы:

Дни	1	2	3	4	5	6	7
Гости	a	a	a	b	b	c	c
	b	d	f	d	e	d	e
	c	e	g	f	g	g	f

Эту схему можно задать не таблицей, а геометрически (рис. 10.1, δ), сопоставляя гостям точки на нашем условном чертеже, а дням — прямые. Семь точек и семь прямых* здесь таковы, что каждая прямая содержит ровно три точки и каждая точка принадлежит ровно трем прямым; далее, каждая пара точек принадлежит

* Здесь под прямыми понимаются множество точек, удовлетворяющих некоторой системе аксиом, в данном случае — аксиомам проективной геометрии. В частности, прямой будет и множество $\{b, d, f\}$, состоящее из трех точек, лежащих на окружности. — *Прим. перев.*

одной прямой, соединяющей эти точки, и каждая пара прямых пересекается в единственной точке, принадлежащей им обеим. Точки и прямые образуют *проективную плоскость* порядка 2, обозначаемую символом $PG(2, 2)$. Точное определение этого понятия будет дано на с. 303.

Матрицы инцидентности. Связь между прямыми и точками (между гостями и днями) можно задать и алгебраически. Соответствующая *матрица инцидентности* N для точек и прямых состоит из 7×7 позиций, в которых записывается 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит соответствующая точка соответствующей прямой или нет:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = N$$

Матрица N иллюстрирует важные свойства проективной плоскости. Любая строка и любой столбец содержат по три единицы. В любой паре строк одна из единиц стоит на одном и том же месте. Аналогичным свойством обладают столбцы. Эти свойства сохраняются при перестановках точек и прямых, например если матрица N превращается в такую:

$$\begin{matrix} & 7 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \\ \begin{matrix} a \\ g \\ b \\ c \\ d \\ f \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = N'.$$

Отметим, что, хотя матрица N была симметрическая, матрица N' оказывается антисимметрической*. Матрица N' называется *циркулянт*ом в силу того, что каждая ее строка получается из предыдущей *циклической* пере-

* То есть если у нее на месте (i, j) , где $i \neq j$, стоит 1, то на месте (j, i) стоит 0, и наоборот. — *Прим. перев.*

становкой: 1-й элемент строки встает на 2-е место, 2-й — на 3-е и т. д.; наконец, последний элемент строки перемещается на 1-е место (и так же 1-я строка получается из последней). Обозначим ее следующим образом:

$$N' = \text{circ}(0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Матрица Адамара. В нашей задаче сама хозяйка присутствует на всех семи обедах. Предположим, что в восьмой день состоится прощальный обед, на котором будут присутствовать все восемь человек. Мы дополним матрицу инцидентности N строкой и столбцом из единиц и получим такую (8×8) -матрицу F :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & + & + & + & + \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ - & - & + & + & + & + & - & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & + & - & + & - \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ - & + & + & - & + & - & - & + \end{bmatrix}.$$

Пусть J обозначает матрицу (порядка 8), у которой на всех местах стоят единицы, а I — единичная матрица (порядка 8), у которой на главной диагонали стоят единицы, а на всех остальных местах — нули. Тогда матрица $H = J - 2F$ обладает следующим свойством*:

$$HH^T = 8I.$$

Это обозначает, что *скалярное произведение* любых двух различных строк (т. е. сумма произведений соответствующих элементов любых двух различных строк) равно нулю, а скалярное произведение любой строки на саму себя равно порядку матрицы. Матрица с элементами $+1$ и -1 , обладающая этим свойством, называется матрицей Адамара — в честь Жака Адамара¹. На с. 120, где эти матрицы названы аналлагматическими замощениями, была описана простая конструкция для многих из них.

* Транспонированная к произвольной квадратной матрице A матрица A^T получается отражением A относительно ее главной диагонали. Если матрица симметрическая, то очевидно, что $H^T = H$.

Коды, исправляющие ошибки². Объединив выписанную выше (8×8) -матрицу F с ее дополнением $I - F$, мы получим следующую (8×16) -матрицу:

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Мы рассматриваем 16 ее столбцов (векторов), каждый из которых содержит 8 элементов (координат вектора). Число координат, которыми два произвольных столбца различаются между собой, называется *расстоянием* между этими столбцами, или векторами. Заметим, что расстояние между любыми двумя столбцами равно либо 4, либо 8. То свойство, что все расстояния здесь ≥ 4 , позволяет следующим образом интерпретировать это множество векторов как полезный код.

Используем каждый из 16 столбцов в качестве слова двоичного кода для передачи сообщений. Из-за несовершенства канала связи может случиться, что правильно переданное сообщение принимается с одной или несколькими ошибками. Но если, например, получен столбец (11011001) и при этом произошло не более одной ошибки, то благодаря тому, что расстояние между кодовыми словами не меньше 4, получатель может заключить, что передавался седьмой столбец.

Получатель в состоянии исправить любое слово, содержащее одну ошибку, и обнаружить наличие **двух** ошибок (но не исправить их). В связи с этим данный код называется кодом, *исправляющим одну ошибку и обнаруживающим две ошибки*.

Рассматриваемый код является *линейным* $(8, 4)$ -кодом. Это означает следующее. Будем складывать столбцы по координатам по модулю 2, как на с. 47—48, т. е. считая, что

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

Легко проверить, что все столбцы являются линейными комбинациями четырех столбцов, скажем 2, 3, 4

и 5. В самом деле,

столбец 1 = столбец 2 + столбец 3 + столбец 4,
 столбец 6 = столбец 3 + столбец 4 + столбец 5,
 столбец 9 = столбец 4 + столбец 4,
 столбец 16 = столбец 4 + столбец 5

и т. п. Значит, наш код характеризуется линейностью и четырьмя линейно-независимыми столбцами с восьмью координатами каждый. Иными словами, наш код — это четырехмерное подпространство восьмимерного векторного пространства над «двоичным полем», т. е. пространство с координатами из поля $GF(2)$ с элементами 0 и 1 (см. с. 83).

Из этого кода, опустив любую из строк матрицы G^T , скажем первую, мы получим линейный $(7, 4)$ -код. Полученные таким образом 16 столбцов длиной 7 по-прежнему являются линейными комбинациями четырех столбцов. Так как любые два столбца отличаются друг от друга по крайней мере тремя координатами, это будет $(7, 4)$ -код, исправляющий одну ошибку. Кроме того, он обладает следующим замечательным свойством. Число столбцов, не принадлежащих данному коду и удаленных на расстояние 1 от какого-либо заданного кодового слова, равно 7. Кодовых слов 16, а следовательно, имеется $16(1 + 7)$ столбцов (векторов), удаленных на расстояние не больше 1 от какого-либо кодового слова. Но этими столбцами исчерпываются все 128 двоичных столбцов длиной 7. Значит, используя геометрический язык, можно сказать, что шары радиуса 1 с центрами в кодовых словах нашего четырехмерного подпространства составляют разбиение семимерного двоичного векторного пространства, т. е. его упаковку без перекрытий и пропусков. Такие коды называются *совершенными*.

Блок-схемы. Снова рассмотрим матрицу G^T (с. 296). Исключим из нее первый и девятый столбцы; при этом мы получим (8×14) -матрицу M , каждый столбец которой содержит точно 4 единицы:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Нетрудно проверить, что каждая из строк матрицы M содержит по 7 единиц и что у каждой пары строк имеется по 3 единицы, стоящих на одинаковых местах.

Матрица M является матрицей инцидентности для точек и блоков *блок-схемы* с

$$v = 8, \quad b = 14, \quad k = 4, \quad r = 7, \quad \lambda = 3;$$

$$JM = 4M, \quad MJ = 7J, \quad MM^T = 4I + 3J.$$

Это означает следующее. Рассмотрим множество, состоящее из $v = 8$ точек, и совокупность из $b = 14$ его подмножеств, называемых *блоками*. Каждый блок содержит

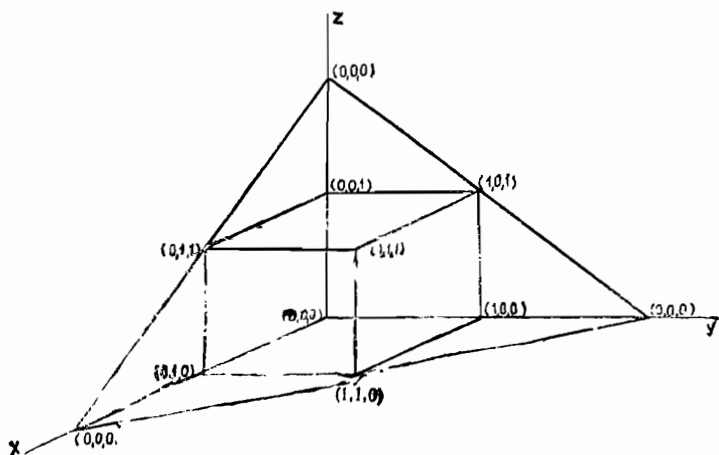


Рис. 10 2

$k = 4$ точек. Каждая точка принадлежит ровно $r = 7$ блокам. Любая пара точек принадлежит $\lambda = 3$ блокам. Кроме того, любая тройка точек содержится в одном (и только одном) блоке.

Проиллюстрируем эту блок-схему геометрически. За 8 точек примем 8 вершин куба. Пусть 14 подмножеств («блоков») — это 6 граней куба, шесть его диагональных плоскостей и 2 правильных тетраэдра, образованные его вершинами. Мы получим для нее (блок-схемы) лучшее представление, если вычисления будем проводить по модулю 2, т. е. по правилам «арифметики $GF(2)$ ». Тогда тетраэдры также станут плоскостями, как можно видеть из рис. 10.2. Таким образом, блоками служат 14 плоско-

стей, задаваемых уравнениями

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=0, \quad x+z=0, \quad y+z=0, \\ x+y+z=0,$$

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1, \quad x+y=1, \quad x+z=1, \quad y+z=1, \\ x+y+z=1,$$

которые следует понимать как сравнения по модулю 2.

Рассматриваемую блок-схему можно трактовать как обобщение проективной плоскости, изображенной на с. 293. В самом деле, в представлении, использующем куб по модулю 2, через каждую точку, например $(0, 0, 0)$, проходят 7 прямых и 7 плоскостей; их отношения инцидентности (т. е. принадлежности) аналогичны отношениям инцидентности между 7 точками и 7 прямыми проективной плоскости порядка 2. Это объясняет сходство между рис. 10.1, б и рис. 10.2.

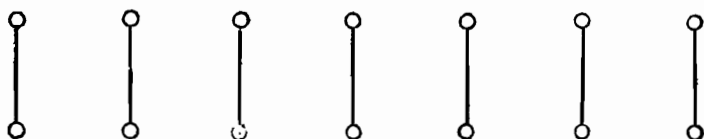


Рис. 10.3

Мы отметили, что у любой пары строк (8×14) -матрицы M (с. 297) три единицы находятся на одинаковых местах. Теперь рассмотрим пары столбцов. Ясно, что каждый столбец имеет со всеми другими столбцами, кроме одного, по две единицы на одинаковых местах, а с этим последним столбцом он вообще не имеет единиц на одинаковых местах. Примем эти 14 столбцов за 14 вершин некоего графа и назовем вершины *смежными*, если соответствующие столбцы не имеют единиц на одинаковых местах. Тогда получается так называемый *лестничный граф* (рис. 10.3). Если бы мы, напротив, назвали *смежными* такие две вершины, что у соответствующих столбцов 2 единицы стоят на одинаковых местах, то получили бы дополнительный к лестничному графу, иногда называемый *коктейль-графом* (это название подразумевает, что, приглашая на коктейль ряд пар, хозяин должен создать гостям такие условия, чтобы каждый из них мог побеседовать со всеми, кроме своего собственного партнера).

Система троек Штейнера. Вернемся к нашей исходной задаче. Напомним, что размер стола позволяет хозяйке разместить $k = 3$ гостей, помимо нее самой, и что каждая пара ее друзей встречается за $\lambda = 1$ обедами. Как в этом случае она могла бы распределить приглашения между более чем 7 своими друзьями?

Проективная плоскость порядка 2 — это блок-схема с $v = 7$ точками и $b = 7$ блоками (прямыми), причем каждая точка входит в $r = 3$ блоков, каждый блок содержит $k = 3$ точек и каждая пара точек принадлежит $\lambda = 1$ блокам. Какие еще существуют блок-схемы с $k = 3$ и $\lambda = 1$? Таким образом, нам требуется найти множество, состоящее из v точек, и совокупность троек этих точек, такую, что каждая пара точек входит в одну и только одну тройку. Такая совокупность троек, если она существует, называется *системой троек Штейнера* [обозначается она $S(v)$] — в честь знаменитого Якоба Штейнера (1796—1863) [1], который, как мы увидим в дальнейшем, отнюдь не первым сформулировал эту задачу.

Предположим, что существует система троек Штейнера порядка v . Тогда любая точка по одному разу входит в тройку вместе с каждой из остальных $v - 1$ точек, а значит, она входит в $r = (v - 1)/2$ троек. Чтобы получить общее число троек, надо это число умножить на $v/3$, т. е. $b = v(v - 1)/6$. Так как оба этих числа должны быть целыми, то в качестве необходимого условия существования $S(v)$ мы получаем сравнение $v \equiv 1 \pmod{6}$ или $v \equiv 3 \pmod{6}$, т. е. $v = 7, 9, 13, 15, \dots$. Мур доказал в 1893 г. (ср., впрочем, [2]), что это условие является также и достаточным. Тем самым мы пришли к решению задачи о системах троек Штейнера. (Случай $v = 7$ мы уже рассмотрели выше.)

Существует (ср. [3]) единственная система троек Штейнера порядка 9. Она содержит 9 точек, скажем $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, и 12 троек точек («прямых»), как показано на рис. 10.4. Перечислим эти тройки: строки abc, def, ghi ; столбцы adg, beh, cfi ; положительные диагонали aei, bfg, cdh ; отрицательные [как при вычислении (3×3) -определителя] диагонали afh, bdi, ceg .

Каждая точка принадлежит 4 тройкам («прямым»); каждая пара точек — 1 тройке. Имеются 4 семейства «параллельных прямых», каждое из трех троек точек (или прямых), — входящие в них прямые не имеют общих точек. Взаимосвязи между этими 12 тройками опи-

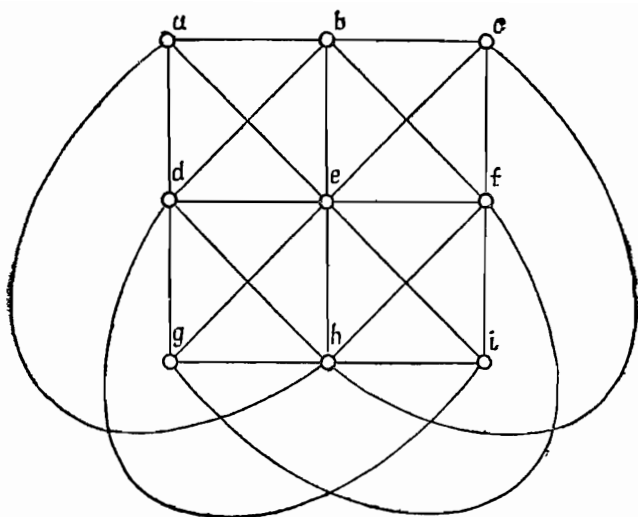


Рис. 10.4

сываются графом с 12 вершинами, изображенным на рис. 10.5, где смежными считаются вершины, которым соответствуют тройки без общих точек.

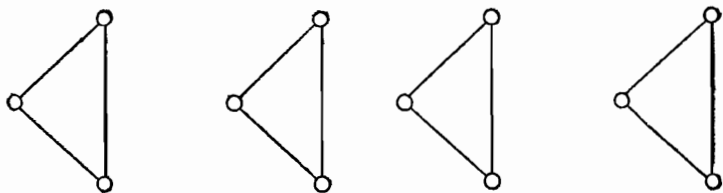


Рис. 10.5

Следующий случай, когда система троек Штейнера существует, соответствует параметрам

$$v = 13, \quad b = 26, \quad r = 6, \quad k = 3, \quad \lambda = 1.$$

Одна из двух существующих систем, отвечающих этим данным, определяется матрицей инцидентности N для точек и блоков вида

$$N = [N_1 \ N_2],$$

где (13×13) -матрицы N_1 и N_2 — это циркулянты

$$N_1 = \text{circ}(1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

$$N_2 = \text{circ}(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Ясно, что при таких параметрах системы $S(13)$ для любой ее точки P и не содержащей P тройки («прямой») l три содержащие P прямые имеют с l общие точки, а три — не имеют. Для систем троек Штейнера порядков 9 и 7 соответствующие числа равны 3, 1 и 3, 0 (см. рис. 10.6, а).

Это свойство точек и блоков, или «прямых», систем троек $S(13)$, $S(9)$ и $S(7)$ согласуется с основной аксиомой для точек и прямых соответственно гиперболической [неевклидовой] — была открыта независимо Гауссом

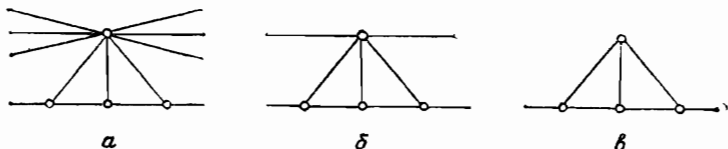


Рис. 10.6. $S(13)$, гиперболическая плоскость (а); $S(9)$, аффинная плоскость (б); $S(7)$, проективная плоскость (в)

(1777—1855), Лобачевским (1793—1856) и Бойаи (1802—1860) [4]], аффинной (евклидовой) и проективной (эллиптической) геометрий на плоскости³. В соответствии с этим мы называем $S(13)$ конечной *гиперболической* плоскостью, $S(9)$ — конечной *аффинной* плоскостью и $S(7)$ — конечной *проективной* плоскостью.

Исследуем другие свойства точек и прямых (блоков) этих конечных плоскостей. Поскольку все это — системы троек Штейнера, любые 2 различные точки каждой из плоскостей определяют единственную прямую. Каждая из этих конечных плоскостей (*однородно*)-*транзитивна* относительно точек, т. е. если заданы две точки P и Q , то на множестве всех точек существует перестановка (отображение плоскости на себя), которая переводит P в Q и прямые в прямые, сохраняя отношение инцидентности для точек и прямых. Для $S(7)$ и $S(9)$ это видно непосредственно из рис. 10.1, б и 10.4 соответственно. Для $S(13)$, а также для $S(7)$ это следует из того, что матрица N связана с циркулянтами. (Надо отметить, что для двух заданных прямых l и m не всегда существует переводящая прямые в прямые перестановка точек, которая переводит l в m .) Мы отмечали выше, что наша система $S(13)$ — одна из двух систем троек Штейнера порядка 13; вторая система менее интересна, так как она не транзитивна относительно точек.

Следующий случай, когда существуют системы троек Штейнера, отвечает параметрам

$$v = 15, \quad b = 35, \quad r = 7, \quad k = 3, \quad \lambda = 1.$$

Все такие системы были перечислены Коулом, Уайтом и Каммингсом [5]. Существует 80 неизоморфных систем $S(15)$. Многие из них не транзитивны относительно точек. Однако среди транзитивных имеется 7 систем, обладающих замечательными дополнительными свойствами, — это так называемые системы Киркмана, которые мы обсудим далее на с. 309.

Что касается систем троек Штейнера $S(v)$ более высокого порядка, то их число возрастает очень быстро. Например, число неизоморфных систем $S(31)$ уже превосходит $2 \cdot 10^{15}$.

Конечные геометрии. *Конечная проективная плоскость*, введенная в начале этой главы, удовлетворяет следующим аксиомам:

1) для любых двух точек существует единственная прямая, их соединяющая (т. е. содержащая обе эти точки);

2) для любых двух прямых существует единственная точка их пересечения (т. е. точка, принадлежащая каждой из этих прямых);

3) существуют 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой;

4) число точек конечно.

В общем случае *конечная проективная плоскость* — это система точек и прямых с определенным для них отношением *инцидентности* (отношением «точка A принадлежит прямой a », или, что то же самое, «прямая a проходит через точку A »), удовлетворяющим перечисленным аксиомам. Рассмотрим 4 точки P, Q, R, S , никакие 3 из которых не лежат на одной прямой (их существование гарантируется аксиомой 3). Прямая RS содержит конечное число точек, скажем $q + 1$. Тогда любая точка, не инцидентная RS , по аксиоме 1 принадлежит по крайней мере $q + 1$ прямым и по аксиоме 2 принадлежит не более чем $q + 1$ прямым, т. е. она принадлежит в точности $q + 1$ прямым. В частности, это верно для точек P и Q . Отсюда вытекает, что любая прямая, определяемая точками P, Q, R, S (кроме, быть может, PQ), содержит $q + 1$ точек. Значит, любая точка плоскости принадлежит $q + 1$ прямым, и, следовательно, любая прямая (теперь уже, разумеется, и PQ) содержит

$q + 1$ точек. Общее число точек проективной плоскости (число точек на всех прямых, проходящих через какую-либо точку) равно $1 + (q + 1)q = q^2 + q + 1$. Таково также и общее число прямых проективной плоскости.

Предыдущее утверждение и определение конечной проективной плоскости порядка q восходят к фон Штаудту [6]. Конечные проективные плоскости были на самом деле построены Фано [7] (для простых q) и Вебленом и Басси [8] (для q , равных степени простого числа). Они построены лишь для q , представляющих собой степени простого числа. Известно (ср. с. 207), что не существует проективной плоскости порядка 6. Не известно, существует ли проективная плоскость порядка 10 — следующего составного числа, не являющегося степенью простого.

Теперь мы приведем конструкцию конечной проективной плоскости порядка $q = p^n$, где p — простое число. Нашей отправной точкой служит поле Галуа $GF(p^n)$, состоящее из p^n элементов, которое исследовалось на с. 83. Рассмотрим [9] два типа упорядоченных троек элементов поля Галуа, а именно

$$(x_1, x_2, x_3) \text{ и } [X_1, X_2, X_3],$$

где $x_1, x_2, x_3, X_1, X_2, X_3$ — элементы из $GF(p^n)$. Исключим тройки $(0, 0, 0)$ и $[0, 0, 0]$ и будем считать две тройки эквивалентными (т. е. геометрически неразличимыми), если они пропорциональны. Точка — это множество всех троек

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in GF(p^n),$$

эквивалентных данной тройке (x_1, x_2, x_3) . Прямая — это множество всех троек

$$[\Lambda X_1, \Lambda X_2, \Lambda X_3], \quad \Lambda \neq 0, \quad \Lambda \in GF(p^n),$$

эквивалентных тройке $[X_1, X_2, X_3]$. Отношение инцидентности для точек и прямых задается формулой

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0.$$

Легко видеть, что такая система точек и прямых с определенным на ней отношением инцидентности удовлетворяет аксиомам 1—4. Действительно, две прямые $[A_1, A_2, A_3]$ и $[B_1, B_2, B_3]$ имеют единственную точку пересечения (x_1, x_2, x_3) , определяемую уравнениями $x_1 A_1 +$

получена из $PG(2, 3)$ удалением прямой $[0, 0, 1]$ и ее точек. Все девять полученных таким образом точек плоскости $AG(2, 3)$ можно пометить лишь первыми двумя координатами, так как третью можно считать единицей (этого всегда можно добиться, заменив координаты (x_1, x_2, x_3) на $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ с подходящими множителями λ). Для любого числа $q = p^n$ все q^2 точек и $q^2 + q$ прямых плоскости $AG(2, p^n)$ можно пометить соответственно упорядоченными парами (ξ, η) и тройками (α, β, γ) , определяемыми из уравнений $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$, где $\xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma \in GF(p^n)$.

Используя поля Галуа, можно построить геометрии более высоких размерностей. Для трехмерного случая рассматриваются два типа упорядоченных четверок элементов поля $GF(p^n)$ — мы будем записывать их как (x_1, x_2, x_3, x_4) и $[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Классы пропорциональных четверок каждого из этих типов задают соответственно *точки* и *плоскости* трехмерного *конечного проективного пространства* $PG(3, p^n)$. Отношение инцидентности для точек и плоскостей определяется формулой

$$x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4 = 0.$$

Прямые в $PG(3, p^n)$ — это пересечения пар плоскостей, или, что то же самое, объединения пар точек, т. е. все множества точек

$$(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3, \lambda a_4 + \mu b_4) \neq (0, 0, 0, 0),$$

где (a_1, a_2, a_3, a_4) и (b_1, b_2, b_3, b_4) — различные точки, а λ и μ пробегают $GF(p^n)$.

В качестве примера рассмотрим *двоичное проективное пространство* $PG(3, 2)$. Оно имеет 15 точек, а именно: все упорядоченные четверки из нулей и единиц, кроме $(0, 0, 0, 0)$. В нем имеется также 15 плоскостей, и каждая из них образует $PG(2, 2)$ с 7 точками и 7 прямыми. Всего $PG(3, 2)$ содержит 35 прямых, причем каждая из них состоит из двух произвольных точек и их суммы по модулю 2. На самом деле точки и прямые пространства $PG(3, 2)$ образуют одну из 80 систем троек Штейнера порядка 15 (ср. с. 302—303).

Более удобно представлять пространство $PG(3, 2)$ с его 15 точками с помощью поля Галуа $GF(2^4)$ с его 15 ненулевыми элементами, т. е. 15 многочленами от x по модулю $x^4 + x + 1$ с коэффициентами 0 и 1 (ср. с. 83).

Поскольку $x^4 = x + 1$, все эти многочлены являются степенями x . Это видно из следующей системы равенств, где каждый многочлен представлен своими коэффициентами, так что $10011 = 0$:

$$\begin{array}{rcl}
 x^0 & = & 1 = 0001 \\
 x^1 & = & x = 0010 \\
 x^2 & = & x^2 = 0100 \\
 x^3 & = & x^3 = 1000 \\
 x^4 & = & x+1 = 0011 \\
 x^5 & = & x^2+x = 0110 \\
 x^6 & = & x^3+x^2 = 1100 \\
 x^7 & = & x^3+x+1 = 1011 \\
 x^8 & = & x^2+1 = 0101 \\
 x^9 & = & x^3+x = 1010 \\
 x^{10} & = & x^2+x+1 = 0111 \\
 x^{11} & = & x^3+x^2+x = 1110 \\
 x^{12} & = & x^3+x^2+x+1 = 1111 \\
 x^{13} & = & x^3+x^2+1 = 1101 \\
 x^{14} & = & x^3+1 = 1001
 \end{array}$$

Любые 2 из 15 точек определяют прямую, которая состоит из этих двух точек и их суммы. Например, прямая, соединяющая x^4 и x^5 , содержит третью точку $x^4 + x^5 = 0011 + 0110 = 0101 = x^8$ или, проще, $x^4 + x^5 = x^4(1+x) = x^4x^4 = x^8$. Отсюда вытекает, что операция умножения на x — это *коллинеация* (проективное преобразование) периода 15, переводящая точки в точки, прямые в прямые и, следовательно, плоскости в плоскости. Очевидно, что циклическая группа, порожденная этой коллинеацией, транзитивна на 15 точках $x^0, x^1, \dots, x^{14}$. Но эта группа не транзитивна на 35 прямых, с ее помощью это множество прямых разбивается на 3 подмножества. Одно состоит из 15 прямых, получающихся, скажем, из $\{x^0, x^1, x^4\}$, другое — из 15 прямых, получающихся, скажем, из $\{x^0, x^2, x^8\}$, а последнее — из 5 прямых, получающихся, например, из $\{x^0, x^5, x^{10}\}$. Это разбиение [11] будет использовано в следующем разделе для решения задачи Киркмана о школьницах.

Трехмерное *конечное аффинное пространство* $AG(3, p^n)$ получается из $PG(3, p^n)$ удалением одной плоскости со всеми ее точками и прямыми. Таким образом, ее $(p^n)^3$ точек задаются упорядоченными тройками элементов из $GF(p^n)$.

Но опять же можно найти более удобное представление. Например, 27 точек *троичного аффинного пространства* $AG(3, 3)$ можно описать элементами из $GF(3^3)$, т. е. нулем и 26 степенями первообразного корня x , который удовлетворяет условию $x^3 = x - 1$. Тогда $x^{13} = x^4(x - 1)^3 = x^4(x^3 - 1) = x^4(x + 1) = x(x^2 - 1) = -1$ по мо-

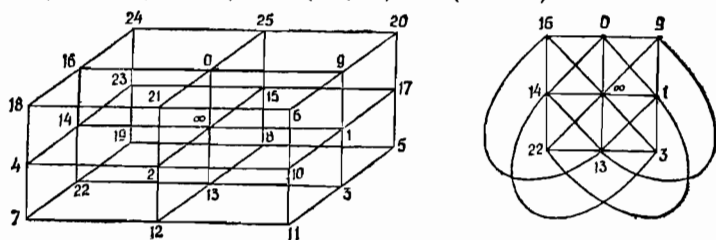


Рис. 10.8

дулю 3. Таким образом, указанные 27 точек, помеченные на рис. 10.8 своими показателями степени, — это

$$\begin{aligned} x^0 &= 00 +, & x^1 &= 0 + 0, & x^2 &= + 00, & x^3 &= 0 + -, \\ x^4 &= + - 0, & \dots, & x^{13} &= 00 -, & \dots \end{aligned}$$

и по определению $x^\infty = 000$. Снова 3 точки коллинеарны, если их сумма равна нулю, например $\{x^\infty, x^3, x^{13}\}$ и $\{x^0, x^4, x^5\}$. Умножение на x является *аффинным преобразованием*, оставляющим на месте начало координат. Оно отображает любую прямую $\{x^\infty, x^i, x^{i+13}\}$ и 8 ей параллельных в прямую $\{x^\infty, x^{i+1}, x^{i+14}\}$ и 8 параллельных ей прямых. Значит, циклическая группа, порожденная этим аффинным преобразованием, следующим образом разбивает 117 прямых из $AG(3, 3)$ на 13 связок по 9 параллельных прямых (на 13 «направлений», как еще сказать?):

$$\begin{aligned} &(\infty, 3, 16), (0, 1, 22), (4, 6, 12), (7, 10, 21), (11, 18, 2), \\ &(\infty, 4, 17), (1, 2, 23), (5, 7, 13), (8, 11, 22), (12, 19, 3), \\ &(\infty, 5, 18) (2, 3, 24) (6, 8, 14) (9, 12, 23) (13, 20, 4) \\ &\text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \\ &(13, 14, 9), (17, 19, 25), (20, 23, 8), (24, 5, 15), \\ &(14, 15, 10), (18, 20, 0), (21, 24, 9), (25, 6, 16), \\ &(15, 16, 11) (19, 21, 1) (22, 25, 10) (0, 7, 17) \\ &\text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.;} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Аналогично точки n -мерной троишной аффинной геометрии $AG(n, 3)$ описываются 3^n элементами поля $GF(3^n)$. Число b_n прямых в $AG(n, 3)$ вычисляется с помощью распределения точек по 3 гиперплоскостям $x_n = 1$, $x_n = 0$, $x_n = -1$, в каждой по 3^{n-1} точек. Тогда $b_n = 3^{2(n-1)} + 3b_{n-1}$, т. е. $b_n = 3^{n-1}(3^n - 1)/2$. Каждая прямая содержит 3 точки, каждая точка принадлежит $(3^n - 1)/2$ прямым, и каждая пара точек принадлежит единственной прямой. Значит, $AG(n, 3)$ содержит $(3^n - 1)/2$ связок параллельных прямых $[(3^n - 1)/2$ «направлений»].

Задача Киркмана о школьницах. «Учительница ежедневно выводит своих учениц на прогулку. Девочек 15, и учительница выстраивает их в пять рядов по три девочки в каждом, так что у каждой из них на прогулке две спутницы. Как следует расставлять девочек, чтобы в течение недели ни одна ученица не оказывалась ни с одной своей одноклассницей в одной тройке более чем один раз? В общей постановке той же задачи требуется так расставить по тройкам n девочек (где n — нечетное кратное трем число), чтобы во время ежедневных прогулок в течение $(n - 1)/2$ дней ни одна ученица не оказывалась ни с одной своей одноклассницей в одной тройке более чем один раз».

В такой форме задача, обсуждающаяся в настоящем разделе, была включена первоначально в гл. X данной книги, причем в том исходном варианте сама глава имела то же название, что и этот раздел. Написанная в 1892 г. и неоднократно перерабатывавшаяся гл. X книги содержала много решений и подходов к решению сформулированной задачи; однако решение для общего случая в ней отсутствовало. Это, конечно, вполне объяснимо, поскольку такое решение было впервые получено Роем-Чоудхури и Уилсоном только в 1969 г.

Решение для частного случая с 15 школьницами было найдено в 1847 г. Киркманом [12], который, таким образом, опередил Штейнера. Для общего случая требуется система троек Штейнера с отношением параллелизма между тройками точек («прямыми»), т. е. такая система, что весь набор троек можно разбить на части («пучки параллельных» или «направления») таким образом, чтобы для любой точки P и любой «прямой» (тройки) l , не содержащей P , в части, содержащей l , существовала содержащая P «прямая», параллельная (т. е. не пересекающая) l . В нашем примере недостаточно составить

35 троек из 15 девочек так, чтобы любая пара девочек встречалась лишь в одной тройке. Нужно, чтобы, кроме того, в каждый из 7 дней все 15 девочек были распределены по тройкам. Таким образом, 35 троек должны быть разбиты на 7 классов «параллелизма» по 5 троек каждый. Для решения общей проблемы о школьницах нужно найти *систему Киркмана*, т. е. систему Штейнера с отношением параллелизма, определяемую следующими параметрами:

$$v = 6t + 3, \quad b = (3t + 1)(2t + 1), \quad r = 3t + 1, \quad k = 3, \quad \lambda = 1.$$

Рой-Чоудхури и Уилсон [13] показали, что эта проблема допускает по крайней мере одно решение для каждого неотрицательного целого t . Они разработали композиционные методы, с помощью которых схема большего порядка конструируется из некоторого числа схем меньшего порядка. Для этого используются блок-схемы с блоками неодинакового размера и другие виды комбинаторных схем. Кроме того, названные авторы построили столько схем малых порядков, что, применяя развитые ими композиционные методы, из этих схем можно получить блок-схемы для всех v , где $v \equiv 3 \pmod{6}$. В более ранних изданиях настоящей книги рассматривалась конструкция непосредственно для систем Киркмана порядка v , где $9 \leq v \leq 99$.

Хотя проблема существования систем Киркмана была решена в 1969 г., остается открытым вопрос о том, **сколько** существует различных систем Киркмана для каждого из удовлетворяющих нашим условиям порядков v . На сегодняшний день известно лишь, что для $v = 9$ имеется по существу (т. е. с точностью до изоморфизма) одна такая система, а для $v = 15$ их число равно семи [14].

Мы укажем здесь одно из решений, отвечающих значению $v = 15$, а также одно решение для случая $v = 27$. Напомним (см. с. 306), что двоичное проективное пространство $PG(3, 2)$ содержит 15 точек, которые можно представлять степенями первообразного корня x из $GF(2^4)$. Умножение на x разбивает 35 прямых этого пространства на 3 класса, состоящих из 5, 15 и 15 элементов, а именно:

$$\{x^0, x^5, x^{10}\}, \{x^1, x^6, x^{11}\}, \{x^2, x^7, x^{12}\}, \{x^3, x^8, x^{13}\}, \\ \{x^4, x^9, x^{14}\};$$

$$\{x^0, x^1, x^4\}, \{x^1, x^2, x^5\}, \{x^2, x^3, x^6\} \text{ и т. д.};$$

$$\{x^0, x^2, x^8\}, \{x^1, x^3, x^9\}, \{x^2, x^4, x^{10}\} \text{ и т. д.}$$

Интерпретируя эти 15 точек как школьниц, а 35 прямых — как ряды из трех девочек, мы должны выделить 7 множеств по 5 непересекающихся прямых, каждое из которых содержит все 15 точек. Такие множества здесь удобнее называть *наборами* прямых (а не «направлениями»), ибо они [в 3-мерном пространстве $PG(3, 2)$] состоят из 5 попарно скрещивающихся прямых.

Первый из выписанных выше классов представляет собой набор. Второй класс не содержит ни одного набора, третий — тоже. Однако второй класс содержит четыре попарно скрещивающиеся прямые, — и оказывается, что не принадлежащие им 3 точки образуют прямую, принадлежащую третьему классу. После всего сказанного простой перебор классов приводит к следующему решению:

Воскресе- сенье	Понедель- ник	Втор- ник	Среда	Четверг	Пятни- ца	Суббо- та
0, 5, 10	0, 1, 4	1, 2, 5	4, 5, 8	2, 4, 10	4, 6, 12	10, 12, 3
1, 6, 11	2, 3, 6	3, 4, 7	6, 7, 10	3, 5, 11	5, 7, 13	11, 13, 4
2, 7, 12	7, 8, 11	8, 9, 12	11, 12, 0	6, 8, 14	8, 10, 1	14, 1, 7
3, 8, 13	9, 10, 13	10, 11, 14	13, 14, 2	7, 9, 0	9, 11, 2	0, 2, 8
4, 9, 14	12, 14, 5	13, 0, 6	1, 3, 9	12, 13, 1	14, 0, 3	5, 6, 9

Переходя к задаче Киркмана для 3^n школьниц, рассмотрим аффинную геометрию $AG(n, 3)$ (см. с. 309). Интерпретируя 3^n точек как школьниц, а $3^{n-1}(3^n - 1)/2$ прямых — как ряды, в которые школьницы выстраиваются на прогулке, мы должны найти $(3^n - 1)/2$ множеств по 3^{n-1} прямых, каждое из которых содержит все точки. Решение получается разбиением множества всех прямых на $(3^n - 1)/2$ связок взаимно параллельных прямых. Для $n = 3$ это решение представлено на с. 308.

Латинские квадраты. Напомним (см. с. 204), что *латинский* квадрат порядка n — это квадратная $n \times n$ -матрица, каждая строка и каждый столбец которой образуют перестановки одних и тех же символов (букв). Два латинских квадрата порядка n называются *ортогональными*, если в их объединении, где каждый элемент представляет собой пару символов, заимствованных соответственно из 1-го и из 2-го латинских квадратов, каждая из возможных n^2 упорядоченных пар символов встречается один и только один раз. Первые три из сле-

дующих четырех латинских квадратов взаимно ортогональны:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}.$$

Однако четвертый латинский квадрат — это «нерасширяемый» квадрат, т. е. такой, что ортогональных ему квадратов просто не существует.

Понятия латинского квадрата и взаимно ортогональных латинских квадратов допускают различные интерпретации, имеющие характер математических развлечений или относящиеся к математике — чистой или прикладной. Мы укажем здесь пять примеров такого рода, причем все они касаются латинских квадратов четвертого порядка.

Как распределять 16 девочек в течение x дней в 4 группы по четыре девочки в каждой таким образом, чтобы за все x дней никакие две девочки не оказались в одной группе более одного раза? Для $x = 3$ ответ дается любым латинским квадратом порядка 4, если интерпретировать позиции в этой (4×4) -матрице как девочек и распределить их в первый день в соответствии со строками матрицы, во второй — в соответствии с ее столбцами, а в третий — в соответствии с буквами, образующими наш латинский квадрат (т. е. так, что в первую четверку попадут девочки, соответствующие тем позициям, в которых в выбранном латинском квадрате стоит буква a , во вторую — девочки, соответствующие позициям, занятым буквой b , и т. д.). Для $x = 4$ решение обеспечивается любой парой ортогональных латинских квадратов, а для $x = 5$ — любыми тремя взаимно ортогональными латинскими квадратами четвертого порядка.

Предположим, что при проведении сельскохозяйственного эксперимента мы хотим сравнить урожайность 4 сортов пшеницы. Чтобы исключить влияние неизбежных различий в структуре и плодородии почвы, поле, на котором проводится эксперимент, делится на 16 делянок, расположенных в четыре «строки» и четыре «столбца». Затем 4 сорта распределяются по этим делянкам в со-

ответствии с некоторым латинским квадратом, так что каждый сорт посеян на одной делянке из каждого столбца и на одной делянке из каждой строки. Таким образом, при сравнении сортов исключается влияние систематического изменения плодородия почвы вдоль строк и столбцов. В том же эксперименте могут изучаться 4 различных способа удобрения почвы, если они применяются в соответствии с латинским квадратом, ортогональным первому, так что каждый способ удобрения применяется к каждому сорту пшеницы по одному разу.

Если надо сравнить сопротивление на износ 4 видов автомобильных покрышек, то, очевидно, желательно использовать по одной покрышке каждого вида на 4 колеса одной машины. Но нагрузка и, следовательно, величина износа могут быть в этих четырех положениях различными и могут меняться от недели к неделе из-за разницы в погодных условиях. Значит, чтобы эксперимент был поставлен корректно, надо использовать 4 покрышки в течение 4 недель, меняя их положения от недели к неделе в соответствии с некоторым латинским квадратом.

Для произвольной пары взаимно ортогональных латинских квадратов порядка 4 занумеруем строки, столбцы и образующие эти квадраты латинские буквы и греческие буквы одним и тем же множеством символов $\{1, 2, 3, 4\}$. Эту пару ортогональных латинских квадратов можно рассматривать как множество, состоящее из 16 упорядоченных четверок («векторов») символов, выбранных из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, причем на любой паре координат «векторов» (1-й и 2-й, 1-й и 3-й и т. д.) каждая пара символов встретится точно один раз. Значит, любые две различные четверки отличаются друг от друга по крайней мере тремя координатами. Следовательно, мы получили код, состоящий из 16 кодовых слов, по четыре координаты в каждом, основанный на множестве из 4 символов, с минимальным расстоянием 3, т. е. код, исправляющий одну ошибку.

Последний пример касается эксперимента с телевизионным экраном. Ячейки квадратной $(n \times n)$ -сетки надо окрасить в n разных оттенков серого цвета таким образом, чтобы соседние элементы как по вертикали, так и по горизонтали имели разные цвета. Следующие примеры для $n = 4$ и $n = 6$ используют латинские квадраты:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \\ b & d & a & c \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & \boxed{c} & d & e & f \\ b & d & \boxed{f} & a & c & e \\ \boxed{c} & \boxed{f} & b & e & a & d \\ d & a & e & b & \boxed{f} & \boxed{c} \\ e & c & a & \boxed{f} & \boxed{d} & b \\ f & e & d & \boxed{c} & b & a \end{bmatrix}.$$

Эти примеры помогут нам лучше разобраться в понятии латинского квадрата. В самом деле, в каждом из случаев специфическая роль строк, столбцов и букв не существенна — важно лишь, что мы используем n^2 упорядоченных троек из n символов, таких, что на каждой паре координат каждая пара символов встречается один раз. Если взять это свойство за определение и обозначить через m число латинских квадратов порядка n , то

n	2	3	4	5	6	7	8
m	1	1	2	2	12	147	$> 250\,000$

При исходном определении существуют 110 592 латинских квадрата порядка 4. Если допустить перестановки на множествах строк, столбцов, букв, а также разрешить менять местами строки и столбцы, то число их сведется к 4. При новом их определении число латинских квадратов обратится в 2, и эти два типа представляются нерасширяемыми и расширяемыми латинскими квадратами.

Это новое определение приложимо и к ортогональным латинским квадратам. Множество, состоящее из $k-2$ взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n , — это теперь множество, состоящее из n^2 упорядоченных последовательностей длины k из n символов, такое, что на любой паре координат каждая пара символов встречается один раз. Таким образом, любая пара этих последовательностей может совпадать (т. е. иметь одинаковый символ) не более чем в одном месте (на одной координате).

Как мы уже отмечали (см. с. 207), в 1782 г. Эйлер высказал предположение, что не существует пар ортогональных квадратов порядка $n = 4k + 2$. Эта гипотеза была доказана Тарри для $n = 6$, а Боуз, Паркер и Шрикхенд [15]* установили, что она не верна для всех $n =$

* На форзаце настоящей книги изображен модифицированный вариант найденного в этой работе эйлерова квадрата.

$= 4k + 2$, где $k > 1$. Таким образом, гипотеза, просуществовавшая 177 лет, оказалась верной лишь в единственном случае и ошибочной во всех остальных. Теперь, когда это известно, легко привести пример двух ортогональных латинских квадратов порядка $n = 10$, который непосредственно обобщается на случай $n = 3m + 1$:

0 6 5 4 7 8 9	1 2 3	0 9 8 7 1 3 5	2 4 6
9 1 0 6 5 7 8	2 3 4	6 1 9 8 7 2 4	3 5 0
8 9 2 1 0 6 7	3 4 5	5 0 2 9 8 7 3	4 6 1
7 8 9 3 2 1 0	4 5 6	4 6 1 3 9 8 7	5 0 2
1 7 8 9 4 3 2	5 6 0	7 5 0 2 4 9 8	6 1 3
3 2 7 8 9 5 4	6 0 1	8 7 6 1 3 5 9	0 2 4
5 4 3 7 8 9 6	0 1 2	9 8 7 0 2 4 6	1 3 5
2 3 4 5 6 0 1	7 8 9	1 2 3 4 5 6 0	7 8 9
4 5 6 0 1 2 3	9 7 8	2 3 4 5 6 0 1	8 9 7
6 0 1 2 3 4 5	8 9 7	3 4 5 6 0 1 2	9 7 8

Обозначим блоки, из которых сложены наши квадраты, следующим образом:

$$\frac{A}{C} \left| \frac{B}{D} \right., \quad \frac{A^T}{B^T} \left| \frac{C^T}{E} \right. .$$

Объясним использованную конструкцию [16] для общего случая $n = 3m + 1$ (в выписанном примере $m = 3$). Главная диагональ матрицы A состоит из символов $0, 1, \dots, 2m$. Половина из $2m$ оставшихся параллельных ей «кусочных» диагоналей матрицы A состоит из тех же символов, но сдвинутых; они начинаются с $2m, 2m - 1, \dots, m$. Другая половина — это диагонали с постоянными элементами $2m + 1, 2m + 2, \dots, 3m$ соответственно. Столбцы матрицы B [строки матрицы C] содержат символы $0, 1, \dots, m$ в циклическом порядке и начинаются соответственно с $1, 2, \dots, m$ [с $2, 4, \dots, 2m$]. Матрицы D и E — два взаимно ортогональных латинских квадрата с символами $2m + 1, 2m + 2, \dots, 3m$. За исключением E , второй латинский квадрат порядка $3m + 1$ получается из первого транспонированием. В случае $m = 3$ разбиение 10 на $7 + 3$ может быть замаскировано, так что этот эйлеров квадрат представится в более симметричной форме, указанной на форзаце.

История обнаружения ошибочности гипотезы Эйлера началась в 1922 г., когда Мак-Нейш построил t взаимно

ортогональных латинских квадратов порядка n , где t на единицу меньше, чем наименьшая (положительная) степень простого числа, входящая в разложение числа n на степени простых чисел. Далее Мак-Нейш предположил, что для любого n существует не более t таких квадратов. Тогда для $n = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, т. е. для рассматриваемого случая, эйлеровых квадратов не должно было бы существовать. Однако в 1959 г. Паркер доказал ошибочность гипотезы Мак-Нейша, построив с помощью проективной плоскости $PG(2, 2^2)$ 3 взаимно ортогональных квадрата порядка 21. Далее Боуз и Шрикхенд, используя обобщение блок-схем с блоками неодинакового размера, построили 5 взаимно ортогональных латинских квадратов порядка 50, доказав ошибочность гипотезы Эйлера. Используя модифицированные системы Киркмана, они построили также эйлеров квадрат порядка 22. Потом Паркер обнаружил эйлеров квадрат порядка 10. В последующие недели эти три математика разобрали все оставшиеся случаи и пришли к сформулированному выше результату.

Газеты всего мира «кричали» о том, что гипотеза Эйлера опровергнута. «Нью-Йорк таймс» от 26 апреля 1959 г. опубликовала пространную статью и рисунок. Хотя на этом рисунке можно было увидеть лишь часть эйлерова квадрата, десятки школьников сумели восполнить недостающую часть.

В заключении этого раздела рассмотрим простую конструкцию для латинских квадратов, которые ортогональны квадратам, полученным из них транспонированием. Пусть $GF(q)$ — поле Галуа, причем $q \neq 2, 3$ [например, $GF(q)$ — поле вычетов по простому модулю $q > 3$]. Пусть λ — фиксированный элемент поля $GF(q)$ (но $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 1/2$). Рассмотрим матрицу

$$[\lambda a + (1 - \lambda) b],$$

где a и b пробегают $GF(q)$. Легко видеть, что ни одна строка и ни один столбец не содержат ни одного элемента поля $GF(q)$ дважды. Таким образом, эта матрица — латинский квадрат. Более того, сама эта матрица и транспонированная к ней матрица $[\lambda b + (1 - \lambda) a]$ составляют эйлеров квадрат. Действительно, если $\lambda a + (1 - \lambda) b = \lambda c + (1 - \lambda) d$ и $\lambda b + (1 - \lambda) a = \lambda d + (1 - \lambda) c$, то $a + b = c + d$, и, подставляя в первое равенство $a = c + d - b$, получаем

$$(1 - 2\lambda) b = (1 - 2\lambda) d,$$

откуда следует, что $b = d$ и $a = c$. Стандартными методами эту конструкцию можно обобщить на случай матриц произвольного порядка n , в разложение которого на степени простых чисел не входят 2 или 3 в первой степени. Вот пример, основанный на поле $GF(2^3)$:

0	3	5	6	7	1	4	2
2	1	4	7	6	3	5	0
4	7	2	1	3	6	0	5
5	6	0	3	1	7	2	4
3	0	6	5	4	2	7	1
7	4	1	2	0	5	3	6
1	2	7	4	5	0	6	3
6	5	3	0	2	4	1	7

Куб и симплекс. За отправную точку мы возьмем здесь обычный куб в обычном (трехмерном) пространстве. В качестве координат его вершин мы иногда будем использовать цифры 0 и 1 (это отвечает случаю, когда начало координат совпадает с одной из вершин куба, длина ребра которого равна 1, а сам куб расположен в первом октанте трехмерного пространства — рис. 10.9, а); иногда цифры $+1$ и -1 (в этом случае начало координат совпадает с центром куба, а длина ребра куба равна 2 — рис. 10.9, б). *Кубический граф* (рис. 10.9, в) — это множество, состоящее из 8 вершин

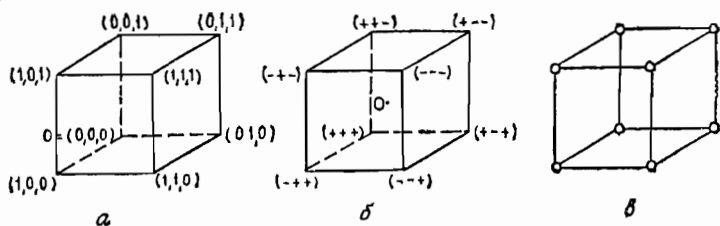


Рис. 10.9

вместе с 12 ребрами, соединяющими вершины, которые различаются одной координатой.

n-Мерный куб в n -мерном пространстве имеет 2^n вершин, а именно множество V точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где каждое из x_i равно 0 или 1. Множество E его ребер состоит из пар вершин, которые различаются одной координатой.

Назовем *n-мерным симплексом* в n -мерном пространстве многогранник, имеющий $n + 1$ вершин, равноуда-

ленных друг от друга. Ясно, что частными случаями n -мерного симплекса являются равносторонний треугольник ($n=2$, рис. 10.10, а) и правильный тетраэдр ($n=3$; рис. 10.10, б). Можно также определить n -мерный симплекс $(n+1)$ -ками $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, 1)$, т. е. $n+1$ точками $(n+1)$ -мерного пространства, принадлежащими осям координат и n -мерному подпространству, задаваемому уравнением $x_1 + \dots + x_{n+1} = 1$ (рис. 10.10, в).

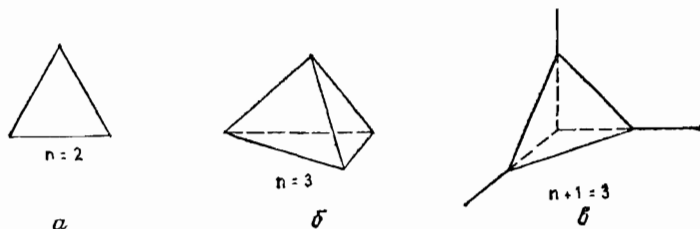


Рис. 10.10

Матрицы Адамара. Можно ли выбрать из 8 вершин 3-мерного куба (см. рис. 10.9, б) 4 вершины, которые образовывали бы правильный тетраэдр? Утвердительный ответ на этот вопрос дают векторы

$$(+ + +), (+ - -), (- + -), (- - +),$$

длина каждого из которых равна $\sqrt{3}$, а попарные скалярные произведения (см. с. 295) равны -1 (ср. с. 147). Добавив дополнительную постоянную координату $x_0 = +1$, мы получаем матрицу

$$H_4 = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix},$$

в которой скалярное произведение любой пары строк равно 0. Значит, H_4 — это матрица Адамара порядка 4. На с. 295 построена матрица Адамара порядка 8, а на с. 324 — порядка 12.

Матрица Адамара H_r — это квадратная матрица порядка r с элементами $+1$ и -1 , строки которой попарно ортогональны:

$$H_r H_r^T = rI.$$

Задача построения матриц Адамара H , порядка r эквивалентна [17] задаче выбора в $(r-1)$ -мерном пространстве таких r из 2^{r-1} вершин $(r-1)$ -мерного куба, которые образовывали бы $(r-1)$ -мерный симплекс. Очевидно, что для $r=3$ этого сделать нельзя. Действительно, для существования матрицы H , необходимо, чтобы было

$$r=2 \quad \text{или} \quad r=4s,$$

где s — положительное целое число.

Было высказано предположение, что это необходимое условие является также достаточным. Оно было проверено для всех $r < 188$ и для бесконечного множества других r . Следующая итеративная конструкция для бесконечного ряда матриц Адамара порядка 2^t ($t=1, 2, 3, \dots$) восходит к Сильвестру (см. с. 119):

$$H_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}, \quad H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix}.$$

Матрица H_4 , построенная выше с помощью куба, после перестановки, например, первого и второго столбцов обращается в эту матрицу H_4 . Матрица Адамара, построенная на с. 295, совпадает с нашей матрицей H_8 с точностью до перестановки строк или столбцов и умножения на -1 .

Из матрицы H_{32} , полученной с помощью этой итеративной конструкции, мы образуем (32×64) -матрицу

$$[H_{32} \quad -H_{32}].$$

Ссылаясь снова на с. 295, где разобран случай $r=8$, заметим, что столбцы этой матрицы образуют линейный $(32,6)$ -код, исправляющий 7 ошибок. В марте 1969 г. к планете Марс был запущен космический корабль «Маринер». Код, который использовала его быстросействующая телеметрическая система, был основан на описанном выше $(32,6)$ -коде [18].

Телевидение. Предположим, что нам нужно установить взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин n -мерного кубического графа (с множеством ребер E) и множеством чисел $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$:

$$\varphi: V \leftrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}.$$

Для $n=3$ существует $(2^3)! = 40\,320$ способов, три из которых представлены на рис. 10.11, а — в. Мы хотим

выяснить, какое из этих Φ минимизирует значение функции

$$\Phi = \sum_{(v, w) \in E} [\varphi(v) - \varphi(w)]^2.$$

В примерах, приведенных на рис. 10.11, $a - в$, Φ соответственно равно 84, 86, 108, так что первое соответствие — наилучшее из этих трех. Не вычисляя Φ для всех 40 320 случаев, мы докажем, что для $n = 3$ это соответствие по существу оптимально — оно лучше всех, существенно от него отличающихся.

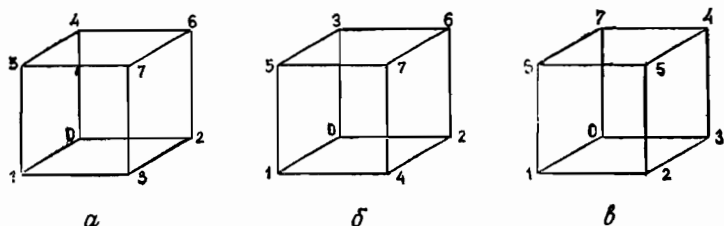


Рис. 10.11. Естественный код, $\Phi = 84$ (а); $\Phi = 86$ (б); код Грэя, $\Phi = 108$ (в)

Назовем вершину v **нечетной** (**четной**), если среди ее координат имеется нечетное (четное) число единиц. Пусть v^c — вершина, противоположная v , т. е. элемент множества вершин V , который отличается от v на всех координатах, например $(0, 1, 0)^c = (1, 0, 1)$. Тогда для $n = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{(v, w) \in E} [\varphi(v) - \varphi(w)]^2 &= 3 \sum_{v \in V} \varphi^2(v) - 2 \sum_{(v, w) \in E} \varphi(v) \varphi(w) = \\ &= 3 \sum_{v \in V} \varphi^2(v) - 2 \sum_{v \text{ неч.}} \varphi(v) \sum_{w \text{ чет.}} \varphi(w) + 2 \sum_{v, v^c \in V} \varphi(v) \varphi(v^c). \end{aligned}$$

Первый член, очевидно, не зависит от выбора соответствия φ . Второй, как легко видеть, максимален, если

$$\sum_{v \text{ неч.}} \varphi(v) = \sum_{w \text{ чет.}} \varphi(w) = 14;$$

это вытекает из того, что

$$\sum_{v \in V} \varphi(v) = 0 + 1 + \dots + 7 = 28.$$

Аналогичные соображения убеждают нас, что последний член минимален, если он состоит из следующих слагаемых: 0×7 , 1×6 , 2×5 , 3×4 . Нетрудно заметить,

что функция

$$\Phi(v) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i 2^i$$

удовлетворяет обоим этим условиям, а значит, минимизирует Φ . Поскольку **единственное** решение для

$$\sum_{v \text{ неч.}} \Phi(v) = n_1 + n_2 + n_3 + 7 = 14, \quad 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq 6,$$

есть $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 4$, то Φ (с точностью до очевидных перестановок) **единственно**. Полученное выше решение *естественно*: оно ставит в соответствие каждой вершине то число $\sum v_i 2^i$, двоичная запись которого задается последовательностью координат этой вершины.

Эта математическая задача имеет практические следствия. На языке инженеров структура двоичного симметричного канала с блоками длиной n и с малой вероятностью ошибки, где считаются допустимыми лишь **одиначные** ошибки (т. е. ошибки в единственном из образующих блок n сигналов), может быть описана n -мерным кубическим графом; здесь *соседними* (или *смежными*) считаются блоки, различающиеся в единственном сигнале. Предположим, что нужно передать числовые данные $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, например 2^n уровней яркости одной из тысячи частей картины. Тогда соответствие Φ становится *кодом*, где набор координат вершины v задает *кодовое обозначение* величины $\Phi(v)$ и сумма

$$\sum_{(v, w) \in E} [\Phi(v) - \Phi(w)]^2$$

пропорциональна мощности шума (помех), который, очевидно, желательно минимизировать. Как известно, и естественный код, и код Грэя минимизируют «среднюю абсолютную ошибку»

$$\sum_{(v, w) \in E} |\Phi(v) - \Phi(w)|,$$

но при этом естественный код минимизирует мощность шума, а код Грэя максимизирует ее. Следовательно, влияние ошибок сильнее при коде Грэя. Недавно было получено решение более общей задачи для всех n [19].

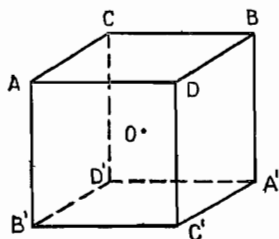
Равноугольные множества прямых в 3-мерном пространстве. Вернемся к кубу $(ADBC)(B'C'A'D')$ с центром O (рис. 10.12, а). Очевидно, что углы между век-

торами OA, OB, OC, OD задаются соотношениями

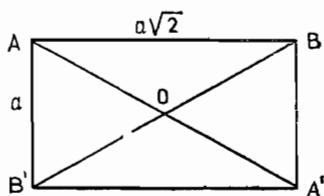
$$\cos AOD = \cos DOB = \cos BOC = \cos COA = 1/3,$$

$$\cos AOB = \cos COD = -1/3$$

(в этом легко убедиться, рассмотрев диагональные плоскости, — см. рис. 10.12, б). Отсюда следует, что все пары из 4 диагоналей AA', BB', CC', DD' куба образуют ме-



а



б

Рис. 10.12

жду собой одинаковые углы, если определить угол между двумя прямыми как наименьший из двух дополнительных углов, образуемых этими прямыми. Назовем

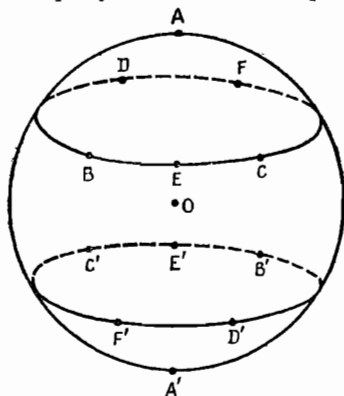


Рис. 10.13

множество прямых *равноугольным*, если все углы между парами прямых этого множества одинаковы. Таким образом, мы нашли равноугольное множество, состоящее из 4 прямых.

Можно поступить и лучше. Действительно, рассмотрим 6 прямых, которые соединяют пары противоположных вершин икосаэдра (рис. 10.13). Элементарные со-

ображения симметрии позволяют убедиться, что 6 диагоналей AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , FF' икосаэдра также образуют равноугольное множество прямых. Можно показать, что 6 — это максимальное число прямых равноугольного множества в 3-мерном пространстве и что указанное множество по существу единственно. Кроме того, имеется лишь одно равноугольное множество из 5 прямых, которое получается из предыдущего удалением одной из диагоналей. Однако существуют два разных равноугольных множества, состоящих из 4 прямых, — одно получается из икосаэдра, если удалить любые две диагонали, а второе (оно было описано выше) * — из куба.

Как в случае равноугольного четырехэлементного множества, полученного из куба, так и в случае равноугольного шестиэлементного множества, полученного из икосаэдра, рассмотрим единичные векторы $p_1, p_2, p_3, \dots$, направленные вдоль рассматриваемых прямых от O к $A, B, C, \dots$. Так как все скалярные произведения этих единичных векторов удовлетворяют условию $|p_i \cdot p_j| = \cos \varphi$, где φ — угол между этими векторами, то матрица P скалярных произведений имеет вид

$$P = [(p_i \cdot p_j)] = \begin{bmatrix} 1 & \pm \cos \varphi & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \pm \cos \varphi & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычитая отсюда диагональные элементы и деля полученный результат на $\cos \varphi$, приходим к матрице

$$A = [P - I] \sec \varphi,$$

которая в наших примерах имеет вид

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & - & + & + \\ - & 0 & + & + \\ + & + & 0 & - \\ + & + & - & 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & + & + & + \\ + & 0 & - & + & + & - \\ + & - & 0 & - & + & + \\ + & + & - & 0 & - & + \\ + & + & + & - & 0 & - \\ + & - & + & + & - & 0 \end{bmatrix}.$$

* Прямые из этих двух равноугольных множеств параллельны ребрам двух видов ромбических додекаэдров: додекаэдра Биллинского (см. с. 157) и классического додекаэдра.

Эти матрицы указывают, какие пары векторов из $OA, OB, OC, \dots$ образуют острый угол (косинус положителен), а какие — тупой (косинус отрицателен). Каждую из этих матриц можно рассматривать как матрицу смежности некоторого графа, считая любые две из вершин $A, B, C, \dots$ смежными, если соответствующий элемент матрицы равен -1 , и несмежными — в противном

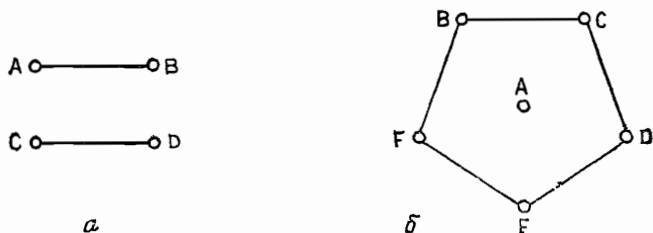


Рис. 10.14

случае (рис. 10.14). На этих матрицах и соответствующих им графах основаны наши дальнейшие рассуждения. Простой проверкой можно убедиться, что матрицы A_4 и A_6 удовлетворяют соотношениям ⁴

$$(A_4 - I_4)(A_4 + 3I_4) = 0, \quad A_4 J_4 = J_4; \quad A_6^2 = 5I_6.$$

Таким образом, A_6 — «почти ортогональная» матрица: скалярное произведение любых двух ее различных строк равно 0. Отсюда выводятся три следствия.

Во-первых, поскольку наименьшее *собственное значение* (или *характеристический корень*) матрицы A_6 равно $-\sqrt{5}$, а матрица P_6 имеет ранг 3 и не является отрицательно определенной, угол φ между диагоналями икосаэдра удовлетворяет условию — $\sec \varphi = -\sqrt{5}$, откуда $\cos \varphi = 1/\sqrt{5}$. Во-вторых, матрица

$$H_{12} = \begin{bmatrix} A_6 + I_6 & A_6 - I_6 \\ A_6 - I_6 & -A_6 - I_6 \end{bmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка 12.

Чтобы получить третье следствие [20], рассмотрим 12 столбцов $c_1, c_2, \dots, c_{12}$ (6×12)-матрицы

$$[A_6 \ I_6]$$

как 6-мерные векторы над полем $GF(3)$. Можно проверить, что никакие 5 из них не будут линейно-зависимы.

ми. Это означает, что в каждом множестве чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ из $\{0, 1, -1\}$, таких, что

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_{12} c_{12} = 0,$$

по крайней мере 6 чисел отлично от нуля. Легко указать такие множества чисел, а именно 6 строк матрицы

$$[I_6 - A_6]$$

и все 3^6 линейных комбинаций этих строк. Это 6-мерное пространство 12-мерных векторов над полем $GF(3)$ является (в терминологии, аналогичной той, что мы использовали на с. 296) тричным линейным $(12, 6)$ -кодом. Поскольку расстояния между всеми его векторами больше или равны 6, то это код, исправляющий 2 ошибки и обнаруживающий 3 ошибки. Исключив одну координату, мы получим $(11, 6)$ -код с минимальным расстоянием 5. Значит, любые два шара радиусом 2 с центрами, задаваемыми векторами получившегося 6-мерного подпространства тричного 11-мерного векторного пространства, не пересекаются. В этом пространстве всего 3^{11} векторов, из которых 3^6 лежат в рассматриваемом подпространстве и $1 + 22 + 220$ — в каждом из таких шаров; следовательно, эти шары исчерпывают все пространство. Значит, тричный линейный $(11, 6)$ -код, исправляющий 2 ошибки, является совершенным. Этот код был найден Голеем [21] вместе с совершенным двоичным линейным $(23, 12)$ -кодом, исправляющим 3 ошибки. Эти два кода — единственные нетривиальные совершенные коды, исправляющие больше чем одну ошибку [22].

Прямые в многомерных пространствах. Сделав отступление, обратимся к пространствам большего числа измерений. Какие равноугольные множества прямых существуют в 7-мерном пространстве? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим 7-мерный симплекс в 8-мерном пространстве, 8 вершин которого представлены векторами

$$(8, 0, 0, \dots, 0), (0, 8, 0, \dots, 0) \text{ и т. д.}$$

Гиперплоскость 8-мерного пространства, определяемая уравнением $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 8$, которая содержит эти 8 вершин, параллельна гиперплоскости $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0$. При (параллельном) переносе, переводящем первую гиперплоскость во вторую, наши вершины переходят в

$$(7, -1, -1, \dots, -1), (-1, 7, -1, \dots, -1) \text{ и т. д.,}$$

а 28 точек $P_{h,i}$ ($h < i$; $h, i = 1, \dots, 8$), отмечающих середины ребер получившегося 7-мерного симплекса, — это

$$P_{1,2} = (3, 3, -1, -1, -1, -1, -1),$$

$$P_{1,3} = (3, -1, 3, -1, -1, -1, -1),$$

$$P_{3,4} = (-1, -1, 3, 3, -1, -1, -1) \text{ и т. д.}$$

Тогда 28 прямых, соединяющих начало координат O с точками $P_{h,i}$, образуют равноугольное множество с $\cos \varphi = 1/3$. Действительно, вектор $OP_{h,i}$ имеет длину $\sqrt{24}$, а попарные скалярные произведения таких векторов равны ± 8 . Угол между векторами $OP_{h,i}$ и $OP_{j,k}$ острый, если у их пар индексов есть общий элемент, и

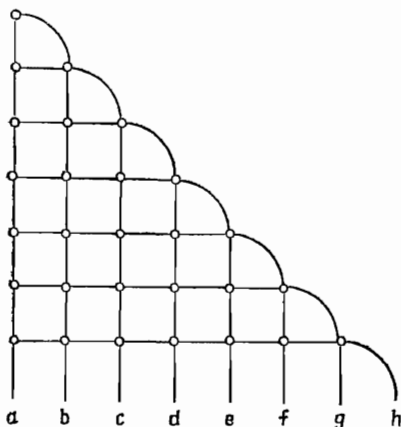


Рис. 10.15. $T(8)$ на символах $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

тупой, если общего элемента нет. Граф, соответствующий этой конфигурации (по поводу того, как строить такой граф, см. с. 324), является дополнением треугольного графа $T(8)$ (рис. 10.15)*. Треугольный граф $T(n)$ порядка n ($n > 3$) состоит из $n(n-1)/2$ неупорядоченных пар из n символов, где две пары считаются смежными, когда у них есть один общий символ. Например, в $T(8)$ у вершины ab есть 12 смежных вершин ij , где либо i , либо j равно a или b .

Построив равноугольное множество $P_{h,i}$ ($h < i$; $h, i = 1, 2, \dots, 8$) из 28 прямых** в 7-мерном простран-

* Отметим, что на этом и последующих рисунках часть ребер графа опущена. — Прим. перев.

** Эти прямые соединяют пары противоположных вершин многогранника 3_{21} (см. [23]).

стве, спустимся в 6-мерное. Подмножество множества $\{P_{h,i}\}$, удовлетворяющее условию

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0, \quad x_1 = x_0,$$

содержит 16 точек $P_{1,2}$ и $P_{j,k}$ ($j < k$; $j, k = 3, \dots, 8$). Прямые, соединяющие начало координат с этими точками, порождают все 6-мерное пространство и составляют равноугольное множество из 16 прямых с $\cos \varphi = 1/3$. Это множество можно получить более легким путем. Для этого снова рассмотрим множество S 3-мерных векторов.

$$(+++), \quad (---), \quad (-+-), \quad (- - +),$$

данных на с. 318). Попарные скалярные произведения 6-мерных векторов, первые 3 и последние 3 координаты

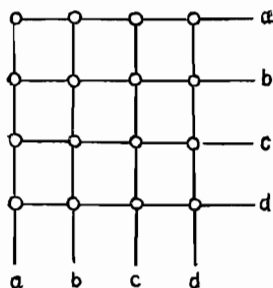
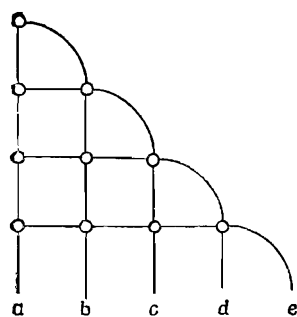


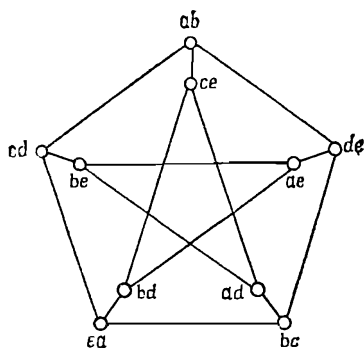
Рис. 10.16. $L(4)$ на символах $\{a, b, c, d\}$

которых независимо пробегают S , равны ± 2 , и эти 16 векторов образуют искомое множество. Граф, соответствующий этой конфигурации, является дополнением решеточного графа $L(4)$ (рис. 10.16). Решеточный граф $L(n)$ порядка n ($n > 1$) состоит из n^2 упорядоченных пар из n символов, где две пары считаются смежными тогда и только тогда, когда у них одна из координат одинакова. Например, в $L(4)$ вершина (a, a) смежна с вершинами (a, b) , (a, c) , (a, d) , (b, a) , (c, a) , (d, a) .

Спускаясь в 5-мерное пространство, мы замечаем, что подмножество 28-элементного множества $\{P_{h,i}\}$, которое удовлетворяет условию $x_1 = x_2 = x_3$, состоит из 10 точек $P_{j,k}$ ($j < k$; $j, k = 4, \dots, 8$) и определяет 10-элементное равноугольное множество в 5-мерном пространстве с $\cos \varphi = 1/3$. Граф, соответствующий этой конфигурации, является дополнением треугольного гра-



a



б

Рис 10.17. $T(5)$ (*a*); граф Петерсена (*б*)

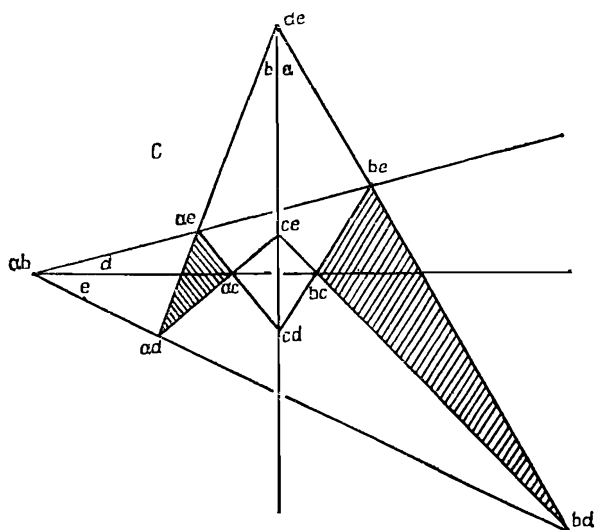


Рис. 10.18. Конфигурация Дезарга

фа $T(5)$ (рис. 10.17, *a*) и называется графом Петерсена (рис. 10.17, *б*; см. также с. 244). Эти графы тесно связаны с конфигурацией Дезарга (рис. 10.18), которая определяется десятью точками и десятью прямыми, расположенными на плоскости следующим образом. Треугольники ac , ad , ae и bc , bd , be перспективны с центром перспективы в точке ab , и их стороны пересекаются в коллинеарных точках cd , de , ce . Эту конфигурацию можно рассматривать как фигуру, образованную пере-

сечением пяти плоскостей a, b, c, d, e в 3-мерном пространстве. (Мы помечаем каждую точку пересечения двумя символами, соответствующими тем плоскостям, которые через нее не проходят.)

Будем считать две точки конфигурации Дезарга смежными, если они принадлежат некоторой прямой [не принадлежат никакой прямой] этой конфигурации. Тогда из нее получится треугольный граф [граф Петерсена].



Рис. 10.19

Чтобы получить из 28-элементного множества $\{P_{h,i}\}$ равноугольные множества в 4-мерном и 3-мерном пространствах, положим соответственно $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. В первом случае мы получим 6 прямых в 4-мерном пространстве, а отвечающий им



Рис. 10.20

граф — это лестничный граф с тремя ступеньками, дополнительный к $T(4)$ (рис. 10.19). Второй случай дает 4 прямые в 3-мерном пространстве. Их граф — это дополнение к $L(2)$, т. е. лестничный граф с двумя ступеньками (см. рис. 10.20). Таким образом, мы вернулись к тому, с чего начинали (см. с. 322), — к 4 диагоналям 3-мерного куба.

Приведенные выше примеры оптимальны в следующем смысле. Пусть $v(n)$ — наибольшее число прямых в n -мерном пространстве, образующих между собой равные углы. Известно [24], что $v(2)=3$, $v(3)=v(4)=6$, $v(5)=10$, $v(6)=16$, $v(7)=28$, $v(15)=36$, $v(22)=176$, $v(23)=276$. Таким образом, двадцативосьмизлементное

множество с $\cos \varphi = 1/3$ в 7-мерном пространстве нельзя расширить.

С другой стороны, разумеется, существуют множества прямых, составляющие два угла, причем один из них равен $\arccos 1/3$. Так, в 24-мерном пространстве существует «двуугольное» множество, состоящее из 2048 прямых, с $\cos \varphi = 1/3$ и $\cos \psi = 0$. Это множество тесно связано с совершенным (23, 12)-кодом Голея (см. с. 325). Кроме того, это множество связано с плотной сферической упаковкой в 24-мерном пространстве. Еще более плотная сферическая упаковка [25] 24-мерного пространства соответствует «треугольному» множеству из 98 280 прямых с $\cos \varphi = 1/4$, $\cos \psi = 1/2$, $\cos \chi = 0$. Группа автоморфизмов этого множества играет важную роль в теории конечных простых групп [26].

С-матрицы

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & + & + & + \\ + & 0 & + & - & - & + \\ + & + & 0 & + & - & - \\ + & - & + & 0 & + & - \\ + & - & - & + & 0 & + \\ + & + & - & - & + & 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & + \\ - & 0 & - & + \\ - & + & 0 & - \\ - & - & + & 0 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы, первая из которых напоминает матрицу для икосаэдрального графа (см. с. 323), представляют собой примеры С-матриц. Они почти ортогональны, ибо скалярное произведение любой пары строк каждой из этих матриц равно нулю. *С-матрицей* называется любая симметрическая или кососимметрическая матрица C порядка v с нулями на главной диагонали и $+1$ и -1 на остальных местах, удовлетворяющая условию

$$CC^T = (v - 1)I,$$

Рассмотрим два приложения таких матриц.

Допустим, что v директоров какой-то компании решили провести совещание по телефону, причем так, чтобы любой директор мог разговаривать с каждым из своих коллег, а все остальные при этом имели возможность слушать их беседу. Построение такой конференц-сети линий связи (линейной, без потерь, с полноступными v пользователями, не зависящей от частоты, с равномерным распределением и нулевым отражением) эквивалентно построению С-матрицы [27].

Какая схема взвешивания «наилучшая», если нужно взвесить v объектов за v взвешиваний (при конкретных условиях и когда определено, что значит «наилучшая»)? Стратегия взвешивания описывается матрицей C , заданной своими элементами c_{ij} :

$c_{ij} = 1$, если объект j при взвешивании i находится на левой чашке весов;

$c_{ij} = -1$, если объект j при взвешивании i находится на правой чашке;

$c_{ij} = 0$, если объект j во взвешивании i не участвует.

Для $v \equiv 0 \pmod{4}$ наилучшая схема взвешивания задается матрицей Адамара, а для $v \equiv 2 \pmod{4}$ — симметрической C -матрицей [28].

Кососимметрическая C -матрица порядка v может существовать лишь в том случае, когда v делится на 4. Симметрическая матрица порядка v может существовать, только если $v - 2$ делится на 4, а $v - 1$ представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел. Но целое число равно сумме двух квадратов тогда и только тогда⁵, когда после выделения наибольшего квадрата оставшийся сомножитель не содержит простых множителей, сравнимых с 3 по модулю 4. Таким образом, не существует симметрической C -матрицы порядка 22.

Мы уже встречались с C -матрицами порядка 4, 6, 10 (матрица смежности графа Петерсена). Для примера приведем конструкцию для C -матрицы порядка 8. Этот метод, предложенный Пэли*, можно распространить на все случаи, когда $v - 1$ есть степень нечетного простого числа.

Классы вычетов по модулю 7 — это числа, кратные 7, плюс соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Обозначим их через $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Ясно, что a_1, a_2 и a_4 — это квадраты, а a_3, a_5 и a_6 — неквадраты. Любому классу $a_i - a_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) припишем

0, если $a_i - a_j = a_0$,

+1, если $a_i - a_j$ — ненулевой квадрат,

-1, если $a_i - a_j$ — неквадрат.

Матрица из этих «символов Лежандра» — циркулянт порядка 7 с первой строкой $(0 - - + - + +)$. Окайм-

* См. [7] в литературе к гл. IV.

для ее, получим кососимметрическую C -матрицу

$$C_8 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & + & + & + & + & + \\ - & 0 & - & - & + & - & + & + \\ - & + & 0 & - & - & + & - & + \\ - & + & + & 0 & - & - & + & - \\ - & - & + & + & 0 & - & - & + \\ - & + & - & + & + & 0 & - & - \\ - & - & + & - & + & + & 0 & - \\ - & - & - & + & - & + & + & 0 \end{bmatrix}$$

Проективные плоскости. 7 вершин 6-мерного симплекса можно представить следующими 7 точками 7-мерного пространства:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \dots \\ \dots, (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Тогда 35 центров треугольников этого 6-мерного симплекса имеют координаты

$$\frac{1}{3}(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), \frac{1}{3}(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \text{ и т. д.}$$

Займемся таким вопросом. Можно ли из них выбрать 7 точек так, чтобы они снова образовали 6-мерный симплекс? Если да, то выбранные центры будут находиться на равных расстояниях друг от друга. Тогда у любых двух из них должна быть одна общая координата, равная единице. Это возвращает нас к исходному пункту (см. с. 292). Действительно, 7 строк матрицы инцидентности проективной плоскости $PG(2, 2)$ составляют решение нашей задачи.

Рассмотрим теперь вкратце и чисто формально некоторые из комбинаторных схем, с которыми мы встретились в этой главе.

Пусть V — конечное множество из v элементов, а k и λ — такие целые числа, что $0 < k < v - 1$ и $0 < \lambda$. Тогда (уравновешенная неполная) *блок-схема* (v, k, λ) — это набор таких k -подмножеств множества V , что каждое 2-подмножество содержится в λ из этих k -подмножеств. Примерами служат системы троек Штейнера порядка v с $k = 3$ и $\lambda = 1$.

Блок-схема называется *симметрической*, если число ее k -подмножеств равно числу элементов в V . Пример: любая нормированная матрица Адамара порядка

$4t \geq 8$ эквивалентна симметрической блок-схеме с

$$v = 4t - 1, \quad k = 2t - 1, \quad \lambda = t - 1.$$

Конечная проективная плоскость порядка n — это симметрическая блок-схема с

$$v = n^2 + n + 1, \quad k = n + 1, \quad \lambda = 1.$$

Элементами множества V являются точки, а k -подмножествами — прямые этой плоскости. Полное множество попарно ортогональных латинских квадратов порядка n , состоящее из $n - 1$ квадратов, эквивалентно проективной плоскости порядка n .

Далеко не для всякого набора v, k, λ можно построить блок-схему с этими параметрами. Известны некоторые «теоремы несуществования», построены некоторые серии блок-схем, но в большинстве случаев не ясно, можно построить соответствующую блок-схему или нет. Конечные проективные плоскости построены только для порядков, равных степени простого числа. Одна теорема несуществования [29] доказана Бруком и Райзером: если для n выполняются условия $n \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$ и $n \neq a^2 + b^2$, где a и b — целые числа, то не существует проектной плоскости порядка n . Тем самым исключен случай $n = 6$. Первый сомнительный случай — это $n = 10$. Подробнее эта тема освещена в других книгах [30].

1. Steiner J. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1853, vol. XLV, pp. 181—182.
2. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970, с. 328.
3. Miller G. A., Blüchfeldt H. F., Dickson L. E. *Theory and Applications of Finite Groups*. — New York: Dover, 1961, p. 335.
4. Коксетер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966, гл. 15, 16.
5. Cole F. N., White A. S., Cummings L. D. *Memoirs of National Academy of Sciences (USA)*, 1925, vol. XIV, Second Memoir, p. 89.
6. Von Staudt K. G. C. *Beiträge zur Geometrie der Lage*, vol. I. — Nürnberg, 1856.
7. Fano G. *Giornale di Matematiche*, 1892, vol. XXX, pp. 114—121.
8. Veblen O., Bussey W. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1906, vol. VII, pp. 241—259.
9. Coxeter H. S. M. *Projective Geometry*. — Toronto: University of Toronto Press, 1974, p. 112.
10. Холл М. Теория групп. — М.: Мир, 1962, гл. 20.
11. Singer J. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1938, vol. XLIII, pp. 377—385.

12. Kirkman T. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1847, vol. II, pp. 191—204.
13. Ray-Chaudhuri D. K., Wilson R. M. *Proceedings Symposia Pure Mathematics Combinatorics*, 1971, vol. LXX, pp. 187—203.
14. Mulder P. Kirkman-Systemen. — Leiden: Groningen Dissertation, 1917; Cole F. N. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1922, vol. XXVIII, pp. 435—437.
15. Bose R. C., Shrikhande S. S., Parker E. T. *Canadian Journal of Mathematics*, 1960, vol. XII, pp. 189—203.
16. Kesava Menon P. *Sankhya*, 1961, vol. A XXIII, pp. 281—282.
17. Coxeter H. S. M. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. XII, pp. 334—345.
18. Posner E. C. Combinatorial Structures in Planetary Reconnaissance, in: Mann H. B. Error Correcting Codes. — New York, 1968.
19. *IEEE Transactions. Information Theory*, 1969, vol. IT-15, pp. 72—78.
20. Bose R. C. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 1961, vol. XXXVIII, pp. 257—271.
21. Golay M. *Proceedings of Institute of Radio Engineers*, 1949, vol. XXXVII, p. 637.
22. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. — М.: Мир, 1971; von Lint J. H. Coding Theory, Lecture Notes in Mathematics 201. — Berlin: Springer, 1971.
23. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. — New York, 1973, p. 203; см. также *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928, vol. XXIV, pp. 1—9.
24. Van Lint J. H., Seidel J. J. *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen te Amsterdam; Proceedings*, 1966, vol. A LXIX, pp. 335—348.
25. Leech J. *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, vol. LXX, pp. 251—267.
26. Conway J. H. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1969, vol. I, pp. 79—88.
27. Belevich V. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1968, vol. LXXXII, pp. 13—32.
28. Raghavarao D. Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments. — New York, 1971.
29. Bruck R. H., Ryser H. J. *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, vol. I, pp. 88—93.
30. Dembowski P. Finite Geometries. — Berlin, 1968; Райзер Г. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966.

ГЛАВА XI

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе мы обсудим теорию некоторых широко распространенных развлечений и игр математического характера. Их вполне можно было бы включить в первые четыре главы настоящей книги, но так как они базируются на смеси алгебры и геометрии, то мне трудно было решить, следует их отнести к гл. I—II или к гл. III—IV. Да, пожалуй, удобнее разбирать эти новые задачи после тех, которые уже были нами описаны. Такой порядок, однако, диктуется исключительно соображениями удобства, а вовсе не какими-либо принципиальными соображениями логического характера.

Большинство из приведенных здесь задач совершенно не связаны друг с другом, и я кратко опишу их в достаточно произвольном порядке.

Я разберу такие популярные развлечения, как «Игра в 15», «Ханойская башня» и «Китайские кольца» («мелёда»), а также несколько задач, в которых используется колода карт.

ИГРА В 15*

Несколько лет назад в магазинах игрушек Лондона появилась так называемая «Игра в 15»**. Она представляла собой плоскую квадратную коробочку (на одной из ее сторон помечено «верх»), в которой лежат 15 кубиков или квадратных фишек, пронумерованных числами 1, 2, 3, ... — и так до 15. Всего в коробочке может поместиться 16 таких фишек, но поскольку их лежит только 15, то одно место остается свободным и

* Две статьи на эту тему (принадлежащие В. Джонсону и Стори) были опубликованы в 1879 г. в журнале *American Journal of Mathematics* (vol. II); однако вся теория игры непосредственно выводится из утверждения, приведенного мною далее в тексте.

** У автора речь идет о 70-х годах прошлого века — именно тогда эта игра появилась впервые. Однако многие из читателей, вероятно, помнят, что в нашей стране «Игра в 15» была очень популярна в начале 50-х годов (уже нашего века!). — *Прим. перев.*

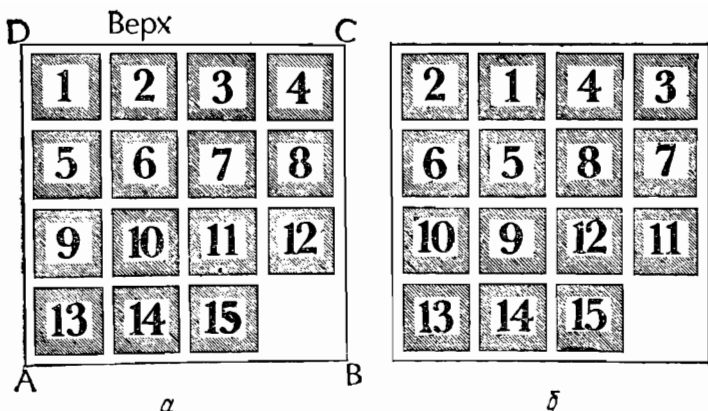


Рис. 11.1

фишки в коробочке можно передвигать. Первоначально они расположены произвольным образом. Игра состоит в том, чтобы, последовательно передвигая фишки, расположить их, как показано на рис. 11.1, *a*.

Представляя себе различные этапы игры, мы можем условиться считать, что в шестнадцатой клетке расположена «пустая фишка», которая сдвигается со своего места, возвращаясь на него в конце игры.

Путь, пройденный «пустой фишкой», частично складывается из «тупиковых» передвижений с последующим возвратом ее на то же место, которые не оказывают никакого влияния на расположение фишек. Второй вариант — это замкнутый («циклический») путь «пустой фишки», при прохождении которого нечетное число фишек обязательно циклически меняет свои места. Никаких других движений фишек в коробочке быть не может¹.

Циклическая перестановка n букв эквивалентна $n - 1$ транспозициям [т. е. перестановкам, при которых две (соседние) буквы меняются местами, а остальные остаются на месте]. Поэтому циклическая перестановка нечетного числа букв обязательно является произведением четного числа транспозиций. Значит, если мы передвигаем фишки так, чтобы «пустая фишка» вернулась в шестнадцатую ячейку, то новый порядок должен отличаться от первоначального на четное число транспозиций. Поэтому если порядок фишек, которого мы хотим добиться, можно получить из исходного порядка только

нечетным числом транспозиций, то поставленная задача неразрешима; если же его можно получить с помощью четного числа транспозиций, то задачу можно решить [1].

Расположение фишек, изображенное на рис. 11.1, б, можно получить из расположения на рис. 11.1, а с помощью шести транспозиций: достаточно поменять местами фишки 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12. Значит, одно расположение фишек можно получить от другого, передвигая фишки в коробочке.

Однако если бы на рис. 11.1, б последние три фишки стояли в таком порядке: 13, 15, 14, то потребовалось бы 7 транспозиций фишек, чтобы перевести их в исходный порядок (указанный на рис. 11.1, а). Следовательно, в этом случае задача была бы неразрешима.

Самый легкий путь определения числа транспозиций, необходимых для того, чтобы получить одно расположение из другого, — это разложить соответствующее преобразование в последовательность циклов. Допустим, например, что мы выкладываем фишки из коробки в определенном порядке, скажем последовательно по строкам слева направо, и пусть исходный и конечный порядки расположения фишек будут соответственно таковы:

1, 13, 2, 3, 5, 7, 12, 8, 15, 6, 9, 4, 11, 10, 14,
11, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 9, 10, 13, 12, 8, 14, 15.

Второй порядок можно получить из первого с помощью 12 транспозиций. Проще всего убедиться в этом, разбив процесс на три отдельных цикла:

1, 11, 8; | 13, 2, 3, 4, 12, 7, 6, 10, 14, 15, 9; | 5.
11, 8, 1; | 2, 3, 4, 12, 7, 6, 10, 14, 15, 9, 13; | 5.

Если в первой строке 11 поставлено на место 1, а затем 8 на место 11 и 1 на место 8, то мы осуществили циклическую перестановку трех чисел, которая эквивалентна двум транспозициям (а именно: надо поменять местами 1 и 11, а затем 1 и 8). Таким образом, весь процесс эквивалентен выполнению циклической перестановки трех чисел, затем другой циклической перестановки 11 чисел и еще одной — 1 числа, т. е. эквивалентен $2 + 10 + 0$ транспозициям. Это число четное, и, значит, один из указанных порядков можно получить из другого, передвигая фишки в коробочке.

Очевидно, что если начальное и конечное расположение различаются только тем, что последние три цифры в одном случае стоят в «перевернутом» порядке: 15, 14, 13, а во втором — в естественном («правильном») порядке: 13, 14, 15, то одно расположение переводится в другое с помощью одной транспозиции; значит, передвигая фишки в коробочке, мы никогда не сможем перейти от первого из этих расположений ко второму.

Если, однако, коробочка повернута вокруг одного из правых углов, так что сторона AD стала верхней, то этот поворот эквивалентен 13 транспозициям. В самом деле, если мы всегда оставляем пустым шестнадцатый квадрат, то такой поворот изменит порядок

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

13, 9, 5, 1, 14, 10, 6, 2, 15, 11, 7, 3, 12, 8, 4,

а это эквивалентно 13 транспозициям. Значит, поворот переводит расположение фишек, от которого нельзя перейти к «правильному», в расположение, для которого соответствующая задача разрешима (но только цифры на фишках будут теперь лежать «на боку»), и наоборот.

Однако даже если исходное расположение фишек не допускает решения задачи, но пустой является не последняя, а первая ячейка, то можно расположить все 15 фишек в их естественном порядке. Чтобы убедиться в этом, заметим, что переход от порядка фишек

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, п

к порядку

п, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

(буквой «п» мы поместили пустую ячейку) представляет собой циклическую перестановку 16 элементов, которая эквивалентна 15 транспозициям. Следовательно, перемещение пустой ячейки на первое место превращает расположение, для которого поставленная задача неразрешима, в расположение, для которого она вполне может быть решена, и наоборот.

Ясно, что сказанное выше в равной мере применимо и к прямоугольной коробочке, содержащей mn ячеек и $mn - 1$ перенумерованных фишек (разумеется, здесь m может и равняться n). Когда m и n оба четны (и в некоторых других случаях; например, при $m = 3$, $n = 5$),

поворот коробочки вокруг правого угла эквивалентен нечетному числу транспозиций и, таким образом, заменяет расположение, для которого задача неразрешима, расположением, для которого она разрешима. Точно так же, если числа m и n не являются оба нечетными и задачу нельзя решить, когда пустой остается последняя ячейка, ее можно решить, оставив пустой первую ячейку.

Задачу можно усложнить, установив в коробке перегородки, которые не будут допускать пересекающихся их движений фишек. Пит Хейн придумал подобную головоломку из кубиков, которую он назвал Bloxbox [2].

«ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ»

Расскажем теперь об оригинальной головоломке под названием «Ханойская башня». Ее придумал в 1883 г. Клаус (Люка)*.

Головоломка состоит из трех колышков, закрепленных на подставке, и восьми дисков из дерева или картона с отверстием посередине, через которое может пройти колышек. Все диски разного радиуса, и вначале все они надеты на один колышек, причем так, что наибольший диск лежит в самом низу и радиусы дисков убывают снизу вверх; таким образом, самый маленький диск лежит сверху. Эта фигура называется *башней*. Задача заключается в том, чтобы, перенося диски с одного колышка на другой (при этом не разрешается класть диск большего радиуса на диск меньшего радиуса и брать за один раз больше одного диска), снять всю башню (т. е. все диски в первоначальном порядке) с колышка, на который она была надета вначале, и построить ее заново на одном из двух других колышков.

Порядок действия таков. (i) Если первоначально все n дисков (пусть, например, $n = 8$) были надеты на колышек A , то первая операция — постепенно перенести $n - 1$ верхних дисков на колышек B , оставив колышек C свободным; предположим, что на это потребовалось x «ходов» (переносов отдельных дисков). (ii) Далее надо перенести нижний диск на колышек C (еще один ход). (iii) Затем, производя операции, аналогичные сделанным на шаге (i), нужно последовательно перенести $n - 1$ дисков с колышка B на колышек C , что потребует

* Клаус (Claus) — анаграмма фамилии изобретателя головоломки Эдуарда Люка (Lucas). — *Прим. перев.*

еще x ходов. Значит, если для того, чтобы перенести башню из $n - 1$ дисков, требуется x ходов, то для того, чтобы перенести башню из n дисков, нужно $2x + 1$ ходов. Для переноса башни из двух дисков, очевидно, необходимо 3, т. е. $2^2 - 1$, отдельных переноса; следовательно, для башни из трех дисков потребуется $2(2^2 - 1) + 1$, т. е. $2^3 - 1$ ходов. Продолжая рассуждать таким же образом, мы убедимся, что для полного переноса башни из n дисков необходимо совершить $2^n - 1$ ходов. В случае башни из восьми дисков, который мы избрали для описания головоломки, потребуется 255 ($=2^8 - 1$) ходов. Отметим, что все движения перемежаются переносами самого маленького диска с одного колышка на другой (и там и там этот диск, разумеется, должен быть верхним), причем эти переносы имеют циклический характер; более того, если диски последовательно пронумерованы числами 1, 2, 3, ..., начиная с наименьшего, то все диски с нечетными номерами обходят колышки в одном направлении, а с четными — в другом.

Диски можно заменить карточками, пронумерованными числами от 1 до n ; если n не превышает 10, то удобно использовать игральные карты.

В свое время де Парвиль привел столь занятное объяснение происхождения этой игрушки, что его стоит здесь повторить [3]. Он рассказывает, что в большом храме города Бенареса под куполом, накрывающим «центр вселенной», лежит медная плита, в которую вставлены три алмазные иглы длиной в локоть и толщиной с осиную талию. На одну из этих игл бог при сотворении мира надел шестьдесят четыре диска из чистого золота — самый большой из них лежит в самом низу на медной плите, и каждый диск, лежащий выше, меньше предыдущего. Это «Башня Брамь». День и ночь священнослужители неустанно переносят диски с одной алмазной иглы на другую, руководствуясь навеки установленными и непреложными законами Брамь, по которым священнослужитель не должен двигать зараз более одного диска и всегда должен так переносить этот диск на иглу, чтобы под ним не оказалось диска меньше его. Когда же, наконец, все 64 диска будут таким образом перенесены с той иглы, на которую бог поместил их при сотворении мира, на одну из двух других, то и башня, и храм, и сами брамины обратятся в прах — грянет гром, и мир исчезнет.

Число переносов, которые должны совершить браминны, чтобы перенести всю башню, равно $2^{64} - 1$, т. е. 18 446 744 073 709 551 615, а это потребует так много времени, что, когда прозвучит последний, завершающий удар грома, мир будет в тысячу раз старше, чем сейчас.

КИТАЙСКИЕ КОЛЬЦА *

Несколько более сложная игрушка, называемая «Китайские кольца» (или *меледа*), которая в конце прошлого века продавалась в Англии во многих магазинах игрушек, изображена на рис. 11.2. Она состоит из неко-

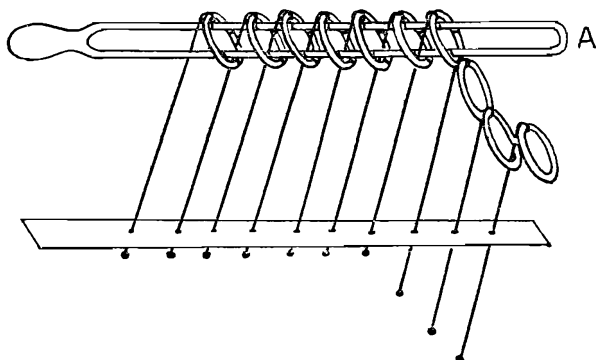


Рис. 11.2

торого числа колец, надетых на палочку таким образом, что на одном из ее концов, скажем на конце *A*, кольца можно по желанию надевать или снимать, но каждое кольцо можно снять или надеть на палочку только в том случае, когда следующее за ним (вправо) кольцо надето на палочку, а все остальные кольца, расположенные правее, сняты с нее. Порядок колец изменять нельзя.

Каждый раз снимается или надевается только одно кольцо. (В игре, которая обычно продавалась в магазинах, первые два кольца составляли исключение из правила: оба их можно было снять или надеть вместе. Чтобы упростить рассуждения, предположим сначала, что каждый раз снимается или надевается одно кольцо.) Я намерен показать, что если на палочку надето n ко-

* Эта игра описана Кардаио в 1550 г. [4] и Валлисом [5]; упоминания о ней встречаются также у Озанама (см. [2] в литературе к гл. I, изд. 1723 г., т. IV, с. 439).

лец, то, чтобы снять их все, необходимо снимать и надевать кольца $(2^{n+1} - 1)/3$ или $(2^{n+1} - 2)/3$ раз — в зависимости от того, нечетно или четно n .

Назовем снятие кольца с палочки или надевание его на нее *шагом*. Обычно кольца нумеруют, начиная со свободного конца A . Допустим, что вначале у нас первые m колец сняты с палочки, а остальные находятся на ней. Пусть, для того чтобы снять следующее кольцо, требуется $x - 1$ шагов; иначе говоря, $x - 1$ дополнительных шагов требуется для того, чтобы расположить кольца так, что с палочки будут сняты первые $m + 1$ из них, а остальные останутся надетыми на палочку. Ясно, что эти шаги преследуют своей целью создание ситуации, когда первые $m - 1$ колец будут сняты с палочки, а m -е кольцо надето [ибо только в таком положении мы можем снять $(m + 1)$ -е кольцо]; затем нам надо будет снять m -е кольцо, для чего понадобятся дополнительные ходы, задевающие кольца, предшествующие m -му. Таким образом, в наших $x - 1$ ходах участвуют кольца с номерами $1, 2, \dots, m + 1$, так как дальнейшие кольца в решении поставленной задачи не важны (их положение никак не учитывается). Но прежде чем проделать все эти шаги, мы можем снять $(m + 2)$ -е кольцо (еще 1 шаг!); таким образом, для того чтобы, начиная с нашей исходной позиции, снять $(m + 1)$ -е и $(m + 2)$ -е кольца, потребуется x шагов.

Пусть эти x шагов проделаны и, следовательно, первые $m + 2$ кольца сняты с палочки, а остальные находятся на ней; выясним теперь, сколько дополнительных шагов понадобится, чтобы снять еще и $(m + 3)$ -е и $(m + 4)$ -е кольца. Начнем с $(m + 4)$ -го кольца — на это нужен 1 шаг. Прежде чем мы сможем снять $(m + 3)$ -е кольцо, мы должны расположить кольца так, чтобы $(m + 2)$ -е кольцо находилось на палочке, а первые $m + 1$ колец — нет: для этого нужно (i) прийти к ситуации, когда $(m + 1)$ -е кольцо надето на палочку, а первые m колец сняты, — на это потребуется $x - 1$ шагов [это те же шаги, которые были нужны, чтобы снять $(m + 1)$ -е кольцо, но проведенные в обратном порядке]; (ii) затем надеть $(m + 2)$ -е кольцо, на что уйдет еще 1 шаг; (iii) и наконец, снять $(m + 1)$ -е кольцо, на что, как мы знаем, требуется $x - 1$ шагов, — на все это в целом уйдет $2(x - 1) + 1$ шагов. Далее мы можем снять $(m + 3)$ -е кольцо — еще за 1 шаг; при этом придем к ситуации, когда первые $m + 1$ колец сняты с палочки,

$(m+2)$ -е находится на ней, $(m+3)$ -е и $(m+4)$ -е сняты, а все остальные кольца надеты на палочку. Наконец, чтобы снять $(m+2)$ -е кольцо, мы должны (i) прийти к расположению, когда $(m+1)$ -е кольцо надето, а m первых колец сняты, что потребует $x-1$ шагов; (ii) снять $(m+2)$ -е кольцо, что займет 1 шаг; (iii) снять $(m+1)$ -е кольцо, на что потребуется $x-1$ шагов; всего получится $2(x-1)+1$ шагов.

Значит, если при снятых первых m кольцах потребовалось x шагов, чтобы снять $(m+1)$ -е и $(m+2)$ -е, то число дополнительных шагов, которые нужно проделать, чтобы снять $(m+3)$ -е и $(m+4)$ -е кольца, равно $1+[2(x-1)+1]+1+[2(x-1)+1]=4x$.

Теперь надо найти общее число шагов, необходимых для снятия некоторого **нечетного** числа колец. Поступим следующим образом:

чтобы снять первое кольцо, нужен 1 шаг;

чтобы снять первые 3 кольца, нужно 4 дополнительных шага;

—»— —»— —»— 5 колец —»— 4^2 —»— —»—

.....

Таким способом мы убеждаемся, что число шагов, необходимых для снятия $2n+1$ колец, равно $1+4+\dots+4^n$, т. е. $(2^{2n+2}-1)/3$.

Аналогичным образом посчитаем число шагов, необходимых для снятия некоторого **четного** числа колец:

чтобы снять первые 2 кольца, нужно 2 шага;

чтобы снять первые 4 кольца, нужно 2×4 дополнительных шага;

—»— —»— —»— 6 колец —»— 2×4^2 —»— —»—

.....

Мы видим, что число шагов, необходимых для снятия $2n$ колец, равно $2+(2 \times 4)+(2 \times 4^2)+\dots+(2 \times 4^{n-1})$, т. е. $(2^{2n+1}-2)/3$.

Если считать, что снятие (или надевание) первых двух колец производится за 1 шаг, а не за 2 отдельных шага, то наши результаты обратятся соответственно в 2^{2n} и $2^{2n-1}-1$.

Я привел все эти рассуждения, поскольку они и составляют непосредственное решение задачи, которой безуспешно занимались Кардано в 1550 г. и Валлис в 1693 и которая одно время привлекала к себе внимание.

Дальше я изложу другое, более элегантно, хотя и несколько искусственное, решение. Это решение, полу-

ченное Гро [6] *, опирается на соглашение, по которому любое положение колец обозначается некоторым числом, записанным в двоичной системе счисления, так что каждому шагу, сделанному по правилам, отвечает прибавление 1 к этому числу или вычитание 1 из него.

Пусть кольца изображаются кружками: если кольцо находится на палочке, то ему соответствует кружок, расположенный над линейкой, если нет — то кружок под линейкой. Таким образом, на рис. 11.3, *а* представлено

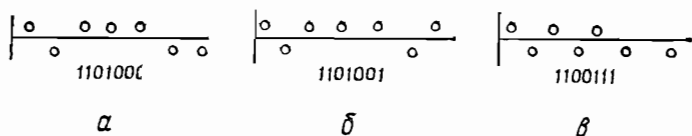


Рис. 11.3

множество из семи колец, из которых первые два (считая от конца *А*) сняты с палочки, следующие три находятся на ней, шестое снято, седьмое снова надето на палочку.

Припишем кольцам, надетым на палочку, чередующиеся цифры 1 и 0, считая слева направо, а кольцу, не надетому на нее, — цифру, приписанную ближайшему к нему слева кольцу, надетому на палочку, или 0, если слева от него таких колец вообще нет.

Таким образом, изображенным на рис. 11.3, *а—в* расположениям колец отвечают выписанные под каждым из них числа. Чтобы из расположения, представленного на рис. 11.3, *а*, получить расположение на рис. 11.3, *б*, надо надеть на палочку первое кольцо, тогда как расположение на рис. 11.3, *в* получается из него снятием четвертого кольца.

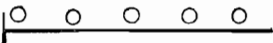
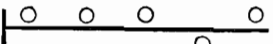
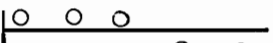
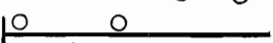
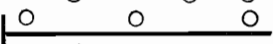
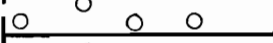
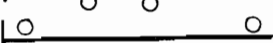
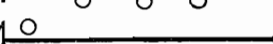
Итак, каждому положению колец соответствует некоторое «двоичное» число. Далее, так как при движении слева направо каждому надетому кольцу отвечает изменение цифры (т. е. замена 1 на 0 или 0 на 1), а каждому ненадетому — сохранение ее, то в результате любого шага, приводящего к надеванию или снятию кольца, единица или прибавляется к соответствующему числу, или отнимается от него. Например, число, соответствующее расположению колец на рис. 11.3, *б*, получается из

* Привожу его в изложении Люка (см. [29] в литературе к гл. IV, т. I, ч. 7).

числа, соответствующего рис. 11.3, *а*, прибавлением единицы, а число, соответствующее расположению колец на рис. 11.3, *в*, получается вычитанием единицы из числа, соответствующего рис. 11.3, *а*.

Расположение, при котором все кольца сняты с палочки, обозначается числом 0000000; когда все кольца надеты, получается число 1010101. Следовательно, для перехода от одного из этих расположений к другому требуется столько шагов, какова разность между этими числами, записанными в двоичной системе. Первое из них равно 0, а второе: $2^6 + 2^4 \in 2^2 + 1 = 85$; таким образом, здесь нам потребуется 85 шагов². Аналогичным способом можно показать, что вообще надеть (или снять) $2n + 1$ колец можно за $1 + 2^2 + \dots + 2^{2n}$, т. е. за $(2^{2n+1} - 1)/3$ шагов, а $2n$ колец — за $2 + 2^3 + \dots + 2^{2n-1}$, т. е. за $(2^{2n+1} - 2)/3$ шагов.

Далее я прилагаю таблицу, в которой указаны шаги, необходимые для снятия первых четырех колец из пяти (в среднем столбце изображены последовательные расположения колец после каждого шага).

<i>Начальное располо- жение</i>		10101
<i>После 1-го шага</i>		10110
<i>После 2-го шага</i>		10111
<i>После 3-го шага</i>		11000
<i>После 4-го шага</i>		11001
<i>После 5-го шага</i>		11010
<i>После 6-го шага</i>		11011
<i>После 7-го шага</i>		11100
<i>После 8-го шага</i>		11101
<i>После 9-го шага</i>		11110
<i>После 10-го шага</i>		11111

Числа, следующие за каждым изображением колец, соответствуют приведенному на нем расположению, и каждое из этих чисел получается из предыдущего прибавлением единицы. Шаги, объединенные фигурной скобкой, можно проделать одним движением — и если мы так поступим, то весь процесс будет выполнен за 7, а не за 10 шагов; это согласуется с выведенной выше формулой.

Гро утверждал, что он может проделывать от 64 до 80 шагов в минуту, — как показывает мой личный опыт, это довольно высокая скорость. Если мы примем меньшее из этих чисел — а чтобы достигнуть такой скорости, также нужна определенная «квалификация», т. е. попросту, тренировка, — то для снятия десяти колец потребуется меньше 8 мин; однако для снятия 25 колец потребуется 582 дня при 10-часовом рабочем дне (!), а чтобы снять 60 колец, необходимо не менее 768 614 336 404 564 650 шагов, т. е. около 55 000 000 000 лет работы — при условии, разумеется, что снимающий кольца никогда не будет ошибаться.

ЗАДАЧИ С КОЛОДОЙ КАРТ

Обычная колода игральных карт позволяет проиллюстрировать многие вопросы, связанные с простыми свойствами натуральных чисел или опирающиеся на анализ «конфигураций» (расположений) карт. Принципы решения задач такого рода обычно состоят в специфическом перекладывании карт с тем, чтобы расположить их определенным образом. Всякое такое перекладывание есть разновидность тасования.

Я рассмотрю последовательно вопросы, связанные с тасованием колоды, расположением по строкам и столбцам, определением пары из $n(n+1)/2$ пар, с задачей Жергонна о стойках, чтением через окошки, а также игру под названием «Мышеловка».

ТАСОВАНИЕ КОЛОДЫ

Любая система тасования колоды карт, если ее осуществлять последовательно, приводит к порядку карт, который можно заранее вычислить, но основанные на этом фокусы требуют известной сноровки.

Пусть, например, колода из n карт тасуется так, что вторая карта ложится на первую, третья — под них, четвертая — на них и т. д. (это довольно обычный способ).

Теория такой системы тасования карт была разработана еще в XVIII в. Монжем [7]*. Ниже изложены некоторые результаты, полученные с помощью этой теории, но их нетрудно доказать и непосредственно. Один способ тасования колоды из $2p$ карт переставляет карту, лежащую на месте x_0 , на место x_1 , где $x_1 = (2p + x_0 + 1)/2$, если x_0 нечетно, и $x_1 = (2p - x_0 + 2)/2$, если x_0 четно. Например, если указанным способом тасуется полная колода из 52 карт, то восемнадцатая карта остается восемнадцатой. Если таким способом тасуется колода карт для преферанса, состоящая из 32 карт, то седьмая и двадцатая карты меняются местами.

Кроме того, в любой колоде из n карт после некоторого числа тасований, не большего n , карты придут в исходный порядок. Это произойдет, когда исходная верхняя карта снова займет то же положение. Чтобы определить необходимое число тасований при колоде из $2p$ карт, достаточно положить $x_m = x_0$ и найти наименьшее значение m , при котором получающееся равенство справедливо для всех значений x_0 от 1 до $2p$.

Этот результат можно, однако, получить более легким способом, если пронумеровать карты в исходной колоде, начиная снизу. Сделав это, мы можем показать, что если после s тасований карта оказалась на r -м месте снизу, то ее исходный номер был равен разности между $2^s \times r$ и ближайшим кратным числа $4p + 1$ (точнее, абсолютной величине этой разности — ясно, что из большого числа мы должны вычесть меньшее). Следовательно, если для восстановления исходного порядка требуется m тасований, то m — наименьшее целое число, для которого $2^m + 1$ или $2^m - 1$ делится на $4p + 1$. Для колоды из $2p + 1$ карт это число не отличается от того, которое отвечает колоде из $2p$ карт. В случае колоды карт для преферанса, состоящей из 32 карт, достаточно шести тасований; для колоды из 2^n карт достаточно $n + 1$ тасований; для полной колоды из 52 карт — двенадцати тасований; для колоды из 13 карт — десяти тасований, в то время как для колоды из 50 карт потребуется 50 тасований и т. д.

В общем случае колоды из n карт — какая бы система тасований ни применялась, если только тасование повторяется достаточное число раз, — карты обязательно

* Мне хотелось бы также назвать ряд работ, где этот вопрос рассматривается заново (см. [8]).

вернутся в начальное расположение. На самом деле, как показал Хадсон [9], это всегда случается раньше, чем число тасований превысит наибольшее из наименьших общих кратных всех наборов натуральных чисел, сумма которых равна n .

Если $P_1, \dots, P_n$ — это n позиций, которые могут занимать карты, то каждое тасование S можно представить в виде произведения некоторого числа непересекающихся «подперетасований» или *циклов*:

$$S = (P_a P_b \dots P_i) (P_j \dots P_m) \dots (P_u \dots P_z),$$

где карта, находящаяся в позиции P_a , передвигается в позицию P_b , а карта с последней позиции данного цикла (например, с позиции P_m) переходит в его первую позицию (в P_j). Поскольку подперетасования независимы, перемена их порядка не изменяет тасования в целом. Поэтому выполненное дважды тасование S можно записать как

$$S^2 = (P_a P_b \dots P_i)^2 (P_j \dots P_m)^2 \dots (P_u \dots P_z)^2.$$

Но нетрудно проверить, что карта, позиция которой входит в некий цикл с периодом (или длиной) r , вернется в исходную позицию после r -го тасования. Если m — наименьшее общее кратное периодов циклов некоторого тасования, то, повторив это тасование m раз, мы вернем все карты в их исходное положение. Таким образом, для колоды из n карт мы имеем результат, полученный Хадсоном. Например, когда $n = 52$, период любого тасования меньше 180 180.

РАСПОЛОЖЕНИЕ ПО СТРОКАМ И СТОЛБЦАМ

На одной из разновидностей тасования основан довольно известный фокус. В нем используется тот очевидный факт, что если n^2 карт разложены в форме квадрата, n строк по n карт в каждой, то, чтобы определить карту, достаточно указать строку и столбец, в которых она лежит.

Эту информацию обычно стремятся получить прежде всего, спрашивая, в какой строке лежит выбранная карта; после этого надо запомнить крайнюю слева карту этой строки. Затем карты каждого столбца собирают лицом вверх по одной, начиная с самой нижней и проходя все столбцы по порядку справа налево; при этом каждую вновь взятую карту кладут поверх тех, что были

взяты раньше. Далее карты снова раскладывают в строки слева направо, начиная с верхнего левого угла, — и отгадывающий карту спрашивает, в какой строке теперь лежит выбранная карта. И тогда ее сразу можно определить: ведь она принадлежит указанной строке и тому вертикальному столбцу, который «отмечен» запомненной вначале картой (крайней слева в названной при первом раскладывании строки).

Фокус можно усовершенствовать, разрешив перед каждым новым раскладыванием карт отделять сколько

1	2	3	4	1	5	9	13
5	6	7	8	2	6	10	14
9	10	11	12	3	7	11	15
13	14	15	16	4	8	12	16
<i>а</i>				<i>б</i>			

Рис. 11.4

удобно раз от колоды часть ее и переносить эту часть в конец, но так, чтобы верхней в колоде получалась одна из карт исходной верхней строки. Рассмотрим, например, колоду из 16 карт. Первое и второе расположения изображены соответственно на рис. 11.4, *а* и *б*. Если нам сказали, что на рис. 11.4, *а* выбранная карта лежит в третьей строке, то это одна из карт 9, 10, 11, 12. Значит, если мы знаем, в какой строке она лежит на рис. 11.4, *б*, то карта определена. Если мы разрешаем между раскладываниями отделять от колоды часть, то при этом следует каким-нибудь образом обеспечить, чтобы верхней оказалась одна из карт 1, 2, 3, 4, потому что тогда в каждой строке (рис. 11.4, *б*) останутся прежние карты, хотя порядок строк изменится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБРАННОЙ ПАРЫ КАРТ ИЗ $n(n+1)/2$ ПАР *

Другой общеизвестный фокус состоит в следующем. Выложив на стол двадцать карт десятью парами, про-

* Эта задача приведена у Баше (см. [1] в литературе к гл. I, задача XVII, с. 146 и далее).

сят кого-либо выбрать одну пару. Затем карты собирают и каким-то определенным образом раскладывают в четыре строки по пять карт. Если теперь указать строки, в которых находятся выбранные карты, то эти карты немедленно опознаются.

Здесь используется тот факт, что число однокленов 2-й степени, которые можно образовать из четырех переменных (четырех произвольных символов), равно 10. Следовательно, попарные произведения четырех символов (включая произведение символа на себя) можно использовать для определения десяти предметов.

1	2	3	5	7
4	9	10	11	13
6	12	15	16	17
8	14	18	19	20

Рис. 11.5

Пусть на стол выложено 10 пар карт и кто-то выбрал одну пару. Соберем карты, не разрушая пар. Тогда первые две карты образуют первую пару, следующие две — вторую и т. д. Затем разложим их в четыре строки по пять карт по схеме, изображенной на рис. 11.5.

Первая пара (1 и 2) лежит в первой строке. Из второй пары (3 и 4) одну карту поместим в первую строку, а другую — во вторую строку. Из третьей пары (5 и 6) поместим одну карту в первую строку, а вторую — в третью и т. д., как указано на рисунке. Когда первая строка заполнится, сделаем то же самое со второй строкой и т. д.

Спросим, в каких строках лежит выбранная пара. Если в ответ будет указана лишь одна m -я строка, то отгадываемая пара карт — это m -я и $(m + 1)$ -я карты m -й строки. Они занимают *ключевые* позиции этой строки. Если же указаны две строки, то поступим следующим образом. Пусть указаны p -я и q -я строки, причем $q > p$. Тогда та из отгадываемых карт, которая лежит в q -й строке, — это $(q - p)$ -я из карт, которые лежат под первой ключевой позицией p -й строки. Другая

отгадываемая карта лежит в p -й строке и оказывается $(q - p)$ -й картой справа от второй ключевой позиции.

Правило Баше — в той форме, которую я привел, — пригодно для колоды из $n(n + 1)$ карт, разбитых на пары и раскладываемых в n строк по $n + 1$ карт; в самом деле, тогда получается $n(n + 1)/2$ пар — число одночленов 2-й степени от n переменных также равно $n(n + 1)/2$. Баше привел диаграммы для случаев 20, 30 и 42 карт — их читатель без труда построит сам, а я изложил правило построения для 20 карт в пригодной для всех случаев форме.

Я видел, как подобные фокусы проделывались не с цифрами, а с фразами. Если взять случай десяти пар, то после того, как пары собраны, карты надо разложить в четыре строки по пять карт в порядке, указанном предложением³ *Matas dedit nomen Cocis*. Представим себе, что это предложение записано в форме таблицы, где каждое слово составляет строку. Первая карта кладется на букву *M*, вторая (которая составляет с первой пару) помещается на второе *m* этого предложения, т. е. становится третьей в третьей строке. Третья карта кладется на *a*, а четвертая (пара третьей) — на второе *a*, т. е. становится четвертой в первой строке. Каждая из карт третьей пары кладется на буквы *t* и т. д. Спросим, в каких строках лежат выбранные карты. Если указаны две строки, то они лежат на общих буквах слов, которые составляют эти строки. Если указана одна строка, то отгадываемые карты лежат на двух одинаковых буквах этой строки.

Ясно, почему это так. В самом деле обозначим карты из первой пары буквой *a*, а карты других пар соответственно буквами *e*, *i*, *o*, *c*, *d*, *m*, *n*, *s* или *t*. Фраза *Matas dedit nomen Cocis* содержит четыре слова, каждое из пяти букв; использовано десять букв, причем каждая буква появляется лишь дважды. Кроме того, любые два слова имеют одну общую букву и каждое слово содержит одну повторяющуюся букву.

Чтобы показывать такой же фокус с другим количеством карт, потребуется другое предложение.

Число одночленов 3-й степени от четырех переменных равно 20. Из них 8 являются произведениями трех разных сомножителей или степенью одного. Отсюда возникает фокус с 8 тройками карт, похожий на предыдущий, — карты раскладываются в порядке, определенном фразой *Lanata levete levini novoto*.

Я полагаю, что эти расположения по порядку, определенному некой фразой, хорошо известны, но не знаю, кто их придумал.

ЗАДАЧА ЖЕРГОННА О СТОПКАХ КАРТ

Прежде чем приступить к теореме Жергонна, я опишу известную задачу о трех стопках карт, теория которой содержится в его результатах.

Задача о трех стопках карт *. Этот фокус обычно проделывают следующим образом. Берут 27 карт и раскладывают их в три стопки лицом вверх: первая карта кладется вниз первой стопки, вторая — вниз второй, третья — вниз третьей, четвертая — на первую и т. д.; кроме того, я предполагаю, что все время карты держат в руках лицом вверх. Все дальнейшее можно приспособить и к другим способам раскладки.

Попросите кого-либо из зрителей заметить одну из карт и запомнить, в какую стопку она попадет. Кончив раскладывать карты, спросите, в какой из стопок лежит замеченная карта. Соберите все три стопки, причем указанную поместите между двумя другими. Снова разложите карты, как в первый раз, и опять спросите, в какой стопке находится замеченная карта. Еще раз соберите все три стопки, помещая стопку, в которой на этот раз лежит замеченная карта, между двумя другими, и снова так же разложите карты, но при этом запомните среднюю карту каждой стопки. В третий раз спросите, в какой стопке лежит отыскиваемая карта, — и вы будете знать, что это одна из тех средних карт, которые вы запомнили. После этого фокус можно завершить как вам угодно. Обычный, но не слишком изящный способ — это еще раз собрать все три стопки, помещая, как и ранее, указанную стопку между другими, — и тогда замеченная карта будет средней в колоде, т. е. 14-й, если карт было 27.

Часто показывают этот фокус с 15 или 21 картами — и в обоих случаях действуют по тем же правилам.

Обобщение Жергонна. Общая теория для колоды из m^m карт была создана Жергонном [10]. Предположим, что колода разделена на m стопок, каждая по m^{m-1} карт, и что после первого раскладывания стопка, содержащая

* Этот фокус упоминается Баше (см. [1] к гл. I, задача XVIII, с. 143), однако проведенный им анализ недостаточен.

выбранную карту, берется a -й, после второго — b -й и т. д.; последний раз после m -го раскладывания она берется k -й. В этом случае, когда карты собраны после m -го раскладывания, выбранная карта должна быть n -й сверху, где

если m четно, то $n = km^{m-1} - jm^{m-2} + \dots + bm - a + 1$,
 если m нечетно, то $n = km^{m-1} - jm^{m-2} + \dots - bm + a$.

Например, если колода состоит из 256 карт (т. е. $m = 4$) и кто-то выбрал в ней карту, последнюю можно определить, четыре раза подряд раскладывая карты на 4 стопки и после каждого раза спрашивая, в какой стопке лежит выбранная карта. Нетрудно понять, почему так происходит. После первого раскладывания вы знаете, что это одна из 64 карт. При следующем раскладывании эти 64 карты распределяются поровну между четырьмя стопками и, значит, если вы знаете, в какую стопку она попала, вы знаете, что это одна из 16 «подозрительных» карт. После третьего раза вы знаете, что это одна из 4 «подозрительных» карт, а после четвертого вы знаете, что это за карта.

Кроме того, если используется колода из 256 карт, то несущественно, какой по счету берется стопка с выбранной картой после раскладывания. В самом деле, если после первого раскладывания она взята a -й, после второй — b -й, после третьего — c -й, а после четвертого — d -й, то выбранная карта окажется $(64d - 16c + 4b - c + 1)$ -й сверху и таким образом будет известна. Нет нужды собирать колоду после четвертого раскладывания, поскольку по тем же соображениям выбранная карта будет $(64 - 16c + 4b - a + 1)$ -й в той стопке, в которой она лежит. Значит, если $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 2$, она будет 62-й в стопке, указанной четвертый раз, и 126-й в колоде, собранной четвертый раз.

Точно так же можно использовать колоду из 27 карт; тогда, чтобы определить выбранную карту, будет достаточно трех последовательных раскладываний — каждое на три стопки по 9 карт. Если после раскладываний стопка с выбранной картой берется соответственно a -й, b -й и c -й, то выбранная карта будет $(9c - 3b + a)$ -й во всей колоде и $(9 - 3b + a)$ -й в стопке, в которой она оказалась при третьем раскладывании.

Метод доказательства достаточно ясно можно проиллюстрировать, рассмотрев обычный случай колоды из

27 карт, когда $m = 3$ и колода делится на три стопки по 9 карт.

Предположим, что после первого раскладывания стопка, содержащая выбранную карту, берется a -й; тогда (i) наверху колоды лежат $a - 1$ стопок по 9 карт, (ii) далее следуют 9 карт, из которых одна — выбранная, и (iii) последними лежат все остальные карты. Потом карты раскладываются второй раз: в каждой стопке $3(a - 1)$ нижних карт берутся из (i), следующие 3 — из (ii) и остальные $9 - 3a$ карт — из (iii).

Допустим, что указанная нам стопка берется b -й; тогда (i) сверху колоды лежат $9(b - 1)$ карт, (ii) затем $9 - 3a$ карт, (iii) далее 3 карты, среди которых находится выбранная, и, наконец, (iv) оставшиеся карты колоды. Теперь карты раскладываются третий раз: в каждой стопке нижние $3(b - 1)$ карты берутся из (i), следующие 3 — a карт — из (ii), далее идут одна из трех карт из (iii) и остальные $8 - 3b + a$ карт из (iv).

Следовательно, после этого раскладывания, как только указана стопка, можно сразу сказать, что выбранная карта лежит в этой стопке $(9 - 3b + a)$ -й сверху. Если после этого колода еще раз складывается и указанная стопка при этом берется c -й, то выбранная карта окажется $[9(c - 1) + (8 - 3b + a) + 1]$ -й, т. е. $(9c - 3b + a)$ -й сверху.

Так как после третьего раскладывания место выбранной карты в указанной третий раз стопке известно, то легко отгадать эту карту — и тогда фокус можно закончить более эффектно, чем в случае, когда карты раскладываются еще раз.

Если мы всегда будем помещать указанную стопку в середину колоды, то $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$, а значит, $n = 9c - 3b + a = 14$, т. е. фокус приобретает тот вид, в котором его обычно показывают (см. с. 352).

Я показал, что если a , b , c известны, то n можно определить. Мы можем изменить правило так, чтобы выбранная карта оказалась на любом данном месте, скажем на n -м. В этом случае нам надо подобрать для a , b , c такие значения, чтобы имело место равенство $n = 9c - 3b + a$, где a , b , c могут принимать только значения 1, 2 или 3.

Таким образом, если остаток от деления n на 3 равен 1 или 2, то этот остаток и есть a ; но если остаток равен нулю, то мы должны уменьшить частное на единицу, чтобы остаток стал равен 3 — этот новый «оста-

ток» и совпадает с a . Другими словами, a — наименьшее положительное (отличное от нуля!) число, которое нужно вычесть из n , чтобы разность делилась на 3.

Пусть p — соответствующий коэффициент пропорциональности, т. е. p — ближайшее к $n/3$ меньшее его целое; тогда $3p = 9c + 3b$ и $p = 3c - b$, т. е. b — наименьшее положительное (отличное от нуля) число, которое при сложении с p должно давать кратную трем сумму, а c — соответствующий коэффициент пропорциональности.

Чтобы пояснить это, приведем два примера. Допустим, мы хотим, чтобы выбранная карта оказалась 22-й сверху; значит, должно быть $22 = 9c - 3b + a$. Наименьшее число, которое надо вычесть из 22, чтобы разность делилась на 3, — это 1, т. е. $a = 1$ и $22 = 9c - 3b + 1$. Следовательно, $7 = 3c - b$. Наименьшее число, которое надо прибавить к 7, чтобы сумма делилась на 3, равно 2, т. е. $b = 2$. Таким образом, $7 = 3c - 2$, т. е. $c = 3$. Итак, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Пусть выбранная карта должна оказаться 21-й. В таком случае $21 = 9c - 3b + a$. Тогда a должно быть наименьшим положительным (ненулевым) числом, которое надо вычесть из 21, чтобы разность делилась на 3, т. е. $a = 3$. Следовательно, $6 = 3c - b$. Наименьшее число, которое нужно прибавить к 6, чтобы сумма делилась на 3, — это 3, т. е. $b = 3$. Таким образом, $9 = 3c$ и $c = 3$. Итак, здесь мы получаем $a = 3$, $b = 3$, $c = 3$.

Если эти вычисления кажутся трудными, то мы можем предложить еще один их вариант. Пусть $a = x + 1$, $b = 3 - y$, $c = z + 1$; тогда x , y , z могут принимать лишь значение 0, 1 или 2. В этих обозначениях формула Жергонна принимает вид $9z + 3y + x = n - 1$. Значит, если записать $n - 1$ в троичной системе счисления, то тем самым определятся «цифры» x , y , z числа $n - 1$, а значит, станут известны и величины a , b , c .

Правило сохраняет свой вид и для колоды из m^m карт. Мы хотим, чтобы выбранная карта оказалась на заданном месте. Следовательно, мы должны с помощью формулы Жергонна по заданному n найти a , b , ..., k . Это можно проделать с помощью последовательных делений на m с тем, чтобы остатки попеременно были положительными и отрицательными и чтобы их численные значения не превосходили n и были не меньше единицы.

Можно доказать аналогичную теорему для случая колоды из lm карт. Хадсон и Диксон [11] разобрали

общий случай, когда такая колода раскладывается n раз, каждый раз на l стопок по m карт; они показали, в каком порядке надо брать стопки, чтобы после m -го раскладывания выбранная карта оказалась r -й сверху.

Этот результат достаточно проиллюстрировать одним примером, разобранным в том же стиле, что и предыдущие. Предположим, что колода карт для преферанса (32 карты) раскладывается на четыре стопки по 8 карт в каждой и что стопка, в которой лежит выбранная карта, берется a -й. Пусть после второго раскладывания на четыре стопки указана стопка, в которой лежит эта карта. Выбранная карта не может быть ни одной из $2(a-1)$ нижних карт, ни одной из $8-2a$ верхних карт, но должна быть одной из двух карт, лежащих между ними, — фокус можно закончить по-разному, например, как это свойственно фокусам, несколько двусмысленно: попросить кого-то выбрать одну из двух карт, оставляя неясным, следует ли взятую им карту принять или отвергнуть.

Гурматиг [12] нашел условие, которому должны удовлетворять числа l и m , чтобы выбранную карту можно было обнаружить за три раскладывания на l стопок по m карт, когда указанная стопка каждый раз берется второй. Это условие выглядит так: $[(m+h)/l] = [(m+k)/l]$ ($=p$, скажем), где $h = [m/l]$ и $k = [(2m-1)l]$. Выбранная карта окажется тогда $(p+1)$ -й в стопке, указанной после третьего раскладывания. Для обычной колоды из 52 карт можно взять $l=4$, $m=13$; тогда $h=3$, $k=6$ и $p=4$, т. е. после трех раскладываний выбранная карта будет пятой в указанной стопке.

ЧТЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОКОШКИ

Известен фокус с набором из восьми нумерованных карт, в которых пробиты отверстия, позволяющие тому, кто показывает фокус, установить задуманное зрителем число. Из этих восьми карт в каждой из первых семи проделаны отверстия (окошки); каждая из последних семи содержит некий набор чисел, меньших 100, над которыми написано слово «Да»; каждая из последних трех, кроме того, имеет цифры и на оборотной стороне, а первая карта озаглавлена словом «Верх». У каждой карты, если ее перевернуть «вверх ногами», на той ее

части, которая теперь стала верхом, написано слово «Нет».

С помощью такого набора карт можно определить любое задуманное число, меньшее 100. Пусть некий *A* задумал число, а *B* берется отгадать это число. Сначала он кладет на стол карту номер один вверх концом, помеченной словом «Верх». Затем *B* берет вторую карту и спрашивает *A*, есть ли на ней задуманное им число. Если тот отвечает утвердительно, то *B* помещает вторую карту поверх первой, вверх концом со словом «Да»; если же *A* отвечает отрицательно, то *B* переворачивает карту и кладет ее на первую вверх словом «Нет». Затем он спрашивает, есть ли задуманное число на третьей карте, и помещает ее на вторую соответствующим концом вверх. Точно так же он поступает с остальными четырьмя картами — с четвертой по восьмую. Наконец, вся стопка переворачивается, и через окошки видно задуманное число.

В свое время эта головоломка широко продавалась в Италии, Германии и Англии. Используемый в ней принцип довольно прост, и я бы порекомендовал заинтересованному читателю сделать такие карты.

Очевидно, однако, что любое число, не превышающее 128, можно определить с помощью лишь семи карт — по 64 выбранных числа на каждой. В самом деле, первая карта служит для того, чтобы разделить все эти 128 чисел на два множества по 64 числа; числа на второй можно подобрать так, чтобы разделить каждое из этих множеств на два множества по 32 карты; третья карта разделит каждое из последних еще на 2 множества по 16 карт и т. д. Числа должны быть написаны, а отверстия прорезаны так, чтобы, после того как вы сложите карты по порядку и перевернете колоду, задуманное число было видно на обратной стороне седьмой карты через окошки, прорезанные в первых шести. Распределить числа нужным образом нетрудно, но геометрическая задача вырезания окошек не столь проста. Приведу одно решение.

Предлагаю вам один способ приготовить 7 таких карт. На первой карте под словом «Да» пишутся 64 числа от 1 до 32 и от 65 до 96; на второй — числа от 1 до 16, от 33 до 48, от 65 до 80 и от 97 до 112; на третьей — четыре арифметические прогрессии (по 16 членов каждая) с разностью 8, начинающиеся с 1, 2, 5, 6; на четвертой — восемь арифметических прогрессий (по

8 членов каждая) с разностью 16, начинающиеся с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; на пятой — нечетные числа от 1 до 127; на шестой — четыре арифметические прогрессии (по 16 членов каждая) с разностью 8, начинающиеся с чисел 1, 2, 3, 4; наконец, на седьмой пишутся числа от 1 до 64 — на этой (седьмой) карте слово «Нет» должно быть написано, однако, не у нижнего края, а вдоль левого. На обороте последней карты нужно написать числа от 1 до 128 в их естественном порядке, причем в первой четверти от 1 до 32, в четвертой четверти — от 33 до 64, во второй четверти, повернутой на 90° , — от 65 до 96 и в третьей четверти, тоже повернутой на 90° , — от 97 до 128. Размещение чисел требует внимания, но оно не вызовет трудностей, если общий принцип понятен и используется бумага в клетку.

Окошки нужно вырезать следующим образом. Будем предполагать, что мы пользуемся бумагой в клетку и что каждая карточка разделена на 4 равных квадранта с полями. На первой карте мы проделываем одно окошко, вырезая второй квадрант. На второй карте проделываем два отверстия, вырезая верхнюю половину второго квадранта и верхнюю половину третьего квадранта. На третьей карте будет два окошка — вырезается правая половина второго квадранта и правая половина третьего. На четвертой карте мы делим второй и третий квадранты на 4 равные горизонтальные полосы и в каждом из этих квадратов вырезаем первую и третью полосы. На пятой карте делим второй и третий квадранты на 4 равные вертикальные полосы и в каждом вырезаем вторую и четвертую полосы. На шестой карте делим второй и третий квадранты на восемь равных горизонтальных полос и вырезаем в каждом первую, третью, пятую и седьмую полосы.

Заметим, что ни в одной карте окошки не попадают на первый и четвертый квадранты, и, таким образом, эти квадранты можно заполнять 64 числами, которые пишутся на лицевой стороне каждого из них. Приведенную здесь конструкцию предложил мой друг Р. Коул.

Быть может, лучше ограничиться числами, не превосходящими 100, ибо введение числа 128 сразу подсказывает метод изготовления этой головоломки. С этой оговоркой вариант с семью картами, на мой взгляд, лучше и изящнее, чем тот, который имелся в продаже (восемь карт).

Эту главу я завершу упоминанием еще об одной игре с картами, называемой «Мышеловка». Ее полное обсуждение потребовало бы достаточно сложных рассуждений.

Играют в нее так. Карты, пронумерованные числами от 1 до n , раскладывают в произвольном порядке по кругу, лицом вверх. Играющий начинает с первой из выложенных карт и пересчитывает их, обходя круг всегда в одном направлении. Если k -я карта получает номер k — это событие называется *попаданием*, — он забирает ее и начинает считать сначала. По Кэли, играющий выигрывает, если он подобрал все карты, а «банк» выигрывает, если играющий, досчитав до n , не заберет ни одной карты.

Например, если в колоде всего четыре карты и они расположены в порядке 3 2 1 4, то у играющего второй картой окажется карта 2 — это будет попадание, а затем карта 1 — тоже попадание, но больше попаданий у него никогда не получится. С другой стороны, если первоначально карты в колоде лежали в порядке 1 4 2 3, то играющий заберет их все в таком порядке: 1, 2, 3, 4.

Возникает вопрос, как определить, какие попадания можно получить при заданном числе карт, сколько их получится и какие перестановки обеспечат некоторое число попаданий в определенном порядке.

Кэли ([13], с. 8—10) показал, что при колоде из 4 карт существуют 9 расположений карт в колоде, при которых не будет ни одного попадания; 6 расположений, при которых получится лишь одно попадание; 3 расположения, дающие два попадания, и 6 расположений, обеспечивающих 4 попадания.

Стин ([13], с. 230—241) занялся общей теорией, касающейся колоды из n карт. Он показал, как подсчитать число расположений, при которых x будет первым попаданием, число расположений, при которых 1 будет первым попаданием, а x — вторым, и число расположений, при которых 2 будет первым попаданием, а x — вторым, — но ничего помимо этого в его теории не было. Ясно, что если произойдет $n - 1$ попаданий, то произойдет и n -е.

На эту игру очень похожа французская игра «Тринадцать». В ней пользуются полной колодой из 52 карт (валеты, дамы и короли получают соответственно но-

мера 11, 12 и 13). Сдающий карты, сдавая 1-ю, 2-ю, 3-ю, ..., 13-ю карты, называет соответственно числа 1, 2, ..., 13. Перед сдачей он предлагает держать пари, что в первых тринадцати сданных картах произойдет попадание (ср. со сказанным на с. 58).

1. Mallison H. V. *Mathematical Gazette*, 1940, vol. XXIV, p. 119 (Note 1454).
2. *Scientific American*, 1973, vol. CCXXVII, no. 2, p. 109.
3. *La Nature* (Paris), 1884, part I, pp. 285—286.
4. Cardano J. *De Subtilitate*, bk. XV, paragraph 2, ed. Sponius, vol. III, p. 587.
5. Wallis. *Algebra*, Latin edition, 1693, Opera, vol. II, chap. CXI, pp. 472—478.
6. Gros L. *Théorie du Baguenodier*. — Lyons, 1872.
7. *Mémoires de l'Académie des Sciences*. — Paris, 1773, pp. 390—412.
8. Bouniacowski V. *Bulletin physico-mathématique de St. Pétersbourg*, 1857, vol. XV, p. 202—205 (краткое изложение: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1858, pp. 66—67); de St. Laurent T. *Mémoires de l'Académie de Gard*, 1865 Tanner L. *Educational Times Reprint*, 1880, vol. XXXIII, pp. 73—75; Bourget M. J. *Liouville's Journal*, 1882, pp. 413—434; Baker H. F. *Transactions of the British Association for 1910*, pp. 526—528; Cowell P. H. *The Field*, 2 April 1921, pp. 444.
9. *Educational Times Reprints* (London), 1865, vol. II, p. 105. См. также Landau E. *Archiv der Mathematik und Physik*, 1903, ser. 3, vol. V, pp. 92—103; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984, с. 421—423.
10. *Annales de Mathématiques*, Nimes, 1813—1814, vol. IV, pp. 276—283.
11. *Educational Times Reprints*, 1868, vol. IX, pp. 89—91; *Bulletin of the American Mathematical Society* (New York), April 1895, vol. I, pp. 184—186.
12. Sphinx, 1936, pp. 113—115.
13. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1878, vol. XV.

ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Среди наиболее интересных геометрических задач античного периода особое внимание древнегреческих мыслителей привлекли три. Наша геометрия имеет в основном греческое происхождение, поэтому в истории геометрии эти задачи вполне могут считаться классическими. Это (i) задача об удвоении куба, т. е. об определении стороны куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба; (ii) задача о трисекции угла, т. е. о делении угла на три равные части, и (iii) квадратура круга, т. е. задача отыскания квадрата, площадь которого равна площади данного круга. При этом каждую из названных задач требовалось решить путем построения лишь с помощью «циркуля и линейки», т. е. путем проведения только прямых линий и окружностей, — другими словами, решение должно было укладываться в рамки евклидовой геометрии, как понимали ее древние греки.

При таком построении предполагается, что раствор циркуля и длина линейки неограниченны — мы можем соединить прямой две сколь угодно далекие друг от друга точки плоскости и провести окружность с данным центром и **любым** сколь угодно большим радиусом. Кроме того, на линейке не должно быть делений, так как если на ней есть две фиксированные метки, то использование их в геометрических построениях равносильно разрешению пользоваться не только окружностями, но и любыми коническими сечениями (эллипсами, параболой, гиперболой).

При указанных «евклидовых ограничениях» все три сформулированные задачи на построение неразрешимы [1]*. Чтобы удвоить куб со стороной a , мы должны найти прямолинейный отрезок длины x , такой, что $x^3 = 2a^3$. Чтобы осуществить трисекцию данного угла,

* Утверждают, что самое первое строгое доказательство неразрешимости этих задач с помощью евклидовой геометрии принадлежит П. Л. Ванцелю (1837).

можно сначала найти его синус, скажем a , и тогда если x — синус угла, равного одной трети данного, то $4x^3 = 3x - a$. Таким образом, первая и вторая задачи, если их рассматривать аналитически, требуют решения кубических уравнений, а так как с помощью построения окружностей (уравнения которых имеют вид $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$) и проведения прямых (уравнения которых имеют вид $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$) мы, вообще говоря, не можем найти корни кубического уравнения, то при «евклидовых ограничениях» эти задачи неразрешимы. (Если допустить использование конических сечений, то эти задачи можно решать многими способами.) Третья задача отличается по своему характеру от двух первых¹, но и она при указанных выше условиях неразрешима.

Приведу некоторые построения, которые предлагались для решения первых двух задач. В целях экономии места я не воспроизвожу здесь необходимых чертежей и в большинстве случаев не излагаю доказательств: последние не вызывают серьезных затруднений. В заключение этой главы я приведу некоторые исторические комментарии, касающиеся приближенных решений задачи о квадратуре круга.

УДВОЕНИЕ КУБА

Задача об удвоении куба [2] * была известна в древности как *делосская задача*, что было связано с легендой, согласно которой делосцы советовались по этому поводу с Платоном. В одном из вариантов легенды, изложенном Филопоном [3], говорится, что в 430 г. до н. э. жители Афин обратились к делосскому оракулу² с просьбой посоветовать им, как избавиться от постигшего их город бедствия — эпидемии тифа. Аполлон ответил через оракула, что афиняне должны увеличить вдвое размер его алтаря, который имел форму куба. Необразованные просители сочли, что ничего не может быть проще, — и соорудили новый алтарь, то ли построив куб с вдвое большими ребрами, чем у старого (при этом объем алтаря вырос в 8 раз), то ли поставив на старый алтарь еще один такой же куб. После этого разгневанный бог наслал на них еще более сильное поветрие и заявил новой депутации, что не позволит с ним шу-

* Некоторые замечания по этому поводу имеются также в моей «Истории математики» [7].

тить, — новый алтарь должен быть кубом, объем которого вдвое больше объема старого алтаря. Предполагая, что здесь скрыта какая-то тайна, афиняне обратились за помощью к Платону, который отослал их к геометрам. Упоминание Платона — очевидный анахронизм. Эратосфен ([4], с. 144; [4'], т. III, с. 104—107) рассказывает нечто подобное, но у него задачу удвоения куба ставит Минос.

В одной арабской работе эта греческая легенда превратилась совсем в невероятную историю; я приведу ее здесь как своего рода курьез. «Во времена Платона, — говорится там, — среди детей израилевых разразилась чума. Тогда один из их прорицателей услышал глас с неба: «Удвойте размер (кубического) алтаря и чума прекратится». Люди построили другой алтарь, подобный прежнему, и водрузили его на старый. Тем не менее чума продолжала свирепствовать. И снова прорицатель услышал голос: «Они построили другой алтарь, подобный прежнему, и водрузили его на старый алтарь, но не удвоили тем самым куб». Тогда несчастные люди обратились к греческому мудрецу Платону и он сказал им: «Вы пренебрегли наукой геометрией, за что бог и наказал вас, ибо геометрия — вершина всех наук». Удвоение же куба опирается на малоизвестную геометрическую задачу, а именно...». Вслед за этой легендой у арабов идет решение Аполлония, которое, однако, было дано позже.

Если a — длина стороны данного куба, а x — длина стороны искомого куба, то $x^3 = 2a^3$, т. е. $x : a = \sqrt[3]{2} : 1$. Вероятно, греки осознавали, что последнее отношение иррационально или, другими словами, что нельзя найти два целых числа, отношение которых совпадает с $\sqrt[3]{2} : 1$, — но из этого еще не следовало, что они не смогут найти это отношение с помощью геометрии: в самом деле, сторона и диагональ квадрата тоже несоизмеримы, но тем не менее, зная сторону квадрата, мы можем без труда найти его диагональ.

Я приведу несколько геометрических построений, которые были предложены для удвоения куба*. За одним исключением, я ограничиваюсь теми построениями, ко-

* По поводу применения к данной задаче традиционных греческих методов анализа — это делали Герон и Филои (приходившие к решению с помощью окружности Аполлония), Никомед (решение с помощью конхоиды) и Папп (решение с помощью циссоиды) — см. [5], с. 247—250, 453.

которые можно осуществить с помощью конических сечений.

Гиппократ Хиосский³ [6] был, вероятно, первым из математиков, кто несколько продвинулся в решении задачи удвоения куба (около 420 г. до н.э.). Он не указал геометрической конструкции, но свел вопрос к нахождению двух средних пропорциональных между прямолинейным отрезком (a) и другим, вдвое большей длины ($2a$). Если обозначить эти средние пропорциональные через x и y , то $a:x = x:y = y:2a$; отсюда получаем $x^3 = 2a^3$. Именно в этом виде задача формулируется теперь. Прежде любой процесс решения задачи нахождением средних пропорциональных назывался *мезолабум*.

Одно из первых решений рассматриваемой задачи дал Архит ([4], с. 143; [4'], т. III, с. 98—103) примерно в 400 г. до н.э. Его построение эквивалентно следующему. На диаметре OA основания прямого кругового цилиндра построим полуокружность, плоскость которой перпендикулярна к основанию цилиндра. Пусть плоскость, содержащая эту полуокружность, вращается вокруг образующей цилиндра, проходящей через точку O . Тогда поверхность, которую описывает при этом полуокружность, пересекается с цилиндром по некоторой кривой. Эта кривая в свою очередь пересекается в точке P с прямым конусом с осью OA и углом между осью и образующей, равным, скажем, 60° , так что проекция отрезка OP на основание цилиндра относится к радиусу цилиндра как сторона искомого куба к стороне данного. Разумеется, доказательство Архита чисто геометрическое; при этом интересно отметить, что в ходе его он продемонстрировал знание предложений 18 и 35 из книги III и 19 из книги XI «Начал» Евклида. Чтобы показать аналитически, что это построение корректно, возьмем OA за ось x , а образующую цилиндра, проходящую через O , — за ось z ; тогда в обычных обозначениях и сферических координатах уравнение поверхности, описанной полуокружностью, примет вид $r = 2a \cos \theta$, где a — радиус цилиндра; уравнение цилиндра — вид $r \cos \theta = 2a \cos \varphi$ и уравнение конуса — вид $\cos \theta \cos \varphi = 1/2$. Эти три поверхности пересекаются в точке, где $\cos^2 \theta = 1/2$, а следовательно, $(r \cos \theta)^3 = 2a^3$. Значит, объем куба, сторона которого равна $r \cos \theta$, вдвое больше объема куба со стороной a .

Построение, которое приписывают Платону ([4], с. 135; [4'], т. III, с. 66—71), датируется примерно 360 г.

до н.э.; оно опирается на теорему, утверждающую, что если CAB и DAB — два прямоугольных треугольника с общей стороной AB , с параллельными сторонами AD и BC и с гипотенузами AC и BD , пересекающимися в точке P , то $PC:PB = PB:PA = PA:PD$. Значит, если можно построить такую фигуру, где $PD = 2PC$, то задача будет решена. Инструмент, с помощью которого такую фигуру можно вычертить, сделать нетрудно.

Далее попытку решения задачи об удвоении куба связывают с именем Менехма ([4], с. 141—143; [4'], т. III, с. 92—99), который примерно в 340 г. до н.э. нашел два ее решения.

В первом из них он показал, что две параболы с общей вершиной и взаимно перпендикулярными осями, такие, что фокальный параметр одной вдвое больше фокального параметра другой⁴, пересекаются еще в одной точке, причем абсцисса (или ордината) этой точки дает искомое решение. Если мы используем аналитическую запись, то это очевидно; в самом деле, если параболы имеют уравнения $y^2 = 2ax$ и $x^2 = ay$, то они пересекаются в точке, абсцисса которой определяется условием $x^3 = 2a^3$. Вероятно, данный метод был подсказан формой, которую придал рассматриваемой задаче Гиппократ, а именно: найти x и y , такие, что $a:x = x:y = y:2a$, откуда $x^3 = ay$ и $y^2 = 2ax$.

Второе решение, предложенное Менехмом, состоит в следующем. Чертим параболу с фокальным параметром $l/2$. Затем чертим равнобочную гиперболу с расстоянием между вершинами $4l$, асимптотами которой служат касательная в вершине и ось указанной параболы. Тогда ордината и абсцисса точки пересечения этих кривых являются средними пропорциональными между l и $2l$. В этом легко убедиться. Рассматриваемые кривые описываются уравнениями $x^2 = ly$ и $xy = 2l^2$. Они пересекаются в точке, определяемой условиями $x^3 = 2l^3$ и $y^3 = 4l^3$. Следовательно,

$$l:x = x:y = y:2l.$$

Решение Аполлония ([4], с. 137; [4'], т. III, с. 76—79) *, полученное примерно в 220 г. до н.э., выглядит так⁵. Нужно найти два средних пропорциональных между двумя заданными отрезками. Строим прямоугольник $OADB$, смежные стороны OA и OB которого равны

* Это решение приведено в моей книге [7], с. 84.

двум данным отрезкам. Пусть C — середина отрезка AB . Описываем окружность с центром в точке C так, чтобы она пересекала продолженную сторону OA в точке a , а продолженную сторону OB — в точке b и чтобы точки a, D, b лежали на одной прямой. Если такую окружность можно провести, то $OA : Bb = Bb : Aa = Aa : OB$, т. е. Bb и Aa — два средних пропорциональных между OA и OB . Построить эту окружность «евклидовыми методами» невозможно, но Аполлоний указал механический способ ее нахождения.

Из прочих построений античности я упомяну лишь принадлежащее Диоклесу и Сфору ([14], с. 138, 139, 141; [4'], т. III, с. 78—84, 90—93). Оно состоит в следующем. Две стороны OA и OB прямоугольника берем равными тем двум отрезкам, средние пропорциональные между которыми мы ищем. Пусть OA — больший из отрезков. Описываем окружность с центром O и радиусом OA . Пусть продолжение за B стороны OB пересекает эту окружность в точке C , а продолжение за O стороны OA — в точке D . Находим точку E на BC , такую, что если DE пересекает продолжение отрезка AB в точке F , а окружность — в точке G , то $FE = EG$. Если E можно найти, то OE — первое из двух средних пропорциональных между OA и OB . Чтобы определить точку E , Диоклес изобрел специальную кривую, которая сегодня называется *циссоидой Диоклеса*, но эту точку ее не сложнее найти и с помощью конических сечений.

В более позднее время предлагался ряд других решений. Здесь можно упомянуть три решения Гюйгенса ([8], с. 393—396), но я изложу лишь те, которые принадлежат соответственно Виету, Декарту, Григорию Сент-Винценту и Ньютону.

Начнем с построения Виета [9]. Описываем окружность с центром в точке O и радиусом, равным половине длины большего из двух данных отрезков. В ней проводим хорду AB , равную меньшему из этих отрезков. AB продолжается до точки E , такой, что $BE = AB$. Через точку A проводим прямую AF , параллельную OE . Через O проводим прямую $DOCFG$, пересекающую окружность в точках D и C , прямую AF — в точке F , продолжение отрезка BA — в точке G так, что $GF = OA$. Если такую прямую можно провести, то $AB : GC = GC : GA = GA : CD$.

Декарт указал ([10], с. 99), что кривые

$$x^2 = ay \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = ay + bx$$

пересекаются в точке (x, y) , такой, что $a : x = x : y = y : b$. Это эквивалентно первому из решений Менехма; однако Декарт предпочел использовать окружность, а не второе коническое сечение.

Конструкция Сент-Винцента имела форму следующей теоремы [11]. Гипербола, проходящая через точку пересечения двух сторон прямоугольника так, что две другие стороны этого прямоугольника служат ее асимптотами, пересекается с окружностью, описанной вокруг этого прямоугольника, в точке, расстояния от которой до асимптот равны средним пропорциональным между двумя соседними сторонами прямоугольника. Это не более чем геометрическая формулировка утверждения о том, что кривые $xy = ab$ и $x^2 + y^2 = ay + bx$ пересекаются в точке (x, y) , такой, что $a : x = x : y = y : b$.

Одно из принадлежащих Ньютону построений таково ([12], с. 318, 319, 323). Пусть OA — наибольший из двух данных отрезков, середина которого — точка B . Описываем окружность радиусом OB с центром O . На ней берем точку C так, чтобы отрезок BC был равен второму из двух данных отрезков. Через точку O проводим прямую ODE , пересекающую продолжение отрезка AC в точке D и продолжение отрезка BC в точке E так, что высекаемый отрезок DE равен OB . Тогда $BC : OD = OD : CE = CE : OA$. Следовательно, OD и CE — это два средних пропорциональных между отрезками BC и OA .

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА*

Трисекция угла — вторая из рассматриваемых нами «классических задач», но об ее происхождении предания умалчивают. Мы приведем два древнейших и наиболее известных построения. На них ссылается Папп ([14], предл. 32, 33, с. 97—99)**, но я не знаю, кто первым их придумал.

Вот одно из них. Пусть $\angle AOB$ — данный угол. Из произвольной точки P стороны OB опускаем перпендикуляр PM на OA . Через P проводим прямую PR , параллельную OA . На MP возьмем точку Q , такую, что если OQ продолжить до пересечения с PR в точке R , то $QR = 2OP$.

* Библиография по этому вопросу имеется в [13].

** О применении к данной задаче традиционных греческих методов анализа см. [5], с. 245—247.

Если осуществить это построение, то $\angle AOR = \frac{1}{3}\angle AOB$.

Наше решение опирается на определение положения точки R . Здесь может помочь построение, которое аналитически описывается так. Пусть заданный угол — это $\operatorname{arctg}(b/a)$. Построим гиперболу $xy = ab$ и окружность $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4(a^2 + b^2)$; пусть при этом x — наибольшая из абсцисс точек пересечения этих двух кривых. Тогда $PR = x - a$ и $\operatorname{arctg}(b/x) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(b/a)$.

Второе построение проводится так. Пусть $\angle AOB$ — заданный угол. Примем, что $OB = OA$, и опишем окружность с центром в точке O и радиусом OA . Продолжим теперь AO за O и возьмем на этом продолжении такую внешнюю по отношению к этой окружности точку C , что если CB пересекает окружность в D , то CD равно OA . Проведем OE параллельно CDB . Тогда, если мы осуществим это построение, $\angle AOE = \frac{1}{3}\angle AOB$. Древние находили положение точки C с помощью *конхоиды* Никомеда, но его можно определить также с помощью конических сечений.

Перейдем к изложению некоторых других решений, ограничиваясь теми, что выполняются с помощью конических сечений.

Из других конструкций, предложенных Паппом ([14], предл. 34, с. 99—104), приведу следующую. Начертим гиперболу, эксцентриситет которой равен 2. Обозначим ее центр через C , а вершины — через A и A' . Продолжим CA' до такой точки S , что $A'S = CA'$. Построим теперь такую дугу окружности с концами A и S , чтобы опирающийся на нее центральный угол был равен заданному. Пусть перпендикуляр к отрезку AS , восстановленный в его середине, пересекает эту дугу в точке O . Опишем окружность с центром O и радиусом OA или OS ; пусть она пересечет проходящую через A' ветвь гиперболы в точке P . Тогда $\angle SOP = \frac{1}{3}\angle SOA$.

В более близкие нам времена одно из самых ранних решений с непосредственным применением конических сечений было предложено Декартом, который использовал пересечение окружности и параболы. Его построение ([10], с. 100) эквивалентно определению отличных от начала координат точек пересечения параболы $y^2 = x/4$ и окружности

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4}x + 4ay = 0.$$

Ординаты этих точек задаются уравнением $4y^3 = 3y - a$. Меньший положительный корень такого уравнения — это синус одной трети угла, синус которого равен a . Доказательство этого опирается на достаточно очевидное тождество $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

Одно из решений, указанных Ньютоном, практически эквивалентно третьему из приведенных выше решений Паппа. Оно состоит в следующем (ср. [12], с. 319—322). Пусть A — вершина одной из двух ветвей гиперболы, эксцентриситет которой равен двум, а S — фокус другой ветви. Опишем дугу окружности с концами A и S , такую, чтобы опирающийся на нее центральный угол был дополнителен к данному углу. Если эта окружность пересекает ветвь с фокусом S в точке P , то $\angle PAS$ равен одной трети данного угла.

Следующее элегантное решение найдено Клеро*. Пусть $\angle AOB$ — данный угол и $OA = OB$. Опишем окружность с центром O и радиусом OA . Соединим точки A и B и разделим отрезок AB на три равные части точками H и K так, что $AH = HK = KB$. Разделим угол AOB пополам прямой OC , пересекающей AB в точке L . Тогда $AH = 2HL$. Начертим гиперболу с фокусом A , вершиной H и директрисой OC . Пусть та ветвь гиперболы, которая проходит через H , пересекает окружность в точке P . Опустим из P перпендикуляр PM на OC и продолжим его до пересечения с окружностью в точке Q . Тогда в силу свойств фокуса и директрисы гиперболы $AP : PM = AH : HL = 2 : 1$; значит, $AP = 2PM = PQ$. По симметрии $AP = PQ = QB$. Следовательно, $AOP = POQ = QOB$.

Этот раздел я завершу решением, которое Шаль [16] считает основным. Оно эквивалентно следующему предложению. Если OA и OB — ограничивающие радиусы дуги AB окружности, то равнобокая гипербола, для которой OA служит диаметром и которая проходит через точку пересечения продолжения OB с касательной к этой окружности в точке A , будет проходить через одну из двух точек трисекции дуги AB .

Для механического решения этой задачи были созданы различные инструменты.

* Я думаю, что первым это решение получил Клеро, но ссылка на его работу мною утеряна. В качестве примера эта конструкция встречается в книге [15].

Цель третьей задачи — найти сторону квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга *.

На протяжении веков исследование этой проблемы вызывало повышенный интерес, причем не только у математиков, но зачастую — даже в еще большей степени — у широкой публики. Число (ошибочных) доказательств было так велико, что в 1775 г. Парижская академия сочла необходимым принять резолюцию — не рассматривать больше решений задачи о квадратуре круга. Хотя многочисленные попытки найти решение этой задачи принесли свои плоды, приведя к установлению ряда важных теорем, в более позднее время те, кто был в состоянии понять, что именно здесь требуется, перестали заниматься этой проблемой. История этого вопроса столь подробно излагалась компетентными авторами, что я ограничусь здесь самым кратким обзором.

Архимед показал ([4"], с. 266—267) (но, возможно, это было известно и ранее), что данная задача эквивалентна нахождению площади прямоугольного треугольника, катеты которого равны соответственно периметру и радиусу рассматриваемого круга. Половина отношения этих величин — это число, обозначаемое обычно π .

Иррациональность этого числа была доказана Ламбертом [20] в 1761 г. Он показал, что если $x (\neq 0)$ рационально, то ни e^x , ни $\operatorname{tg} x$ не могут быть рациональны; но так как $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, значит, $\pi/4$, а следовательно, и π должны быть иррациональны.

Трансцендентность числа π была установлена впервые Линдеманном [21] в 1882 г. Его доказательство приводит к заключению, что если x является корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, то e^x не может быть рациональным числом, поэтому если πi — корень такого уравнения, то $e^{\pi i}$ не может быть рационально. Но $e^{\pi i} = -1$ и, таким образом, рационально; следовательно, πi , а значит, и π не может быть алгебраическим числом — корнем алгебраического уравнения с рациональными (или целыми) ко-

* См. [17], а также статьи де Моргана, особенно [18]. Популярный обзор составлен Шубертом [78]. После публикации более ранних изданий настоящей книги проф. Рудно из Цюриха дал анализ рассуждений Архимеда, Гюйгенса, Ламберта и Лежандра по этому вопросу, а также введение в его историю [19].

эффициентами. (Не являющиеся алгебраическими числа называют трансцендентными.)

Ранее Джеймс Грегори [22] пытался доказать невозможность квадратуры круга, но его доказательство не было убедительным.

Я должен только добавить, что если π понимать лишь как отношение длины окружности к ее диаметру, то определение его численного значения с большой точностью не должно представлять заметного интереса⁶. Однако то, что π обычно определяют именно так, не должно вводить в заблуждение. Число π — это одна из фундаментальных математических констант; оно встречается в множестве разнообразных математических предложений. Типичный пример — равенство $e^{\pi i} + 1 = 0$. На самом деле тот факт, что отношение длины окружности к ее диаметру равно π , — это вовсе не лучшее определение числа π , а лишь одно из многочисленных свойств этого числа. Я помню, как известный профессор объяснял, насколько непохожа была бы на нашу повседневная жизнь существ в мире, где основные законы арифметики, алгебры и геометрии отличны от тех, которые кажутся очевидными нам; но он тут же добавил, что невозможно вообразить мир, в котором не существовало бы чисел π и e .

Использование символа π для обозначения числа 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679 .. восходит к 1647 г., когда Утред использовал δ/π для обозначения отношения диаметра к длине окружности, но в 1697 г. Д. Грегори использовал π/r для обозначения отношения длины окружности к ее радиусу. Отдельный символ π стал употребляться в начале XVIII в. В 1706 г. Уильям Джонс [23] обозначил отношение длины окружности к ее диаметру буквой π ; несколькими годами позже Иоганн Бернулли* обозначил эту величину буквой c . Эйлер в 1734 г. использовал букву p , а в 1736 г. — букву s ; Кристиан Гольдбах в 1742 г. использовал π , а после опубликования знаменитого «Введения в анализ бесконечно малых» Эйлера символ π стал общеупотребительным.

Численное значение π можно приближенно определить одним из двух методов с любой необходимой степенью точности.

* См. заметки Г. Энтрема в [24].

Первый из этих методов — геометрический. Он состоит в вычислении периметров многоугольника, вписанного в окружность, и многоугольника, описанного вокруг нее, причем предполагается, что длина окружности заключена между значениями этих периметров*. Приближение будет более точным, если вместо периметров использовать площади. Второй, современный метод опирается на использование определенных бесконечных сходящихся рядов, сумма которых равна π или выражается через π .

Можно сказать, что те из вычислявших π математиков, которые использовали первый метод, исходили из геометрического определения числа π , а те, кто использовал аналитические методы, трактовали это число как математический символ, возникающий в многочисленных разделах математического анализа и обозначающий некоторую константу, значение которой можно (и нужно) найти.

Читателя, вероятно, заинтересует приведенный ниже список приближенных значений для π , полученных разными авторами**, — данные многовекового «соревнования» в этом вопросе.

В Египте [30] примерно в 1700 г. до н. э. принимали, что π равно $256/81$, что в десятичной записи соответствует 3,1605. Более грубое приближение в виде числа 3 использовалось в Вавилоне [31] и Иудее [32]. Похоже, что эти числа были получены эмпирически.

Мы переходим к длинному перечню греческих математиков, занимавшихся этим вопросом. Сомнительно, чтобы исследования представителей ионийской школы, пифагорейцев, Анаксагора, Гиппия, Антифона, Брисона привели к хорошим приближенным числовым значениям для π , — поэтому мы не будем останавливаться на трудах этих ученых. Гиппократ Хиосский изобретательно и вполне корректно произвел квадратуру некоторых лунок⁷, но значение π отсюда вывести нельзя, и, по всей вероятности, позднее представители Афинской школы направили свои усилия на другие вопросы.

История этого метода излагается в [25].

** О методах, которыми пользовались в античности, и полученных тогда результатах можно прочесть в [26]. О средневековых и современных приближениях см. статью де Моргана о квадратуре круга в [27], с дополнениями Б. де Хаана в [28]. Заключение были сведены в таблицы, отредактированы и обобщены Дж. У. Л. Глэшером (см. [29]).

Вероятно, Евклид, знаменитый основатель Александрийской школы, знал, что π больше 3 и меньше 4*, но не сформулировал этого утверждения в явной форме.

Математическая разработка интересующего нас вопроса началась с Архимеда, который доказал, что π меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$, т. е. лежит между 3,1428... и 3,1408... Он установил это ([4], с. 205—216; [4'], т. I, с. 263—271; [4''], с. 267—270), вписывая в окружность и описывая вокруг нее правильные 96-угольники, определяя из геометрических соображений периметры этих многоугольников и предполагая, что длина окружности заключена между значениями этих периметров; из полученных таким образом результатов Архимед и вывел границы для π . Этот метод эквивалентен использованию утверждения $\sin \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta$, где $\theta = \pi/96$; значения $\sin \theta$ и $\operatorname{tg} \theta$ Архимед вывел из значений $\sin(\pi/3)$ и $\operatorname{tg}(\pi/3)$ многократным делением угла пополам. Если берется многоугольник с n сторонами, то число правильных знаков для π , полученных таким путем, равно целой части от $2 \lg n - 1,19$. Результат Архимеда дает два верных десятичных знака. Его рассуждения приводят к заключению, что длина окружности диаметром 4970 футов лежит между 15610 и 15620 футами; на самом деле она равна приблизительно 15613 футам 9 дюймам.

Какие-то критические замечания по поводу этих результатов высказывал Аполлоний, но они до нас не дошли.

Герон Александрийский [33] давал значение 3, но приводил [34] и результат $\frac{22}{7}$; возможно, что первое число предназначалось им лишь для грубых приближений.

Из приближений, известных грекам, следует еще упомянуть лишь данное Птолемеем [35], который утверждал, что $\pi = 3^\circ 8' 30''$, т. е. что (в современной записи) $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} \approx 3,1416$.

Для грубых вычислений римские землемеры, по-видимому, брали значение 3, а иногда 4. Для более точных приближений они часто использовали $3\frac{1}{8}$ вместо $3\frac{1}{7}$, поскольку последнее приближение приводит к дробям, с которыми в двенадцатеричной арифметике значительно удобнее работать. С другой стороны, Герберт [36] (примерно в 1000 г.) рекомендовал для π значение $\frac{22}{7}$.

* Эти результаты могут быть выведены из его «Начал», книга IV, предложения 15 и 8, а также книга XII, предложение 16.

Прежде чем переходить к средневековым и современным европейским математикам, уместно сказать несколько слов о результатах, полученных в Индии и на Востоке.

БAUDХАЙАНА (см. [37]) принимает в качестве значения π дробь $\frac{49}{16}$.

АРИАБХАТА [38] (примерно в 530 г.) дает значение $\frac{62832}{20000}$, что равно 3,1416. Он показывает, что если a — сторона правильного n -угольника, вписанного в окружность единичного диаметра, а b — сторона вписанного правильного $2n$ -угольника, то $b^2 = (\frac{1}{2}) - (1 - a^2)^{1/2}/2$. Исходя из стороны вписанного шестиугольника, он последовательно находит стороны многоугольников с 12, 24, 48, 96, 192 и 384 сторонами и в качестве периметра последнего указывает число $\sqrt{9,8694}$. Отсюда с помощью приближений для квадратных корней получается его результат.

БРАХМАГУПТА (около 650 г.) ([39], с. 308) дает значение $\sqrt{10}$, что равно 3,1622... . Говорят, что это значение он получил, вписывая в окружность единичного радиуса многоугольники с 12, 24, 48 и 96 сторонами и вычисляя последовательно их периметры, которые получились равными $\sqrt{9,65}$, $\sqrt{9,81}$, $\sqrt{9,86}$, $\sqrt{9,87}$ соответственно, и предположив, что при неограниченном возрастании числа сторон периметр будет приближаться к $\sqrt{10}$.

БХАСКАРА (около 1150 г.) указал два приближения. Одно из них ([39], с. 87) (возможно, почерпнутое от Арьябхаты, но вычисленное заново методом Архимеда с помощью периметров правильных 384-угольников) равно $\frac{3927}{1250}$, т. е. 3,1416.

Китайский астроном Цзу Чунчжи (род. в 430 г.) доказал [40], что значение π лежит между 3,1415926 и 3,1415927, и указал значение $\frac{355}{113}$, которое он назвал «правильным».

Среди арабских математиков следует отметить Дж. Г. ал-Каши (около 1436 г.), который нашел для 2π значение 6,2831853071795865. Это значение, верное во всех 16 десятичных знаках, было получено из вычисленного им ранее в шестидесятеричной системе значения с 9 знаками. Этим он поставил рекорд, продержавшийся до 1596 г. Кроме того, почти наверняка можно сказать, что это был первый пример перевода дроби из одной системы счисления в другую [41],

Возвращаясь к европейским математикам, проследим, как были найдены последовательные приближения для числа π (причем многие из полученных до XVIII в. значений были первоначально вычислены, чтобы доказать ошибочность какой-то якобы найденной квадратуры).

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) [42] в XVIII в. дал для π значение $1440/458^{1/3}$, что равно 3,1418... . В XV в. Пурбах [43] указал (вычисленное, возможно, не им) значение $62832/20000$, равное 3,1416. Николай Кузанский считал, что точным значением π будет $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$, равное 3,1423, и говорят, что в 1464 г. Региомонтан (Йоганн Мюллер) дал значение 3,14243*.

Виет [44]** в 1579 г. показал, что π больше, чем $31415926535/10^{10}$, и меньше, чем $31415926537/10^{10}$. Этот результат Виет получил на основании значений периметров вписанных и описанных многоугольников с 6×2^{16} сторонами, вычисленных многократным применением формулы $2 \sin^2(\theta/2) = 1 - \cos \theta$. Он также установил [45] результат, эквивалентный формуле⁸

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Отец Адриана Меция в 1585 г. привел для π значение $355/113$, равное 3,14159292... , — правильное в шести десятичных знаках [46]. Это была любопытная и счастливая догадка, так как доказал он лишь, что значение π лежит в пределах между $377/120$ и $333/106$, и отсюда заключил, что истинное дробное значение π он получит, если возьмет среднее значение числителей и среднее значение знаменателей этих дробей.

В 1593 г. Адриан ван Ромен [47]*** вычислил периметр вписанного правильного многоугольника с 1073741824 (т. е. 2^{30}) сторонами и отсюда определил π с 15 правильными десятичными знаками.

* Этот результат Региомонтан сообщил в своей работе *De Quadratura Circuli* (Nuremberg, 1533), которую он направил кардиналу Николаю Кузанскому; там он доказывал, что результат самого кардинала неверен. Я (У. Болл. — *Перев.*) не имею возможности дать точную ссылку на названную работу; однако эти цифры приводят компетентные авторы, и они не вызывают у меня сомнений.

** Вероятно, эта работа была отпечатана лишь для распространения среди узкого круга частных лиц; это очень редкая книга.

*** Это очень редкая книга, и, к сожалению, я не имел возможности ее посмотреть,

Лудольф ван Цейлен посвятил вычислению π значительную часть жизни. В 1596 г. он указал ([48], [48']) значение π с точностью до 20 десятичных знаков — они были получены путем определения периметров вписанного и описанного правильных многоугольников с 60×2^{33} сторонами, что Цейлен сделал с помощью многократного применения своей собственной теоремы, эквивалентной формуле $1 - \cos A = 2 \sin^2(A/2)$. У меня есть оттиск его тщательно выполненной гравюры, где изображена дата вычисления и сам результат, расположенный по окружности, которая помещена под портретом автора. Цейлен умер в 1610 г.; по его распоряжению полученный им результат с 35 десятичными знаками (именно столько знаков он вычислил) был выгравирован на его надгробии* в церкви св. Петра в Лейдене. В его книге по арифметике [49]**, опубликованной после его смерти, указано 32 десятичных знака числа π , найденные вычислением периметра многоугольника, имеющего 2^{62} , т. е. 4611686018427387904, сторон. Ван Цейлен также составил таблицу периметров различных правильных многоугольников.

Виллеброрд Снелль [50] в 1621 г. получил с помощью 2^{30} -угольника приближение с 34 десятичными знаками. Это меньше, чем у ван Цейлена, но метод Снелля был настолько совершеннее, что свои 34 знака он сумел получить с помощью многоугольника, из которого ван Цейлену удалось «извлечь» только 14 (или, быть может, 16) знаков. Используя шестиугольник, Снелль нашел столь верное приближение для числа π , для которого Архимеду понадобился 96-угольник, а 96-угольник позволил Снеллю правильно вычислить 7 десятичных знаков, тогда как Архимед получил только два. Это объясняется тем, что Архимед, вычисляя длину сторон вписанного и описанного правильных n -угольников, считал, что $1/n$ длины окружности лежит между этими значениями, в то время как Снелль, исходя из сторон этих многоугольников, строил две другие линии, дающие более точные пределы для определения длины соответствующей дуги. Метод Снелля опирался на

* Эта надпись приведена проф. де Хааном в *Messenger of Mathematics*, 1874 (N. S.), vol. III, p. 25.

** Латинский перевод этой книги, выполненный В. Снеллем, был опубликован в Лейдене в 1615 г. под названием *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. Эта работа была переиздана вместе с латинским переводом книги [48] под заглавием «De Circulo» [48'].

теорему $3 \sin \theta / (2 + \cos \theta) < \theta < 2 \sin (\theta/3) + \lg (\theta/3)$, которая позволила ему с помощью n -угольника получить число правильных знаков, большее или равное целой части от $4 \lg n - 0,2305$. Это вдвое больше, чем удавалось получить старыми методами. Доказательство Снелля его теоремы ошибочно, однако сама теорема верна.

Снелль также составил таблицу* периметров всех правильных вписанных и описанных многоугольников с числом сторон 10×2^n для n от 3 до 19. Большую часть данных Снелль заимствовал из таблицы Цейлена, но некоторые результаты были вычислены заново. Список такого рода был дан также Джеймсом Грегори (см. [22], предл. 29, а также [8], с. 447).

В 1630 г. Гринбергер [51] с помощью теоремы Снелля довел приближенное значение π до 39 десятичных знаков. Он был последним из математиков, пользовавшихся классическим методом вычисления π с помощью периметров вписанного и описанного многоугольников. Дальнейшее уточнение значения π представлялось уже бесполезным. Доказательства теорем, использованных Снеллем и другими математиками, вычислявшими π этим методом, дал Гюйгенс в работе [52], которую можно считать заключительной в истории данного метода.

В 1659 г. Валлис [53]** доказал, что⁸

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{7} \dots,$$

и с помощью одного результата, установленного несколькими годами ранее Броункером, вывел формулу⁹

$$4/\pi = 1 + 1^2/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + 7^2/\dots,$$

но ни одна из этих теорем для вычислений всерьез не использовалась.

Последующие вычисления опирались на бесконечные сходящиеся ряды. Этот метод явился реальным предшественником исчисления бесконечно малых, хотя Декарт (см. [55]) указал геометрический процесс, эквивалентный использованию таких рядов. Применить бесконечные ряды предложил Джеймс Грегори***, установив-

* Ее упоминает Монтукла ([17], с. 70).

** Анализ исследования Валлиса дал Кэли [54].

*** См. письмо к Коллинзу от 15 февраля 1671 г., опубликованное в [56] и [57].

ший, что

$$\theta = \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \theta - \dots;$$

этот результат верен лишь в том случае, если θ лежит между $-\pi/4$ и $\pi/4$.

Первым математиком, использовавшим ряд Грегори для нахождения приближенного значения π , был Абрахам Шарп (см. [58])* , который по предложению Холли определил 72 десятичных знака этого числа (из них 71 знак был найден правильно). Это приближение Шарп получил, подставляя значение $\theta = \pi/6$ в ряд Грегори.

Мэчин [59] не позже 1706 г. указал для π 100 десятичных знаков (все правильные). Он вычислял их по формуле

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Де Ланьи [60] в 1719 г., подставляя $\theta = \pi/6$ в ряд Грегори, нашел 127 десятичных знаков (из них 112 правильно) числа π .

Хаттон [61] в 1776 г. и Эйлер [62]** в 1779 г. предлагали использовать для вычисления π формулы $\pi/4 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ или $\pi/4 = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$, но ни один из них не довел приближения до числа знаков, полученного ранее.

Вега [63] в 1789 г. указал значение π с точностью до 143 десятичных знаков (из них верных оказалось лишь 126), а в 1794 г. [64] — с точностью до 140 знаков (из них 136 верных).

К концу XVIII в. фон Цах обнаружил в Научной библиотеке Радклифа в Оксфорде рукопись неизвестного автора, в которой значение π было указано с точностью до 154 десятичных знаков (из них 152 верных). В 1837 г. этот результат был опубликован [65].

В 1841 г. Резерфорд [66], используя формулу

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99},$$

вычислил 208 знаков (152 верно).

* Работа Шарпа приведена в одном из предварительных обсуждений, предпосланных «Математическим таблицам» Шервина, которые были изданы в Лондоне в 1705 г. Вероятно, обсуждения были опубликованы в то же время, но самые ранние из виденных мной экземпляров были отпечатаны в 1717 г.

** Доклад был прочитан в 1779 г.

В 1844 г. Дазе [67] довел точность до 205 десятичных знаков (из них 200 было вычислено верно), используя формулу

$$\frac{1}{4} \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

В 1847 г. Клаузен [68] продвинулся до 250 знаков (из них 248 были верны), производя вычисления независимо по двум следующим формулам:

$$\frac{1}{4} \pi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7},$$

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

В 1853 г. Резерфорд [69] довел свое предыдущее приближение до 440 десятичных знаков (все оказались правильными), а Уильям Шенкс продолжил аппроксимацию до 530 знаков (527 верных) [70]. В течение следующих двадцати лет он пытался увеличить точность вычисления¹⁰, но ошибка в 528-м знаке свела на нет все дальнейшие усилия [71].

В 1853 г. Рихтер ([72], т. XXI, с. 119), возможно не зная того, что уже было сделано в Англии, нашел 333 десятичных знака значения π (из них 330 — правильно), в 1854 г. * он довел число знаков до 400, а в 1855 г. ([72], т. XXV, с. 472; [73]) — до 500.

Из рядов и формул, с помощью которых были вычислены эти приближенные значения, наиболее легки для расчетов, по-видимому, те, которыми пользовались Мэчин и Дазе. Укажем другие выражения, которые сходятся медленнее:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = 22 \operatorname{arctg} \frac{1}{28} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{443} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{1393} - \\ - 10 \operatorname{arctg} \frac{1}{11018}; \end{aligned}$$

последнее из них предложил Эскотт **.

Нельзя без грусти думать о том, что вычисления, на которые бедный Шенкс потратил значительную часть

* См. [72], т. XXIII, с. 476; приближенное значение, приведенное в [72], т. XXII, с. 473, было верно лишь до 330-го знака.

** Подробное обсуждение таких формул см. в [74].

своей жизни, современная ЭВМ может воспроизвести (без его роковой ошибки) всего за несколько секунд просто для «разминки».

Что касается тех авторов, которые были уверены, что им удалось решить задачу о квадратуре круга, то имя им — легион; большинство из них были глубоко невежественны, так что их попытки не стоит здесь обсуждать. «Только докажите мне, что это невозможно, — заявил один из них, — и я тут же примусь за дело». К сожалению, именно утверждение о том, что та или иная проблема неразрешима, сразу же привлекает к ней широкое внимание дилетантов.

Среди геометрических способов приближения к истинному значению π самый простой, по-видимому, следующий. В данную окружность вписывается квадрат. Затем к утроенному диаметру окружности прибавляется пятая часть стороны этого квадрата. Длина получившегося отрезка отличается от длины окружности меньше чем на одну семнадцатитысячную последней.

Одно из приближенных значений числа π было получено экспериментально с помощью теории вероятностей¹¹. На плоскости было начерчено некоторое число равноотстоящих параллельных прямых, расположенных на расстоянии a друг от друга. На эту плоскость падает палочка длиной $l < a$. Вероятность того, что, упав, палочка пересечет одну из этих прямых, равна $2l/\pi a$. Если повторить эксперимент много сотен раз, то отношение числа благоприятных исходов к общему числу экспериментов будет очень близко к этой дроби; следовательно, отсюда можно найти значение π . В 1855 г. мистер А. Смит из Абердина, проделав 3204 проб, получил $\pi = 3,1553$. Ученик де Моргана (см. [18], с. 171—172) при 600 испытаниях получил $\pi = 3,137$. В 1864 г. капитан Фокс [75] * провел 1120 испытаний с дополнительными предосторожностями и получил в качестве значения для π число 3,1419.

Предлагались и другие способы вычисления приближенных значений π . Например, известно, что если наудачу выписаны два числа, то вероятность того, что они взаимно просты, равна¹¹ $6/\pi^2$. Так, однажды [77], когда

* Занятное сообщение о «дополнительных предосторожностях» капитана Фокса и о невозможности получить действительно хорошее приближение таким методом см. в разделе «Too good to be true?» в книге [76].

каждый из 50 студентов написал наудачу по 5 пар чисел, 154 из этих пар оказались парами взаимно простых чисел. Это дает $6/\pi^2 = 154/250$, откуда $\pi = 3,12$.

1. Клейн Ф. Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии. — Казань: Физ.-мат. общество, 1898. Teixeira F. G. Sur les Problèmes célèbres de la Géométrie Élémentaire non résolubles avec la Règle et le Compas. — Coimbra, 1915.
2. Reimer N. T. Historia Problematis de Cubi Duplicatione. — Göttingen, 1798; Biering C. H. Historia Problematis Cubi Duplicandi. — Copenhagen, 1844; Sturm A. Das Delische Problem. — Linz, 1895—1897.
3. Philoponus ad Aristotelis Analytica Posteriora, bk. I, chap. VII.
4. Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis ex versione Jos. Torelli. — Oxford, 1792; 4'. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii (ed. J. L. Heiberg), I—III. — Leipzig: Teubner, 1880—1881; 4". Архимед. Сочинения. — М.: Физматгиз, 1962.
5. Leslie J. Geometrical Analysis. — Edinburgh (second ed.), 1811.
6. Proclus (ed. Friedliien), pp. 212—213.
7. Ball W. History of Mathematics. — London, 1901.
8. Huygens Ch. Opera Varia. — Leyden, 1724. (Ср. [19]).
9. Opera Mathematica (ed. Schooten). — Leyden, 1646, prop. V, pp. 242—243.
10. Декарт Р. Геометрия. — М. — Л.: ГОНТИ, 1938.
11. Gregory of St. Vincent. Opus Geometricum Quadraturae Circuli. — Antwerpen, 1647, bk. VI, prop. 138, p. 602.
12. Ньютон И. Всеобщая арифметика. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
13. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (Paris), May and June, 1904.
14. Pappus. Mathematicae Collections, bk. IV (ed. Commandino). — Bonn, 1670.
15. Taylor C. Geometry of Conics. — Cambridge, 1881, no. 308, p. 126.
16. Chasles. Traite des sections coniques. — Paris, 1865, art. 37, p. 36.
17. Montucla. Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle (ed. by P. L. Lacroix). — Paris, 1831.
18. De Morgan A. Budget of Paradoxes. — London, 1872.
19. О квадратуре круга. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио. — М.: ГТТИ, 1936.
20. Mémoires de l'Académie de Berlin for 1761. — Berlin, 1768, pp. 265—322 (см. также [19]).
21. Ueber die Zahl π . *Mathematische Annalen* (Leipzig), 1882, vol. XX, pp. 213—225.
22. Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura. — Padua, 1668; перепечатано в [8], pp. 405—462.
23. Synopsis Palmariorum Matheseos. — London, 1706, pp. 243, 263 etc.
24. *Biblioteka Mathematica* (Stockholm), 1889, vol. III, p. 28; там же, 1890, vol. IV, p. 22.
25. Selander K. E. I. Historik öfver Ludolphska Talet. — Upsala, 1868.
26. Cantor M. Geschichte der Mathematik, vol. I. — Leipzig, 1880.
27. *Penny Cyclopaedia*, vol. XIX (London), 1841.
28. *Verhandeligen of Amsterdam*, 1858, vol. IV, p. 22.

29. *Messenger of Mathematics* (Cambridge), 1873, vol. II, pp. 119—128; там же 1874, vol. III, pp. 27—47.
30. Eisenlohr A. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (т. е. папирус Ринда). — Leipzig, 1877, arts. 100—109, 117, 124.
31. Oppert. *Journal Asiatique*, August 1872, October 1874.
32. Библия. Третья книга Царств, гл. 7, стих 23; Вторая книга Паралипоменон, гл. 4, стих 2.
33. *Mensurae* (ed. Hultsch.). — Berlin, 1864, p. 188.
34. *Geometria* (ed. Hultsch.). — Berlin, 1864, pp. 115, 136.
35. *Almagest*, bk. VI, chap. 7 (ed. Halma), vol. I, p. 421.
36. *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris). — Clermont, 1867, p. 453.
37. The *Sulvasutras*, Asiatic Society of Bengal, 1871, arts. 26—28.
38. Rodet L. Lecons de calcul d'Aryabhata, *Journal Asiatique*, 1879, ser. 7, vol. XIII, pp. 10, 20.
39. *Algebra ... from Brahmegupta and Bhascara*. — London, 1817.
40. Hobson E. W. *Squaring the Circle*. — Cambridge, 1913, p. 24.
41. Кнут Д. Искусство программирования, т. 2. — М.: Мир, 1977, с. 205—206.
42. Boncompagni. *Scriti di Leonardo*, vol. II (*Pracica Geometriae*). — Rome, 1862, p. 90.
43. Regiomontanus. *De Triangulis*. — Basle, 1541, Appendix, p. 131.
44. *Canon Mathematicus seu ad Triangula*. — Paris, 1579, pp. 56, 66.
45. *Vietae Opera* (ed. Schooten). — Leyden, 1646, p. 400.
46. Metius A. *Arithmeticae libri duo et Geometriae*. — Leyden, 1626, pp. 88—89. (Вероятно, впервые эта книга вышла в свет в 1611 г.)
47. *Idaeae Mathematicae*. — Antwerpen, 1593.
48. Van den Circkel — Delft, 1596; 48'. *De Circulo*. — Leyden, 1619.
49. *De Arithmetische en Geometrisch Fondamenten*. — Leyden, 1615, p. 163.
50. *Cyclometricus*. — Leyden, 1621, p. 55.
51. *Elementa Trigonometrica*. — Rome, 1630, конец предисловия.
52. *De Circula Magnitudine Inventa*, 1654; [8] pp. 351—387. Доказательства приведены в книге: Pirie G. *Geometrical Methods of Approximating to the Value of π* . — London, 1877, pp. 21—23.
53. *Arithmetica Infinitorum*. — Oxford, 1656, prop. 191.
54. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1889, vol. XXIII, pp. 165—169.
55. Euler L. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum*. — Спб., 1763, т. VIII, cc. 157—168.
56. *Commercium Epistolicum*. — London, 1712, p. 25.
57. *Macclesfield Collection, Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century*. — Oxford, 1841, vol. II, p. 216.
58. *Cudworth W. Life of A. Sharp*. — London, 1889, p. 170.
59. Jones W. *Synopsis Palmariorum*. — London, 1706, p. 243; Maseres. *Scriptores Logarithmici*. — London, 1796, vol. III, pp. vii—ix, 155—164.
60. *Histoire de l'Académie for 1719*. — Paris, 1721, p. 144.
61. *Philosophical Transactions*, 1776, vol. LXVI, pp. 476—492.
62. *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae for 1793*. — Спб., 1798, т. XI, cc. 133—149.
63. *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae for 1790*. — Спб., 1795, т. IX, с. 41.
64. *Thesaurus Logarithmorum* (logarithmisch-trigonometrischer Tafeln). — Leipzig, 1794, p. 633.
65. Callet J. F. *Tables, etc., Précis Élémentaire*. — Paris, 1837.
66. *Philosophical Transactions*, 1841, p. 283.
67. *Crelle's Journal*, 1844, vol. XXVII, p. 198.

68. Schumacher. *Astronomische Nachrichten*, vol. XXV. p. 207.
69. *Proceedings of the Royal Society*, January, 20, 1853, vol. VI, pp. 273—275.
70. Shanks W. *Contributions of Mathematics*. — London, 1853, pp. 86—87.
71. Ferguson D. F. *Nature*, March 1946, vol. CLVII, p. 342.
72. *Grünert's Archiv*.
73. *Elbinger Anzeigen*, No. 85.
74. Todd J. *American Mathematical Monthly*, 949, vol. LVI, pp. 517—528.
75. *Messenger of Mathematics*. — Cambridge, 1873, vol. II, pp. 113.
76. O'Breine T. H. *Puzzles and Paradoxes*. — London, 965, pp. 195—197.
77. Charters R. Note on π . *Philosophical Magazine* (London), ser 6, vol. XXXIX, March 1904, p. 315.
78. Schubert H. *Die Quadrature des Zirkels*. — Hamburg, 1889.

ЧУДО-ВЫЧИСЛИТЕЛИ

Иногда встречаются люди, наделенные выдающимися способностями к устному счету*. За несколько секунд они перемножают большие числа, извлекают корни и решают многие другие задачи, на которые опытный математик, пользуясь карандашом и бумагой, тратит куда больше времени. Способности этих людей не ограничиваются только решением столь простых примеров. Многие чудо-вычислители решали и более сложные задачи, связанные, например, с разложением чисел на простые множители, нахождением сложных процентов, размеров ежегодной ренты, расчетом дат гражданского и церковного календарей, вычислением корней уравнений и т. д. Они делали это с легкостью, как только понимали, что от них требуется. Среди этих людей часто попадались совершенно неграмотные, и при вычислениях они обычно пользовались правилами собственного изобретения.

Выступления чудо-вычислителей производили столь сильное впечатление, что некоторые зрители верили, будто они обладают сверхъестественными способностями, недоступными другим. Такое мнение лишено оснований. Всякий человек с отличной памятью и природной склонностью к арифметике может достичь большой сноровки в устном счете, если будет уделять все свое внимание изучению чисел и постоянно упражняться; ну а выступления тех, кто одарен особым вычислительным талантом, действительно поразительны, — но ничего сверхъестественного в этом нет.

В этой главе я коротко расскажу о самых знаменитых чудо-вычислителях. Мы увидим, что в основном они

* Большинство данных о чудо-вычислителях (или, как их часто называют, «счетчиках») собрано Скрипчером [1], Митчеллом [2], а также Мюллером [3]. В своем рассказе я во многом опирался на эти статьи и в некоторых случаях, когда не мог обнаружить нужную информацию в первоисточниках, целиком полагался на названных авторов. В указанных работах можно найти и многочисленные библиографические ссылки.

пользовались одинаковыми приемами, хотя и доведенными до разной степени совершенства. Поэтому в последних примерах мы сочли достаточным просто кратко указать на особенности тех или иных вычислителей.

Речь пойдет только о настоящих самоучках; мы не упоминаем здесь немногочисленных эстрадных исполнителей, которые путем упорной практики, специальных приспособлений и артистических трюков лишь имитируют вычислительные способности. Кроме того, нас будут интересовать только те, кто проявил выдающиеся способности к счету еще в юности. Насколько мне известно, единственный вычислитель-самоучка средних лет, не попавший в наш список именно по этим соображениям, — это знаменитый Джон Валлис (1616—1703), профессор математики в Оксфорде, который уже в зрелом возрасте ради собственного удовольствия развил свои способности в устном счете. В качестве иллюстрации его достижений сообщу, например, что 22 декабря 1669 г., лежа в постели, он занялся вычислением (в уме) целой части квадратного корня из 3×10^{40} и несколько часов спустя по памяти записал результат. Этот факт привлек внимание — через два месяца ему предложили извлечь квадратный корень из 53-значного числа. Он выполнил вычисление в уме, а через месяц продиктовал ответ, который до этого не записывал. Подобные проявления вычислительных способностей и памяти характерны для многих чудо-вычислителей.

Одним из самых первых чудо-вычислителей, о котором сохранились письменные свидетельства, был Джедedia Бакстон, родившийся приблизительно в 1707 г. в Элмтоне (графство Дербишир, Великобритания). Хотя он и был сыном деревенского учителя, его образованием никто не занимался, и он никогда не учился ни читать, ни оперировать цифрами. Если не брать в расчет его вычислительного дара, то во всем остальном он отличался невысокими умственными способностями: абсолютно лишенный честолюбия, он всю жизнь оставался простым сельскохозяйственным рабочим и не извлекал никакой материальной выгоды из своего исключительного умения, кроме небольших сумм, которые он изредка получал от тех, кто заставлял его демонстрировать свое искусство. Умер Бакстон в 1772 г.

Бакстон не помнил, когда и почему он впервые увлекся устными вычислениями; нет никаких достоверных подробностей о его первых выступлениях. Однако числа,

по-видимому, всегда волновали его¹. Если речь заходила о размерах какого-то предмета, то он тут же принимался считать, сколько там дюймов или «толщин волоса»; если упоминался какой-то отрезок времени, он считал, какова его продолжительность в минутах; слушая проповедь, он думал только о том, сколько в ней слов или слогов. Благодаря постоянной практике его природные данные, несомненно, возросли; однако его представления оставались по-детски наивными и не шли дальше гордости собственной способностью точно производить подобные вычисления. Бакстон был тугодум и тратил на решение арифметических задачек гораздо больше времени, чем другие чудо-вычислители. Единственное практическое применение своим способностям он нашел в том, что, пройдя по полю неправильной формы, мог сразу определить его площадь.

Слава о Бакстоне постепенно распространялась по Дербиширу, к нему потянулись посетители. Их вопросы носили сугубо практический характер: сколько акров составляет прямоугольное поле длиной 351 и шириной 261 ярд? (ответ был дан через 11 мин); сколько нужно вынуть кубических ярдов земли, чтобы выкопать пруд длиной 426, шириной 263 и глубиной $2\frac{1}{2}$ фута? (ответ — через 15 мин); если звук проходит 1142 фута в секунду, за какое время он пройдет 5 миль? (ответ — через 15 мин). Эти результаты позволяют судить о способностях молодого Бакстона; однако, как видим, все эти вопросы не содержат принципиальных трудностей.

А вот несколько задач потруднее, которые Бакстон решал позднее, когда его способности достигли полного расцвета. Он подсчитал, какая сумма получится из одного фартинга, если произвести 140 удвоений: в ответе получается 39-значное число фунтов стерлингов и сверх того 2 шиллинга и 8 пенсов. Затем его попросили умножить полученное 39-значное число на само себя. На этот вопрос он ответил через два с половиной месяца, сказав при этом, что считал не все время, а лишь несколько раз урывками. В 1751 г. Бакстон подсчитал, сколько кубических дюймов в прямоугольном каменном блоке длиной 23 145 789, шириной 5 642 732 и толщиной 54 965 ярдов; сколько понадобится зерен, чтобы наполнить куб объемом 202 680 000 360 кубических миль, и сколько потребуется волосков длиной в 1 дюйм, чтобы заполнить то же пространство (размеры зерна и волоска заданы). В принципе эти задачи несложны, но входящие в них

числа столь велики, что для выполнения расчетов в уме вычислитель должен обладать феноменальной памятью. Во всех перечисленных случаях Бакстон дал правильный ответ, правда затратив на это значительные усилия. В 1753 г. его попросили определить размеры кубического ларя, вмещающего ровно 1 квартал солода. Он понял, что для этого требуется процесс, эквивалентный извлечению кубического корня, — совершенно незнакомая ему процедура, но через час сказал, что ребро куба должно составлять от $25\frac{1}{2}$ до 26 дюймов. Это действительно так; высказывалось предположение, что Бакстон получил ответ, пробуя разные числа.

В печати стали появляться сообщения о выступлениях Бакстона, и постепенно весть о нем дошла до Лондона, куда он и отправился в 1754 г. Подвергнув Бакстона всевозможным испытаниям, члены Королевского общества с удовлетворением убедились в том, что в его действиях нет обмана. Кто-то из новых знакомых повел Бакстона в театр Друри-Лейн посмотреть на знаменитого Гаррика: было интересно, как подействует пьеса на его воображение. Он остался равнодушен к происходившему на сцене, а выйдя из театра, назвал точное число слов, произнесенных разными актерами, и число шагов, сделанных танцорами.

Только в редких случаях Бакстон мог объяснить свои методы; однако о них известно достаточно, чтобы оценить всю их топорность. Например, он описал процесс умножения 456 на 378. Обозначим первое из чисел через a . Тогда, коротко говоря, последовательность действий, выполненных Бакстоном, выглядит следующим образом. Сначала он нашел $5a = b$; затем $20b = c$ и $3c = d$. После этого он образовал $15b = e$ и прибавил его к d . Наконец, он нашел $3a$, прибавил к предыдущей сумме — и назвал ответ. Таким образом, фактически он представил множитель 378 в виде $(5 \times 20 \times 3) + (5 \times 15) + 3$. Как предполагает Митчелл, это могло означать, что Бакстон считал при помощи кратных 60 и 15, сводя таким способом умножение к сложению. Быть может, и так, поскольку трудно предположить, будто он не понимал, что последовательное умножение на 5 и на 20 равносильно умножению на 100, результат которого получается сразу. Бакстон никогда не слышал о биллионах, триллионах и т. д. и для представления больших чисел, которые требовалось найти в некоторых предлагаемых ему задачах, изобрел собственную систему обозначений: число 10^{18}

он называл *кланом* (tribe), а 10^{36} — *судорогой* (cramp).

Как и все чудо-вычислители, Бакстон обладал великолепной памятью, что со временем позволило ему узнать много разнообразных фактических данных (произведения некоторых постоянно встречающихся чисел, число минут в году, число «толщин волоса» в миле), значительно упрощавших подсчеты. Он обладал, кроме того, одной любопытной и, пожалуй, уникальной особенностью: мог прервать производимые им в уме вычисления, переключиться на другие занятия, а через какое-то время, иногда через несколько недель, вернуться к прерванному решению задачи. На простые вопросы он мог отвечать одновременно двум или более спрашивающим.

Другой чудо-вычислитель XVIII в., негр Томас Фуллер, родился в Африке в 1710 г. В 1724 г. его продали в рабство и привезли в Виргинию (США), где он и жил до самой смерти; умер Фуллер в 1790 г. Подобно Бакстону, Фуллер не учился ни читать, ни писать; все его способности исчерпывались умением считать в уме. Он справлялся с умножением двух чисел, каждое из которых содержало не более девяти цифр; мог сосчитать число секунд в заданном интервале времени; число зерен в заданном объеме и т. п. — короче говоря, решать стандартные задачи, предлагаемые обычно таким вычислителям, если в них не содержалось ничего сложнее умножения и тройного правила. Фуллер соображал быстрее Бакстона, но медленнее других «самородков», о которых речь пойдет дальше.

Теперь я упомяну двух выдающихся ученых, которые уже в раннем детстве проявили подобную одаренность. Один из них — Андре Мари Ампер (1775—1836). Ребенком, в возрасте примерно четырех лет, он привык выполнять в уме длинные вычисления, пользуясь правилами, которые узнал из игр с камешками. Хотя Ампер и в дальнейшем блестяще владел устным счетом и был наделен феноменальной памятью на числа, он не развивал в себе специально именно вычислительные способности. Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), напротив, большую часть жизни посвятил сложнейшим вычислениям. Конечно, Гаусс опирался при этом на глубокое знание теории чисел*, но склонность к вычислениям проявилась у него еще в раннем детстве. В возрасте трех

* Методы, которые применял Гаусс, подробно описаны в работе [4].

лет он поразил отца, исправив ошибку в подсчете платежей за сверхурочную работу. Быть может, это свидетельствует лишь о том, как рано начал развиваться его необычный талант.

Другой замечательный пример — Ричард Уэйтли (1787—1863), ставший архиепископом Дублинским. Когда ему было лет шесть, он проявил незаурядные способности к устному счету; однако примерно через три года они пропали. «Я рано научился, — вспоминал он, — решать в уме самые трудные примеры, потому что не умел записывать числа и не знал названия тех действий, которые выполнял. Думаю, что в основном это были примеры на умножение, деление и тройное правило... Я решал их намного быстрее, чем это возможно при помощи карандаша и бумаги, и не помню, чтобы когда-нибудь допустил хоть малейшую ошибку. С утра до вечера я занимался только вычислениями да фантазированием... В школе, когда это увлечение прошло, я оказался совершенным тупицей в арифметике, и так им и остался». Однако на самом деле в дальнейшем арифметические способности архиепископа были гораздо выше, нежели он здесь описывает.

Большое внимание привлекли выступления в Лондоне в 1812 г. Зера Колберна. Колберн родился в 1804 г. в Кэботе (штат Вермонт, США) в семье мелкого фермера. Ему еще не было шести лет, когда проявились его невероятные способности к устному счету. Мальчика возили по всем Соединенным Штатам, а через два года отправили в Англию, где его многократно обследовали весьма авторитетные лица. Четырехзначные числа он перемножал мгновенно, а пятизначные — с небольшой заминкой. Среди вопросов, которые ему тогда предлагали, был такой: возвести 8 в 16-ю степень. Через несколько секунд он назвал правильный ответ: 281 474 976 710 656. Затем его попросили возвести 2, 3, ..., 9 в 10-ю степень. Он делал это с такой скоростью, что его ответы просто не успевали записывать. Когда требовалось возводить в высокую степень двузначные числа, например 37 или 59, дело шло не так быстро. Колберн молниеносно извлекал квадратные и кубические корни (если они выражались целыми числами) из больших чисел, например квадратный корень из 106 929 и кубический корень из 268 336 125, — но для нахождения целочисленных корней есть много разных методов. Более интересны его ответы на вопросы о множителях целых чисел. Когда

его попросили назвать множители числа 247 483, он ответил: 941 и 263; для числа 171 395 он назвал множители 5, 7, 59 и 83; о числе 36 083 сказал, что у него нет множителей. Однако он с трудом находил множители чисел, больших 1 000 000. Колберн обладал исключительной способностью разлагать на множители большие числа, пользуясь в основном методом двузначных окончаний, о котором речь пойдет ниже. Подобно всем чудо-вычислителям, выступающим перед публикой, ему приходилось выслушивать насмешки, однако он обычно в таких ситуациях не терялся. Так, однажды его спросили, сколько нужно черных бобов, чтобы получить три белых, и он, как говорят, не задумываясь ответил: «Три, если снять с них кожуру». Правда, похоже на то, что об этом вопросе его заранее предупредили.

Наблюдателям было ясно, что мальчик пользовался определенными правилами: во время подсчетов он шевелил губами, как бы выражая все действия словами. В его честности, по-видимому, не приходилось сомневаться. В нескольких случаях он сумел объяснить свой метод. Когда его попросили возвести в квадрат 4395, он замялся, но после повторения вопроса дал правильный ответ: 19 316 025. На вопрос о причинах заминки он ответил, что не любит умножать четыре цифры на четыре цифры и добавил: «Я нашел другой способ — умножил 293 на 293, а потом дважды умножил произведение на 15». В другой раз, когда потребовалось умножить 21 734 на 543, он немедленно ответил: 11 801 562 — и на распросы объяснил, что получил нужное произведение, умножив 65 202 на 181. Эти факты свидетельствуют о том, что, когда это было удобно, он разлагал числа, с которыми работал, на множители.

В 1814 г. Колберна повезли в Париж, но в бурной политической обстановке тех лет его выступления не привлекли особого внимания. Однако английские и американские поклонники таланта Колберна собрали достаточную сумму денег, чтобы отправить его учиться сначала в лицей Наполеона в Париже, а затем в Вестминстерскую школу в Лондоне. Во время учебы его вычислительные способности ослабли, и он лишился той детской непосредственности, которая очаровывала зрителей раньше. Дальнейший жизненный путь Колберна был весьма извилист и не особенно успешен: он вновь начал было выступать на эстраде, но отказался от этого и стал школьным учителем, затем, вернувшись в США, некото-

рое время был проповедником, а позднее стал преподавать иностранные языки. Он написал автобиографию, в которой изложил свои методы вычислений. Умер Колберн в 1840 г.

Современником Колберна был другой мальчик-самоучка, Джордж Паркер Биддер, наделенный исключительными способностями такого рода. Быть может, это самый интересный из чудо-вычислителей, ибо, даже получив впоследствии широкое образование, он сохранил свой вычислительный дар. На склоне лет Биддер проанализировал и объяснил методы, которыми он пользовался.

Биддер родился в 1806 г. в Мортон-Хэмпстеде (графство Девоншир, Великобритания) в семье каменщика. В возрасте шести лет его научили считать до ста. Посланный в деревенскую школу, он почерпнул там немного и в начале своей «вычислительной карьеры» абсолютно не разбирался в арифметических терминах и числовых символах. Вооруженный лишь умением считать, он самостоятельно научился складывать, вычитать и умножать числа, меньшие 100, перебирая и перекладывая бусинки или пуговицы.

В дальнейшем он придавал большое значение этим конкретным представлениям и был убежден, что его способности развились именно благодаря тому, что в свое время он ничего не знал о числовых символах. В семилетнем возрасте, услышав спор соседей о стоимости какого-то товара, продававшегося на фунты, он поразил их заявлением, что они оба ошиблись, и назвал правильную цену. После этого жители деревни с удовольствием предлагали ему разнообразные арифметические задачки.

Репутация Биддера как вундеркинда-вычислителя неуклонно росла, и едва ему исполнилось девять лет, как отец, вознамерившись заработать на способностях сына, отправился с ним в «гастрольную поездку» по стране.

В 1817 г. Биддера увидели двое выпускников Кембриджского университета, ставшие впоследствии знаменитыми учеными — Томас Джефсон (бывший в то время наставником в колледже Сент-Джонз) и Джон Гершель. Потрясенные собратительностью мальчика, они собрали деньги на его обучение и уговорили отца отказаться от эстрадных выступлений. Но через несколько месяцев Биддер-старший, не смирившись с потерей лег-

кого заработка, заставил сына вернуться и снова стал демонстрировать публике его способности. В 1818 г. юный Биддер состязался с Колберном — и в целом оказался более способным вычислителем. В конце концов отец и сын приехали в Эдинбург; здесь в дело вмешались профессора Эдинбургского университета, которые убедили Биддера-старшего предоставить им право позаботиться об образовании сына. Мальчик остался в Эдинбурге, окончил университет и вскоре овладел профессией инженера-строителя, достигнув на этом поприще больших высот. Умер он в 1878 г.

От постоянных упражнений способности Биддера непрерывно развивались. В своих ранних выступлениях он делал примерно то же, что Бакстон и Колберн. Кроме вопросов, касающихся произведений чисел или нахождения числа каких-то определенных единиц в заданном количестве, он начиная с 1819 г. успешно справлялся с множеством других задач: извлекал квадратные, кубические и т. д. корни из больших чисел (если корни были целыми); позднее он объяснил свой несложный в применении метод: это тот же метод, которым пользовался Колберн. К этому времени Биддер научился также мгновенно решать простейшие задачи на сложные проценты и залачи, связанные с подсчетом ренты, что особенно восхищало его современников. В разложении чисел на множители его успехи были скромнее, чем у Колберна, и, как правило, если число было больше 10 000, он не мог сразу дать ответ. Как и Колберну, ему часто приходилось сталкиваться с насмешками, но он умел постоять за себя. Когда во время одного из выступлений в Лондоне в 1818 г. Биддера спросили, сколько понадобится бычьих хвостов, чтобы достать до Луны, Биддер не задумываясь ответил: «Один, если он достаточно длинный».

Приведем несколько типичных вопросов, которые Биддеру задавали на выступлениях в 1815—1819 гг. Они взяты из подлинных записей, содержащих сотни подобных задач, — принципиально трудных среди них мало. Он работал очень быстро; однако записи вели малоквалифицированные люди, и потому указанное там время, затраченное Биддером на ответ, дает лишь приблизительное представление об истинной скорости его работы. Все вычисления Биддер производил в уме без помощи книг, карандаша и бумаги. В 1815 г., когда ему было 9 лет, его спросили: «Если Луна удалена от Земли на

расстояние 123 256 миль, а звук распространяется со скоростью 4 мили/мин, то через сколько времени жители Луны могли бы узнать о битве при Ватерлоо?» Ответ: 21 сутки 9 часов 34 минуты — был дан менее чем через минуту. В 1816 г., когда ему было 10 лет и он только что научился писать, но еще не умел записывать числа, он легко отвечал на вопросы такого типа: какие проценты нарастут с 11 111 фунтов стерлингов за 11 111 дней при 5 % годовых? Ответ: 16 911 фунтов 11 шиллингов — был дан через минуту. Сколько хогсхедов сидра получится из миллиона яблок, если из 30 яблок получается одна кварта? Для ответа: 132 хогсхеда 17 галлонов 1 кварта и 10 яблок в придачу — потребовалось 35 секунд. Если колесо имеет в окружности 5 футов 10 дюймов, то сколько оборотов оно совершит на пути в 800 000 000 миль? Ответ: 724 114 285 704 оборота и 20 дюймов в остатке — дан через 50 секунд. Чему равен квадратный корень из 119 550 669 121? Ответ: 345 761 — дан через 30 секунд. В 1817 г., когда Биддеру было 11 лет, его спросили: сколько времени нужно, чтобы наполнить резервуар объемом в одну кубическую милю, если в него вливается из реки 120 галлонов в минуту? Ответ дан через 2 минуты. Уильям Гершель задал такую задачу: предполагая, что свет доходит от Солнца до Земли за 8 минут и Солнце находится на расстоянии 98 000 000 миль, определить, на каком расстоянии от Земли находится ближайшая звезда, если известно, что свет от нее доходит до Земли за 6 лет 4 месяца, а в году 365 дней 6 часов и в каждом месяце 28 дней. Ответ: 40 633 740 000 000 миль. В 1818 г. на одном из выступлений Биддера спросили: «Маятник часов раскачивается на $9\frac{3}{4}$ дюйма в секунду; сколько дюймов он пройдет за 7 лет 14 суток 2 часа 1 минуту 56 секунд, если считать, что год состоит из 365 дней 5 часов 48 минут 55 секунд?» Ответ: 2 165 625 744 $\frac{3}{4}$ дюймов — дан быстрее чем через минуту. Если я торгую наручными часами, и всего их у меня 42, первые часы я продаю за один фартинг, а цену каждого следующих удваиваю, то сколько будут стоить последние часы?» Ответ: 2 290 649 224 фунта 10 шиллингов 8 пенсов. «Если диаметр монеты в 1 пенс равен $1\frac{3}{8}$ дюйма, то сколько понадобится денег (в фунтах стерлингов), чтобы выложить по окружности земного шара «дорожку» из этих монет, укладывая их вплотную друг к другу, при условии что

окружность составляет 360 градусов, а в одном градусе 69,5 миль?» Ответ: 4 803 340 фунтов — дан через одну минуту. Найти два числа, разность которых равна 12, а произведение, умноженное на сумму, равно 14560. Ответ: 14 и 26. В 1819 г., когда Биддеру было 14 лет, его попросили найти число, куб которого, уменьшенный на 19, в произведении с этим кубом дает куб числа 6. Ответ: 3 — был дан мгновенно. «Во что обойдется строительство дороги длиной в 21 милю 5 фарлонгов 37 полей 4 ярда, если прокладка 1 мили стоит 123 фунта 14 шиллингов 6 пенсов?» Ответ: 2688 фунтов 13 шиллингов $9\frac{3}{4}$ пенса — дан через две минуты. «Если вы тратите ежедневно полкроны, вам сейчас 14 лет и вы проживете еще 50, сколько фартингов вы истратите за всю свою жизнь?» Ответ: 2 805 120 — дан через 15 секунд. Г-н Мур заключил контракт на освещение города Лондона 22 965 321 лампой; подрезка фитиля и зажигание одной лампы обходится в 7 фартингов, каждые три лампы потребляют $\frac{2}{9}$ пинты масла, галлон масла стоит 3 шиллинга $7\frac{1}{2}$ пенсов. Его прибыль составила $16\frac{1}{2}$ процентов от затрат. Сколько галлонов масла было израсходовано, каковы были затраты г-на Мура и на какую сумму заключен контракт? Ответ: расход масла 212 641 галлонов, затраты составили 205 996 фунтов 16 шиллингов $1\frac{3}{4}$ пенса, а сумма контракта — 239 986 фунтов 13 шиллингов 2 пенса.

Следует отметить, что Биддер мысленно представлял себе числа, скажем 984, не как записанные в символах, а конкретно — как соответствующее количество единиц, которые можно распределить на 24 группы по 41 единице в каждой. Подобно другому вычислителю, Иноди, о котором будет сказано ниже, он воспринимал числа в основном на слух. «Что касается меня, — писал он позднее, — то, хотя я и привык видеть задачи и величины выраженными в обычных символах, но все же, если я собирался удержать в памяти какое-то число цифр, написанных на бумаге, это требовало гораздо больше времени и значительно более сильного напряжения, чем когда я воспринимал их на слух». Допустим, требовалось, например, найти произведение двух чисел, каждое из девяти цифр; если их «читали мне, то никогда не нужно было повторять это дважды, если же их записывали обычным образом и давали мне в руки, то мне приходилось внимательно рассматривать их раза по четыре, прежде чем я мог их повторить, — но и после этого

они не запечатлевались столь живо в моем воображении».

Биддер сохранил свой талант быстро считать в уме до конца жизни, что очень пригодилось ему как постоянному парламентскому консультанту по техническим вопросам. Незадолго до смерти он продемонстрировал свои способности одному приятелю, который, говоря о последних научных открытиях, заметил, что длина волн, вызывающих ощущение красного цвета, так мала, что 36 918 этих длин помещаются в одном дюйме. Если свет распространяется со скоростью 190 000 миль в секунду, то каким громадным должно быть число волн, попадающих на сетчатку глаза в одну секунду, чтобы дать ощущение красного! «Не трудитесь считать, — сказал Биддер, — это число 444 433 651 200 000».

Другие члены семьи Биддера тоже обладали выдающимися способностями подобного рода и необычайной памятью. Один из старших братьев Биддера стал актуарием (статистиком страхового общества); рассказывают, что, когда при пожаре сгорели его регистрационные книги, он за шесть месяцев переписал их по памяти, но после этого умер от воспаления мозга. Второй брат был членом секты «Плимутская братия» и знал наизусть всю Библию, причем для каждой цитаты мог назвать главу и номер стиха. Старший сын Биддера, известный юрист, мог перемножить в уме два пятнадцатизначных числа. Он не достиг уровня отца ни в точности, ни в быстроте, да, собственно, никогда и не собирался безраздельно посвятить себя развитию этих способностей. Он говорил, что при счете в уме оперирует изображениями чисел: «Если я решаю пример в уме, то всегда представляю себе определенные зрительные образы; я не знаю другого способа устного счета». Таким образом, его метод был противоположен тому, которым пользовался отец. Его сын и дочь, представители третьего поколения чудо-вычислителей, унаследовали подобные способности.

Далее я назову Анри Мондые и Вито Манджамеле. Оба они родились в 1826 г. в бедных семьях, были пастухами, в детстве проявили большую ловкость в счете и прославились в своей округе. В 1839 г. Мондые, а в 1840 Манджамеле привезли в Париж, где они демонстрировали свое искусство перед публикой. Их «экзаменовали» Араго, Коши и др. Более впечатляющими были выступления Мондые. В частности, когда ему пред-

ложили решить уравнение $x^3 + 84 = 37x$, он сразу назвал два корня: 3 и 4, упустив, однако третий корень: —7. Затем его попросили найти решения неопределенного уравнения $x^2 - y^2 = 133$; он сразу назвал 66 и 67. Когда же его попросили отыскать решение попроще, он через мгновение ответил: 6 и 13. Однако я не буду подробно говорить об этих ребятах, поскольку высказывались подозрения, хотя и не подтвержденные, что они действовали не совсем честно, и были обучены теми, кто их использовал, определенным приемам, позволявшим симулировать способности, которыми они на самом деле не обладали. В конце концов оба они вернулись в свои деревни, и учеиый мир потерял к ним интерес. Если Мондые действительно был самоучкой, то мы должны признать за ним честь открытия некоторых алгебраических теорем, что позволяет отнести его к рангу математических гениев; однако в таком случае кажется невероятным, что в дальнейшем он ничего более не сделал и что его способности не нашли иного проявления.

Более интересный пример — Иоганн Мартин Захария Дазе. Он родился в Гамбурге в 1824 г., получил приличное образование и имел все возможности для развития своих способностей; однако кроме решения вопросов, связанных с числами и расчетами, он ни в чем не преуспел и при этом поражал зрителей своей вялой медлительностью. До конца своих дней Дазе так и не постиг геометрии; он также не знал ни одного языка, кроме немецкого. Он был просто исполнительным работником, занимая различные мелкие должности в Германии. Свои вычислительные способности Дазе демонстрировал в Германии, Австрии и Англии. Умер он в 1861 г.

На «гастролях» в Вене в 1840 г. он познакомился со Страшницким, который уговаривал его использовать свой дар в научных целях. Дазе охотно согласился — и на этой почве состоялось его знакомство с Гауссом, Шумахером, Петерсеном и Энке. О его вкладе в науку я расскажу позже. Из числа его достижений в устном счете я нашел только упоминания о решении задач на умножение, типа умножить 79 532 853 на 93 758 479; этот вопрос задал ему Шумахер — ответ был дан через 54 секунды. Чтобы сосчитать произведение двух двадцатизначных чисел, ему понадобилось 6 минут; на перемножение двух сороказначных чисел он затратил 40 минут, а двух чисел, содержащих по сто цифр, — 8 часов 45 минут. По мнению Гаусса, решение последнего вопроса на

бумаге заняло бы у опытного вычислителя вдвое меньше времени. Однажды Дазе за 52 минуты извлек квадратный корень из числа, состоящего из 100 цифр. Это достижение намного превосходит все другие подобные рекорды; с ним может сравниться разве что возведение в квадрат 39-значного числа, которое выполнил Бакстон, или извлечение квадратного корня из 53-значного числа, произведенное Валлисом. Однако Дазе иногда допускал ошибки, а однажды (в 1845 г.) на все поставленные ему вопросы отвечал неправильно. Правда, в тот день он страдал головной болью, так что подобная неудача вполне объяснима.

Как и другие чудо-вычислители, Дазе обладал великолепной памятью и через час-два после выступления мог повторить все упомянутые на нем числа. Он отличался еще одной интересной особенностью: с первого взгляда мог определить (с точностью примерно до 80) количество овец в стаде, число книг в шкафу и т. д., а также мог мысленно представлять и запоминать большое число предметов. Например, поглядев секунду на открытые кости домино, он назвал сумму очков на них (117); на вопрос о количестве букв в выбранной наугад строке на печатной странице большого формата он мгновенно дал правильный ответ (63); за полсекунды он запомнил двенадцать показанных ему цифр и мог сразу сказать, какая цифра стоит на любом названном месте. Остается только пожалеть, что так мало известно об этих его выступлениях. Те, кто знаком с захватывающей автобиографией Робер-Гудена*, вспоминают, как маэстро развивал в себе подобные способности и как пригодились они в его искусстве.

Если Дазе разрешалось пользоваться карандашом и бумагой, он выполнял любые вычисления неправдоподобно быстро и всегда безошибочно. Когда Дазе было 16 лет, Страшницкий, научив его пользоваться известной формулой,

$$\pi/4 = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{8},$$

попросил вычислить с помощью этой формулы число π . Через два месяца Дазе дал приближенный результат до 205-го знака (включительно) после запятой. Из них пер-

* Жак-Эжен Робер-Гуден (1805—1871) — французский иллюзионист. — *Прим. перев.*

вые 200 знаков оказались верными *. Другими достижением Дазе было вычисление семизначных натуральных логарифмов первых 1 005 000 чисел. Он делал это в свободное время в период 1844—1847 гг., когда участвовал в топографических работах в Пруссии. В последующие два года он составил (тоже в свободное время) таблицу гиперболических функций для военных расчетов, которая была издана австрийским правительством в 1857 г. Позже он предложил составить таблицу разложений на множители всех чисел от 7 до 10 миллионов; по рекомендации Гаусса Гамбургская академия наук согласилась оказать Дазе материальную помощь, чтобы он мог максимально сосредоточиться на этом занятии, однако за оставшуюся часть жизни он успел завершить лишь примерно половину работы.

Еще один чудо-вычислитель, Трумен Генри Саффорд, родился в 1836 г. в Роялтоне (штат Вермонт, США). Он был человеком иного типа: получил хорошее образование, окончил Гарвардский университет и в конце концов стал астрономом. Я установил, что, хотя Саффорд всегда умел быстро считать, свои юношеские феноменальные способности в этой области он постепенно утратил. Умер он в 1901 г.

Саффорд никогда не выступал перед публикой, и я узнал о нем лишь из сообщений, процитированных Скрипчером и Митчеллом; судя по этим сообщениям, он обладал типичными для подобных вычислителей способностями. В 1842 г. он развлекал и поражал расчетами в уме свою семью. В 1846 г. в возрасте 10 лет он подвергся испытаниям, на которых ему были предложены следующие задачи. Извлечь кубический корень из семизначного числа (ответ дан сразу). Найти такое число, после деления которого на произведение составляющих его цифр получается 3, а после прибавления к нему 18 его цифры переставляются в обратном порядке (ответ: 24 — был дан примерно через минуту). Найти площадь поверхности правильной пирамиды, основание которой — правильный пятиугольник со стороной 33,5 фута, а высота боковой грани 17 футов (ответ: 3354, 5558 квадратных футов — дан через две минуты). Когда Саффорда попросили возвести в квадрат 18-значное число,

* Его результаты опубликованы в [5]; о более точных приближениях и более простых формулах см. гл. XII.

он потратил на это меньше минуты; правда, дело облегчалось тем, что в этом числе шесть раз повторялись одни и те же три цифры: 3, 6, 5. Подобно Колберну, Саффорд легко разлагал на множители большие числа. В таких случаях он действовал эмпирически: выбирал вероятные множители (он не мог объяснить, как) и за несколько секунд проверял их делением.

Позднее появились еще четыре вычислителя: итальянец Уго Дзамебоне (родился в 1867 г.), грек Перикл Диаманди (родился в 1868 г.), немец Карл Рюкле и Жак Иноди. Три первых чудо-вычислителя ничем особым не отличались среди своих «собратьев», и о них я не буду рассказывать, а вот выступления Иноди заслуживают более подробного описания.

Жак Иноди [6] родился в 1867 г. в Онорато (Италия). В детские годы он пас скот, и в те долгие часы, когда позволяла работа, любил размышлять о числах; при этом он не пользовался никакими конкретными предметами вроде камешков. Способности Иноди к счету впервые привлекли внимание примерно в 1873 г. Вскоре после этого его старший брат отправился в Прованс попытать счастья шарманщиком. Сопровождая его, юный Иноди оказался в гуще жизни и сумел заработать несколько монет, демонстрируя на улицах свое искусство. Им заинтересовались эстрадные антрепренеры — так в 1880 г. он попал в Париж. Во время выступлений он покорял зрителей скромностью, честностью и непосредственностью. В те дни он не умел еще ни читать, ни писать; этому он научился позднее. В его первых выступлениях не было ничего особенно примечательного по сравнению с другими вычислителями, но благодаря непрерывной практике он постоянно совершенствовался. Так, выступая в 1873 г. в Лионе, он почти мгновенно перемножал два трехзначных числа. В 1874 г. он мог перемножать шестизначные числа. Через девять лет он уже очень быстро справлялся с перемножением девятидесятизначных чисел. Еще позднее, в Париже, когда Дарбу предложил ему возвести в куб 27, он затратил на это всего 10 секунд. За 13 секунд он подсчитал, сколько секунд содержат 18 лет 7 месяцев 21 сутки и 3 часа, и мгновенно вычислил квадратный корень из одной шестой разности между квадратом 4801 и единицей. Легко подсчитал он и количество пшеницы, причитающееся Сете — изобретателю шахмат, который, согласно преданию, по-

требовал 1 зерно за первую клетку шахматной доски, 2 зерна — за вторую, 4 — за третью и т. д. в геометрической прогрессии.

Иноди умел находить целочисленные корни уравнений и целочисленные решения задач, но действовал только методом проб и ошибок. Особым, присущим только ему качеством была его замечательная способность представлять числа, меньшие 10^5 , в виде суммы трех квадратов. Обычно он проделывал это за одну-две минуты. Он часто решал такие задачи в неофициальной обстановке, но не на эстраде, поскольку они требовали большого умственного напряжения.

Его выступления перед широкой публикой редко длились больше 12 минут и сводились к решению более простых задач. Обычная программа включала: вычитание одного 21-значного числа из другого; сложение пяти шестизначных чисел; перемножение двух четырехзначных чисел; извлечение кубического корня из девятизначного числа и корня пятой степени из двенадцатизначного; определение числа секунд в каком-то промежутке времени и дня недели, на который падает та или иная названная дата. Разумеется, вопросы задавали зрители. Для профессионального вычислителя такие задачи не содержат принципиальных трудностей. После того как числа назывались, Иноди медленно повторял каждое из них своему помощнику, который записывал его на доске, а потом медленно читал вслух, чтобы убедиться, что все правильно. Затем Иноди повторял число еще раз. К этому моменту задача обычно была уже решена, если же ему не хватало времени, он делал несколько замечаний общего характера, что не мешало ему в уме продолжать расчеты. Во время выступлений он всегда стоял лицом к зрителям, и то, что он никогда не оборачивался и не смотрел на доску, усиливало впечатление.

По всей вероятности, большинство чудо-вычислителей для запоминания чисел пользуются не только зрением и слухом, но и мышцами, управляющими артикуляцией. Раньше думали, что все вычислители мысленно представляют предлагаемые им числа в виде каких-то зрительных образов, и, действительно, некоторые из вычислителей действуют таким образом. Однако Иноди больше доверял слуху и артикуляции. Биддер тоже опирался в основном на слух, а если и представлял себе числа визуально, то не в виде цифровой записи, а как

конкретный набор единиц, в случае составного числа разделенный на группы. Рюкле, напротив, представлял числа зрительно. Вероятно, память у разных вычислителей действует по-разному. Иноди мог мысленно воспроизводить звук собственного голоса, повторяющего цифры заданного числа; когда же ему показывали написанные числа, это скорее сбивало его, чем помогало. Для более полного проявления своих возможностей ему, по видимому, нужна была и артикуляция; поэтому, прежде чем приступить к работе, он обычно повторял вслух предлагаемые ему числа. Для него имела значение последовательность звуков. Когда ему читали последовательность из 24 цифр, он запоминал ее на слух через 59 секунд и мог воспроизвести начиная с любого места в любую сторону. Мондые требовалось для этого пять минут. Числа, состоящие примерно из 100 цифр, Иноди запоминал подобным образом через 12 минут, Диаманди — через 25, а Рюкле — меньше чем через пять. Эта способность проявляется у вычислителей, только когда дело касается цифр; длинную последовательность букв они обычно запомнить не могут. Числа занимали Иноди больше всего на свете: он редко думал о чем-нибудь другом, они ему снились, а иногда он даже решал задачи во сне. Он обладал отличной памятью на числа, но вполне обычной (и даже хуже того) — на что-либо другое. В конце сеанса он мог повторить все заданные ему вопросы, в которых фигурировали сотни цифр, причем они сохранялись в его памяти в течение нескольких дней. Однажды его неожиданно спросили об одном 22-значном числе, которое встретилось в одном из вопросов, заданных ему на выступлении 8 дней назад, — и он тотчас назвал это число. Иноди многократно подвергали испытаниям; поэтому о нем известно больше, чем о его предшественниках, за исключением разве Биддера.

Рассказ Биддера о приемах счета, которые он придумал и успешно применял, содержится в лекции [7]*, прочитанной им в 1856 г. на заседании общества инженеров-строителей. Прежде чем перейти к описанию его методов, уместно сделать два общих замечания, которые

* С более ранним наброском лекции Биддера можно ознакомиться по рукописи; позднейшие варианты этой лекции интересны тем, что позволяют проследить за развитием, но мы не будем на них останавливаться.

следует иметь в виду в дальнейшем. Во-первых, он описывает свои методы в их усовершенствованном виде, а необязательно такими, как он применял их в детстве; более того, на практике для ускорения работы он, возможно, пользовался и другими приемами, не описанными в лекции. Во-вторых, бесспорно (несмотря на его уверения в обратном), что он, как и другие чудо-вычислители, обладал великолепной памятью, которая еще более развилась от постоянных упражнений. Приведем только один пример. В 1816 г. на одном выступлении ему прочитали число задом наперед, т. е. называя цифры с конца. Он сразу же назвал его в прямом порядке. Через час его спросили, помнит ли он еще это число. Он немедленно повторил его без единой ошибки. Это число было: 2 563 721 987 653 461 598 746 231 905 607 541 128 975 231.

Два из четырех основных арифметических действий — сложение и вычитание — весьма просты и поэтому не представляют интереса. Единственный заслуживающий внимания момент — это то, что при сложении трех или более чисел Биддер всегда прибавлял их по одному, о чем говорят приведенные ниже примеры. По его мнению, для ускорения счета в уме нужно всегда стараться организовать работу так, чтобы на каждом этапе иметь дело только с одним фактом. Тем же отличалась работа Иноди.

Естественно, первой задачей, с которой столкнулся Биддер, было умножение одного числа на другое, и к шести годам он самостоятельно выучил таблицу умножения до 10×10 . Скоро ему пришлось научиться решать примеры посложнее: любимец деревенского кузнеца, он часто проводил время в кузнице, и сидящим вокруг кузнечного горна мастерам нравилось задавать ему примеры на умножение. От произведений двузначных чисел, которые он называл мгновенно и без размышлений, он перешел к перемножению трехзначных и четырехзначных. Его старания вознаграждались мелкими монетами, и к восьми годам он научился перемножать шестизначные числа. Однажды ему удалось даже перемножить два числа из 12 цифр, но «это потребовало, — сказал он, — много времени и мучительного напряжения».

Он пользовался в принципе тем же методом, что описывается в обычных учебниках, но по ходу дела складывал полученные результаты. Так, при умножении 397 на 173 он действовал следующим образом:

имеем	$100 \times 397 = 39\,700$	
к этому нужно прибавить	$70 \times 300 = 21\,000$,	итого 60 700
то же	$70 \times 90 = 6\,300$,	» 67 000
»	$70 \times 7 = 490$,	» 67 490
»	$3 \times 300 = 900$,	» 68 390
»	$3 \times 90 = 270$,	» 68 660
»	$3 \times 7 = 21$,	» 68 681.

Мы сильно недооценим его быстроту, даже если дадим ему на каждый шаг по 1 секунде, — но и при столь низкой скорости он получил бы ответ уже через 7 секунд. При таком способе умножения ему на каждом шаге нужно сложить лишь два числа, а множители выбраны так, что у каждого только одна значащая цифра; это прием, характерный для всех чудо-вычислителей. Кроме того, на этом примере хорошо видно, что здесь Биддер, как всегда, действует слева направо, и, хотя в школах учат по-другому, это естественный и самый удобный способ. В результате он находит произведение чисел $(100 + 70 + 3)$ и $(300 + 90 + 7)$, или $(a + b + c)$ и $(d + e + f)$, в виде $ad + ae + \dots + cf$.

Таким способом умножение выполнялось настолько быстро, что, казалось, ответ готов мгновенно; практически получалось, что используется таблица умножения до 1000×1000 . На этой основе, работая с очень большими числами, например перемножая 965 446 371 и 843 409 133, Биддер расчленял их на три группы по три цифры и действовал так, как будто 965, 446 и т. д. были цифрами в некой системе счисления с основанием 1000. Став старше, он научился решать подобные задачи примерно за 6 минут. По-видимому, труднее всего было запомнить результат предыдущего шага, а не выполнить само умножение.

Иногда умножал таким же способом, но он добивался того, чтобы один из сомножителей имел только одну значащую цифру. Иногда он использовал отрицательные величины, например представлял 27×729 как $27 \times (730 - 1)$; кроме того, он рассматривал 25×841 как $84100/4$. При возведении в квадрат он обычно разбивал число в сумму $a + b$, выбирая a и b удобным образом и считая по формуле $a^2 + 2ab + b^2$.

Умножая на число какие-либо именованные величины, Биддер применял аналогичные приемы. Так, чтобы умножить 14 фунтов 15 шиллингов $6\frac{3}{4}$ пенса на 787, он действовал следующим образом:

Имеем	(787) (14) ф. = 11 018 ф. 0 ш. 0 п.,
к этому прибавляем	(787) (15) ш. = 590 ф. 5 ш. 0 п.
и получаем	11 608 ф. 5 ш. 0 п.;
к этому прибавляем	(787) (27) фарт. = 22 ф. 2 ш. $8\frac{1}{4}$ п.
и получаем	11 630 ф. 7 ш. $8\frac{1}{4}$ п.

Деление Биддер выполнял в основном так, как учат в школе, но умение молниеносно перемножать большие числа позволяло ему сразу указывать правильный результат, избавляя от ненужной работы. Так же действовал Иноди. Примеры на деление с остатком представляли бóльшую трудность. Биддер справлялся с ними лучше, чем большинство других вычислителей, но и у него они занимали гораздо больше времени, чем деление без остатка. На публичных выступлениях трудные примеры на деление обычно запрещались, что специально оговаривалось условиями сеанса.

Если Биддер знал, что в данном примере на деление остатка нет, он часто пользовался системой двузначных окончаний. Например, при делении 25696 на 176 он сразу догадывался, что в ответе должно быть трехзначное число с 1 в качестве первой цифры слева. Далее он замечал, что только четыре двузначных числа (а именно 21, 46, 71, 96) после умножения на 76 дают число, оканчивающееся на 96. Значит, в ответе может получиться одно из следующих чисел: 121, 146, 171 либо 196. Его опыт сразу же подсказывал, что 121 слишком мало, а 171 слишком велико и, значит, правильный ответ 146. Если он испытывал сомнения, то умножал 146 на 176 (что, по его словам, он мог делать «мгновенно») и таким способом проверял полученный результат. Интересно отметить, что, когда Биддеру, Колберну и некоторым другим чудо-вычислителям были заранее известны две последние цифры произведения двух чисел, они уже знали (быть может, подсознательно), что две последние цифры сомножителей имеют некоторый специфический вид. Эти закономерности подробно рассмотрены Митчеллом.

При делении Биддер часто пользовался приемом, который я буду называть *процессом цифровки*. На первый взгляд он кажется более трудоемким, чем обычный способ, но Биддер действовал с его помощью молниеносно — и это, как я полагаю, была его индивидуальная

особенность. Назовем *цифровой* числа цифру, которая получится, если найти сумму цифр этого числа, затем сумму цифр полученной суммы и т. д. — пока сумма не станет меньше 10. Цифровка числа равна цифровке произведения цифровок его множителей. Применим это свойство, как делал Биддер, для того чтобы узнать, делится ли 23 141 на 71. Цифровка числа 23 141 равна 2. Цифровка 71 равна 8. Значит, если 71 — один множитель, то цифровка второго множителя должна равняться 7, ибо $7 \times 8 = 56$ — это единственное кратное 8, цифровка которого равна 2. Но единственное число, которое после умножения на 71 даст две последние цифры 41, — это 71. А так как второй множитель должен иметь три цифры и его цифровка равна 7, этим множителем может быть только 871. Но и при беглом взгляде видно, что число 871 слишком велико. Значит, 71 не является множителем 23 141. Биддер считал, что этот способ действует гораздо быстрее, чем прямая проверка делением на 71. В качестве второго примера проверим, делится ли 23 141 на 73. Цифровка 23 141 равна 2, а цифровка 73 равна 1, следовательно, если второй множитель существует, его цифровка должна равняться 2. Но так как последние две цифры рассматриваемого числа — это 41, последние две цифры второго (предположительного) множителя должны быть 17. Этот множитель состоит из трех цифр и имеет цифровку 2, значит, он может равняться только 317. Проверка (умножением на 73) показывает, что действительно $73 \times 317 = 23\,141$.

Когда Биддер начал выступать перед публикой, ему, конечно, предлагали много разнообразных задач на измерения. Решая их, он узнал и запомнил множество фактических данных, часто встречающихся в таких задачах: например, сколько секунд в году, унций в тонне, квадратных дюймов в акре, пенсов в ста фунтах; усвоил также элементарные правила, связанные с разными календарями, и т. д. Информация подобного рода обязательно должна храниться в памяти всех чудо-вычислителей.

На выступлениях Биддеру часто предлагали вопросы, связанные с квадратными и кубическими корнями, а позднее и с корнями более высоких степеней. Его мгновенные ответы вызывали восторженное изумление легковерной публики. Однако если в ответе получается целое число, то нахождение его — всего лишь ловкий трюк, доступный каждому. Не вдаваясь подробно во все эти пра-

вила, приведем лишь несколько примеров, иллюстрирующих метод Биддера.

Допустим, что требуется извлечь квадратный корень из числа 337 561. Ясно, что ответом должно быть трехзначное число. Так как данное число лежит между $500^2 = 250\,000$ и $600^2 = 360\,000$, то первая слева цифра корня — это 5. Единственные двузначные числа, квадраты которых кончаются на 61, это 19, 31, 69, 81 — факт, известный Биддеру заранее. Значит, ответом может быть только одно из чисел: 519, 531, 569, 581. Далее он рассуждает так: 581 находится примерно в том же отношении к 500 и 600, что и 337 561 к 250 000 и 360 000, поэтому в ответе должно получиться 581; свое предположение он за пару секунд проверяет прямым умножением. Точно так же Биддер действует при извлечении квадратного корня из 442 225. Сразу видно, что первая слева цифра ответа — это 6, а так как данное число кончается на 225, то последними двумя цифрами могут быть лишь 15, 35, 65 или 85. Положение, которое число 442 225 занимает между 600^2 и 700^2 , подсказывает, что нужно испробовать 65. Значит, ответ здесь равен 665 — и, выполнив проверку, он называет это число. Сходные приемы извлечения корней придумали и другие вычислители.

Для кубических корней (в случае, когда заданное число является точным кубом) подобный метод действует еще быстрее. Так, при извлечении кубического корня из 188 132 517 Биддер сразу замечает, что ответ должен быть трехзначным, а так как $5^3 = 125$ и $6^3 = 216$, то его левая цифра — 5. Единственное двузначное число, куб которого кончается на 17, — это 73. Значит, ответ равен 573. Аналогично кубическим корнем из 180 362 125 должно быть трехзначное число, начинающееся с 5 и кончающееся на 65 или 85. Чтобы сделать правильный выбор, Биддер в уме находит куб 560 и, убедившись, что это число близко к заданному, предполагает, что ответ равен 565, и проверяет это, возводя его в куб. Как правило, обнаружить таким способом кубический корень с пятеркой на конце чуть-чуть труднее, чем с другой цифрой. Но заданное число должно делиться в этом случае на $5^3 = 125$; поэтому можно выполнить это деление и дальше применить тот же прием к частному. Так, указанное выше число 180 362 125 равно $5^3 \times 1\,442\,897$, и его кубический корень находится сразу: 5×113 , т. е. 565.

Для точных корней более высоких степеней этот процесс еще более упрощается, а для корней 5-й степени он смехотворно прост, так как в этом случае последняя цифра корня всегда совпадает с последней цифрой заданного числа. Если, например, предлагается извлечь корень 5-й степени из числа, меньшего 10^{10} , то в ответе должно получиться двузначное число. Поэтому достаточно помнить пятые степени чисел 10, 20, ..., 90, чтобы определить первую цифру корня; остается только выяснить, где между этими степенями лежит заданное число. Установив это и присоединив последнюю цифру, можно мгновенно назвать ответ. Если корень извлекается из большего числа, но не превосходящего 10^{15} , то ответ содержит три цифры, из которых средняя находится почти так же быстро, как и две остальные. Это скорее трюк, чем рекорд устного счета.

На более поздних выступлениях Биддеру иногда предлагали извлечь корень из числа, не являющегося точной степенью. В таком случае точное значение корня содержало дробную часть, и нужно было найти ближайшее к нему целое число. Если Биддер подозревал, что корень нацело не извлекается, он проверял это, «отбрасывая девятки», и, убедившись в своей правоте, дальше действовал подбором наилучших значений. Если ответ должен содержать три или более цифр, то извлечение корня становилось для вычислителя слишком большой нагрузкой; поэтому на публичных выступлениях подобные вопросы обычно запрещались.

Замечательные успехи Колберна в разложении чисел на множители привели к тому, что аналогичные вопросы стали задавать Биддеру, и он постепенно выработал определенные приемы, но, как мне кажется, так и не достиг высокого мастерства в этой области устных вычислений. Разумеется, он без труда выделял множители, являющиеся степенями двойки или пятерки, и почти так же быстро справлялся со степенями тройки. Для нахождения множителей, близких к квадратному корню из заданного числа, он всегда пытался представить это число в виде $a^2 - b^2$, после чего множители становятся очевидными. Другие множители он пытался найти описанным выше методом цифровки.

Биддер славился тем, что почти мгновенно справлялся с задачами на сложные проценты и вычисление размеров ренты. Это был его конек, хотя методом он пользовался совсем не простым. Рассмотрим для при-

мера, как он определял сложные проценты на сумму 100 фунтов за 14 лет при 5 % годовых. Сначала он высчитывал простые проценты, 14×5 фунтов = 70 фунтов. К концу первого года увеличение капитала составило 5 фунтов, на нихросло 5 шиллингов, т. е. одна крона, и так происходило 13 лет; к концу второго года капитал увеличился еще на 5 фунтов, а годовой процент составил 5 шиллингов, и так в течение 12 лет. Таким образом, к 70 фунтам нужно прибавить $(13 + 12 + \dots + 1)$ крон, т. е. $(13/2)(14)(5)$ шиллингов, или 22 фунта 15 шиллингов 0 пенсов, и в сумме получится 92 фунта 15 шиллингов 0 пенсов. Таким же образом 5 шиллингов, полагающиеся в конце второго года (как проценты на 5 фунтов прироста в конце первого года), дают годовой процент 3 пенса. В сумме все эти доходы по три пенса составят $(12/3)(13/2)(14)(3)$ пенсов, или 4 фунта 11 шиллингов 0 пенсов, что после прибавления к предыдущей сумме (92 фунта 15 шиллингов 0 пенсов) даст 97 фунтов 6 шиллингов 0 пенсов. К этому нужно прибавить полученную в силу тех же соображений величину $(11/4)(12/3)(13/2)(14)(3/20)$ пенсов, т. е. 12 шиллингов 6 пенсов, что даст 97 фунтов 18 шиллингов 6 пенсов. К этому нужно добавить $(10/5)(11/4) \times (12/3)(13/2)(14)(3/400)$ пенсов, т. е. 1 шиллинг 3 пенса, что вместе с предыдущим составит 97 фунтов 19 шиллингов 9 пенсов. К этому опять нужно добавить $(9/6)(10/5)(11/4)(12/3)(13/2)(14)(3/8000)$ пенсов, т. е. 1 пенс, после чего получится 97 фунтов 19 шиллингов 10 пенсов. Все остальные слагаемые в сумме не превысят фартинга; поэтому Биддер сразу называет ответ: 97 фунтов 19 шиллингов 10 пенсов. Расчет в этом конкретном случае занял у него около минуты — гораздо меньше времени, чем потратило бы на него большинство математиков, пользуясь таблицей логарифмов. Сейчас мы увидим, что в процессе решения этой задачи Биддер фактически занимался суммированием рядов.

В обычных обозначениях сумма сложных процентов в данном случае равна $(1,05)^{14} \times 100$ фунтов. Обозначим 100 фунтов через P , а 0,05 через r . Тогда эта сумма равна $P(1 + r)^{14}$, т. е. $P(1 + 14r + 91r^2 + \dots)$; при малых r ряд быстро сходится. Путем разработанной им системы рассуждений Биддер находил последовательные члены ряда и отбрасывал члены более высокого порядка, как только они становились достаточно малыми.

В своей лекции Биддер заметил, что если бы его

способности к запоминанию результатов были не хуже других его умственных способностей, то он мог бы легко вычислять логарифмы. Через несколько недель он действительно занялся этой задачей и разработал метод вычисления в уме значений логарифмов с точностью до седьмого-восьмого знака после запятой [8]. По просьбе Биддера его «проэкзаменовал» приятель, в ответ на вопросы которого он вычислил логарифмы чисел 71, 97, 659, 877, 1297, 8963, 9973, 115 249, 175 349, 290 011, 350 107, 229 847, 369 353 с точностью до восьмого десятичного знака, затратив на каждый расчет от 30 секунд до 4 минут. Все эти числа простые. В основном ответы Биддера были правильными, но в ряде случаев он допускал ошибки, правда, не более чем в одной цифре; все ошибки он моментально исправлял, как только ему указывали на них. Особенно поражает то, что эти свои потрясающие достижения Биддер продемонстрировал уже в возрасте за 50 лет.

Достойным завершением этой главы будет рассказ об Александре Крэйге Айткене, который был не только одним из самых выдающихся чудо-вычислителей, но и первоклассным математиком: он автор четырех книг и около 70 статей. Айткен родился в 1895 г. в Данидине (Новая Зеландия). Участник первой мировой войны, он получил в 1917 г. серьезное ранение. В 1923 г. Айткен перебрался из Новой Зеландии в Шотландию, в Эдинбург. Его диссертация на соискание степени доктора философии оказалась настолько значительной, что ему присудили более высокую степень — доктора наук. Всю жизнь он преподавал в Эдинбургском университете и в 1946 г. получил должность профессора математики, которую до него занимал Эдмунд Уиттекер. Айткен был замечательным педагогом, чутким и внимательным к своим студентам. Его феноменальные способности к устному счету [9] отчасти основывались на великолепной памяти. Он наизусть цитировал длинные отрывки из Вергилия или Мильтона. Как-то он заметил, что ему приходится очень осмотрительно выбирать развлекательное чтение, ибо потом ему трудно забыть прочитанное. Изредка он выступал перед публикой, мгновенно выполняя умножение, деление, извлечение квадратных и кубических корней или выписывая на доске (по памяти) 707 найденных Шенксом знаков числа π (см. с. 379). Когда в 1945 г. Фергюсон показал, что начиная с 528-го знака после запятой у Шенкса допущена ошиб-

ка, Айткен с легкостью запомнил правильные значения вплоть до 1000-го знака (по утверждению Дж. Ч. П. Миллера — до 2000-го). Однажды он обмолвился, что запоминает «ритмически». Еще большее впечатление производила его способность быстро вычислять некоторые определители.

Айткен с успехом соревновался с голландским вычислителем Вимом Клейном, который знал таблицу умножения вплоть до 100×100 , но не обладал математическими познаниями, которые позволили бы ему в разумных пределах сокращать вычислительную работу. Айткен часто производил вычисления подсознательно. Он говорил, что некоторые результаты «выплывают из мрака»; например, о каком-то конкретном числе он мог сказать, что «по ощущению оно простое», — и оно на самом деле оказывалось простым. Айткен относился к тем немногим людям, которые с числами «на дружеской ноге»¹. Он обнаружил, в частности, одно интересное свойство числа 163, обратив внимание на то, что $e^{\pi\sqrt{163}}$ отличается от целого числа меньше чем на 10^{-12} . Как он однажды сказал, «близкое знакомство с числами, приобретенное по врожденной склонности и отточенное благодаря упорным тренировкам, действительно позволяет проникнуть в самые глубокие теоремы алгебры и анализа».

Друзья и ученики Айткена с теплотой вспоминают о его доброте и терпении. Он был, кроме того, и одаренным музыкантом — играл на скрипке и альте, сочинял песни, фортепьянные пьесы и даже оркестровые произведения (как он сам говорил, «строгие и сдержанные»).

В 1965 г. в связи с ухудшением здоровья Айткен оставил кафедру математики; через два года после этого он умер.

1. Scripture E. W. *American Journal of Psychology*, 1891, vol. IV, pp. 1—59.
2. Mitchell F. D. *American Journal of Psychology*, 1907, vol. XVIII, pp. 61—143.
3. Müller G. E. *Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes*. — Leipzig, 1911.
4. Maenncher P. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen*, 1918 (Beiheft 7), S. 1—47.
5. *Crelle's Journal*, 1844, vol. XXVII, p. 198.

6. Charcot et Darboux. *Mémoires de l'Institut, Comptes Rendus*, 1892, vol. CXIV, pp. 275, 528, 578; Binet. *Révue des deux Mondes*, 1892, vol. CXI, pp. 905—924.
7. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* (London), 1856, vol. XV, pp. 251—280.
8. Pole W. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1890—1891, vol. CIII, p. 250.
9. Aitken A. C. The Art of Mental Calculation; with Demonstrations. In: *Transactions of the Royal Society of Engineers* (London), 1954, vol. XLIV, pp. 295—309. См. также некролог в *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1968, vol. XVI (ser. II), part 2, pp. 151—176.

КРИПТОГРАФИЯ
И КРИПТОГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Искусство составлять секретные сообщения (они должны быть понятны тем, кто располагает ключом к ним, и непонятны для непосвященных) постигалось веками. Практическое значение таких сообщений — скажем, во время войны — не вызывает сомнений; вместе с тем их расшифровка чрезвычайно важна для «противника», не располагающего ключом. Но связанная с криптографией романтика, вполне объяснимое желание раскрыть тайну и бросить вызов изобретательности тех, от кого эта тайна скрыта, привлекали к рассматриваемым вопросам внимание многих людей, абсолютно безразличных к практической стороне дела.

Хотя существует много разных способов передачи информации, мы ограничимся секретными депешами, представленными в письменной или в какой-нибудь другой графически зафиксированной форме, позволяющей хранить их длительное время. Таким образом, кратковременные действия, служащие для передачи сообщений, такие, как подмигивание, короткие или более глубокие, продолжительные вздохи, соответствующие точкам и тире азбуки Морзе, взмахи веером, жезлом или сигнальными флагами, нас интересовать не будут.

Существенным признаком секретных сообщений является то, что заключенная в них информация непонятна для всех, кто может получить копию передаваемого сообщения, но не располагает ключом для его чтения. Так, мы будем считать секретными те сообщения, которые на первый взгляд кажутся понятными, но на самом деле имеют другой, скрытый смысл*. Однако, письмо, написанное на иностранном — даже на незнакомом получателю — языке или записанное с помощью стенографических символов, к секретным сообщениям, разумеется, не относится.

* Два классических примера сообщений такого типа см. в [1].

Обычно говорят, что знаменитый дневник Пипса* написан шифром; на самом же деле — это стенографическая запись по системе, созданной Шелтоном**. Его, однако, трудно прочесть, так как при записи гласные, как правило опускались, а для обозначения суффиксов, приставок и ряда наиболее часто встречающихся слов Пипс использовал некие произвольные символы. Кроме того, говоря о вещах, которые трудно изложить с соблюдением приличий, он нередко переходил с английского на какой-либо иностранный язык или вставлял ничего не значащие дополнительные символы. К тому времени, когда дневник Пипса впервые привлек внимание специалистов, система Шелтона была уже забыта. Поэтому для тех, кто тогда попытался прочесть этот дневник, это был дневник, написанный шифром; но и современники Пипса были правы, утверждая, что дневник написан методом стенографии, хотя Пипс и внес в этот метод собственные изменения.

Сам по себе факт, что содержание какого-то послания скрывают от непосвященных или что оно передается тайным путем, еще не делает его секретным сообщением. В большинстве историй, рассказывающих о передаче секретной информации, акцент делается именно на искусстве ее тайной передачи — но с криптографией это не имеет ничего общего. Приведем типичный пример такого рода, уходящий корнями в глубокую древность. Геродот рассказывает, что для тайной передачи сообщений использовался следующий способ: рабу обривали голову и на коже черепа записывали послание; затем, когда волосы у раба отрастали, его отправляли вручать это послание. Более современные примеры подобного типа — письма, отправляемые голубиной почтой или написанные на бумажной обертке сигареты; однако с криптографией вопрос о способе передачи информации никак не связан.

* Пипс Самюэл (1633—1703) — английский мемуарист. Будучи чиновником адмиралтейства, вел в 1660—1669 гг. дневник, который представляет собой ценный исторический документ, отражающий политическую жизнь, культуру, быт и нравы Англии периода Реставрации. Этот дневник был расшифрован в 1819—1822 гг. Дж. Смитом. — *Прим. перев.*

** Первое издание книги Шелтона Tachy-graphy вышло в 1620 г., шестое, использованное Пипсом, — в 1641 г. Похожая система У. Картрайта была изложена в опубликованной в Лондоне в 1644 г. Дж. Ричем книге под названием Semographie.

Криптографические системы. Каждый метод превращения исходного незашифрованного текста в секретное сообщение состоит из двух частей: (1) основной, неизменный метод, называемый *общей системой*, и (2) переменный элемент («ключ»), обычно представляющий собой слово, предложение или последовательность чисел, называемый *специальным ключом* данной системы шифрования. Как правило, предполагается, что *противник* (любое лицо, которое может завладеть чужим сообщением и попытаться его расшифровать) знает, какая общая система применена, — это предположение основано на том, что ни при какой достаточно обширной системе передачи сообщений нельзя надеяться, что удастся долго сохранять общий метод в тайне, часто же менять его невозможно, ибо обучение персонала новому методу сопряжено с большими трудностями. При таких условиях уровень надежности используемой криптографической системы естественно считать пропорциональным времени, которое требуется для раскрытия специального ключа. Обычно нереально менять ключ чаще чем раз в день; поэтому если противнику удастся перехватывать все сообщения (или хотя бы большинство из них), то у него может иногда оказаться несколько сотен сообщений для определения данного специального ключа. Это часто упускают из виду — многим системам с весьма низким уровнем надежности их создатели придают неоправданно большое значение лишь на основании того, что эти системы очень трудно или даже невозможно расшифровать, располагая всего только одним сообщением.

Общие криптографические системы делятся на два основных класса в соответствии с тем, как при их использовании поступают с исходным текстом. Если буквы незашифрованного текста только меняют местами (не изменяя их), т. е. осуществляют их перестановку, то система называется *транспозицией*. Если, однако, сами буквы заменяются некоторыми эквивалентами — другими буквами, цифрами или какими-либо иными знаками, но их порядок при этом остается неизменным, то соответствующая система называется *подстановкой*. В одной криптограмме можно сочетать обе системы, применяя одну из них к результату, полученному с помощью другой.

При том кратком изложении предмета, которое дается в этой главе, мы ограничимся описанием классических систем зашифровки сообщений, добавив в каждом слу-

чае несколько слов о методе их расшифровки. В этой связи хочу обратить внимание на различие понятий *дешифровка* и *расшифровка*. Первое из них относится к процедуре, выбираемой адресатом сообщения, который посвящен во все детали системы и при дешифровке просто выполняет в обратном порядке шаги, предпринятые при шифровке сообщения. Второе касается метода, который используется противником, перехватившим чужое сообщение, и состоит в применении принципов науки, ныне называемой *криптографическим анализом*.

Транспозиции. Практически каждая транспозиция использует некую геометрическую фигуру, в которую исходный текст вписывается по ходу одного «маршрута», а затем по ходу другого списывается с нее.

Приведем пример зашифровки по системе, обычно называемой *маршрутной транспозицией*. Допустим, надо передать фразу

МНЕ НЕОБХОДИМО ЕЩЕ ДВЕСТИ ДОЛЛАРОВ.

Предположим, что общая система использует целиком заполненный прямоугольник с восьмью столбцами, так что если число букв сообщения не кратно восьми, то следует добавить «нерабочие» буквы. Добавим две такие буквы УУ в конце сообщения — тогда получим 32 буквы. Далее для вписывания сообщения выберем такой маршрут: будем двигаться по горизонтали, начиная с левого верхнего угла поочередно слева направо и справа налево. Получается такое расположение:

М	Н	Е	Н	Е	О	Б	Х
Е	Щ	Е	О	М	И	Д	О
Д	В	Е	С	Т	И	Д	О
У	У	В	О	Р	А	Л	Л

Если списывать буквы по вертикали, начиная с верхнего правого угла и двигаясь поочередно сверху вниз и снизу вверх, то получим окончательное зашифрованное сообщение, готовое для передачи; оно выглядит так:

ХООЛЛ ДДБОИ ИАРТМ ЕНОСО ВЕЕЕН ЩВУУД ЕМ.

Обращение описанных шагов при дешифровке не представляет трудности.

Здесь стоит отметить, что в силу международных правил, контролирующих стоимость передачи телеграфных сообщений, окончательный текст криптограмм обычно разбивают на группы по пять букв. Ясно, что с точки зрения криптографического анализа это не имеет значения.

Системы типа описанной отличаются очень низкой степенью надежности и малой гибкостью (они плохо приспособлены к изменениям). Даже если регулярно менять размеры прямоугольника и маршруты для вписывания и списывания, противнику не доставит большого труда расшифровать перехваченные послания. Расшифровка, по существу, производится «методом проб и ошибок», но число возможностей здесь столь ограничено, что при определенном опыте ее можно осуществить за достаточно короткое время.

Очень широко распространена разновидность маршрутной транспозиции, называемая *постолбцовой транспозицией*. В этой системе снова используется прямоугольник, но сообщение вписывается в него *обычным* способом. Списываются буквы по вертикали, а столбцы при этом берутся в порядке, определяемом числовым ключом. Пусть, например, этот ключ таков: 3—2—7—1—4—6—5, и с его помощью надо зашифровать сообщение ПЛЕННЫЕ ЗАВЛАДЕЛИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СТАНЦИЕЙ.

Прежде всего нужно вписать сообщение в прямоугольник, столбцы которого помечены сверху ключевыми числами:

3	2	7	1	4	6	5
П	Л	Е	Н	Н	Ы	Е
З	А	В	Л	А	Д	Е
Л	И	Ж	Е	Л	Е	З
Н	О	Д	О	Р	О	Ж
Н	О	Й	С	Т	А	Н
Ц	И	Е	Й			

Нецелесообразно заполнять последнюю строку прямоугольника «нерабочими» буквами, так как это дало бы противнику сведения о длине ключа. Теперь, списывая столбцы в порядке, указанном числовым ключом, и одновременно подготавливая послание к передаче, т. е.

разбивая его на группы из пяти букв, получаем такой текст:

НЛЕОС ЙЛАИО ОИПЗЛ ННЦНА ЛРТЕЕ ЗЖНЫД БОАЕВ
ЖДИЕ.

При дешифровке в первую очередь надо определить число длинных столбцов, т. е. число букв в последней строке прямоугольника. Для этого нужно разделить число букв в сообщении на длину ключа. Остаток от деления и будет искомым числом. Когда оно определено, буквы криптограммы можно водворить на их собственные места — и сообщение будет восстановлено.

В случае когда ключ довольно длинный и не рекомендуется его записывать, числовую последовательность удобно извлекать из какого-то легко запоминающегося ключевого слова или предложения. Для этого существует много способов. Наиболее распространенный состоит в том, чтобы приписывать буквам числа в соответствии с обычным алфавитным порядком букв. Например, пусть ключевым словом будет КРИПТОГРАФИЯ. Присутствующая в нем буква А получает номер 1. Далее, поскольку букв Б и В в этом слове нет, буква Г получает номер 2. Если какая-то буква входит несколько раз, то ее появления нумеруются последовательно слева направо. Поэтому первое появление следующей по алфавиту буквы И получает номер 3, а второе — 4 и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока все буквы не получат номера. Таким образом, возникает следующий полный числовой ключ:

К	Р	И	П	Т	О	Г	Р	А	Ф	И	Я
5	8	3	7	10	6	2	9	1	11	4	12

Процедура расшифровки постолбцовой транспозиции основана на том, что буквы каждого столбца списываются как единое целое. Первый шаг — соединить две группы последовательных букв так, чтобы они образовывали хорошие с точки зрения обычного текста комбинации. Для этого используются наиболее распространенные из двухбуквенных сочетаний (*диграмм*), которые можно составить из букв рассматриваемого шифрованного текста. Если для первой пробы выбрано, скажем, сочетание АБ, то мы можем по очереди приписывать к каждой букве А из рассматриваемого текста каждую букву Б из него; при этом несколько букв, стоящих до и после данной буквы А, и несколько букв, стоящих

до и после данной буквы Б, соединяются в пары, т. е. получаются два столбца букв, записанные рядом. Конечно, мы не знаем длины столбцов, но некоторые ограничения на них можно получить, используя положение конкретных букв. Так, столбцы должны иметь одинаковую длину или первый столбец может быть длиннее второго на одну букву, но тогда это — последняя буква сообщения. Если приписываемые друг к другу буквы разделены, скажем, только двумя буквами, то, как легко видеть, мы можем составить не более трех пар, и длина столбца сообщения не превышает четырех. Кроме того, ограничением может послужить появление невозможной пары (скажем, гласная — мягкий знак).

Для выбранного сочетания АБ получается по одной паре столбцов для каждого конкретного выбора букв А и Б из сообщения, и из них надо отобрать ту, которая содержит наиболее часто встречающиеся комбинации букв. Опытный специалист делает это сразу же, но то же самое можно сделать и чисто математическим методом. Относительные частоты появления отдельных букв, двухбуквенных, трехбуквенных и многобуквенных сочетаний можно считать постоянными свойствами этих комбинаций в обычном, нешифрованном тексте, так как их определяют по текстам очень большого объема. Если приписать каждому двухбуквенному сочетанию вес, равный относительной частоте его появления, то очень просто отобрать ту пару столбцов, которая дает наибольший средний вес. Кстати, появление одного сочетания с низкой частотой может указать на то, что столбец надо ограничить.

Выбрав пару столбцов, мы аналогичным образом подбираем к ним третий (справа или слева) и т. д.

Описанная процедура сильно упрощается, когда известны конкретные слова, которые с большой вероятностью могут оказаться в рассматриваемом сообщении. Такая ситуация вполне обычна, например, при криптографическом анализе военных сообщений. В самом деле, многие из тех, кто пишет о криптографическом анализе, часто говорят о *вероятных словах* или *интуитивном* методе как о средстве расшифровки разнообразных криптографических систем.

До сих пор, рассказывая о расшифровке постолбцовой транспозиции, мы подразумевали, что лицо, занимающееся расшифровкой, располагает только одним сообщением. Но, как отмечалось, на практике, в его рас-

поряжении может оказаться много сообщений, зашифрованных одним ключом. В этих случаях для быстрой расшифровки можно использовать несколько методов.

Один из них применим к любым транспозиционным системам и потому заслуживает внимания. Допустим, что к двум или более сообщениям *одинаковой длины* применяется одна и та же транспозиция. Тогда очевидно, что какой бы сложной ни была эта система, буквы, которые находились на одинаковых местах в незашифрованных текстах, окажутся на одинаковых местах и в зашифрованных. Предположим, что зашифрованные сообщения выписаны одно под другим так, что первые буквы всех сообщений находятся в первом столбце, вторые — во втором и т. д. В таком случае, если предположить, что две конкретные буквы в одном из сообщений идут одна за другой в нешифрованном тексте, то буквы, стоящие на тех же местах в каждом из остальных сообщений, соединяются подобным же образом. Значит, они могут служить проверкой правильности первого предположения, подобно тому, как комбинации, которые дают два столбца при системе постолбцовой транспозиции, позволяют проверить, являются ли соседними две конкретные буквы из этих столбцов. К каждому из указанных двухбуквенных сочетаний можно добавить третью букву для образования трехбуквенного сочетания (*триграммы*) и т. д. Это, по существу, составление *анаграммы*, где роль букв играют столбцы букв из сообщений, выписанных друг под другом, — при анализе здесь может быть полезен математический метод суммирования частот.

Часто хороших результатов удается достичь, если для начала выбрать какую-нибудь комбинацию из двух букв, часто встречающихся вместе, скажем СТ или КО. Если одна из букв двухбуквенного сочетания попадает сравнительно редко, как, например, буква Щ в паре ЩЕ, то число возможностей значительно уменьшается. Если располагать не менее чем четырьмя сообщениями одинаковой длины, то можно с уверенностью гарантировать их расшифровку. Однако не всегда эта расшифровка позволит тотчас же прочесть еще одно сообщение другой длины. Чтобы добиться этого, необходимо извлечь из уже расшифрованных сообщений некоторую информацию о системе и ключе.

Вторая процедура, очень плодотворная при расшифровке постолбцовых транспозиций, применима к двум

или более сообщениям, содержащим длинные совпадающие куски текста. Такие куски нередко встречаются в сообщениях, возникающих в обширных коммуникационных системах, где зачастую используется стереотипная фразеология. Чтобы лучше оценить эту процедуру, зашифруем с помощью числового ключа 8—6—4—1—5—3—2—7 два послания, содержащие одно и то же выражение: ПЕРВАЯ И ОДИННАДЦАТАЯ ДИВИЗИИ.

8	6	4	1.	5	3	2	7
К	А	К	О	Й	П	Р	И
К	А	З	П	О	Л	У	Ч
А	Ю	Т	П	Е	Р	В	А
Я	И	О	Д	И	Н	Н	А
Д	Ц	А	Т	А	Я	Д	И
В	И	З	И	И			

8	6	4	1	5	3	2	7
П	Е	Р	В	А	Я	И	О
Д	И	Н	Н	А	Д	Ц	А
Т	А	Я	Д	И	В	И	З
И	И	В	Ы	С	Т	У	П
А	Ю	Т	Ч	Е	Р	Е	З
Ч	А	С					

В распоряжение лица, занимающегося расшифровкой, поступают криптограммы:

1. ОППДТ ¹ИРУВН ²ДПЛРН ³ЯКЗТО ⁴АЗИОЕ ⁵ИАИАА ⁶ЮИЦИИ ⁷ЧААИК ⁸КАЯДВ;
2. ВНДЫЧ ¹ИЦИУЕ ²ЯДВТР ³РНЯВТ ⁴СААИС ⁵ЕЕИАИ ⁶ЮАОАЗ ⁷ПЗПДТ ⁸ИАЧ.

Совпадающие куски текста выделены курсивом.

Посмотрим, каким образом буквы, составляющие эти куски, появляются в обоих сообщениях. Число частей, на которые они разбиты, равно числу столбцов в прямоугольнике, и цифра над каждой частью — это ключевое число, стоявшее над соответствующим столбцом. Буквы *ЯДВ* в первом зашифрованном сообщении находятся в конце своего столбца. Они указывают, что совпадающий кусок расположен в конце соответствующего незашифрованного сообщения. С другой стороны, буквы *ВНД*, с которых начинается содержащий их столбец во втором зашифрованном сообщении, показывают, что совпадающий кусок находится в начале соответствующего незашифрованного сообщения. Эта информация позволяет тотчас же установить длину каждого столбца. В первом сообщении, например, столбец 1 содержит буквы *ОППДТИ*, столбец 2 — буквы *РУВНД* и т. д. Во втором сообщении столбец 1 содержит буквы *ВНДЫЧ*, столбец 2 — буквы *ИЦИУЕ* и т. д. Таким образом, мы можем

выяснить, какие столбцы в каждом из сообщений длинные и какие короткие.

В дополнение к полученным сведениям (которые и сами по себе достаточно ценны) с помощью этих совпадающих кусков можно почти всегда определить какие-либо части ключа, а иногда и весь ключ. Чтобы лучше разобраться, как это делается, временно предположим, что исходные прямоугольники нам известны. Заметим, что буква П — первая буква совпадающего куска — появляется в четвертом столбце первого сообщения и в первом столбце второго. Значит, произвольная буква этого куска в первом сообщении будет располагаться на три столбца правее, чем во втором (мы считаем, что столбцы следуют друг за другом в циклическом порядке).

Буквы *ВНД*, которыми начинается второе шифрованное сообщение, должны приходить из столбца с ключевым номером 1. Буквы *ВНД* первого сообщения приходят из столбца с ключевым номером 2. Значит, ключ содержит последовательность 1—?—?—2 (где вопросительные знаки стоят на месте пока неизвестных нам чисел). Часть совпадающего куска, которая появляется во втором сообщении в столбце с ключевым номером 2, — это *ИЦИ*, а в первом сообщении эти буквы входят в столбец с ключевым номером 6. Следовательно, — по тем же соображениям, что и выше, — ключ должен содержать последовательность 1—?—?—2—?—?—6. Столбцу 6 второго сообщения соответствует столбец 5 первого. Вспоминая, что длина ключа равна 8, получаем последовательность 1—5—?—2—?—?—6—?.

Продолжая таким же образом, мы построим весь ключ 1—5—3—2—7—8—6—4, который является циклической перестановкой правильного ключа. Применив его к шифрованному сообщению, получим

1	5	3	2	7	8	6	4
О	Й	П	Р	И	К	А	К
П	О	Л	У	Ч	К	А	З
П	Е	Р	В	А	А	Ю	Т
Д	И	Н	Н	А	Я	И	О
Т	А	Я	Д	И	Д	Ц	А
И	И				В	И	З

— истинное начало сообщения (цикла) сразу можно определить внимательным просмотром. Другой способ определить начало цикла — просмотреть, как зашифрованное сообщение разбито на длинные и короткие столбцы. Поскольку в исходном прямоугольнике все столбцы, имеющие лишнюю букву, стоят слева, цикл должен начинаться с первого длинного столбца, который следует за коротким.

Исходя из приведенных рассуждений, читатель, вероятно, по достоинству оценит тот факт, что мы смогли найти весь ключ благодаря тому, что величина относительного сдвига соответствующих букв в совпадающих кусках и длина ключа взаимно просты. Если бы эти два числа не были взаимно просты, то ключ разбился бы на несколько частичных циклов — их число совпадало бы с наибольшим общим делителем рассматриваемых двух чисел. Затем нам пришлось бы соединять эти «подциклы» в полный ключ, что определило бы несколько возможных расшифровок; однако сравнительно короткая проверка позволила бы нам выяснить, какая из них правильная.

В описанной процедуре предполагалось, что нам известна величина относительного сдвига. Иногда это так и бывает. Рассмотрим, например, два сообщения с одинаковыми концами. После того как с помощью числа частей, на которые разбиты совпадающие куски посланий, определена длина ключа, становится известным, сколько длинных столбцов в каждом из прямоугольников. Разность между этими числами и есть искомый сдвиг. В рассмотренном выше примере тоже можно определить относительный сдвиг, так как в одном сообщении совпадающий кусок расположен в начале, а в другом — в конце. Поскольку этот кусок содержит 26 букв, его последняя буква должна находиться во втором столбце второго сообщения. Кроме того, эта буква лежит в последнем длинном столбце (пятом) первого сообщения, т. е. сдвиг в данном случае — это сдвиг на 3 столбца.

Если же совпадающие куски в обоих сообщениях расположены на одном и том же месте, так что величина сдвига равна нулю — как, например, в случае если оба сообщения начинаются с этого куска, — то мы ничего не можем узнать о настоящем числовом ключе описанным способом.

В тех случаях, когда величина относительного сдвига неизвестна, правильный ответ можно получить с по-

мощью сравнительно небольшого числа проб, поочередно допуская каждую из возможностей.

Надежность постолбцовой транспозиции существенно возрастает, если получившуюся криптограмму подвергнуть еще одной постолбцовой транспозиции. На этом втором шаге можно использовать либо тот же самый, либо какой-то иной числовой ключ. В каждом случае наложение одной постолбцовой транспозиции на другую приводит к результату, который можно получить одной транспозицией, но гораздо более сложной, чем постолбцовая транспозиция. Такую систему шифрования обычно называют *двойной транспозицией*, и если таким образом зашифровано лишь одно сообщение, то это шифрование обладает очень высокой степенью надежности. Однако при наличии двух или более сообщений одной длины их можно без труда расшифровать примерно так же, как объяснялось выше. Располагая расшифровкой хотя бы одного сообщения, специалист по криптографическому анализу в состоянии установить числовые ключи, использованные при двойной транспозиции.

В качестве последнего примера метода транспозиции упомянем о классической системе шифрования, называемой *решеткой*. В этой системе используется карточка с отверстиями, чаще всего квадратная, которая при наложении на лист бумаги оставляет открытыми лишь некоторые его части. При зашифровке буквы сообщения вписываются в эти отверстия. При дешифровке сообщение вписывается в диаграмму нужных размеров, затем налагается решетка — и на виду оказываются только нужные буквы незашифрованного сообщения.

1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	1	2
4	3	1	1	2	3
3	2	1	1	3	4
2	1	3	2	1	5
1	5	4	3	2	1

Решетки можно использовать двумя разными способами. При первом методе окончательный зашифрован-

ный текст состоит только из букв исходного незашифрованного сообщения. Этот метод можно, в частности, реализовать следующим образом: решетка делается так, чтобы при ее последовательном использовании в различных положениях каждая клетка лежащего под ней листа бумаги оказалась занятой. При втором методе решетка устраивается так, что только некоторые клетки оказываются заполненными, после чего шифровальщик окружает эти значимые буквы *ложным текстом*. Обычно это очень сложная процедура; кроме того, такой метод имеет еще один недостаток — зашифрованный текст оказывается значительно длиннее незашифрованного. Вписывание в решетку и считывание с нее в этих системах производится по любому заранее намеченному маршруту.

Изображенная на рисунке решетка — это пример *поворотной* решетки с 36 клетками. Если ее последовательно поворачивать на 90° после того, как все открытые при данном положении клетки заполнены, то, когда решетка вернется в исходное положение, все клетки окажутся заполненными. Числа, стоящие в клетках, указывают метод построения решетки. В каждом из концентрических окаймлений клетками должно быть вырезано по одной клетке, соответствующей каждому из записанных в этом окаймлении чисел. Если число клеток на стороне решетки нечетно, то ее центральная клетка не вырезается.

Однако, когда речь идет о значительном количестве сообщений, от решеток довольно мало пользы. Кроме того, надежность решеток весьма невысока. Например, все сообщения, зашифрованные с помощью изображенной здесь поворотной решетки, разбиваются на части одинаковой длины, и все они исследуются одинаково. Здесь применим метод составления анаграмм из столбцов, о котором говорилось ранее.

Во всех рассмотренных выше транспозиционных системах шифрования единицей криптографической обработки служила отдельная буква. Нет никаких причин, по которым нельзя было бы заменить буквы подходящими группами букв или слогов или даже целыми словами. Такие системы шифрования встречаются довольно часто. Знаменитый исторический пример — использование армией северян во время Гражданской войны в США 1861—1865 гг. маршрутной транспозиции на целых словах, где вместо собственных имен подставлялись некие эквиваленты. Иногда применяются также прямоугольные

решетки с достаточно длинными вырезанными кусками, куда можно вписать сразу целый слог или даже слово.

Подстановочные системы. Простейшим примером подстановочной системы служит такая, где каждая буква незашифрованного текста всегда заменяется одним и тем же эквивалентом. Это, по всей видимости, самый известный тип шифра и первое, что обычно приходит в голову новичку в криптографии. Очевидно, что выбор эквивалента не играет принципиальной роли. Но как это ни удивительно, многие люди считают, что использование сложных случайных символов обеспечивает системе большую надежность, нежели применение букв и цифр.

Простейший способ реализации такой системы — выписать эквиваленты в форме *подстановочного алфавита*, который состоит из *исходной* и *шифровальной* последовательностей, расположенных одна над другой. Букву незашифрованного текста нужно найти в первой последовательности и заменить соответствующим знаком из второй. Например, если пользоваться подстановочным алфавитом *.

Исходная последовательность

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Шифровальная последовательность

А Г Ж И М П Т Х Ш Ы Ю Б Д З К Н Р У Ц Щ Ъ Я В Е И Л О С Ф Ч Ъ,
то предложение ВОЗВРАЩАЙСЯ ДОМОЙ ВСЕ ЗАБЫ-
ТО зашифровывается так: ЖКХХЖР АЛАЫУ ЭМКДК
ЫЖУПХ АГСЦК.

Обычно в подстановочном алфавите исходная последовательность — это *нормальный* алфавит. В этих случаях для определения всего подстановочного алфавита достаточно задания одной шифровальной последовательности. В зависимости от способа, которым строится шифровальная последовательность, подстановочные алфавиты делятся на три класса.

1. *Стандартные алфавиты.* Здесь шифровальная последовательность — циклическая перестановка нормального алфавита или *обращенного* нормального алфавита. Это самый старый из известных типов подстановочных алфавитов. Некоторые авторы называют системы шифрования с применением стандартного алфавита *системами Юлия Цезаря*. Однако Цезарь использовал лишь один из возможных стандартных алфавитов; у него шиф-

* Здесь и далее мы не включаем в рассмотрение букву Ё. —
Прим. перев.

ровальной последовательностью всегда был нормальный алфавит, начинающийся с буквы *D* *.

2. *Систематически перемешанные алфавиты.* Неудобство использования стандартных алфавитов очевидно: ведь здесь для определения всего алфавита достаточно идентифицировать один или два символа. Чтобы обойти эту трудность и при этом избежать необходимости выписывать шифровальную последовательность, нужно использовать некоторую систематическую процедуру переупорядочения нормального алфавита.

В литературе по криптографии излагается множество приемов для достижения этой цели, но здесь мы для примера опишем только один. Пусть в качестве ключевого выбрано слово без повторяющихся букв, скажем **РЫБАКИ**. Впишем в прямоугольную таблицу все остальные буквы алфавита по порядку под ключевым словом:

Р	Ы	Б	А	К	И
В	Г	Д	Е	Ж	З
Й	Л	М	Н	О	П
С	Т	У	Ф	Х	Ц
Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э
Ю	Я				

Переставим столбцы этой фигуры согласно числовому ключу, основанному на слове **РЫБАКИ**, и перепишем их поочередно. Получится шифровальная последовательность

АЕНФЪБДМУЩИЗПЦЭКЖОХЪРВИСЧЮЫГЛТШЯ.

3. *Случайные алфавиты.* Здесь буквы шифровальной последовательности расставляются случайным образом — при таком методе шифрования текста никакие ранее идентифицированные буквы не помогают определить неизвестные буквы. Единственное неудобство последова-

* По поводу писем Цезаря Светоний говорит в своей книге «О жизни двенадцати цезарей» (гл. 56): «Чтобы разобрать и прочесть их, нужно читать всякий раз первую букву вместо четвертой, например *a* вместо *d*, и так далее». По поводу Августа он говорит (гл. 88): «Когда он пишет тайнописью, то пишет *b* вместо *a*, *c* вместо *b* и так далее таким же образом, а вместо *x* ставит двойное *a*».

тельности такого типа заключается в том, что их слишком трудно запомнить и поэтому приходится записывать.

Метод расшифровки систем, использующих только один подстановочный алфавит, или, как мы их будем называть, *одноалфавитных систем*, довольно хорошо известен. Он основан на учете относительной частоты появления отдельных букв алфавита или их сочетаний¹.

Дальнейшую помощь оказывает (1) определение гласных как часто встречающихся букв, которые редко попадают в комбинации друг с другом, так что, как правило, между ними имеются определенные «средние интервалы»; (2) выбор особых комбинаций букв, которые наводят на мысль об определенных словах или выражениях обычного, нешифрованного текста (примеры: **ТО, ЧТО, СКОЛЬКО, КОТОРОЕ** и т. п.; они выделяются в зашифрованном тексте посредством интервалов между повторяющимися буквами — в этом случае говорят о *словоподобных структурах*); (3) поиск вероятных слов, которые всегда очень полезны при криптографическом анализе.

Если с помощью любых из приведенных соображений произведено несколько идентификаций, то дальнейшая полная расшифровка обычно не представляет особого труда.

Относительно низкая надежность одноалфавитной системы объясняется тем, что каждая буква незашифрованного текста имеет лишь один эквивалент. Если мы требуем, чтобы этот эквивалент не мог представлять никакую другую букву, и в то же время хотим обеспечить отдельные буквы дополнительными эквивалентами, то нам необходимо располагать более чем 32 шифровальными знаками. Если, например, в качестве шифровальной единицы мы возьмем двузначное число, то получим 100 возможных эквивалентов: если же в качестве шифровальной единицы берется комбинация двух букв, то получается 1024 возможных эквивалентов. С введением дополнительных эквивалентов становится возможным представлять каждую букву незашифрованного текста одним из нескольких *различных* значений. Если число эквивалентов для каждой буквы пропорционально ее относительной частоте появления в обычном тексте, то получающаяся система имеет гораздо более высокую надежность, чем обычная одноалфавитная.

Однако и таким образом зашифрованный текст можно расшифровать без особого труда. Процесс расшиф-

ровка состоит в том, чтобы свести зашифрованный текст к одноалфавитной форме, определив, какие из шифровальных знаков эквивалентны друг другу. Это делается двумя способами. 1. Сравнением относительных частот можно установить, что некоторые из знаков комбинируются со всеми остальными одинаковым образом; подробным исследованием всех их появлений будет установлена эквивалентность этих знаков, которые представляют одну и ту же букву исходного текста. 2. Тщательное изучение повторений позволяет обнаружить места, где стоит одно и то же слово, но по-разному зашифрованное. Можно, например, обнаружить такие вхождения:

11	22	27	75	89	16	31
11	22	27	61	89	16	31
11	22	45	75	82	16	31

Очевидный вывод: 27 и 45, 75 и 61, 82 и 89 — пары эквивалентных знаков. Широкое исследование в этих двух направлениях даст существенную информацию, и, прежде чем будет установлено большое количество эквивалентов, для получения идентификаций с незашифрованным текстом можно воспользоваться данными о частотах и словоподобными структурами.

Система шифрования, при которой одна буква незашифрованного сообщения заменяется комбинацией двух или более знаков, называется *многобуквенной*. Иногда многобуквенные системы применяют и в том случае, когда для каждой буквы используют лишь один эквивалент. Например, Фрэнсис Бэкон пользовался пятибуквенным шифром: каждая буква незашифрованного текста заменялась группой из пяти букв, состоящей только из А и В. Таких групп 32 (т. е. 2^5), и 6 символов остается в резерве*; их Бэкон не использовал. Код Морзе — пример многобуквенной системы**, в которой шифровальные эквиваленты имеют разную длину.

* Английский (латинский) алфавит содержит 26 букв. — Прим. перев.

** Для тех, кто не знаком с ней, приведем здесь азбуку Морзе:

А.—	Ж...—	М—	Т—	Ш—
Б...—	З—..	Н.—	У...—	Щ—
В.—	И..	О—	Ф...—	Ы...—
Г—	Й...—	П...—	Х...—	Э...—
Д...—	К...—	Р...—	Ц...—	Ю...—
Е.	Л...—	С...—	Ч...—	Я...—
				Ъ, Ъ...—

Скрывать истинную частоту появления можно более эффективным способом, чем введение различных эквивалентов; это делается путем использования нескольких подстановочных алфавитов. Такие системы часто называют *многоалфавитными*; они бывают двух совершенно различных типов в зависимости от того, как в них используются алфавиты: периодически или нет.

Чтобы привести простой пример системы первого типа, предположим, что лица, ведущие секретную переписку, построили пять разных случайных алфавитов:

Исходная последовательность Шифровальная последовательность		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
	1	Г	Е	И	С	Т	Р	У	В	И	Д	Х	А	Ш	Л	Ъ	Я	Б	М	Э	К	Ф	Ю	О	Ж	Ш	И	М	Ч	З	П	Ц	
	2	Ф	О	Ч	П	Л	Х	У	Щ	И	Е	Т	Г	С	А	Ю	Э	Ъ	З	Ь	Н	Р	Я	М	В	К	Й	В	Ж	Д	Ш		
	3	М	Б	Я	У	Н	Ъ	А	С	Л	Г	У	Й	В	Ч	О	Ы	И	Д	Х	Ф	Ш	К	Щ	Е	Ю	З	Т	П	Ж	Э		
	4	Б	М	Ф	Л	Ж	С	Р	Ц	З	Х	Ш	Г	У	Ъ	Я	П	О	Т	И	Э	Д	К	Ю	Ч	В	Н	Й	Ш	Е			
	5	К	П	Е	Т	Л	У	В	Ч	Р	Ъ	Ш	С	Я	И	Щ	И	Д	Ф	Э	Е	П	Н	Ь	Г	Ю	Д	Э	Ж	О	А		

Незашифрованное сообщение записывается в пять столбцов, и первый алфавит применяется для зашифровки букв из первого столбца, второй — для зашифровки букв второго столбца и т. д. В результате с помощью *а*-го алфавита шифруются буквы, которые в незашифрованном тексте имеют порядковый номер вида $5k + a$. При выписанных выше алфавитах предложение СЕГОДНЯ ОТПЛЫВАЮТ ТРИ КОРАБЛЯ зашифровывается так: БЛУЯЛ ЛШЦТИ АЙБО МЪЫЗШ ЪЮММС Ц.

Вместо того чтобы использовать фиксированное число алфавитов, корреспонденты могут менять алфавиты регулярным изменением ключевого слова. Объясним подробнее один из способов достижения этой цели. Ранее его описывали многие авторы, и некоторые из них называли такую систему *системой с двойным ключом*. Одно ключевое слово, например НУМЕРАЦИЯ, используется для построения диаграммы, известной как *квадрат Виженера* (см. далее). Если рассматривать каждую строку квадрата как шифровальную последовательность, а выписанный над ним нормальный алфавит — как исходную последовательность, то такая диаграмма дает 32 подстановочных алфавита. Пусть каждый из этих алфавитов обозначается буквой, стоящей в первом столбце. Тогда второе ключевое слово, скажем АВГУСТ, применяется, чтобы выбрать конкретные алфавиты и порядок их использования. Первый подстановочный алфавит — алфавит А; он применяется для зашифровки букв, порядковые номера которых в незашифрованном сообщении имеют вид $6k + 1$. Вторым будет подстановочный алфа-

вит В — с его помощью шифруются буквы с порядковыми номерами вида $6k + 2$ и т. д. В результате получается шифр с шестью алфавитами. При указанных двух ключевых словах сообщение СРОЧНО НЕОБХОДИМО ПОДКРЕПЛЕНИЕ зашифруется так: ФЩШЧУ ЕОЙШМ БЕБОХ ЙЕЕБС ЪЦЕНВ ХПЦ.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю
Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э
Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь
Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы
Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ
Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы
Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш
Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч
Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х
Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф
Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т
Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С
С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П
П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О
О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л
Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К
К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И
И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З
З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж
Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д
Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г
Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В
В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б
Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я
Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц	И
И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А	Ц
Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р	А
А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е	Р
Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М	Е
Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У	М
М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н	У
У	М	Е	Р	А	Ц	И	Я	Б	В	Г	Д	Ж	З	И	К	Л	О	П	С	Т	Ф	Х	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Н

Первый шаг расшифровки периодических многоалфавитных систем — определение числа алфавитов. Чтобы понять, как это делается, предположим, что в сообщении несколько раз повторяется одно и то же слово. Любые два его появления, находящиеся в одной и той же позиции по отношению к ключу, дадут одинаковый шифрованный текст. Два появления, по-разному расположенные относительно ключа, не дадут повторения в шифрованном тексте. Следовательно, длина интервала между повторяющимися шифрованными кусками кратна длине ключа. Точная длина ключа равна наибольшему общему

делителю длин всех интервалов между такими повторяющимися кусками. Значит, если сообщение расписано по столбцам, число которых равно длине ключевого слова, то все буквы любого из этих столбцов будут зашифрованы одним подстановочным алфавитом.

Второй шаг расшифровки — анализ отдельных одноалфавитных шифров. Это в сущности та же процедура, которую мы описывали в связи с одноалфавитными системами. Если некоторые из алфавитов совпадают, то это можно обнаружить статистическими методами и объединить соответствующие куски для частотного анализа. Кроме того, если разные алфавиты связаны, как в квадрате Виженера, то можно воспользоваться некоторыми соображениями симметрии, благодаря чему идентификации в одном алфавите приводят к идентификациям в другом.

В последнее время были проведены значительные работы по созданию шифровальных машин для автоматической шифровки и дешифровки сообщений. В большинстве таких машин используются периодические многоалфавитные системы. Новейшие из этих машин — электронные, и во многих случаях период — чрезвычайно большое число; помимо этого число независимых алфавитов часто является величиной того же порядка, что и период. Электронные машины обеспечивают более быструю и точную шифровку, чем при работе вручную. Их даже можно объединить с печатающим и передающим устройствами, что позволяет одновременно с шифровкой производить запись и передачу зашифрованного сообщения; что же касается дешифровки, то секретное сообщение принимается и дешифруется в этом случае автоматически. При современных методах криптографического анализа системы шифрования, полученные с помощью некоторых таких машин, на практике почти не поддаются расшифровке.

Изучение непериодических многоалфавитных систем завело бы нас далеко «в дебри» криптографического анализа, поэтому мы упомянем лишь две системы такого типа.

1. Пусть построен квадрат Виженера, дающий 32 алфавита, каждый из которых помечен одной буквой. Тогда ключом могут служить буквы самого исходного незашифрованного сообщения. Например, условимся, что первым будет алфавит А. Тогда первая буква шифруется с помощью этого алфавита. После этого каждая

последующая буква шифруется алфавитом, обозначенным предшествующей ей буквой исходного сообщения. Такая система называется *самоключевой*. Если квадрат Виженера основан на слове НУМЕРАЦИЯ и в качестве первого берется подстановочный алфавит А, то сообщение МОСТ ВЗОРВАН примет вид ЛКЕЦХ ЛЫМЦВ О.

2. Система с *бегущим ключом* похожа на предыдущую, за тем лишь исключением, что в качестве ключа здесь берется не само сообщение, а совсем другой текст, например отрывок из какой-нибудь книги или журнала, начинающийся с заранее оговоренной страницы и строки, или случайный набор букв, копию которого имеет каждый из корреспондентов.

Непериодические системы первого из описанных типов имеют серьезный недостаток с точки зрения их реализации. Если по какой-либо причине в сообщение внесена ошибка, в результате которой будет неправильно принята всего одна буква, то при дешифровке это скажется на всех последующих буквах. Поскольку среднее количество ошибок при передаче сообщения может достигать 5%, это затрудняет, а иногда делает вообще невозможным прочтение зашифрованного сообщения.

Повышенная надежность многоалфавитных систем, по существу, обусловлена тем, что при их использовании маскируются частоты появления, характерные для одноалфавитных систем. Однако эти частоты вновь проявляются, если тому, кто занимается расшифровкой, удастся разбить сообщение на его одноалфавитные компоненты. Такая возможность всегда имеется, если за единицу криптографической обработки принята одна буква, как это было во всех описанных выше подстановочных системах. Таким образом, мы пришли к идее *многосимвольной подстановки* — замены сочетания букв из незашифрованного текста шифровальной группой из стольких же букв.

В качестве первого примера опишем классическую двухсимвольную систему, называемую *шифром Плейфера*. Тридцать ячеек располагаются в виде (5×6) -прямоугольника и заполняются буквами алфавита в заранее предписанном порядке (две буквы, скажем й и ъ, опускаются) *. Приведенный ниже прямоугольник со-

* (5×6) -прямоугольник мы выбираем для сообщений на русском языке. Оригинальный шифр Плейфера основан на квадрате с 25 ячейками, при этом опускается одна из 26 букв английского алфавита. — *Прим. перев.*

держит систематически перемешанную последовательность, основанную на слове МАНЧЕСТЕР.

М	А	Н	Ч	Е	С
Т	Р	Б	В	Г	Д
Ж	З	И	К	Л	О
П	У	Ф	Х	Ц	Ш
Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я

Незашифрованное сообщение делится на пары букв, а чтобы не допустить пар, состоящих из двух одинаковых букв, добавляется, когда это необходимо, «нерабочая» буква, например Х. Таким образом, если сообщение начинается словом РАССКАЗ, то оно разобьется на пары следующим образом: РА СХ СК АЗ. Если обе буквы данной пары лежат в одной строке (или одном столбце) прямоугольника, то при шифровании каждая из них заменяется соседней справа (или снизу), причем совокупность букв в каждой строке и каждом столбце рассматривается как цикл. Если буквы пары не лежат на одной строке или в одном столбце, то они обязательно лежат в противоположных углах некоторого прямоугольника — тогда они заменяются буквами, стоящими в двух других противоположных углах этого прямоугольника, причем каждая из них заменяется той, которая находится в одной строке с ней. Сообщение НА РАССВЕТЕ ВЫСТУПАЕМ записывается в виде НА РА СХ СВ ЕТ ЕВ ЫС ТУ ПА ЕМ. С помощью приведенного прямоугольника оно шифруется так: ЧНЗРЧ ШЧДМГ ЧГЯЛР ПУМСА.

Надежность этой и, по правде говоря, любой другой двухсимвольной системы довольно низка. Относительные частоты двухбуквенных сочетаний достаточно сильно различаются между собой, чтобы лицо, занятое расшифровкой, могло извлечь большое количество информации из рассмотрения одних лишь частот. Правильная идентификация всего лишь нескольких двухбуквенных сочетаний обеспечивает расшифровку всего сообщения. Кроме того, немалую пользу можно извлечь из вероятных слов и словоподобных структур. Что касается последних, то здесь тот, кто занимается расшифровкой, ограничен структурами, основанными на двухбуквенных со-

четаниях, например: РЕ ФЕ РЕ НД УМ, КА ЛЬ КА, МА ТЕ МА ТИ КА.

При использовании шифра Плейфера помогают еще и следующие соображения. Если установлено, что СК заменяется на ЧО, то КС заменяется на ОЧ. Вообще, если $A_1A_2 = B_1B_2$, то $A_2A_1 = B_2B_1$. Кроме того, если известно, что четыре буквы A_1, A_2, B_1, B_2 расположены в углах некоторого прямоугольника, то сразу же получаются следующие дополнительные идентификации: $B_1B_2 = A_1A_2$; $B_2B_1 = A_2A_1$. Эти факты весьма полезны при некоторых исследованиях частот — например, для различения эквивалентов сочетания с высокой частотой типа СТ, обратное (ТС) к которому имеет низкую частоту, и сочетания типа ОК, обратное (КО) к которому встречается часто. Можно подчеркнуть, что весь прямоугольник при шифре Плейфера восстанавливается с помощью совсем небольшого числа идентификаций.

Надежность многосимвольных подстановок очень быстро возрастает с увеличением размера единицы криптографической обработки. Когда эта единица состоит из пяти или шести букв, степень надежности очень высока. К сожалению, на этом пути возникают серьезные практические трудности. Ошибка в одной букве шифровальной группы приводит к неправильной зашифровке целой единицы исходного текста, в результате чего искажаются пять или шесть букв сразу. Поскольку при такой системе нельзя указать способа исправления ошибок, то четыре или пять ошибок при передаче могут сделать все сообщение совершенно непонятным. Это служит серьезным препятствием для использования такого рода систем. Однако с теоретической точки зрения они довольно интересны, и Лестер С. Хилл привел общий математический разбор таких систем [2].

Во всех рассмотренных нами системах шифрования зашифрованный текст был не короче исходного. Главной заботой была секретность, а соображения экономичности не принимались в расчет. Однако эти соображения часто приобретают первостепенное значение, что и привело к развитию подстановочных систем с очень высокой степенью специализации, называемых *кодами*. При использовании таких систем каждый из корреспондентов имеет экземпляр *словаря кода*, содержащего длинный список слов, выражений и предложений, рядом с каждым из которых стоит произвольный буквенный эквивалент. В качестве эквивалентов здесь чаще всего используются

группы из пяти букв, хотя иногда применяются правильные сочетания меньшего числа букв или (реже) группы цифр. Чтобы обеспечить обработку слов, которых может не оказаться в *словарном запасе* кода, каждой отдельной букве алфавита и большинству часто встречающихся слогов также сопоставляются эквиваленты.

Обычно словари кода составляются для конкретной отрасли промышленности или для группы людей с определенными интересами. Поэтому в словарный запас кода включаются часто употребляемые длинные выражения и даже целые предложения, которые заменяют одной кодовой группой. В результате закодированное сообщение обычно оказывается в четыре-пять раз короче исходного.

В качестве иллюстрации воспроизведем часть кода (раздел **ПРИБЫТИЕ**) компании «Уэстерн юнион трэвелер», предназначенного для передачи сообщений по подводному кабелю:

ADAUX	Ожидаю прибытия ...
ADAVY	Прибыл благополучно
ADAXA	Прибыл благополучно, письма направляйте в адрес ...
ADBAE	Прибыл благополучно, телеграммы (каблограммы) направляйте в адрес ...
ADBEI	Прибыл благополучно, приятная поездка, рекомендую друзьям
ADBIM	Прибыл благополучно, приятная поездка, посылаю письмо и т. д.

Подобная сжатость сопряжена с осложнениями, так как из-за ошибки в одной кодовой группе может оказаться утраченной значительная часть исходного текста. Чтобы избежать необходимости повторных сообщений, приняты меры, обеспечивающие исправление ошибок. Кодовые группы выбираются с помощью специальных таблиц для построения кодов*, которые гарантируют, что любые две кодовые группы будут различаться по крайней мере двумя буквами. Тогда кодовая группа полностью определится любыми четырьмя своими буквами. Если при этом одна из букв искажена при передаче, то полученной группы не окажется в словаре кода, и дешифровщик таким образом будет предупрежден о наличии ошибки. Неправильной может быть любая из букв, поэтому имеется не более пяти возможностей декодиро-

* Пример такой таблицы, а также ряд интересных замечаний о кодах можно найти в статье У. Фридмана и К. Мендельсона [3]. См., кроме того, с. 296 настоящей книги.

вать искаженное слово, и из контекста становится ясно, какой из вариантов правильный². Эта процедура основана на предположении, что в неправильно принятой группе имеется лишь одна неверная буква. К счастью, почти всегда так и бывает.

Дальнейшее усовершенствование таблиц для построения кодов, которые помогают исправлять ошибки, гарантирует, что любые два кодовых слова из сборника должны отличаться друг от друга больше чем лишь одной перестановкой двух букв. Необходимость этого свойства связана с тем, что технический персонал при быстрой работе, часто не замечая этого, совершает такого рода ошибки.

Секретность кодированных сообщений в большой степени зависит от того, насколько тщательно оберегаются от посторонних словари кода. Но противник может получить доступ к словарям кода, не обязательно похитив их у полноправного владельца, — для этого достаточно, например, просто скопировать или сфотографировать их. Если не исключено, что подобное могло случиться, то выход из положения может дать *дополнительное шифрование*. Это означает, что надо применить какую-либо одну или несколько возможных систем шифрования к закодированному тексту, обращаясь с ним так, как если бы это было незашифрованное сообщение. Эти системы и специальные ключи можно менять сколь угодно часто.

Определение криптографической системы. Как уже отмечалось, в большинстве исследований по криптографическому анализу предполагается, что противник знает общую систему. Разумеется, это не всегда так — и перед специалистом по криптографическому анализу иногда встает задача определить, с помощью какой общей системы зашифровано рассматриваемое им множество сообщений. Это одна из самых трудных задач данной области, и, чтобы не усложнять наше обсуждение, мы остановимся только на методах различения общих систем, *в которых используется лишь один процесс*. Прежде всего при исследовании данного множества сообщений надо провести систематический поиск повторений и изучить внешний вид сообщений. Если ограничиться повторяющимися кусками, содержащими не менее пяти или шести букв, то можно быть уверенным, что исключены все случайные повторения. Если оказалось, что длины всех повторяющихся кусков и разделяющих их интервалов кратны одному и тому же числу n , то в та-

ком случае мы имеем дело либо с многобуквенной системой, либо с многосимвольной системой или с кодом.

Если разбить все рассматриваемые сообщения на группы по n букв, выписать все эти группы и составить распределение частот их появления, то эти три системы можно различить следующим образом. Многобуквенная система, в которой используется лишь один эквивалент для каждой буквы, будет содержать только 32 различные группы (для русского алфавита), частоты которых соответствуют нормальным частотам появления отдельных букв в обычном, нешифрованном тексте. Если в системе используется несколько эквивалентов, то это можно определить, выявив эквиваленты, как уже описывалось. Система кодирования отличается от многосимвольной системы тем, что n -буквенные группы кода имеют правильную форму и структуру, различаются двумя буквами и могут быть приведены в соответствие с некоторой таблицей для построения кодовых слов, размер которой определяется общим числом групп. Зато в многосимвольной системе *каждая n -буквенная комбинация* является настоящей шифровальной группой. Число этих групп, действительно имеющих в данном множестве сообщений, — величина того порядка, что и число различных n -буквенных сочетаний, возникающих при разбивке на группы по n букв куска обычного текста того же объема.

Если шифровальная единица не является группой из двух или более букв, то система шифрования односимвольна и должна быть либо транспозицией, либо подстановкой. Если это транспозиция, то шифрованное сообщение получается просто перестановкой букв исходного сообщения, и относительная частота появления каждой отдельной буквы здесь та же, что и в незашифрованном тексте. Следовательно, гласные должны составлять такую же часть текста, как и обычно, т. е. около 40%. Кроме того, в зашифрованном сообщении будет очень мало (или совсем не будет) длинных повторяющихся кусков, так как при перестановке слова обычно разбиваются и отдельные буквы разбрасываются по всему сообщению.

Если анализируемая система шифрования не является транспозицией, то это — подстановка. Одноалфавитная подстановка отличается тем, что при ней получается такой же набор частот отдельных букв, как и в обычном, нешифрованном тексте. Заметное отличие шифрованного

текста от обычного состоит в том, что высокая частота появления может наблюдаться здесь у буквы, которая в обычном тексте встречается сравнительно редко, и наоборот, буква, очень часто попадающаяся в обычном тексте, может оказаться весьма редкой в зашифрованном. В зашифрованном тексте гласные составляют меньшую часть, чем в незашифрованном, так как в последнем они имеют высокую частоту появления. Кроме того, при одноалфавитной подстановке в зашифрованном тексте довольно много повторений, так как любое повторение в исходном тексте дает повторение в зашифрованном, и эти повторения содержат узнаваемые словоподобные структуры. Интервалы между повторениями, конечно, не имеют общих делителей.

Если общая система представляет собой одну из многоалфавитных подстановок, то распределение частот появления отдельных букв в ней *сглажено*, т. е. все шифровальные буквы встречаются приблизительно с равными частотами. Это — результат использования нескольких алфавитов, вследствие чего один и тот же шифровальный эквивалент иногда представляет распространенную в обычных текстах букву, а иногда — редкую. Остается определить, периодически ли используются алфавиты. Если периодически, то все интервалы между повторяющимися частями зашифрованного текста должны быть кратны периоду. Когда сообщение разбито на части, длина которых равна периоду, и эти части выписаны одна под другой, буквы в каждом столбце соответствуют одному подстановочному алфавиту. Однако если у интервалов между повторяющимися кусками нет общего делителя, то система непериодическая.

Дальнейший анализ любой из этих систем с целью их расшифровки производится в зависимости от конкретной исследуемой системы и от другой информации, которую специалист по криптографическому анализу может почерпнуть из данной ситуации.

Несколько заключительных замечаний. В большинстве случаев информация, содержащаяся в каком-то наборе криптограмм, сохраняет свою ценность очень недолго. Система обычно считается достаточно надежной, если попытки расшифровки отнимают у противника столь продолжительное время, что информация за это время теряет свою ценность. Однако порой применение принципов криптографического анализа позволяет получить материал определенной исторической важности.

В качестве первого типа такого материала рассмотрим древние системы письменности. Они не были задуманы как тайнопись в прямом смысле этого слова. Но их пришлось рассматривать как таковую, когда были предприняты попытки их прочесть. С другой стороны, историки иногда бывают крайне заинтересованы в расшифровке секретных сообщений, написанных много лет назад, — в связи с этим можно упомянуть закодированные дипломатические послания, передававшиеся во время североамериканской Войны за независимость 1775—1783 гг. (в результате которой образовались США).

Даже сегодня имеются важные материалы для исследования материалов обоих названных типов. Если говорить о древних системах письменности, то здесь один из наиболее интересных примеров представляет разгадка письменности древнего народа майя. Справедливости ради отметим, что некоторый прогресс в идентификации знаков письма майя достигнут: числа, календарные знаки, символы, изображавшие различных богов майя, и некоторые другие знаки идентифицированы³. Но предстоит еще проделать немало работы.

В заключение скажем пару слов о некоторых попытках расшифровать «шифры», которых, быть может, и нет. Здесь можно упомянуть, к примеру, многочисленные исследования, связанные с вопросом о том, кто же был автором произведений, известных нам как пьесы Шекспира, — в частности, писал ли их актер Шекспир или знаменитый философ Фрэнсис Бэкон. Даже самые малые познания в криптографическом анализе позволяют убедиться, что все полученные расшифровки целиком субъективны и вряд ли какие-либо два независимых исследователя, пользуясь предложенными методами, могут получить одинаковые результаты. Прискорбный пример аналогичного исследования — случай с проф. Ньюболдом [4] *, который решил, что он преуспел в прочтении «Рукописи Войнич». Она представляет собой красиво написанный и богато иллюстрированный средневековый трактат объемом около двухсот страниц, обнаруженный в Италии Уилфридом М. Войничем примерно в 1912 г., который до сих пор бросает вызов лингвистам и специалистам по криптографическому анализу.

* Фотокопии «Рукописи Войнич» имеются в Британском музее и в Нью-Йоркской публичной библиотеке. (Эту рукопись больше не приписывают Роджеру Бэкону.)

1. De Grandpré A. *Cryptographie Pratique*. — Paris, 1905, p. 57.
2. *American Mathematical Monthly*, 1931, vol. XXXVIII, pp. 135—154.
3. *American Mathematical Monthly*, 1932, vol. XXXIX, pp. 394—409.
4. *The Cipher of Roger Bacon*. — Philadelphia, 1928.

Литература по криптографии для дальнейшего чтения

- Bazeries É. *Les chiffres secrets dévoilés*. — Paris, 1901.
Encyclopedia Britannica, статья «Code and Chiphers».
 Figl A. *Système des chiffrierens*. — Graz, 1926.
 De Grandpré A. *La cryptographie pratique*. — Paris, 1905.
 Givierge C. M. *Course de Cryptographie*. — Paris, 1925.
 Lange A., Soudart E. A. *Traité de Cryptographie*. — Paris, 1925.
 Langie A. *De la Cryptographie*. — Paris, 1918 (Английский перевод Дж. Макбета: Lange A. *Cryptography*. — New York, 1922).
 Sinkov A. *Elementary Cryptanalysis*. — New York, 1968.
 Valerio P. L. E. *De la cryptographie*, Part I. — Paris, 1893; Part II. — Paris, 1896.
 Vardley H. O. *The American Black Chamber*. — Indianapolis, 1931.

ПРИМЕЧАНИЯ

Глава I

Первые четыре главы довольно разноплановой книги У. Роуза Болла и Г. С. М. Коксетера, как об этом говорит и сам Болл, являются, по-видимому, наиболее элементарными — по своему характеру они достаточно близки к хорошо известным и рассчитанным на весьма широкую читательскую аудиторию книгам [1—3] или даже ориентированным на совсем малоопытного читателя популярным книгам Я. И. Перельмана (довольно полный список русской литературы по «развлекательной математике» приложен к первым двум из книг [6]). Особенно близка, пожалуй, первая часть настоящей книги к изданной еще в 1912—1914 гг. «Хрестоматии» А. А. Лямина (в 4-х книгах) [3] — одной из первых обстоятельных русских книг по математическим развлечениям и сходным вопросам. Опытный издатель Лямин привлек к работе над «Хрестоматией» большой коллектив сотрудников, чаще всего студентов, среди которых было немало одаренных молодых людей. (Так, ч. 2 т. III «Хрестоматии» была почти целиком составлена Я. С. Дубновым, впоследствии известным математиком и педагогом, профессором Московского университета.) В книгах [3] имеется множество отдельных задач и тем, близких к затрагиваемым в настоящей книге (возможно, ранние издания книги У. Роуза Болла служили основным источником статей «Хрестоматии», но в последней они, как правило, раскрыты более полно).

Ряд точек соприкосновения имеют также гл. I—IV настоящей книги с классическими сочинениями [4], с более новыми книгами [5], а также с замечательными образцами [6] книг по «математическим развлечениям».

¹ Любитель математики и поэт Гаспар Клод Баше сьер де Мезириак (1581—1638) сыграл немалую роль в расцвете математики во Франции в XVII в. Большое значение имело осуществленное им комментированное двуязычное (греческий оригинал и выполненный Баше латинский перевод) издание «Арифметики» Диофанта (см. [29]). Не менее важным оказался, пожалуй, и принадлежащий Баше оригинальный сборник математических развлечений «Приятные и занимательные задачи, рассматриваемые в числах», послуживший источником многих тем книги У. Роуза Болла; эта книга многократно переиздавалась (см. на с. 51 ссылку на издание 1959 г.) и переводилась на другие языки (на русском языке имеется лишь несовершенный и являющийся ныне библиографической редкостью перевод [7]). Книга Баше способствовала росту интереса к математике (в частности, она явилась одним из основных источников пробуждения интереса к теории чисел); кроме того, в течение веков многочисленные подражатели во многих странах черпали из нее материал для своих (как правило, менее тщательных по выполнению) сборников «развлекательных математических задач».

² Жак Озанам (1640—1717) — французский математик, писатель и педагог, член Парижской академии наук. Являлся автором

многочисленных учебников, в том числе многотомного — и в то время весьма популярного — «Курса математики». Однако наибольшую известность принесла Озанаму книга «Математические и физические развлеченья», отдельные результаты которой многократно излагались другими авторами (чаще всего без ссылок на источник).

³ Этому типу задач, трактуемому с большей полнотой, посвящен цикл 2 задач книги [8] (4-е издание этой книги (1965) содержит больше «диофантовых задач», чем 5-е ее издание).

⁴ Ср. задачу 29 (14) 5-го (4-го) издания книги [8].

⁵ Более подробную трактовку настоящей темы читатель может найти, например, в книге Шуберта [2].

⁶ Так называется латинская переделка книги [9] (ср. по этому поводу [10], в гл. VIII третьей книги которой изложен обсуждаемый здесь эпизод.) (Новое русское издание книги [9] запланировано в серии «Памятники исторической мысли» издательства «Наука».)

⁷ Последняя часть гл. I настоящей книги посвящена *математическим играм* — теме, весьма широко представленной в литературе (см., например, [2]); при этом здесь затрагиваются и достаточно сложные моменты теории игр, частично отраженные также в ч. I «Игры» сборника [11] (ср. с комментарием редактора к этому разделу книги [11] на с. 473—475, где указана также связанная с играми литература научного характера). В частности, посвященный игре ним раздел настоящей книги тесно соприкасается с первой статьей (Р. К. Тай, «Сыграем в тупинз?») книги [11], где также фигурирует «ним-слоужение» чисел и числа Шпрага — Гранди.

Обсуждение игры ним дано, в частности, в книгах: Игнатьев [1], Доморяд; Лицман; Арнс [2] (см. также задачу 128 книги [12] или первую из статей [14]). Укажем, наконец, обстоятельную двухтомную «Энциклопедию математических игр» [13], составленную выдающимися специалистами в этой области.

⁸ Ср. с обсуждением игры в кегли в названной в примечании ⁷ статье Тая из сборника [11].

⁹ Голландский ученый В. А. Витхофф указал в 1907 г. этот усложненный вариант игры ним, не зная, что обе игры — и ним, и придуманная им — издавна являются китайскими народными играми (последняя игра носит название «цзяньшицзы», или «выбирание камней»: китайские крестьяне используют для этих игр не специальные фишки, а просто камешки). Развернутая теория игры цзяньшицзы, указывающая также на ее связи с другими разделами математики, дана в названной на с. 51 статье Г. С. М. Коксетера. На русском языке игра цзяньшицзы рассматривается в книгах Кордемского [1], Доморяда [2] и Беррандо [5], а также в задаче 129 книги [12] и в статьях [14]. По поводу обобщений игры цзяньшицзы см. [15].

¹⁰ Этот вариант теории игры подробно изложен в указанной в примечании ⁹ статье Коксетера; см. о нем также статью [16].

¹¹ См., например, книгу [17]; это число неоднократно встречается также в некоторых из книг [1—6], например, в книге Барра [5] или в первой из книг [6], гл. 23, а также в [18].

¹² По поводу доказательства теоремы Гурвица см., например, [19].

Глава II

¹ (Арифметические и геометрические) софизмы встречаются в некоторых из книг [1—6] (где они, как правило, анализируются с целью обнаружения в них ошибки); см. по этому поводу также [20]

и специально посвященную геометрическим софизмам превосходную брошюру [21], в которой обсуждается педагогическое значение неправильных доказательств.

² Разумеется, 3-й и 4-й софизмы рассчитаны на читателя, имеющего элементарное представление о *теории рядов*; аналогично этому 8-й и следующие софизмы предполагают некоторое знакомство с *теорией вероятностей*.

³ Конечно, основной интерес этого софизма состоит в том, что он демонстрирует, насколько слабо даже такой великий ученый, как Ж. Л. Д'Аламбер (1717—1783), представлял себе сущность и свойства отрицательных чисел (ср. с гл. V книги [22]).

⁴ По поводу обсуждения «Санкт-Петербургского парадокса» [названного так потому, что он был сформулирован сотрудником Санкт-Петербургской академии наук Николаем Бернулли (1687—1759)] см., например, [23].

⁵ Рассматриваемым здесь задачам уделено много места в книге [24]. Яркие результаты теоретико-вероятностного характера, частично имеющие парадоксальный характер, собраны в книге [25].

⁶ Ряд последующих задач связан с *комбинаторикой*, в силу ряда обстоятельств (ср. предисловие редактора) привлекающей ныне большое внимание; по поводу элементарной трактовки комбинаторных задач см., например, первую часть книги [12] или книги [26].

⁷ См., например, [19].

⁸ Тема о числах Фибоначчи затрагивается в нескольких из книг [1—6] (см., например, гл. 32 второй из книг [6]); более подробно трактуется она в брошюрах [27] (различные издания первой из которых вполне можно рассматривать как разные книги) или в книгах [8] и [28].

⁹ По этому поводу см., например, §§ 4—5 гл. 11 названной на с. 85 книги Г. С. М. Коксетера.

¹⁰ См., например, [17], [18] или § 1—3 гл. 11 названной в примечании ⁹ книги.

¹¹ Здесь начинается тема о *решении уравнений в целых числах*, или о *диофантовых уравнениях* — хотя знаменитого Диофанта Александрийского (около III в.) интересовали вопросы о решении уравнений с несколькими переменными в *рациональных числах* (см. [29]), но эта задача во многих отношениях родственна задаче о решении уравнений в *целых числах* (так, вопрос о решении в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ сводится к вопросу о решении в рациональных числах $\xi (=x/z)$ и $\eta (=y/z)$ уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 1$). Доступная трактовка этой общей темы дана в книгах [30]; специально «пифагорову уравнению» $x^2 + y^2 = z^2$ посвящена книга [31].

¹² Фигурирующие здесь уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ и $x^4 + y^4 = z^4$ являются частными случаями так называемого «неопределенного уравнения Ферма» (см. с. 79—82). Леонард Эйлер, которому равенство $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ было хорошо известно, высказал гипотезу, что подобно тому, как существуют два (натуральных) числа x и y , сумма квадратов которых равна квадрату третьего (натурального) числа, существуют и 3 (натуральных) числа, сумма кубов которых равна кубу 4-го числа; имеются также и 4 числа, сумма четвертых степеней которых равна 4-й степени 5-го числа; 5 чисел, сумма 5-х степеней которых равна 5-й степени 6-го числа, — и т. д. для всех (натуральных) показателей степени. С другой стороны, Эйлер полагал, что не существуют 2 чисел, сумма кубов которых равна кубу 3-го числа (эту теорему Эйлер сумел доказать!); 3 чисел, сумма 4-х степеней которых равна 4-й степени 4-го числа; 4 чисел, сумма 5-х

степеней которых равна 5-й степени 5-го числа, и т. д. В 1911 г. гипотеза Эйлера как будто получила подтверждение: Р. Норри (R. Norrie) установил, что $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$. Однако в 1966 г. (почти через двести лет после того, как Эйлер высказал свою гипотезу!) общая гипотеза Эйлера была опровергнута К. Дж. Леидером и Т. Р. Паркинсом (L. J. Lander, T. R. Parkin), показавшими, что $27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5 = 144^5$. Но до сих пор не удалось выяснить, имеет или не имеет решения в целых числах уравнение $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ (и даже уравнение $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$) или уравнение $x^6 + y^6 + z^6 + u^6 + v^6 = w^6$.

¹³ Квадратные числа 1, 4, 9, 16, 25, ..., очевидно, выражают такое число точек (или кружочков), которые легко расположить в виде квадрата; аналогично этому пятиугольные числа 1, 5, 12, 22, ... отвечают конфигурациям точек (кружочков), имеющим вид (правильного) пятиугольника, и т. д. Ферма доказал, что *каждое натуральное число можно представить в виде суммы (не более) четырех четвертых степеней натуральных чисел*, и предположил, что *каждое натуральное число можно представить в виде суммы (не более) n n -угольных чисел*; в 1815 г. это предположение Ферма было доказано О. Коши.

¹⁴ См., например, книгу [28].

¹⁵ Именно в таком виде и сформулировал Евклид свою теорему; философские установки древних греков (родственные позиции некоторых современных школ в области оснований математики, например, так называемому ультраинтуиционизму — ср. [22]) не позволяли им формулировать утверждения, в которых фигурировало бы понятие бесконечности.

¹⁶ См., например, любой из элементарных учебников теории чисел, скажем книги [32], а также книги [28], [12] (задачи 53—54), [8] (раздел «Несколько задач из теории чисел»).

¹⁷ Ср. статью [33].

¹⁸ По поводу «основной теоремы арифметики» см., скажем, учебники [32] по теории чисел или брошюру [34]. Связь так называемой

дзета-функции Эйлера $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ с простыми числами четко

выделена, например, в книгах [32]; см. также [35]. Поведение величины $\pi(X)$ при больших X также обсуждается в книгах [32]; см., кроме того, специально посвященные теории простых чисел элементарные книги [36] и несколько более сложную книгу [37].

¹⁹ Доказательство этого элементарного факта имеется, например, в книгах Арнольда и Бухштаба [32]; см. также, скажем, раздел «Оценки сумм и произведений» книг [8]; некоторое уточнение этого результата содержится, например, в книге Шнирельмана [36] (см. также задачу 169 книги [12]).

²⁰ Из чего, разумеется, вытекает, что *всякое достаточно большое (натуральное) число представимо в виде суммы не более чем четырех простых чисел*. Таким образом, для нечетных чисел утверждение Гольдбаха можно считать «почти доказанным» (чтобы убедиться в его универсальности, достаточно проверить лишь, что все нечетные числа, меньшие «постоянной Виноградова» S представимы в виде суммы трех простых, — что в силу колоссальности S пока, к сожалению, недоступно никаким компьютерам); для четных чисел «почти доказано» более слабое утверждение, в котором фигурируют не 2, а 4 слагаемых.

²¹ Священник Марен Мерсенн (1588—1648), горячий любитель и знаток физических, математических и философских проблем, занимал совершенно уникальное положение во французской науке своего времени. Обладая замечательной памятью и находясь в переписке с многими учеными разных стран, Мерсенн выполнял, так сказать, обязанности «института научной информации» своей эпохи, что при весьма ограниченном числе научных журналов и полном отсутствии сложившихся научных коллективов было чрезвычайно важно: у Мерсенна всегда можно было получить справку по любому научному вопросу; с другой стороны, тесно связанный с большим числом лиц, Мерсенн как бы «персонифицировал» понятие научного коллектива, охотно связывая ученых, интересующихся одним кругом вопросов. Королевская Парижская академия наук как раз и выросла из кружка любителей научного знания, в центре которого стояла колоритная фигура Мерсенна.

Собственные научные достижения Мерсенна особенно значительными не были. В частности, ему принадлежит очень простое (возможно, даже известное и ранее) доказательство того, что число $2^n - 1$ (где n — натуральное число) может быть простым, лишь если n — тоже простое; он попробовал проанализировать с позиций делимости ряд первых чисел $2^p - 1$ (где p — простое; именно эти числа называют сегодня «числами Мерсенна»), однако, как об этом говорится и в книге, не особенно удачно.

²² Поскольку мы не имеем доказательства бесконечности множества простых чисел Мерсенна, то не знаем, конечно или бесконечно множество четных совершенных чисел (строго говоря, множество нечетных совершенных чисел, ни один элемент которого не известен, в принципе может быть и бесконечным, хотя скорее можно ожидать, что оно пусто). Тема о совершенных числах затронута во всех книгах [32].

²³ Сегодня это, пожалуй, уже не так, ибо все больше математиков начинают высказывать сомнения в истинности так называемой «великой» (или «последней») теоремы Ферма, о которой еще будет сказано ниже.

²⁴ См. по этому поводу расположенные в порядке возрастающей трудности (но одновременно — и содержательности) книги [38].

²⁵ Знаменитая премия для лица, доказавшего теорему Ферма, была утверждена в 1908 г. богатым любителем математики П. Вольфскем (P. Wolfskel). Однако она ни разу не присуждалась, хотя проценты с вложенного капитала Математический институт Гёттингенского университета (который должен был принимать решение о присуждении премии) неоднократно использовал для приглашения ученых из других стран [знаменитый Давид Гильберт (1862—1943) даже шутливо выражал по этому поводу надежду, что теорема еще долго не будет доказана: «Зачем же резать курицу, несущую золотые яйца?»]. Последовавшая за первой мировой войной инфляция в Германии свела премию практически к нулю — к немалому удовлетворению математиков, вынужденных разбирать бесчисленные любительские «доказательства» теоремы Ферма. Однако в последние десятилетия эта премия вновь возродилась, хотя она уже не столь велика, как ранее. Но пока нет надежд, что кто-либо сможет ее получить когда-нибудь.

²⁶ Новые тенденции в математике, о которых бегло сказано в предисловии редактора перевода этой книги, привели к резкому возрастанию интереса к (конечным!) полям Галуа, имеющим ныне большее прикладное значение. Эти поля рассматриваются во всех совре-

менных книгах по алгебре или прикладной алгебре (см., например, [39]) и в ряде специальных книг, скажем по теории кодирования, или в сочинениях общего характера (см. [40]).

Глава III

¹ Ср. с посвященной «геометрическим развлечениям» книгой [41].

² В этой связи хочется еще раз обратить внимание читателя на брошюру [21].

³ По поводу непрерывных дробей см. [19].

⁴ «Геометрические разрезания» широко рассматриваются в литературе; назовем хотя бы специально посвященную этой теме книгу [42].

⁵ Ср. [43].

⁶ Теорема Бойаи — Гервина [у Фаркаша Бойаи (1775—1856) имелось полное (но громоздкое) доказательство соответствующего результата; немецкий военный инженер Гервин доказал его (двумя годами позже Бойаи) совсем просто] изложена во многих научно-популярных книгах (см., например, цикл задач «Разрезание и складывание фигур» книги [44]). Эта теорема, разумеется, затронута также в книгах [45], трактующих более трудный вопрос о разрезаниях многогранников (теорема Дена).

⁷ По поводу построений при помощи циркуля и линейки см., например, обстоятельную статью [46]; менее полно трактуется эта тема в книге [47], а, пожалуй, более подробно — в старой книге [48]. О том, как пришел Гаусс к своему открытию, рассказано в [49].

⁸ Лоренцо Маскерони (1750—1800) установил, что каждое построение, которое можно осуществить циркулем и линейкой, выполнимо также с помощью одного циркуля; элементарное доказательство этого предложения имеется во многих научно-популярных книгах (см., например, [47], [50]). В 1928 г. известный датский математик Йельмслев (Hjelmslev) нашел в книжном магазине в Копенгагене изданную в 1672 г. (на 100 лет раньше Маскерони!) никому не известную книгу датского математика Георга Мора (1640—1697) «Датский Евклид» (Euclides Danicus), в которой он обнаружил полное доказательство теоремы, ранее всегда приписывавшейся одному Маскерони.

⁹ Ср. [51], задачи 108—109 и с. 105—106.

¹⁰ По поводу задачи Лебега см., например, [51], задачи 93—94 и с. 84—86. Лебег поставил также аналогичную задачу о фигуре наименьшего периметра, покрывающей любую плоскую фигуру единичного диаметра; но об этой задаче мы имеем, пожалуй, еще меньше информации, чем относительно проблемы, сформулированной в настоящей книге. Разумеется, не решены также и пространственные аналоги обеих проблем Лебега.

¹¹ Можно доказать, что заключенный внутри (гипо)циклоиды Штейнера отрезок каждой касательной к любой из ограничивающих эту кривую дуг имеет одну и ту же длину; это обстоятельство и породило гипотезу Осгуда и Куботы (оказавшуюся все же неверной).

¹² Более подробно результат Безиковича изложен на с. 263—265 книги [52].

Глава IV

¹ См. задачу 106 (а также близкие по тематике задачи 105 и 107) книги [12].

² В настоящее время тема о геометрических мозаиках переживает новый расцвет, и ей посвящена обширная литература, из которой мы назовем лишь рассчитанную на школьников статью [53], затрагивающие эту тему книги и статьи [54] и [11] (см., в особенности, статью Грюмбаума — Шепарда в книге [11]), а также книги [55], где хочется обратить внимание читателя на сочинения, посвященные творчеству замечательного голландского «математического графика» Мориса Корнелиса Эшера (о нем см. гл. 11 третьей из книг [6], § 3 гл. 4, названной на с. 85 книги Г. С. М. Коксетера и статью Коксетера в сборнике [11]).

³ Этой теме посвящен ряд статей сборника [11], а также статьи, приложенные к русскому переводу названной в гл. IV книги Голomba «Полимино».

⁴ Ср. [11]; по поводу рассмотренного далее набора кубиков «Сома» см. гл. 21 первой из книг [6].

⁵ Обширная тема о «квадрировании квадрата» затронута в первой из книг [56]; ей специально посвящена (ныне уже несколько устаревшая) вторая из этих книг; ср. также со статьей Таита в [11]. По поводу дополняющих книгу Яглома [56] материалов, относящихся к более позднему времени, см. краткую заметку и обстоятельную статью [57].

⁶ Это название копирует хорошо знакомое всем американским и канадским читателям наименование «Большая северная железная дорога».

⁷ Неоднократно упоминаемый в этой книге известный французский математик Эдуард Люка (1842—1891), выпускник знаменитой Высшей нормальной школы (из стен которой вышло наибольшее число активно работающих французских математиков), видный специалист по теории чисел, много лет преподававший в популярном во Франции парижском Лицее Людовика Великого, составил обширное пособие по «Математическим развлечениям», вышедшее в 4-х томах; на русском языке имеется лишь весьма неполный и очень давний перевод [58] этой книги.

⁸ Ср. [59].

⁹ Обсуждение этой темы имеется в многих книгах, из числа которых хочется особенно отметить книгу Штейнгауза [54] (с. 135—138) и раздел «Топологические эксперименты» книги Барра [5].

¹⁰ Выдающийся немецкий математик, профессор Лейпцигского университета Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) сохранял творческую работоспособность до конца своих дней; в частности, одно из самых неожиданных своих открытий он сделал в 1861 г. (в возрасте свыше 70 лет), когда Парижская академия наук объявила конкурс на тему: «Усовершенствование теории многогранников». Представленная Мёбиусом на этот конкурс работа «Об объеме многогранников» (написанная на плохом французском языке), далеко опередившая свое время, не была оценена жюри и не получила никакой премии. Переработанный вариант работы (написанный уже на превосходном немецком языке) был опубликован Мёбиусом в 1865 г., когда ему было 75 лет. В этой статье Мёбиус обсуждает понятие объема многогранника (точнее, так называемого *ориентированного объема*, снабжаемого знаком «+» или «—» в зависимости от выбора «положительного направления обхода» на поверхности многогранника) и дает формулу, позволяющую найти это число. При этом Мёбиус обращает внимание на то, что для удовлетворяющего определению многогранника (см. с. 142) *септаэдра* (семигранника), образованного двумя противоположными верхними гранями правиль-

ного октаэдра (фигура 3 на фото I), двумя несмежными с ними нижними гранями и тремя диагональными плоскостями октаэдра, «объем» оказывается равным 0/0, т. е. определить его невозможно. Мёбиус объясняет это тем, что поверхность септаэдра является «односторонней», вследствие чего на ней нельзя выбрать «положительное направление обхода» (по или против часовой стрелки), а следовательно, и различить «внутренность» и «внешность» септаэдра. Для иллюстрации смысла термина «односторонняя поверхность» Мёбиус описывает в своей работе также тот геометрический образ, который ныне называют *лентой Мёбиуса*.

Одновременно (в 1862 г.) понятие односторонней поверхности (и ленту Мёбиуса как пример такой поверхности) рассмотрел в Гёттингене Иоганн Бенедикт Листинг (1808—1882).

Глава V

Из связанной с содержанием гл. V литературы прежде всего хочется указать на обстоятельную статью [60], на циклы задач «Теория многогранников» и «Правильные многогранники» книги [44] и на рассчитанную на несколько более подготовленного читателя монографию [61]. Современный этап учения о многогранниках (не обязательно выпуклых и, возможно, многомерных) полнее всего отражен в (впрочем, уже несколько устаревшей) книге [62], а широкая трактовка всего круга вопросов, связанного с правильными многогранниками и их обобщениями, содержится в монографии Коксетера ([13] на с. 175). Назовем еще близкие по теме и рассчитанные на достаточно широкого читателя учебники и научно-популярные сочинения [63] и гл. 10 «Пять платоновых тел» книги Коксетера «Введение в геометрию» ([16] на с. 85).

¹ В широко известной книге [64] автор несколько иронически пишет, что «Начала» Евклида можно рассматривать как трактат по теории правильных многогранников (им посвящены заключительная часть книги XIII «Начал», а также обычно присоединяемые к «Началам» «дополнительные» книги XIV и XV, Евклиду не принадлежащие). При этом, как замечает Д'Арси Томпсон, стремление автора (Евклида) предварительно изложить читателю все сведения, необходимые для понимания учения о правильных многогранниках, сделали «вводную» часть его книги несколько затянутой (12 книг из 13!).

Интересно отметить, что число существенно разных *правильных многоугольников*, являющихся «планиметрическим эквивалентом» правильных многогранников, разумеется, бесконечно; «в одномерном пространстве» (на прямой) вообще имеется единственный аналог многоугольника или многогранника — отрезок; с другой стороны, в n -мерном евклидовом пространстве (о котором см., например, [65]) число типов многомерных аналогов правильных многогранников («правильных политопов») равно 6 при $n = 4$ и 3 при $n > 4$ (см. [65]; по поводу правильных политопов в 4-мерном пространстве см. заключительную гл. 22 «Четырехмерная геометрия» из книги «Введение в геометрию» Коксетера). Таким образом, число $r(n)$ « n -мерных правильных многогранников» равно 1 при $n = 1$, ∞ при $n = 2$, 5 при $n = 3$, 6 при $n = 4$ и 3 при $n \geq 5$.

² Подробное описание «двойственного» (полярного) преобразования дано, например, в статье [66] (разделы 8.3 и 9.4).

³ Любопытно отметить, что эта связанная с пятью кубами конструкция может быть использована для геометрической трактовки

теоремы о неразрешимости в радикалах общего уравнения 5-й степени (см. примечание² на с. 239 книги Адамара [63]; по поводу самой теоремы см., например, [67], а геометрические подходы к рассматриваемой теореме намечены в книгах Клейна [68]).

⁴ От Архимеда к нам пришло утверждение (доказанное позже Кеплером) о существовании (кроме так называемых *полуправильных призм* и *полуправильных антипризм*) еще 13 типов полуправильных многогранников (см. с. 383—386 названных на с. 381 «Сочинений» Архимеда); что именно понимал Архимед под «полуправильными многогранниками», сегодня уже трудно сказать. Если, как обычно делают, определять полуправильные («архимедовы») многогранники как такие, все многогранные углы которых одинаковы (конгруэнтны), а все грани — правильные многоугольники, то, согласно Дж. Миллеру, число типов (отличных от призм и антипризм) многогранников будет равно 14, а не 13 (подробнее об этом см. [69]); однако при достаточно жестких требованиях на симметрию многогранников изображению на рис. 5.3 фигуру можно будет и не причислять к «архимедовым многогранникам».

⁵ См. цикл задач «Зоноэдры» книги [44] (задачи 112—119 и решения к ним).

⁶ Ср. гл. VII книги Фейеша Тота «Расположения на плоскости...» [34].

Глава VI

Тема о математических задачах и развлечениях, связанных с шахматной доской и фигурами на ней (передвигающимися по стандартным шахматным правилам), затронута во многих из названных в дополнительной литературе книгах: см., например, книги [6], книги Шуберта и Аренса [2], Штейнгауза [54]. К этой теме относится также цикл задач 3 первого раздела книги [12] или гл. V первой из книг [26]. Специально «математике на шахматной доске» посвящены первые две книги [70]. Более непосредственно связанные с игрой в шахматы, но притом все же достаточно «математические» по своей структуре задачи собраны в третьей из книг [70]; некоторые примеры такого типа имеются также в книге Штейнгауза [54] (см. с. 12—13; особенно изящно выглядит последняя из этих задач в 1-м издании той же книги (М. — Л., Гостехиздат, 1949) — см. с. 11).

¹ Учением об *определителях* начинаются почти все учебники *алгебры* (или *высшей алгебры*); оно излагается также и во многих книгах по *линейной алгебре*. Из рассчитанной на начинающих (частично и на школьников) литературы назовем статью [71].

² Эта задача также подробно обсуждается, например, в книгах Шуберта и Аренса [2].

³ Эта задача пользовалась широкой популярностью в московском школьном математическом кружке при МГУ; опубликована она, в частности, в вып. 5 сборников «Математическое просвещение» (Новая серия). — М.: Физматгиз, 1960, с. 253, но, возможно, и не только там.

⁴ Представляющая серьезный интерес тема о *латинских квадратах* (и об *ортогональных латинских квадратах*) затронута почти во всей (сегодня достаточно обширной) литературе по комбинаторике — см., например, книги [72].

⁵ Под диагоналями здесь понимаются «обобщенные» (или «ломанные») диагонали (см. примечание¹ к гл. VII).

⁶ Ср. статью Беке [91].

Старинная тема о магических квадратах затрагивается во многих из названных выше книг о математических развлечениях (Лицман [2]; первая из книг Гардиера [6] и др.). Специально этой теме посвящены сравнительно недавно вышедшие книги [73].

¹ «Ломаные» или «распадающиеся на части» диагонали квадрата размером $n \times n$ образованы, скажем, параллельным главной диагонали d рядом чисел («клеток» квадрата; «главная диагональ» квадрата идет снизу вверх направо; «побочная диагональ» идет снизу вверх налево), расположенных на k рядов выше d , к которым присоединяется параллельный d ряд, расположенный на $n - k$ рядов ниже d . Иногда понятие «ломаной диагонали» поясняется так: вся плоскость разбивается на (идентичные основному!) квадраты вертикальными и горизонтальными линиями; при этом (параллельные d !) «диагонали» захватывают бесконечно много квадратов разбиения, однако в них все время повторяются одни и те же числа, которые только и засчитываются. Вместо разбиения плоскости на квадраты можно договориться об отождествлении («склеивании») верхней и нижней, а также левой и правой границ квадрата (при этом квадрат превращается в «бублик», или *тор*); при таком отождествлении «ломаная диагональ» превращается в один ряд чисел.

² Здесь обыгрывается (проникшее уже и в нашу среднюю школу) отождествление вектора a с параллельным переносом на вектор a .

³ В разных книгах по аналитической геометрии формулы преобразования координат при повороте осей на угол α записываются в двух разных видах: как $x' = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y$, $y' = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y$ или как $x' = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y$, $y' = \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y$. Эти два подхода соответствуют тому, считаем ли мы, что повороту ψ подвергается точка $M(x, y)$ [т. е. что $\psi \cdot M(x, y) = M'(x', y')$] или что поворачивались оси координат ($Ox' = \psi \cdot Ox$, $Oy' = \psi \cdot Oy$), а точка M оставалась на месте; при этом «матрицы перехода от координат (x, y) к координатам (x', y') » [матрицы $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$] являются взаимно обратными.

Глава VIII

Главы VIII—IX книги посвящены топологическим задачам — и здесь естественно отослать читателя к элементарным обсуждениям сущности *топологии* [74] (см. также гл. V книги [47] и заключительную гл. VI названной на с. 263 книги Гильберта и Кон-Фоссена). Задача о раскраске карт обсуждается в нескольких из названных книг и статей; ей посвящены также 1-й раздел книги [28], тема 13 замечательной книги [75] и один из разделов в книгах [76].

¹ Проблема четырех красок была, как будто, решена в 1976 г. в положительном смысле (было доказано, что четырех красок всегда достаточно) с помощью ЭВМ; в этой работе принимал участие большой коллектив математиков и программистов, возглавляемый американскими математиками К. Эппелем и В. Хакеном (см. [77]). [Но можно ли считать такое доказательство «решением» задачи? А что если ЭВМ где-нибудь ошиблась? Ведь, чтобы обосновать свои утверждения, авторам «решения» понадобилось около 2000 часов работы

мощного компьютера, так что проверить его заключение «вручную» явно невозможно.]

² Это обстоятельство установил в 40-х годах XIX в. А. Ф. Мэбиус, который тогда же высказал предположение о справедливости «теоремы четырех красок».

³ Найденное позже Хивудом доказательство «теоремы пяти красок» в основном опиралось на конструкции Кемпе; более того, на эти же конструкции опиралось и «машинное» доказательство теоремы четырех красок (см. примечание ¹), откуда уже следует, что довести свое рассуждение до полного решения задачи Кемпе никак не мог.

⁴ Питер Гесри Тэйт (1831—1901), ученик и друг У. Р. Гамильтона, сотрудник и соавтор по «Курсу физики» знаменитого Уильяма Томсона (лорда Кельвина), пожалуй, более известен как физик и механик, чем как математик; однако его математические достижения также были значительны. К ним в какой-то степени можно отнести и работу о проблеме четырех красок: правда, в «решение» Тэйта заключалась ошибка, однако безукоризненным оставался вывод («теорема Тэйта») о том, что страны карты можно правильно закрасить четырьмя красками в том и только том случае, если границы карты можно правильно окрасить тремя красками (т. е. так, чтобы сходящиеся в одной вершине «ребра», или границы карты, были окрашены разными красками, — см., например, книги [76], где эта теорема ошибочно приписывается В. Вольтскому). Ошибки в «доказательствах» Кемпе и Тэйта впервые обнаружил Хивуд, до работ которого теорему четырех красок считали доказанной такие авторитеты, как Ф. Клейн и даже сам А. Кэли, который, так сказать, впервые «ввел эту теорему в обиход». В связи с этим Г. Рингель [84] не без основания заметил, что, по-видимому, «в те годы математики также не были склонны винмательно читать чужие работы, как и в наши дни».

⁵ Ведь в топологии, к которой относится понятие графа, вообще отсутствует понятие прямой линии. (Из литературы по теории графов укажем здесь рассчитанные на школьников книгу и статьи [78] и более серьезные учебники и монографии [79]; см. также статьи Хонсберджера и Рида в сборнике [11].)

⁶ Более того, величина $F - E + V$ характеризует «топологический тип» поверхности — ведь для всех «топологически одинаковых» (гомеоморфных, как говорят математики) поверхностей эта величина будет одной и той же. (Ниже мы увидим, что для «замкнутых двусторонних поверхностей» или для «замкнутых односторонних поверхностей» рассматриваемая величина является единственной топологической характеристикой поверхности, т. е. она полностью определяет ее топологический тип — см. сноску на с. 253.)

⁷ Естественно считать при этом, что границы наложенных друг на друга карт лишь пересекаются, но нигде не совпадают (этого всегда можно добиться малым «шевелением» границ).

⁸ Заметьте, что с точки зрения топологии тетраэдр от сферы не отличается!

⁹ По поводу доказательств формулы (или теоремы) Эйлера см. некоторые из книг и статей [74], [80], [75], [47] или [76], а также книгу Тильберта и Кон-Фоссена ([15] на с. 263). Укажем, что еще до Эйлера соответствующая теорема была известна Декарту (см. [81]), в то время как полноценного доказательства теоремы не дал и Эйлер (ср. замечательную книгу [82]).

¹⁰ Классификация замкнутых поверхностей обсуждается в некоторых из названных выше книг и статей по топологии; см. также,

например, [83]. Во многих из указанных работ обсуждаются и *неориентируемые* (односторонние) замкнутые поверхности вроде, например, *проективной плоскости* или *бутылки Клейна* (ср. гл. 27 второй книги [6]).

¹¹ При описании понятия *двойственных* друг другу карт в научно-популярной литературе часто говорят о «столицах» имеющихся на карте стран, причем «столицы» соседних (имеющих общую границу) стран соединены линией железной дороги, пересекающей эту общую границу; полученная таким путем железнодорожная сеть и образует карту, двойственную исходной.

¹² Теореме Хнвуда — Рингеля — Янгса посвящена книга [84], вышедшая в свет уже после смерти Янгса.

¹³ См. также [85].

¹⁴ О стереографической проекции см., например, книгу Гильберта и Кон-Фоссена ([15] на с. 263), книгу Яглома [50] или книгу [86].

Глава IX

В этой главе продолжается обсуждение некоторых тем из топологии, начатое в гл. VIII. Темы об *универсальных линиях* и *лабиринтах* затрагиваются во многих книгах, посвященных математическим развлечениям (ср., например, гл. 25 первой из книг [6]); с обсуждения задачи Эйлера начинается книга Оре [78] (см. также, скажем, книгу Шуберта [2]); в последних двух книгах обсуждается и понятие *гамильтонова цикла*.

¹ Сириец-христианин Ямвлих (ок. 250—330) — неопифагореец, автор одной из известнейших биографий Пифагора (достоверность которой, впрочем, вызывает сомнения: ведь никакие письменные труды Пифагора до нас не дошли, а Ямвлих жил чуть ли не на 850 лет позже Пифагора) и ряда других посвященных пифагорейцам сочинений, дошедших до нас лишь частично. (Халкида — город в древней Сирии.)

² Тема о *деревьях* затрагивается во всех сочинениях по теории графов; см., также, например, гл. 27 третьей из книг [6].

³ *Помеченным* называется граф с n узлами (вершинами), пронумерованными числами от 1 до n ; под «числом деревьев» в данном контексте понимается, разумеется, «число топологически различных деревьев»: каждому дереву с n вершинами можно приписать $n!$ расстановок номеров вершин, но некоторые из этих расстановок будут отвечать одной и той же (топологической) схеме. Теорема Кэли имеется, например, в специально посвященной этому кругу вопросов книге [87]; ср. также статью Рида в [11].

⁴ Ясно, что рис. 9.10, а—в топологически эквивалентны.

⁵ См. также [88].

⁶ *Логарифмическая спираль* S [ее уравнение в полярных координатах r, φ имеет вид $r = a^\varphi$, где a — произвольное (вещественное) число] характеризуется тем свойством (см., например, задачу 234, а книги [89]), что S допускает «подобные скольжения по себе», т. е. переводится в себя системой «центральных поворотов» с центром в полюсе O (полярной системы координат), другими словами, системой поворотов вокруг O , сопровождаемых «подобными раздутиями» (гомотетиями) с центром O .

Глава X

Настоящая глава, как об этом говорится в предисловии Г. С. М. Коксетера к двенадцатому изданию книги, возникла из гораздо бо-

лее бедной по содержанию главы первоначального (1892 г.) варианта книги; она была посвящена «задаче Киркмана о школьницах», поставленной ирландским математиком Т. Киркманом еще в 1847 г., но окончательно решенной лишь в 1969 г. известными специалистами по комбинаторике и теории кодирования — индийцем Д. К. Роем-Чоудхури и англичанином Р. М. Уилсоном. Такое положение дела вполне можно считать симптоматичным. Обсуждаемые в гл. X комбинаторные схемы возникли в XIX в., а некоторые — даже в XVIII в., но их долго рассматривали как чисто «игрушечный» раздел математики, относящийся к области математических развлечений и представляющий лишь чисто методический интерес. Однако во второй половине нашего века они вдруг привлекли всеобщее внимание. Для примера обратимся к начинающим эту главу *конечным геометриям*, скажем, к *конечным проективным плоскостям*, которые задаются перечисленными на с. 303 четырьмя аксиомами, или к *аффинным плоскостям*, для которых аксиома (2) заменяется аксиомой *параллельности*, утверждающей, что *для каждой прямой a через каждую точку A проходит единственная прямая, параллельная a* (т. е. с a не пересекающаяся или с a совпадающая). Эти геометрии впервые были рассмотрены одним из классиков математики XIX в., выдающимся немецким геометром Христианом фон Штаудтом (1798—1867); первая же серьезная «теорема существования» для этих геометрий была доказана в 1906 г. видным американским математиком Освальдом Веблеином (1880—1960). Тем не менее всю первую половину нашего века конечные геометрии рассматривались лишь как схемы, позволяющие объяснить учащимся сущность аксиоматического подхода к геометрии, но не имеющие серьезного научного или прикладного значения. Вызванный появлением компьютеров и современной научно-технической революцией рост интереса к «конечным» разделам математики, в частности к комбинаторике (ср. введение к брошюре [90]), не обошел и конечные геометрии (о которых см., например, [91], а также Белая [77] и некоторые из книг [72] или [40]); оказалось, что эти «игрушечные» объекты тесно связаны со многими важными разделами чистой и прикладной математики, в частности с *теорией кодирования*. И характерно, что список литературы в названном на с. 334 обстоятельном (но сегодня уже заметно устаревшем) обзоре по теории конечных геометрий, составленном видным западногерманским специалистом Петером Дембовским, включает более полутора тысяч названий, из которых около 1300 (!) относятся к книгам и статьям, опубликованным в 50—60-х годах нашего столетия (книга Дембовского вышла в свет в 1968 г.).

¹ Любопытно отметить, что один из крупнейших французских математиков XX в. Жак Соломон Адамар (1865—1963) является также автором популярного школьного учебника геометрии (ср. [63]).

² *Кодом, исправляющим ошибки* [они играют очень важную роль в современной (прикладной) теории связи и в современной технике — достаточно указать хотя бы задачу установления безошибочной связи с запускаемыми с Земли космическими аппаратами], посвящена ныне огромная литература: кроме книг [92], непосредственно касающихся этой темы, можно назвать, например, книги Биркгофа — Барти и Чильдса по прикладной алгебре [39] или заключительный параграф книги [93].

³ Ср., например, названную на с. 333 книгу [4] или [94].

⁴ Здесь $J = (4 \times 4)$ -матрица, состоящая из одних единиц.

⁵ Эта теорема доказывается в большинстве пособий по теории чисел (см., например, [32] или раздел «Несколько задач из теории чисел» книг [8]).

Глава XI

Эта глава посвящена играм, которые традиционно входят в большинство книг по математическим развлечениям, в частности в некоторые из книг [1—6] (они рассматриваются также в книгах [8]). Наиболее известна из рассмотренных здесь игр изобретенная Сэмом Лойдом «Игра в 15» (см. задачу 21 книги Лойда [4]), которая в конце прошлого века пользовалась широкой популярностью в Европе и Северной Америке.

¹ Ясно, что если «пустая» клетка, начав свое движение с некоторого места, затем на то же место вернулась, то каждому передвижению вправо (или вверх) от первоначального положения должно отвечать также движение влево (вниз) — в противном случае она не сможет снова оказаться там, где была в начале пути. Поэтому такой замкнутый путь пустой клетки состоит из четного числа ходов и циклически переставляет нечетное число клеток доски для игры в пятнашки: все участвующие в перестановках клетки, кроме «пустой», которая свое положение не меняет.

² Разумеется, пока из сказанного вытекает лишь, что нам требуется здесь не меньше 85 шагов; чтобы установить достаточность (а не только необходимость) 85 шагов, надо описать «оптимальную стратегию», которая позволяла бы на каждом шагу изменять «кодовое число позиции» в одном направлении: всегда прибавлять к нему (или всегда отнимать) единицу. Заметим еще, что в описанной «арифметической» трактовке такая оптимальная стратегия будет выглядеть несколько по-разному для четного и для нечетного числа исходных колец.

³ В нашей стране популярно (столь же бессмысленное, как и приведенные здесь «латинские фразы») «русское предложение»: *Наука умеет много гитик* (не трудитесь искать в словаре слово «гитик» — в русском языке такого слова нет).

Глава XII

Настоящая глава относится скорее к истории математики, чем к математическим развлечениям, — материал, дополняющий предложенное здесь У. Роузом Боллом «эссе», читатель может найти прежде всего в книгах по истории математики (ср., например, [95] или специально посвященную этой теме научно-популярную книгу [96]). По общим вопросам теории геометрических построений и разрешимости или неразрешимости тех или иных задач «евклидовыми» либо иными средствами можно рекомендовать книги [97]; см. также превосходную статью [46]. Квadrатуре круга посвящена названная на с. 381 книга Ф. Рудио, которая включает упоминающиеся в тексте классические работы Архимеда, Гюйгенса, Лежандра и Ламберта и превосходный обзор истории вопроса, принадлежащий составителю сборника; еще подробнее разобраны эти вопросы в более свежей книге [98].

¹ Задачи об удвоении куба и о трисекции угла можно решить при использовании начерченных в плоскости конических сечений (кривых 2-го порядка: эллипсов, парабол или гипербол) или при нали-

ции инструментов для построения этих линий; задача о квадратуре круга неразрешима и в этих условиях (и даже при использовании любых алгебраических линий, т. е. линий, задаваемых в декартовых координатах алгебраическим уравнением).

² На острове Делос в Эгейском море находился весьма почитавшийся в древнем мире храм Аполлона, в котором был и жертвенник. В иных вариантах легенды о «Делосской задаче» речь идет о чуме или моровом поветрии, постигнувших жителей острова Делос; однако упоминание о Платоне фигурирует в большинстве вариантов легенды.

³ Математика Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) не следует путать с его современником врачом Гиппократом Косским (ок. 460—370 до н. э.). Характерно, что оба этих выдающихся ионийца (Хиос и Кос — острова в Эгейском море, географически относящиеся к Ионии, ставшей колыбелью греческой культуры) примерно в одно и то же время имели свои школы в Афинах — соответственно математическую и медицинскую.

⁴ «Каноническим уравнением» параболы P обычно называют уравнение $x^2 = 2py$ — линия P может быть описана как множество точек, равноудаленных от фокуса $F(p/2, 0)$ и от директрисы $x = -p/2$ параболы. Расстояние p между фокусом и директрисой линии P называется *фокальным параметром* параболы.

⁵ Таким образом Аполлоний Пергский (ок. 260—170 до н. э.) решал не задачу об удвоении куба, а более общую задачу о *построении двух средних пропорциональных к двум заданным отрезкам*.

⁶ Следует заметить, что и при любом другом определении числа π вычисление его с той колоссальной точностью, о которой идет речь ниже (а ныне с помощью компьютеров найдено уже несколько тысяч знаков десятичного разложения этого числа), никакого практического значения не имеет — это скорее чисто «спортивные» достижения.

⁷ Гиппократ указал несколько ограниченных дугами окружностей фигур («луночек»), квадратура которых достаточно проста: так, например, площадь четырех луночек, с внешней стороны ограниченных полукругами, построенными вне квадрата на его сторонах как на диаметрах, а с внутренней — описанной вокруг квадрата окружностью, равна площади квадрата. Результаты Гиппократа произвели большое впечатление в связи с теми трудностями, которые вызывала задача о квадратуре круга, — но они, разумеется, не приблизили решения этой задачи.

⁸ Элементарное, но (кроме, пожалуй, формулы Виета) не очень простое доказательство формулы Виета для числа π , формулы Валлиса, формулы Эйлера $\pi^2/6 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$, формулы Лейбница $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ и некоторых других приведено в разделе «Четыре формулы для числа π » книги [12].

⁹ Разумеется, автор имеет здесь в виду непрерывную дробь $1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\dots}}}}$.

¹⁰ В течение почти 100 лет рекордным считалось выполненное Шенксом вычисление 707 десятичных знаков числа π ; эти цифры даже полностью выписывались в некоторых научно-популярных книгах; ошибка в вычислениях Шенкса была обнаружена лишь с помощью компьютера.

¹¹ Результаты знаменитого французского естествоиспытателя Жоржа Бюффона (1707—1788) и одного из классиков теории вероятностей Пафнутия Львовича Чебышева из Петербурга (1821—1894), связывающие число π с вероятностью того, что брошенная на пло-

скость палочка («игла») пересечет одну из начерченных на плоскости параллельных линий, соответственно с вероятностью взаимной простоты двух «взятых наугад» натуральных чисел, излагаются во многих книгах по теории вероятностей; в частности, эти результаты рассмотрены в разделе «Задачи на подсчет вероятностей» книги [12]. Задача Бюффона анализируется также в книге Мостеллера [25] и в книгах и статье [99].

Глава XIII

Эта глава книги имеет два аспекта — математический и психологический. Математический аспект вопроса связан с приемами быстрых вычислений, используемыми людьми, о которых здесь рассказывается; частично он обсуждается в этой главе. Психологический аспект связан с пока еще совершенно нам неясным вопросом об «априорных» возможностях человеческого мозга: по этому поводу ср. также [100].

¹ В связи со сказанным выше о психологических аспектах вопроса о чудо-вычислителях уместно вспомнить также замечательного индийского ученого Сриниваза Рамануджана Айенгра (1887—1920), обладавшего феноменальными и во многом загадочными математическими способностями (о нем см. [101]); изумление вызывает также «взаимоотношение» Рамануджана с (натуральными) числами. Здесь уместно упомянуть случай, фигурирующий в большинстве посвященных Рамануджану книг и статей (в том числе и в брошюре [101]). Организованный выдающимся английским математиком Г. Харди (1877—1947), горячим поклонником таланта Рамануджана, переезд последнего в 1914 г. из Индии в Англию оказался, к сожалению, трагичным для молодого индийца, не сумевшего приспособиться к английскому климату: в 1917 г. он заболел туберкулезом и вскоре умер. Но еще во время его болезни с ним однажды произошел такой случай. Харди навестил как-то Рамануджана в лондонской больнице, и когда он сказал, что приехал на такси, Рамануджан, оживившись, спросил: «А какой номер был у такси?» Хорошо знающий Рамануджана Харди ответил: «Довольно скучный: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ ». «Ну, нет, — немедленно ответил Рамануджан, — это число вовсе не скучное: оно первое, которое представимо в виде суммы двух кубов двумя разными способами: $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$ ». Близкий друг и Харди, и Рамануджана математик Дж. Литлвуд (1885—1977) сказал по этому поводу: «Создавалось впечатление, что каждое натуральное число являлось «личным другом» Рамануджана.

Глава XIV

Настоящая глава была в основном составлена в 1938 г. видным специалистом по криптографии Абрахамом Синковым (воспользуюсь случаем, чтобы обратить внимание читателей на указанную в конце главы книгу «Элементарный криптоанализ» этого автора, рассчитанную на широкий круг читателей); при переиздании книги в 1974 г. она была оставлена почти без изменений. Впрочем, по-видимому, именно тогда в этой главе появились данные, которые и послужили причиной того, что ныне ее приходится считать значительно устаревшей: указание на электронные механизмы (компьютеры!), используемые в наши дни для шифровки и дешифровки сообщений, и ссылка на секретную корреспонденцию коммерческого характера (секреты

фирм), составляющую ныне самую обширную статью всех шифрованных сообщений. Характерный для нашего времени «информационный бум», огромные массивы циркулирующей в мире информации, в том числе и такой, которая должна быть доступна лишь строго ограниченному контингенту «получателей сообщений», полностью изменили лицо старинного «криптоанализа»: ныне здесь используются совсем новые методы, рассчитанные на «машинное хранение информации» в банках данных больших информационных систем, причем расшифровку и зашифровку сообщений автоматически осуществляет компьютер. Более того, наше время породило совсем новые криптографические проблемы; в качестве примера назовем хотя бы задачу автоматической обработки информации компьютером, которая должна быть выполнена так, чтобы любой мог прочесть зашифрованное сообщение, но никто (кроме компьютера и лиц, составлявших программу его работы) не мог такое сообщение составить; именно такие требования следует предъявлять, скажем, к автоматическим системам контроля за любыми военными (например, атомными) испытаниями, которые (системы) страна могла бы разрешить установить на своей территории другой стране. При этом обнаруживаются глубокие связи между криптографией и теорией кодирования (ср., например, в сборнике [11] статьи выдающихся специалистов по теории кодирования и криптоанализу Шамира, Райвеста, Адельмана и Слоэна). Однако, в то время как теория кодирования является сегодня чуть ли не важнейшей главой прикладной алгебры (ср., например, последние две из книг [39]), криптография породила новую область знания, которую можно назвать **прикладной теорией чисел** (см. [102]; ср. со сказанным на стр. 80 по поводу практической бесполезности теории чисел — в настоящее время это заключение вполне можно считать устаревшим).

¹ Частоты использования отдельных букв русского языка указаны, например, в § 3 гл. IV книги [93]; там же обсуждается и вопрос о частотах использования тех или иных комбинаций букв.

² Описываемые здесь процедуры близки к вопросу о кодах, исправляющих ошибки (ср., например, примечание ² к гл. X).

³ См. [103].

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — М.: Наука, 1965; Игнатъев Е. И. В царстве смекалки. — М.: Наука, 1982; Гарднер М. Математические чудеса и тайны. — М.: Наука, 1982; Еленьский Щ. По следам Пифагора. — М.: Детгиз, 1961; Липцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах. — М.: Физматгиз, 1963; Успенский Я. В. Избранные математические развлечения. — Пг.: «Сеятель», 1924; Труднев В. П. Считай, смекай, отгадывай! — М.: Просвещение, 1964; Демпман И. Я. Мир чисел. — М.: Детская литература, 1966; Лямин А. А. Математические догадки. — М.: Пг.: 1915; Лямин А. А. Математические парадоксы и интересные задачи для любителей математики. — М., 1911.
2. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. — М.: Физматгиз, 1961; Арнс В. Математические игры и развлечения. — М. — Л.: «Петроград», 1924; Ковалевский Г. Избранные главы из математической теории игр. — Пг.: Научное книгоиздательство, 1924; Шуберт Г. Математические развлечения и игры. — Одесса: Матезис, 1923.

3. Лямин А. А. Физико-математическая хрестоматия (т. 1, Арифметика; т. 2, Алгебра; т. 3, кн. 1—2, Геометрия).— М.: «Сотрудник школы», 1912—1914.
4. Лойд С. Математическая мозаика.— М.: Мир, 1980; Дьюдени Г. Э. 520 головоломок.— М.: Мир, 1975; Дьюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки.— М.: Мир, 1979.
5. Тринг Ч. Задачи с изюминкой.— М.: Мир, 1975; Барр Ст. Рассыпн головоломок.— М.: Мир, 1984; Беррандо М. Занимательные задачи.— М.: Мир, 1983; Байнф Ж.-К. Логические задачи.— М.: Мир, 1983.
6. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.— М.: Мир, 1971; Гарднер М. Математические досуги.— М.: Мир, 1972; Гарднер М. Математические новеллы.— М.: Мир, 1974.
7. Баше К. Г. Игры и задачи, основанные на математике.— Спб.— М., 1877.
8. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра).— М.: Наука, 1965; 1976.
9. Флавий Иосиф. Иудейская война.— Спб., 1900.
10. Мешерский Н. А. История иудейской войны Иосифа Флавия в древнерусском переводе.— М.: Изд-во АН СССР, 1958.
11. Математический цветник (сост. и ред. Д. А. Кларнер).— М.: Мир, 1983.
12. Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.— М.: Гостехиздат, 1954.
13. Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K., Winning Ways (for your mathematical plays), vol. 1, 2.— London: Academic Press, 1982.
14. Яглом И. М. Две игры со спичками.— «Квант», 1971, №2, с. 4—10; Орлов А. Ставь на минус! — «Квант», 1977, № 3, с. 41—45; Матулис А. Ю., Савукина А. Ю. «Ферзя— в угол», «цзянь-шицзы» и числа Фибоначчи.— «Квант», 1984, № 7, с. 18—21 и 29.
15. Connel I. G. A generalization of Wythoff's game.— *Canadian Math. Bulletin*, 2, 1959, p. 181—190; Fraenkel A. S., Borosh T. A generalization of Wythoff's game.— *Journal of Combinatorial Theory*, 15, 1973, p. 175—191; Fraenkel A. S. How to beat your Wythoff's games opponent on three rounds.— *American Math. Monthly*, 89, N 6, 1982, p. 353—361.
16. Арнольд И. В. Об одном свойстве числа $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$.— Мат. просвещение (старая серия), вып. 8, 1936, с. 16—24.
17. Тиммердинг Г. Е. Золотое сечение.— Пг.: Научное книгоиздательство, 1924.
18. Пидоу Д. Геометрия и искусство.— М.: Мир, 1979.
19. Хинчин А. Я. Цепные дроби.— М.— Л.: Гостехиздат, 1949; Хинчин А. Я. Элементы теории чисел.— В кн.: Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. I (арифметика).— М.— Л.: Гостехиздат, 1951, с. 253—353.
20. Литцман В. В чем ошибка? — М.: Физматгиз, 1962; Литцман В., Трир Ф. Где ошибка? — М.: ГТТИ, 1932; Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях.— М.: Просвещение, 1967.
21. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах.— М.: Гостехиздат, 1953; Дубнов Я. С. Беседы о преподавании математики.— М.: Просвещение, 1965, с. 82—133.
22. Клайн М. Математика. Утрата определенности.— М.: Мир, 1984.

23. Курно Ог. Основы теории шансов и вероятностей. — М.: Наука, 1970.
24. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математку. — М.: Мир, 1964.
25. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1985.
26. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969; Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
27. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М. — Л.: Гостехиздат, 1951; М.: Наука, 1964; 1969; 1984; Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. — М.: Наука, 1975.
28. Дынкин Е. Б., Успенский В. А. Математические беседы. — М. — Л.: Гостехиздат, 1952.
29. Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах. — М.: Наука, 1974; Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. — М.: Наука, 1972.
30. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — М. — Л.: Гостехиздат, 1952; Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. — М.: Физматгиз, 1961.
31. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. — М.: Учпедгиз, 1959.
32. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981; Арнольд И. В. Теория чисел. — М.: Учпедгиз, 1939; Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966.
33. Яглом И. М. Почти простые числа. — «Квант», 1981, № 9, с. 16—19.
34. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. — М.: Наука, 1969.
35. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых, т. 1. — М. — Л.: ОНТИ, 1936; тт. 1, 2. — М.: Наука, 1961.
36. Шнирельман Л. Г. Простые числа. — М. — Л.: Гостехиздат, 1940; Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. — М.: Физматгиз, 1963.
37. Трост Э. Простые числа. — М.: Физматгиз, 1959.
38. Анаксотис. Теорема Фермана. — Киев, 1911; Хинчин А. Я. Великая теорема Ферма. — М. — Л.: Гостехиздат, 1932; Постников М. М. Теорема Ферма. — М.: Наука, 1978; Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. — М.: Мир, 1980.
39. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977; Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. — М.: Наука, 1973; Скорняков Л. А. Элементы алгебры; Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1980, 1983; Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. — М.: Мир, 1976; Childs L. A Concrete Introduction to Higher Algebra. — New York: Springer, 1979.
40. Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. — М.: Сов. радио, 1980.
41. Фурре Е. Геометрические головоломки и параллелизмы. — Одесса: Матезис, 1912.
42. Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.
43. Липцман В. Теорема Пифагора. — М.: Физматгиз, 1960; Виппер Ю. Ф. Сорок пять доказательств пифагоровой теоремы. — М., 1876.
44. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3 — геометрия (стереометрия). — М.: Гостехиздат, 1954.
45. Каган В. Ф. О преобразовании многогранников. — М. — Л.:

- ГТТИ, 1933; Каган В. Ф. Очерки по геометрии. — М.: изд. МГУ, 1963, с. 156—194; Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. — М.: Гостехиздат, 1956; Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. — М.: Наука, 1977; Хадвингер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.
46. Манин Ю. И. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. — В кн.: ЭЭМ, кн. IV (геометрия). — М.: Физматгиз, 1963, с. 205—227.
 47. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: Просвещение, 1967.
 48. Вебер Г., Вельштейн И. Энциклопедия элементарной математики, кн. 1 — Вебер Г. Энциклопедия элементарной алгебры. — М. — Л.: ГИЗ, 1927.
 49. Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса. — «Квант», 1972, № 1, с. 2—11; Гиндикин С. Г. Золотая теорема. — «Квант», 1973, № 1, с. 2—9; Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — М.: Наука, 1985.
 50. Адлер А. Теория геометрических построений. — Л.: Учпедгиз, 1940; Яглом И. М. Геометрические преобразования т. II. — М.: Гостехиздат, 1956; Бескин Н. М., Болтянский В. Г., Маслова Г. Г., Четверухин Н. Ф., Яглом И. М. Общие принципы геометрических построений. — В кн.: ЭЭМ, кн. IV (геометрия). — М.: Физматгиз, 1963, с. 159—204.
 51. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.
 52. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. — М. — Л.: Гостехиздат, 1951.
 53. Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников. — «Квант», 1970, № 3, с. 24—27.
 54. Узоры симметрии (ред.: М. Сенешаль, Дж. Флек). — М.: Мир, 1980; Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981; Шубников А. В., Колпик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972; Береснева В. Я., Яглом И. М. Симметрия и искусство орнамента. — В кн.: Ритм, пространство и время в литературе и искусстве. — Л.: Наука, 1974, с. 274—289; Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958; Fejes Tóth L. Regular Figures. — New York: Macmillan, 1964.
 55. Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. — San Francisco: Freeman, 1985; The World of M. C. Escher. — New York: Abrams, 1971; Escher M. C., Locher J. L. The Infinite World of M. C. Escher. — New York: Abradale Press, 1984; Bool F. H., Ernst B., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F. Escher. — London: Thames and Hudson, 1982.
 56. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. — М. — Л.: Гостехиздат, 1952; Яглом И. М. Как разрезать квадрат? — М.: Наука, 1968.
 57. Как разбить квадрат? — «Квант», 1979, № 11, с. 21 (и задняя сторона обложки журнала); Federico P. J. Squaring Rectangles and Squares (A Historical Review with Annotated Bibliography). — В кн.: Graph Theory and Related Topics (ed.: Bondy S. A., Murty U. S.). — New York: Academic Press, 1979, p. 173—196.
 58. Люка Э. Математические развлечения. — СПб., 1883.

59. Люстерник Л. А. Кратчайшие линии. — М.: Гостехиздат, 1955.
60. Ашкинуде В. Г. Многоугольники и многогранники. — В кн.: ЭЭМ, кн. IV (Геометрия). — М.: Физматгиз, 1963, с. 382—447.
61. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950.
62. Grünbaum V. Convex Polytopes. — London: Interscience Publ., 1967.
63. Бескин Л. Н., Бескин В. Л. Многогранники. — Киев: Выща школа, 1984; Веннинджер М. Модели многогранников. — М.: Мир, 1974; Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники. — М.: Гостехиздат, 1956; Берже М. Геометрия, т. 1. — М.: Мир, 1984; Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 2. — М.: Учпедгиз, 1958; Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии, ч. 2. — М. — Л.: Гостехиздат, 1949.
64. D'Arcy Thompson W. On Growth and Form. — Cambridge: University Press, 1948.
65. Розенфельд Б. А., Яглом И. М. Многомерные пространства — В кн.: ЭЭМ, кн. V (Геометрия). — М.: Наука, 1966, с. 348—392; Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
66. Яглом И. М., Атанасян Л. С. Геометрические преобразования. — В кн.: ЭЭМ, кн. IV (Геометрия). — М.: Физматгиз, 1963, с. 49—158.
67. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: Наука, 1976.
68. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I — Арифметика. Алгебра. Анализ. — М. — Л.: ОНТИ, 1935; Klein F. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. — Leipzig: Teubner, 1884.
69. Ашкинуде В. Г. О числе полуправильных многогранников. — «Мат. просвещение» (нов. серия), вып. 1, 1957, с. 107—118.
70. Окунев Л. Я. Комбинаторные задачи на шахматной доске. — М. — Л.: ОНТИ, 1935; Гнк Е. Я. Математика на шахматной доске. — М.: Наука, 1976; Карпов А. Е., Гнк Е. Я. Шахматный калейдоскоп. — М.: Наука, 1981.
71. Узков А. И. Векторные пространства и линейные преобразования. — В кн.: ЭЭМ, кн. II (Алгебра). — М. — Л.: Гостехиздат, 1961, с. 9—126.
72. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970; Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966; Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963; Холл М. Комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1968; Комбинаторный анализ — задачи и упражнения (ред. К. А. Рыбников). — М.: Наука, 1982.
73. Постников М. М. Магические квадраты. — М.: Наука, 1964; Гуревич Е. А. Тайна древнего талисмана. — М.: Наука, 1969.
74. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982; Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии. — «Мат. просвещение» (новая серия), вып. 2, 1957, с. 3—34; вып. 3, 1958, с. 6—40; вып. 4, 1959, с. 27—52; вып. 6, 1961, с. 107—138; Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. — М. — Л.: ОНТИ, 1935; Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. — М.: Мир, 1967; Ефремович В. А. Основные топологические понятия. — В кн.: ЭЭМ, кн. V (Геометрия). — М.: Наука, 1966, с. 476—556.
75. Радемахер О., Теплиц Г. Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.
76. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. — М.:

- Физматгиз, 1961; Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. — М.: Наука, 1967.
77. Appel K., Haken W. The Solution of the Four-Color-Map-Problem. — Scientific American, October 1977, p. 108—121; Appel K., Haken W. The Four-Color-Problem. — В кн.: Mathematics Today (Twelve Informal Essays) (ed. A. S. Lynn). — New York: Springer, 1979, p. 153—180; Белая Э. Г. Мини-геометрии (четыре фрагмента математики XX века). — М.: Знание, 1977; Яглом И. М. Четырех красок достаточно. — «Природа», 1977, № 6, с. 20—25.
 78. Оре О. Графы и их применения. — М.: Мир, 1965; Болтянский В. Г. Топология графов; Плоские графы. — «Квант», 1971, № 6, с. 5—10; № 7, с. 11—16; Studies in Graph Theory I, II (ed. D. R. Fulkerson). — Mathematical Association of America, 1975.
 79. Берж К. Теория графов и ее применения. — М.: ИЛ, 1962; Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1968; Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973; Зыков А. А. Теория конечных графов, ч. 1. — М.: Наука, 1969.
 80. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1975; Шашкин Ю. А. Эйлерова характеристика. — М.: Наука, 1984.
 81. Federico P. J. Descartes on Polyhedra. — New York: Springer, 1982.
 82. Лакатош (Лакатос) И. Доказательства и опровержения. — М.: Наука, 1967.
 83. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М. — Л.: Гостехиздат, 1938.
 84. Рингель Г. Теория раскраски карт. — М.: Мир, 1977.
 85. Шубин М. Топология и... рельеф местности. — «Квант», 1982, № 8, с. 10—15.
 86. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Стереографическая проекция. — М.: Наука, 1973.
 87. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.
 88. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Кривые дракона. — «Квант», 1970, № 2, с. 36—46.
 89. Яглом И. М., Ашкинзуе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Ч. I. Аффинная геометрия. — М.: Учпедгиз, 1962.
 90. Яглом И. М. Конечные алгебры, конечные геометрии и коды. — М.: Знание, 1980.
 91. Беке Л. Мини-геометрия. — «Квант», 1976, № 6, с. 2—12; Картези Ф. Введение в конечные геометрии. — М.: Наука, 1980.
 92. Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: «Связь», 1979; Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976; Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. — М.: Мир, 1971; Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Инагаки Я. Теория кодирования. — М.: Мир, 1978; Levinson N. Coding Theory: a counter — example to G. H. Hardy's conception of applied mathematics. — *Amer. Math. Monthly*, 77, 1970, p. 249—258.
 93. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.
 94. Розенфельд Б. А., Яглом И. М. Неевклидовы геометрии. — В кн.: ЭЭМ, кн. V (Геометрия). — М.: Наука, 1966, с. 391—475; Сохе-

- ter H. S. M. Non-Euclidean Geometry. — Toronto: University Press, 1965.
95. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. — М. — Л.: ГТТИ, 1932.
 96. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. — М.: Учпедгиз, 1963.
 97. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. — М.: Учпедгиз, 1955; Bieberbach L. Theorie der geometrischen Konstruktionen. — Basel: Birkhäuser, 1952.
 98. Кымпан Ф. История числа π . — М.: Наука, 1971.
 99. Борель Э. Случай. — М. — Пг.: ГИЗ, 1923; Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. — М.: Наука, 1972; Gridge-man N. T. Geometric probability and the number π . — Scripta mathematica, 25, 1960, p. 183—195.
 100. Лурия А. Р. Маленькая книжка о большой памяти (ум мнемониста). — М.: изд. МГУ, 1968.
 101. Левин В. И. Рамануджан — математический гений Индии. — М.: Знание, 1968.
 102. Schörder M. R. Number Theory in Science and Communication. — N. Y.: Springer, 1984; Rosen K. Elementary Number Theory and Its Applications. — Reading (Mass.): Addison Wesley, 1984.
 103. Кнорозов Ю. В. Иероглифические рукописи майя. — Л.: Наука, 1975.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (Abel N. H.) 73
 Август (Augustus) 426
 Агриппа (Agrippa C.) 211
 Адамар (Hadamard J.) 73, 295
 Айткен (Aitken A. C.) 13, 409—410
 Александер (Alexander J. W.) 252
 Алкуин (Alcuin) 15, 129
 Ал-Кашн (al Kashī J. M.) 374
 Ампер (Ampère A. M.) 388
 Анаксагор 372
 Андерсон (Anderson A.) 76
 Андреас (Andreas J. M.) 11, 139, 168, 186, 233, 259
 Антифон 372
 Аполлоний Пергский 363, 365, 366, 373
 Араго (Arago F. J. D.) 395
 Ариабхата (Arya-Bhata) 99, 374
 Арну (Arnoux G.) 224
 Архимед 370, 373, 376
 Архит 364

 Бакстон (Buxton J.) 385—388, 392, 397
 Барбетт (Barbette E.) 229
 Баррау (Barrau J. A.) 120
 Басси (Bussey W.) 304
 Басшоп (Busschop P.) 101
 Баудхайана (Baudhayana) 374
 Баукамп (Bouwkamp C. J.) 125, 127
 Баше (Bachet C. G.) 15, 20, 21, 23, 24, 61—63, 219, 349, 351, 352
 Безикович (Besicovitch A. S.) 111—113
 Бейли (Baily R.) 76
 Бенсон (Benson W. H.) 231
 Бервик (Berwick W. E. H.) 35
 Бергхольт (Bergholt E. G. B.) 60, 228
 Бернулли И. (Bernoulli J.) 53, 371
 Бернулли Н. (Bernoulli N.) 56
 Бертран Ж. (Bertrand J. L. F.) 52
 Бертран Л. (Bertrand L.) 192

 Беццель М. 180
 Биддер (Bidder G. P.) 391—395, 400—409
 Блум (Bloom) 112, 113
 Бойан Ф. (Bolyai F.) 101
 Бойан Я. (Bolyai J.) 302
 Боуз (Bose R. C.) 314, 316
 Браун (Brown B. H.) 38
 Брахмагупта (Brahmagupta) 374
 Брилхарт (Brillhart J.) 78
 Брисон 372
 Бромтон (Brompton) 277
 Броункер (Brouncker V.) 377
 Брук (Bruck R. H.) 333
 Брукс (Brooks R. L.) 127
 Брун (Brun V.) 72, 74
 Брюкнер (Brückner M.) 168
 Бурле (Bourlet C. E. E.) 42
 Бхаскара (Bhaskara) 374
 Бьюли (Bewley E. D.) 60
 Бэкон Р. (Bacon R.) 439
 Бэкон Ф. (Bacon F.) 428, 439

 Валле Пуссен (de la Vallée Poussin Ch.-J.) 73
 Валлис (Wallis J.) 341, 343, 377, 385, 397
 Вандермонд (Vadermonde A. T.) 190, 195, 196
 Ванцель (Wantzel P. L.) 106, 361
 Варнсдорф (Warnsdorff) 190, 196, 197
 Веблен (Veblen O.) 304
 Вега (Vega) 378
 Вейль (Weil A.) 84
 Вензелид (Wenselides) 200
 Вергилий (Vergili Maronis P.) 277, 409
 Виет (Vieta F.) 366, 375
 Вильсон (Wilson J.) 71
 Виноградов И. М. 75
 Витхофф (Wythoff W. A.) 49
 Виферих (Wieferich A.) 81
 Войнич (Voynich W. M.) 439
 Вэстерн (Western A. E.) 78

 Гай (Guy R. K.) 49
 Галуа (Galois E.) 82

Гамильтон (Hamilton W. R.) 241, 283
 Гарднер (Gardner M.) 123, 124
 Гаусс (Gauss C. F.) 73, 84, 105, 302, 388—389, 396, 398
 Герберт (Gerbert) 373
 Гервин (Gerwien P.) 101
 Геродот 277
 Герон 363, 373
 Гершель (Herschel J.) 391, 393
 Гильберт (Hilbert D.) 99
 Гиппий 372
 Гиппократ Хиосский 364, 372
 Гитель (Guitel E.) 101
 Глэшер (Glaisher J. W. L.) 181, 372
 Голей (Golay M.) 325
 Голомб (Golomb S. W.) 121, 123
 Гольдбах (Goldbach C.) 371
 Гольдберг (Goldberg M.) 104
 Градштейн И. С. 77
 Гранди (Grundy P. M.) 47
 Грегорі (Gregory J.) 371, 377
 Гринбергер (Grienberger) 377
 Гринбергс Э. Я. 284, 285
 Гро (Gros L.) 344, 346
 Гуарини (Guarini) 204
 Гурвиц (Hurwitz A.) 50, 76, 79
 Гурматиг (Goormaghtigh M. R.) 356
 Гутри (Guthrie F.) 241
 Гэлтон (Galton F.) 52
 Гюйгенс (Huygens C.) 366, 370, 377
 Гюнтер (Günther S.) 181
 Давенпорт (Davenport H.) 56, 120
 Дазе (Dase J. M. Z.) 379, 396—398
 Д'Аламбер (D'Alembert J.) 52, 54
 Дарбу (Darboux G.) 399
 Дейвестейн (Duijvestijn A. J. W.) 127
 Декарт (Descartes R.) 366—368, 377
 Деланой (Delannoy) 130, 134
 Ден (Dehn M.) 105
 Деррингтон (Derrington) 186
 Джефсон (Jephson T.) 391
 Джиллис (Gillies D. B.) 76
 Джонс (Jones W.) 371
 Джонсон (Johnson W.) 335
 Дзамебоне (Zamebone U.) 399

Диаманди (Diamandi P.) 899, 401
 Диксон (Dickson L. E.) 77, 79, 355
 Диодор 277
 Диоклес 366
 Дирихле (Dirichlet G. L.) 81
 Доджсон (Dodgson C. L.) 89
 Дончиан (Donchian P. S.) 11, 155
 Дрейтон (Drayton) 277
 Дьюденн (Dudeney H. E.) 60, 103, 104, 107, 122, 131, 137, 228, 231
 Дэвис Дж. (Davis J.) 76
 Дэвис Ч. (Davis Ch.) 12
 Дюрер (Dürer A.) 211, 220
 Евклид 12, 77, 88, 99, 107, 146, 373
 Жергонн (Gergonne) 352
 Зейдель (Seidel J. J.) 12
 Иден (Eden M.) 123
 Инвардз (Inwards) 278
 Иноди (Inaudi J.) 394, 399—401, 403, 404
 Йениш (Jaenisch C. F. de) 188, 200
 Казалас (Cazalas J. J. A. M. E.) 231
 Какея (Kakeya S.) 110
 Каммингс (Cummings L. D.) 303
 Кани (Kani E. J. A.) 12
 Каннингем (Cunningham F., jr.) 12, 113
 Кардано (Cardan G.) 15, 341, 343
 Картрайт (Cartwright W.) 413
 Кемпе (Kempe A. B.) 243
 Кёниг (König D.) 287
 Кеплер (Kepler J.) 146, 149, 154, 159
 Киркман (Kirkman T. P.) 309
 Кларнер (Klarner D. A.) 123—125
 Клаузен (Clausen) 379
 Клаус (Claus) 339
 Клейн (Klein W.) 410
 Клеро (Clairaut) 369
 Кнут (Knuth D.) 12
 Коатпон де (de Coatpont) 101

Кокоз (Coccoz M.) 90, 229
 Колбери (Colburn Z.) 389—392,
 399, 404, 407
 Коллинз (Collins) 377
 Коллини (Collini) 196
 Коул Р. (Cole R. A. L.) 358
 Коул Ф. (Cole F. N.) 75, 303
 Коши (Cauchy A.) 159, 395
 Крайчик (Kraitchik M.) 75, 78,
 83
 Крамер (Cramer G.) 56
 Кубота (Kubota) 111
 Куммер (Kummer E. E.) 81
 Кэли (Cayley A.) 160, 241, 281,
 282, 359, 377
 Кэрролл (Carroll L.) 89

 Лабоси (Labosne A.) 23
 Лавернед де (de Lavernède
 J. E. T.) 197
 Лагранж (Lagrange L.) 71
 Ланр де (de la Hire P.) 220
 Лакьер (Lacquièr) 199
 Ламберт (Lambert J. H.) 370
 Ламе (Lamé G.) 81
 Ланьи де (de Lagny) 378
 Лебег (Lebesgue H.) 81, 110
 Лежандр (Legendre A. M.) 73,
 81, 192, 200, 370
 Лейбниц (Leibniz G. W.) 14,
 72
 Леммер Д. Н. (Lehmer D. N.) 72
 Леммер Д. Х. (Lehmer D. H.)
 11, 12, 68, 72, 74—76, 81
 Лендри (Landry F.) 78
 Лёрешон (Leurechon J.) 15, 24
 Леонардо Пизанский (Фибо-
 наччи) 375
 Лик (Leake) 24
 Линдемани (Lindemann) 370
 Листинг (Listing J. B.) 138,
 265, 266
 Литтлвуд (Littlewood J. E.) 74
 Лобачевский Н. И. 302
 Лондон (London) 279
 Люка (Lucas E.) 70, 72, 75,
 130, 159, 204, 339, 344
 Люри де (de Lury D. B.) 55
 Ляубер де (de la Loubère)
 212, 221

 Мак-Магон (MacMahon P. A.)
 62
 Мак-Нейш (MacNeish) 315, 316
 Маколей (Macaulay W. H.) 104
 Максвелл (Maxwell J. C.) 18

Маиджамеле (Mangiamele V.)
 395, 396
 Манси (Muncey J. N.) 228, 229
 Маргосси (Margossian) 225,
 239
 Маскерони (Mascheroni L.) 107,
 108
 Мёбиус (Möbius A. F.) 139
 Медема (Medema P.) 127
 Мендельсон (Mendelsohn C. J.)
 435
 Менехм 365
 Меций (Metius A.) 375
 Мидорг (Mydorge C.) 15
 Миллер (Miller J. C. P.) 12,
 63, 152, 167, 410
 Миндинг (Minding) 200
 Минер (Mineur A.) 101
 Митчелл (Mitchell F. D.) 384,
 387, 398
 Мондьё (Mondeux H.) 395, 396,
 401
 Монж (Monge G.) 347
 Монмор де (de Montmort
 P. R.) 14, 191
 Монтукла (Montucla J. E.) 16,
 101, 191, 377
 Мор (Mohr G.) 107
 Морган де (de Morgan A.) 241,
 370, 372, 380
 Морделл (Mordell L. J.) 79
 Морзе (Morse S.) 428
 Моронь (Moroñ Z.) 126
 Моррисон (Morrison M. A.) 78
 Морхед (Morehead J. C.) 78
 Мосхопулос 210
 Муавр (de Moivre A.) 191
 Муи (Moon) 200
 Мур (Moore E. H.) 49, 300
 Мэчин (Machin) 378, 379
 Мюллер (Müller G. E.) 384

 Найтон (Knyghton) 277
 Наук (Nauck F.) 180
 Николай Кузанский 375
 Никомед 363
 Ньюболд (Newbold W. R.) 439
 Ньютон (Newton I.) 369

 О'Бейрн (O'Beirne T. H.) 50
 Овидий (Publius Ovidius Naso)
 277
 Озанам (Ozanam A. F.) 15, 24,
 96, 191, 341
 Осгуд (Osgood) 111
 Оттер (Otter R. E.) 282

Паксон (Paxson G. A.) 79
 Паль (Pål J.) 112
 Папп 147, 363
 Парвиль де (de Parville) 340
 Паркер (Parker E. T.) 314, 316
 Парс (Pars L. A.) 246
 Пачоли (Pacioli di Burgo) 15
 Пенк (Penc M.) 76
 Первушин И. М. 75
 Перельман Я. И. 50
 Перигэл (Perigal H.) 100
 Петерсен (Petersen J.) 244, 396
 Петри (Petrie J. F.) 161, 166, 171
 Пипс (Pepys S.) 413
 Планк (Planck C.) 228
 Платон 146, 362—364
 Плейфер (Playfair) 432
 Плиний 277
 Пойа (Pólya G.) 117, 174, 282
 Полиньяк де (de Polignac A.) 74, 199, 200
 Поллок (Pollock B. W.) 81
 Портье (Portier B.) 229
 Пратт (Pratt) 196
 Птолемей 373
 Пуансо (Poinso L.) 159
 Пурбах (Purbach) 375
 Пэли (Paley R. E. A. C.) 120

Райвест (Rivest) 124
 Райзер (Ryser H. J.) 333
 Региомонтан (Иоганн Мюллер) 375
 Резерфорд (Rutherford) 378, 379
 Рейнольдс (Reynolds O.) 165
 Рентон (Renton W.) 96
 Ризель (Riesel W.) 76
 Рилли (Rilly A.) 229
 Риман (Riemann B.) 73
 Рингель (Ringel G.) 13, 258
 Рихтер (Richter) 379
 Рич (Rich J.) 413
 Ричмонд (Richmond H. W.) 106
 Робер-Гуден (Robert-Houdin J. E.) 397
 Робинсон (Robinson R. M.) 74, 76, 79
 Роже (Rogel J. B.) 190, 195—200
 Рой-Чоудхури (Ray-Chaudhuri D. K.) 309, 310
 Россер (Rosser J. B.) 81, 221, 237
 Рудно (Rudio F.) 370

Ромей ван (Adriaen van Roemen) 375
 Рюкле (Rückle C.) 399, 401

Саффорд (Safford T. H.) 398, 399
 Светоний 426
 Селфридж (Selfridge J.) 12, 79, 81
 Сельберг (Selberg A.) 72, 73
 Сент-Винцент (Gregory of St. Vincent) 366, 367
 Сильвестр (Sylvester J. J.) 116, 119, 319
 Симмонс (Simmons G.) 76
 Синков (Sinkov A.) 11
 Скрипчер (Scripture E. W.) 384, 398
 Смит А. (Smith A.) 380
 Смит Дж. (Smith J.) 413
 Смит С. (Smith C. A. B.) 47, 127, 285
 Снелль (Snell W.) 376, 377
 Совер (Sauveur J.) 220
 Сталкер (Stalker R. M.) 168
 Старк (Stark H. M.) 71
 Стин (Steen) 359
 Стори (Storey) 335
 Стотт (Stott A. B.) 154
 Стоун (Stone A. H.) 127
 Страбон 277
 Страшницкий (Straszničky) 396, 397
 Стрэчи (Strachey R.) 213
 Суинден (Swinden B. A.) 46
 Сфор 366
 Сэйлес (Sayles H. A.) 228

Такерман Б. (Tuckerman B.) 76
 Такерман Л. (Tuckerman L. B.) 262
 Тарри (Tarry G.) 13, 131, 207, 229, 272, 276, 314
 Тарталя (Tartaglia N.) 15, 39, 44, 61, 129
 Татт (Tutte W. T.) 12, 127, 285
 Тейлор Б. (Taylor B.) 191
 Тейлор Х. (Taylor H. M.) 103, 104
 Тертон (Turton W. H.) 93, 189
 Тезтет 146
 Траверс (Travers J.) 219
 Троицкий (Troitsky) 26
 Троллоп (Trollope E.) 277

Тэйт (Tait P. G.) 45, 135, 138,
243, 245, 265, 270, 284

Уайз (Wise) 279

Уайт (White A. S.) 303

Уилер (Wheeler A. H.) 104,
105

Уилкокс (Willcocks T. H.) 127

Уилсон Дж. (Wilson J. C.) 265

Уилсон Дж. К. (Wilson J. C.)
127

Уилсон Р. (Wilson R. M.) 309

Уинн (Winn C. E.) 250

Уиттекер (Whittaker E.) 409

Уокер (Walker G. T.) 52, 221,
237

Утред (Oughtred W.) 24, 371

Уэйтли (Whately R.) 389

Фано (Fano G.) 304

Фаури (Fourey E.) 38

Федерико (Federico P. J.) 127

Федоров Е. С. 155

Фергюсон (Ferguson D. F.) 409

Ферма (Fermat P.) 72, 77, 79—
82

Филон 363

Филопон 362

Фицпатрик (Fitzpatrick J.) 133

Фокс (Fox) 380

Фонтеней де (de Fonteney) 130

Франклини (Franklin P.) 249,
258

Френикл (Frénicle B.) 217

Фридман (Friedman W. F.) 435

Фрост (Frost A. H.) 220

Фуллер (Fuller T.) 388

Фут (Foote R. M.) 12

Хаан де (de Haan B.) 372, 376

Хаджи (Haji T.) 29

Хадсон С. (Hudson C. T.) 355

Хадсон У. (Hudson W. H. H.)
348

Харбер (Harber E. A.) 50

Хаттон (Hutton C.) 16, 378

Хейн (Hein P.) 124, 339

Хивуд (Heawood P. J.) 243,
246, 249—251, 255, 258

Хилл (Hill L. S.) 434

Хит (Heath R. V.) 25, 216, 231,
233, 239

Холдридж (Holdridge D.) 76

Холли (Holley) 378

Хольст (Holst E.) 101

Хоппенот (Hoppenot F.) 69
Хэзелгроув (Haselgrove C. B.)
122

Цах фон (von Zach F. X.) 378

Цезарь (Caesar J.) 425, 426

Цейлен ван (van Ceulen L.)
376, 377

Цзу Чунчжи (Tsu Ch'ung-chih)
374

Чини (Cheney W. F.) 105

Чок (Chalk J. H. H.) 12

Шаль (Chasles M.) 369

Шарп (Sharp A.) 378

Шартр (Chartres R.) 52, 94

Шекспир (Shakespeare W.) 439

Шелтон (Shelton J.) 413

Шёнберг (Schoenberg I. J.) 112,
113

Шенкс (Shanks W.) 379, 409

Шервин (Sherwin H.) 378

Шлефли (Schläfli L.) 160

Шотц (Schots M. H.) 230

Шпраг (Sprague R.) 47, 127

Шрикхенд (Shrikhande S. S.)
314, 316

Штаудт фон (von Staudt K. G.
C.) 292, 304

Штейнгауз (Steinhaus H.) 259

Штейнер (Steiner J.) 300, 309

Шу (Schuh H.) 34

Шуберт (Schubert H.) 370

Шульдхам (Shulldham C. D.)
228

Шумахер (Schumacher H. C.)
230

Эддингтон (Eddington A. S.)
79

Эзе (Euzet M.) 101

Эйлер (Euler L.) 69, 71, 72,
77—79, 190—195, 201, 207,
220, 264—266, 268, 269, 276,
314, 371, 378

Эндрюс (Andrews W. S.) 229

Энке (Encke J. F.) 396

Эннинг (Anning N.) 22, 186

Энстрём (Eneström G.) 371

Эрдёш (Erdős P.) 73

Эскотт (Escott E. B.) 231, 379

Эстерман (Estermann T.) 75

Эттен ван (van Etten H.) 24

Янгс (Youngs J. W. T.) 13, 258

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамара матрица 295, 318—319
 Аналлагматические замощения 119—121
 Архимедовы тела 150—155
 Аффинная плоскость 302, 305—306
 Аффинное пространство 307—308
 Блок-схемы 297—299, 332—333
 Вероятности 54—58
Виженера квадрат 429—430
Вильсона теорема 71
 Вычеты 70, 83
Галуа поле 82, 306
 Геодезические линии 131
 Геометрические парадоксы 96—97
 — построения с помощью одного циркуля 107—108
 Головоломки
 «Большая северная» 128
 домно (укладка костей) 272—275
 «Китайские кольца» (меледа) 341—346
 кубики «Сомы» 124—125
 на маневрирование 128—129
 пентамино 122—124
 полимино 121, 124—125
 пять дисков 108—110
 раскрашенный кубик 125—126
 с пешками на шахматной доске 132—138
 с разрезаниями 103—104
 «Ханойская башня» 339—341
 «Чифу — Чемульпо» 128—129
См. также Игры, Задачи, Кольца тетраэдров, Лабиринты
Гольдбаха теорема 75
 Граф 243
 кубический 317
 лестничный 299
 Петерсена 328
 планарный 244
 решеточный 327
 треугольный 326
 Двойственное (взаимное) разбиение плоскости 118, 149
 — — — пространства 161, 162

Двойственный (взаимный) многогранник 147
Дезарга конфигурация 328
 Деление круга (циклотомия) 105—107
 Делосская задача (удвоение куба) 105, 362—367
 Деревья (графы или сети без замкнутых частей) 281—282
 Десятичное выражение простой дроби 63—65
 Дешифровка 415
 Задачи
 Баше о гирях 61—63
 квадрирование квадрата 126—127
 Киркмана о школьницах 309
 классические геометрические квадратура круга 370—381
 трисекция угла 367—369
 удвоение куба 105, 362—367
 о восстановлении арифметических действий 32—38
 о голосовании 59
 о нахождении задуманного числа 17—25, 29—30
 о пауке и мухе 131—132
 о переправе 129—131
 о перестановках 59—61
 о супружеских парах 60—69, 129—131
 о четырех четверках 28—29
 о числе магических квадратов заданного порядка 219—220
Озанама о магическом карточном квадрате 206
 путаница 57
 рыцари круглого стола 60
 с колодой карт 30—32, 40—41, 55, 346—359
Жергонна 352—356
 мышеловка 359
 парадокс второго туза 55
 «тринадцать» 359
 чтение через окошки 356—358
 с шахматными фигурами 176—204
 максимальное и минимальное число фигур 187, 190

- маршруты на шахматной доске 190—204
- о восьми ферзях 180—187, 189
- о шестнадцати ферзях 204
- Санкт-Петербургский парадокс 55—56
- связанные с календарем 38
- средневековые по арифметике 39—47
- Эйлера* об офицерах 207
- См. также* Головоломки и Игры
- Замкнутые поверхности 251—254
- Замощения плоскости 117—121
- Зеркально-симметричное тело 142
- Золотое сечение 68, 145
- Игральные кости 24, 231
- Игры
 - «в 15» 335—339
 - Витхоффа* 49
 - гамильтонова 283—287
 - «кегли» 49
 - Мура* 49
 - ним 47, 48
 - три-в-ряд 115—117
- См. также* Головоломки и Задачи
- Какая* проблема о фигуре наименьшей площади 12, 110—113
- Калейдоскоп 169—174
- Карта 240—241
 - двойственная 254
 - на замкнутой поверхности 255—258
 - стандартная 246, 248
- Киркмана* системы 303
- Клейна* бутылка 257—258
- Код 296, 321, 325, 434
- Морзе* 428
- Коды, исправляющие ошибки
 - 296, 325
 - совершенные 297
- Кольца тетраэдров (нзгнбаемые многогранники) 168—169, 233
- Конечные геометрии 303—309
- Кривые дракона 291
- Криптографические системы 414
- подстановочные 425—434
- многоалфавитные 429
- многобуквенные 428
- с бегущим ключом 432
- с двойным ключом 429
- шифр *Плейфера* 432
- транспозиции 415—425
- Лабиринты 275—281
- Латинские квадраты 204—207, 311—317
 - ортогональные 205
 - эйлеровы (греко-латинские) 206, 224
- Латинские кубы 208
- Лебега* проблема о фигуре наименьшей площади 110
- Магические квадраты 210
 - двойные 229—230
 - из костей домино 231
 - простых чисел 228
 - нечетного порядка 212—213
 - окаймленные 217
 - порядка двойной четности 216
 - простой четности 213—216
 - симметрические 220, 228
 - совершенные 220, 225, 228
 - тройные 231
- Магические кубы 234
 - симметрические 236
 - совершенные 236
- Маршрут (в сети или на графе) 266
- Матрицы инцидентности 284
- С-матрицы* 330—332
- Мёбиуса* лента (лист) 139, 257
- Многогранники
 - антипризма 142
 - восьмиугольная звезда (stellata octangula) 149, 151, 160
 - «губки» 165—167
 - двойственные (взаимные) 147
 - звездчатые 158—160
 - зоноэдр равносторонний 155
 - Федорова* 157
 - нкосододекаэдр 151
 - Кеплера — Пуансо* 158—160
 - кубооктаэдр 151
 - курносые 153
 - однородные 150
 - полуправильные 151
 - правильные 144—150
 - ромбический додекаэдр 151, 165

Билинского 157, 323

— икосаэдр 157

ромбоикосододекаэдр 152

ромбокубооктаэдр 152, 153

ромбоэдр 156

триаконтаэдр 151

усеченные 152—153

эннеаконтаэдр 157

Непрерывные дроби 65—68,
98—99

Ориентируемая поверхность
251

Основная теорема арифметики
72—73

Парадромные кольца 138—139

Пентаграмма 158, 269, 270

Петри многоугольник 149—150

Поворотная симметрия 144

Подходящие дроби 67

Правильные многогранники
(платоновы тела) 144—150

Проблема четырех красок 240—
251

Проективная плоскость 255,
292—294, 300, 303, 332—333

Проективное пространство
306—307

Равноугольные множества пря-
мых 321—330

Разбиения плоскости (замоще-
ния) 117—121, 149, 153, 166,
170

пространства (заполнения)
161—163, 173—174

Разрезание зонэдра 158

колец 138—139

параллельно-стороннего *2m*-
угольника 155

пифагорово 99—101

плоских фигур 99—104

трехмерных фигур 104—105

Раскрашивание икосаэдра 259—
263

— карт 240—251, 255—258

Расшифровка 415

Решето числовое 72

Римана гипотеза 73

конечный аналог 85

Римана дзета-функция 73, 84

Сеть 264

Симметрия 144

Симплекс 317—318

Соединение (составная фигура)
149

Софизмы арифметические 52—
55

— геометрические 88—95

Топология 240

Тор 240

Узлы сети 266

Укладка (плотная упаковка)
шаров 163—165

**Уникурсальная сеть, уникур-
сальный обход (маршрут)**
266

Ферма теорема о простых чис-
лах 72

— — о степенях двойки 77

— — последняя (великая) 79—
82

Ферма числа 77—79, 105, 106

Хивуда теорема о раскраске
карт 255—258

Циклотомическое уравнение 105

Цифровка (процесс цифров-
ки — прием быстрого деле-
ния) 404—405

Числа

Бернулли 81

Мерсенна 75—79

перевертыши 25

пирамидальные 70

простые 71, 73

регулярные 81

совершенные 76

сравнимые 70

тетраэдральные 70

треугольные 69—70

Ферма 77—79, 105, 106

Фибоначчи 67

Шпрага — Гранди число 47

Штейнера гипоциклоида (дель-
тоид) 111

— система троек 300—303

Эйлера гипотеза 207, 314—316

— задача о Кёнигсбергских мо-
стах 264

— формула 145, 160, 248, 252—
253

Эйлерова характеристика 253

Энантиоморфная пара 144

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие к десятому изданию	10
Предисловие к одиннадцатому изданию	11
Предисловие к двенадцатому изданию	12
Глава I. Арифметические развлечения	15
Глава II. Арифметические развлечения (продолжение)	52
Глава III. Геометрические развлечения	88
Глава IV. Геометрические развлечения (продолжение)	115
Глава V. Многогранники	142
Глава VI. Математические развлечения на шахматной доске	176
Глава VII. Магические квадраты	210
Глава VIII. Задачи о раскраске карт	240
Глава IX. Задачи об универсальных кривых	264
Глава X. Комбинаторные схемы	292
Глава XI. Разные задачи	335
Глава XII. Три классические геометрические задачи	361
Глава XIII. Чудо-вычислители	384
Глава XIV. Криптография и криптографический анализ	412
Примечания	441
Дополнительная литература	457
Именной указатель	464
Предметный указатель	469

У. У. Роуз Болл, Г. С. Макдональд Коксетер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭССЕ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Научный редактор А. Н. Кондрашова

Младший редактор И. В. Ильченко

Художник В. В. Дунько

Художественный редактор Н. М. Иванов

Технические редакторы В. П. Сизова, И. И. Володина

Корректор Т. И. Стифеева

ИБ № 5447

Сдано в набор 13.06.85. Подписано к печати 05.12.85. Формат 84×108^{1/8}.
Бумага типографская № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная.
Объем 7,38 бум. л. Усл. печ. л. 24,78. Усл. кр.-отт. 24,89. Уч.-изд. л. 25,87.
Изд. № 9/3932. Зак. 664. Тираж 100 000 экз. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Мир»

129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга»,
им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 193053, г. Ле-
нинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

