

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ФИЗИКИ

Книга представляет собой обширное справочное пособие по математике и теоретической физике.

Благодаря обилию фактического материала и своеобразной манере изложения книга получила широкую известность во многих странах.

Основное содержание книги:

I. Математика. 1) Числа, функции и операторы. 2) Дифференциальное и интегральное исчисление. 3) Ряды и разложения. 4) Теория функций (в частности, специальные функции). 5) Алгебра. 6) Преобразования. 7) Векторный и тензорный анализ. 8) Специальные системы координат. 9) Теория групп (с теорией представлений). 10) Дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными, линейные задачи, теория возмущений). 11) Интегральные уравнения. 12) Вариационное исчисление. 13) Теория вероятностей.

II. Физика. 1) Механика. 2) Электродинамика (с включением оптики). 3) Теория относительности. 4) Квантовая теория (с теорией излучения). 5) Термодинамика. 6) Статистические методы.

Книга представляет единственное в своем роде пособие и будет очень полезна широкому кругу специалистов-физиков, математиков, инженеров, работников научно-исследовательских институтов и лабораторий. Она может быть также использована аспирантами и студентами университетов и вузов.

Содержание

Предисловие редактора перевода	12
Из предисловия автора к четвертому изданию	14
Введение	15

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. МАТЕМАТИКА

Система понятий математики	19
Раздел первый. Числа, функции и операторы	20
А. Числа	20
1. Натуральные числа	20
2. Рациональные числа	22
3. Иррациональные числа	22
4. Операции	23
5. Функции	23
6. Пределы	24
В. Многомерные числа	25
1. Числовые пространства и многообразия	25
2. Многомерные алгебры	26
3. Комплексные числа	26
4. Кватернионы	17
Гиперкомплексные числа высшего порядка	28
Клиффордовы числа	28
С. Числовые последовательности и функции	29

1. Простые и кратные последовательности	29
2. Суммы и средние значения	31
3. Разложение векторов и функций	33
D. Операторы	31
1. Понятие оператора	34
2. Единичный оператор E и дельта-функция	35
3. Операторы, связанные с данным оператором	38
4. Алгебра операторов	39
5. Алгебраическое построение операторов	40
6. Специальные элементарные линейные операторы	41
7. Дифференциальные операторы	45
8. Преобразования	46
9. Собственные значения и собственные решения	47
10. Операторные уравнения	48
11. Представление операторов матрицами	49
12. Многопараметрические операторы	50
13. Симметризирующий оператор	51
Раздел второй. Дифференциальное и интегральное исчисление	53
A. Определения и обозначения	53
B. Правила дифференцирования	54
1. Произведения и частные	54
2. Функции от функций	55
3. Обратные функции	55
4. Неявные функции	56
5. Параметрическое задание функций	56
6. Полный дифференциал	56
7. Введение новых переменных	56
8. Целые рациональные функции γ -й степени от n переменных	57
9. Дифференцирование интегралов	58
C. Таблица производных и интегралов	59
D. Методы интегрирования	61
1. Общие замечания	61
2. Рациональные функции; разложение на простейшие дроби	62
E. Определенные интегралы	64
1. Методы вычисления	64
2. Оценки	66
3. Приближение интегралов суммами	66
4. Некоторые формулы	67
5. Несобственные функции	70
6. Эллиптические интегралы	71
F. Конечные разности	74
Раздел третий. Ряды и разложения	79
A. Ряды	79
1. Общие сведения	79

2. Признаки сходимости	80
3. Суммы некоторых рядов	81
В. Разложение функций в ряды	82
1. Представление произвольной функции при помощи известных функций	83
2. Разложение функций в степенные ряды	84
3. Ортогональные системы функций	88
4. Разложения по ортогональным системам	91
5. Специальные ортогональные разложения	94
Раздел четвертый. Функции	98
А. Общая теория функций	93
1. Определения и обозначения	98
2. Комплексные функции	99
3. Аналитические функции	100
4. Криволинейные интегралы	102
5. Разложение аналитических функций в степенные ряды	103
6. Методы вычисления комплексных интегралов	107
7. Отображение, осуществляемое комплексными функциями	110
8. Наглядное изображение комплексных функций	111
В. Специальные функции	114
1. Определение функций	114
2. Классификация функций	114
3. Алгебраические функции	115
4. Элементарные трансцендентные функции	119
5. Функции гипергеометрического типа	129
6. Конфлюэнтные гипергеометрические функции	139
7. Факториал $\Pi(x)$ и гамма-функция $\Gamma(x)$	151
8. Функции Матье (и Хилла)	154
9. Эллиптические интегралы и функции	155
Раздел пятый. Алгебра	161
А. Линейные уравнения	161
1. Определения и обозначения	161
3. Вторая нормальная форма	164
4. Линейные уравнения с бесконечным числом неизвестных	165
В. Матрицы	166
1. Определения, обозначения	166
2. Операции с конечными матрицами	167
3. Определитель, ранг, след	169
4. Специальные матрицы	169
5. Матрицы со свойствами симметрии	170
6. Преобразование матриц	172
7. Бесконечные матрицы	175
С. Определители	186
1. Определения	176

2. Теоремы об определителях	177
3. Умножение, дифференцирование	178
4. Оценка и окаймление определителя	178
5. Специальные определители	179
6. Бесконечные определители	180
7. Практическое вычисление	180
D. Комбинаторика	181
1. Перестановки	181
2. Сочетания, размещения	182
3. Биномиальные коэффициенты	182
Раздел шестой. Преобразования	184
A. Общие преобразования	184
1. Общие сведения	184
2. Геометрическая интерпретация	185
3. Инварианты	185
B. Линейные преобразования	186
1. Линейные пространства	186
2. Общие линейные преобразования	187
3. Унитарные и ортогональные преобразования	188
4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм	192
C. Преобразование прикосновения (контактное преобразование)	193
1. Двумерный случай	193
2. Многомерный случай	199
Раздел седьмой. Векторный анализ	201
A. Векторы в трехмерном евклидовом пространстве	201
1. Определения	201
2. Векторная алгебра	202
3. Алгебраические векторные уравнения	204
4. Интегральные и дифференциальные выражения	205
5. Преобразование результатов дифференциальных операций	207
6. Радиус-вектор \mathbf{r}	209
7. Интегральные теоремы	212
8. Специальные векторные поля	217
9. Векторные поля, не всюду непрерывные	218
10. Совокупности векторов	221
11. Точечная решетка и взаимная решетка	222
12. Волновые поля	225
13. Представление Фурье периодических и непериодических полей	230
14. Комплексные векторы	236
15. Кватернионы в векторной символике	237
16. Гиперкомплексные векторы	238
17. Дуальные векторы	239
18. Преобразование к движущейся системе координат	241
19. Область интегрирования, зависящая от времени	242

В. Тензоры в трехмерном пространстве	242
1. Линейные функции поля	242
2. Понятие тензора	243
3. Специальные тензоры	245
4. Скаляры, связанные с тензорами	245
5. Собственные значения и собственные векторы	246
6. Геометрическая интерпретация тензора	247
7. Представление тензоров с помощью векторов	247
8. Тензорные поля	248
9. Тензоры, зависящие от времени	249
10. Тензорные поля, получаемые из векторных полей при помощи дифференциальных операций	249
11. Тензоры высшего ранга	251
С. Векторы и тензоры в пространствах произвольного числа измерений	251
1. Системы векторов	251
2. Системы координат	253
3. Компоненты вектора	254
4. Компоненты тензора	255
5. Преобразования	255
6. Дифференцирование и свертывание	256
7. Неевклидовы пространства	259
8. Системы координат, зависящие от времени (движущиеся)	260
9. Ортогональные координаты	260
Раздел восьмой. Специальные системы координат	264
А. Двумерные системы	264
1. Декартова система координат x, y	264
2. Общие (в общем случае неортогональные) системы координат ξ, η	265
3. Общие ортогональные системы координат u, v, ξ, η	266
4. Плоские полярные координаты	267
5. Плоские параболические координаты	268
6. Плоские эллиптические координаты	268
7. Плоские биполярные координаты	269
В. Трехмерные системы	270
1. Декартова система координат x, y, z	270
2. Общие цилиндрические координаты	271
3. Вращательно-симметричные координаты u, v, φ	273
α) Сферические координаты	274
β) Параболические координаты вращения	275
γ) Координаты вытянутого эллипсоида вращения	276
δ) Координаты сплюсненного эллипсоида вращения	278
ε) Тороидальные координаты	279
ζ) Пространственные биполярные координаты	280
4. Конические координаты r, u, v	281

5) Общие эллипсоидальные координаты	282
С. N-мерные полярные координаты	285
Раздел девятый. Теория групп	288
А. Общие определения и теоремы	288
1. Группы	288
2. Подгруппы	289
3. Преобразование, нормальный делитель	290
В. Непрерывные группы	291
С. Теория представлений	293
1. Общие сведения относительно представлений группы	293
2. Основные теоремы о представлениях	295
D. Специальные группы	297
1. Группы вращения и их представления	297
2. Представления и характеры групп перестановок	298
3. Группы симметрии (кристаллы)	300
Раздел десятый. Дифференциальные уравнения	309
А. Общие сведения о дифференциальных уравнениях	309
1. Классификация дифференциальных уравнений	309
2. Решения дифференциальных уравнений	310
3. Линейные задачи	313
В. Обыкновенные дифференциальные уравнения	313
1. Дифференциальные уравнения первого порядка	313
2. Некоторые особые формы дифференциальных уравнений высшего порядка	317
3. Линейные дифференциальные уравнения	320
4. Системы дифференциальных уравнений	332
5. Уравнения Пфаффа	335
С. Дифференциальные уравнения с частными производными	337
1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка	337
2. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно вторых производных	339
D. Линейные задачи	349
1. Общие сведения	349
2. Однородные задачи второго порядка	351
3. Краевые задачи для эллиптических уравнений	356
4. Задачи с начальными условиями для гиперболических уравнений	359
E. Теория возмущений	361
1. Задачи о собственных значениях	362
2. Метод вариации постоянных	370
3. Прочие методы	371
Раздел одиннадцатый. Интегральные уравнения	376
А. Интегральные уравнения второго рода	376
1. Общие положения	376

2. Симметрическое ядро, однородное уравнение	378
3. Симметрическое ядро, неоднородное уравнение	380
4. Несимметрическое ядро	382
В. Интегральные уравнения первого рода	382
Раздел двенадцатый. Вариационное исчисление	384
А. Приведение к дифференциальным уравнениям	384
1. Вариация без дополнительных условия	384
2. Вариация с дополнительными условиями	388
В. Прямые методы решения	389
1. Метод Ритца	389
2. Сведение к задаче с бесконечным числом переменных	389
3. Аппроксимация ломаными линиями	391
Раздел тринадцатый. Статистика (исчисление вероятностей)	392
А. Основные понятия	392
1. Способ описания	392
2. Относительные частоты	393
3. Вероятность	394
4. Основные элементарные правила	395
5. Средние значения	396
В. Статистика серий	396
1. Общие правила	396
2. Отклонения	397
3. Особые случаи	399
4. Корреляция	400
С. Теория выравнивания	401
1. Теория ошибок	401
2. Выравнивание	402
3. Выравнивание посредственных наблюдений	403
ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ФИЗИКА	
Система понятий теоретической физики	407
Раздел первый. Механика	411
А. Основы механики точки	411
В. Постановка задач	413
С. Механика одной материальной точки	413
1. Общие сведения	413
2. Особые случаи	414
3. Уравнения движения в произвольных координатах	417
4. Так называемые принципы механики точки	421
Д. Система материальных точек	423
1. Общие сведения	423
2. Формальное сведение к динамике одной материальной точки	424
3. Колебания около положений равновесия	425
4. Механика твердого тела	427
Е. Механика континуума	430

1. Основные понятия и кинематика	431
2. Силы	433
3. Теория упругости	434
4. Переход к гидродинамике	439
5. Гидродинамика	440
Раздел второй. Электродинамика (с включением оптики)	443
А. Общая теория	443
1. Электростатика	444
2. Магнитостатика	447
3. Электрический ток	448
4. Электромагнетизм	450
5. Электродинамика	451
6. Силы	453
7. Энергия	456
8. Электрические системы единиц	458
В. Специальные случаи	460
1. Электродинамика квазистационарных токов	460
2. Электродинамика однородной среды	461
3. Электродинамика периодических полей в однородной среде	464
4. Механика заряженных материальных точек	467
5. Основы оптики	471
6. Волны в анизотропных средах (кристаллооптика)	472
Раздел третий. Теория относительности	476
А. Специальная теория относительности	476
1. Пространственно-временная система отсчета	476
2. Четырехмерное пространство	477
3. Специальное преобразование Лоренца векторов и тензоров	478
4. Кинематика	479
5. Электродинамика	480
6. Электродинамика движущихся сред	482
7. Основные уравнения механики континуума	482
8. Механика точки	483
9. Общая теория поля	485
10. Практическое применение теории относительности	487
11. Релятивистские инварианты	489
В. Общая теория относительности	489
1. Основные положения	489
2. Гравитационное поле	490
3. Гравитация и материя	490
Раздел четвертый. Квантовая теория	492
А. Старая теория	492
1. Механика	492
2. Электродинамика	494
В. Новая теория (волновая механика)	495

1. Нерелятивистская механика точки	496
1. Средства описания	496
2. Уравнение Шредингера	497
3. Описание при помощи операторов	501
4. Постановка задач	503
5. Общие формы решений уравнения Шредингера	504
6. Классификация собственных решений	507
7. Матричный метод	507
8. Физическая интерпретация решений	511
9. Соотношение неопределенностей	514
10. Подсистемы и взаимодействие	515
11. Принцип Паули	517
12. Система многих одинаковых частиц	518
13. Операторы Гамильтона со свойствами симметрии	520
II. Релятивистская механика точки	522
1. Основные уравнения	522
2. Применение уравнений Дирака	526
III. Теория излучения	527
1. Теория излучения на основе принципа соответствия	527
2. Квантовая теория излучения	528
а) Поле излучения, свободное от зарядов	529
б) Взаимодействие излучения с веществом	529
с) Простые процессы взаимодействия	532
Раздел пятый. Термодинамика	536
1. Основные понятия	536
2. Процессы и равновесия	537
3. Энергия	538
4. Температура и энтропия	539
5. Первичные и вторичные интенсивные переменные	540
6. Коэффициенты и производные	541
7. Уравнения состояния и идеальные газы	543
8. Процессы в однородных системах	544
9. Процессы в замкнутых системах	545
10. Равновесие в замкнутых системах	546
11. Равновесие в незамкнутых системах	547
12. Теория фаз	548
13. Третье начало	549
14. Смеси идеальных газов	549
15. Реальные газы	551
16. Обобщения	552
17. Излучение в полости	552
18. Релятивистская термодинамика	553
Раздел шестой. Статистические методы	554
A. Дискретные состояния	554

1. Общие сведения	554
2. Термодинамическое равновесие	556
В. Статистическая механика	558
1. Классическая механика	558
2. Разбиение фазового пространства на ячейки	560
3. Кинетическая модель идеального газа	561
С. Статистики Ферми и Бозе	566
Приложение	568
1. Специальные интегралы Фурье	568
2. Разложение в степенные ряды	569
3. Преобразование Фурье	571
4. Гармонический осциллятор в канонических переменных	573
5. Движение планет в канонических переменных	573
6. Вынужденные колебания	575
7. Пример к теории групп	576
8. Пример к методу Рунге	579
9. Движение Кеплера	581
10. Магнитное кольцо	584
11. Строение атома	584
12. Электронный газ	586
13. Пример к расщеплению собственных значений	587
14. Броуновское движение	589
15. Флуктуации макроскопических величин	590
16. Биномиальные коэффициенты	591
17. Коэффициенты рядов	593
18. Единицы количества электричества	594
19. Единицы энергии	594
20. Единицы длины	595
21. Универсальные постоянные	595
Литература	596
Предметный указатель	605

Предметный указатель

Аберрация 488	- единичный 202
Алгебра, определение 26	- лучевой 472
Амплитуда вероятности 511, 513	- определение 30, 201
Аномалия орбиты средняя 583	- перенос 201
- - эксцентрическая 269, 583	- Поинтинга 456
Ансамбль микроканонический 559	- поля 201
Атом, строение 584, 586	- свободный 201
Бета-функция, см. Функция В	- тока 222
Вариация 373	- четырехмерный 479
Вектор возмущения 222	Вектор-функция точки 242
- волновой 465	Векторы аксиальные 263
- Герца 462, 527	- взаимные 223, 224, 225

- гиперкомплексные 43, 238, 239
- дифференциальные операции 206, 207
- - - преобразование 207, 209
- дуальные 239, 241
- интегралы векторные 205, 214, 216
- - скалярные 212, 214
- - - линейные 205
- - - несобственные 213
- - - поверхностные 205
- - - собственные 213
- - - теорема Гаусса 212
- - - - Грина 212
- - - - Пуассона 213
- - - - Стокса 212
- комплексные 236, 237
- компоненты ковариантные 254
- Векторы, компоненты
 - контравариантные 254
- полевые 485
- полярные 263
- произведение векторное 203
- - скалярное 202
- системы в многомерных пространствах 252, 254
- совокупности 221, 222
- сумма 202
- Вероятность испускания 533
- - вынужденного 534
- - спонтанного 534
- многопараметрическая 400
- определение 395
- перехода 495, 514
- - в идеальном газе 562
- - квантовая 500
- - статистическая 560
- - элементарная 554
- поглощения 534
- состояния статистическая 557
- теорема разложения 511
- Вес статистический 560
- Волна, амплитуда 226, 471
- анизотропия 226
- векторная, направление поляризации 229
- - плоскость поляризации 229
- - поперечная 229
- - продольная 229
- - эллиптически поляризованная 229
- волновая нормаль 226
- - поверхность 471
- волновое число 226
- волновой вектор 226
- - луч 223
- - пакет 227
- группы волн 227
- - - диффузные 228
- дисперсия 226
- длина 226, 471
- Волна затухающая 228
- интенсивность 226
- модулированная 227
- плоская 225, 465
- - нормальная форма 226
- - поперечная 465
- скорость групповая 227
- - фазовая 227
- стоячая 227
- сферическая 228, 466
- упругая поперечная 438
- - - скорость распространения 438
- - продольная 438
- - - скорость распространения 438
- фаза 226, 471
- фазовая постоянная 226
- фронт 226
- цилиндрическая 229, 465, 466
- Волчок свободный 429
- симметрический 429
- - нутация 430
- - прецессия 430
- Время, растяжение 480
- релаксации 439
- собственное 479
- сокращение 480
- Выравнивание 402, 403
- посредственных наблюдений 403

- Вычеты 107
- Вязкость 439
- Газ идеальный, модель 561, 566
 - - уравнение состояния 563
 - реальный 551
 - электронный 566, 586
- Гамма-функция, см. Функция Г
- Гауссова числовая плоскость 27
- Гемиздрии 302, 304
- Геодезическая линия 256
- Геометрия, определение 26
- Герполодия 429
- Голоэдриа 302, 304
- Гидродинамика 440, 442
- Гидростатика 442
- Гипотеза адиабатическая 492
- Градиент 206, 249
 - векторный 206
- Группа абелева 288
 - вращения 297, 298, 579, 588
 - закон композиции 288
 - изоморфизм 289
 - классы смежности 290
 - непрерывная 291
 - - бесконечная 292
 - - конечная 292
- Группа непрерывная связная 292
 - - смешанная 292, 297
 - нормальный делитель 291
 - перестановок 288, 298, 300
 - подгруппы 289, 290
 - - см. Подгруппы
 - - сопряженные 291
 - полная ортогональная 297
 - порядок 288
 - представления 293, 577, 579
 - - степень 293
 - - характер 293
 - симметрии 520, 522
 - симметрическая 298
 - среднее значение функции на ней 289
- Давление 434
 - внутреннее 537
 - гидродинамическое 441
 - критическое 551
- Движение броуновское 589
 - винтовое 190
 - пданет 197, 494, 573, 574
- Делитель интегрирующий 539, 540
- Дельта-функция, см. Функция δ
- Деформация 432
 - закон Гука 434
 - изгиба 438
 - растяжения 432, 437
 - сдвига 433, 437
 - тензор 432
 - энергия 435
- Дивергенция 207, 251
 - поверхностная 219
- Диполь 219, 445
 - магнитный 450
 - моменты 219, 445
 - плотность 445
- Дисперсия света 531
 - статистическая нормальная 399
 - - субнормальная 399
 - - супернормальная 399
- Дифференциал полный 56
- Дифференцирование, введение новых переменных 47
 - векторов в n-мерных пространствах 256, 257
 - интегралов 58, 59
 - произведений и частных 54, 55
 - функций n переменных 57, 58
 - - неявных 56
 - - обратных 55
 - - от функций 55
 - - с параметрическим заданием 56
 - численное 76
- Диффузия 538, 546
- Диффузия, коэффициент 589, 590
- Длина волны комптоновская 522, 532
 - - см. Волна
- Дополнения алгебраические 177, 178
- Единица длины 595
 - количества электричества 594

- энергии 594
- Емкость электрическая 457
- Задача возмущения в квантовой механике 516
- решение несимметрическое 361, 373
- - - симметрическое 367, 373
- невозмущенная 361, 362
- Штурма-Лиувилля 352
- Задачи вариационные,
 - аппроксимация ломаными 391
 - - изопериметрические 390
 - - метод Ритца 389
 - - приведение к дифференциальным уравнениям 384, 389
 - - прямые методы решения 384, 389, 391
 - - сведение к задаче с бесконечным числом переменных 389, 390
 - - униформизация 387
 - - условия трансверсальности 387
- краевые 357
- Закон Био-Савара 450, 458
- Гаука 434
- Дальтона 549
- действующих масс 550
- индукции Фарадея 451
- Кулона 444, 458
- Ома 450
- ошибок Гаусса 398, 590
- смещения Вина 535
- сохранения заряда 444
 - - энергии-импульса 483, 486
- Стефана-Больцмана 535, 552
- тяготения Ньютона 491, 528
- Законы Кеплера 581, 583
- Заряд магнитный 447
 - - свободный 448
 - размерность 452
 - электрический, закон сохранения 444
 - - индуцированный 447
 - - поверхностный 445
 - - поляризационный 445
 - - пространственный 444
- - точечный 444
- Значения собственные кратные 366, 368
 - - непрерывные 368, 370
 - - оператора 47
- Значения собственные определение 366, 368
 - - простые 362, 365
 - - - возмущения 363, 364
 - - - - метод Шредингера 364, 500
 - - расщепление 522, 587
- Значения средние 563, 565
 - - в квантовой механике 496, 511, 513
- Излучение, взаимодействие с веществом 528, 532
 - - - - простые процессы 532, 535
 - в полости 552
 - вынужденное 530, 534
 - дипольное 463
 - - магнитное 470
 - - электрическое 470
 - квадрупольное электрическое 470
 - мультипольное 470
 - поле 528
 - спонтанное 530, 534
 - - в поле излучения 534
 - тормозное 531
- Импульс 414
 - вероятный 565
 - канонический 467, 600
 - обобщенный 419
 - полный 467, 500
 - средний 565
- Инвариантность градиентная 462
- Инварианты релятивистские 489
- Инверсия 190
- Индексы Миллера 224
- Индукция магнитная 448
 - размерность 452
 - электрическая 446
- Интеграл ошибок 142, 389, 399
 - состояний 559
- Интегралы криволинейные 102, 103

- - интегральная теорема Коши 102, 103
- - методы вычисления 107, 110
- - - - метод перевала 108
- - теорема о среднем 103
- - формула Коши 103
- неопределенные 53
- - таблица 59, 61
- обменные 517
- определение 31
- определенные 53
- - методы вычисления 64, 65
- - некоторые формулы 67, 70
- - оценки 66
- - приближение суммами 66
- Интегралы Френеля 59
- Фурье, 94, 568, 569
- эллиптические 70, 74, 155, 156
- - нормальная форма Венерштрасса 155
- - - - Лежандра 155
- Интегрирование, методы 61, 64
- определение 31
- специальные подстановки 63
- численное 76
- Интенсивности линий 495
- Интерполяция 77, 78
- Итерация 39
- Квант действия 493, 498
- Квантование пространственное 494
- Кватернионы 27, 28, 192
- в векторной символике 237, 238
- связь с операторами 27, 42
- Кинематика теории относительности 479, 480
- Класс смежный 290
- сопряженных элементов 290
- Классы кристаллографические 301, 302, 305
- Ковариантность 408
- Колебания вынужденные 322, 375, 376
- около положений равновесия 225, 425, 427
- Количество теплоты 538, 553
- электричества 444
- Кольцо магнитное 584
- Конормаль 351
- Контур колебательный 461
- Координаты двумерные биполярные 269, 270
- - декартовы 264, 265
- - общие неортогональные 265, 266
- - - ортогональные 266, 267
- - параболические 268
- - полярные 267
- - эллиптические 268, 269
- n-мерные полярные 285, 287
- обобщенные 419
- трехмерные биполярные 280, 281
- - вращательно-симметричную 273, 281
- - декартовы 270, 271
- - конические 281, 282
- - эллиптические 282
- - общие цилиндрические 271, 273
- - - эллипсоидальные 282, 285
- - - - вырождение 284
- - параболические 275, 276
- - сферические 274, 275
- Координаты трехмерные тороидальные 279, 280
- - эллипсоида вытянутого 276, 277
- - - сплющенного 277, 278
- циклические 418
- Корреляция 400, 401
- коэффициент 400
- Коэффициент взаимоиנדукции 457
- всестороннего сжатия 436
- полезного действия 545
- поперечного сжатия 435
- самоиндукции 457, 458
- трения 439
- увлечения 489
- электростатической индукции 457
- Коэффициенты биномиальные 182, 183, 591, 592
- рядов 593

- термодинамические 541, 542
- Линия вихревая 219
- - момент 220
- геодезическая 490
- естественная ширина 530, 534
- мировая 478, 479
- Луч 471
- Магнитостатика 447, 448
- Масса инертная,
 - пропорциональность
 - тяготеющей массе 490
- Матрица альтернирующая 172
- - антисимметрическая 172
- двумерная 30
- диагональная 49, 170, 171
- единичная 35, 165, 170
- каноническая 170
- клеточная 167, 294
- клеточно-диагональная 171
- комплексно-сопряженная 171
- нулевая 169, 170
- обратная 170
- одномерная 30
- определитель 169, 173
- ортогональная 172
- представления группы 294, 295, 296
- симметрическая 171
- сопряженная 171
- транспонированная 171
- унитарная 172, 294
- усеченная 175
- фазовая 171
- эрмитова 171
- Матрицы бесконечные 175
- взаимно перестановочные 163
- дифференцирование 168
- инварианты 173
- квадратные 166
- Матрицы квадратные вырожденные 169
- - невырожденные 169
- - произведение 167
- коммутатор 39, 168
- нормальная форма 174
- обратимые 170, 172
- ограниченные 175
- определение 166
- подобные 172, 173
- порядок 167
- произведение прямое 168, 169
- равенство 167
- ранг 169
- резольвента 170, 176
- след 169, 173
- степени и полиномы 170
- сумма 167
- транспонированные 166
- умножение на скаляр 167
- унитарное преобразование 174, 175
- Минор 177
- Метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна 331, 332
- возмущений 370, 516, 517, 533
- наименьших квадратов 402, 403
- Ритца 389, 579, 581
- Механика волновая 495, 535
- заряженных материальных точек 467, 471
- квантовая 492, 494
- континуума 430, 442
- основные понятия 411, 413
- постановка задач 413
- системы точек 423, 430
- твердого тела 427, 430
- точки 413, 422
- - в теории относительности 483
- Множители Лагранжа 388, 580
- Множитель амплитудный 331
- интегрирующий 319
- - существование 337
- фазовый 331
- Модуль кручения 436
- упругости 435
- Момент вращающий 501
- дипольный магнитный 501, 525
- - матричные элементы 463, 528
- - электрический 501
- инерции 429

- - главный 429
- количества движения 500
- - - орбитальный 527
- - - спиновый 527
- магнитный спиновый 525
- Мощность 414
- источника поля 218
- Намагниченность 448
- Напряженность магнитного поля 447
- - - потенциал векторный 448, 450
- - - размерность 452
- электрического поля 444
- - - граничные условия 446
- - - размерность 452
- Неравенство Бесселя 92
- Шварца 32, 40, 66, 514
- Объем покая 483, 484
- удельный 537
- фазовый 555
- Ожидание математическое 396, 496
- Оператор Гамильтона 501, 502, 504, 512, 515, 520, 528, 530
- - со свойствами симметрии 520, 522
- дифференциальный 320, 361
- - самосопряженный 32, 324
- дифференцирования 44, 46, 51, 54
- единичный 35, 44, 51
- - и дельта-функция 35, 38
- идемпотентный 40
- интегральный 35, 47
- интегрирования 44, 54
- инфинитезимальный 45
- комплексно-сопряженный 38
- Лапласа 286
- "набла" 208
- обратный 39
- перестановки 39, 45
- проекционный 44
- самосопряженный 39
- сдвига 44, 46
- симметризующий 51, 52, 520
- симметрический 39
- собственные значения 47
- сопряженный 38
- транспонированный 38
- умножения 44
- унитарный 39, 45
- фильтрующий 37
- Фурье 45
- эрмитов 371, 374
- Операторы 34, 52
- алгебра 39
- алгебраическое построение 40
- антикоммутирующие 40
- векторные 208
- коммутатор 39
- матричные конечного порядка 35, 41
- многопараметрические 50, 51
- понятие 34, 35
- представление матрицами 49
- связанные с данным 38, 39
- Операторы специальные линейные 41, 45
- спина 41
- спинорные 42
- уравнения 48
- Определитель бесконечный сходящийся 180
- - Хилла 154
- Вандермонда 179
- Вронского 180, 321
- Грама 162, 179
- дифференцирование 178
- окаймление 179
- оценка 178
- n-го порядка 177
- практическое вычисление 65, 180
- преобразования 184, 185
- тензора 173, 245
- - метрического 261
- теорема о разложении 177
- теоремы 178
- умножение 178
- циклический 179
- Оптика анизотропных сред 472, 475
- волновая 471
- геометрическая 471, 472

- Орбита квантовая 493
- - вырожденная 493, 494
- планеты 581, 583
- Осциллятор гармонический 493, 509, 515, 573
- Ось вращения мгновенная 427
- оптическая 248, 474
- Отклонение 373
- абсолютное 397
- - квадратическое 398, 514
- - среднее 397
- относительное 397
- - квадратическое 398, 566
- - среднее 398
- Отражение 189, 190
- в прямой 189
- скользящее 190
- Ошибка истинная 401
- средняя абсолютная 401
- - квадратическая 401
- Пакет волновой 227, 506
- - расщивание 515
- Парадокс Гиббса 550
- Параметр возмущения 361, 371, 373
- удара 583
- Параметры интенсивные 536
- приведенные 551
- статистические истинные 393
- - независимые 394
- - постоянные 393
- Параметры статистические свободные 393
- экстенсивные 536, 540
- Переменная угловая 197
- Переменные действия 493
- интенсивные 537, 547
- - первичные и вторичные 540, 541, 553
- Перестановки с повторениями 182
- четность 181
- Переходы квантовые 492
- - вероятность 495, 514
- - запрещенные 514
- - правила отбора 495
- Перпетуум мобиле 545, 546
- Плотность диполей 445
- зарядов истинных 445
- - действительная 446
- - поверхностных 445
- - поляризационных 446
- - размерность 452
- - свободных 445
- излучения спектральная 533
- массы 431, 483
- потока энергии 456, 483, 564
- силы 453, 455, 564
- спина 525
- тока 448
- - действительная 449
- - размерность 452
- электромагнитного импульса 455, 483
- энергии 483, 564
- Поверхность волновая 471
- лучевая 475
- нормалей 474
- Поворот 188, 189, 297
- зеркальный 190, 297, 301
- Поглощение фотонов 531, 534
- Подгруппа единичная 289
- инвариантная 291
- несобственная 289
- произведение прямое 290
- разложение по ней 290
- см. Группа
- собственная 289
- сопряженная 291
- циклическая 290
- Подсистемы гомогенные 536
- квантовые 515, 517
- Показатель преломления 422
- - комплексный 465
- Поле векторное 201, 248
- - безвихревое 217
- - соленоидальное 217
- волновое 225, 230
- - векторное 229, 230

- Поле волновое, представление Фурье 230, 236
- - скалярное 225, 229
- силовое 415
- - скалярное 415
- скалярное 201
- тензорное 201, 248, 249, 251
- - деформация 251
- электрическое, напряженность 444
- - потенциал 444
- - разность потенциалов 450
- Полиномы Лагерра 90, 91, 354, 355
- - обобщенные 90, 91
- Лежандра 90, 91
- Чебышева 90, 91, 142, 354
- Эрмита 90, 91, 144, 355
- Якоби 90, 91, 354
- Полодия 429
- Поляризация электростатическая 445
- эллиптическая 229, 465
- Последовательность, ортогональность 32
- сумм чисел 31
- частичные средние значения 31
- числовая 20
- - дискретная 35, 572
- - плотная 22, 35, 572
- Постоянная Авогадро 595
- Больцмана 556, 558, 559, 595
- газовая 544
- гравитационная 491, 582, 595
- космологическая 491
- Планка 498, 560, 595
- Ридберга 595
- Стефана 535, 595
- химическая 544
- Эйлера 69, 87, 153
- Постоянные разделения 507
- - см. Уравнения дифференциальные
- универсальные 595
- фазовые 425
- Потенциал векторный 217
- конвекционный 463
- логарифмический 359
- ньютонов 359
- силы 415
- скалярный 217
- скоростей 441
- термодинамический 540, 548
- электрического поля 444
- Потенциалы запаздывающие 528
- Правила отбора 495
- Правило фаз Гиббса 549
- Представления группы 293
- - вращения 297, 298
- - - чистых 297
- Представления группы неприводимые 294, 522, 587
- - перестановок 298, 300
- - - неприводимые 299
- - полной ортогональной 298
- - приводимость 294
- - размерность 293
- - теоремы 295, 297
- - точные 293
- - унитарные 294, 295
- - характеры 293, 294, 522, 587
- - эквивалентность 293
- Преобразование векторных дифференциальных операторов 207, 209
- векторов и тензоров в многомерных пространствах 255, 256
- каноническое 195, 198, 469, 493, 510
- - бесконечно малое 196, 197
- - обобщение 198
- - общее 199
- - специальные случаи 200
- квадратичных и эрмитовых форм 192, 193
- к главным осям 165, 236, 237
- - движущейся системе координат 241, 242
- контактное 193, 194, 573
- координат 26, 185
- Лежандра 194, 316, 540
- - общее 199
- Лоренца 238, 477, 479

- - векторов и тензоров 478, 479
- - - - инварианты 479
- - специальное 478, 479
- - - инварианты 477, 479, 482
- масштабное 408
- ортогональное в мерном,
 пространстве, 4, 238
- θ Эвальда 233
- Преобразование унитарное 46, 508,
 509
- Фурье 192, 570, 572
- Преобразования, инварианты 185
- - система полная 185, 186
- как отображения многообразия 185
- координат, инварианты 186
- линейные 46
- - , нормальная форма 187
- - однородные 187
- - - бесконечно малые 189
- - - в x , измерениях, 4, 192
- - - действительные 188, 189
- обратимые 184
- - группа 184
- обратные 184
- ортогональные 46, 188, 193
- Преобразования проективные 187
- унимодулярные 187
- унитарные 188, 192, 193
- Прецессия регулярная 430
- Принцип вариационный в задаче
 возмущений 374
- виртуальных перемещений
 динамики 421
- - - статики 421
- Галилея 412
- Гамильтона 421, 422, 485
- Гюйгенса 229
- наименьшего действия 422
- - принуждения 421
- Наули 495, 504, 517, 566, 584
- построения периодической системы
 584
- равенства действия и
 противодействия 423
- Ритца комбинационный 494
- соответствия 495, 527, 528
- Ферма 422, 471
- Якоби 422
- Произведение скалярное 32
- - неравенство Шварца 32
- - см. также Векторы
- Производная локальная 431
- определение 31, 53
- субстанциальная 431
- функциональная 386
- Производные и разностные
 отношения 76
- таблица 59, 61
- Проницаемость диэлектрическая 446
- магнитная 448, 584
- Пространство аффинное 186
- гильбертово 187
- конфигурационное 392, 424, 496
- неевклидово 259, 478
- унитарное 186
- фазовое 425, 559
- четырехмерное 477, 478
- - линейный элемент 478
- - мировая линия 478
- - - точка 477
- числовое 25
- - метрика 26
- Процессы термодинамические
- адиабатические 544
- - адиабатически обратимые 555
- - в гомогенных системах 545
- - в замкнутых системах 545
- - вынужденные 537
- - изобарические 544
- - изотермические 544
- - изохорические 544
- Процессы термодинамические
 квазистатические 538, 539
- - необратимые 545
- - обратимые 545
- - спонтанные 537
- - циклические 544
- Псевдоскаляры 264

- Работа 414
- Равновесие неустойчивое 426
 - статистическое 559
 - тепловое 537
 - термодинамическое 548, 557
 - - излучения и вещества 534, 535
 - устойчивое 426
- Радиус-вектор 202, 207, 212
 - - дифференциальные операции 210, 211
- Разложение в степенные ряды см, также, ряды, 103, 569, 570
 - оператора билинейное 47
- Размещения 182
 - с повторениями 182
- Разности конечные 74, 78
- Распределение Бозе 567
 - Больцмана 534, 587, 588
 - каноническое 557
 - Максвелла 565
 - микроканоническое 559
 - статистическое дискретное 392
 - - непрерывное 392
 - Ферми 561, 586
- Рассеяние когерентное 531
 - некогерентное 531
- Решетка точечная Браве 222, 300, 306, 307
 - - - ячейка 223
 - - взаимная 223, 225, 468
- Ротор 207, 251
 - поверхностный 220
- Ряд бесконечный 82
 - билинейный интегрального ядра 379
 - геометрический 81
 - гипергеометрический 354
 - Лорана 105, 106
 - Неймана 48, 380
 - определение 79
 - остаток 79
 - расходящийся 79
 - степенной в векторной форме 211, 212
 - сумма 79
 - сходящийся 79
 - - признаки сходимости 80
 - - условно 79
 - функциональный 79
- Ряд функциональный равномерно сходящийся 79, 80
 - Фурье 94, 147, 468
- Свертывание тензора 258
- Связи 415
 - голономные 415
 - неголономные 415
- Сила инерции 416
 - консервативная 415, 424
 - лоренцова 456, 484
 - намагничивающая 584
 - определение 412
 - полная 412, 500
 - реакции 415
 - тока 448
 - - размерность 452
 - фиктивная 416
 - центральная 414, 415
 - центробежная 414, 416
 - электродвижущая 450
 - - размерность 452
- Силы внешние 423, 433
 - внутренние 423, 433
 - массовые 433
 - объемные 433
 - поверхностные 433
 - пондеромоторные 453
 - электрические 444
- Символ Кронекера 35
- Символы Кристоффеля 256, 257, 262
- Система единиц 408
 - - гауссова 457, 458
 - - Джорджи (МКСА) 459, 460
 - отсчета вращающаяся 416
 - - инерциальная 412
 - - пространственно-временная 466, 467
 - - - - преобразование Лоренца 477
 - - ускоренная 416

- понятий математики 19
- точек замкнутая 423, 514
- - колебания вынужденные 426
- - - резонанс 427
- - - затухающие 426
- - - около положения равновесия 425, 427
- - полная масса 423
- - - сила 423
- - сведение к точке 424, 425
- - симметрия 520
- - центр тяжести 423
- элементов периодическая 586
- эргодическая 555, 560
- Системы векторов 251, 253
- - основных 253
- Системы единиц электрических 458, 460
- координат 253, 254
- - движущиеся 259, 260
- - двумерные 264, 270
- - линейный элемент 26, 253
- - n-мерные 285, 287
- - ортогональные. 260, 263
- - трехмерные 270, 285
- кристаллографические 307, 308
- Скаляр, определение 186, 201
- свободный 201
- Скобка Лагранжа 200
- Скорость 414
- групповая 465
- света 450, 452
- течения 431
- фазовая 465
- четырехмерная 480, 482
- - теорема сложения 480
- След тензора 245, 249, 293
- Слой двойной 219, 357
- - момент 219
- - электрический 450
- простой 358
- События 392, 395
- относительные частоты 393
- равноценные 392
- - коллектив 392
- - распределение 392
- - сравнимые 392
- Сокращение лоренцово 480
- Соотношение неопределенное ей Гейзенберга 514, 515, 534, 555, 561
- Планка 493, 505
- Соотношения перестановочные 502, 503, 507, 509, 511, 520
- Сопrotивление омическое 450
- - размерность 452
- Состояния возбужденные атома 583
- диаграммы 544
- квантовые 492, 504, 505, 513, 515
- равновесия 536, 556, 557
- - в замкнутых системах 546, 547
- - - незамкнутых системах 547, 548
- Сочетания 182
- с повторениями 182
- Спектр дискретный 352
- непрерывный 352
- Спин 495, 517
- механический 527
- плотность 525
- Среда изотропная 435
- - уравнения движения 438
- несжимаемая 432
- Статистика Бозе 520, 566, 567
- Статистика Больцмана 566
- Ферми 520, 566, 567, 587
- Стенки адиабатические 537
- адиатермические 537, 547
- диатермические 537, 548
- жесткие 537
- непроницаемые 537
- экранирующие 537
- Столкновения частиц 561, 562
- - инварианты 563
- Сумма состояний 557
- Тело твердое 427
- - импульс полный 427
- - масса полная 427

- - момент вращающий
относительный 428
- - - - полный 428
- - - количества движения
относительный 427
- - - - - полный 427
- - - сила полная 428
- - центр тяжести 427
- - - - скорость движения 427
- Температура абсолютная 556, 558
- и энтропия 539, 540
- критическая 551
- термодинамическая 540
- эмпирическая 538
- Тензор антисимметрический 244
- геометрическая интерпретация 247
- деформации 432
- единичный 245, 249, 255
- инерции 428
- итерация 244, 246
- канонический 486
- компоненты ковариантные 255
- - контравариантные 255
- - смешанные 255
- кривизны Римана 258, 490
- метрический фундаментальный 255,
258, 261, 490
- натяжений максвеллов 434, 454, 483
- операторное произведение 244
- определение 30, 201
- определитель 245
- ортогональный 245, 248
- понятие 243, 244
- свободный 201
- симметрический 243, 247
- сингулярный 244
- скалярное произведение 246
- скалярный квадрат 246, 250
- след 245, 249, 293
- собственные векторы 246, 247, 248
- - значения 246, 247
- Тензор сопряженный 244, 255
- характеристический полином 245
- четырехмерный 478
- энергии-импульса 483
- Теорема Больцмана 564
- Лиувилля 554, 555, 560
- Малю 472
- площадей 414, 581
- - обобщенная 423
- Стокса гидродинамики 451
- Теория вероятностей 392, 404
- возмущений 362, 375
- - задачи о собственных значениях
362, 370
- - метод вариации постоянных 370,
371
- - - вариаций 373, 375
- - - обобщенный 371, 373
- выравнивания 401, 404
- изучения Бора 527, 528
- - квантовая 528, 535
- относительности общая 489, 495
- - специальная 456, 476, 489
- ошибок 401, 402
- поля 485, 487
- упругости 434, 438
- фаз 548, 549
- Теории физические, подразделение
409, 410
- Теплоемкость 541
- Теплопроводность 546
- Термодинамика, второе начало 546
- первое начало 538
- релятивистская 552, 553
- третье начало 549
- Термы спектральные 494, 521, 586
- Тета-преобразование; см.
Преобразование θ Эвальда
- Тетартоэдрия 302, 304
- Ток замкнутый 450
- конвекционный 449
- плотность 448
- - размерность 452
- полный 449, 451
- проводимости 449, 456
- сила 448
- смещения 449

- стационарный 449
- Точка Бойля 551
- ветвления 102, 106
- инверсии 551
- критическая 551
- мировая 577
- седловая 108, 112
- фазовая 492, 493, 558
- Точки определенности 328, 329
- Трансляции 190, 300
- Углы Эйлера 191, 298
- Уравнение Ван-дер-Ваальса 551
- вековое 164, 335, 336, 368, 372, 473, 474
- - для матриц 173
- волновое 226
- - двумерное 343, 346
- - трехмерное 343, 346
- Гамильтона-Кэли 246
- Гамильтона-Якоби 419, 420, 493
- движения твердого тела 428
- - точки 413, 423
- - - в произвольных координатах 417, 420
- - Эйлера 441
- Дирака 523, 526
- - применения 526, 527
- дифференциальное Бесселя 328
- - Гаусса 120, 131
- - гипергеометрическое 328
- - колебаний 328
- - Лагерра 328
- - Лежандра
- - Риккати общее 313, 315, 330
- - - специальное 316, 317
- - Римана 131, 132
- - Чебышева 328
- - Эйлера 310
- кинетическое 563
- Клаузиуса-Клапейрона 547
- Клейна-Гордона 344, 522, 527
- Лагранжа 388
- Лапласа 341, 358, 444, 447
- Навье-Стокса 440
- непрерывности 431, 440, 449, 496, 524, 564
- орбиты 583
- Пуассона 445
- Пфаффа 335, 337, 539
- состояния 440
- - приведенное 551
- теплопроводности 342, 346
- - трехмерное 342, 364
- Френеля 474
- Шредингера 497, 501
- - в случае внешнего поля 500
- - - - потенциальных сил 498
- - для атома водорода 343, 344
- - решение антисимметрическое 516, 519
- - - общее 504, 506
- - - симметрическое 516, 519
- - - стационарное 505
- - решения, классификация 507
- - - физическая интерпретация 511, 514
- эйконала 471
- Уравнение Эйлера 388, 391, 428, 485
- - для принципа Ферма 472
- Эйнштейна для излучения 534
- - - фотоэффекта 531
- Уравнения алгебраические
- векторные 204
- - линейные 161, 166
- - - дефект 162
- - - линейная зависимость 162
- - - неоднородные 163, 164
- - - - отыскание одного решения 164
- - - - практическое решение 163
- - - нормальная форма 164, 165
- - - общая форма 161
- - - общее решение 162
- - - однородные 162, 163
- - - ранг 162
- - - с бесконечным числом неизвестных 165, 166
- - - транспонированная система 163
- движения газа 564

- дифференциальные в полных дифференциалах 336
- - задачи краевые 356, 359
- - - линейные 313, 349, 361
- - - - неоднородные 313, 349
- - - - - однородные 313, 349
- - - - - второго порядка 351, 356
- - - - - формула Грина 350, 351
- - - - - начальные 359, 361
- - интеграл, определение 310
- - - промежуточный 310
- - канонические 386, 387
- - Ламэ 283, 284
- - обыкновенные линейные второго порядка 313, 317, 324, 332
- - - - - метод преобразования 325, 327
- - - - - решение разложением в ряды 327, 329
- - - - - с помощью определенных интегралов 332, 333
- - - - - - понижения порядка 330, 332
- - - общие сведения 320, 322
- - - определение 309
- - - первого порядка 313, 317
- - - решение, геометрическая интерпретация 311
- - - - общее 311
- - - - особое 311
- - - - частное 311
- - - с постоянными коэффициентами 323, 324
- Уравнения дифференциальные обыкновенные, системы первого порядка 332, 333
- - - - - линейные однородные 334, 335
- - - - - с постоянными коэффициентами 333, 334
- - - точные 319
- - - множитель интегрирующий 319, 336, 337
- - однородные, определение 309, 310
- - - определение 309
- - - равноразмерные 310, 318, 319
- - - решение, определение 310
- - - собственные значения 313
- - - функции 313
- - с частными производными 337, 349
- - - - - второго порядка линейные 339, 349
- - - - - - комбинированные решения 345, 346
- - - - - - метод разделения переменных 340, 341
- - - - - - нормальная форма 339, 340
- - - - - - специальные частные решения 341, 344
- - - - - - эллипсоидальный потенциал 347, 349
- - - - гиперболического типа 339
- - - - определение 309
- - - - параболического типа 339
- - - - первого порядка 337, 339
- - - - - интегралы 312
- - - - - решение, 312
- - - - - постоянные разделения 340, 341, 344
- - - - - решение общее 311
- - - - - особое 312
- - - - эллиптического типа 339
- - точки определенности 329
- - Эйлера-Лагранжа 384, 386, 391
- интегральные второго рода 357, 358, 376, 382
- - - - общее решение 377
- - - - однородные 377
- - - с несимметрическим ядром 358
- - - собственные значения 378
- - - функции 378
- - - транспонированные 377
- Уравнения интегральные второго рода ядро 376, 377
- - первого рода 382, 383
- канонические 418, 420, 485

- - квантовой механики 503
- - электродинамики 467, 469
- Лагранжа второго рода 417, 420, 467
- - первого рода 416
- нормальные 403
- операторные 49, 507
- поля в теории относительности общей 491
- - - - - специальной 485, 486
- состояния 536, 543
- - идеального газа 543, 544, 553, 563
- - реального газа 551
- электродинамики 452, 458
- - материальная система 452
- электромагнетизма 450, 451
- - модифицированные 458
- Ускорение 414
- Условие Лоренца 470
- частот Бора 494, 528, 530
- Условия дополнительные
- вариационной задачи 388
- краевые для операторов 45, 46
- - - уравнения Шредингера 504
- - см. Уравнения дифференциальные
- начальные, см. Уравнения дифференциальные
- сопряжения 503
- трансверсальности 387
- Факторгруппа 291, 300, 301, 577
- Факториал 151, 154
- Физика теоретическая, система понятий 407, 410
- Флуктуации 397, 590
- Флуоресценция 531
- Форма билинейная 32
- квадратичная действительная 193
- - интегральная 379
- - определенная 193
- - эрмитова 172
- Формула Бейеса 393
- Берчулли вероятностей 397
- биномиальная 85
- Вина 535
- Гаусса вероятностей 398
- Грина 350, 351
- Лапласа 397
- Маклорена 84
- Ньютона вероятностей 397
- Формула Планка 534
- Пуассона статистики 397, 398, 589
- - суммирования 95
- Рэлея-Джинса 535
- Симпсона 66
- Стирлинга 109, 154, 183
- Тейлора 84
- Томсона 461
- трапеций 66
- Шмидта 380
- Эвальда 233, 234
- Эйлера 76, 81
- Формфакторы 470
- Фотоны, 528
- поглощение 531
- Фотоэффект 531
- Функции алгебраические 115, 119
- аналитические, аналитическое продолжение 105
- - комплексные 99, 101
- - многозначные, ветви 101
- - - риманова поверхность 102, 111
- - однозначные, разложения в окрестности особой точки 106
- - - - в ряд Лорана 105, 106
- гармонические 101
- гиперболические 120, 121
- - обратные 122, 126
- гипергеометрические 91, 129
- - конфлюэнтные 139, 151, 343
- - - Бесселя 96, 146, 151
- - - Ганкеля 147
- - - Лагёрра 142, 143
- - - - обобщенные 143, 144, 343
- - - общие сведения 139, 142
- - - Эрмита 144, 145
- гипергеометрического типа 129, 139
- - - общие 129, 132
- - - сферические зональные 135, 136

- - - - Лежандра 91, 95, 132, 135, 341, 354
- - - - общие 137, 138
- - - - присоединенные 136, 137, 341, 354
- - - Чебышева 97, 138
- классификация 114, 115
- комплексные 99, 100
- - аналитические 99, 100, 102
- - наглядное изображение 111, 114
- - отображение конформное 110
- Матье 1, 54, 155
- определения 98, 99, 114
- ортогональные полиномы 90, 91
- - системы, зависимость линейная 89
- - - определители 88, 89
- Функции, ортогональные системы, специальные 90, 91
- показательные 119, 120
- полная система 33
- поля линейные 242, 243
- применения 126, 129
- разложения 33, 34
- - аналогия с векторами 33
- - в ряды 82, 89
- - - - общие сведения 83, 84
- - - - степенные 84, 88
- - по бесселевым функциям 96
- - - полиномам Лагерра 97
- - - Чебышева 97
- - - Эрмита 97
- - - Якоби 97
- - - сферическим функциям 97
- - Фурье 94, 95
- суммирующие 76
- тригонометрические 121, 122
- - обратные 122, 126
- цилиндрические 341
- Хилла 154, 155
- шаровые Лапласа 136
- элементарные трансцендентные 119, 129
- - - разложение в ряды 86, 88
- Функция В 68, 69
- Вейерштрасса Р 158, 160
- весовая 89, 221, 292, 297, 327, 345, 496
- возмущающая 198
- Г 68
- - и факториал 151, 154
- Гамильтона 195, 196, 198, 199, 386, 418, 467, 468, 493, 528, 559, 573, 587
- Грина 48, 322, 323, 357, 360, 369, 575
- δ 35, 38, 70, 231
- - обобщение 213
- действия 197, 419
- Дирихле 70
- - связь с функцией δ 70
- ζ Римана 82, 88
- Лагерра обобщенная 343
- Лагранжа 197, 199, 418, 467, 485
- - обобщенная 420
- на группе 289
- - - среднее значение 289
- - - - на непрерывной группе 292
- Неймана 146
- неявная 24
- определение 24
- перехода 222
- предел 24
- производящая 91, 104
- Функция производящая контактного преобразования 195
- распределения 221
- сглаживающая 431, 444
- силовая 415
- спектральная 34
- Ψ 153
- целочисленного параметра 30
- явная 24
- Центр тяжести 412
- - распределения 497
- - системы 423
- - твердого тела 427
- Цикл 298
- Карно 544

- Частоты собственные системы 497
- Числа 20, 25
 - алгебраические операции 23
 - арифметические операции 21, 22
 - Бернуллы 81, 82, 88
 - гиперкомплексные 28, 238
 - иррациональные 22, 23
 - кардинальные 21
 - квантовые 493, 507, 584
 - клиффордовы 28, 522, 526
 - комплексные 26, 27
 - - действительная часть 27
 - - мнимая часть 27
 - - модуль 27
 - - сопряженные 27
 - многомерные 25, 29
 - натуральные 20, 21
 - порядковые 21
 - рациональные 22
 - системы счисления 22
- Число волновое комплексное 465
 - дуальное 239
 - фотонов 528
- Эйконал 471
 - уравнение 471
- Экстремаль 384, 389, 471
- Электродинамика 451, 452
 - квазистационарных токов 460, 461
 - квантовая 494, 496
 - однородной среды 461, 464
 - - - с периодическими полями 464, 466
 - силы 455
 - теории относительности 480, 483
 - уравнения материальные 451
- Электродинамика, уравнения материальные модифицированные 458
 - - основные 452, 461
 - - - условие Лоренца 461, 470
- Электростатика 444, 447
 - основные уравнения 446
 - силы 453, 454
- Элемент группы единичный 288, 292
 - - обратный 288
 - - порядок 290
 - - сопряженный с данным 290
 - линейный системы координат 253
 - - четырехмерного пространства 478, 479
 - симметрии 301
- Эллипсоид инерции 428, 429
 - тензорный 247
- Френеля 474
- Хевисайда 463
- Энергия 538, 539
 - внешняя 539
 - внутренняя 538, 556
 - ионизации 531
 - кинетическая 414
 - покоя 484
 - полная 415
 - - закон сохранения 415
 - потенциальная 414
 - - деформации 435
 - средняя 565
 - удельная 538, 540
 - - свободная 540, 548, 556, 559
 - электромагнитная 456, 458
- Энтальпия 545
 - удельная 540
- Энтропия, H-теорема 564
 - плотность 564
 - полная 540, 546, 556, 557, 558, 564
- Эффект Доплера 488
 - Комптона 531
- Эффекты Эйнштейна 491
- Явления гравитационные 490
- Ядро интегрального уравнения вырожденное 379, 381
 - - - дефект 377, 379
 - - - единичное 35
 - - - итерированное 380, 381
 - - - несимметрическое 358, 382, 383
 - - - определение 376
 - - - определенное 379
 - - - разрешающее 377
 - - - симметрическое 382

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга немецкого физика Э. Маделунга занимает особое место в физико-математической справочной литературе. За рубежом она пользуется большой популярностью в кругах специалистов и с момента выхода в свет ее первого издания в 1922 г. выдержала пять переизданий, причем при подготовке третьего и четвертого изданий автор в значительной степени переработал и дополнил ее. Особенности этой книги заключаются, во-первых, в отборе и систематизации материала и, во-вторых, в характере его изложения. Как пишет автор в предисловии к четвертому изданию, книга эта, не претендуя на то, чтобы быть учебным пособием, представляет собой «нечто большее, чем простой справочник или сборник формул». Отбор и систематизация материала в этой книге, в отличие от справочных изданий, рассчитанных на квалифицированного научного работника в области физико-математических наук, преследует цель дать более или менее полную картину математического аппарата теоретической физики, начиная с таких основных математических понятий, как понятия числа, функции и оператора, и кончая разделами математики, которые нашли применение в теоретической физике лишь в недавнее время. Кроме того, около одной трети книги посвящено обзору главнейших разделов теоретической физики, в котором автор, излагая в сжатом виде содержание соответствующих дисциплин, ставит перед собой цель раскрыть взаимопроникновение математических и физических идей, составляющих основу этих дисциплин. В этой связи представляет также интерес введение в физическую часть справочника, в котором автор делает попытку классификации физических теорий в соответствии с их структурой и характером применяемого ими математического аппарата.

Что касается самого изложения материала книги, то оно, в отличие от большинства справочных изданий такого рода, до некоторой степени несет на себе отпечаток личных взглядов автора, выкристаллизовавшихся, как автор сообщает в предисловии к первому изданию, в процессе его многолетней исследовательской и педагогической работы. Это обстоятельство, несомненно, обусловило ряд важных достоинств книги, но в то же время привело к известной ее односторонности. Необычность характера изложения проявляется также в его

максимальной «физичности» в математической части и известной «математичности» в физической части. Следует, однако, отметить, что автор иногда слишком далеко отходит от общепринятых формулировок и оперирует представлениями, не укладывающимися в рамки математики. Хотя в книгах, предназначенных для физиков, допустимы отклонения от современного стандарта математической строгости и привычной для математика и физика-теоретика номенклатуры понятий, все же в отдельных случаях автор пошел в этом направлении дальше, чем это было необходимо. В частности, укажем на вводимое автором без ясного определения понятие «плотной последовательности» (стр. 22), которое, на наш взгляд, не служит никакой полезной цели.

В книге такого объема и такой калейдоскопичности не могут не встретиться и фактические погрешности. Те из них, которые были обнаружены при переводе, были исправлены, что иногда (но не во всех случаях) оговаривалось в подстрочных примечаниях. Были также выявлены некоторые другие погрешности, исправление которых без существенного пересмотра текста оказалось невозможным. Такие места переводились без изменений, но сопровождалась необходимыми пояснениями в подстрочных примечаниях. Кроме того, при переводе были опущены некоторые места, не имеющие непосредственного отношения к излагаемому справочному материалу.

Что касается библиографии, то полностью сохранен весь список литературы немецкого издания; он дополнен еще указаниями на некоторые распространенные у нас монографии, учебные и справочные руководства.

Мы здесь остановились на некоторых недостатках книги Э. Маделунга подробнее, чем на многих ее достоинствах, которые легко обнаруживаются при пользовании ею. Эта книга, без сомнения, явится ценным вкладом в нашу справочную литературу и, как мы надеемся, окажет помощь широкому кругу читателей.

В. И. Левин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание этой книги вышло в свет в 1935 г. Уже в 1942 г. я получил предложение подготовить новое издание книги; к этому времени полностью разошедшейся. Необходимая для этого работа растянулась почти на шесть лет. Принявшись за переработку книги, я вскоре понял, что было бы нецелесообразно ограничиться лишь небольшими улучшениями. Необходимость быть кратким и вместе с тем ясным заставила меня всюду стремиться к большей систематичности изложения.

Книга в новом издании сохранила свой прежний характер, хотя мои личные точки зрения получили в ней более полное выражение, чем в предыдущих изданиях. Некоторое увеличение объема книги объясняется многочисленными дополнениями, которые, как я полагал, могут повысить ее ценность. В ряде мест оказались возможными и сокращения. В части, посвященной физике, я приложил дальнейшие усилия к тому, чтобы с достаточной четкостью выявить связь между математическими и физическими идеями.

Я знаю, что моя книга во многих ее частях не встретит одобрения математиков. Они порицают мое непринужденное обращение с тем, что они рассматривают как свое священное достояние. Однако многое из того, что им представляется важным и интересным, для нас, физиков, не имеет большого значения. Мы не можем оснащать машину, которая должна нам служить, чрезмерно большим количеством предохранительных устройств и окружать ее предостерегающими надписями, не причиняя себе тем самым чувствительных неудобств.

Я хотел бы еще раз указать на то, что книга, не будучи учебником в собственном смысле слова, мыслилась все же как нечто большее, чем простой справочник или сборник формул. В ней по разным поводам высказан ряд мыслей, в настоящее время не являющихся еще общим достоянием, которые руководили мной при написании этой книги.

Франкфурт-на-Майне,
декабрь 1949 г.

Эрвин Маделунг

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальная и математическая физика имеют общий предмет изучения и различаются только применяемыми ими методами исследования. Обе эти ветви науки образуют вместе одно целое, единство которого обеспечивается их взаимодействием. Физик-экспериментатор, лишенный помощи теоретика, бессилён в такой же степени, как теоретик без поддержки физика-экспериментатора.

Метод математической физики состоит в использовании фактов, устанавливаемых математикой. Этот метод, постоянно проверяемый экспериментальным путем, привел к огромным успехам, что дает физикам твердую уверенность в его применимости. Однако физики рассматривают этот метод лишь как инструмент и необходимый вспомогательный аппарат. Переоценивать математический метод и математический формализм было бы столь же неверно, как и пренебрегать ими.

Первая часть настоящей книги посвящена изложению математического материала. Ввиду того, что способ применения этого материала постоянно изменяется, в некоторых случаях нельзя обойтись без известного его препарирования, которое может потребовать от читателя самостоятельных усилий.

Вторая часть содержит основные физические законы и некоторые примыкающие к ним положения в объеме, достаточном для того, чтобы стали ясными общие контуры всей теории. На первый план при этом всегда выдвигаются идеи, связанные с аксиоматикой, а также методические вопросы, относящиеся к применению математического аппарата.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАТЕМАТИКА

СИСТЕМА ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИКИ

Важными понятиями математики являются *точка* и *число*. *Геометрия* (в широком смысле) имеет дело с точками в конечных или бесконечных *точечных многообразиях*. *Анализ* занимается числами в *числовых многообразиях*. Этим математическим образованиям, состоящим из точек или из чисел, противостоят как самостоятельные объекты математические *операции*. Простейшей операцией геометрии является *движение*. Оно переводит каждую точку в некоторую другую. Точно так же множество движений переводит данное точечное многообразие в другие (*отображение*). В анализе аналогичной операцией служит установление соответствия между числами или между числовыми многообразиями (*функция* или *преобразование*). Это соответствие (*изоморфизм*) между геометрией и анализом позволяет геометрии облекаться в формальные одежды анализа и наоборот, а также позволяет нам рассматривать геометрию и анализ как различные воплощения одной и той же абстрактной сущности. Отсюда явствует, что геометрический и аналитический формализм с точки зрения применений равноценны.

Математика создала свое собственное *символическое письмо*. Как величины, так и операции обозначаются чаще всего отдельными буквами; для обозначения операций часто употребляются также специальные знаки, сокращения слов и т. п. Не существует никаких твердых правил, с помощью которых можно было бы в символической записи отличать друг от друга величины и операции. Известно, что одна и та же символическая запись часто может быть истолкована различным образом, и подлинный смысл ее усматривается только из сопровождающего текста ¹⁾.

¹⁾ В последнее время тенденция к употреблению символической стенографии, понятной лишь небольшому кругу лиц, настолько усилилась, что это начинает вызывать беспокойство. Часто приходится отгадывать настоящие загадки, так как забывают указать, где можно найти объяснение применяемого «кода».

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ЧИСЛА, ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРЫ

Этот раздел содержит в основном определения понятий и объяснения обозначений. В нем дается общий обзор ряда разделов математики, причем многие детали оставлены без подробного рассмотрения. При этом мы стремимся, в частности, к ясному выявлению далеко идущих связей и аналогий, господствующих в линейной математике, независимо от того, идет речь о конечных дискретных или о бесконечных плотных многообразиях.

Многие основополагающие рассуждения, необходимые для выяснения строгого математического смысла столь важных понятий, как сходимость, бесконечность, континуальность, непрерывность, предельный переход и т. д., здесь намечены лишь вскользь. В этом отношении изложение ведется совершенно некритически; все специальные вопросы, методы и теоремы будут рассмотрены в дальнейших разделах.

А. ЧИСЛА

1. Натуральные числа

Основываясь на наглядных представлениях, мы образуем следующие понятия, не определяемые здесь более точно:

понятие *множества* элементов (индивидуальностей), которое может быть разложено на подмножества и снова составлено из них;

понятие *эквивалентности* двух множеств одинаковой *мощности* в случае, если их элементы могут быть приведены во *взаимно однозначное соответствие*;

понятие индивидуального *обозначения* для их элементов при помощи установления взаимно однозначного соответствия между данным множеством и эквивалентным множеством различных символов;

понятие *сравнения* мощностей двух множеств; мощность одного из множеств может быть больше мощности другого, равна ей или меньше ее;

понятие *упорядочения* элементов множества в некоторую *последовательность*;

понятие *упорядочения* одной последовательности в соответствии с другой посредством установления между их элементами взаимно однозначного соответствия.

С помощью абстракции, при которой понятие мощности изолируется от всех остальных свойств множества, мы приходим к понятию *натурального числа*. Совокупность всех возможных чисел такого рода может быть упорядочена в соответствии с их величиной в неограниченно продолжаемую последовательность. Обозначения для ее элементов мы получаем, устанавливая взаимно однозначное соответствие между ними и членами какой-либо последовательности, состоящей из символов, чисел и цифр.

Эти числа, или их символы, служат:

в качестве *кардинальных чисел* для обозначения мощности множества, т. е. числа его элементов;

в качестве *порядковых чисел* для установления порядка элементов в множестве при помощи их нумерации, при которой каждому элементу ставится в соответствие определенный *индекс*.

Составлению множества из его подмножеств соответствует процесс образования *суммы* чисел при их *сложении*.

Наглядные представления позволяют установить для сложения правила, символически формулируемые следующим образом:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \text{ (коммутативный закон сложения);} \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \text{ (ассоциативный закон сложения).} \end{aligned}$$

При помощи многократного сложения равных чисел мы приходим к понятию *умножения* числа a на *числовой множитель* b , что дает *произведение* ba . Здесь имеют место правила:

$$\begin{aligned} ab &= ba \text{ (коммутативный закон умножения);} \\ (ab)c &= a(bc) \text{ (ассоциативный закон умножения).} \end{aligned}$$

Сложение и умножение связаны посредством соотношений

$$\left. \begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac \\ (b + c)a &= ba + ca \end{aligned} \right\} \text{(дистрибутивные законы).}$$

Из этих зависимостей вытекает способ, позволяющий получить обозначение для любого числа с помощью небольшого множества соответственно выбираемых основных чисел, из которых определенным образом составляется данное число (*система счисления*). *Производить вычисления с числами* значит заменять одни способы задания чисел другими. Для этой цели применяются (наряду с вычислительными правилами, сформулированными выше, и дальнейшими, вытекающими из них) *таблицы*, в простейших случаях заучиваемые наизусть, а также соответствующие *вычислительные приборы*. С помощью таких вычислений заключают о равенстве чисел, заданных различными способами (например, $3 \cdot 7 \cdot 8 = 8 + 6 \cdot 10 + 100 = 168$).

2. Рациональные числа

Наряду с *конструктивным* определением числа c как суммы двух данных чисел a и b , $a + b = c$, возможно также *дескриптивное* его определение при помощи требования $c + d = e$, где d и e являются данными; при этом c символически записывается в виде $c = e - d$. Если числа e и d связываются таким образом, то говорят, что выполняется *вычитание*, результатом которого является *разность* c . Чтобы поставленному требованию можно было всегда удовлетворить, необходимо, присоединив *нуль* и *отрицательные числа*, расширить совокупность натуральных чисел до *совокупности всех целых чисел*.

Аналогичным образом при помощи требования $cd = e$ приходят к *делению* $c = \frac{e}{d}$, результатом которого является *частное*. Это дает повод расширить числовую систему, присоединяя к ней *дроби*. В результате обоих расширений мы приходим к системе *рациональных чисел*. Деление на нуль при этом исключается, как не имеющее смысла.

Для того чтобы в этой числовой системе все приведенные выше действия были определены однозначным и непротиворечивым образом, достаточно *потребовать*, чтобы для рациональных чисел сохраняли силу те же общие правила, которые были очевидными для действий с натуральными числами. Тогда результатом выполнения действия всегда будет снова некоторое рациональное число. Рациональные числа образуют *числовое поле*.

При этом оказывается возможным любое множество рациональных чисел однозначно упорядочить в соответствии с их величиной.

Чтобы получить обозначение для любого рационального числа, соответствующее его аддитивному построению, необходимо ввести предварительно некоторую расширенную систему основных рациональных чисел.

Совокупность всех рациональных чисел образует *плотную* последовательность¹⁾. Это означает, что *каждый* интервал, определяемый двумя различными рациональными числами, разность которых может быть сколь угодно мала, содержит бесконечное множество рациональных чисел.

3. Иррациональные числа

Вводя дальнейшие условия, можно определить еще одно бесконечное числовое множество. Принадлежащие ему числа, если потребовать, чтобы для них выполнялись общие правила действий, предполагаются между рациональными, не будучи представимы в виде таковых. Эти числа называются *иррациональными*. С их введением множество рациональных чисел расширяется до *множества действ-*

¹⁾ Более точно «плотное в себе упорядоченное множество».

вительных чисел, о которых говорят, что они образуют *непрерывную* последовательность, или *линейный континуум*.

Различие между иррациональными и рациональными числами, точное определение иррациональных чисел, их распределение по различным *областям рациональности* и выделение из множества иррациональных чисел в некотором смысле наиболее иррациональных *трансцендентных* чисел, так же как и возможность их построения при помощи формального, практически невыполнимого процесса,— все это вопросы, чрезвычайно интересные с чисто математической точки зрения; они не имеют, однако, существенного значения для применений в области физики.

4. Операции

Сложение и умножение являются простейшими операциями, которые каждому числу a при условии задания некоторого слагаемого (соответственно множителя) ставят в соответствие определенное число b . Вычитание и деление являются соответствующими им *обратными операциями*, которые, используя то же слагаемое (соответственно тот же множитель), однозначно возвращают от b к a .

Комбинируя эти четыре вида элементарных операций, мы приходим к понятию общего *линейного* соотношения между b и a . Такое соотношение может быть представлено в форме

$$b = \frac{\alpha + \beta a}{\gamma + \delta a},$$

с коэффициентами α , β , γ , δ . Обратная операция такова:

$$a = \frac{-\alpha + \gamma b}{\beta - \delta b}.$$

Дальнейшие соотношения получают, вводя операцию *возведения в степень*: $b = a^n$. Она определяется для произвольных рациональных показателей n посредством равенств:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^1 = a.$$

Обратной операцией для нее служит *извлечение корня*: $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$.

В области действительных чисел операция возведения в степень является однозначно выполнимой только для целых положительных показателей. Вообще говоря, она уводит в область иррациональных или в область комплексных чисел (см. стр. 26).

5. Функции

Если a в соответствии $a \rightarrow b$ может обозначать различные или же произвольные числа, то a называется *переменной*; поскольку значения b определяются предварительным выбором значений a , то b называется *переменной, зависящей от a* . Говорят также, что b находится

в функциональной зависимости от a , или же является *функцией* от a . Для обозначения такой зависимости обычно употребляется запись $b = f(a)$ или, если желают подчеркнуть, что a и b являются переменными, — запись $y = f(x)$, или также $y = y(x)$.

Задание конкретной функции одной или нескольких переменных называется *явным*, если указан определенный символически записываемый способ вычисления ее значений (т. е. формула). Прочие способы задания функции называются *неявными*. Явное задание может содержать требование выполнения ограниченного (конечного) или неограниченного (бесконечного) количества операций. Во втором случае все необходимые операции не могут быть в действительности выполнены, и задание только тогда имеет смысл, когда можно сколь угодно близко подойти к цели, выполняя лишь конечное число операций. Соответствующий процесс при этом называется *сходящимся*; вычисляемая функция называется его *пределом*.

Обратная по отношению к $f(x)$ функция f^{-1} возвращает от $f(x)$ снова к x , иными словами, из $y = f(x)$ следует $f^{-1}(y) = x$. Если допустить для x также и комплексные значения, то последнее соответствие будет однозначным только для линейных функций, так как требование $y = f(x)$ при заданном y может удовлетворяться, вообще говоря, более чем одним значением x . f^{-1} в этом случае называется *многозначной* функцией.

6. Пределы

Число ¹⁾ называют *бесконечно большим* и обозначают символом ∞ , если желают выразить, что оно превосходит любое другое число. Этим обозначением оно не фиксируется в качестве объекта в множестве чисел, и применять к символу ∞ установленные выше вычислительные правила недопустимо.

Такое число возникает как предел функции $f(x)$ при некоторых значениях x_0 переменной x (*особые точки*, или *сингулярности*). Для обозначения его употребляется запись $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ или, более кратко, $f(x_0) = \infty$. Для обратной функции в этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = x_0$ или $f^{-1}(\infty) = x_0$. Это означает следующее: $f^{-1}(x)$ приближается сколь угодно близко к пределу x_0 , если x неограниченно возрастает.

Число называют *бесконечно малым*, если желают выразить, что оно имеет абсолютную величину меньшую, чем любое произвольно заданное (положительное) число. Вводить специальный символ для обо-

¹⁾ Здесь, конечно, имеется в виду не число, а переменная величина. Аналогичные неточности формулировок, встречающиеся и дальше в тексте, не будут особо отмечаться, так как читатель, несомненно, заметит их сам. (Прим. ред.)

значения этого понятия излишне, так как он заменяется записями вида

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Иногда употребляется символ ϵ (например, $\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = f'(x)$).

В. МНОГОМЕРНЫЕ ЧИСЛА

1. Числовые пространства и многообразия

Совокупность действительных чисел образует *числовой континуум*, или одномерное *числовое пространство*, в котором каждое число служит *координатой*, определяющей положение некоторой *точки*.

Упорядоченную совокупность n любых действительных чисел x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называют *n -мерным числом*. Эти числа образуют n -мерное *числовое пространство*. Каждое из чисел этого пространства представляет некоторую точку, положение которой определяется n координатами.

Если мы заставим точку перемещаться в пространстве, то она будет описывать некоторую *линию*, или *кривую*. Система значений координат точки образует одномерное *многообразие*, т. е. некоторое новое одномерное пространство, *вложенное* в n -мерное числовое пространство. Точки полученной кривой могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с точками одномерного числового пространства. Обычные действительные числа могут поэтому служить для обозначения точек кривой. В этом случае говорят, что они являются значениями *параметра кривой* q_1 , или координатами на кривой.

Если кривую подвергнуть непрерывному перемещению в пространстве, то при этом возникает *семейство кривых*, образующее *поверхность*, или двумерное многообразие. Вводя для обозначения кривой параметр семейства q_2 , мы получаем возможность обозначить точку, лежащую на поверхности, при помощи двух чисел q_1 и q_2 , и тем самым получаем координаты на поверхности.

Аналогичным образом мы приходим к понятию k -мерных многообразий, так называемых *подпространств*, вложенных в числовое пространство размерности $n \geq k$. Каждая точка такого многообразия может быть обозначена как при помощи n координат x_i в числовом пространстве, так и при помощи k координат q_i в самом многообразии. Каждое x_i может быть выражено через q_i . Между x_i имеется $n - k$ соотношений.

Одно и то же многообразие может быть определено различным образом, так же как и координаты в том числовом пространстве, которое его содержит. При разных способах введения координат одна и та же точка многообразия может получить различные координаты

в нем. Такая замена одних координат другими называется *преобразованием координат*, которое *переводит данное многообразие в себя*.

В многообразии можно построить *геометрию*, если ввести в нем *метрику* (Риман), определив, что следует понимать под расстоянием ds между двумя точками, соответствующие координаты q_l которых отличаются на бесконечно малые величины dq_l . Метрику принято определять при помощи формулы вида $ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dq_i dq_k$ (см. стр. 253), где

g_{ik} являются функциями от q_l . Для метрики в числовом пространстве обычным является следующее определение: $ds^2 = \sum_{i=1}^n dz_i^2$ (декартова метрика).

Обобщая идею представления поверхности как произведения двух длин, мы приходим к представлению n -мерного пространства в виде произведения содержащихся в нем подпространств, не имеющих общих q_l .

2. Многомерные алгебры

С многомерными числами можно производить вычисления так же, как с действительными (одномерными) числами, если предварительно определить, что следует понимать под суммой и произведением двух многомерных чисел. При этом в каждом случае возникает специальная *алгебра* с правилами оперирования, более или менее напоминающими правила обычной алгебры. Полного совпадения можно достичь только в двумерном случае для *комплексных* чисел при помощи подходящим образом выбранных определений.

3. Комплексные числа

Комплексными числами называются двумерные числа (пары чисел) $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ и т. д., для которых по определению полагаем:

$$\begin{aligned} A + B = C & \text{ означает } a_1 + b_1 = c_1; & a_2 + b_2 = c_2, \\ AB = C & \text{ означает } a_1 b_1 - a_2 b_2 = c_1; & a_1 b_2 + a_2 b_1 = c_2. \end{aligned}$$

Для умножения на действительное число α полагаем:

$$\alpha A = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

Если ввести специальные пары $E = (1, 0)$ и $I = (0, 1)$, то получим:

$$A = a_1 E + a_2 I,$$

а также

$$EE = E, \quad EA = AE = A, \quad II = -E, \quad IA = AI.$$

E и I ведут себя, таким образом, как обыкновенные числа, а именно, E — как число 1, I — как число i , квадрат которого равен -1 . Поэтому можно, принимая во внимание правило $i^2 = -1$ и записывая

$E=1, I=i$ (что дает $A=a_1+ia_2; B=b_1+ib_2$ и т. д.), производить вычисления подобно тому, как это делают с обычными числами.

Алгебра комплексных чисел во всех пунктах сходна с алгеброй действительных чисел и может считаться ее естественным обобщением. Двумерное числовое пространство a_1, a_2 называется *гауссовой числовой плоскостью*. В этой плоскости каждое комплексное число изображается некоторой точкой. a_1 называется *действительной частью* числа A : $a_1=\text{Re}A$, a_2 — *мнимой частью*: $a_2=\text{Im}A$. Число $\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|A|$ называется *абсолютной величиной*, или *модулем* A . Число $A^*=a_1-ia_2$ называется *числом, комплексно-сопряженным*¹⁾ с A . Справедливы равенства:

$$a_1 = \frac{A+A^*}{2}, \quad a_2 = \frac{A-A^*}{2i}, \quad |A| = \sqrt{A^*A}.$$

4. Кватернионы

Кватернионами называются четырехмерные числа

$$A=(a_1, a_2, a_3, a_4); \quad B=(b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ и т. д.,}$$

для которых мы определяем:

$$A+B=C \text{ означает } a_1+b_1=c_1; \quad a_2+b_2=c_2 \text{ и т. д.}$$

Некоммутативное умножение определяется следующим образом. Мы вводим специальные кватернионы

$$L=(1, 0, 0, 0); \quad M=(0, 1, 0, 0); \quad N=(0, 0, 1, 0); \quad E=(0, 0, 0, 1)$$

и полагаем:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^2 = N^2 = -E^2 = -E; \\ LE &= EL = L; \quad ME = EM = M; \quad NE = EN = N; \\ LM &= N = -ML; \quad MN = L = -NM; \quad NL = M = -LN. \end{aligned}$$

Тогда $A=a_1L+a_2M+a_3N+a_4E$ и

$$\begin{aligned} AB &= (a_1b_4+a_2b_1+a_3b_2-a_4b_3)L + (a_1b_3+a_2b_4+a_3b_1-a_4b_2)M + \\ &+ (a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4-a_4b_1)N + \\ &+ (-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_4b_4)E \quad (\neq BA!). \end{aligned}$$

Кватернион

$$A^{-1} = \frac{-a_1L - a_2M - a_3N + a_4E}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

существует лишь в том случае, когда знаменатель не равен нулю.

Четыре числа a_1, a_2, a_3, a_4 (которые могут быть также комплексными) называются *компонентами*. a_1, a_2, a_3 образуют «векторную»,

¹⁾ Или сопряженным комплексным.

i_4 — скалярную часть. В алгебре кватернионов содержится трехмерная векторная алгебра (см. стр. 237 — 238).

Если кватерниону A поставить в соответствие матрицу (см. стр. 166)

$$(A) = \begin{pmatrix} a_4 + ia_1 & -a_3 + ia_2 \\ a_3 + ia_2 & a_4 - ia_1 \end{pmatrix},$$

то получим $(A) \dagger (B) = (A \dagger B)$; $(A)(B) = (AB)$ в смысле алгебры матриц. Тем самым обе алгебры *изоморфны* (см. стр. 289). Относительно других представлений см. стр. 293.

5. Гиперкомплексные числа высшего порядка

По аналогии с изложенным выше строится алгебра 2^n -мерных чисел

$$A = \sum_{i=1}^{2^n} a_i C_i$$

со специальными C_i , удовлетворяющими следующим условиям.

Пусть даны:

- 1) один элемент E такой, что $EC_l = C_l E = C_l$ (для всех l);
- 2) n элементов C_α , антикоммутирующих друг с другом, т. е. таких, что $C_\alpha C_\beta = -C_\beta C_\alpha$ при $\alpha \neq \beta$, и обладающих свойством $C_\alpha^2 = -E$ (или, что то же, $= E$, если каждое C_l заменить на iC_l);
- 3) $\frac{n(n-1)}{2}$ элементов $C_{\alpha\beta} \equiv C_\alpha C_\beta = -C_{\beta\alpha}$, и вообще
- 4) дальнейшие комплексы по $\binom{n}{l}$ элементов: $C_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_\alpha C_\beta C_\gamma$ и т. д.

Это дает в совокупности 2^n различных элементов C_i . Приведенными выше условиями полностью определена некоторая алгебра гиперкомплексных чисел такого вида. Значения a_i можно брать и комплексными.

С помощью этого метода получаем:

- при $n = 1$ комплексные числа,
- при $n = 2$ кватернионы,
- при $n = 3$ бикватернионы,
- при $n = 4$ клиффордовы числа¹⁾.

6. Клиффордовы числа

Четыре элемента C_α в физике обычно обозначаются через γ_α и нормируются с помощью условия $\gamma_\alpha^2 = \pm 1$.

Шестнадцать элементов C_i образуют 60 коммутирующих и 60 антикоммутирующих пар. Имеется 6 «пентад», состоящих каждая из

¹⁾ Они называются также числами Клиффорда — Липшица (см., например, Э. Картан, Теория спиноров. М., 1947). (Прим. ред.)

пяти попарно антикоммутирующих элементов, и 20 «триад», содержащих по три таких элемента.

Каждый элемент принадлежит двум пентадам и имеет 8 антикоммутирующих с ним элементов. На рис. 1 ими являются те, которые вместе с данным элементом принадлежат одному и тому же пятиугольнику, т. е. одной и той же пентаде.

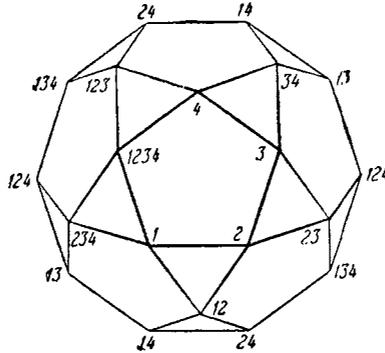


Рис. 1. Клиффордовы числа.

Клиффордовы числа допускают представление с помощью матриц 4-го порядка, например:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

а также могут рассматриваться как операторы (см. стр. 43).

с. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

1. Простые и кратные последовательности

Если n числам от m до $m + n - 1$ поставить в соответствие n предметов, то получится последовательность, для элементов которой соответствующие им числа служат *индексами*.

Если предметы, о которых идет речь, являются действительными или комплексными числами: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n-1}$, то для записи последовательности пользуются символом $\{a_k\}$, считая, что

индекс k принимает значения $m, m+1, \dots, m+n-1$. Эта последовательность, в зависимости от того, в какой связи она рассматривается, называется:

- 1) *однострочной матрицей* с элементами a_k ,
- 2) *функцией* целочисленного параметра k , определенной на множестве чисел от m до $m+n-1$, значениями которой служат числа a_k ,
- 3) *n -мерным вектором* a с компонентами a_k .

Если дан некоторый закон построения последовательности, позволяющий продолжить ее сколь угодно далеко, то возникает *бесконечная последовательность*. Она называется *дискретной* или *плотной*, смотря по тому, является ли расстояние (разность) между ее соседними элементами конечным или бесконечно малым. Множество ее элементов является *счетным*. Это означает, что оно может быть приведено во взаимно однозначное соответствие с дискретной последовательностью, состоящей из всех целых чисел $\geq m$, т. е. что его элементы могут быть перенумерованы с помощью этих чисел.

Элементы плотной последовательности удобнее поставить во взаимно однозначное соответствие с элементами плотной последовательности рациональных чисел, заключенных между границами α и β . Индекс-параметр превращается тогда в переменную, пробегаящую эту область, и последовательность, будучи плотной, представляет собой *непрерывную* функцию этой переменной.

Функция в известном смысле может рассматриваться как предельный случай (при $n \rightarrow \infty$) однострочной матрицы или как вектор в бесконечномерном «функциональном пространстве» (гильбертовом пространстве); отсюда проистекают далеко идущие аналогии между матрицами, функциями и векторами.

Если мы образуем последовательность, элементы которой сами являются последовательностями, то получим так называемую двойную последовательность, элементы которой обозначаются с помощью двух индексов: $\{a_{ik}\}$.

Если эти элементы — числа, то такой объект называется:

- 1) *двумерной матрицей* с элементами a_{ik} , или
- 2) *функцией* двух параметров i и k (заданной на числовой решетке $[i, k]$), значениями которой служат a_{ik} , или
- 3) *тензором* второго ранга¹⁾ с компонентами a_{ik} .

Переход к бесконечным последовательностям дает много различных случаев. Особенно важными являются случай бесконечной дискретной последовательности функций одной переменной и случай плотной последовательности таких функций, приводящий к функции двух переменных. Они могут рассматриваться как предельные случаи матриц.

Легко можно построить также образы высшего порядка, например последовательности двумерных матриц и их пределы.

¹⁾ Наряду с термином «ранг» в литературе можно встретить также термины «валентность», «порядок», «степень», «ступень». (Прим. ред.)

2. Суммы и средние значения

Если дана какая-либо последовательность $\{a_k\}$, то можно образовать последовательность ее *частичных сумм*

$$\left\{ \sum_{k=m}^{m+l-1} a_k \right\} = \{s_l\}$$

и последовательность ее *частичных средних значений* $\left\{ \frac{s_l}{l} \right\} = \{\bar{s}_l\}$.

Если числа a_k ограничены, то ограниченными будут и средние значения, даже если выполнить предельный переход при $l \rightarrow \infty$. Они образуют сходящуюся последовательность.

Если последовательность, состоящая из чисел a_k , является плотной и представляет собой тем самым некоторую функцию $f(x)$ переменной x , изменяющейся между границами α и β , то вместо того, чтобы писать

$$(x - \alpha) \bar{s}_l = \frac{x - \alpha}{l} s_l,$$

пишут

$$(x - \alpha) \overline{f(x)} = \int_{\alpha}^x f(x) dx = F(x),$$

где $dx = \frac{x - \alpha}{l}$. Эта бесконечная сумма называется *интегралом* функции $f(x)$, распространенным на область (промежуток) от α до x . Сам интеграл также представляет собой функцию $F(x)$ той же переменной¹⁾.

Таким образом, имеем:

интеграл равен среднему значению, умноженному на меру области, в то время как

сумма равна среднему значению, умноженному на число слагаемых.

Обратно, из $F(x)$ можно однозначно получить $f(x)$. $f(x)$ называется *производной* от функции $F(x)$; обозначение:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Эти операции, называемые *интегрированием* и *дифференцированием*, могут выполняться повторно и приводят к образам высшего порядка, например,

$$\frac{d}{dx} F'(x) = F''(x) = \frac{d^2}{dx^2} F(x) \quad (\text{см. стр. 53}).$$

¹⁾ Более удобной является запись $F(x) = \int_{\alpha}^x f(s) ds$, в которой используется специальное обозначение для *переменной интегрирования* с целью подчеркнуть, что интеграл является функцией только своего верхнего предела x .

Суммой двух последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, упорядоченных с помощью одного и того же параметра k , называют последовательность $\{a_k + b_k\}$. Скалярным произведением этих последовательностей называется число (билинейная форма)

$$(a, b) = \sum_{k=m}^{m+l-1} a_k b_k.$$

Последняя сумма для бесконечных последовательностей, вообще говоря, расходится. Ее заменяют поэтому пределом частичного среднего значения последовательности $\{a_k b_k\}$:

$$(a, b) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{k=m}^{m+l-1} a_k b_k \text{ (усредненное скалярное произведение).}$$

Для функций скалярное произведение обычно определяют при помощи формулы

$$(a, b) = \int_a^b a(x) b(x) dx \text{ (скалярное произведение функций } a(x) \text{ и } b(x)).$$

Две последовательности (матрицы, функции или векторы) называются взаимно ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Нормой последовательности называется число

$$N = (a, a);$$

в случае, когда a_k — комплексные числа, нормой называют число $N = (a^*, a)$. Если $N = 1$, то говорят, что последовательность нормирована на единицу.

Следует обратить внимание на то, что скалярное произведение и норма для конечных, бесконечных и плотных последовательностей определяются различным образом.

Во всех этих случаях справедливо неравенство Шварца

$$(a, b)^2 \leq (a, a)(b, b),$$

соответственно для комплексных последовательностей:

$$|(a^*, b)|^2 \leq (a^*, a)(b^*, b).$$

Ввиду того, что

$$|(a^*, b)|^2 = \left\{ \frac{(a^*, b) + (b^*, a)}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{(a^*, b) - (b^*, a)}{2i} \right\}^2,$$

произведение $(a^*, a)(b^*, b)$ будет не меньше каждого из положительных действительных слагаемых, стоящих в правой части¹⁾.

¹⁾ (a^*, b) называется также «эрмитовым» произведением. Часто его пишут без звездочки. В этом случае наше обозначение (a, b) надо заменить на (a^*, b) , что, однако, не соответствует существу дела.

3. Разложение векторов и функций

Аналогия между векторами и функциями отчетливо выявляется при следующем сопоставлении (относительно векторной символики см. стр. 201).

Вектор α в n -мерном пространстве | Функция $f(x)$ в области $\alpha \rightarrow \beta$
 допускает представление в виде *линейной комбинации*
 n базисных векторов e_i | ∞ базисных функций $\varphi_i(x)$,
 иначе говоря, допускает разложение вида

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \left| \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x).$$

Базисные векторы, соответственно базисные функции, при этом должны быть *линейно независимыми*, т. е. между ними не должно существовать никакого соотношения вида

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \quad \left| \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x) = 0,$$

где α_i не все равны нулю.

Вычисление коэффициентов (компонент) a_i становится особенно простым, если e_i , соответственно $\varphi_i(x)$, являются нормированными и попарно ортогональными, т. е. если

$$(e_i^*, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} & (\varphi_i^*, \varphi_k) = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_i^*(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Именно, тогда будем иметь:

$$a_i = (e_i^*, \alpha) \quad \left| \quad a_i = (\varphi_i^*, f) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_i^*(x) f(x) dx$$

и

$$(a^*, a) = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \quad \left| \quad (f^*, f) = \int_{\alpha}^{\beta} f^*(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2.$$

Последняя формула называется *условием полноты*. Она представляет собой критерий того, что выбранные функции $\varphi_i(x)$ образуют *полную систему*, пригодную для разложения всех рассматриваемых функций.

Если область $\alpha \rightarrow \beta$ бесконечна, то достичь полноты можно, вообще говоря, лишь беря плотную последовательность функций, используемых для получения разложения. Индекс-параметр i превращается тогда в переменную s , и вместо $\varphi_i(x)$ следует взять

содержащую два параметра функцию $\varphi(s, x)$. Разложение при этом имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s) \varphi(s, x) ds,$$

и, если

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^*(s, x) \varphi(s', x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } s = s', \\ 0 & \text{при } s \neq s', \end{cases}$$

то

$$a(s) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^*(s, x) f(x) dx.$$

Функция $a(s)$ называется *спектральной функцией* представления.

Соотношение полноты здесь принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(s)|^2 ds = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx.$$

Д. ОПЕРАТОРЫ

1. Понятие оператора

Оператор ставит одной числовой последовательности $\{a_k\}$ по определенному закону в соответствие некоторую другую последовательность $\{b_k\}$ той же мощности n . Это записывается в виде $\{b_k\} = T\{a_k\}$ или, проще, $b = Ta$. При этом, вообще говоря, каждое b_k зависит от *всех* a_k . Мы имеем, таким образом, n уравнений вида

$$b_k = f_k(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n),$$

т. е. некоторое общее *преобразование*. В этом понятии содержатся многие важные частные случаи.

Нас здесь будут интересовать только

линейные операторы, характеризующиеся тем, что для них b_k являются линейными функциями от a_k :

$$b_k = \sum_{l=1}^n T_{kl} a_l.$$

Коэффициенты T_{kl} образуют квадратную матрицу. Если $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ рассматриваются как векторы, то оператор называется *тензором*. В этом случае мы будем писать $b = \mathfrak{T}a$ (см. стр. 243).

Для линейных операторов справедливо следующее предложение.

Из $b_1 = Ta_1$ и $b_2 = Ta_2$ вытекает, что $(b_1 + b_2) = T(a_1 + a_2)$, а также $T(\alpha a) = \alpha Ta$ для произвольного числа α .

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ дает четыре специальные формы линейных соответствий:

$$1^\circ b_k = \sum_{l=1}^{\infty} T_{kl} a_l \quad \text{дискретной последовательности соответствует дискретная последовательность.}$$

$$2^\circ b(x) = \int_a^{\beta} T(x, t) a(t) dt \quad \text{плотной последовательности соответствует плотная последовательность.}$$

$$3^\circ b_k = \int_a^{\beta} T_k(x) a(x) dx \quad \text{плотной последовательности соответствует дискретная последовательность.}$$

$$4^\circ b(x) = \sum_{l=1}^{\infty} T_l(x) a_l \quad \text{дискретной последовательности соответствует плотная последовательность.}$$

Хотя эти четыре формы представляют собой лишь различные предельные случаи одной и той же зависимости, из них только 1° и 2° рассматриваются как соответствия, осуществляемые оператором, в то время как 3° и 4° рассматриваются обычно с другой точки зрения. В соответствии с этим мы в дальнейшем будем говорить лишь о первых двух формах: о *матричном операторе* в случае 1° и об *интегральном операторе с ядром* $T(x, t)$ в случае 2° . T_{kl} , соответственно $T(x, t)$, может содержать также и другие параметры, например параметры, указывающие положение или время. Это приводит к понятию оператора, являющегося функцией точки и функцией времени.

2. Единичный оператор E и дельта-функция

Единичный оператор определяется равенством

$$Ea = a,$$

т. е. как матричный оператор — равенством

$$\sum_k E_{ik} a_k = a_i$$

и как интегральный оператор — равенством

$$\int_a^{\beta} E(x, t) a(t) dt = a(x).$$

Единичная матрица E_{ik} записывается большей частью с помощью символа $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (символ Кронекера). Имеем: $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Единичное ядро $E(x, t)$ записывается в виде $\delta(x - t) = \delta(t - x)$ (дельта-функция). $\delta(x - t) = 0$ всюду, кроме $x = t$, где функция

становится бесконечной и притом такой, что $\int_a^{\beta} \delta(x - t) dt = 1$.

Функция $\delta(x-t)$ может быть многими способами представлена в виде некоторого предела. Такое представление дают, например, следующие формулы:

$$\begin{aligned}\delta(x-t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{(x-t)^2}{\varepsilon}} \right), \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-t)^2} \right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(x-t) - i\varepsilon} - \frac{1}{(x-t) + i\varepsilon} \right), \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n} (1 - (x-t)^2)^n \right\} & \text{при } |x-t| < 1, \\ 0 & \text{при } |x-t| \geq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Справедливо следующее формальное соотношение:

$$\delta(x-t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |x-t|.$$

Употребительны также следующие представления:

$$\begin{aligned}\delta(x-t) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n(x-t)}{x-t} \right), \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \cos n(x-t)}{n(x-t)^2} \right), \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 n(x-t)}{n(x-t)^2} \right), \\ &= \frac{1}{i\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{in(x-t)} - 1}{x-t} \right), \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} ds e^{2\pi is(x-t)} \quad (\text{представление Фурье}), \\ &= \frac{1}{\pi^2(x-t)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(x-t)-\varepsilon}^{(x-t)+\varepsilon} \frac{ds}{s}, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \varphi_n^*(x) \varphi_n(t),\end{aligned}$$

если функции φ_n образуют нормированную ортогональную систему.

При подстановке любого из этих выражений в операторное уравнение знак предельного перехода необходимо выносить из-под знака интеграла.

Если положить $x-t=z$, то $\delta(z)$, будучи рассматриваемая как функция комплексного переменного, имеет два полюса первого порядка в точках $+i\varepsilon$ и $-i\varepsilon$ с вычетами, соответственно равными $+\frac{1}{2\pi i}$ и $-\frac{1}{2\pi i}$. Путь интегрирования должен проходить между этими полюсами.

Можно разложить $\delta(z)$ на две функции, каждая из которых имеет только один полюс:

$$\delta(z) = \delta_+(z) + \delta_-(z),$$

где

$$\begin{aligned}\delta_+(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z + i\epsilon} \right); \\ \delta_-(z) &= +\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z - i\epsilon} \right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta_+(z) - \delta_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2z}{z^2 + \epsilon^2} = -\frac{1}{i\pi z}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\delta_+(z) &= \frac{1}{2} \delta(z) - \frac{1}{2\pi iz} = \delta_-(-z) = \delta_-^*(z) = (\delta_-(z^*))^*, \\ \delta_-(z) &= \frac{1}{2} \delta(z) + \frac{1}{2\pi iz} = \delta_+(-z) = \delta_+^*(z) = (\delta_+(z^*))^*.\end{aligned}$$

Они допускают также следующие представления:

$$\begin{aligned}\delta_+(z) &= \int_0^{\infty} e^{2\pi izs} ds; \\ \delta_-(z) &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi izs} ds = \int_{-\infty}^0 e^{2\pi izs} ds.\end{aligned}$$

Путь интегрирования для функций $\delta_+(z)$ и $\delta_-(z)$ следует выбирать проходящим соответственно над и под точкой $z=0$, причем можно писать

$$\delta_+(z) = -\frac{1}{2\pi iz}, \quad \delta_-(z) = \frac{1}{2\pi iz}.$$

Если образовать функцию

$$E_{\alpha, \beta}(x, t) = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-s) \delta(s-t) ds,$$

то будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \beta}(x, t) f(t) dt = \begin{cases} f(x) & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при } x < \alpha \text{ и } x > \beta. \end{cases}$$

Интегральный оператор с $E_{\alpha, \beta}(x, t)$ в качестве ядра «вырезает» из $f(x)$ кусок, заключенный между $x=\alpha$ и $x=\beta$ (*фильтрующий оператор*).

Специальные свойства. Из приведенных выше определений вытекают следующие формулы для дельта-функции и функций δ_+ и δ_- :

$$1. \delta(-x) = \delta(x) = \delta^*(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \text{ если } f(x) \text{ имеет только простые нули } x_n.$$

$$x \delta(x) = 0; \quad f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x), \quad f(a \pm x) \delta(x) = f(a) \delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(x - t) dt = f(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - t) \delta(s - t) dt = \delta(x - s).$$

$$2. \delta'(x) = -\frac{1}{x} \delta(x) = -\delta'(-x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{isx} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta'(x - t) dt = f'(x), \text{ если } f'(t) \text{ непрерывна в точке } t = x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - t) \delta(s - t) dt = \delta'(x - s),$$

$$\delta''(x) = \frac{2}{x^2} \delta(x),$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \delta(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^n} \delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(t - x) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x), \text{ если } f^n(t) \text{ непрерывна}$$

при $t = x$.

$$3. x \delta_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2\pi i},$$

$$(\delta_{\pm}(a) + \delta_{\pm}(b)) \delta(a + b) = \delta(a + b) \delta(b) = \delta(a + b) \delta(a) = \delta(a) \delta(b),$$

$$(\delta_{\pm}(a) - \delta_{\pm}(b)) \delta_{\pm}(a + b) = \delta_{\pm}(a) \delta_{\pm}(b) + \frac{1}{4} \delta(a) \delta(b).$$

3. Операторы, связанные с данным оператором

С данным оператором T могут быть связаны некоторые другие, определяемые при помощи сравнения их свойств со свойствами данного оператора. Мы определим их (неявно), исходя из результатов их применения к произвольным a и b , с помощью равенств:

$(aTb)^* \equiv (a^* T^* b^*)$; T^* называется оператором, *комплексно-сопряженным* с T ,

$(aTb) \equiv (b\tilde{T}a)$; \tilde{T} называется оператором, *транспонированным* по отношению к T ,

$T^\dagger \equiv \tilde{T}^*$; T^\dagger называется оператором, *сопряженным* с T , или (явно) при помощи условий, налагаемых на их матрицы, соответственно ядра:

$$\begin{aligned} T_{ik}^* &= (T_{ik})^*, & K^*(x, t) &= (K(x, t))^*, \\ \tilde{T}_{ik} &= T_{ki}, & \tilde{K}(x, t) &= K(t, x), \\ T_{ik}^\dagger &= T_{ki}^*, & K^\dagger(x, t) &= K^*(t, x)^1. \end{aligned}$$

Если $T^\dagger = T$, то оператор называется *самосопряженным*, или *эрмитовым*. Тогда имеем $(a^*Tb) \equiv (b^*Ta)^*$ и (a^*Ta) действительно. Если T действительно и, значит, $T^* = T$, то $\tilde{T} = T^\dagger$ и оператор называется *симметрическим*.

Оператор T^{-1} , который при данном T позволяет решить уравнение $b = Ta$ относительно a , называется *обратным* по отношению к T . При этом пользуются следующей формой записи: $a = T^{-1}b$.

Тогда для любого a имеет место равенство $a = T^{-1}Ta$, т. е. $T^{-1}T = E$. В матричной форме будет: $a_i = \sum_{kl} T_{ik}^{-1} T_{kl} a_l$, и следовательно,

$\sum_k T_{ik}^{-1} T_{kl} = \delta_{il}$. Это дает для отыскания T_{ik}^{-1} всего n^2 линейных уравнений. Если определитель $|T_{kl}|$ равен нулю, то решение невозможно. В этом случае оператор T называется *сингулярным* и не имеет обратного. То же самое имеет место, если существует $a \neq 0$ такое, что $Ta = 0$.

При $n \rightarrow \infty$, так же как и в случае интегральных операторов, для отыскания T^{-1} приходится прибегать к неалгебраическим методам.

Оператор называется *унитарным*, если для него $T^{-1} = T^\dagger$ или, что то же, $TT^\dagger = E$.

Равенство $T^2a = T(Ta)$ определяет оператор T^2 , полученный посредством *итерации*. Аналогично определяются высшие *степени* T^3, T^4, \dots оператора T .

4. Алгебра операторов

Если $b = T_1a$ и $c = T_2a$, то равенства $b \pm c = (T_1 \pm T_2)a$ определяют новые операторы $T_1 \pm T_2$, называемые соответственно *суммой* и *разностью* операторов T_1 и T_2 .

Если $c = T_1b$ и $b = T_2a$, то равенство $c = T_1T_2a$ определяет новый оператор T_1T_2 , называемый *произведением* операторов T_1 и T_2 .

¹⁾ Для $\tilde{T}a$ употребляется также запись aT , где T действует «справа» $((\tilde{T}a)_i = \sum_k T_{ki} a_k = \sum_k a_k T_{ki} = (aT)_i)$ и $(\tilde{T}a)^* = a^* T^\dagger$.

Вообще говоря, $T_1 T_2$ не равно $T_2 T_1$. Если $T_1 T_2 = T_2 T_1$, то операторы T_1 и T_2 называются *перестановочными*. $T_1 T_2 - T_2 T_1$ называется *коммутатором* операторов T_1 и T_2 ; его часто записывают при помощи символа $[T_1, T_2]$. Если $T_1 T_2 = -T_2 T_1$, то T_1 и T_2 называются *антикоммутирующими*¹⁾.

Тем самым определена *алгебра операторов*. При выполнении преобразований следует принимать во внимание, что:

умножение, вообще говоря, не подчиняется коммутативному закону, обратный оператор не всегда существует, поэтому из $T_1 T_2 = 0$ не обязательно следует, что T_1 или $T_2 = 0$ (*делители нуля*), и

из $T = T^2$ не следует, что $T = E$ (*идемпотентный оператор*).

Оператором, обратным к $T_1 T_2$, является $T_2^{-1} T_1^{-1}$, оператором, сопряженным к $T_1 T_2$, является $T_2^\dagger T_1^\dagger$.

Произведение двух самосопряженных операторов T_1 и T_2 не есть, вообще говоря, самосопряженный оператор: $(T_1 T_2)^\dagger \neq T_1 T_2$. Однако самосопряженными будут составленные из них *симметризованные* произведения

$$\frac{T_1 T_2 + T_2 T_1}{2}$$

и

$$\frac{T_1 T_2 - T_2 T_1}{2i} = \frac{1}{2i} [T_1, T_2].$$

Имеем:

$$(T_1^* a^* T_2 b) = (a^* T_1^\dagger T_2 b).$$

Из неравенства Шварца (см. стр. 32) для самосопряженных операторов следует:

$$\begin{aligned} (a^* T_1^2 a) (a^* T_2^2 a) &\geq (a^* T_1 T_2 a) (a^* T_2 T_1 a) = \\ &= \left(a^* \frac{T_1 T_2 + T_2 T_1}{2} a \right)^2 + \left(a^* \frac{T_1 T_2 - T_2 T_1}{2i} a \right)^2. \end{aligned}$$

5. Алгебраическое построение операторов

При помощи алгебраических операций можно, исходя из небольшого числа элементарных операторов, построить сколь угодно сложные. Для этой цели могут быть использованы и бесконечные процессы (ряды), причем, конечно, необходимо исследовать, сходятся ли они. Построенные таким путем операторы являются функциями тех, которые были использованы при их построении: $T = f(A, B, C, \dots)$.

¹⁾ $T_1 T_2 + T_2 T_1$ теперь стали часто обозначать через $[T_1, T_2]_+$ (*антикомму-татор*).

Примерами могут служить:

$$T = c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n \text{ (полином от } A),$$

$$T = e^{sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^n \text{ и т. п.,}$$

$$T = e^A B e^{-A} = B + [AB] + \frac{1}{2} [A[AB]] + \frac{1}{3!} [A[A[AB]]] + \dots$$

6. Специальные элементарные линейные операторы

а) Матричные операторы T конечного порядка

Они действуют на функции одного параметра s ; порядок N может иметь различные значения.

1. $N=2$; s принимает, например, значения 1 и 2.

$$\begin{aligned} Tf(1) &= \alpha f(1) + \beta f(2); \\ Tf(2) &= \gamma f(1) + \delta f(2); \end{aligned} \quad (T_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\lambda = \frac{\alpha + \delta}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha - \delta)^2}{4} + \beta\gamma}.$$

Собственные функции:

$$\varphi(1) = C\beta, \quad \varphi(2) = C(\lambda - \alpha); \quad C = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + (\lambda - \alpha)^2}},$$

или в иной форме:

$$\varphi(1) = D(\lambda - \delta), \quad \varphi(2) = D\gamma; \quad D = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + (\lambda - \delta)^2}}.$$

T^{-1} имеет матрицу:

$$(T_{ik}^{-1}) = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Специальные случаи: *Операторами спина* называются операторы ξ , η , ζ , определяемые матрицами:

$$(\xi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\eta_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\zeta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

или, если считать, что s принимает значения $+1$ и -1 , — равенствами:

$$\xi f(s) = f(-s); \quad \eta f(s) = -i s f(-s); \quad \zeta f(s) = s f(s).$$

Эти операторы являются эрмитовыми; собственные значения равны ± 1 . Имеют место соотношения:

$$\xi\eta = i\zeta = -\eta\xi, \quad \eta\zeta = i\xi = -\zeta\eta, \quad \zeta\xi = i\eta = -\xi\zeta, \quad \xi^2 = \eta^2 = \zeta^2 = 1.$$

из которых усматривается связь этих операторов с кватернионами (см. стр. 43).

Всякий эрмитов оператор при $N=2$ может быть задан в виде

$$T = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta + \delta$$

с действительными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Его собственные значения суть $\lambda = \delta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Полагая

$$u = f(1), \quad v = f(-1),$$

можно рассмотреть действительный аксиальный вектор α в трехмерном пространстве, имеющий компоненты:

$$\begin{aligned} a_x &= u^*v + v^*u = \sum_s f^*(s) \xi f(s), \\ a_y &= -i(u^*v - v^*u) = \sum_s f^*(s) \eta f(s), \\ a_z &= u^*u - v^*v = \sum_s f^*(s) \zeta f(s). \end{aligned}$$

Модуль его равен

$$a = |\alpha| = u^*u + v^*v = \sum_s f^*(s) f(s).$$

При этом будем иметь (применяя полярные координаты θ и φ):

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{a} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \\ v &= \sqrt{a} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

с точностью до общего множителя, по модулю равного 1.

Ортогональное преобразование (вращение) вектора α индуцируется унитарным преобразованием $S(S^\dagger = \tilde{S}^* = S^{-1})$ в комплексном u, v -пространстве:

$$a_x = \sum_s S^* f^*(s) \xi S f(s) = \sum_s f^*(s) S^{-1} \xi S f(s) \quad \text{и т. д.}$$

2. $N=4$. Вместо того чтобы рассматривать целочисленный параметр s , изменяющийся от 1 до 4, можно ввести два таких параметра s и \bar{s} , каждый из которых принимает лишь значения $+1$ и -1 , и заставить оператор действовать на функции $f(s, \bar{s})$.

Специальные *спинорные операторы* получаются как произведения двух операторов спина, из которых один действует на s , а другой на \bar{s} . Это дает следующие 16 операторов:

$$1, \xi, \eta, \zeta, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \xi\bar{\xi}, \xi\bar{\eta}, \xi\bar{\zeta}, \eta\bar{\xi}, \eta\bar{\eta}, \eta\bar{\zeta}, \zeta\bar{\xi}, \zeta\bar{\eta}, \zeta\bar{\zeta}.$$

Пример:

$$(\xi\bar{\eta})f(s, \bar{s}) = -i\bar{s}f(-s, -\bar{s}).$$

Все они являются эрмитовыми, и с их помощью может быть построен любой эрмитов оператор с $N=4$.

Эти операторы образуют специальное представление клиффордовых чисел (см. стр. 28). В качестве основных антикоммутирующих элементов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ можно взять, например, любые четыре элемента из числа следующих: $\xi, \zeta, \eta\bar{\xi}, \eta\bar{\eta}, \eta\bar{\zeta}$.

Если воспользоваться *одним* индексом, обозначив:

$$f(1, 1) = \psi_1, \quad f(1, -1) = \psi_2, \quad f(-1, 1) = \psi_3, \quad f(-1, -1) = \psi_4,$$

то преобразования, выполняемые рассматриваемыми операторами, могут быть представлены с помощью следующей таблицы.

Клиффор- довы числа	Матричное представление				Спинорные операторы	Обозначения		Гиперком- плексные векторы (стр. 238)
						Дирак	Маделунг (3-е изд.)	
1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	1	1	1	
γ_1	$-i\psi_4$	$-i\psi_3$	$i\psi_2$	$i\psi_1$	$\eta\bar{\xi}$	$\beta = \alpha_4 = \rho_3$	α_0	h_x h_y h_z
γ_2	$-\psi_4$	ψ_3	ψ_2	$-\psi_1$	$\eta\bar{\eta}$			
γ_3	$-i\psi_3$	$i\psi_4$	$i\psi_1$	$-i\psi_2$	$\eta\bar{\zeta}$			
γ_4	ψ_1	ψ_2	$-\psi_3$	$-\psi_4$	ζ			
γ_{23}	$i\psi_2$	$i\psi_1$	$i\psi_4$	$i\psi_3$	$i\bar{\xi}$	$i\alpha_1$	$i\alpha_1$ $i\alpha_2$ $i\alpha_3$	is_x is_y is_z
γ_{31}	ψ_2	$-\psi_1$	ψ_4	$-\psi_3$	$i\bar{\eta}$	$i\alpha_2$		
γ_{12}	$i\psi_1$	$-i\psi_2$	$i\psi_3$	$-i\psi_4$	$i\bar{\zeta}$	$i\alpha_3$		
γ_{14}	$i\psi_3$	$i\psi_4$	$i\psi_2$	$-i\psi_1$	$i\bar{\xi}\bar{\xi}$	$i\alpha_1$		
γ_{24}	ψ_3	$-\psi_4$	ψ_2	$-\psi_1$	$i\bar{\eta}\bar{\eta}$	$i\alpha_2$		
γ_{34}	$i\psi_3$	$-i\psi_4$	$i\psi_1$	$-i\psi_2$	$i\bar{\zeta}\bar{\zeta}$	$i\alpha_3$		
γ_{234}	$i\psi_2$	$i\psi_1$	$-i\psi_4$	$-i\psi_3$	$i\bar{\xi}\bar{\eta}$	$i\rho_2$	τ	
γ_{314}	ψ_2	$-\psi_1$	$-\psi_4$	ψ_3	$i\bar{\zeta}\bar{\eta}$			
γ_{124}	$i\psi_1$	$-i\psi_2$	$-i\psi_3$	$i\psi_4$	$i\bar{\xi}\bar{\zeta}$			
γ_{123}	ψ_3	ψ_4	$-\psi_1$	$-\psi_2$	$i\bar{\eta}$			
γ_{1234}	$-\psi_3$	$-\psi_4$	$-\psi_1$	$-\psi_2$	$-\xi$	$-\rho_1$		

Самосопряженными являются лишь операторы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_{1234}$; остальные становятся таковыми только после умножения на i .

b) Обзор дальнейших элементарных линейных операторов

<p>Оператор:</p> $b_i = \sum_{k=1}^n T_{ik} a_k$ $b(x) = \int_a^{\beta} T(x, t) a(t) dt$	<p>Соответствующие</p> <p>матрица: T_{ik}</p> <p>ядро: $T(x, t)$</p>	<p>Замечания:</p> <p>для дискретных последовательностей a и b</p> <p>для плотных последовательностей a и b</p>
<p>1. Единичный оператор E</p> $b_i = a_i$ $b(x) = a(x)$	$E_{ik} = \delta_{ik}$ $E(x, t) = \delta(x - t)$	
<p>2. Оператор умножения M</p> $b_i = m_i a_i$ $b(x) = m(x) a(x)$	$M_{ik} = m_i \delta_{ik}$ $M(x, t) = m(x) \delta(x - t)$	$M_{ik} = M_{ki}$; диагональная матрица $M(x, t) = M(t, x)$
<p>3. Оператор сдвига V</p> $b_i = a_{i+s}$ $b(x) = a(x + \sigma)$	$V_{ik} = \delta_{i+s, k}$ $V(x, t) = \delta(x + \sigma - t)$	<p>Без краевых условий не определен при $t + s > n$ или < 1 соответственно, при $x + \sigma > \beta$ или $< a$ (см. стр. 45)</p>
<p>4. Оператор дифференцирования D</p> $b_i = a_i - a_{i-1}$ $b(x) = \frac{da(x)}{dx}$	$D_{ik} = \delta_{ik} - \delta_{i-1, k}$ $D(x, t) = \delta'(x - t)$	<p>Без краевых условий не определен при $i = 1$</p> $D(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - t)$ $= -\frac{\partial}{\partial t} \delta(x - t)$
<p>5. Оператор интегрирования I</p> $b_i = \sum_{k=1}^i a_k$ $b(x) = \int_a^x a(t) dt$	$I_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } k \leq i \\ 0 & \text{при } k > i \end{cases}$ $I(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq x \\ 0 & \text{при } t > x \end{cases}$	

<p>6. Проекционный оператор P</p> $b_i = a_i \sum_{k=1}^n \beta_k a_k$ $b(x) = a(x) \int_{\alpha}^{\beta} \beta(t) a(t) dt$	$P_{ik} = a_i \beta_k$ $P(x, t) = a(x) \beta(t)$	<p>Сингулярен</p> $P^2 = (\alpha, \beta) P$ <p>идемпотентен при $(\alpha, \beta) = 1$</p>
<p>7. Оператор перестановки Π</p>	<p>Π_{ik} в каждой строке и в каждом столбце содержит одну единицу, прочие элементы равны нулю</p>	<p>Определен только для конечных n</p>
<p>8. Унитарный оператор S</p> $S^\dagger = S^{-1}$	$\sum_i S_{ik}^* S_{il} = \delta_{kl}$ $\int S^*(t, x') S(t, x'') dt = \delta(x' - x'')$	<p>Представим в виде</p> $S = e^{iA}, \text{ где } A = A^\dagger$
<p>9. Оператор Фурье F</p> $F^\dagger = F^{-1}$	$F_{kl} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i \frac{kl}{n}}$ $F(x, t) = e^{2\pi i x t}$	<p>Частный случай операторов 8; комплексный оператор (ср. стр. 192 и Приложение 3, стр. 570)</p>
<p>10. Инфинитезимальный оператор O</p> $O = B + \epsilon A, \text{ где } \epsilon \ll 1$	$O_{ik} = \delta_{ik} + \epsilon A_{ik}$ $O(x, t) = \delta(x - t) + \epsilon A(x, t)$	<p>Унитарен при $A = -A^\dagger$</p>

7. Дифференциальные операторы

Операторы сдвига и дифференцирования для своего полного определения требуют, помимо формального описания их матриц или ядер, дальнейших указаний относительно того, каким образом мыслится продолжение последовательности a_k , соответственно $a(x)$, за пределы областей $1 \rightarrow n$, соответственно $\alpha \rightarrow \beta$. Без таких дополнительных условий невозможно, например, обращение этих операторов.

Примерами таких продолжений, среди многих возможных, могут служить:

1. $a_{n+l} = c_1, a_{n-l} = c_2$ (например, $c_1 = c_2 = 0$).
2. $a_{n+l} = a_n + lc_1, a_{n-l} = a_n - lc_2$.
3. $a_{n+l} = a_l$ (периодичность или цикличность).
4. $a_{n+l} = a_{n-l}$ (отражение).

Аналогичные условия необходимо налагать и на плотные последовательности. В таких случаях говорят о *краевых условиях*, которым должны удовлетворять функция $a(x)$ и ее производные на границе области.

Дифференциальный оператор $D = \frac{d}{dx}$ требует *одного* краевого условия (см. стр. 54), $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ — *двух* и т. д. Оператор D кососимметричен:

$\bar{D} = -D$; операторы D^2 и iD являются поэтому самосопряженными.

Оператор сдвига V (см. стр. 44) можно, положив $V = e^{\alpha D}$, представить в виде дифференциального оператора, если воспользоваться разложением Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x + \alpha) &= e^{\alpha D} f(x) = \left\{ 1 + \alpha D + \frac{\alpha^2}{2!} D^2 + \dots \right\} f(x) = \\ &= f(x) + \alpha \frac{df(x)}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots \end{aligned}$$

8. Преобразования

Уравнение вида $a' = Sa$ может рассматриваться как линейное преобразование, т. е. как такое соответствие между векторами или функциями a и им соответствующими a' , при котором все *линейные* соотношения, связывающие элементы одной системы, сохраняются. Например, из $a + b = c$ следует, что $a' + b' = c'$. Вообще линейное соотношение $b = Ta$ при указанном преобразовании переходит в $b' = T'a'$, где $T' = STS^{-1}$. Если соотношения высшего порядка также остаются неизменными (инвариантными), т. е. если, например, из $(a*b) = 1$ следует, что $(a'*b') = 1$, то должно быть

$$(S*a*Sb) = (a*\bar{S}*Sb) = (a*b)$$

и, следовательно, $S^*S = E$. Такое преобразование называется *унитарным*, а в действительной области — также *ортогональным*. Оно может быть формально построено с помощью любого самосопряженного оператора $A = A^\dagger$, если положить

$$S = e^{iA} = E + iA - \frac{A^2}{2!} - i \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad S^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} = S^{-1}.$$

При унитарном преобразовании каждая ортогональная нормированная система переходит снова в некоторую ортогональную нормированную систему.

9. Собственные значения и собственные решения

Задача отыскания вектора или функции u из уравнения

$$Tu = \lambda u,$$

где T — данный оператор, называется *задачей о собственных значениях*. Она разрешима лишь для некоторых $\lambda = \lambda_j$, называемых *собственными значениями* оператора T . Решения u_j уравнения

$$Tu_j = \lambda_j u_j$$

называются *собственными решениями* (собственными векторами, собственными функциями), соответствующими λ_j . Они образуют ν_j -мерную совокупность, т. е. подпространство n -мерного векторного или функционального пространства — так называемое *собственное подпространство*, соответствующее собственному значению λ_j . λ_j называется в этом случае ν_j -кратным или $(\nu_j - 1)$ -кратно вырожденным. Имеем: $\sum \nu_j = n$.

В каждом собственном подпространстве можно выбрать ν_j линейно независимых u_{jr} ($r = 1, 2, \dots, \nu_j$) и с их помощью представить любое u_j в виде $u_j = \sum_r c_{jr} u_{jr}$. Удобнее всего выбирать эти u_{jr} так, чтобы они образовывали ортогональную нормированную систему: $(u_{jr}^*, u_{j'r'}) = \delta_{rr'}$.

Если T — самосопряженный оператор, то числа λ_j все являются действительными, а собственные подпространства — взаимно ортогональными: $(u_j^*, u_{j'}) = 0$ при $j \neq j'$. Тогда все u_{jr} образуют полную ортогональную нормированную систему: $(u_{jr}^*, u_{j'r'}) = \delta_{jj'} \delta_{rr'}$. Они могут быть перенумерованы попорядку при помощи *одного* индекса k и обозначены через u_k ($k = 1, 2, \dots, n$), $(u_k^*, u_{k'}) = \delta_{kk'}$; при этом некоторые из λ_k могут быть равны между собой.

Оператор T полностью определяется заданием полной системы его собственных значений и собственных решений. Если хотя бы одно из λ_j равно нулю, то оператор является сингулярным.

Имеет место следующее представление (при $T^\dagger = T$):

$$Ta = \sum_k \lambda_k \mu_k (u_k^*, a);$$

вообще

$$T^m a = \sum_k \lambda_k^m \mu_k (u_k^*, a),$$

так что имеем также

$$T^{-1} a = \sum_k \frac{\mu_k (u_k^*, a)}{\lambda_k}.$$

Для ядра самосопряженного интегрального оператора справедливо равенство

$$T(x, t) = \sum_k \lambda_k \mu_k(x) u_k^*(t) \text{ (билинейное разложение),}$$

и, в частности,

$$E(x, t) = \delta(x - t) = \sum_k u_k(x) u_k^*(t).$$

Оператор T' , полученный из оператора T с помощью преобразования $T' = STS^{-1}$, имеет те же самые λ_j , что и T . Таким образом, собственные значения являются инвариантами такого преобразования.

Два оператора, имеющие одни и те же собственные решения, являются перестановочными. Для двух перестановочных операторов можно при помощи надлежащего выбора (см. выше) образовать совпадающие системы собственных решений. Поэтому задача отыскания собственных решений оператора T облегчается, если известны собственные решения какого-либо оператора T' , перестановочного с T , ибо в каждом ν' -мерном собственном подпространстве оператора T' должны лежать также ν' собственных решений¹⁾ оператора T . Тем самым получается одновременно классификация собственных решений T по собственным значениям T' .

10. Операторные уравнения

Часто встречается следующая задача: найти вектор (или функцию) u из уравнения $Tu = f$. Формальным решением служит $u = T^{-1}f$.

Если T представляет собой дифференциальный оператор D , то уравнение $Du = f$ называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением. Если D^{-1} (при заданных краевых условиях!) можно представить в виде интегрального оператора I , так что $u = If$, то ядро оператора I называется соответствующей функцией Грина.

Что касается методов решения, то часто используют самосопряженные операторы D и I в следующих нормальных формах, содержащих параметр λ :

$$Du - \lambda u = g \text{ для дифференциальных уравнений,}$$

$$u - \lambda Iu = f \text{ для интегральных уравнений.}$$

Эти уравнения являются эквивалентными, если $I = D^{-1}$ и $g = Df$. Их формальными решениями служат ряды

$$u = - \left\{ \frac{g}{\lambda} + \frac{Dg}{\lambda^2} + \frac{D^2g}{\lambda^3} + \dots \right\},$$

$$u = f + \lambda If + \lambda^2 I^2f + \dots \text{ (ряд Неймана).}$$

Этими решениями можно пользоваться, если ряды сходятся или обрываются.

Если собственные значения λ_i и собственные решения u_i оператора $D = I^{-1}$ известны, то решения могут быть записаны также

¹⁾ Линейно независимых. (Прим. ред.)

в форме

$$u = \sum_i \frac{u_i (gu_i^*)}{\lambda_i - \lambda},$$

соответственно,

$$u = \sum_i \frac{u_i \lambda_i (fu_i^*)}{\lambda_i - \lambda} = f + \lambda \sum_i \frac{u_i (fu_i^*)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Эти формулы утрачивают силу, если λ равно одному из λ_i и при этом (gu_i^*) (соответственно (fu_i^*)) отлично от нуля. Если же (при $\lambda = \lambda_i$) эти выражения равны нулю, то множитель при u_i остается неопределенным.

11. Представление операторов матрицами

Если две функции $a(x)$ и $b(x)$, связанные соотношением $b = Ta$, заданы своими разложениями по некоторой ортогональной системе φ_i

$$a(x) = \sum_i a_i \varphi_i(x); \quad b(x) = \sum_i b_i \varphi_i(x),$$

то будем иметь

$$b_i = \int_a^b \varphi_i^*(x) T \left(\sum_k a_k \varphi_k(x) \right) dx = \sum_k \int_a^b \varphi_i^*(x) T \varphi_k(x) dx \cdot a_k = \sum_k T_{ik} a_k,$$

где

$$T_{ik} = \int_a^b \varphi_i^*(x) T \varphi_k(x) dx.$$

Числа T_{ik} образуют матрицу, представляющую оператор T в системе φ_i . Вид матрицы зависит от выбора этой системы.

Алгебра матриц изоморфна алгебре операторов, представляемых ими.

Если для представления оператора T выбрана система его собственных функций, то элементы представляющей его матрицы будут иметь вид

$$T_{ik} = \lambda_i \delta_{ik},$$

где λ_i — собственные значения оператора. Такая матрица называется *диагональной*.

Для ядра $T(x, t)$ оператора имеют место соотношения

$$T_{ik} = \iint \varphi_i^*(x) T(x, t) \varphi_k(t) dx dt$$

и

$$T(x, t) = \sum_{ik} \varphi_i(x) T_{ik} \varphi_k^*(t).$$

Если при помощи унитарного преобразования $\varphi'_i = S \varphi_i$ совершается переход к другому представлению, то новая матрица имеет вид

$$T'_{ik} = \int \varphi_i^*(x) S^i T S \varphi_k(x) dx = (S^i T S)_{ik}.$$

Если для представления выбирается континуальная ортогональная система $\varphi(s, x)$ с условием $\int \varphi^*(s, x) \varphi(s, x') ds = \delta(x - x')$, то получается снова некоторый интегральный оператор:

$$a(x) = \int \alpha(s) \varphi(s, x) ds, \quad b(x) = \int \beta(s) \varphi(s, x) ds,$$

$$\beta(s) = \int \alpha(s') T(s, s') ds', \quad \text{где } T(s, s') = \int \varphi^*(s, x) T\varphi(s', x) dx.$$

В то же время

$$b(x) = \int T(x, x') a(x') dx', \quad \text{где } T(x, x') = \int \varphi^*(s, x') T\varphi(s, x) ds,$$

причем T действует на x , но не на s .

Взяв, в частности, $\varphi(s, x) = \delta(s - x)$, получим очевидную формулу

$$T(x, x') = \int \delta(s - x') T\delta(s - x) ds = T\delta(x' - x).$$

12. Многопараметрические операторы

Линейное соответствие $b = Ta$ между двумя двупараметрическими последовательностями $\{b_{ik}\}$ и $\{a_{ik}\}$ может быть представлено в матричной форме

$$b_{ik} = \sum_{l,r} T_{ik,lr} a_{lr}.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем интегральное представление вида

$$b(x, y) = \iint ds dt T(x, y; s, t) a(s, t),$$

а также смешанную формулу

$$b_i(x) = \int \sum_k T_{ik}(x, t) a_k(t) dt.$$

Эти операторы могут быть разложены в произведение двух операторов, каждый из которых действует только на один параметр, например:

$$b_{ik} = \sum_{l,r} T'_{il} T''_{kr} a_{lr}$$

или

$$b_i(x) = \int \sum_k T'_{ik} T''(x, t) a_k(t) dt$$

и т. д. Большая сложность этих конструкций требует особенно четкой и разработанной символики.

Аналогичные образы могут быть легко построены и в пространстве размерности $N > 2$. Здесь N переменных x_k , на которые дейст-

вуют операторы, можно рассматривать как компоненты вектора ξ и писать

$$b(\xi) = Ta(\xi),$$

так что

$$b(\xi) = \int T(\xi, \xi') a(\xi') d\xi' \quad (\text{интеграл в } \xi\text{-пространстве}).$$

Примерами могут служить:

1) Единичный оператор E , допускающий представление в виде интегрального оператора с ядром

$$E(\xi, \xi') = \delta(\xi - \xi') = \prod_k \delta(x_k - x'_k).$$

В двух измерениях справедливо следующее представление:

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon}{(\sqrt{(\xi - \xi')^2 + \epsilon^2})^3} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln |\xi - \xi'|,$$

в трех измерениях — такое:

$$\delta(\xi - \xi') = \int d\nu_k e^{2\pi i(x - x', \nu)} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\xi - \xi'|} \quad (\Delta = \text{div grad}).$$

2) Тензорные операторы векторного исчисления (см. стр. 243).

3) Дифференциальные операторы (с краевыми условиями), например:

$$T = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

4) Векторные операторы с компонентами T_k , например дифференциальный оператор «градиент»:

$$T_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

13. Симметризирующий оператор

Если собственному значению λ оператора T соответствуют несколько собственных функций $\varphi(\xi)$ и существует невырожденное преобразование $\xi' = \mathfrak{A}\xi$ такое, что для каждой собственной функции, соответствующей значению λ :

$$T\varphi(\xi) = \lambda\varphi(\xi),$$

также и $\varphi(\xi') = \varphi(\mathfrak{A}\xi)$ является собственной функцией:

$$T\varphi(\mathfrak{A}\xi) = \lambda\varphi(\mathfrak{A}\xi),$$

то существует линейный оператор Λ_A , определяемый равенством

$$\Lambda_A f(\xi) = f(\mathfrak{A}\xi) = \int f(\xi'') \delta(\xi'' - \mathfrak{A}\xi) d\xi''$$

для любых функций $f(x)$, удовлетворяющих краевым условиям оператора T .

Оператор

$$\Lambda_A = e^{(x-r, \text{grad})}$$

называется *симметризирующим оператором* для T .

Имеет место равенство

$$(T\Lambda_A - \Lambda_A T)\varphi(x) = 0,$$

т. е. Λ_A и T имеют общее собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ . (Операторы Λ_A и T являются перестановочными только *в этом* подпространстве, но *не вообще*.)

Если λ для оператора T служит h -кратным собственным значением и функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$ образуют полную систему соответствующих собственных функций, то оператор Λ_A может быть представлен с помощью матрицы a_{ik} , причем

$$\Lambda_A \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^h a_{ik} \varphi_i(x).$$

Эта матрица a_{ik} называется *h-мерным представлением* оператора Λ_A (см. стр. 293).

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Производной $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ по ее параметру x называется функция от x , определяемая следующим образом:

$$y' \equiv f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right).$$

Неопределенным интегралом для функции $f(x)$ называется совокупность функций $F(x)$, определяемых условием $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, что записывается в форме

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

с неопределенной постоянной C .

Определенный интеграл от $f(x)$ по интервалу с границами α и β определяется и обозначается следующим образом:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \right) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Тем самым

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(s) ds + F(\alpha) = - \int_x^{\beta} f(s) ds + F(\beta),$$

т. е. $F(x)$ есть функция верхнего или нижнего предела определенного интеграла, содержащего отличную от x переменную интегрирования s .

Итерированная операция дифференцирования $\frac{d}{dx}$ приводит к высшим производным, обозначаемым через f'' , f''' , ..., $f^{(n)}$ или через

$$\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \dots, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Для итерированной операции интегрирования не существует общепринятого соответствующего символа; все же можно писать в таких случаях $f^{(-n)}(x)$.

Дифференцирование *многопараметрической* функции по одному из ее параметров при условии, что остальные остаются постоянными, приводит к понятию *частной* производной. Частные производные обозначаются через

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, \dots) \text{ и т. д.}$$

Если параметры не выписаны, то часто возникает необходимость указать, какие из них считаются постоянными. При этом применяются такие формы записи, как

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y,z}.$$

Операторы дифференцирования и интегрирования. Операции дифференцирования и интегрирования можно представить с помощью линейных операторов D и I : $Df(x) = \frac{d}{dx} f(x)$, $If(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$. Оператор D является сингулярным и не имеет однозначно определенного обратного оператора D^{-1} . Только при введении дополнительного краевого условия $f(\alpha) = 0$ можно определить D^{-1} равенством $D^{-1} = I$, так что $DI = ID = 1$.

Оператор $I^n = D^{-n}$ с помощью равенства

$$I^n f(x) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt = \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$$

может быть представлен в виде интегрального оператора с ядром, исчезающим при $t < \alpha$ и $t > x$. Эта формула позволяет разумным образом определить I^n также для *нецелых* значений n ; например, будем иметь:

$$I^{-1/2} f(x) = D^{1/2} f(x) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^{-3/2}}{\Gamma(-3/2)} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

В. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Произведения и частные

Пусть

$$u = u(x), \quad v = v(x),$$

т. е. пусть u и v — функции переменной x . Штрихом будем обозначать дифференцирование: $u' = \frac{du}{dx}$. Тогда справедливы следующие

правила:

$$(uv)' = vu' + uv'; \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{u}{v} \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right);$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \dots + uv^{(n)}.$$

Логарифмическое дифференцирование: $\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{y'}{y}$ (логарифмическая производная).

$$y = \frac{uv \dots}{w \dots}; \quad y' = y \frac{d(\ln y)}{dx} = y \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \dots - \frac{w'}{w} - \dots \right);$$

$$y = u^v; \quad \frac{d}{dx}(u^v) = u^v (v \ln u)' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

2. Функции от функций

a) $y = y(u), \quad u = u(x).$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (\text{«цепное правило»}); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2u}{dx^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{du^2} \cdot 3 \cdot \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dy}{du} \frac{d^3u}{dx^3}.$$

b) $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad y = y(u) = y(x_1, x_2, x_3, \dots).$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial y}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial(y, u)}{\partial(x_i, x_k)} = 0 \quad \text{для всех } i, k.$$

Обратно, обращение в нуль всех этих определителей является условием того, чтобы y представляло собой функцию от u .

3. Обратные функции

a) $y = y(x), \quad x = x(y), \quad \frac{dx}{dy} \neq 0.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}; \quad \frac{d^2y}{dx^3} = -\frac{3 \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy} \frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

b) $u = u(x, y), \quad v = v(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \dots, \quad D \neq 0.$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v_y}{D}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u_y}{D}; \quad D = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v_x}{D}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{D};$$

4. Неявные функции

$$f(x, y, z, \dots) = 0, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.$$

5. Параметрическое задание функций

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi' \neq 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\varphi'^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\varphi'^2\psi'''' - 3\varphi'\varphi''\psi''' + 3\varphi'\varphi''^2 - \varphi''^2\psi''}{\varphi'^5}.$$

Если t здесь представляет собой длину дуги s , т. е. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то будем иметь:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{-y'y''}{(1+y'^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

6. Полный дифференциал

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$ называется *полным дифференциалом* функции φ .

Выражение $d\varphi = \sum_i f_i(x_1, x_2, x_3, \dots) dx_i$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots)$, и, следовательно, $f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ в том и только в том случае, когда для всех i и k выполнены соотношения $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$.

7. Введение новых переменных

а) $\varphi = \varphi(x, y)$; требуется ввести вместо y новую переменную $z = z(x, y)$.

$\varphi(x, y)$ при этом переходит в $\Phi(x, y) = \Phi(x, z(x, y))$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

б) $\varphi = \varphi(x, y)$; новые переменные: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.
 $\varphi(x, y)$ при этом переходит в $\Phi(u(x, y), v(x, y))$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

в) $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$;
 $i, k = 1, 2, \dots, n$.

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переходят в $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тогда

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i; \quad dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_k.$$

Следовательно,

$$d\Phi = \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_k = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} dy_k,$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

Применяя другой способ записи, для случаев а) и б) получим формулы:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_z + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_x \cdot \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_x \cdot \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_x,$$

соответственно

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|_v \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_y + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_u \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_y; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|_v \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_x + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_u \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_x.$$

Если рассматривать величины φ, x, y, u, v как равноправные, а именно, считать каждую из них функцией двух из остальных, и обозначить их в произвольном порядке через $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, то получатся следующие общие формулы:

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right|_\gamma \cdot \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_\gamma = 1; \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right|_\gamma \cdot \left. \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \right|_\alpha \cdot \left. \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right|_\beta = -1,$$

$$\frac{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right|_\delta}{\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \right|_\delta} = \frac{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \right|_\delta}{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right|_\delta} = - \frac{\left. \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \right|_\gamma}{\left. \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \right|_\gamma}.$$

8. Целые рациональные функции r -й степени от n переменных

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i, k, l, \dots} \alpha_{ikl \dots} x_i x_k x_l \dots$$

с r индексами i, k, l, \dots , каждый из которых пробегает значения от 1 до n , r множителями x_i, x_k, x_l, \dots и r коэффициентами $\alpha_{ikl \dots}$.

Например, при $r = 3$:

$$\varphi = \alpha_{111} x_1^3 + \alpha_{112} x_1^2 x_2 + \dots + \alpha_{122} x_1 x_2^2 + \dots$$

Дифференцирование по одной из переменных:

$$r=1: \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_i \alpha_i x_i = \alpha_s,$$

$$r=2: \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_{i,k} \alpha_{ik} x_i x_k = \sum_i (\alpha_{si} + \alpha_{is}) x_i,$$

$$r=3: \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_{i,k,l} \alpha_{ikl} x_i x_k x_l = \sum_{i,k} (\alpha_{sik} + \alpha_{isk} + \alpha_{iks}) x_i x_k,$$

и аналогично для ббльших значений r .

Имеет место *теорема Эйлера*:

$$\sum_s x_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = r\varphi.$$

Она справедлива вообще для произвольных однородных функций, т. е. в случае, когда $\varphi(kx_1, kx_2, kx_3, \dots) = k^r \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots)$, причем r не обязательно должно быть целым положительным.

9. Дифференцирование интегралов

а) По одному из пределов интегрирования:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = - \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = f(x).$$

б) По параметру: в каждом интервале $\alpha \leq x \leq \beta$, в котором $f(x, t)$ при $a \leq t \leq b$ непрерывно дифференцируема, справедливо равенство

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Если интеграл несобственный, то, кроме того, оба интеграла $\int_a^b f(x, t) dt$ и $\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$ в интервале $\alpha \leq x \leq \beta$ должны равномерно сходиться.

с) По пределу интегрирования и параметру (условия применимости см. в п. б)):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, t) dt = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt;$$

более общая формула имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt = \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \varphi'(x) f(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Если $f(x, t)$ в верхнем пределе интегрирования имеет особенность, то часто бывает выгодно ввести вместо t новую переменную, притом

такую, чтобы пределы интегрирования стали постоянными (случай б)).
С помощью подстановки $s = \frac{t-a}{x-a}$, $0 \leq s \leq 1$, получается полезная формула

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, t) dt = \frac{1}{x-a} \int_a^x \left((x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (t-a) \frac{\partial f}{\partial t} + f \right) dt.$$

С. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

См. также формулы для arccos, arctg и т. д. на стр. 122 и след.

$\frac{dF}{dx} = f(x)$	$F(x) = \int_a^x f(t) dt$	$\frac{dF}{dx} = f(x)$	$F(x) = \int_a^x f(t) dt$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{Incos} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x$	$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$	$\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{\cos x} = \operatorname{sec} x$	$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\sin x \cos x}$	$\ln \operatorname{tg} x$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$(x+a)^b$	$\frac{1}{b+1} (x+a)^{b+1}$ при $b \neq -1$
$\operatorname{cth} x$	$\ln \operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\operatorname{Ar sh} \frac{x}{a} =$ $= \pm \ln \left(\pm \frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right)$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln(x+a)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\operatorname{Arch} \frac{x}{a} =$ $= \pm \ln \left(\frac{x}{a} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\left. \begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{a} = \\ = -\arccos \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$	$\frac{1}{x \sqrt{x^2-a^2}}$	$\operatorname{arcsec} \frac{x}{a} = \arccos \frac{a}{x}$
$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\left. \begin{array}{l} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \\ = -\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$		

$\frac{dF}{dx} = f(x)$	$F(x) = \int f(t) dt$
$\frac{a}{a^2 - x^2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arth } \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x}; \text{ действительно при действительном } x, x < a \\ \text{Arcth } \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a}; \text{ действительно при действительном } x, x > a > 0 \end{array} \right.$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} a^2 \text{Arsh } \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$-\frac{1}{2} a^2 \text{Arch } \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2}$
$\frac{1}{x^2 + 2bx + c}$	$-\frac{1}{2} a^2 \arccos \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$
$\frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}} \ln \frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}} \text{ при } c < b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \text{arctg} \left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \right) \text{ при } c > b^2 \end{array} \right.$
$\frac{Ax + B}{(x^2 + 2bx + c)^n}$	
$\frac{1}{(1+x^2)^n}$	$\frac{1}{x_1 - x_2} \{ (Ax_1 + B) \ln(x - x_1) - (Ax_2 + B) \ln(x - x_2) \}$
$\frac{1}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}$	$\frac{-A}{2(n-1)(x^2 + 2bx + c)^{n-1}} - \frac{Ab - B}{(c - b^2)^{n-1/2}} \int \frac{du}{(1+u^2)^n}$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$	$u = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}, \quad c > b^2$
$\frac{1}{\sqrt{-ax^2 + 2bx + c}}$	$\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \text{ при } n \neq 1$
$\sin^m x (m \neq 0)$	$\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$
$\cos^m x (m \neq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(b + ax + \sqrt{a} \sqrt{ax^2 + 2bx + c}) \text{ при } a > 0;$
$\text{tg}^m x (m \neq 1)$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax - b}{\sqrt{b^2 + ac}} \text{ при } a > 0; \quad b^2 - ac \neq 0$
	$-\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx$
	$\frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$
	$\frac{1}{m-1} \text{tg}^{m-1} x - \int \text{tg}^{m-2} x dx$

$\frac{dF}{dx} = f(x)$	$F(x) = \int^x f(t) dt$
$\operatorname{ctg}^m x \ (m \neq 1)$	$-\frac{1}{m-1} \operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x dx$
$\left. \begin{array}{l} \sin^m x \cos^n x \\ (m+n \neq 0) \end{array} \right\}$	$-\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-1} x \cos^n x dx$
	$\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$
$\frac{1}{\sin^n x} \ (n \neq 1)$	$-\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$
$\frac{1}{\cos^n x} \ (n \neq 1)$	$\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$
$\frac{\sin^m x}{\cos^n x} \ (n \neq 1)$	$\frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x}$
$\frac{\cos^m x}{\sin^n x} \ (n \neq 1)$	$-\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2} x}$

Д. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Общие замечания

Если для подынтегральных функций $f_i(x)$ можно в вышеприведенной таблице найти интегралы $F_i(x)$, то, руководствуясь следующими правилами, можно найти интегралы $F(x)$, соответствующие и некоторым другим функциям $f(x)$.

Подынтегральная функция $f(x)$	Интеграл $F(x) = \int^x f(t) dt$
$f_1 + f_2$	$F_1 + F_2$ (теорема сложения)
$\frac{f}{a}$	$\frac{F}{a}$
f'	$F' = f$
$f(u) u'$	$F(u) \ (u = u(x))$ (см. «цепное правило», стр. 55)
$f(ax)$	$\frac{1}{a} F(ax)$
$f_1 f_2 + f_2 f_1$	$F_1 F_2$
$f_1 f_2$	$F_1 F_2 - \int f_2 F_1 dx$ (интегрирование по частям; применимо только в случае непрерывности f_2)
f	$xf - \int xf' dx$
$f(x)$	$\int f(x(u)) h(u) du$ (интегрирование подстановкой $x = x(u), u = u(x),$ $\frac{dx}{du} = h(u)$)
$f(\varphi(x))$	$\int f(\varphi(u)) h(u) du \ \varphi(x) = \varphi(u), \frac{dx}{du} = h(u)$

Метод подстановки выгодно применять к рациональным функциям $R(\varphi(x))$ от функции $\varphi(x)$, не являющейся рациональной. Здесь часто удается, подходящим образом подбирая функцию $u(x)$, свести интеграл $F(x)$ к интегралу от рациональной функции, например,

$$\int R(\sin x) dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}, \quad \text{где } u = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

или

$$\int \frac{R(x) dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \int R\left(\frac{u^2 - \gamma}{2(u\sqrt{\alpha} + \beta)}\right) \frac{du}{u\sqrt{\alpha} + \beta}, \quad \text{где } x = \frac{u^2 - \gamma}{2(u\sqrt{\alpha} + \beta)}.$$

Сводка таких подстановок приведена в таблице на стр. 63.

2. Рациональные функции; разложение на простейшие дроби

Каждая рациональная функция $R(x)$ (см. стр. 114) допускает разложение: $R(x) = F(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, где $F(x)$, $\varphi(x)$ и $f(x)$ являются целыми рациональными функциями, причем степень $\varphi(x)$ выше степени $f(x)$. Выражение $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ всегда может быть представлено в виде суммы простейших дробей, которые без труда интегрируются.

а) Если корни уравнения $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$ все различны, то

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}, \quad \text{где } A_i = \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)}.$$

б) Если уравнение $f(x) = 0$ имеет кратные корни, а именно α корней, равных x_1 , β корней, равных x_2 , и т. д., то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv & \frac{A_1}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x - x_1} + \\ & + \frac{B_1}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \dots; \end{aligned}$$

A_i, B_i, \dots находят путем сравнения коэффициентов.

Полагая, например, $f(x) \equiv (x - x_1)^\alpha f_1(x)$, получаем для определения A_i следующие α уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= A_1 f_1(x_1), \\ \varphi'(x_1) &= A_1 f_1'(x_1) + A_2 f_1(x_1), \\ \varphi''(x_1) &= A_1 f_1''(x_1) + 2A_2 f_1'(x_1) + 2A_3 f_1(x_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

или в общем виде:

$$\varphi^{(k)}(x_1) = \sum_{\nu=0}^k \frac{k}{(k-\nu)!} A_{\nu+1} f_1^{(k-\nu)}(x_1), \quad k = 0, 1, \dots, \alpha - 1.$$

Некоторые специальные подстановки

Подинтегральная функция	$u(x)$	$\varphi(x) = \psi(u)$	$h(u) = \frac{dx}{du}$
$R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}$	$\frac{2}{1+u^2}$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x)$	$\operatorname{th} \frac{x}{2}$	$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \operatorname{th} x = \frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{2}{1-u^2}$
$R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x, \operatorname{tg} x)$	$\operatorname{tg} x$	$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \sin x \cos x = \frac{u}{1+u^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$
$R(\operatorname{sh}^2 x, \operatorname{ch}^2 x, \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x)$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{sh}^2 x = \frac{u^2}{1-u^2}, \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-u^2}, \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{u}{1-u^2}$	$\frac{1}{1-u^2}$
$R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$	$\sqrt{cx+d}$	$x = \frac{u^2-d}{c}$	$\frac{2u}{c}$
$R(x, \sqrt{1+x^2})$	$x + \sqrt{x^2+1}$	$x = \frac{u^2-1}{2u}, \sqrt{1+x^2} = \frac{1+u^2}{2u}$	$\frac{1+u^2}{2u^2}$
$R(x, \sqrt{1-x^2})$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sqrt{1-x^2} = \frac{2u}{1+u^2}$	$-\frac{4u}{(1+u^2)^2}$
$R(x, \sqrt{x^2-1})$	$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \sqrt{x^2-1} = \frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{4u}{(1-u^2)^2}$
$R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$	$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$x = -\frac{d \cdot u^n - b}{c \cdot u^n - a}$	$-\frac{n(ad-bc)}{(cu^n-a)^2} u^{n-1}$
$R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$	$\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$	$x = \frac{u \sqrt{ac-b^2} - b}{a}, \sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{u^2+1} \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}$	$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ действительны при действительных значениях x , то простейшие дроби, соответствующие комплексным корням уравнения $f(x)=0$, всегда можно попарно сгруппировать так, чтобы при этом получались действительные члены. Пусть, например, $x_1 = u_1 + iv_1$, $x_2 = x_1^* = u_1 - iv_1$; тогда

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{A^*}{x - x_2} = \frac{Px + Q}{(x - u_1)^2 + v_1^2}.$$

Е. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Методы вычисления

Упомянем, среди прочих, следующие способы вычисления:

1) при помощи известного неопределенного интеграла $F(x)$ функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a);$$

2) при помощи преобразования (подстановки):

$$\int_a^b f(\varphi(x)) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) h'(u) du, \quad u = \varphi(x), \quad x = h(u);$$

частные случаи:

$$\int_a^b f(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{aa}^{ab} f(u) du,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{d-c} \int_c^d f\left(\frac{(ad-bc) + u(b-a)}{d-c}\right) du$$

(сдвиг пределов интегрирования);

3) посредством интегрирования «в комплексном» (см. стр. 107);

4) вычисление интеграла как функции пределов интегрирования и, возможно, параметра:

$$\int_a^b f(x, t) dx = g(a, b, t),$$

например, из дифференциального уравнения для g , в котором роль независимого переменного играет одна из величин a, b, t, \dots ;

5) посредством разложения подынтегральной функции в ряд с последующим почленным его интегрированием; оба предела интегрирования должны при этом лежать внутри области сходимости ряда.

В двойных интегралах вида

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y)$$

вычисляют сначала внутренний интеграл $\int_c^d dy f(x, y) = g(x, c, d)$,

рассматривая при этом x как постоянный параметр; c и d могут быть как постоянными, так и функциями от x . После этого интегрируют по x . Аналогично поступают и с более чем двукратными интегралами (например, с объемными интегралами).

При постоянных пределах интегрирования часто бывает полезна перемена порядка интегрирования. В частности, справедлива следующая формула:

$$\int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) = \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y).$$

Эта формула допускает обобщение.

Часто бывает полезно также преобразование (замена переменных)

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n).$$

При этом получаем:

$$\begin{aligned} \iint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \iint_{G'} \dots \int f_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)} dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n, \end{aligned}$$

Последний интеграл распространен на область G' , в которую переходит данная область G при выполненном преобразовании (отображении), причем подынтегральная функция должна быть умножена на определитель преобразования

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)} \quad (\text{см. стр. 185}).$$

¹⁾ Здесь подразумевается, что определитель преобразования в рассматриваемой области не меняет знака и что ориентации областей G и G' согласованы; $f_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \equiv f(x_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \dots, x_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_n))$. (Прим. ред.)

2. Оценки

Если в интервале $a < x < b$ выполнено неравенство $f(x) < g(x)$, то отсюда следует:

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

Если в интервале $a < x < b$ (соответственно при интегрировании в комплексной области, на пути интегрирования C , имеющем длину L) выполняется неравенство $|f(x)| < M$, то имеем:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < M(b-a), \text{ соответственно } \left| \int_C f(z) dz \right| < ML.$$

Неравенство Шварца (см. стр. 32) также может быть применено для получения оценок.

3. Приближение интегралов суммами (см. также стр. 76 и 81)

Пусть интервал $a \leq x \leq b$ разделен на n равных частей, длина каждой из которых равна h : $b - a = nh$; положим $f(a + kh) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, и пусть ξ, ξ' — некоторые числа, заключенные между a и b : $a < \xi < b$, $a < \xi' < b$. Тогда имеют место:

формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) - R_n,$$

$$R_n = \frac{nh^3}{12} f''(\xi),$$

формула Симпсона (n четное)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) - R'_n,$$

$$R'_n = \frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\xi').$$

Если кривая обращена выпуклостью в одну сторону, то для ошибки D имеем оценку

$$D \leq h(y_0 - 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 + \dots - 2y_{n-1} + y_n).$$

4. Некоторые формулы¹⁾

а) Интегралы с постоянными параметрами, т. е. *константы*, представленные в виде определенных интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} = \frac{\pi}{2} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt = \frac{1 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} \, dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos at}{t^2} \, dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \left(\frac{at}{2} \right)}{\left(\frac{at}{2} \right)} \right)^2 d \left(\frac{at}{2} \right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at}{t} \, dt = \infty;$$

$$\int_0^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \int_0^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n (m, n = 0, \pm 1, \dots), \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^n} \, dt = \frac{1}{n} \Gamma \left(\frac{1}{n} \right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{3/2} t \, dt = \frac{1}{6 \sqrt{2\pi}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right);$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1/3} t \, dt = \frac{1}{2\pi \sqrt{3} \sqrt[3]{2}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{3} \right);$$

¹⁾ Большое собрание определенных интегралов можно найти в книге D. Bierens de Haan, *Nouvelles tables d'intégrales définies*, Leiden, 1867; новое изд., 1957. (См. также Рыжик И. М. и Градштейн И. С., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. 3-е, М.-Л., 1951.) (*Прим. ред.*)

$$\int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{3}} t dt = \frac{\sqrt{3}}{\pi \sqrt[3]{4}} \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right);$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} t dt = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

б) Интегралы с переменными параметрами, т. е. *функции*, представленные в виде определенных интегралов (в случаях, когда параметры могут принимать комплексные значения, иногда даются ссылки на последующие главы):

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-yt} dt = \frac{1}{y^{x+1}} \Gamma(x+1) = \frac{1}{y^{x+1}} \Pi(x) \quad \text{при } \operatorname{Re} x > -1$$

(при $y=1$ — гамма-функция, или интеграл Эйлера, см. стр. 151);

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{1}{y^{n+1}} n! \quad \text{для целых } n \geq 0;$$

$$\int_0^{\infty} t^y e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2} x^{-\frac{y+1}{2}} \Gamma\left(\frac{y+1}{2}\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{y+1}{2}} \Pi\left(\frac{y-1}{2}\right), \quad \text{при } \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > -1;$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-xt^2} dt &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} x^{n+1/2}} \\ \int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-xt^2} dt &= \frac{n!}{2x^{n+1}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при } x > 0 \text{ и целом } n \geq 0 \\ \text{(см. интеграл ошибок, стр. 86);} \end{array}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 t^2 - \frac{y^2}{t^2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} e^{-2xy} \quad (x, y > 0);$$

$$\int_0^1 t^x (1-t)^y dt = \int_0^{\infty} e^{-(x+1)t} (1-e^{-t})^y dt = 2 \int_0^1 t^{2x+1} (1-t^2)^y dt,$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1} t \cos^{2y+1} t dt = B(x, y) = \frac{\Pi(x) \Pi(y)}{\Pi(x+y+1)},$$

при $\operatorname{Re} x > -1, \operatorname{Re} y > -1$

(формула Эйлера; $B(x, y)$ называется также бета-функцией);

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{y+1}} dt = \frac{\Pi(x-1)\Pi(y-x)}{\Pi(y)} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} \operatorname{Re} x > 0, & \operatorname{Re} y > -1, \\ \operatorname{Re}(y-x) > -1; \end{matrix}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \Pi(x-1)\Pi(-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{при} \quad 0 < \operatorname{Re} x < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \{e^{-x} \operatorname{Ei}(x) - e^x \operatorname{Ei}(-x)\} \quad (\text{см. стр. 87});$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+x \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1) \quad (\text{см. ниже});$$

$$\int_0^1 \frac{t^x}{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt}}{e^t-1} dt = C + \Psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x+m} \right) \quad (\operatorname{Re} x > 0).$$

Здесь $C = 0,577216$ здесь обозначена эйлерова постоянная (см. стр. 87) и

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} (\ln \Pi(x)).$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^t-1} dt = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} = n! \zeta(n+1) \quad (n \text{ целое } > 0),$$

$\zeta(z)$ — риманова дзета-функция;

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^t+1} dt = n! (1-2^{-n}) \zeta(n+1) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} + \dots$$

$(n \text{ целое } > 0);$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+x \cos t)^n} = G_n(x) \quad (|x| < 1),$$

при этом

$$G_1(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad G_n(x) = G_{n-1}(x) + \frac{x}{n-1} G'_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad n > 1;$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(1+x \cos t) dt = 2\pi \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} \right) \quad (|x| < 1).$$

Другие определенные интегралы, которые, подобно только что приведенным, служат для определения функций, читатель найдет на стр. 134 (полиномы Лежандра), стр. 136 (присоединенные сферические функции), стр. 148—149 (цилиндрические функции), стр. 151 (гамма-функция).

Важным вспомогательным средством для вычисления определенных интегралов является интегральная теорема Коши из теории функций, см. стр. 102.

5. Несобственные функции,

представимые при помощи определенных интегралов:

- а) *дельта-функция* $\delta(x-t)$ (см. стр. 35),
 б) *функция Дирихле*

$$\Delta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt \cos yt}{t} dt.$$

В точках, расположенных на прямых $y = \pm x$, имеем $\Delta(x, y) = \pm \frac{\pi}{4}$, в прочих же точках $\Delta(x, y)$ равна либо 0, либо $\pm \pi/2$. Значения,

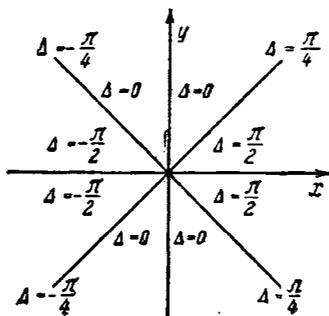


Рис. 2. Функция Дирихле.

принимаемые функцией $\Delta(x, y)$ в различных октантах x, y -плоскости, показаны на рис. 2.

При $y=0$, в частности, получается функция

$$\Delta(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt.$$

Эта функция связана с δ -функцией следующей зависимостью:

$$\Delta(x) = \pi \int_{-\infty}^x \delta(t) dt - \frac{\pi}{2}$$

или (чисто формально!): $\frac{d}{dx} \Delta(x) = \pi \delta(x)$.

6. Эллиптические интегралы

Интегралы вида

$$V = \int R(t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + \dots + a_4}) dt$$

в случае, когда R представляет собой рациональную функцию и уравнение $a_0 x^4 + a_1 x^3 + \dots + a_4 = 0$ не имеет кратных корней, называются *эллиптическими интегралами*. Они могут быть приведены при помощи действительных преобразований к некоторым нормальным формам.

Прежде всего устраняют нечетные степени переменной.

а) При помощи действительной линейной подстановки $t = \frac{au + b}{u + 1}$ (a и b действительны) достигают того, что действительные, соответственно комплексные, корни стоящего под радикалом полинома располагаются на действительной, соответственно мнимой, оси симметрично относительно точки 0. Интеграл принимает вид

$$V = \int R_1(u, \sqrt{\pm(u^2 - p)(u^2 - q)}) du = \int R_1(u, W) du,$$

где p и q — действительные числа.

б) $R_1(u, W)$ записывают в форме

$$\frac{M_1(u^2, W) + uN_1(u^2, W)}{M(u^2, W) + uN(u^2, W)}$$

и затем, умножая числитель и знаменатель на $(M - uN)$ и производя почленное деление, приводят к виду $P(u^2, W) + uQ(u^2, W)$; здесь M_1, N_1, M, N — полиномы, P и Q — рациональные функции. Интеграл $\int Q(u^2, W) u du$ вычисляется элементарно при помощи подстановки $u^2 = v$, в то время как $P(u^2, W)$ (ввиду того, что W^2 рационально) может быть подобно тому, как это было показано выше, представлено в форме

$$P(u^2, W) = \frac{K_1(u^2) + WL_1(u^2)}{K(u^2) + WL(u^2)} = \Phi_1(u^2) + W\Phi_2(u^2) = \Phi_1(u^2) + \frac{\Phi(u^2)}{W},$$

где Φ_1, Φ_2, Φ — рациональные функции. Интеграл $\int \Phi_1(u^2) du$ вычисляется элементарно.

Интеграл $\int \frac{\Phi(u^2)}{W} du$ при помощи подстановки, вводящей вместо u новую переменную x , приводят к виду

$$A \int \frac{\Phi(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1).$$

Подстановка имеет различный вид, зависящий от вида W ; случаи, которые могут встретиться в действительной области, собраны в таблице на стр. 72—73. Так как преобразование будет действительным

W^2 ($\lambda^2 < \mu^2$)	$k^2 < 1$	$ A $	u^2	u^2 при		$\frac{x^2 \lambda^2 - \lambda^2 + \mu^2}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - 1}}$	$\frac{x^2 \lambda^2 - \lambda^2 + \mu^2}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - 1}}$
				$x^2 = 0$	$x^2 = 1$		
$+(u^2 - \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\lambda^2}{\mu^2}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	∞	λ^2	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$
$+(u^2 - \lambda^2)(u^2 + \mu^2)$	$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\mu^2}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{1}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	λ^2	∞	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$
$+(u^2 + \lambda^2)(u^2 - \mu^2)$	$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\mu^2}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{1}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	∞	μ^2	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$	$\frac{\lambda^2 \mu^2 x^2 - \lambda^2 x^2}{\mu^2 (1 - x^2)}$

$\frac{x(x^2x^2n - (x^2 + x^2)/\Lambda)}{(x^2 + x^2)^{n^2} \sqrt{\frac{x^2x^2 - 1}{x^2n}}}$	x^2	0	$\frac{x^2x^2x^2 - (x^2 + x^2)x^2}{(x^2 - 1)^2 x^2}$	$\frac{x^2x^2 + x^2n}{1}$	$\frac{x^2x^2 + x^2n}{x^2}$	$(x^2 - x^2n)(x^2 + x^2n) -$
$\frac{x(x^2x^2x^2 - (x^2 + x^2)/\Lambda)}{(x^2 + x^2)^{n^2} \sqrt{\frac{x^2x^2 - 1}{x^2n}}}$	x^2	0	$\frac{x^2x^2x^2 - (x^2 + x^2)x^2}{(x^2 - 1)^2 x^2}$	$\frac{x^2x^2 + x^2n}{1}$	$\frac{x^2x^2 + x^2n}{x^2}$	$(x^2 - x^2n)(x^2 - x^2n) -$
$\frac{x(x^2x^2x^2 - (x^2 + x^2)/\Lambda)}{(x^2 + x^2)^{n^2} \sqrt{\frac{x^2x^2 - 1}{x^2n}}}$	x^2	x^2	$\frac{x^2x^2x^2 - (x^2 + x^2)x^2}{x^2x^2x^2 - x^2n}$	$\frac{x^2x^2 - 1}{x^2x^2x^2}$	$\frac{x^2x^2 - 1}{x^2x^2x^2}$	$(x^2 + x^2n)(x^2 + x^2n) +$

только при $x^2 < 1$, то в различных областях изменения переменной u следует применять различные подстановки.

Числовой параметр k ($k^2 < 1$, $\lambda^2 < \mu^2$) называется модулем Лежандра. Разложение рациональной функции $A\Phi(u^2) = \Omega(x^2)$ на простейшие дроби приводит к интегралам $\int \frac{x^{2n} dx}{X}$ и $\int \frac{dx}{(x^2+c)^m X}$, где $X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$.

$\int \frac{x^{2n} dx}{X}$ при помощи рекуррентной формулы

$$k^2(2n-1) \int \frac{x^{2n} dx}{X} - (2n-2)(1+k^2) \int \frac{x^{2n-2} dx}{X} + \\ + (2n-3) \int \frac{x^{2n-4} dx}{X} = x^{2n-1} X$$

приводится к лежандровой нормальной форме интегралов 1-го и 2-го рода; $\int \frac{dx}{(x^2+c)^m X}$ при помощи аналогичной формулы приводится к нормальным формам интегралов 1-го и 3-го рода (см. также раздел «Функции», стр. 155).

Ф. КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Пусть дана функция $f(x)$; образуем для фиксированного значения x следующие выражения:

1. $\frac{1}{h} \bar{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
2. $\frac{1}{h} \underline{\Delta} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{-h}$,
3. $\frac{1}{h} \Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \left(\Delta = \frac{1}{2} (\bar{\Delta} + \underline{\Delta}) \right)$.

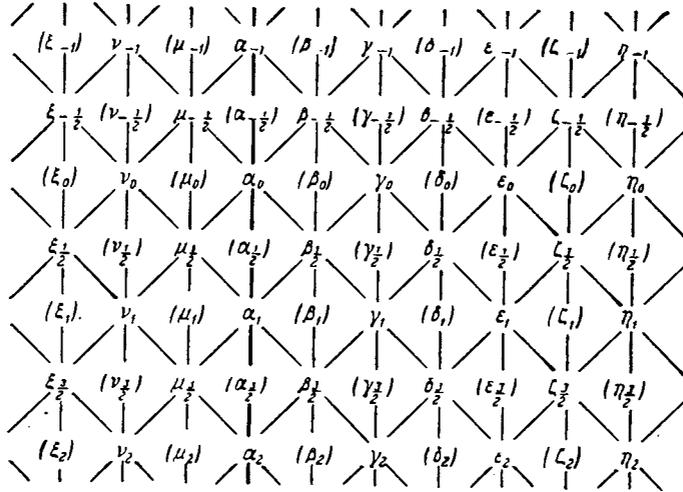
Эти величины называются соответственно *верхним*, *нижним* и *средним разностным отношением*, полученным с помощью приращения h независимой переменной. При предельном переходе $h \rightarrow 0$ каждое из этих выражений для дифференцируемых функций переходит в производную $\frac{df(x)}{dx}$.

Аналогично определим разностное отношение второго порядка:

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (\Delta^2 = \bar{\Delta} - \underline{\Delta}).$$

Разностные отношения более высокого порядка строятся аналогичным путем.

Если функция $f(x)$ задана при помощи таблицы с постоянным шагом h , то разностные отношения, умноженные на соответствующие степени h (т. е. Δ^n), могут быть вычислены при помощи вычитания в соответствии со следующей схемой:



В этой схеме в местах, обозначенных через α_n (n целое), мы записываем значения $f(x + nh)$. Затем в каждом из мест, обозначенных через $\beta_{n+1/2}$, записываем разность между стоящими слева ниже и слева выше α_{n+1} и α_n , т. е. $\beta_{n+1/2} = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Аналогично вычисляем γ_n из соотношения $\gamma_n = \beta_{n+1/2} - \beta_{n-1/2}$ и таким же образом поступаем с δ , ϵ и т. д. После того, как эти вычисления будут закончены, у нас еще будут отсутствовать значения $\alpha_{n+1/2}$, β_n , $\gamma_{n+1/2}$, ... заключенные на схеме в скобки; каждое из этих значений находится как среднее арифметическое двух чисел, расположенных над и под ним, например $\beta_n = \frac{1}{2}(\beta_{n+1/2} + \beta_{n-1/2})$. Стоящие справа от α_n в той же строке β_n , γ_n и т. д. суть умноженные на соответствующие степени h (средние) разностные отношения в точке $x + nh$.

Схему можно продолжить также влево, для чего необходимо в одном из мест $\mu_{n+1/2}$ предварительно написать произвольное число, например 0, после чего остальные $\mu_{n+1/2}$ вычисляются так, чтобы было $\mu_{n+1/2} - \mu_{n-1/2} = \alpha_n$, т. е., иными словами, каждое следующее значение μ находится посредством сложения значения α_n , расположенного правее и выше искомого μ , с предыдущим значением μ . Таким же образом поступаем со столбцами, где стоят ν , ξ и т. д. Значения,

заклученные в скобки, находим, как выше, образуя средние арифметические чисел того же столбца, соседних с искомым. Стоящие в схеме слева от жирной черты числа μ , ν , ξ , ... называются значениями первой, второй, ... суммирующих функций.

Связь между разностными отношениями и производными. Формула Тейлора (см. стр. 84) дает возможность непосредственно выразить разностные отношения как линейные функции производных, после чего они могут быть вычислены. Такое вычисление имеет, однако, второстепенное значение по сравнению с обратной задачей — по данным разностным отношениям вычислить производные. Решая систему линейных уравнений, получаем:

$$h \frac{d}{dx} f(x + nh) = \beta_n - \frac{1}{6} \delta_n + \frac{1}{30} \zeta_n - \dots,$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x + nh) = \gamma_n - \frac{1}{12} \varepsilon_n + \frac{1}{90} \eta_n - \dots,$$

соответственно,

$$h \frac{d}{dx} f\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right) h\right) = \beta_{n+1/2} - \frac{1}{24} \delta_{n+1/2} + \frac{3}{640} \zeta_{n+1/2} - \dots,$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right) h\right) = \gamma_{n+1/2} - \frac{5}{24} \varepsilon_{n+1/2} + \frac{259}{5760} \eta_{n+1/2} - \dots$$

Эти формулы, таким образом, делают возможным *численное дифференцирование* функции, заданной табличным способом. Подобно этому можно получить линейные

Соотношения между суммирующими функциями и интегралами, которые имеют следующий вид (см. также формулу суммирования Эйлера, стр. 81):

$$\frac{1}{h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\mu_n - \frac{1}{12} \beta_n + \frac{11}{720} \delta_n - \frac{191}{69480} \zeta_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2},$$

$$\frac{1}{h^2} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} dx \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\nu_n + \frac{1}{12} \alpha_n - \frac{1}{240} \gamma_n + \frac{31}{60480} \varepsilon_n - \dots \right]_{n_1}^{n_2},$$

$$\frac{1}{h^3} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} dx \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} dx \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\xi_n + \frac{1}{240} \beta_n - \frac{31}{30240} \delta_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2}.$$

Эти формулы бывают полезны при решении часто встречающейся в практике задачи *численного интегрирования*.

Разностную схему можно с выгодой применить также и для целей, которые ставит перед собой

Интерполяция. Предположим, что ищется значение $f(x + (n + t)h)$ ($0 < t < 1$). Сначала вычисляем величины

$$A = t, \quad B = \frac{1}{2}(t - 1), \quad C = \frac{1}{3}(t + 1), \quad D = \frac{1}{4}(t - 2),$$

$$E = \frac{1}{5}(t + 2), \quad \dots,$$

после чего получаем:

$$f(x + (n + t)h) = \alpha_n + AI; \quad \begin{aligned} I &= \beta_{n+1/2} + BII, \\ II &= \gamma_n + CIII, \\ III &= \delta_{n+1/2} + DIV, \\ IV &= \varepsilon_n + EV, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f(x + (n - t)h) = \alpha_n - AI, \quad \begin{aligned} I &= \beta_{n-1/2} - BII, \\ II &= \gamma_n - CIII, \\ III &= \delta_{n-1/2} - DIV, \\ IV &= \varepsilon_n - EV, \\ &\dots \end{aligned}$$

Уменьшение шага таблицы.

1) вдвое ($t = \frac{1}{2}$):

$$f\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right) = \alpha_{n+1/2} - \frac{1}{8}\gamma_{n+1/2} + \frac{3}{128}\varepsilon_{n+1/2} - \frac{5}{1024}\eta_{n+1/2} + \dots,$$

2) в пять раз ($t = \frac{k}{5}$):

$$f\left(x + \left(n + \frac{k}{5}\right)h\right) = \alpha_{n+1/2} + B_k\beta_{n+1/2} + C_k\gamma_{n+1/2} + \dots,$$

	B	C	D	E	F
k = 1	- 0,3	- 0,08	+ 0,008	0,0224	+ 0,00864 ...
2	- 0,1	- 0,12	+ 0,004	0,0144	+ 0,00448 ...
3	+ 0,1	- 0,12	- 0,004	0,0144	- 0,00448 ...
4	+ 0,3	- 0,08	- 0,008	0,0224	- 0,00864 ...

3) в десять раз $\left(t = \frac{k}{10}\right)$:

здесь можно рекомендовать вычислить для каждого интервала более тесную разностную схему, принимая в качестве исходных значений

$$\begin{aligned}\alpha'_0 &= \alpha_0, \\ \beta'_{1/2} &= 0,1\beta_{1/2} - 0,045\gamma_{1/2} + 0,006\delta_{1/2} - \dots, \\ \gamma'_1 &= 0,01\gamma_{1/2} - 0,004\delta_{1/2} + \dots, \\ \delta'_{3/2} &= 0,001\delta_{1/2} - \dots,\end{aligned}$$

так что $\alpha'_{10} = \alpha_1$.

Какое число этих членов следует удерживать, зависит от степени точности, которой желательно достичь. За дальнейшими подробностями следует обратиться к справочной литературе по численным методам анализа.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ РЯДЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ

А. РЯДЫ

1. Общие сведения

Формально построенная сумма $S = u_1 + u_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ бесконечного множества действительных или комплексных чисел u_1, u_2, \dots (или функций $u_1(z), u_2(z), \dots$) называется *рядом*. Если $s_n = \sum_{h=1}^n u_h = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (n -я *частичная сумма*) при $n \rightarrow \infty$ имеет определенный конечный предел s , то ряд S называется *сходящимся*, в противном же случае — *расходящимся*. s называется *суммой* ряда, $s - s_n = r_n$ называется (n -м) *остатком* ряда.

Сходимость. Для сходимости ряда S необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа ε (которое может быть выбрано произвольно малым) существовало число $N(\varepsilon)$ такое, чтобы неравенство

$$|r_n| = |s - s_n| < \varepsilon \text{ было справедливо для любого } n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

или чтобы было

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \text{ для каждой пары } m, n, \text{ где } m > N(\varepsilon), n > N(\varepsilon). \quad (2)$$

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд S ; в этом случае он называется *абсолютно сходящимся*. В противном случае он (при условии его сходимости) называется *условно сходящимся*. Только в случае абсолютной сходимости сумма s ряда S не будет зависеть от порядка его членов.

Функциональные ряды. Функциональный ряд $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется *равномерно сходящимся* в замкнутой области G комплексной z -плоскости (соответственно в действительном интервале $a \leq z \leq b$), если существует *не зависящее от z* число $N(\varepsilon)$ такое, что (1) или (2) выполнено для всех z , принадлежащих области G .

Равномерно сходящийся в замкнутой области G

а) ряд непрерывных (аналитических) функций переменного z представляет в области G непрерывную (аналитическую) функцию,

β) ряд интегрируемых функций допускает в области G почленное интегрирование:

$$\int_G \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} u_h(t) \right\} dt = \sum_{h=1}^{\infty} \int_G u_h(t) dt,$$

γ) ряд функций, являющихся в области G z -плоскости регулярными аналитическими, может быть в этой области почленно продифференцирован какое угодно число раз:

$$\frac{d^k}{dz^k} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} f_h(z), \quad k = 1, 2, \dots^1).$$

2. Признаки сходимости

Изменение величин конечного числа членов ряда не отражается на его сходимости.

а) Ряд $S = \sum_{h=1}^{\infty} u_h$ сходится *абсолютно*, если существует положительное число $a < 1$ такое, что

$$\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right| \leq a < 1 \quad \left. \vphantom{\left| \frac{u_{h+1}}{u_h} \right|} \right\} \begin{array}{l} \text{справедливо для всех достаточно} \\ \text{больших } h, \text{ т. е. для всех } h > H \end{array} \quad (3)$$

$$\text{или } \sqrt[h]{|u_h|} \leq a < 1 \quad \left. \vphantom{\sqrt[h]{|u_h|}} \right\} \begin{array}{l} (H — \text{положительное число}). \end{array} \quad (4)$$

Вообще: ряд $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ сходится абсолютно, если существует сходящийся ряд, членами которого служат положительные числа a_h , причем

$$a_h \geq |u_h| \quad \text{для всех } h > H \quad (H — \text{положительное число}). \quad (5)$$

б) Функциональный ряд $S(z) = \sum_{h=1}^{\infty} u_h(z)$ *равномерно сходится* в каждой замкнутой области G , в которой выполнены (3), (4) или (5) с H , не зависящим от z .

в) Ряд с членами, попеременно положительными и отрицательными, сходится, если абсолютные величины членов монотонно $\rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Для остатка ряда всегда имеем: $|r_h| \leq |u_{h+1}|$.

г) Сходимость или расходимость ряда может быть часто установлена при помощи сравнения с интегралом: если, например, $|f(x)|$ монотонно убывает при $x > m$, то имеем

$$\left| \sum_{h=m+1}^n f(h) \right| \leq \sum_{h=m+1}^n |f(h)| \leq \int_m^n |f(t)| dt \quad \text{для всех } n > m$$

и ряд $\sum_{h=1}^{\infty} f(h)$ абсолютно сходится, если $\int_m^{\infty} |f(t)| dt$ существует.

¹⁾ Если G — действительный интервал $a \leq z \leq b$, то нужна еще равномерная сходимость в G ряда производных. (Прим. ред.)

3. Суммы некоторых рядов

Для целей практики часто бывает весьма важно уметь выразить сумму ряда либо при помощи функции, значения которой легко вычисляются, либо при помощи функции, для которой имеются таблицы (см. также стр. 83—84 и формулы на стр. 85 и след.).

а) Встречающиеся в дальнейшем числа Бернулли B_k являются коэффициентами степенного ряда

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h x^h}{h!};$$

имеем:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_{2k+1} &= 0 \text{ для } k=1, 2, \dots, \\ B_4 &= \frac{-1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= \frac{-1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, \\ B_{12} &= \frac{-691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= \frac{-3617}{510}, & \dots \end{aligned}$$

(B_{2k} обозначается часто через B_k). Относительно оценок см. (7) и (8).

б) Конечные ряды.

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ при } x \neq 1 \text{ (геометрический ряд)}, \\ 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p &= \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1} \text{ для } p=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Последняя формула представляет собой символически записанное вычислительное правило: следует выполнить разложение по формуле бинома (стр. 85) и заменить все B^k числами Бернулли B_k . При помощи этого способа можно, в частности, получить формулы

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{1}{2} n(n+1), \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими производными всех встречающихся порядков, то имеет место *формула суммирования Эйлера*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m f(k) &= \int_0^m f(t) dt + \frac{1}{2} (f(0) + f(m)) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(0)] + \frac{m B_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta m), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m, n=1, 2, \dots$ и $0 < \theta < 1$.

Если $f(k)$ зависит еще от непрерывно изменяющегося параметра x , то (6) дает, вообще говоря, полусходящееся разложение (см. стр. 84).

с) Бесконечные ряды.

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1.$$

$$\text{Ряд } 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) \quad (7)$$

называется *римановой ζ -функцией*. При x целом и четном, $x = 2n$, этот ряд связан с числами Бернулли:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Отсюда, в частности, получаем:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \quad \text{и т. д.}$$

Вообще при помощи формулы Эйлера (6) при $m \rightarrow \infty$ часто можно найти выражение для суммы бесконечного ряда, имеющего вид

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, или, по крайней мере, приближенно вычислить ее.

d) Многие ряды могут быть истолкованы как воссоздающие функцию по ее особенностям, например:

$$\begin{aligned} \pi \operatorname{ctg} \pi x &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k} \right) = \\ &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2}, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2} = \frac{\pi}{2x} \operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{2x^2}.$$

В. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ

Предварительное замечание: факты, установленные в пп. 1—4 для случая одного переменного, остаются в силе, если заменить соответственно x через x_1, x_2, \dots, x_n , t — через t_1, t_2, \dots, t_n , dt — через $dt_1 dt_2 \dots dt_n$ и рассматривать основную область G как некоторую область $x_1 \dots x_n$ -пространства.

1. Представление произвольной функции при помощи известных функций

а) Задача *возможно более хорошего* представления функции $f(x)$, определенной для всех значений x некоторой области G (например, $a \leq x \leq b$) посредством линейной комбинации известных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, может быть решена:

1) При помощи *аппроксимации* с n как-либо выбранными φ_ν , выражением вида $F_n(x) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x)$; коэффициенты c_ν определяются так, чтобы отклонение $F_n(x)$ от $f(x)$ было в области G возможно малым (см. также б)).

2) При помощи *разложения в ряд* по некоторой *упорядоченной* системе, состоящей из бесконечного множества функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$; коэффициенты c_1, c_2, \dots определяются так, чтобы частичная сумма $S_n(x) = \sum_{h=1}^n c_h \varphi_h(x)$, образованная с помощью n *первых* функций, для достаточно больших n отклонялась от $f(x)$ в области G сколь угодно мало (см. также б)).

б) Понятие приближенного представления функции $f(x)$, *мало отклоняющегося* от нее, уточняется большей частью одним из следующих способов:

1. (в смысле метода наименьших квадратов): интеграл

$$\int_G \left| f(t) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(t) \right|^2 dt$$

должен иметь возможно меньшее значение (*аппроксимация в среднем*, соответственно *сходимость в среднем*),

2. (в «чебышевском смысле»): величина

$$\max_{x \in G} \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right|$$

должна быть возможно меньше (*равномерная аппроксимация*, соответственно *равномерная сходимость*),

3. (для рядов):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right) = 0$$

для всех x , принадлежащих области G (*сходимость ряда в обычном смысле*).

Если область G конечна, то равномерная аппроксимация является в то же время и аппроксимацией в среднем. Достаточно рассматривать

лишь конечные области, ибо области, простирающиеся в бесконечность, могут быть преобразованы в конечные.

с) Полнота. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ называется *полной* в области G , если любая функция, непрерывная в области G , может быть с их помощью со сколь угодно высокой степенью точности аппроксимирована в среднем, т. е. если для любого положительного ε можно найти такое n , что будем иметь:

$$\int_G \left| f(t) - \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(t) \right|^2 dt < \varepsilon.$$

д) Для представления функций используются преимущественно (но не исключительно):

а) *степени* $1, x, x^2, x^3, \dots$, соответственно $1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, \dots$ или $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ и т. д. (для нескольких переменных $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}, k_v = 1, 2, \dots$ и т. д.);

б) полные системы *ортогональных функций*.

е) Ряды, используемые лишь для *приближенного вычисления значений функции*, не обязательно должны сходиться; достаточно, если остаточный член разложения $R_n(x)$ для *некоторой* частичной суммы $F_n(x)$ станет достаточно малым. Если $|R_n(x)|$ при фиксированном x и возрастающем n сначала убывает, а затем стремится к бесконечности, то разложение называется *полусходящимся*. Достижимая степень точности, хотя и является ограниченной, часто бывает достаточной, и полусходящееся разложение может поэтому оказаться более ценным, чем сходящийся ряд. Ряды со специальным свойством: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = 0$

для всех n , называются *асимптотическими рядами* и служат для вычисления значений функции при больших значениях аргумента (см. также формулу (6) на стр. 81).

2. Разложение функций в степенные ряды

а) Формула Тейлора. Если функция $f(z)$ в области G комплексной z -плоскости, содержащей точку $z=a$, имеет непрерывные производные до $f^{(n+1)}(z)$ включительно, то имеет место равенство

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

где остаточный член имеет вид

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(z-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

В частности, при $a=0$ получается формула Маклорена

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta z).$$

Область сходимости получаемого с помощью этих формул разложения функции в степенной ряд зависит от расположения особых точек функции (см. также стр. 103).

б) Разложения некоторых элементарных функций¹⁾. (Рядом с каждым разложением в скобках указана область сходимости.)

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k \quad (|x| < 1),$$

p может принимать любые, в том числе комплексные значения. Эта формула называется *биномиальной* формулой. Относительно коэффициентов $\binom{p}{1}$ разложения см. стр. 182 и Приложение 16 (стр. 591). Важным частным случаем является геометрический ряд (см. также стр. 81)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1).$$

Показательная функция и родственные функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n \quad (\text{для всех конечных } x);$$

остаточный член $|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!}$ при $|x| \leq \frac{n+1}{2}$. В частности:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828 \dots;$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots \quad (\text{для всех конечных } x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

(для всех конечных x);

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(для всех конечных x);

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) (-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

¹⁾ В формулах пунктов б) и с) x считается комплексным. (Прим. ред.)

$$\begin{aligned}
 x \operatorname{ctg} x &= 1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 - \frac{2}{945} x^6 - \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < \pi); \\
 x \operatorname{cth} x &= 1 + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 + \frac{2}{945} x^6 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < \pi); \\
 \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| \leq 1, x \neq -1); \\
 \operatorname{Ar} \operatorname{th} x &= \operatorname{Ar} \operatorname{cth} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \\
 &\quad (|x| \leq 1; x \neq \pm 1); \\
 \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| \leq 1); \\
 \arctg x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (|x| \leq 1; x \neq \pm i).
 \end{aligned}$$

с) Разложения неэлементарных функций. Нижеследующие разложения внутри областей сходимости могут быть приняты за определения соответствующих функций. Другие определения можно найти на стр. 114 и след.; функции, рассматриваемые там подробно, здесь только перечислены.

Гауссов интеграл ошибок и родственные функции (стр. 68):

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots$$

(для всех конечных x).

Интегралы Френеля

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt = S(x) = \\
 &= \frac{x}{1!3} - \frac{x^3}{3!7} + \frac{x^5}{5!11} - \dots, \\
 \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt = C(x) = \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2!5} + \frac{x^4}{4!9} - \frac{x^6}{6!13} + \dots
 \end{aligned} \right\} \text{(для всех конечных } x\text{).}$$

$$\frac{\sqrt{2\pi x}}{2e^{-\frac{x}{2}}} \left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1 \cdot 3}{x^2} - \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(-1)^n x^n} + R_n,$$

при этом $|R_n| < \frac{1}{|x|^{n+1}}$ (разложение полусходящееся, применяется для больших значений x , см. 1е).

Интегральная показательная функция и родственные функции:

$$\begin{aligned} \text{Ei}(x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \\ &= C + \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots \text{ (для всех } x \neq 0), \end{aligned}$$

где

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,577216\dots$$

(эйлерова постоянная, см. также стр. 153).

Интегральный синус:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \text{ (для всех } x).$$

Интегральный косинус:

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x) &= - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \\ &= C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots \text{ (для всех } x \neq 0). \end{aligned}$$

Сферические функции см. стр. 132.

Функции Чебышева см. стр. 138.

Функции Лагерра см. стр. 142.

Функции Эрмита см. стр. 144.

Цилиндрические функции см. стр. 146.

Гамма-функция см. стр. 151.

Эллиптические функции см. стр. 156; определение k см. также стр. 155.

$$\begin{aligned} \text{sn } x &= x - (1 + k^2) \frac{x^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{x^5}{5!} - \\ &\quad - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{x^7}{7!} + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{cn } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{x^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\text{dn } x = 1 - k^2 \frac{x^2}{2!} + k^2(4 + k^2) \frac{x^4}{4!} - k^2(16 + 44k^2 + k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots$$

В квантовой статистике встречаются следующие интегралы:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} dt}{e^{x+t} \pm 1} = e^{-x} + (\mp 1) \frac{e^{-2x}}{2^{3/2}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{e^{-kx}}{k^{3/2}}$$

(при $\operatorname{Re} x > 0$),

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{3/2} dt}{e^{x+t} \pm 1} = e^{-x} + (\mp 1) \frac{e^{-2x}}{2^{5/2}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{e^{-kx}}{k^{5/2}}$$

(при $\operatorname{Re} x > 0$),

$$\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{t^p dt}{e^{-x+t} + 1} = x^{p+1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{\Gamma(p-2k+1) x^{2k}} \right\} + R(x, p),$$

при этом

$$|R(x, p)| \leq e^{-x}$$

и

$$c_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2k}} = \frac{(2^{2k-1} - 1) \pi^{2k} B_{2k} (-1)^{k+1}}{(2k)!} = (1 - 2^{1-2k}) \zeta(2k).$$

В частности, $c_2 = \frac{\pi^2}{12} \cdot B_{2k}$ — числа Бернулли, см. стр. 81; $\zeta(2k)$ — риманова дзета-функция, см. стр. 82.

3. Ортогональные системы функций

а) Определения. Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию А, если $\Phi(x)$ в области G непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек (в случае нескольких переменных — по каждому переменному при произвольных принадлежащих G фиксированных значениях остальных переменных), и если интегралы $\int_G |\Phi(t)| dt$ и $\int_G |\Phi(t)|^2 dt$ существуют.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие условию А, называются *взаимно ортогональными* в области G (см. стр. 32), если их скалярное произведение равно нулю:

$$(f^*, g) = \int f^*(t) g(t) dt = 0.$$

Последовательность функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m \neq 0$, из которых каждая ортогональна ко всем остальным, называется *ортогональной системой функций*, короче, *ортогональной системой* в области G . Если всегда $(\varphi_m^*, \varphi_m) = 1$, то ортогональная система называется *нормированной*. Система $\phi_m(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{(\varphi_m^*, \varphi_m)}}$ нормирована.

Если для некоторой системы $\chi_1(x), \chi_2(x), \dots$ справедливы равенства

$$\int_G \rho(t) \chi_m^*(t) \chi_n(t) dt = 0 \quad \text{при } m \neq n,$$

где $\rho(x)$ — функция, действительная и неотрицательная в области G , то $\chi_n(x)$ образуют ортогональную систему с весовой функцией (или просто *весом*) $\rho(x)$. Функции $\sqrt{\rho(x)} \chi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, образуют ортогональную систему в обычном смысле. Если область G бесконечна, то нормирование системы часто оказывается невозможным.

б) Линейная зависимость. k функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$ называются *линейно независимыми* в области G , если уравнение

$$\sum_{v=1}^k c_v f_v(x) = 0$$

удовлетворяется для всех значений x , принадлежащих G , только в том случае, когда $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$; в противном случае функции $f_1(x), \dots, f_k(x)$ называются *линейно зависимыми* в области G . Функции, принадлежащие некоторой ортогональной системе, всегда линейно независимы.

с) Ортогонализация. Если в системе k функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$ какие-либо l функций являются линейно независимыми, то из них можно образовать l попарно ортогональных функций ($k, l = 1, 2, \dots$). Следует положить

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= c_{11} f_1(x), \\ \varphi_2(x) &= c_{21} \varphi_1(x) + c_{22} f_2(x), \end{aligned}$$

вообще

$$\varphi_h(x) = c_{h1} \varphi_1(x) + \dots + c_{hh-1} \varphi_{h-1}(x) + c_{hh} f_h(x),$$

$h = 1, 2, \dots$, и затем определить для каждого $h = 1, 2, \dots$ коэффициенты c_{h1}, \dots, c_{hh} так, чтобы они не все были равны нулю и чтобы функция $\varphi_h(x)$ была ортогональна к $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{h-1}(x)$, т. е. эти коэффициенты должны быть определены из уравнений

$$(\varphi_h^*, \varphi_k) = c_{h1} (\varphi_1^*, \varphi_k) + \dots + c_{hh-1} (\varphi_{h-1}^*, \varphi_k) + c_{hh} (f_h^*, \varphi_k) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, h - 1$. Функции, тождественно равные нулю, следует отбросить. Если потребовать еще, чтобы было выполнено условие $(\varphi_h^*, \varphi_h) = 1$, то коэффициенты c_{hk} будут однозначно определены и функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ будут образовывать нормированную ортогональную систему.

д) Из полных ортогональных систем функций *одного* переменного можно следующим способом образовать такую же систему функций *нескольких* переменных: если $\varphi_{11}(x_1), \varphi_{12}(x_1), \dots$ — полная ортогональная система в промежутке $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $\varphi_{21}(x_2), \varphi_{22}(x_2), \dots$ — полная ортогональная система в промежутке $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ и т. д., то функции $\varphi_{1h_1}(x_1) \cdot \varphi_{2h_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{nh_n}(x_n)$, где $h_1, h_2, \dots, h_n = 1, 2, \dots$,

образуют полную ортогональную систему в области $a_k \leq x_k \leq b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

е) Функции $\varphi_n(x)$, составляющие ортогональную систему, могут образовывать плотную последовательность. Индекс n превращается тогда в переменную s : $\varphi_n(x) = \varphi(s, x)$.

Ортогональность и нормированность определяются в этом случае равенством

$$(\varphi^*(s), \varphi(s')) = \int_G \varphi^*(s, x) \varphi(s', x) dx = \delta(s - s').$$

Специальные ортогональные системы. а) Системы ортогональных полиномов. Они могут быть представлены с помощью выражений вида $F_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, с условиями ортогональности

$$\int_a^b F_n(x) F_{n'}(x) \rho(x) dx = \delta_{nn'} N_n,$$

где весовая функция $\rho(x)$, границы a, b и нормирующие множители N_n считаются заданными.

Часто также вместо того, чтобы задавать N_n , задают значение $F_n(0) = c_{n0}$ или значение $F_n(1) = \sum_k c_{nk}$. Тем самым коэффициенты c_{nk} полностью определены и могут быть вычислены.

Функции $F_n(x)$, образующие подобную систему, во всех практически важных случаях могут быть получены иными путями, в част-

Некоторые важные

Наименование	Символ	$\rho(x)$	$a \rightarrow b$
Полиномы Якоби	$J_n(p, q, x)$	$x^{p-1} (1-x)^{q-1}$	0 1
Полиномы Лежандра	$P_n(x)$	1	-1 +1
Полиномы Чебышева	$\left\{ \begin{array}{l} T_n(x) \\ Q_n(x) \end{array} \right.$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-1 +1
		$\sqrt{1-x^2}$	-1 +1
Полиномы Лагерра	$L_n(x)$	e^{-x}	0 $+\infty$
Обобщенные полиномы Лагерра	$L_n^k(x)$	$e^{-x} x^k$	0 $+\infty$
Полиномы Эрмита	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$-\infty +\infty$

ности как коэффициенты разложения некоторой *производящей функции* (см. стр. 104):

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n; \quad \int_a^b f(x, t)^2 \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} N_n t^{2n},$$

как полиномиальные решения некоторого дифференциального уравнения, как обрывающиеся ряды или же, наконец, как определенные интегралы, например с помощью комплексного интеграла по замкнутому контуру в виде $F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n+1}} f(x, t)$ при заданной функции $f(x, t)$ (см. стр. 105). Они часто могут быть легко вычислены при помощи рекуррентных формул.

б) Системы ортогональных трансцендентных и элементарных функций. Чаще всего они определяются как собственные решения некоторого дифференциального уравнения с однородными краевыми условиями (см. стр. 354 — 355).

4. Разложения по ортогональным системам

а) Ряды. Для всякой произвольно заданной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию А (см. 3а), можно построить (по крайней мере, формально) соответствующий ей ряд по ортогональной системе $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h \varphi_h(x), \quad \text{где } c_h = \frac{(\varphi_h^*, f)}{(\varphi_h^*, \varphi_h)}, \quad h = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Числа c_h называются *коэффициентами разложения*, или коэффициентами Фурье, функции $f(x)$ по системе $\varphi_h(x)$. Имеет место

ортогональные полиномы

Нормировка	Примечания
$J_n(p, q, 0) = 1$	Частный случай гипергеометрических функций $= F(-n, p+n, q, x)$, см. стр. 129
$P_n(1) = 1$	$= J_n\left(1, 1, \frac{1-x}{2}\right)$ = сферические функции, см. стр. 132
$N_n = \frac{\pi}{2}$	$= \cos(n \arccos x)$; $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$
$N_n = \frac{\pi}{2}$	$U_n(x) = \sqrt{1-x^2} Q_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)$
$N_n = (n!)^2$	см. стр. 142
$N_n^k = \frac{(n!)^2}{(n-k)!}$	$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x)$
$N_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$	см. стр. 144

неравенство Бесселя

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 (\varphi_h^*, \varphi_h) \leq (f^*, f). \quad (10)$$

Почленное интегрирование ряда (9) всегда приводит к равномерно сходящемуся в G ряду для $\int_x^x f(t) dt$.

Если $\{\chi_h(x)\}$ — полная ортогональная система с весовой функцией $\rho(x)$, то вместо (9) будем иметь:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \chi_h(x), \quad \text{где} \quad b_h = \frac{\int_G \rho(t) f(t) \chi_h^*(t) dt}{\int_G \rho(t) |\chi_h(t)|^2 dt}.$$

б) Аппроксимация. Из всех возможных линейных комбинаций $\sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(x)$ частичные суммы $F_n(x)$ ряда $F(x)$ наилучшим образом аппроксимируют функцию f в G в среднем: интеграл

$$\int_G |f(t) - \sum_{h=1}^n a_h \varphi_h(t)|^2 dt$$

имеет наименьшее значение в том случае, когда $a_h = c_h$ (см. (9)) при $h = 1, \dots, n$.

с) Полнота. Если ортогональная система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ является *полной* (см. 1с), то (10) переходит в *условие полноты* (равенство Парсеваля)

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 (\varphi_h^*, \varphi_h) = (f^*, f).$$

Вообще для скалярного произведения двух функций f и g , коэффициентами разложения которых служат соответственно c_h и d_h , имеет место соотношение

$$(f^*, g) = \sum_h c_h^* d_h (\varphi_h^*, \varphi_h) = \sum_h \frac{(f^*, \varphi_h) (\varphi_h^*, g)}{(\varphi_h^*, \varphi_h)}.$$

При этом каждая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию А (см. 3а), может быть с любой степенью точности аппроксимирована в среднем частичными суммами $F_n(x)$ и никакая функция $f(x)$ не будет ортогональна ко всем функциям $\varphi_h(x)$, $h = 1, 2, \dots$, кроме $f \equiv 0$ (*замкнутость* ортогональной системы). Если ортогональная система полная, то каждая функция $f(x)$, удовлетворяющая в области G условию А, полностью определяется своими коэффициентами разложения по этой системе. Если последовательность φ_h , или какая-либо ее часть, является плотной, то суммы следует, в соответствии со смыслом, заме-

нить интегралами и соответственно изменить нормировку (см. стр. 33 — 34).

д) Представление функций разложениями по ортогональным системам. Не каждая кусочно-непрерывная функция $f(x)$ может быть *представлена* своим рядом $F(x)$ по ортогональной системе (в том смысле, что ряд $F(x)$ сходится и имеет функцию $f(x)$ своей суммой); чтобы это было возможно, прежде всего *необходимо* (но не *достаточно!*), чтобы используемая ортогональная система была полной. Вообще равенство $F(x) = f(x)$ имеет место:

а) в каждой замкнутой области G' (например, в $\alpha \leq x \leq \beta$), целиком лежащей в области G , при условии, что в G' ряд $F(x)$ равномерно сходится и функция $f(x)$ непрерывна;

б) если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ являются собственными функциями некоторого интегрального уравнения второго рода с основной областью G и симметрическим ядром $K(x, y)$ (см. также билинейную формулу, стр. 47), функция же $f(x)$ представляется «истокообразно» в виде $f(x) = \int_G K(x, t) g(t) dt$ с функцией $g(x)$, удовлетворяющей условию А (см. стр. 88).

γ) если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ являются собственными функциями само-сопряженного дифференциального уравнения вида $p y'' + p' y' + q y + \lambda r y = 0$ с непрерывными в G коэффициентами p, p' и q , причем $p \geq 0$ (в случае нескольких переменных уравнение имеет вид $p \Delta y + p_{x_1} y_{x_1} + p_{x_2} y_{x_2} + \dots + p_{x_n} y_{x_n} + q y + \lambda r y = 0$) с соответствующими краевыми условиями; $f'(x)$ и $f''(x)$ должны в G существовать и быть кусочно-непрерывными. Случай γ) содержится в б).

В случаях б) и γ) ряд $F(x)$ сходится в области G равномерно и абсолютно.

е) Условия представимости функции, на которые в дальнейшем мы часто будем ссылаться.

Условия В: область может быть разложена на конечное число ограниченных кусочно-дифференцируемых кривыми частичных областей, внутри каждой из которых f и ее первая производная непрерывны; f и ее первая производная, взятые по абсолютной величине, интегрируемы в G .

Условия D (так называемые условия Дирихле): интервал I ($\alpha \leq x \leq \beta$) может быть разложен на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых функция f монотонна; f в I непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, интегралы

$$\int_a^b |f(t)| dt \quad \text{и} \quad \int_a^b |f'(t)| dt$$

существуют.

ф) При известных предположениях (см. 5) имеет место равенство $F(x) = f(x)$, если f непрерывна по x .

Вообще: $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x+h) + f(x-h)) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$, если пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ конечны [для нескольких переменных: $F(x) =$ среднему арифметическому пределов функции f с обеих сторон от точки разрыва, если эти пределы конечны и не зависят от пути, по которому происходит приближение к этой точке].

Ряд F сходится *равномерно* в каждой замкнутой области, в которой f непрерывна.

5. Специальные ортогональные разложения

а) Разложения Фурье

а) Основная область: $a \leq x \leq a+l$ (ряды Фурье).

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{l} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{2\pi i n x}{l}},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(t) \cos \frac{2\pi n t}{l} dt; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{l} dt;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+l} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{l}} dt.$$

Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом l , т. е. $f(x) = f(x+l)$, то разложение $F(x)$ сохраняет силу также и за пределами основной области. Если $f(x)$ действительна, то следует принять $\alpha_n^* = \alpha_{-n}$.

β) Основная область: $-\infty < x < +\infty$.

Из а) посредством предельного перехода получают *интегралы Фурье*:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a(t) \cos \frac{2\pi t x}{\beta} + b(t) \sin \frac{2\pi t x}{\beta} \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{\frac{2\pi i t x}{\beta}} dt,$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \frac{2\pi s t}{\beta} ds; \quad b(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin \frac{2\pi s t}{\beta} ds;$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{2\pi i s t}{\beta}} ds;$$

β — произвольное действительное положительное число (например, $\beta = 2\pi$).

Эти разложения имеют место для (непериодических) функций $f(x)$, которые при $x \rightarrow \pm\infty$ стремятся к нулю настолько быстро,

что интегралы сходятся. Для действительной функции $f(x)$ имеем $\alpha^*(t) = \alpha(-t)$.

Если с помощью непериодической функции $f(x)$ построена следующим образом периодическая функция $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} f(x + hl) = g(x + nl); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то из

$$g(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \alpha_h e^{\frac{2\pi i h x}{l}} \quad \text{и} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{2\pi i t x} dt$$

вытекает соотношение

$$\alpha_h = \frac{1}{l} \alpha\left(\frac{h}{l}\right),$$

связывающее коэффициенты α_h и значения спектральной функции $\alpha(t)$ в точках $t = h/l$.

Таким образом, имеем вообще:

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} f(x + hl) = \frac{1}{l} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i h x}{l}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') e^{-\frac{2\pi i h x'}{l}}.$$

Это — обобщенная формула суммирования Пуассона. Более известные специальные случаи получаются отсюда при $x = 0$, $l = 2\pi$.

γ) Многомерные разложения Фурье.

Основная область для переменных x_r : $0 \leq x_r \leq l_r$.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_r, \dots) =$$

$$= \sum_{h_1, h_2, \dots, h_r, \dots} \alpha(h_1, h_2, \dots, h_r, \dots) e^{2\pi i \left(\frac{h_1 x_1}{l_1} + \frac{h_2 x_2}{l_2} + \dots \right)},$$

где

$$\alpha(h_1, h_2, \dots, h_r, \dots) = \frac{1}{l_1 l_2 \dots l_r \dots} \times \\ \times \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \dots \int_0^{l_r} \dots f(t_1, t_2, \dots, t_r, \dots) e^{-2\pi i \left(\frac{h_1 t_1}{l_1} + \frac{h_2 t_2}{l_2} + \dots \right)} dt_1 dt_2 \dots dt_r \dots$$

Если основной областью для некоторых из переменных x_r служит весь промежуток $(-\infty, +\infty)$, то соответствующие суммирования должны быть заменены интегрированиями. При этом h_r следует заменить переменной s_r и опустить l_r .

б) Разложение по сферическим функциям (см. стр. 132).

а) Основная область: $-1 \leq x \leq +1$ (ряд Лежандра).

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h P_h(x), \quad \text{где} \quad c_h = \frac{2h+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) P_h(t) dt.$$

Обобщение на случай присоединенных сферических функций (см. стр. 136):

$$F(x) = \sum_{h=m}^{\infty} c_h P_h^m(x),$$

где

$$c_h = \frac{2h+1}{2} \frac{(h-m)!}{(h+m)!} \int_{-1}^{+1} f(t) P_h^m(t) dt.$$

β) Основная область: $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$ (сфера).

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=-h}^{+h} c_{hm} e^{im\varphi} P_h^m(\cos \theta),$$

где

$$c_{hm} = \frac{2h+1}{4\pi} \frac{(h-m)!}{(h+m)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') e^{-im\varphi'} P_h^m(\cos \theta') \sin \theta' d\varphi' d\theta'.$$

Примеры:

$$e^{2\pi i a x} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2h+1}{2} \frac{i^h}{\sqrt{\alpha}} J_{h+1/2}(2\pi\alpha) P_h(x) \\ (J_{h+1/2} \text{ — бesselева функция});$$

$$x^m = m! \sum_{h=0}^{[m/2]} \frac{(2m+1-4h)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1-2h) 2^h h!} P_{m-2h}(x).$$

с) Разложение по бesselевым функциям (см. стр. 146)

α) Основная область: $0 \leq x < \infty$.

$$F(x) = \int_0^{\infty} a(t) J_n(tx) dt, \quad \text{где } a(t) = t \int_0^{\infty} f(s) s J_n(st) ds; \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример:

$$\frac{e^{ikx}}{x} = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} J_0(tx).$$

β) Основная область: $0 \leq x \leq 1$.

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h J_n(\alpha_h x), \quad \text{где } c_h = N \int_0^1 f(t) t J_n(\alpha_h t) dt.$$

Здесь α_h означает h -й корень уравнения $J_n(\alpha) = 0$ и

$$N = \frac{2}{(J_n'(\alpha_h))^2} = \frac{2}{(J_{n+1}(\alpha_h))^2}.$$

d) Разложение по полиномам Лагерра (см. стр. 142)

Основная область: $0 \leq x < \infty$.

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h L_h(x), \quad \text{где } c_h = \frac{1}{(h!)^2} \int_0^{\infty} f(t) e^{-t} L_h(t) dt.$$

e) Разложение по полиномам Эрмита (см. стр. 144)

Основная область: $-\infty < x < +\infty$.

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h H_h(x), \quad \text{где } c_h = \frac{1}{2^h h!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2} H_h(t) dt.$$

f) Разложение по полиномам Чебышева (см. стр. 138)

Основная область: $-1 \leq x \leq +1$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \{ a_h T_h(x) + b_h U_h(x) \},$$

где

$$a_h = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) T_h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad b_h = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) U_h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$



РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ФУНКЦИИ

А. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

1. Определения и обозначения

Однозначная функция f ($f(x)$ или $f(x_1, \dots, x_n)$) каждой *точке* x некоторой *области* (т. е. каждому значению x некоторого *интервала* или каждой системе значений x_1, \dots, x_n некоторой *области*) ставит в соответствие определенное значение функции. Интервалы или области, содержащие все свои граничные точки, называются *замкнутыми* (не содержащие ни одной такой точки — *открытыми*); если область замкнута, то предел любой сходящейся последовательности точек, принадлежащих ей, также всегда принадлежит ей.

Функция f называется:

непрерывной в точке ξ , если $f(\xi)$ конечна и если для любой последовательности, сходящейся к ξ , имеется $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$; при этом

функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, зависящая по крайней мере от двух переменных, может быть в точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ непрерывной по каждому переменному (т. е. при условии, что изменяется только одно переменное, остальные же сохраняют свои значения), не будучи в то же время *непрерывной в этой точке* (т. е. при условии, что могут изменяться все переменные);

непрерывной в области G , если f непрерывна в каждой точке области G ;

кусочно-непрерывной в области G , если область G можно разложить на конечное число частных областей, внутри каждой из которых функция f непрерывна, причем при произвольном приближении к границе (изнутри) функция стремится к *определенным конечным* пределам;

дифференцируемой в точке ξ , если для любой последовательности, сходящейся к ξ , существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$;

кусочно-гладкой, если f и ее первая производная кусочно-непрерывны;

абсолютно интегрируемой в области G , если интеграл $\int_G |f| dx$ существует.

Каждая дифференцируемая функция непрерывна, каждая непрерывная функция интегрируема.

Действительная функция $f(x)$ действительной переменной называется в интервале I :

монотонно возрастающей, если в I из $x > \xi$ всегда следует, что $f(x) \geq f(\xi)$,

монотонно убывающей, если из $x > \xi$ всегда следует, что $f(x) \leq f(\xi)$.

Многопараметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *однородной* степени α (см. стр. 58), если

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

Для дифференцируемых однородных функций имеет место *соотношение Эйлера*

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f.$$

2. Комплексные функции

Всякая функция одной или нескольких действительных переменных, которая наряду с ними содержит в качестве параметра мнимое число i , называется *комплексной*. Она считается заданной, если посредством преобразований ее можно привести к виду

$$f(x, y, \dots; i) = u(x, y, \dots) + iv(x, y, \dots)$$

(разложение на действительную и мнимую части).

Комплексная функция каждой точке своей области определения ставит в соответствие пару чисел (u, v) . В случае двух переменных (x, y) это соответствие можно рассматривать как отображение x, y -плоскости на u, v -плоскость.

В этом понятии в качестве особенно важного специального случая содержится понятие *аналитической* функции $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, которое подробно изучается так называемой *теорией функций*.

Разложение на действительную часть u и мнимую часть v часто может быть достигнуто при помощи разложения по степеням i , так как значения i^n для целочисленных n известны. Часто это удается сделать и иными способами. При этом используют преимущественно показательную функцию, а также круговые и гиперболические функции действительного параметра.

Ниже приводится сводка важнейших правил.

Положив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, т. е.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2n\pi & (x > 0), \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2n + 1)\pi & (x < 0) \end{cases} \quad (n - \text{целое число}),$$

будем иметь:

1. $(x + iy)^2 = r^2 e^{i2\varphi} = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ (Муавр),
 $(x + iy)^{-2} = r^{-2} (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi) = \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right)^2$,
 $i^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,
2. $\ln(x + iy) = \ln r + i(\varphi + 2\pi n)$,
 $\ln(-x) = \ln x + i(2n + 1)\pi$,
 $\ln ix = \ln x + i\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$,
3. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Эйлер),
 $x^i = \cos \ln x + i \sin \ln x$,
4. $\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$,
 $\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$,
 $\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$,
 $\operatorname{ctg}(x + iy) = \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{-\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$,
5. $\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$,
 $\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$,
 $\operatorname{th}(x + iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$,
 $\operatorname{cth}(x + iy) = \frac{\operatorname{sh} 2x - i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}$.

3. Аналитические функции

Функция $f(z) = u + iv$ комплексной переменной $z = x + iy$ называется *регулярной* в точке $z = x + iy$, если

$$[1\text{-е определение}] \quad \frac{df(z)}{dz} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{f(x+h+i(y+k)) - f(x+iy)}{h+ik}$$

существует и не зависит от способа перехода к пределу (т. е. от способа приближения h и k к нулю);

[2-е определение] $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (уравнения Коши—Римана), или, в иной записи,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = 0,$$

причем производные являются непрерывными функциями от x и y .

Оба эти определения равносильны. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = -i \frac{\partial}{\partial y} (u + iv) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = i \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v. \end{aligned}$$

Функция, которая всюду в области G , за исключением не более чем счетного множества значений z , является регулярной, называется *аналитической* в области G . Точки области G , в которых однозначная функция не является регулярной, называются *особыми точками*, или *особенностями*, функции. Точка $z = z_0$ называется *несущественно особой*, если существует такое положительное n , что $(z - z_0)^n f(z)$ ограничено в окрестности $z = z_0$; в противном случае она называется *существенно особой*.

Аналитическая функция от аналитической функции есть снова аналитическая функция. Аналитической будет и функция $\varphi(z)$, обратная аналитической функции $f(z)$ (определяемая посредством равенств $\varphi(f(z)) = f(\varphi(z)) = z$).

Аналитическая функция $f(z) = u + iv$ определяет u и v как функции от x и y :

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y).$$

Их находят, приводя $f(x + iy)$ к виду $f_1(x, y) + if_2(x, y)$.

f_1 и f_2 называются *гармоническими функциями*, или *потенциалами*, причем f_2 называется гармонической функцией, сопряженной с f_1 . В точках, в которых $f(z)$ регулярна, имеют место равенства

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0, \quad \text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{уравнения Лапласа}).$$

Поэтому всякая произвольно заданная аналитическая функция f дает два частных решения уравнения $\Delta \varphi = 0$ (в двумерном случае).

Если аналитическая функция $f(z) = u + iv$ для действительных z принимает действительные значения, то имеет место равенство

$$f(z^*) = u - iv \quad (\text{принцип симметрии}),$$

откуда

$$u = \frac{f(z) + f(z^*)}{2}, \quad v = \frac{f(z) - f(z^*)}{2i}.$$

Аналитическая функция $f(z)$ осуществляет *конформное* отображение x, y -плоскости на u, v -плоскость (см. стр. 110).

Многозначные функции. Определение функции может приводить к многозначности, например в том случае, когда функция $w = f(z)$ определена как решение нелинейного уравнения с коэффициентами, зависящими от z . Наиболее простыми примерами служат $w^n = z$, $\sum_k w^k f_k(z) = 0$, $F(w) = z$ (обратная функция) и т. д. Различные решения называются *ветвями* функции. Если n из них при $z = a$

совпадают, то a называется *точкой ветвления* $(n-1)$ -го порядка. n ветвей функции связаны здесь между собой таким образом, что возможен непрерывный переход от одной ветви к другой. Если представить себе область изменения z в виде некоторой поверхности, то эта поверхность будет состоять из различных «листов», на совокупности которых функция w может быть представлена как однозначная.

Каждой отдельной ветви функции соответствует кривая, зависящая от определения ветви, в точках которой функция разрывна. Эта кривая начинается и оканчивается в точках ветвления и называется *разрезом*. Например, функция $w = \sqrt{z}$, определенная условием $w^2 = z$, имеет две ветви: $w_1 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и $w_2 = \sqrt{\rho} e^{i\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, если ввести обозначение $z = \rho e^{i\varphi}$ (с действительными $0 \leq \rho < \infty$; $-\pi < \varphi \leq +\pi$). Обе они при $\varphi = \pi$, т. е. при z действительном отрицательном, разрывны. Здесь w_1 непрерывно переходит в w_2 , так же как и w_2 в w_1 . Из полученных при помощи разрезов отдельных листов можно составить так называемую «*риманову поверхность*» таким образом, что непрерывность восстанавливается. Точка ветвления, однако, остается особой точкой.

Точка $z = \infty$ является точкой ветвления для функции $f(z)$, если функция $f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет точку ветвления при $z = 0$.

4. Криволинейные интегралы

Интеграл $\int_b^a f(z) dz$ понимают как

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z) dz &= \int_a^b (u + iv)(dx + i dy) = \\ &= \int_a^b (u dx - v dy) + i \int_a^b (v dx + u dy). \end{aligned}$$

Интегралы берутся по некоторой определенной кривой между точками $z = a$ и $z = b$; для этого можно, например, выразить x и y и тем самым также u и v в виде функций параметра s кривой и интегрировать по s .

Из второго определения регулярной функции следует, что $(u dx - v dy)$ и $(v dx + u dy)$ суть *полные дифференциалы* (см. стр. 56).

Интегральная теорема Коши. Интеграл $\int_a^b f(z) dz$ от аналитической функции $f(z)$ не изменяет своего значения, если, сохраняя постоянными a и b , подвергать путь интегрирования непрерывной

деформации, при которой он ни разу не проходит через особую точку функции $f(z)$.

Если путем интегрирования служит замкнутая кривая (обозначение: \oint), т. е. если $a=b$, то $\oint f(z) dz = 0$ при условии, что кривая не заключает внутри себя особых точек функции $f(z)$.

Интегральная формула Коши. Соотношение

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

позволяет вычислить значение функции $f(z)$ в точке $z = \zeta$, если известны значения функции на некоторой кривой, окружающей точку ζ и не содержащей внутри себя особых точек функции. При этом точка z должна пробегать кривую в *положительном* направлении (движение в положительном направлении по окружности единичного круга ведет из $+1$ через $+i$ в -1).

Аналогичным путем вычисляется n -я производная аналитической функции в точке $z = \zeta$:

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz,$$

причем имеет место важная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{(z - \zeta)^{n+1}} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Теорема о среднем. Если кривая представляет собой окружность, $u_0 + iv_0$ — значение функции $f(z)$ в центре этой окружности, $u + iv$ — значение функции на окружности (выраженное как функция угла θ), то

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\theta; \quad v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v d\theta.$$

Таким образом, u_0 и v_0 суть средние значения соответственно значений функций u и v на окружности.

5. Разложение аналитических функций в степенные ряды

а) Разложение в окрестности регулярной точки

а) Если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ регулярна, то она может быть разложена в ряд (Тейлора):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Путем интегрирования C служит простая замкнутая кривая, обходящая один раз вокруг точки z_0 , не заключающая внутри себя особых точек функции f и пробегаясь в положительном направлении.

Сходимость. Ряд Тейлора сходится абсолютно и равномерно в каждом круге $|z - z_0| \leq r$, внутри и на границе которого функция $f(z)$ регулярна. Всегда существует $R > r$ (радиус сходимости) такой, что ряд

$$\begin{aligned} &\text{сходится, если } |z - z_0| < R, \\ &\text{расходится, если } |z - z_0| > R. \end{aligned}$$

Поведение ряда на окружности $|z - z_0| = R$ (граница круга сходимости) зависит от свойств $f(z)$. Эта окружность проходит через ближайшую к z_0 особую точку функции $f(z)$.

Если n коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_{n-1} равны нулю, но $a_n \neq 0$, то точка z_0 называется нулем n -го порядка функции $f(z)$.

β) Если $f(z)$ регулярна в бесконечности (это означает, что $f(1/z')$ регулярна в точке $z' = 0$), то разложение функции $f(1/z')$ в окрестности точки $z' = 0$ приводит к разложению функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots, \text{ где } a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta.$$

Здесь C — простая замкнутая кривая, заключающая внутри себя все особые точки функции $f(z)$, лежащие в конечной части плоскости. Ряд сходится вне круга с центром в точке $z = 0$, граница которого проходит через наиболее удаленную от точки $z = 0$ особую точку функции $f(z)$. Он сходится равномерно и абсолютно вне и на границе всякого большего круга с центром в точке $z = 0$.

В этих разложениях существенным для практики является то, что функция внутри области сходимости соответствующего ряда может быть с известным приближением представлена с помощью суммы конечного числа членов ряда, причем ошибка такого приближения с возрастанием числа членов становится произвольно малой (пример см. в Приложении 2, стр. 569).

Полученные здесь формулы можно использовать также для представления коэффициентов степенного ряда с помощью комплексных интегралов; например, в случае ряда

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ получаем } \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z dz}{z^{n+1}} = \frac{e^{in\pi}}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z} dz}{z^{n+1}}.$$

Если последовательность функций $F_n(z)$ определена посредством производящей функции (см. стр. 91):

$$f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) z^n,$$

то будем иметь:

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t, z)}{z^{n+1}} dz.$$

γ) **Аналитическое продолжение.** Если мы зададим функцию $f(z)$ при помощи ее разложения в окрестности точки z_0 , то функция вначале будет определена лишь внутри круга сходимости. Если перейти к разложению функции в окрестности точки $z'_0 = z_0 + c$, лежащей внутри этого круга, то получим ряд

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z'_0 + c) + a_2(z - z'_0 + c)^2 + \dots$$

Раскрыв скобки $(z - z'_0 + c)^n$ по формуле бинома и расположив члены по степеням $(z - z'_0)$, получим разложение вида

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z'_0) + b_2(z - z'_0)^2 + \dots$$

Полученный ряд сходится в некотором круге с центром в точке z'_0 , причем может случиться, что этот круг частично выходит за пределы прежнего круга. В области, которая служит пересечением обоих кругов, оба разложения сходятся к одной и той же сумме. Второе разложение представляет собой поэтому (если только оно сходится вне круга сходимости первого разложения) *аналитическое продолжение* первого. Повторяя этот процесс, можно функцию, определенную с помощью степенного ряда, продолжить на более широкую область, которая может совпадать и со всей плоскостью. Встречаются случаи, когда аналитическое продолжение далее некоторой определенной границы невозможно.

б) Разложение однозначных функций в ряд Лорана

Во всякой кольцеобразной области \mathfrak{A} (заключенной между двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 : $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$) функция $f(z)$, однозначная и регулярная в этой области, может быть разложена в ряд

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \\ &= \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \end{aligned}$$

сходящийся в этой области абсолютно и равномерно. Коэффициенты ряда находятся по формулам

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где путем интегрирования служит окружность K , лежащая в области \mathfrak{A} : $|z - z_0| = \rho$; $r_1 \leq \rho \leq r_2$.

Ряд Лорана разбивает $f(z)$ на две функции: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ ($f_1 = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$, $f_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$), где $f_1(z)$ регулярна всюду вне круга K_1 (см. а, β), а $f_2(z)$ — всюду внутри круга K_2 (см. а, α). В соответствии с этим ряд Лорана сходится во всей кольцеобразной области, заключающей в себе область \mathfrak{H} и ограниченной концентрическими окружностями, проходящими через ближайшие к \mathfrak{H} особые точки функции $f(z)$.

с) Разложение в окрестности изолированной особой точки

а) Аналитическая функция, однозначная в окрестности особой точки z_0 , может быть разложена в ряд Лорана, сходящийся при $0 < |z - z_0| < R$, где окружность $|z - z_0| = R$ проходит через особую точку функции f , ближайшую к точке z_0 .

Разложение функции в ряд Лорана может содержать либо *конечное*, либо *бесконечное число отрицательных степеней*. В первом случае существует такое целое положительное m , что произведение $(z - z_0)^m f(z)$ регулярно, произведение же $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ не регулярно в точке $z = z_0$. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ в точке $z = z_0$ имеет *полюс порядка m* :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Во втором случае точка $z = z_0$ является *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

б) Аналитическая функция, которая в *любой* окрестности точки $z = z_0$ является *многозначной*, имеет эту точку своей *точкой ветвления*. Если существует такое целое положительное число m , что функция $f(z_0 + t^m)$ в окрестности точки $t = 0$ становится однозначной, то имеет место разложение

$$f(z_0 + t^m) = f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{\frac{k}{m}}.$$

Если при этом m — наименьшее возможное из чисел такого рода, то точка $z = z_0$ служит для функции $f(z)$ *точкой ветвления $(m - 1)$ -го порядка*. Разложение вообще не содержит отрицательных степеней, содержит их конечное число или же содержит их бесконечное множество в зависимости от того, является функция $f(z_0 + t^m)$ при $t = 0$ регулярной, имеет полюс или существенно особую точку.

Если функция $f(z)$ при $z = z_0$ является бесконечнозначной (*точка ветвления бесконечно высокого порядка*), то не существует никакого разложения по степеням $z - z_0$, целым или дробным.

Здесь, как и выше, поведение функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ характеризуется поведением $f(1/z')$ в точке $z' = 0$, а разложение $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ получается из разложения $f(1/z')$ в окрестности $z' = 0$.

д) Вычеты, теорема о вычетах

Коэффициент a_{-1} ряда Лорана, в который разлагается функция $f(z)$ в окрестности особой точки $z = z_0$, называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки $z = z_0$:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

При этом кривая C , которая служит путем интегрирования, не должна заключать внутри себя никаких особых точек функции $f(z)$, кроме $z = z_0$. Практическое значение этой формулы состоит в том, что она позволяет вычислить интеграл $\int_C f(z) dz$, исходя из разложения функции в окрестности полюса.

Если точка z_0 есть полюс n -го порядка, то для вычета имеем формулу

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z)) \right)_{z=z_0};$$

например, для $n=1$: $a_{-1} = ((z-z_0)f(z))_{z=z_0}$,

$$\text{для } n=2: a_{-1} = \left(\frac{d}{dz} ((z-z_0)^2 f(z)) \right)_{z=z_0}.$$

Вычетом относительно бесконечно удаленной точки называют коэффициент $-a_1$ разложения функции в окрестности этой точки

$$f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \dots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Если функция $f(z)$ в некоторой области, ограниченной одной или несколькими непрерывными кривыми, всюду однозначна и всюду, за исключением, быть может, конечного числа особых точек, регулярна, то интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$, взятый по границе области, равен сумме вычетов относительно всех расположенных внутри этой области особых точек. Если функция $f(z)$ всюду однозначна и всюду, за исключением, быть может, конечного числа особых точек, регулярна, то сумма вычетов функции относительно всех ее особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю (*теорема о вычетах*).

6. Методы вычисления комплексных интегралов

Пусть дан интеграл $I = \int_a^b f(z) dz$ от аналитической функции $f(z)$, взятый по некоторой кривой между действительными или комплексными точками a и b . Общий метод его вычисления при помощи известных функций состоит в том, что, сохраняя постоянными пределы интегрирования, деформируют путь интегрирования так, чтобы он, не пройдя ни разу через особую точку, превратился в результате в такой путь,

интеграл по которому распадается на сумму легко вычисляемых интегралов.

В частности, удобно использовать следующие пути интегрирования (рис. 3):

1 — замкнутый путь вокруг полюса: интеграл равен вычету, умноженному на $2\pi i$,

2 — кривые в бесконечности ($|z| \rightarrow \infty$), на которых $f(z) = 0^1$,

3 — интегрирование в противоположных направлениях по одной и той же кривой: интегралы взаимно уничтожаются.

Дальнейшее упрощение часто может быть достигнуто при помощи введения соответствующим образом подобранной новой переменной $\varphi(z)$ вместо z (отображение z -плоскости на φ -плоскость), в частности в тех случаях,

когда введение новой переменной преобразует путь интегрирования в замкнутый.

При благоприятных условиях путь интегрирования можно расположить так, что лишь небольшие его участки будут доставлять существенные части полного значения интеграла, причем эти участки таковы, что подынтегральная функция (приближенно) может быть записана в простой форме. На этом основано применение **метода седловых точек**²). Он применяется, если модуль функции $f(z)$ на пути

интегрирования мал всюду, кроме окрестности точки (или нескольких точек) z_s , где $|f(z)|$ имеет резкий максимум. В этом месте находится так называемая *седловая точка* (см. стр. 112). Она определяется условием $f'(z) = 0$ при $z = z_s$. В окрестности этой точки $f(z)$ имеет разложение вида

$$f(z) = f(z_s) + \frac{(z - z_s)^2}{2} f''(z_s) + \dots$$

Положив $A = f(z_s)$, $B = f''(z_s), \dots$, получим:

$$I = A \int \left(1 + \frac{(z - z_s)^2}{2} \frac{B}{A} + \dots \right) dz.$$

Этот интеграл можно аппроксимировать при помощи следующего:

$$I \cong A \int e^{-\frac{(z - z_s)^2}{2} \frac{B}{A}} dz.$$

¹) Имеется в виду, что при $|z| \rightarrow \infty$ функция $f(z)$ стремится к нулю настолько быстро, что стремится к нулю и произведение $L \max_{z \in C} |f(z)|$, где L — длина пути интегрирования C . (Прим. ред.)

²) В литературе часто встречается также название «метод перевала». (Прим. ред.)

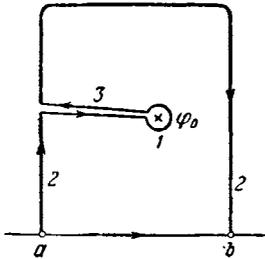


Рис. 3. Применение теоремы о вычетах.

Теперь путь интегрирования располагают так, чтобы было $\frac{(z - z_s)^2 B}{2A} = -s^2$ с действительным s . Отсюда находим:

$$ds = \pm dz \sqrt{\frac{-B}{2A}} \text{ и, следовательно,}$$

$$I \cong \mp A \sqrt{\frac{2A}{-B}} \int e^{-s^2} ds.$$

Вследствие большой быстроты изменения функции в окрестности точки максимума пределы интегрирования можно отодвинуть в бесконечность. Это дает

$$I \cong \mp \sqrt{\frac{2\pi A^3}{-B}}.$$

Остающийся пока еще неопределенным знак легко находится. Этот приближенный метод, как и всякий другой подобный метод, требует выяснения вопроса о достигаемой с его помощью степени точности.

Пример:

$$I = \Pi(x) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^x dz;$$

$$f(z) = e^{-z} z^x, \quad f'(z) = \left(-1 + \frac{x}{z}\right) f, \quad f''(z) = -\frac{x}{z^2} f + \left(\frac{x}{z} - 1\right)^2 f,$$

следовательно,

$$z_s = x, \quad A = e^{-x} x^x, \quad B = -\frac{1}{x} A,$$

$$\Pi(x) \cong \sqrt{2\pi x A^2} = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (\text{формула Стирлинга}).$$

Эта формула применяется при больших x (см. стр. 154 и 183).

Изложенный метод может быть применен также к действительным интегралам от аналитических функций.

Если подынтегральная функция является многозначной, то необходимо выделить ветвь, которую желательно интегрировать. Путь интегрирования при этом не должен пересекать разрезов, на которых выбранная ветвь терпит разрыв.

Часто встречаются интегралы следующего вида:

$$I = \oint (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} f(z) dz$$

с нецелыми α и β , взятые по замкнутому контуру, охватывающему точки $z = a$ и $z = b$, но не заключающему внутри себя особенностей функции $f(z)$. Подобный контур может быть расположен на одном листе лишь в том случае, когда $\alpha + \beta$ есть целое число. Значение рассматриваемого контурного интеграла при этом равно

$$I = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_a^b (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} f(z) dz,$$

где \int_a^b означает интеграл, взятый по незамкнутому контуру, соединяющему точки a и b .

В общем случае замкнутый контур может быть получен в виде «двойной петли», т. е. в виде пути интегрирования, который сначала обходит обе точки в положительном направлении, а затем, в той же последовательности, в отрицательном направлении, после чего он замыкается. Тогда будем иметь:

$$I = (1 - e^{2\pi i \alpha})(1 - e^{2\pi i \beta}) \int_a^b (z - a)^\alpha (z - b)^\beta f(z) dz.$$

I обращается в нуль, если α или β — целое число, так как в этом случае одна из точек ветвления исчезает.

7. Отображение, осуществляемое комплексными функциями

Всякая непрерывная комплексная функция $w = f(z) = u + iv$ комплексной переменной $z = x + iy$ осуществляет непрерывное *отображение* области комплексной z -плоскости (x, y -плоскости) на область комплексной w -плоскости (u, v -плоскости).

Конформное отображение. Если отношение расстояния между двумя точками P_1 и P x, y -плоскости к расстоянию между их образами Q_1 и Q , принадлежащими u, v -плоскости, стремится к определенному пределу, когда точка P_1 , двигаясь по непрерывной кривой, стремится к точке P , причем предел этот зависит только от P и, следовательно, является одним и тем же для всех проходящих через точку P непрерывных кривых, то отображение называется *конформным* в точке P . (Это определение конформности сохраняет силу и в общем случае отображения n -мерных областей.) *Конформное отображение сохраняет углы* (в широком смысле): угол, образованный касательными, проведенными в точке P к двум проходящим через эту точку гладким кривым, равен углу между касательными, проведенными к образам этих кривых в точке, являющейся образом точки P ; направление вращения может измениться на противоположное. Малые треугольники отображаются в почти подобные треугольники: *в малом* конформное отображение является *отображением подобия*.

Всякая *аналитическая функция* $f(z)$ всюду, где она регулярна и где $f'(z) \neq 0$, осуществляет *конформное отображение* областей z -плоскости на области w -плоскости, и обратно; отображение сохраняет углы в строгом смысле, т. е. оно оставляет неизменным также и направление вращения. Отображение, осуществляемое функцией $\overline{f}(z)$, комплексно-сопряженной с аналитической, изменяет направление вращения на противоположное. Всякое конформное отображение осуществ-

ляется некоторой аналитической функцией (или функцией, комплексносопряженной с аналитической).

Риманова поверхность. Комплексная функция $w = f(z)$ является, вообще говоря, неоднозначной: одному значению z соответствуют в общем случае несколько значений w . Если области z -плоскости, в которых функция многозначна, расщелить на несколько расположенных один над другим и надлежащим образом друг с другом скрепленных *листов*, то можно достичь однозначности: всякой z -области этой совокупности листов [*римановой поверхности* функции $f(z)$] будет соответствовать некоторая w -область. Риманова поверхность строится при помощи аналитического продолжения (см. также 5а, γ, стр. 105) функции $f(z)$ по всем возможным путям, исходящим из какой-либо точки, в которой функция регулярна; если два продолжения в окрестности точки z совпадают, то они отождествляются, в противном случае для их изображения необходимы два различных листа римановой поверхности. Отдельные листы римановой поверхности скрепляются вместе в *точке ветвления* функции, которая также называется *точкой ветвления римановой поверхности*. Точка ветвления имеет порядок, равный соответственно $n - 1$ или ∞ , смотря по тому, принадлежит она n листам римановой поверхности или же бесконечному множеству таких листов.

Если подобным образом произвести замену w -плоскости римановой поверхностью функции, обратной $f(z)$, то обе римановы поверхности при помощи функции $w = f(z)$ будут отображаться одна на другую однозначно обратимым образом.

8. Наглядное изображение комплексных функций

Для наглядного изображения комплексной функции $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ пользуются осуществляемым ею отображением. Его представляют, покрывая x, y -плоскость или риманову поверхность функции $f(z)$ кривыми, отображающимися в некоторые стандартные кривые u, v -плоскости.

а) Выберем в качестве стандартных кривых те кривые, на которых действительная и мнимая части функции w сохраняют постоянное значение, скажем, $u(x, y) = m\alpha$, $v(x, y) = n\alpha$, α — постоянное число, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти два семейства кривых, всюду, где функция $f(z)$ регулярна и где $f'(z) \neq 0$, пересекают друг друга под прямым углом; две кривые, принадлежащие одному семейству, не пересекают друг друга, во всяком случае, на одном и том же листе римановой поверхности функции $f(z)$.

Первая интерпретация. Всегда можно рассматривать одно из семейств (безразлично, какое именно) как семейство *линий уровня* некоторой поверхности, расположенной над z -плоскостью; тогда другое семейство будет представлять собой семейство *линий быстрого спуска* (градиентных линий) этой поверхности. Над каждой z -областью

при этом будет лежать столько кусков поверхности, сколько имеется соответствующих этой области листов римановой поверхности.

Поверхность всюду имеет *отрицательную* кривизну и, следовательно, не имеет *ни максимумов* («вершин»), *ни минимумов* («ям»).

Каждая линия быстреего спуска спускается монотонно от $+\infty$ до $-\infty$; каждая линия уровня отделяет область, расположенную выше, от области, расположенной ниже. Все кривые обоих семейств незамкнуты; если какая-либо из линий не является на всем своем бесконечном протяжении свободной от двойных точек, то либо эта линия прерывается особой точкой функции, либо она принадлежит различным листам римановой поверхности.

Вторая интерпретация. Одно из семейств кривых (например, $u = \text{const}$) можно рассматривать как семейство *линий тока* плоского *потока* несжимаемой жидкости; тогда другое семейство ($v = \text{const}$) будет семейством *линий равного потенциала* (скоростей). Поле векторов скорости $\mathbf{v} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$, направленных по касательным к линиям $u = \text{const}$, является безвихревым и свободным от источников: $\text{div } \mathbf{v} = 0$, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ во всех точках, в которых функция $f(z)$ регулярна. Особые точки, напротив, представляют собой либо источники, либо вихревые точки.

Нули и особенности. Нули функции f суть точки пересечения линий $u = 0$ и $v = 0$. n -кратные нули функции f являются $(n-1)$ -кратными нулями производной f' . Они изображаются *седловыми точками* поверхности (в которых «перевал» ведет из одной «долины» в другую) в первой интерпретации или соответственно *точками скрещивания* потока жидкости во второй интерпретации. Здесь встречаются n долин, соответственно n течений. Через эту точку проходят по $2n$ кривых каждого семейства (с тем же параметром, т. е. с той же самой константой), причем соседние кривые пересекаются под углом, равным π/n ; каждый из этих углов делится пополам одной из кривых другого семейства. Отображение здесь более не является конформным, и оба семейства кривых перестают быть взаимно ортогональными (см. рис. 5, стр. 117, на котором изображена точка скрещивания первого порядка).

Простой полюс (точка бесконечности) дает «острие» бесконечной высоты, расположенное бесконечно близко к «дыре» бесконечной глубины, или же бесконечно близкие друг к другу *источник и сток* (Quellsenke). Из простого полюса исходит по пучку соответствующих всевозможным значениям параметра кривых каждого семейства, которые затем снова впадают в него по направлению, противоположному тому, по которому они исходили (см. рис. 21, стр. 159, где представлен простой полюс). *n -кратные полюсы* дают, согласно этому, n «острий» и n «дыр» (n источников и n стоков, имеющих каждый бесконечно большую интенсивность), расположенных бесконечно близко, симметрично и в перемежающемся порядке. Отсюда исходит по n

пучков кривых каждого семейства (см. рис. 7, стр. 118, где представлен полюс второго порядка).

В окрестности *регулярной* точки функция $f(z)$ ограничена; окрестность *полюса*, как бы велико ни было постоянное число $G > 0$, может быть сужена таким образом, что всюду в ней будет $|f(z)| > G$. В любой сколь угодно малой окрестности *существенно особой* точки функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому заданному. Поэтому при приближении к этой точке по различным путям могут быть получены различные пределы; например, для $z = 0$ функция $f(z) = e^{1/z}$ стремится к пределу $e^{-\infty} = 0$, если точка z движется по отрицательной действительной полуоси, и к пределу $e^{+\infty} = \infty$, если z движется по положительной действительной полуоси. Простые источники и стоки в интерпретации, связанной с потоком жидкости, всегда являются точками ветвления (например, $z = \ln w$ при $w = 0$, рис. 9, стр. 123).

б) Рассмотрение *обратной функции* также может помочь выяснению свойств данной функции. *Точки ветвления* представляются в виде седловых точек (см. выше); число m в $\beta\alpha$, стр. 105 равно числу встречающихся долин.

с) Свойства функции можно сделать обозримыми, выбирая в качестве стандартных кривых также *кривые постоянного модуля* и *постоянного аргумента*: $r(x, y) = |w| = m\alpha$, $\varphi(x, y) = n\beta$ ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}$), α, β — постоянные, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В точках, в которых $f(z)$ и ее обратная функция регулярны, оба семейства кривых взаимно ортогональны. Первое семейство представляет собой семейство линий уровня поверхности, называемой *рельефом* функции $f(z)$, другое семейство дает для этой поверхности линии быстрого спуска. Эти последние расходятся лучеобразно от полюсов, чтобы снова сойтись в нулях. Линии уровня, представляющие собой кривые, свободные от двойных точек и на римановой поверхности замкнутые, охватывают полюсы и нули; вокруг точки ветвления кривая делает столько обходов, сколько имеется скрепленных в этой точке листов римановой поверхности.

Полюсы изображаются бесконечно высокими острями, нули — воронкообразными углублениями; $(n - 1)$ -кратные нули производной f' , при условии, что $f(z) \neq 0$, изображаются седловыми точками с n долинами¹⁾.

д) Представление, устраняющее особое положение точки $z = \infty$, получают при помощи *стереографической проекции* x, y -плоскости, или соответственно u, v -плоскости, на сферу, которая касается плоскости в одной точке, например в нулевой точке (Риман). Из точки сферы, диаметрально противоположной точке касания, проводят лучи, пересечением которых со сферой и с плоскостью устанавливается

¹⁾ Чертежи см. в книге Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Изд. 3-е, Физматгиз, 1959. (Прим. ред.)

взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы. Точке $z = \infty$ соответствует при этом центр проектирования. Отображение является конформным.

Если таким же образом спроектировать сферу на другую касательную плоскость, то определяемое этим конформное отображение обеих плоскостей друг на друга может быть осуществлено непосредственно при помощи некоторой дробно-линейной функции.

В. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Определение функций

Определение специальной функции может быть дано:

а) посредством указания определенных свойств, которыми должна обладать функция, например *особенностей* при в общем регулярном поведении (Риман), или *внутренних закономерностей*, описываемых *функциональными уравнениями* (например, такими, как условие периодичности, дифференциальные или интегральные уравнения), или, наконец, *экстремальных свойств* (вариационные условия);

б) посредством указания способа вычисления значений функций, например с помощью алгебраических уравнений, дифференцирований или интегрирований, или с помощью разложения функции в ряд по уже известным функциям.

Не всякая система заранее указанных свойств определяет функцию: определение функции при помощи методов, перечисленных в пункте а), требует поэтому всегда доказательства ее существования; во многих случаях таким доказательством служит указание конструктивного определения функции в соответствии с пунктом б).

2. Классификация функций

$w = az + b$ называется *целой линейной* функцией.

$w = \frac{az + b}{cz + d}$ называется *дробно-линейной* функцией.

$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_0 \neq 0$) называется *целой рациональной* функцией степени n ; или, короче, *полиномом*.

$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$ называется (*дробной*) *рациональной* функцией.

Если w удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению $w^n + r_1(z) w^{n-1} + \dots + r_n(z) = 0$, коэффициенты $r_k(z)$ которого являются рациональными функциями, то w называется *алгебраической* функцией.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Функция, которая в конечной части плоскости всюду регулярна и, следовательно, может быть представлена в виде степен-

ного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, сходящегося при любом конечном значении z (т. е. всюду), называется *целой*: целой рациональной (полином), целой трансцендентной.

Функция, не имеющая в конечной части плоскости других особенностей, кроме полюсов, называется *мероморфной*. Она может быть представлена в виде отношения двух целых функций, а также в виде суммы целой функции и простейших дробей. Рациональные функции являются частным случаем мероморфных.

3. Алгебраические функции

Если конечнозначная аналитическая функция $w=f(z)$ нигде (в частности, также и при $z=\infty$) не имеет существенных особенностей, то эта функция является алгебраической (см. 2); в качестве ее особенностей могут встретиться лишь полюсы (простые и кратные) и точки ветвления. Соответствующая риманова поверхность состоит из n листов, где n — степень алгебраического уравнения, определяющего w ; над каждой точкой z , которая не является точкой ветвления, лежит точно n листов.

а) Рациональные функции

(однозначные алгебраические функции)

а) **Целые линейные функции** $w = az + b$.

Обратная функция: $z = \frac{w-b}{a}$ (также целая линейная функция).

Отображение: z -плоскость и w -плоскость конформно отображаются друг на друга при помощи поворота и растяжения, т. е. при помощи сдвига, вращения и изменения масштаба (преобразование подобия).

β) **Дробно-линейная функция** $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

Обратная функция: $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ (также дробно-линейная).

Особенность: простой полюс при $z = -\frac{d}{c}$, в остальных точках регулярна.

Нуль: $z = -\frac{b}{a}$.

Отображение: окружности (а также прямые) переходят в окружности или прямые. Всякое взаимно однозначное конформное отображение полной z -плоскости (т. е. с включением точки $z=\infty$) на полную w -плоскость осуществляется при помощи некоторой линейной функции.

Линейная функция может быть при $c \neq 0$ составлена из следующих функций:

$$cz + d = z'; \quad \frac{1}{z'} = z''; \quad \frac{bc-ad}{c} z'' + \frac{a}{c} = w;$$

соответствующее отображение, следовательно, получается с помощью поворотов, сопровождаемых растяжениями (см. α), и отображения, определяемого посредством $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\omega}$, где $z = \rho e^{i\omega}$, — инверсии относительно единичной окружности (с отражением в x -оси).

См. также пример $w = \frac{1}{1-z}$ в Приложении 2 (стр. 569).

γ) Целая рациональная функция n -й степени (полином) и обратная ей функция

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Обратная функция не является рациональной.

По основной теореме алгебры функция w может быть представлена в виде

$$w = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

В точках z_1, z_2, \dots, z_n функция имеет *нули*. Если $z_1 = z_2$, то в этой точке находится двукратный нуль и т. д. Бесконечно удаленная точка является единственной особенностью (полюс n -го порядка).

Частным случаем является функция

$$w = z^n, \quad z = \sqrt[n]{w},$$

которая может быть особенно легко изображена наглядно, если нарисовать кривые $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и соответственно $\rho = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, где

$$z = r e^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi}.$$

Имеют место равенства

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi \quad \text{и} \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \frac{\psi}{n}.$$

Кругу w -плоскости с центром в точке $w=0$, разрезанному по радиусу, соответствует круговой сектор z -плоскости с углом, равным $2\pi/n$. w -плоскость поэтому не может быть взаимно однозначно отображена на z -плоскость при помощи рассматриваемой функции; чтобы такое отображение стало возможным, вместо w -плоскости следует взять n -листную риманову w -поверхность с точками ветвления при $w=0$ и $w=\infty$.

В случае $n=2$ функция

$$W = f(z) = aZ^2 + bZ + c$$

может быть составлена из линейных преобразований

$$w = W - c + \frac{b^2}{4a}, \quad z = \sqrt{a} Z + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

и функции

$$w = z^2, \quad \text{для которой обратной является } z = \sqrt{w}.$$

Эта функция отображает z -плоскость на дважды взятую w -плоскость. Чтобы достичь однозначности обратной функции, необходимо заменить

w -плоскость двулистной римановой поверхностью. Изображение на z -плоскости имеет при $z=0$ седловую точку (двукратный нуль).

Имеют место формулы:

$$\begin{aligned} +u + \sqrt{u^2 + v^2} &= 2x^2, & x^2 - y^2 &= u, \\ -u + \sqrt{u^2 + v^2} &= 2y^2, & 2xy &= v. \end{aligned}$$

Кривые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ на w -плоскости представляют собой софокусные параболы с фокусом в точке $w=0$ (рис. 4). Кри-

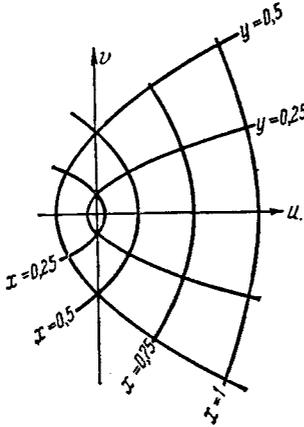


Рис. 4. $z = \sqrt{w}$.

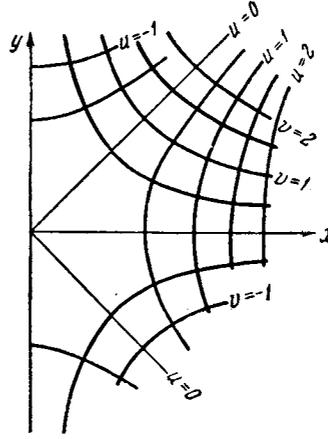


Рис. 5. $w = z^2$.

вые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ представляют собой равноугонные гиперболы в полуплоскости $x > 0$ (рис. 5).

б) Дробная рациональная функция и обратная ей функция.

Обратная функция здесь также не принадлежит к тому же типу. Мы рассмотрим случай функции

$$w = \frac{1}{z^2}, \text{ обратной которой является } z = \frac{1}{\sqrt{w}}.$$

Имеют место равенства

$$\begin{cases} \frac{1}{u^2 + v^2} (+u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2x^2, \\ \frac{1}{u^2 + v^2} (-u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2y^2, \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = u, \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = v. \end{cases}$$

Кривые изображены на рис. 6 и 7. Точка $z=0$ является полюсом второго порядка; здесь сходятся по два пучка кривых каждого из семейств $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.

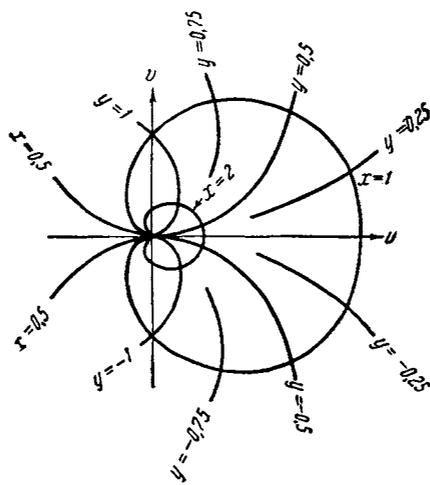


Рис. 6. $z = \frac{1}{w}$.

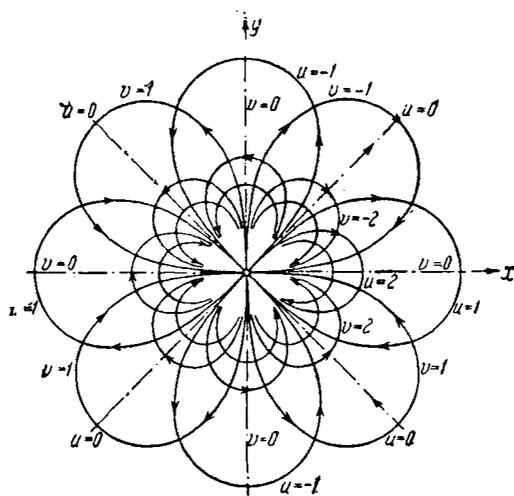


Рис. 7. $w = \frac{1}{z^2}$.

в) Нерациональные алгебраические функции

Мы рассмотрим лишь один частный случай — функцию

$$w = \sqrt{1 - z^2}, \text{ обратную функции } z = \sqrt{1 - w^2}.$$

Рис. 8 представляет одну ветвь функции w на z -плоскости; на w -плоскости в данном примере получается в точности та же картина. Каждому значению z соответствуют два значения w . Точки

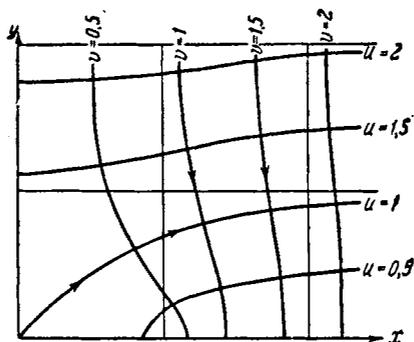


Рис. 8. $w = \sqrt{1 - z^2}$.

$z = +1$ и $z = -1$ являются точками ветвления. Функция имеет, таким образом, две ветви, которым соответствуют два листа римановой поверхности, соединяющихся друг с другом по отрезку с концами $+1$ и -1 . Точка $z = \infty$ ($w = \infty$) представляет собой простой полюс.

4. Элементарные трансцендентные функции

а) Показательная функция $\exp(x) = e^x$

Она является простейшей целой трансцендентной функцией, без полюсов и нулей. Мы определяем ее как решение дифференциального уравнения:

$$y' - y = 0$$

с нормировкой:

$$y(0) = 1.$$

Она может быть представлена с помощью следующего ряда:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

или же как предел:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

Одним из ее значений $\exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ является число $e = 2,7182818\dots$. Поэтому большей частью пишут: $\exp(x) = e^x$.

Функция принимает, среди прочих, следующие значения:

$$e^{\pm 2\pi i} = 1; \quad e^{\pm \pi i} = -1; \quad e^{\pm \frac{\pi i}{2}} = \pm i, \quad \text{где } \pi = 3,141593\dots$$

e^x — периодическая функция с периодом $2\pi i$: $e^{x+n \cdot 2\pi i} = e^x$.

Имеет место теорема сложения:

$$e^{x+z} = e^x \cdot e^z.$$

Представляя e^x в виде суммы двух слагаемых, из которых первое является четной, а второе — нечетной функцией, получают целые трансцендентные

б) гиперболические функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

Они связаны соотношениями

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) = i \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{sh} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) = i \operatorname{ch} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x.$$

Обе эти функции служат решениями дифференциального уравнения:

$$y'' - y = 0.$$

Они могут быть представлены с помощью следующих рядов:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Эти функции, подобно e^x , являются периодическими с периодом $2\pi i$, но в отличие от нее имеют нули, которые расположены соответственно в точках $(n + \frac{1}{2})\pi i$ и $n\pi i$.

Мы можем теперь определить мероморфные функции $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ с помощью равенств

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}.$$

Они являются периодическими с периодом πi и имеют нули и полюсы (соответственно полюсы и нули) первого порядка соответственно в точках $n\pi i$ и $(n + \frac{1}{2})\pi i$.

$\operatorname{th} x$ может быть также представлен с помощью следующего разложения в ряд:

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad (\text{см. стр. 85}).$$

Представляя e^{ix} в виде суммы четной и нечетной функций, получают целые трансцендентные

с) тригонометрические, или круговые, функции $\cos x$ и $\sin x$.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh} ix,$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Они связаны между собой соотношениями

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x,$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Обе они служат решениями дифференциального уравнения:

$$y'' + y = 0$$

и могут быть представлены с помощью следующих рядов:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Эти функции являются периодическими с периодом 2π и имеют нули соответственно в точках $(n + \frac{1}{2})\pi$ и $n\pi$. Имеет место также следующее представление в виде бесконечного произведения:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right).$$

Мы можем теперь определить мероморфные функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = -i \operatorname{th} ix = \frac{-i}{\operatorname{cth} ix}.$$

Они являются периодическими с периодом π и имеют полюсы и нули (соответственно нули и полюсы) первого порядка соответственно в точках $(n + \frac{1}{2})\pi$ и $n\pi$.

$\operatorname{tg} x$ может быть также представлен с помощью следующего разложения в ряд:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots \quad (\text{см. стр. 85}).$$

Функции

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sin \operatorname{vers} x = 1 - \cos x,$$

$$\operatorname{sem} x = \frac{1 - \cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$$

употребляются сравнительно редко.

Из числа функций, *обратных* перечисленным здесь, часто встречаются следующие:

д) натуральный логарифм, $\ln x$.

Он определяется соотношением $e^{\ln x} = x$ и может быть представлен с помощью **интеграла**:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t},$$

или же как **предел**:

$$\ln x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^\epsilon - 1}{\epsilon}.$$

Имеет место **функциональное уравнение**:

$$\ln ax = \ln a + \ln x.$$

Для $\ln x$ точки 0 и ∞ являются особыми (точки ветвления бесконечного порядка), вследствие чего $\ln x$ представляет собой бесконечнозначную функцию. Значения функции, принадлежащие различным ветвям, отличаются на кратное $2\pi i$. Поэтому $\ln x$ в окрестности нуля не разлагается в степенной ряд, но допускает такое разложение в окрестности любой другой конечной точки. Разложение имеет вид

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \dots$$

В вычислительной практике вместо натуральных логарифмов употребляются почти исключительно *бриггсовы логарифмы* \log при основании 10. Имеем: $10^{\log x} = x$, откуда $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = 0,434295\dots \ln x$.

е) Обратные круговые и обратные гиперболические функции
 $\text{Arcsin } x, \text{ Arccos } x, \text{ Arsh } x, \text{ Arch } x$ и т. д.

Они определяются как обратные функции равенством

$$\sin(\text{Arcsin } x) = x$$

и аналогичными равенствами для других функций. Они могут быть представлены с помощью логарифма:

$$\text{Arcsin } x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}); \quad \text{Arccos } x = -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2});$$

$$\text{Arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \quad \text{Arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2-1});$$

$$\text{Arctg } x = \frac{-i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix}; \quad \text{Arcctg } x = \frac{-i}{2} \ln \frac{ix-1}{ix+1};$$

$$\text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad \text{Arcth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

¹⁾ Для действительных $x > 0$. (Прим. ред.)

Эти функции бесконечнозначны. На каждом листе римановой поверхности лежат две точки ветвления первого порядка, из которых идут разрезы к $z = \infty$.

На рис. 9—12 схематически изображены функции e^{x+iy} , $\sin(x+iy)$ и функции, обратные им.

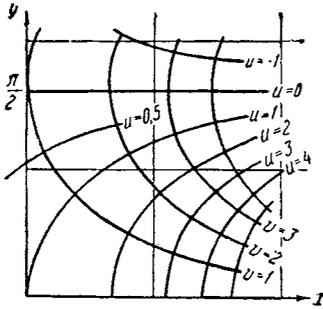


Рис. 9. $w = e^z$.

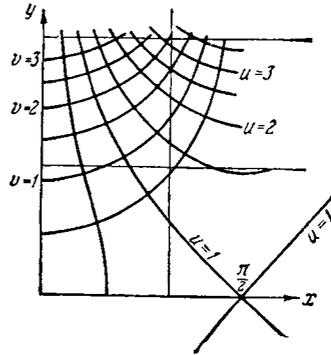


Рис. 10. $w = \sin z$.

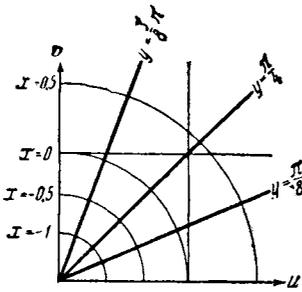


Рис. 11. $z = \ln w$.

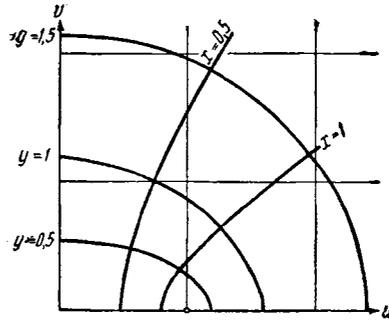


Рис. 12. $z = \arcsin w$.

Некоторые употребительные формулы.

1. Соотношения между круговыми функциями:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \\ \sqrt{1 - \cos^2 x} &= \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \\ \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \\ \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

2. Соотношения между гиперболическими функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}, \\ \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} &= \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}, \\ \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{cth} x}, \\ \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \operatorname{cth} x. \end{aligned}$$

3. Теоремы сложения:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \\ \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}. \end{aligned}$$

4. Функции двойного аргумента:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \\ \sin 2x &= 2 \cos x \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x; \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}; \\ \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}. \end{aligned}$$

5. Функции n -кратного аргумента:

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots, \\ \sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \\ &\quad + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots, \\ \cos nx + i \sin nx &= (\cos x + i \sin x)^n. \end{aligned}$$

6. *Степени функций* (ряды Фурье):

при n нечетном:

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \left[\sin nx - \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \binom{n}{2} \sin(n-4)x - \right. \\ \left. - \binom{n}{3} \sin(n-6)x + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin x \right];$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos x \right];$$

при n четном:

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos nx - \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2x \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n};$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2x \right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

7. *Функции половинного аргумента:*

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; & \operatorname{ch} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}; \\ \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; & \operatorname{sh} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; & \operatorname{th} \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}; \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}; & \operatorname{cth} \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}. \end{aligned}$$

8. *Суммы и разности функций:*

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; & \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}; \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; & \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}; \\ \sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; & \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}; \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; & \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y &= \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}; \\ \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}; & \operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y &= \frac{\operatorname{sh}(y \pm x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}. \end{aligned}$$

9. Преобразование произведений в суммы:

$$\begin{aligned}
 2 \cos nx \cos mx &= \cos(n-m)x + 2 \operatorname{ch} nx \operatorname{ch} mx = \operatorname{ch}(n+m)x + \\
 &+ \cos(n+m)x; & & + \operatorname{ch}(n-m)x; \\
 2 \sin nx \sin mx &= \cos(n-m)x - 2 \operatorname{sh} nx \operatorname{sh} mx = \operatorname{ch}(n+m)x - \\
 &- \cos(n+m)x; & & - \operatorname{ch}(n-m)x; \\
 2 \sin nx \cos mx &= \sin(n-m)x + 2 \operatorname{sh} nx \operatorname{ch} mx = \operatorname{sh}(n+m)x + \\
 &+ \sin(n+m)x; & & + \operatorname{sh}(n-m)x.
 \end{aligned}$$

10. Суммы и разности обратных функций:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arccos} x \pm \operatorname{Arccos} y &= \operatorname{Arccos} (xy \mp \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) \\
 &= \operatorname{Arcsin} (y \sqrt{1-x^2} \pm x \sqrt{1-y^2}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arcsin} x \pm \operatorname{Arcsin} y &= \operatorname{Arcsin} (x \sqrt{1-y^2} \pm y \sqrt{1-x^2}) \\
 &= \operatorname{Arccos} (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \mp xy),
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arctg} x \pm \operatorname{Arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy},$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y &= \operatorname{Arch} (xy \pm \sqrt{x^2-1} \sqrt{y^2-1}) \\
 &= \operatorname{Arsh} (y \sqrt{x^2-1} \pm x \sqrt{y^2-1}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y &= \operatorname{Arsh} (x \sqrt{y^2+1} \pm y \sqrt{x^2+1}) \\
 &= \operatorname{Arch} (\sqrt{x^2+1} \sqrt{y^2+1} \pm xy),
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

Практическое применение логарифмов и тригонометрических функций. Применение логарифмов, в особенности бригговых: $\log x = 0,434295 \dots \ln x$, для вычисления значений функции, представленной в виде произведения, является общеизвестным. Для вычисления некоторых других функций с помощью логарифмико-тригонометрических таблиц бывают полезны следующие формулы, содержащие вспомогательный угол φ :

$$a + b = \frac{a}{\cos^2 \varphi}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$a - b = a \cos^2 \varphi, \quad \text{где} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}};$$

метод преобразования сумм и разностей к виду, допускающему логарифмирование:

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где} \quad \cos \varphi = \frac{b}{a},$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right), \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \\ \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}, \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \\ \sqrt{a^2 - b^2} &= a \sin \varphi = b \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{где } \cos \varphi = \frac{b}{a}, \\ \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} &= (a+b) \cos \varphi, \quad \text{где } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma &= \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}, \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos \gamma, \\ &= \frac{\cos a \sin (b + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \text{где } \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos \gamma. \end{aligned}$$

Корни уравнений:

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0; \quad x_1 = b \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{где } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b}{a},$$

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0; \quad x_1 = b \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = b \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{где } \sin 2\varphi = \frac{b}{a}$$

(при $|b| \leq |a|$),

соответственно, $x_{1,2} = b(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$, где $\cos \varphi = \frac{a}{b}$ (при $|b| \geq |a|$),

$$a \cos x + b \sin x = c; \quad x = \varphi + \psi, \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

$$\cos \psi = \frac{c}{a} \cos \varphi = \frac{c}{b} \sin \varphi,$$

$$x^3 - 3ax^2 + 3bx - c = 0; \quad x_n = a + 2\sqrt{a^2 - b} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi n}{3} \right) \quad (n = 0, 1, 2),$$

где

$$\cos \varphi = \frac{a^3 - \frac{3}{2}ab + \frac{c}{2}}{(a^2 - b)^{3/2}} \quad (\text{при } a^2 \neq b; \text{ при } a^2 = b \text{ имеем } x = a + \sqrt[3]{c - a^3}).$$

Тригонометрия. Записываемые при помощи тригонометрических функций соотношения между сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ имеют следующий вид:

1) в плоском треугольнике ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$)

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c \quad (\text{теорема синусов}),$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{обобщенная теорема Пифагора}),$$

$$\left. \begin{aligned} (b+c) \sin \frac{\alpha}{2} &= a \cos \frac{\beta-\gamma}{2}, \\ (b-c) \cos \frac{\alpha}{2} &= a \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения Мольвейде}),$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}} \quad (\text{уравнение Непера}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \text{где } s = \frac{a+b+c}{2},$$

$$\text{площадь: } I = \frac{ab}{2} \sin \gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

2) в сферическом треугольнике ($\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$; ε — сферический избыток)

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin a : \sin b : \sin c \quad (\text{теорема синусов}),$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \end{aligned} \right\} \quad (\text{теоремы косинусов}),$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b+c}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b+c}{2} &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b-c}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b-c}{2} &= \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения Мольвейде, Гаусса, Деламбра}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos(\sigma-a)}{\cos(\sigma-\beta) \cos(\sigma-\gamma)}}, \quad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > \frac{\pi}{2},$$

площадь: $I = R^2 \varepsilon$ (ε выражено в дуговой мере, R — радиус сферы),

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{(s-a)}{2} \operatorname{tg} \frac{(s-b)}{2} \operatorname{tg} \frac{(s-c)}{2}}.$$

При логарифмических вычислениях часто бывает полезным введение вспомогательного угла (см. стр. 126), например, в плоском треугольнике:

$$c = (a+b) \cos \varphi, \quad \text{где } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}$$

при c , выраженном через a , b , γ , соответственно

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \sin \varphi, \quad \text{где } \cos \varphi = \frac{c}{a+b}$$

при γ , выраженном через a , b , c ;

в сферическом треугольнике:

$$\left. \begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos(b-\varphi)}{\cos \varphi} \cos a, \\ \cos(b-\varphi) &= \frac{\cos c}{\cos a} \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \gamma \frac{\sin \varphi}{\sin(b-\varphi)}, \end{aligned} \right\} \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \begin{cases} \text{при } c, \text{ выраженном} \\ \text{через } a, b, \gamma, \\ \text{при } b, \text{ выраженном че-} \\ \text{рез } a, c, \gamma, \\ \text{при } a, \text{ выраженном} \\ \text{через } a, b, \gamma. \end{cases}$$

5. Функции гипергеометрического типа

а) Общие гипергеометрические функции

Они определяются как решения дифференциального уравнения Гаусса:

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0. \quad (1)$$

Этому уравнению удовлетворяет ряд

$$y = x^\delta u(x, \delta) = x^\delta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{где } c_{k+1} = c_k \frac{(\alpha + \delta + k)(\beta + \delta + k)}{(\gamma + \delta + k)(1 + \delta + k)}.$$

Определяющее уравнение (см. стр. 329) для δ здесь имеет вид

$$\delta(\delta + \gamma - 1) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение в случае, если γ не есть целое число, имеет два линейно независимых решения:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и

$$y_2 = x^{1-\gamma} \left(1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2-\gamma} x + \dots \right). \quad (3)$$

Последнее решение может быть также представлено в виде

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x). \quad (3')$$

Поэтому достаточно, вообще говоря, изучить зависимость функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ от ее аргумента x и параметров α, β, γ . Она определяется как решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Оба ряда (2) и (3) заведомо сходятся при $|x| < 1$, за исключением того случая, когда γ — целое число. В последнем случае находится только одно решение, ибо при $\gamma = 1$ оба ряда совпадают, а при $\gamma \neq 1$ один из них расходится. Если первое решение обозначить через $y^{(1)}$, то второе решение $y^{(2)}$ можно будет записать в форме

$y^{(2)} = y^{(1)} \ln x + z$, где z находится либо общим способом, описанным на стр. 322, либо же при помощи разложения в ряд, как решение неоднородного уравнения после подстановки выражения для $y^{(2)}$ (при известном $y^{(1)}$) в уравнение (1).

При $\gamma = 1$ имеем также:

$$y_2 = F(\alpha, \beta, 1, x) \ln x + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1}.$$

При α или β целых неположительных ряд обрывается, превращаясь в полином (полином Якоби, стр. 90).

Решение дифференциального уравнения Гаусса допускает также **интегральное представление**:

$$y = C \int t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-xt)^{-\beta} dt.$$

Путь интегрирования может быть взят

a) между двумя точками, в которых $t^{\alpha} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-xt)^{-\beta-1}$ обращается в нуль, или

b) в виде замкнутого контура, внутри которого лежат две особые точки подынтегральной функции, или

c) в виде двойной петли (см. стр. 110), обходящей особые точки по два раза в противоположных направлениях.

В частности, чтобы получить представление функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, следует взять точки 0 и 1 и исключить точку $t = 1/x$. Нормирующий множитель C определяется условием $y(0) = 1$. Это дает в случае

$$a) C_a = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\alpha-1)} \quad \begin{cases} \text{если } \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \text{и } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) > 0, \end{cases}$$

в случае

$$b) C_b = \frac{1}{1 - e^{2\pi i \alpha}} C_a, \text{ если } \gamma \text{ — целое число,}$$

в случае

$$c) C_c = \frac{1}{1 - e^{2\pi i (\gamma-\alpha)}} C_b.$$

Одновременно получаем частное значение

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Имеется ряд тождеств, из которых наиболее важными являются следующие:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &\equiv F(\beta, \alpha, \gamma, x) \equiv (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) \equiv \\ &\equiv \frac{\Pi(\beta-\alpha-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\alpha-1)} (-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right) + \\ &+ \frac{\Pi(\alpha-\beta-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} (-x)^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Их можно использовать для получения асимптотических (полусходящихся) рядов при $|x| > 1$.

Далее, имеет место соотношение

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x).$$

Дифференциальное уравнение Гаусса характеризуется своими тремя правильными особыми точками (см. стр. 329): 0, 1 и ∞ с показателями, равными соответственно 0 и $1 - \gamma$, 0 и $\gamma - \alpha - \beta$, α и β . Сумма этих показателей равна 1.

При помощи линейного преобразования независимой переменной особые точки уравнения можно переместить в три произвольные точки a, b, c , при помощи же преобразования зависимой переменной можно показатели сделать равными произвольным числам $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$, сумма которых остается по-прежнему равной 1. Это приводит к более общему уравнению, которое называется **дифференциальным уравнением Римана**:

$$y' + \left\{ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c} \right\} y' + \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta\beta'(b - c)(b - a)}{x - b} + \frac{\gamma\gamma'(c - a)(c - b)}{x - c} \right\} \frac{y}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0.$$

Его решения могут быть представлены с помощью гипергеометрических функций. Его частное решение

$$y = \left(\frac{x - a}{x - b} \right)^\alpha \left(\frac{x - c}{x - b} \right)^\gamma \times F\left(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma, 1 + \alpha - \alpha', \frac{(x - a)(c - b)}{(x - b)(c - a)} \right)$$

обозначается символом

$$y = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} x.$$

Другие решения могут быть получены путем перестановки столбцов этой схемы и заменой штрихованных показателей нештрихованными и обратно. (Однако эта операция, примененная только ко второму и третьему столбцам, приводит к тому же решению.)

Выбирая различным образом a, b, c и значения параметров, можно наряду с

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 - \gamma & \beta & \gamma - \alpha - \beta \end{matrix} \right\} x$$

получить решения других дифференциальных уравнений, относящихся к тому же типу.

При $a=1$, $b=\infty$, $c=-1$ получаем:

$$y_1 = C(1-x)^2(1+x)^{-1} F\left(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma, 1 + \alpha - \alpha', \frac{1-x}{2}\right)$$

и далее при $\alpha = \gamma = -\alpha' = -\gamma' = \frac{m}{2}$, $\beta = -n$, $\beta' = 1 + n$:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} F\left(-n + m, n + 1 + m, 1 + m, \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= P_n^m(x) = P\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ \frac{m}{2} & -n & -\frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & 1 + n & -\frac{m}{2} \end{array} \quad x \right\} \end{aligned}$$

— присоединенную сферическую функцию и ее уравнение (см. стр. 136);

точно так же при $\alpha = \gamma = 0$, $\alpha' = \gamma' = \frac{1}{2}$, $\beta = -\beta' = n$ получаем:

$$y_1 = F\left(-n, n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = T_n(x) = P\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & n & 0 \\ \frac{1}{2} & -n & \frac{1}{2} \end{array} \quad x \right\}$$

— функцию Чебышева (см. стр. 138).

в) Сферические функции Лежандра $P_n(x)$ и $Q_n(x)$

Они служат решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

являясь, следовательно, частным случаем гипергеометрических функций аргумента $\frac{1-x}{2}$ (или $\frac{1+x}{2}$), и могут быть представлены с помощью рядов:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_{k+2} = c_k \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)},$$

т. е.

$$\begin{aligned} y &= A \left(1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right) + \\ &+ B \left(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right) \end{aligned}$$

с произвольными A и B .

Для каждого целого числа $n \geq 0$ один из рядов обрывается и соответствующая сферическая функция превращается в полином Лежандра $P_n(x)$ (см. стр. 90); второй ряд при этом есть функция Лежандра «второго рода» $Q_n(x)$.

Для целых n имеют место также разложения по убывающим степеням:

$$y = Cx^n \left(1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{1}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \frac{1}{x^4} - \dots \right) + \\ + D \frac{1}{x^{n+1}} \left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{x^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^4} + \dots \right) \\ (|x| > 1)$$

с произвольными C и D .

В частности, при обычной нормировке $P_n(1) = 1$ имеем:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

Функции $Q_n(x)$ могут быть представлены следующим образом:

$$Q_n(x) = P_n(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{полином } (n-1)\text{-й степени (см. стр. 329)}.$$

В частности, имеем:

$$Q_0(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \text{Arth } x, \\ Q_1(x) = x \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 = -1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \dots \\ = x \text{ Arth } x - 1.$$

Если $|x| > 1$, то

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \pm \frac{i\pi}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \pm \frac{i\pi}{2}.$$

Дальнейшие $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ находятся при помощи рекуррентных формул (см. ниже).

Полиномы $P_n(x)$ имеют производящую функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad \text{для } |t| < 1,$$

соответственно,
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{-(n+1)} \quad \text{для } |t| > 1$$

и допускают представление:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Они имеют также интегральные представления:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - x)^{n+1}} dt,$$

где интеграл берется по контуру, обходящему точку $t=x$, или же при помощи действительных интегралов:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm (\cos t) \sqrt{x^2 - 1})^n dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm (\cos t) \sqrt{x^2 - 1})^{-(n+1)} dt. \end{aligned}$$

Функции $Q_n(x)$ представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(t) \left(\frac{1}{x-t} \pm i\pi \delta(x-t) \right) dt = i\pi \int_{-1}^{+1} P_n(t) \delta_-(x-t) dt = \\ &= -i\pi \int_{-1}^{+1} P_n(t) \delta_+(x-t) dt \quad (\text{см. стр. 37}) \end{aligned}$$

Они имеют производящую функцию:

$$\frac{1}{x-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(t) Q_n(x).$$

Как для $P_n(x)$, так и для $Q_n(x)$ справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$\left. \begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad (n \geq 0), \\ \frac{dP_n(x)}{dx} &= P'_n(x) = \frac{n(xP_n(x) - P_{n-1}(x))}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{x} (nP_n(x) + P'_{n-1}(x)), \\ P'_{n+1}(x) &= P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x) \end{aligned} \right\} (n \geq 1).$$

Имеет место соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_{n'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'},$$

$$\int_{-1}^{+1} x^\alpha P_{n-2\alpha}(x) dx \begin{cases} = \frac{2 \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2\alpha+1) \cdot 2 \cdot 4 \dots 2\alpha}, \\ = 0 \text{ при } \alpha \text{ отрицательном или полуцелом.} \end{cases}$$

На рис. 13 дана качественная картина зависимости функций $P_n(x)$ от x и n .

Зональные сферические функции. Если положить $x = \cos \vartheta$ и рассматривать ϑ как одну из сферических координат r, ϑ, φ , то

$P_n(\cos \vartheta)$ будет представлять собой функцию, определенную на поверхности некоторой сферы,—так называемую «зональную сферическую функцию», которая при n целом неотрицательном всюду конечна и непрерывна вместе со всеми своими производными. Функция

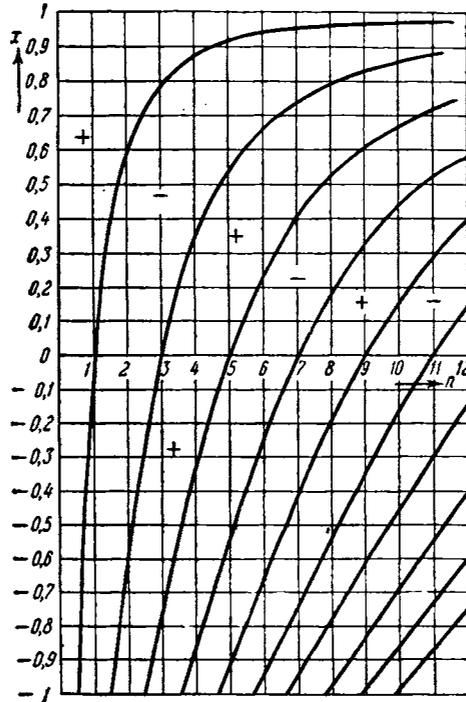


Рис. 13. Кривые $P_n(x) = 0$.

$y = P_n(\cos \vartheta)$, рассматриваемая как функция от ϑ , удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} + n(n+1)y = 0.$$

Она может быть представлена в виде тригонометрического полинома (ряда Фурье). В частности, получаем:

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3(\cos \vartheta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta),$$

$$P_4(\cos \vartheta) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9), \dots$$

$$Q_0(\cos \vartheta) = -\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad Q_1(\cos \vartheta) = -1 - \cos \vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \dots$$

При **больших** n $P_n(\cos \vartheta)$ асимптотически представляется следующей функцией:

$$P_n^{(k)}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta + \frac{\pi}{4} \right), \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n^{(k)}}{P_n} \right) = 1.$$

Функции $r^n P_n(\cos \vartheta)$ и $\frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta)$ называются *шаровыми функциями Лапласа*; они удовлетворяют уравнению $\Delta u = 0$.

Вводя декартову координату $z = r \cos \vartheta$, получим также:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Имеет место соотношение ортогональности:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) P_{n'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}.$$

с) Присоединенные сферические функции $P_n^m(x)$

Они являются решениями дифференциального уравнения:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0.$$

При целых n и m они легко находятся с помощью формулы

$$P_n^m(x) = P_n^{-m}(x) = (\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

При $|m| > n$ они тождественно равны нулю.

В частности, имеем: $P_n^0(x) = P_n(x)$ и

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^1(x) = 3x \sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2),$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2}, \quad P_3^2(x) = 15(x-x^3),$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)\sqrt{1-x^2}.$$

Отметим следующие рекуррентные формулы:

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x),$$

$$\frac{d}{dx} P_n^m(x) = \frac{(n+1)xP_n^m(x) - (n-m+1)P_{n+1}^m(x)}{1-x^2}.$$

Если положить $x = \cos \vartheta$, то функция $P_n^m(\cos \vartheta)$, рассматриваемая как функция от ϑ , представляет собой решение уравнения

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} y + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) y = 0.$$

Функции $P_n^m(\cos \vartheta)$ являются (подобно $P_n(\cos \vartheta)$) тригонометрическими полиномами:

$$\begin{aligned} P_1^1(\cos \vartheta) &= \sin \vartheta, \\ P_2^1(\cos \vartheta) &= \frac{3}{2} \sin 2\vartheta, & P_2^2(\cos \vartheta) &= \frac{3}{2} (1 - \cos 2\vartheta), \\ P_3^1(\cos \vartheta) &= \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta), & P_3^2(\cos \vartheta) &= \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta), \\ P_3^3(\cos \vartheta) &= \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta). \end{aligned}$$

Имеют место соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx &= \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{nn'}, \end{aligned}$$

а также так называемая теорема сложения:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=-n}^{+n} \frac{(n-|k|)!}{(n+|k|)!} P_n^k(\cos \vartheta) P_n^k(\cos \vartheta') e^{ik(\vartheta - \vartheta')},$$

где $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$.

д) Общие сферические функции $Y_n(\vartheta, \varphi)$

Они служат решениями дифференциального уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + n(n+1)y = 0$$

и могут быть представлены в виде

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_m C_{nm} Y_n^m(\vartheta, \varphi),$$

где $Y_n^m = P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$, а C_{nm} — произвольные (комплексные) постоянные.

При целых n и m , $n \geq 0$, $n \geq m \geq -n$ получаются функции, однозначные и непрерывные на поверхности сферы. Постоянными, которых здесь имеется $2n+1$, можно распорядиться, смотря по обстоятельствам.

Если ввести декартовы координаты x, y, z :

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

то всякая линейная комбинация выражений вида

$$r^{n+\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где $\alpha + \beta + \gamma = n$, выраженная через ϑ и φ , представляет собой снова некоторую функцию $Y_n(\vartheta, \varphi)$. Каждая однородная функция

$F_n(x, y, z)$ n -й степени, для которой выполнено условие $\Delta F_n = 0$, может быть представлена в виде $F_n(x, y, z) = r^n Y_n(\vartheta, \varphi)$.

Наглядной физической интерпретацией $Y_n(\vartheta, \varphi)$ служит потенциал на сфере $r = 1$, в центре которой находится система мультиполей n -го порядка. При вращательной симметрии относительно оси z (осесимметрический случай) имеем: $Y_n(\vartheta, \varphi) = C_{n0} P_n(\cos \vartheta)$.

Имеет место соотношение ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\vartheta \sin \vartheta Y_n^{(1)*}(\vartheta, \varphi) Y_n^{(2)}(\vartheta, \varphi) = \delta_{nn'} \sum_m C_{nm}^{(1)*} C_{nm}^{(2)} \frac{4\pi (n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$$

е) Функции Чебышева $T_n(x)$ и $U_n(x)$

Они служат решениями дифференциального уравнения:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

в силу этого являются гипергеометрическими функциями: $\alpha = -\beta = n$, $\gamma = \frac{1}{2}$ аргумента $\frac{1-x}{2}$ или $\frac{1+x}{2}$ и могут быть представлены с помощью рядов:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_{k+2} = \frac{(k+n)(k-n)}{(k+1)(k+2)} c_k;$$

$$y = A \left(1 - \frac{n^2}{2!} x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4!} x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!} x^6 + \dots \right) +$$

$$+ B \left(x - \frac{n^2-1}{3!} x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!} x^5 - \dots \right)$$

с произвольными A и B .

Для каждого целого числа n один из этих рядов обрывается, и соответствующая функция превращается в *полином* $T_n(x)$, который нормируют так, чтобы было $T_n(1) = 1$, для чего множитель при x^n берется равным 2^{n-1} . Таким образом, имеем:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \dots$$

Полиномы $T_n(x)$ имеют производящую функцию:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n \quad (|t| < 1).$$

Они могут быть представлены с помощью интегралов

$$y = C \int \frac{(1-tx)t^{-n-1}}{1-2tx+t^2} dt;$$

интеграл берется по контуру, начинающемуся и оканчивающемуся в $\pm \infty$, охватывающему какой-либо один из корней знаменателя подынтегральной функции и не заключающему внутри себя других осо-

бенностей. Они могут быть вычислены также с помощью следующей формулы:

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (\sqrt{1-x^2})^{2n-1}$$

и выражаются через тригонометрические функции посредством равенств

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{или} \quad T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta.$$

Тот из рядов, который при целом n не обрывается, представляет функцию, которую мы будем обозначать через $U_n(x)$. Она является произведением $\sqrt{1-x^2}$ и полинома $Q_{n-1}(x)$:

$$U_n(x) = \sqrt{1-x^2} Q_{n-1}(x), \quad \text{кроме} \quad U_0(x) = \arcsin x;$$

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$Q_3(x) = 8x^3 - 4x, \quad Q_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, \dots$$

При этом имеет место соотношение

$$Q_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x),$$

и вообще

$$U_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt{1-x^2} T'_n(x), \quad T_n(x) = -\frac{1}{n} \sqrt{1-x^2} U'_n(x).$$

Полиномы $Q_n(x)$ имеют производящую функцию:

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) t^n.$$

Функции $U_n(x)$ могут быть представлены также в виде

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x), \quad \text{т. е.} \quad U_n(\cos \vartheta) = \sin n\vartheta.$$

6. Конфлюэнтные ¹⁾ гипергеометрические функции

а) Общие сведения

Они возникают из общих гипергеометрических функций при предельном переходе $\beta \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, при котором произведение βx остается конечным. Если вместо βx снова писать x , то они будут решениями дифференциального уравнения:

$$xy'' + (\gamma - x)y' - xy = 0. \quad (1)$$

Последнее удовлетворяется рядом:

$$y = x^\delta u(x, \delta) = x^\delta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

¹⁾ Эти функции называются также *вырожденными*. (Прим. ред.)

где

$$c_{k+1} = c_k \frac{\alpha + \delta + k}{(\gamma + \delta + k)(1 + \delta + k)}.$$

Определяющее уравнение, как и выше, имеет вид $\delta(\delta + \gamma - 1) = 0$, так что получаем решение

$$y_1 \equiv F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

и второе решение

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x), \text{ если } \gamma - \text{ не целое число,} \\ = y_1 \ln x + \text{ степенной ряд, если } \gamma - \text{ целое число.}$$

Имеет место соотношение

$$F(\alpha, \gamma, x) = e^x F(\gamma - \alpha, \gamma, -x).$$

Основные факты относительно сходимости, возможных случаев обрыва рядов и выбора второго решения, установленные для неконфлюэнтных функций, остаются в силе также для функций рассматриваемого класса.

Интегральное представление имеет вид

$$y = C \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{xt} dt.$$

Путь интегрирования и нормирующий множитель для $F(\alpha, \gamma, x)$ берутся такими же, как и для $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

$F(\alpha, \gamma, x)$ совпадает с $CL_{\gamma-\alpha-1}^{\gamma-1}(x)$ — обобщенной функцией Лагерра (см. стр. 143), где $C = (\gamma - \alpha - 1)! \binom{\alpha-1}{\gamma-1}$. Предельный переход:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} F(\alpha, \beta, \gamma, \gamma x) \equiv G(\alpha, \beta, x) = G(\beta, \alpha, x) =$$

$$= 1 + \alpha\beta x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!} x^2 + \dots$$

важен для **асимптотического представления**:

$$F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)} (-x)^{-\alpha} G\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, -\frac{1}{x}\right) + \\ + \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)} x^{\alpha-\gamma} e^x G\left(1 - \alpha, \gamma - \alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Родственные дифференциальные уравнения:

Посредством преобразования переменных можно получить различные обобщения, среди которых отметим следующие. Если *общее* решение уравнения (1) обозначить через $F_\alpha(\alpha, \gamma, x)$, то

1) Функция $z = x^\delta e^{\beta x} F_\alpha(\alpha, \gamma, \epsilon x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z'' - \left(\epsilon + 2\beta - \frac{\gamma - 2\delta}{x}\right) z' + \\ + \left(\beta(\beta + \epsilon) - \frac{\epsilon(\alpha - \delta) + \beta(\gamma - 2\delta)}{x} + \frac{\delta(\delta + 1 - \gamma)}{x^2}\right) z = 0.$$

Специальные виды этого уравнения можно получить различными путями:

1a) $\beta = -\frac{\epsilon}{2}$:

$$z'' + \frac{\gamma - 2\delta}{x} z' + \left(-\frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon \left(\alpha - \frac{\gamma}{2} \right)}{x} + \frac{\delta(\delta + 1 - \gamma)}{x^2} \right) z = 0,$$

1b) $\beta = -\frac{\epsilon}{2}$, $\delta = \frac{\gamma - 1}{2}$:

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \left(-\frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon \left(\alpha - \frac{\gamma}{2} \right)}{x} - \frac{(1 - \gamma)^2}{4x^2} \right) z = 0,$$

1c) $\beta = -\frac{\epsilon}{2}$, $\delta = \frac{\gamma}{2}$:

$$z'' + \left(-\frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon \left(\alpha - \frac{\gamma}{2} \right)}{x} + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{4x^2} \right) z = 0,$$

1b при $\epsilon = 2i$, $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, $\frac{1 - \gamma}{2} = -n$ даст:

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) z = 0,$$

$$z = CZ_n(x) = x^n e^{-ix} F_\alpha \left(n + \frac{1}{2}, 2n + 1, 2ix \right)$$

— одно из представлений цилиндрических функций (см. стр. 146).

2) Функция $z = x^\delta e^{\frac{-\beta x^2}{2}} F_\alpha(\alpha, \gamma, \epsilon x^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z'' + \left(2(\beta - \epsilon)x + \frac{2(\gamma - \delta) - 1}{x} \right) z' + \left((\beta^2 - 2\beta\epsilon)x^2 + 2(\beta - \epsilon)(\gamma - \delta) + 2\epsilon(\gamma - 2\alpha) + \frac{\delta(2 + \delta - 2\gamma)}{x^2} \right) z = 0.$$

Рассмотрим частные случаи, получающиеся при $\beta = 0$:

2a) $\delta = 0$: $z'' - \left(2\epsilon x - \frac{2\gamma - 1}{x} \right) z' - 4\epsilon \alpha z = 0.$

При $\gamma = \frac{1}{2}$, $\epsilon = 1$, $\alpha = -\frac{n}{2}$ это дает:

$$z'' - 2xz' + 2nz = 0; \quad z = CH_n(x) = F_\alpha \left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2 \right)$$

— одно из представлений функций Эрмита (см. стр. 144).

2b) $\delta = 1$, $\gamma = \frac{3}{2}$: $z'' - 2\epsilon x z' + 2\epsilon(1 - 2\alpha)z = 0;$

следовательно, если

$$\epsilon = 1, \quad \alpha = \frac{1 - n}{2},$$

то

$$z = CH_n(x) = xF_a\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Мы получили еще одно представление функций Эрмита. Положив здесь $\alpha = \frac{1}{2}$, $\epsilon = -1$, придем к уравнению $z'' + 2xz' = 0$, откуда

$$z' = C_1 e^{-x^2} \text{ и } z = C_2 + C_1 \int_0^x e^{-t^2} dt. \text{ Это приводит к представлению}$$

интеграла ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ в виде

$$\Phi(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} F_a\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right).$$

в) Функции Лагерра $L_n(x)$

Они служат решениями дифференциального уравнения:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

и, следовательно, являются конфлюэнтными гипергеометрическими функциями с $\alpha = -n$, $\gamma = 1$:

$$y = C \int e^{tx} (1-t)^n t^{-n-1} dt.$$

Решения этого уравнения при целом неотрицательном n , регулярные при $x=0$ и нормированные при помощи начального условия $y(0) = n!$, суть *полиномы Лагерра* (см. стр. 90). Решения уравнения могут быть представлены при помощи разложения в ряд:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \text{ где } c_{k+1} = -c_k \frac{(n-k)}{(k+1)},$$

и следовательно, при обычном нормировании:

$$L_n(x) = n! \left(1 - nx + \frac{n(n-1)}{(2!)^2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(3!)^2} x^3 + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right),$$

так что, в частности, имеем:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2,$$

$$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3,$$

$$L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4, \dots$$

Полиномы Лагерра имеют производящую функцию:

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) t^n}{n!} \quad (|t| < 1)$$

и могут быть также представлены с помощью формулы

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Общие решения дифференциального уравнения Лагерра получаются из соответствующих общих решений гипергеометрического уравнения. В частности, имеется второе решение, не регулярное в точке $x=0$:

$$y_2 = L_n(x) \ln x + (1 + 2n)x + \frac{(1 + n - 3n^2)}{4} x^2 + \\ + \frac{(2 + 4n - 24n^2 - 11n^3)}{108} x^3 + \dots$$

Далее, имеют место следующие разложения, применяемые при больших значениях x :

$$y_1 = (-x)^n \left(1 - \frac{n^2}{x} + \frac{n^2(n-1)^2}{2! x^2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3! x^3} + \dots \right), \\ y_2 = e^x x^{-n-1} \left(1 + \frac{(n+1)^2}{x} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2! x^2} + \dots \right).$$

Справедливы следующие **рекуррентные формулы**:

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \\ L'_{n+1}(x) = -(n + 1)(L_n(x) - L'_n(x)).$$

Соотношение ортогональности для целых неотрицательных n :

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_{n'}(x) dx = (n!)^2 \delta_{nn'}.$$

с) Обобщенные функции Лагерра $L_n^k(x)$

Они являются решениями **дифференциального уравнения**:

$$x y'' + (k + 1 - x) y' + (n - k) y = 0,$$

и, следовательно, представляют собой конфлюэнтные гипергеометрические функции $F(\alpha, \gamma, x)$ с $\alpha = k - n$, $\gamma = k + 1$:

$$y = C \oint t^{k-n-1} (1-t)^n e^{xt} dt.$$

Решения этого уравнения при целых неотрицательных n и $n-k$, регулярные при $x=0$ и нормированные при помощи начального условия $y(0) = \frac{(-1)^k (n!)^2}{k! (n-k)!}$, суть *обобщенные полиномы Лагерра* (см. стр. 90). Решения уравнения могут быть представлены при помощи разложения в **ряд**:

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l, \quad \text{где} \quad c_{l+1} = -\frac{c_l (n-k-l)}{(l+1)(l+1+k)},$$

так что

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= \frac{(-1)^k (n!)^2}{k! (n-k)!} \left(1 - \frac{(n-k)x}{k+1} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+1)(k+2)2!} x^2 - \dots \right) = \\ &= n! \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \frac{x^{n-k-m}}{(n-k-m)!}. \end{aligned}$$

Они имеют производящую функцию:

$$e^{-xt}(1+t)^n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n-m} L_n^{n-m}(x) t^m.$$

Соотношение

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n^0(x)$$

связывает эти функции с функциями Лагерра $L_n(x) = L_n^0(x)$.

Имеет место соотношение ортогональности:

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_n^k(x) L_{n'}^k(x) dx = \frac{(n!)^2}{(n-k)!} \delta_{nn'}.$$

Родственные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} y'' - \left(1 + 2\beta + \frac{k+1-2\alpha}{x} \right) y' + \\ + \left\{ \beta(\beta+1) + \frac{(n+(\alpha-k)(1+2\beta)+\beta(k-1))}{x} + \frac{\alpha(\alpha-k)}{x^2} \right\} y = 0; \end{aligned}$$

решение: $y(x) = x^\alpha e^{\beta x} L_n^k(x)$.

$$y'' + \frac{(k+1-2\alpha)}{x} y' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\left(n + \frac{1-k}{2}\right)}{x} + \frac{\alpha(\alpha-k)}{x^2} \right) y = 0;$$

решение: $y(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}} L_n^k(x)$.

d) Функции Эрмита $H_n(x)$

Они являются решениями дифференциального уравнения:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

и, следовательно, представляют собой конфлюэнтные гипергеометрические функции аргумента x^2 с $\alpha = -\frac{n}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Решение, разложенное в степенной ряд, имеет вид

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_{k+2} = c_k \frac{2(n-k)}{(n+1)(n+2)},$$

следовательно,

$$y = A \left(1 - \frac{2n}{2!} x^2 + \frac{2^2 n(n-2)}{4!} x^4 - \frac{2^3 n(n-2)(n-4)}{6!} x^6 + \dots \right) + \\ + B \left(x - \frac{2(n-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!} x^5 - \frac{2^3(n-1)(n-3)(n-5)}{7!} x^7 + \dots \right).$$

Для каждого целого числа n один из рядов обрывается, и соответствующая функция превращается в *полином Эрмита* (см. стр. 90). Полиномы Эрмита нормируются так, чтобы высшая степень x^n имела коэффициент 2^n (тогда коэффициенты полинома являются целыми числами).

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \dots$$

Интегральное представление функций Эрмита имеет вид

$$y = C \int e^{-t^2 + 2xt} t^{-(n+1)} dt.$$

Путь интегрирования идет из $+\infty$ в $-\infty$, для y_1 — выше, для y_2 — ниже точки $t=0$.

Они имеют производящую функцию:

$$e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

и могут быть также представлены с помощью формулы

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \\ H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x).$$

Соотношение ортогональности для целых неотрицательных n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_{n'}(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nn'}.$$

Родственные дифференциальные уравнения:

$$y'' - 2x(1 + 2\varepsilon)y' + (2n - 2\varepsilon + 4x^2\varepsilon(\varepsilon + 1))y = 0;$$

решение: $y = e^{\varepsilon x^2} H_n(x).$
 $y'' + (2n + 1 - x^2)y = 0;$

решение: $y = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$

е) Цилиндрические функции $Z_n(x)$ (функции Бесселя)

Они определяются как решения дифференциального уравнения Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Последнее удовлетворяется рядом ¹⁾:

$$y = \sum c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+n+2)(k-n+2)},$$

так что

$$y = Ax^n \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right) + Bx^{-n} \left(1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \dots \right).$$

Оба ряда нормируют, полагая

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k)}, \quad \text{так что} \quad y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) = Z_n(x).$$

Функции $J_n(x)$ называются *функциями Бесселя* с положительным, соответственно отрицательным, индексом n .

При целом n функция $J_n(x)$ становится целой трансцендентной, т. е. всюду регулярной в конечной части комплексной плоскости. В частности, получаем:

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots,$$

$$J_1(x) = -J_{-1}(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot 2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2! \cdot 3!} - \dots \right).$$

Вообще $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ и, следовательно, решения $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы. Линейно независимым с $J_n(x)$ решением при целом n остается *функция Неймана*

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}.$$

¹⁾ Здесь k пробегает, вообще говоря, нецелые значения (образующие арифметическую прогрессию с разностью 1). (Прим. ред.)

²⁾ Точнее, $N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$. (Прим. ред.)

В частности,

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) J_0(x) + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^4}{(2!)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^6}{(3!)^2} - \dots \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) J_0(x) + 2J_2(x) - \right. \\ \left. - \frac{2}{2} J_4(x) + \frac{2}{3} J_6(x) - \dots \right\},$$

где $C = 0,57722$ (см. стр. 153),

$$N_1(x) = -N_{-1}(x) = -\frac{d}{dx} N_0(x) = \\ = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} J_1(x) + \frac{9}{4} J_3(x) - \dots \right\}.$$

Дальнейшие $J_n(x)$ и $N_n(x)$ для целых n находятся при помощи **рекуррентных формул** (см. ниже). Решениями иного вида служат **функции Ганкеля**:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \quad \text{и} \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x), \\ J_n(x) = \frac{H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)}{2}, \quad N_n(x) = \frac{H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)}{2i}.$$

Эти зависимости аналогичны следующим:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Функции $J_n(x)$ имеют **производящие функции**:

$$e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n,$$

а также

$$e^{iz \cos t} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos nt \quad (\text{ряд Фурье}).$$

При n , равном половине нечетного числа,

$$n = \dots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots,$$

все $Z_n(x)$ выражаются в конечном виде с помощью тригонометрических функций, например:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \\ N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \dots$$

Для этих функций имеется также представление вида

$$\int_{-1}^{+1} e^{ixt} P_n(t) dt = i^n \sqrt{\frac{2\pi}{x}} J_{n+1/2}(x).$$

Дальнейшие функции можно найти при помощи рекуррентных формул.

При $x \gg 1$ и одновременно $x \gg n$ имеем:

$$H_n^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^i \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right], \quad H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i} \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right],$$

откуда

$$J_n(x) \rightarrow (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{для четных } n,$$

$$J_n(x) \rightarrow (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{для нечетных } n^1).$$

Для комплексного x функции $Z_n(x)$ являются, вообще говоря, комплексными (рис. 14 и 15). Напротив, $i^n J_n(ix)$, $i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$ и $i^{n+1} H_n^{(2)}(ix)$

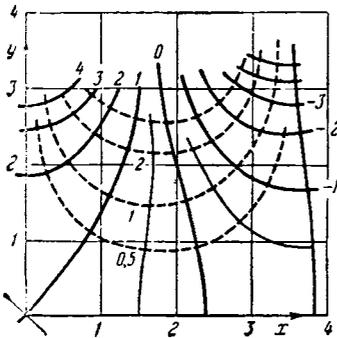


Рис. 14. $w = J_0(z)$.

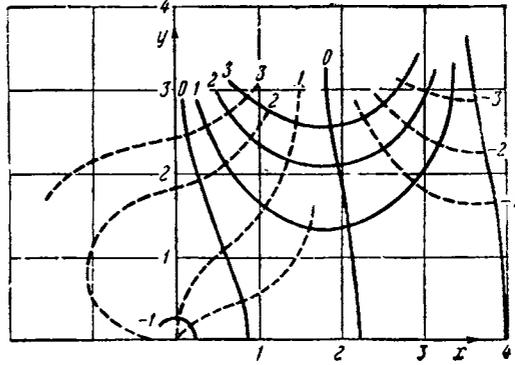


Рис. 15. $w = N_0(z)$.

при целом n и действительном x представляют собой действительные монотонные функции. Функция $N_n(ix)$ является комплексной.

Цилиндрические функции допускают следующие интегральные представления:

$$Z_n(x) = \frac{1}{\pi} \int e^{ix \cos t} e^{in \left(t - \frac{\pi}{2} \right)} dt^2 \quad (\text{Зоммерфельд})$$

¹) Или, при любом n , $J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$. (Прим. ред.)

²) Относительно путей интегрирования, при которых этот интеграл представляет $2J_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$, см. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., 1950, стр. 129 или Ф. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, М., 1958, стр. 584. (Прим. ред.)

и

$$Z_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ixt} (1 - t^2)^{n-1/2} dt \quad (\text{Пуассон}).$$

В последнем интеграле путь интегрирования должен пролежать между двумя точками из числа трех, в которых подынтегральная функция обращается в нуль. Выполняя такой выбор всеми тремя возможными способами, получим значения $2J_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$. Для целых n имеем, далее, действительные интегралы:

и
$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos t} \cos nt \, dt \quad (\text{Ганзен})$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) \, dt \quad (\text{Бессель}).$$

Для всех цилиндрических функций справедливы следующие **рекуррентные формулы**:

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} Z_n(x) - Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - \frac{d}{dx} Z_n(x) = \\ &= -x^n \frac{d}{dx} \left(x^{-n} Z_n(x) \right), \\ Z_{n-1}(x) &= \frac{2n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) + \frac{d}{dx} Z_n(x) = \\ &= x^{-n} \frac{d}{dx} \left(x^n Z_n(x) \right). \end{aligned}$$

С помощью этих формул можно, исходя из $Z_0(x)$ и $Z_1(x) = -\frac{d}{dx} Z_0(x)$ и соответственно из $Z_{1/2}(x)$ $Z_{-1/2}(x)$, легко вычислить все прочие $Z_n(x)$ и их производные для n целого или полуцелого.

Имеют место **соотношения ортогональности**:

определив числа α_m таким образом, чтобы было $J_n(\alpha_m) = 0$, получим:

$$\int_0^1 J_n(\alpha_m x) J_n(\alpha_{m'} x) x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq m', \\ \frac{1}{2} [J_n'(\alpha_m)]^2 & \text{при } m = m'. \end{cases}$$

Отсюда посредством предельного перехода находим:

$$\alpha \int_0^{\infty} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x \, dx = \delta(\alpha - \beta).$$

Далее, имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha x) e^{\pm i\beta x} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

На рис. 14 и 15 схематически представлены функции $J_0(x + iy)$ и $N_0(x + iy)$.

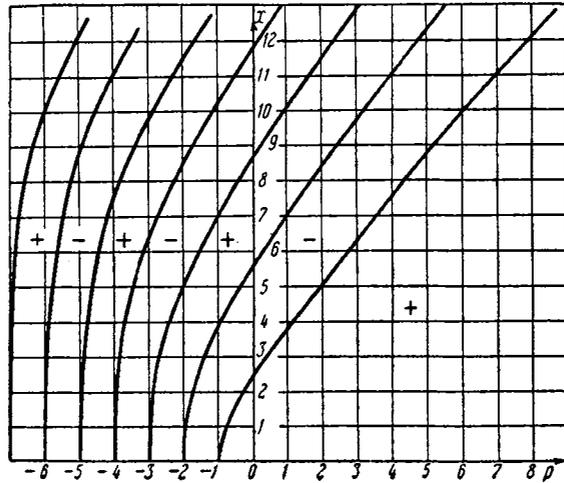


Рис. 16. Кривые $J_p(x) = 0$.

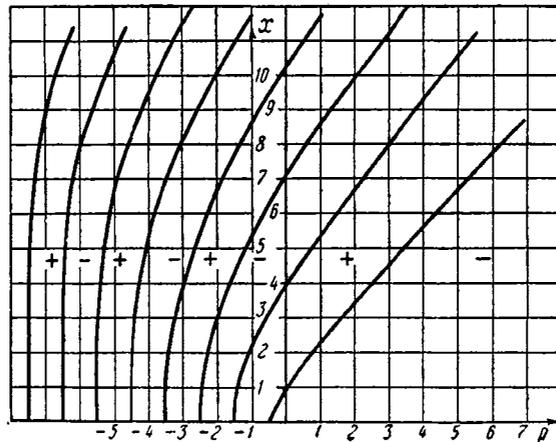


Рис. 17. Кривые $N_p(x) = 0$.

На рис. 16 и 17 дана качественная картина зависимости функций $J_p(x)$ и $N_p(x)$ от x и p .

Родственные дифференциальные уравнения:

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x}y' + \left[(\beta\gamma x^{\tau-1})^2 + \frac{\alpha^2 - n^2\gamma^2}{x^2} \right] y = 0;$$

решение: $y = x^\alpha Z_n(\beta x^\tau)$.

Отметим некоторые частные случаи:

$$y'' + \left[(\beta\gamma x^{\tau-1})^2 - \frac{4n^2\gamma^2 - 1}{4x^2} \right] y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_n(\beta x^\tau);$$

$$y'' + \left(\beta^2 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right) y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_{n+1/2}(\beta x);$$

$$y'' + b^2 x^m y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2b}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right),$$

при этом $m \neq -2$.

В то же время

$$y'' - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y = 0, \quad y = \sqrt{x} \cdot x^{\pm n} \quad (\text{при } n=0 \text{ будем иметь } y = \sqrt{x} (A + B \ln x));$$

$$y'' + \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_n(x), \quad \text{где } n^2 = \frac{1}{4} + a^2;$$

$$y'' + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] y = 0, \quad y = \sqrt{x} Z_{n+1/2}(x);$$

$$y'' + \frac{1-\alpha}{x} y' + \frac{\beta^2}{4x} y = 0, \quad y = x^{\frac{\alpha}{2}} Z_\alpha(\beta \sqrt{x});$$

далее,

$$y'' + ay' + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2} y = 0, \quad y = \sqrt{x} e^{-ax} Z_n(iax).$$

7. Факториал $\Pi(x)$ и гамма-функция $\Gamma(x)$

Они определяются как пределы:

$$\Pi(x) \equiv \Gamma(x+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot k^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}.$$

Тем самым одна из двух функций $\Gamma(x)$ (Лежандр) или $\Pi(x)$ (Гаусс) является излишней. Мы будем преимущественно пользоваться функцией $\Pi(x)$.

Для целых положительных $x = n$ имеем $\Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$ (n факториал); в то же время

$$\Pi(0) = 1, \quad \Pi(-n) = \infty.$$

Функция $\Pi(x)$ является мероморфной, функция $\frac{1}{\Pi(x)}$ — целой трансцендентной (рис. 18).

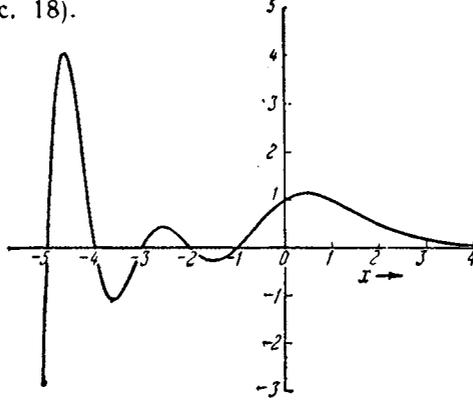


Рис. 18. $\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)}$.

Имеют место следующие интегральные представления:

$$\Pi(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \quad \text{при } \operatorname{Re} x > -1 \quad (\text{Эйлер})$$

и общая формула

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{e^{ix\pi}}{2i\pi} \int \frac{e^{-t}}{t^{x+1}} dt.$$

Путь интегрирования начинается в $+\infty$, обходит точку $t=0$ и возвращается обратно в $+\infty$. Имеет место также представление в виде бесконечного произведения:

$$\frac{1}{\Pi(x-1)} = \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{Cx} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, \quad C = 0,57722 \quad (\text{см. стр. 153}).$$

Для $\Pi(x)$ справедливы следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} \Pi(x+1) &= (x+1) \Pi(x); & \Pi(x-1) &= \frac{1}{x} \Pi(x); \\ \Pi(x-1) \Pi(-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x}; & \frac{1}{\Pi(-x)} &= \Pi(x) \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \end{aligned}$$

Если n — целое положительное число, то

$$\begin{aligned} \Pi\left(n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, & \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Pi\left(-n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} (-1)^n \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

и

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Pi(x)} \right)_{x=-n} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Далее, мы определяем Ψ -функцию:

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \right).$$

Если $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577216 \dots$ (C — эйлерова постоянная), то

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) - C.$$

Отсюда, в частности, следует:

$$\Psi(0) = -C,$$

$$\Psi(1) = 1 - C,$$

$$\Psi(2) = 1 + \frac{1}{2} - C,$$

$$\Psi(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - C, \dots,$$

и вообще:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x+1}.$$

Функция $\Psi(x)$ допускает интегральное представление:

$$\Psi(x) = \int_1^{\infty} \frac{1-t^{-x}}{t(t-1)} dt - C = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt - C = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-xt}}{e^t-1} dt - C,$$

а также разложение в ряд:

$$\Psi(x+1) = 1 - C + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k x^{k-1} (s_k - 1);$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{\Pi(n-1)} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{e^t-1} dt \quad (\text{см. стр. 82}).$$

Отсюда после интегрирования вытекает:

$$\ln \Pi(x+1) = x(1-C) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k x^k \frac{(s_k-1)}{k};$$

$$1 - C = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_k-1}{k}.$$

При больших x употребительно следующее представление:

$$\ln \Pi(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \dots$$

или формула Стирлинга:

$$\Pi(x) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} (1 + r(x)),$$

где

$$0 < r(x) < \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^3}.$$

8. Функции Матье (и Хилла)

Они определяются как периодические решения дифференциального уравнения Матье:

$$y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2x)y = 0,$$

соответственно более общего дифференциального уравнения Хилла:

$$y'' + (\lambda + \gamma \Phi(x))y = 0,$$

где $\Phi(x)$ — периодическая функция с периодом 2π и со средним значением 0.

Общее решение можно представить в форме, данной Флоке:

$$y = Ae^{\mu x} f_1(x) + Be^{-\mu x} f_2(x).$$

Отсюда получаются действительные периодические решения при условии, что μ — чисто мнимое число вида $\mu = \frac{ia}{b}$, где a и $b > 0$ являются целыми (взаимно простыми) числами. Период в этом случае равен $2\pi b$.

Если функция $\Phi(x)$ задана, то μ является функцией от λ и γ . Кривые $\mu = i\frac{a}{b}$ в λ, γ -плоскости целиком покрывают полосы, заключенные между кривыми $\mu = in$ и $\mu = i\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (n — целое число). Между этими полосами находятся лишь те значения μ , которым соответствуют неперiodические решения, остающиеся неограниченными при $x \rightarrow \pm \infty$.

Чтобы найти решения, соответствующие заданным значениям параметров λ и γ (соответственно h^2), необходимо сначала найти μ . Функцию $f(x)$ берут в виде ряда Фурье и, подставляя этот ряд в уравнение, получают в качестве условия, которому должно удовлетворять μ , равенство $\Delta(\mu, \lambda, \gamma) = 0$, где $\Delta(\mu, \lambda, \gamma)$ — бесконечный определитель Хилла. Полученное уравнение для μ решают приближенно. Оно может быть сведено к уравнению $\Delta(0, \lambda, \gamma) = \frac{\sin^2 i\pi\mu}{\sin^2 \pi\sqrt{\lambda}}$.

После того как μ найдено, решение может быть получено при помощи разложения в ряд.

В случае уравнения Матье имеем:

$$f_2(x) = f_1(-x).$$

Функции Матье первого рода $C_n(x)$ и $S_n(x)$ суть соответственно четные и нечетные решения с периодом 2π ($b=1, \mu=in$). Они могут быть представлены в виде сумм Фурье, начинающихся соответственно с $\cos nx$ и $\sin nx$. Они образуют полную ортогональную систему для области $0 \rightarrow 2\pi$ ($\rho=1$). Аналогичные функции можно получить для $\mu = i\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Функциями Матье второго рода являются решения

$$C_n^{(2)} = C_n \int_0^x \frac{dx}{C_n^2}, \quad \text{соответственно} \quad S_n^{(2)} = S_n \int_0^x \frac{dx}{S_n^2}.$$

Эти функции, вообще говоря, непериодичны.

9. Эллиптические интегралы и функции

а) Эллиптические интегралы

Относительно приведения общих эллиптических интегралов см. также стр. 71—74 (раздел «Дифференциальное и интегральное исчисление»).

Нормальная форма Лежандра: общий эллиптический интеграл допускает приведение к следующим трем нормальным формам ($0 < k^2 < 1, x = \sin \varphi$):

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k, \varphi),$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi = E(k, \varphi),$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(t^2-a^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Они называются *неполными* эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го рода. Интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K(k)$$

называется *полным* эллиптическим интегралом 1-го рода. Функции E , F , K табулированы. На рис. 19 изображены $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ как функции от φ для различных значений параметра $k = \sin \vartheta$.

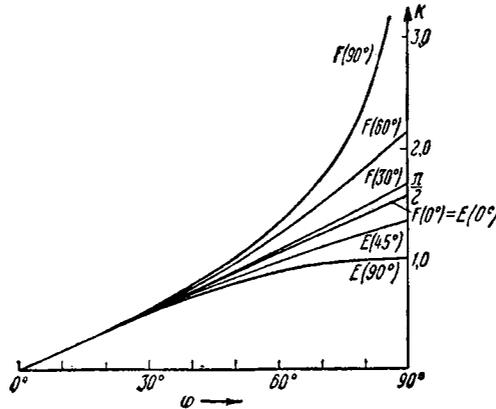


Рис. 19. Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Нормальной формой Вейерштрасса интегралов 1-го рода называют интеграл

$$z = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}.$$

б) Общие сведения из теории эллиптических функций

Эллиптические функции представляют собой обратные функции или алгебраические функции от обратных функций для эллиптических интегралов. Они являются двойкопериодическими функциями своего комплексного аргумента z и имеют два комплексных периода ω_1 и ω_2 , так что

$$f(z) = f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) \quad (m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В конечной части плоскости они не имеют существенных особенностей. При этом предполагается, что отношение периодов $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ не является действительным числом, в силу чего комплексную z -плоскость можно, отправляясь от произвольной точки z_0 , разбить на параллелограммы, вершины которых образуют такую решетку $z_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, что функция $f(z)$ в соответствующих точках различных параллелограммов будет принимать равные значения («параллелограммы периодов»).

Теоремы Лиувилля:

1. Не существует эллиптической функции, отличной от постоянной, которая была бы всюду конечна в параллелограмме периодов.
2. Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех особенностей, расположенных в параллелограмме периодов, равна нулю.
3. Эллиптическая функция в параллелограмме периодов принимает каждое значение столько раз, считая по кратности, сколько раз она принимает значение ∞ .

с) Эллиптические функции Якоби

Определение. Функция, обратная функции

$$z = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (0 < k^2 < 1), \quad (1)$$

называется *амплитудой* z :

$$\varphi = \text{am } z. \quad (2)$$

Если ввести $x = \sin \varphi$, то (1) и (2) переходят соответственно в

$$z = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

и

$$x = \sin(\text{am } z).$$

Последнее соотношение записывают более кратко в форме

$$x = \text{sn } z \text{ (sinus amplitudinis).}$$

Далее вводятся функции:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= \cos(\text{am } z) = \text{cn } z \text{ (cosinus amplitudinis),} \\ \sqrt{1-k^2x^2} &= \Delta \text{am } z = \text{dn } z \text{ (delta amplitudinis).} \end{aligned}$$

Функции sn , cn , dn называются *эллиптическими функциями Якоби*.

Общие свойства. $\text{sn } z$ является нечетной, $\text{cn } z$ и $\text{dn } z$ — четными функциями от z . В частности, имеем:

$$\text{sn } 0 = 0, \quad \text{cn } 0 = 1, \quad \text{dn } 0 = 1.$$

Эти функции *двойкопериодические*, а именно

$$\begin{aligned} \text{sn } z &\text{ имеет периоды } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2iK', \\ \text{cn } z &\text{ имеет периоды } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2K + 2iK', \\ \text{dn } z &\text{ имеет периоды } \omega_1 = 2K, \quad \omega_2 = 4iK', \end{aligned}$$

где

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad K' = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Функции Якоби имеют нули:

$$\operatorname{sn}(2mK + 2niK') = 0, \quad \operatorname{cn}((2m+1)K + 2niK') = 0, \\ \operatorname{dn}((2m+1)K + (2n+1)ik') = 0$$

и полюсы первого порядка:

$$z = 2mK + (2n+1)ik' \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Далее, имеют место соотношения:

$$\operatorname{sn}(z+K) = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, \quad \operatorname{cn}(z+K) = -k' \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, \quad \operatorname{dn}(z+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} z}, \\ \operatorname{sn}(z+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z}, \quad \operatorname{cn}(z+iK') = -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}, \quad \operatorname{dn}(z+iK') = -i \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{sn}(z+K+iK') = \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}, \quad \operatorname{cn}(z+K+iK') = -\frac{ik'}{k \operatorname{cn} z}, \\ \operatorname{dn}(z+K+iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}.$$

Формулы дифференцирования:

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z.$$

Разложения в ряды см. раздел «Ряды», стр. 87.

d) \wp -функция Вейерштрасса

Определение. Функция, обратная функции

$$z = \int_u^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

называется \wp -функцией Вейерштрасса с инвариантами g_2 и g_3 :

$$u = \wp(z) \quad \text{или} \quad u = \wp(z; g_2, g_3).$$

Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2 = \left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Общие свойства. $\wp(z)$ является дwoякопериодической функцией.

Имеем:

$$\wp(0) = \wp(\omega_1) = \wp(\omega_2) = \infty.$$

В этих точках \wp имеет полюсы второго порядка. Если положить

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3),$$

где

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

то получим:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_3.$$

Разложение. Если ввести обозначение $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, то будут иметь место разложения

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m_1, m_2} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$$\wp'(z) = -2 \sum'_{m_1, m_2} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Суммирование производится по всем значениям $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

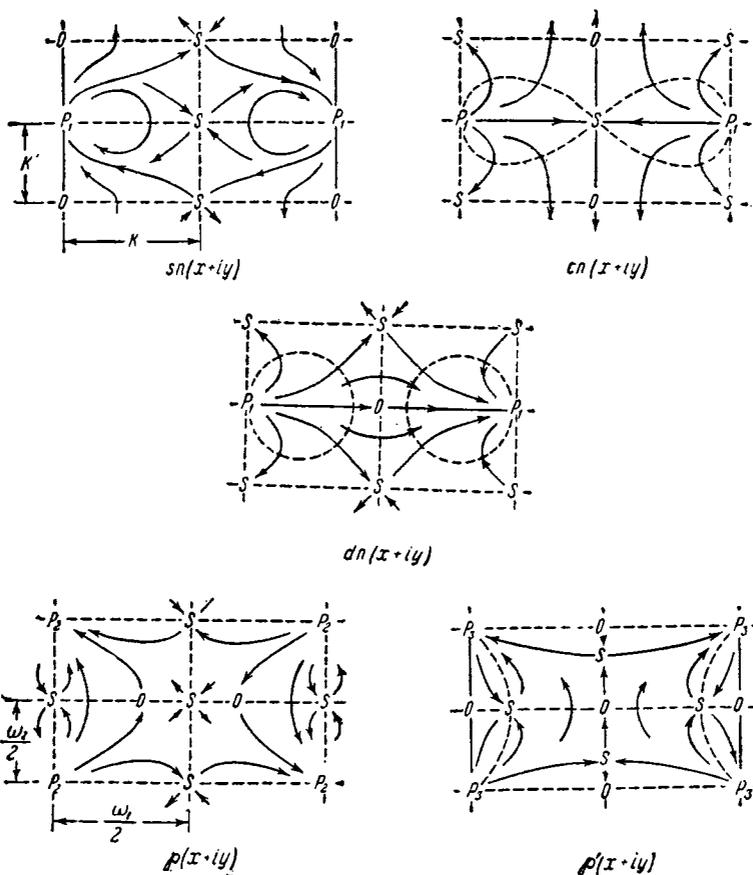


рис. 20—24. Эллиптические функции.

за исключением $m_1 = m_2 = 0$. Разложение для \wp может быть записано также в форме

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \frac{g_2^2}{1200} z^6 + \frac{3g_2g_3}{6160} z^8 + \dots$$

Между инвариантами и периодами существуют соотношения

$$g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right],$$

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right],$$

где $q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}}$.

Приведение. \wp -функция с инвариантами g_2, g_3 всегда может быть приведена к некоторой \wp -функции с только одним («абсолютным») инвариантом j с помощью формулы

$$\wp(z; g_2, g_3) = m^2 \wp\left(mz; \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6}\right),$$

если в ней положить $m = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$. При этом получим:

$$\wp(z; g_2, g_3) = \frac{g_3}{g_2} \wp\left(\sqrt{\frac{g_3}{g_2}} z; j, j\right), \text{ где } j = \frac{g_3^3}{g_2^3}.$$

Представление. Всякая двоякопериодическая функция $f(z; \omega_1, \omega_2)$ может быть представлена как рациональная функция от двух эллиптических функций $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ и $\wp'(z; \omega_1, \omega_2)$.

На рис. 20—24 дано качественное изображение комплексных функций sn , cn , dn , \wp и \wp' при действительном k . Полюсы n -го порядка, седловые точки и нули обозначены соответственно через P_n , S и 0 .

е) Связь между функциями Якоби и \wp -функцией

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}},$$

где

$$u = z \sqrt{e_1 - e_3} \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Обращение:

$$\wp(z) = e_1 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} = e_2 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ

АЛГЕБРА

А. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Определения и обозначения

а) Общей формой (первой нормальной формой) системы m линейных уравнений с n неизвестными является следующая:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right\} \quad (1)$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

б) $m = n$. Величины b_i и x_i можно интерпретировать соответственно как компоненты n -мерных векторов \mathfrak{b} и \mathfrak{x} . Тогда соотношения (1) можно записать в форме

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}.$$

Здесь \mathfrak{A} означает тензор (оператор), который вектору \mathfrak{x} ставит в соответствие вектор \mathfrak{b} (см. стр. 34).

Задача решения системы (1) равносильна задаче обращения тензора (соответственно матрицы) \mathfrak{A} , т. е. задаче отыскания тензора (матрицы) со свойством:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}.$$

Геометрически эта задача эквивалентна каждой из следующих двух задач:

- 1) найти точку пересечения n плоскостей $(\alpha, \mathfrak{x}) = b_i$,
- 2) представить вектор \mathfrak{b} в виде линейной комбинации n векторов α_k :
$$\mathfrak{b} = \sum_k x_k \alpha_k.$$

2. Разрешимость и решения ($m = n$)¹⁾

а) Ранг

Разрешимость системы линейных уравнений (1) и многообразие ее решений зависят от *ранга* r системы уравнений (или, что то же, от ранга r ее матрицы (a_{ik})), который равен наибольшему числу линейно независимых среди линейных форм $\sum_k a_{ik}x_k$ ($i = 1, \dots, n$). В этом случае имеется по крайней мере один отличный от нуля минор r -го порядка, в то время как миноры более высоких порядков все равны нулю (см. стр. 177). Число $d = n - r$ называется *дефектом* системы уравнений.

Линейная независимость. m линейных функций $f_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ (или m систем α_i , из которых каждая состоит из n чисел a_{ik}) ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$) называются *линейно независимыми*, если *невозможно* указать систему постоянных чисел c_1, \dots, c_m (среди которых не все равны нулю) такую, что соотношение $\sum c_i f_i = 0$ будет удовлетворяться тождественно по x_1, \dots, x_n (необходимое условие: $m \leq n$). (См. также определитель Грама, стр. 179.) При $m > n$ всегда имеется линейная зависимость $\sum c_i f_i = 0$, соответственно $\sum c_i \alpha_i = 0$, где c_i не все равны нулю.

Геометрически: m линейно независимых векторов α_i ($i = 1, \dots, m$) с компонентами (a_{i1}, \dots, a_{in}) принадлежат некоторой m -мерной гиперплоскости и не принадлежат никакой гиперплоскости меньшего числа измерений.

б) Однородные уравнения

Если все $b_i = 0$, то система уравнений (1) называется *однородной*.

а) Ранг $r = n$, дефект $d = 0$, следовательно, определитель $\det(a_{ik}) \neq 0$. Имеется *только «тривиальное»* решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

б) Ранг $r < n$, дефект $d > 0$, следовательно, $\det(a_{ik}) = 0$. Имеется $d = n - r$ линейно независимых решений:

$$x_i = \xi_i^{(h)} \quad (h = 1, 2, \dots, d; i = 1, 2, \dots, n).$$

Все линейные комбинации этих решений с произвольными коэффициентами c_h также представляют собой решения:

$$x_i = \sum_{h=1}^d c_h \xi_i^{(h)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

— так называемое *общее* решение.

¹⁾ Относительно случая $m \neq n$ см., например, М. Бохер, Введение в высшую алгебру, М.—Л., 1933. (Прим. ред.)

В случае $r = n - 1$ ($d = 1$) решение может быть определено условием

$$\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n = A_{i_1} : A_{i_2} : \dots : A_{i_n}$$

(с точностью до множителя пропорциональности). A_{ik} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ik} (см. стр. 177). Среди чисел A_{ik} по крайней мере одно должно быть отличным от нуля, в остальном i может быть выбрано произвольно.

Транспонированная система уравнений (возникающая при замене a_{ik} на a_{ki}) всегда имеет тот же ранг и тот же дефект, что и данная, и поэтому также имеет $d = n - r$ линейно независимых решений $\tilde{\xi}_i^{(h)}$ ($h = 1, \dots, d$).

с) Неоднородные уравнения

Система уравнений (1) называется *неоднородной*, если по крайней мере одно $b_i \neq 0$.

а) Ранг $r = n$, дефект $d = 0$, следовательно, $\det(a_{ik}) \neq 0$. Соответствующая однородная система не имеет нетривиальных решений. В этом случае неоднородная система линейных уравнений имеет в точности одно решение:

$$x_h = \frac{1}{\det(a_{ik})} (b_1 A_{1h} + \dots + b_n A_{nh}). \quad (3)$$

n^2 чисел $\frac{A_{ki}}{\det(a_{ik})}$ представляют собой, таким образом, компоненты тензора (или матрицы) \mathfrak{A}^{-1} , обратного по отношению к тензору \mathfrak{A} и обладающего свойством $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}$.

Практическое решение. Для практических целей решение (3) в большинстве случаев мало приспособлено. Вычисление определителей требует, вообще говоря, большей работы, чем метод последовательного исключения, состоящий в следующем: при помощи способа, совпадающего с описанным в п. С7 (стр. 180) для определителей, шаг за шагом уменьшают число неизвестных, содержащихся в системе, каждый раз на единицу, до тех пор, пока одно из неизвестных не будет найдено; после этого остальные неизвестные находят, подставляя в обратном порядке уже найденные значения.

б) Ранг $r < n$, дефект $d > 0$, $\det(a_{ik}) = 0$. Между левыми частями $\sum_k a_{ik} x_k$ ($i = 1, \dots, n$) в этом случае имеется $d = n - r$ линей-

ных зависимостей (которые определяются решениями соответствующей транспонированной однородной системы). Система уравнений (1) поэтому будет *совместной*, т. е. будет иметь решения лишь тогда, когда выполнены условия разрешимости:

$$\sum_i b_i \tilde{\xi}_i^{(h)} = 0 \text{ для всех } h = 1, \dots, d. \quad (4)$$

В то же время при $\lambda_h \neq \lambda_j$ имеем:

$$\xi_{1h}\xi_{1j} + \xi_{2h}\xi_{2j} + \dots + \xi_{nh}\xi_{nj} = \sum_{v=1}^n \xi_{vh}\xi_{vj} = (\alpha_h, \alpha_j) = 0.$$

Таким образом, векторы α_j образуют нормированную ортогональную систему. Если при помощи (ортогонального) преобразования (*преобразование к главным осям, разложение по собственным решениям*)

$$x_i = \sum_v \xi_{iv} x'_v \quad \text{и} \quad b_i = \sum_v \xi_{iv} b'_v$$

с обратным преобразованием

$$x'_k = \sum_v \xi_{vk} x_v \quad \text{и} \quad b'_k = \sum_v \xi_{vk} b_v$$

ввести вместо x_k и b_k новые величины x'_k и b'_k , то будем иметь:

$$\sum_k x_k^2 = \sum_k x_k'^2, \quad \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = \sum_j \lambda_j x_j'^2.$$

Неоднородная система (5) тогда принимает вид

$$(\lambda_k - \lambda) x'_k = b'_k,$$

откуда получаем решение

$$x_i = \sum_k \frac{\xi_{ik}}{\lambda_k - \lambda} \sum_l \xi_{lk} b'_l.$$

С помощью векторной символики то же самое записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_k &= (a_k, \gamma); \quad \gamma = \sum_k a_k (a_k, \gamma), \\ (a_k, \mathfrak{A}\gamma) &= (\gamma, \mathfrak{A}a_k) = \lambda_k (\gamma, a_k) = (a_k, b) + \lambda (a_k, \gamma), \\ (a_k, \gamma) &= \frac{(a_k, b)}{\lambda_k - \lambda}, \quad \gamma = \sum_k \frac{a_k (a_k, b)}{\lambda_k - \lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы не получаем никакого (конечного) решения, если λ равно одному из λ_k , за исключением того случая, когда одновременно также и $(a_k, b) = 0$. В этом случае, однако, γ определяется лишь с точностью до произвольного слагаемого, кратного a_k .

4. Линейные уравнения с бесконечным числом неизвестных

целесообразно записывать в форме:

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

что означает замену \mathfrak{A} в (1) на $\mathfrak{E} + \mathfrak{C}$ (\mathfrak{E} — единичная матрица, см. стр. 35). «Транспонированной» называют здесь систему с матрицей

$\mathfrak{C} + \mathfrak{C}$. При известных предположениях (например, при условии, что двойная сумма $\sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} |c_{\mu\nu}|^2$ сходится и, следовательно, матрица мало отклоняется от \mathfrak{C}) остаются в силе те же теоремы, что и при конечном числе неизвестных. (Рассмотрение бесконечного определителя редко бывает полезным.) Либо система (6) — и тогда также и система, «транспонированная» по отношению к ней, — при произвольных b_i , для которых сумма $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2$ сходится, имеет однозначно определенное решение $x_i = b_i + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik} b_k$ ($i = 1, 2, \dots$) такое, что сумма $\sum |x_i|^2$ сходится, либо соответствующая однородная система (все $b_i = 0$) и «транспонированная» однородная система имеют $d > 0$ линейно независимых решений со сходящейся суммой $\sum |x_i|^2$. В этом случае неоднородная система имеет решения лишь тогда, когда выполнены d условий, соответствующих условиям (4).

Для более общих систем уравнений эти теоремы, вообще говоря, утрачивают силу (см. стр. 175—176).

В. МАТРИЦЫ

1. Определения, обозначения

а) Система $m \cdot n$ элементов (чисел или иных величин, над которыми можно производить алгебраические операции) a_{ik} ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$), расположенных в виде прямоугольной схемы с m строками (горизонтальными рядами) и n столбцами (вертикальными рядами), называется (конечной) *матрицей*. В подробной записи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Короче: (a_{ik}) , $\|a_{ik}\|$ или, в случае необходимости, более точно: $(a_{ik})_{(m, n)}$. Мы обозначаем матрицы прописными буквами готического алфавита: $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $\mathfrak{B} = (b_{ik})$. Индекс i всегда обозначает номер строки, индекс k — номер столбца; символ $(a_{ki})_{(n, m)}$ обозначает поэтому матрицу, *транспонированную* по отношению к матрице $(a_{ik})_{(m, n)}$, получаемую посредством замены строк столбцами. В случае $m = n$ матрица называется *квадратной*.

б) Матрицы, содержащие лишь один столбец ($n = 1$), мы обозначаем строчными буквами готического алфавита $\mathfrak{a}, \dots, \mathfrak{z}, \dots$; они используются также для представления векторов (см. стр. 30).

Элементы матриц могут иметь различную природу: они могут представлять собой коэффициенты разложений в ряды, линейных уравнений или преобразований, билинейных или квадратичных форм, элементы определителей, компоненты тензоров и т. д.; они в свою очередь также могут быть матрицами. Матрицы, составленные из матриц, называются *клеточными*, или *блочными*, *матрицами* (Übermatrizen).

2. Операции с (конечными) матрицами

а) Две матрицы с одним и тем же числом строк m и с одним и тем же числом столбцов n мы будем называть *матрицами одинаковых размеров* (gleichartig). Если матрица квадратная, то число ее строк называется *порядком* матрицы. С матрицами одинаковых размеров можно производить вычисления по следующим правилам.

Равенство. Две матрицы одинаковых размеров называются равными: $(a_{ik}) = (b_{ik})$ в том и только в том случае, когда условие $a_{ik} = b_{ik}$ выполнено для всех i, k . Таким образом, одно уравнение, содержащее матрицы, равносильно $m \cdot n$ уравнениям, связывающим их элементы.

Сумма. Суммой $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$ двух матриц \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} одинаковых размеров называется матрица, элементами которой служат суммы соответствующих элементов матриц \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} :

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}). \quad (1)$$

Имеют место

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{X} \quad (\text{коммутативный закон})$$

и

$$(\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}) + \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}) = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} \quad (\text{ассоциативный закон}).$$

Умножение на скаляр. Произведением матрицы $\mathfrak{X} = (a_{ik})$ на произвольное комплексное число ρ (скаляр) называется матрица, каждый элемент которой равен соответствующему элементу матрицы \mathfrak{X} , умноженному на ρ :

$$\mathfrak{X}\rho = \rho\mathfrak{X} = (\rho a_{ik}). \quad (2)$$

Таким образом, по отношению к сложению и умножению на скаляр матрицы ведут себя, как их элементы.

б) Произведение квадратных матриц. Произведением двух квадратных матриц \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} одного и того же порядка называется матрица, обозначаемая через $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, элементы которой c_{ik} определяются с помощью соотношений

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (a_{ik})(b_{ik}) = \left(\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} b_{\nu k} \right) = (c_{ik}). \quad (3)$$

Иными словами, элемент c_{ik} , стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца, равен скалярному произведению i -го горизонтального вектора матрицы \mathfrak{X} и k -го вертикального вектора матрицы \mathfrak{Y} : $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Имеют место:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \text{ (ассоциативный закон умножения),} \quad (4)$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \quad (5)$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}} \right\} \text{(дистрибутивные законы).} \quad (6)$$

Перестановочность. Вообще говоря,

$$\left(\sum_{v=1}^n a_{i,v} b_{v,k} \right) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \left(\sum_{v=1}^n b_{i,v} a_{v,k} \right), \quad (7)$$

т. е. коммутативный закон умножения не имеет места. Поэтому две матрицы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , для которых выполнено соотношение $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, называются *взаимно перестановочными*. Например, матрица $\rho\mathfrak{E}$ (ρ — произвольное комплексное число, \mathfrak{E} — единичная матрица) перестановочна с любой матрицей. Мерой неперестановочности двух произвольных матриц \mathfrak{A} и \mathfrak{B} служит матрица

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}) \equiv [\mathfrak{A}\mathfrak{B}],$$

называемая *коммутатором* матриц \mathfrak{A} и \mathfrak{B} .

с) Произведение прямоугольных матриц. Если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — прямоугольные матрицы с числами строк и столбцов соответственно m_1, n_1 и m_2, n_2 , то в случае, когда $n_1 = m_2$, существует произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, получаемое по правилу (3); $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ при этом есть (m_1, n_2) -матрица. Аналогичным образом существует (m_2, n_1) -матрица $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, если $m_1 = n_2$. Этим иногда пользуются для представления системы линейных уравнений: если b есть $(m, 1)$ -матрица (b_i) ($i = 1, \dots, m$), x есть $(n, 1)$ -матрица (x_i) ($i = 1, \dots, n$), то система линейных уравнений с (m, n) -матрицей \mathfrak{A} может быть представлена с помощью равенства $\mathfrak{A}x = b$ (см. стр. 161).

д) Дифференцирование. Если элементы матрицы (a_{ik}) являются функциями параметра t , то производной данной матрицы называется матрица, элементами которой служат производные

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{A}(t) = \frac{d}{dt} (a_{ik}(t)) = \left(\frac{d}{dt} a_{ik}(t) \right).$$

е) Прямым произведением (m, n) -матрицы $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ и (m', n') -матрицы $\mathfrak{A}' = (a'_{ik})$ называется (mm', nn') -матрица

$$(c_{ii', kk'}) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}', \quad \text{где } c_{ii', kk'} = a_{ik} a'_{i'k'}.$$

Каждой комбинации ii' соответствует строка, каждой комбинации kk' — столбец прямого произведения.

Пример:

$$(a_1 a_2) \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & a_2 b_{11} & a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} & a_1 b_{22} & a_2 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}.$$

Всегда имеем:

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}') (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}') = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}' \mathfrak{B}'.$$

3. Определитель, ранг, след

а) Каждой *конечной квадратной* матрице \mathfrak{A} соответствует *определитель*. Этот определитель матрицы \mathfrak{A} обозначается символом $\det \mathfrak{A}$ (определение см. на стр. 176). Имеет место соотношение

$$\det \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \det \mathfrak{A} \cdot \det \mathfrak{B} \quad (\text{см. также стр. 178}),$$

б) Ранг r конечной (не обязательно квадратной) матрицы \mathfrak{A} определяется как наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы (см. стр. 177). Если матрица — квадратная n -го порядка, то число $n - r = d$ называется *дефектом* матрицы. Имеет место следующее предложение: дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждого из сомножителей и не больше суммы дефектов сомножителей.

в) Квадратная матрица \mathfrak{A} называется *вырожденной* (особенной, сингулярной), если $\det \mathfrak{A} = 0$, т. е. если ранг $r < n$, *невырожденной* (неособенной, регулярной), если $\det \mathfrak{A} \neq 0$, т. е. если ранг $r = n$. Невырожденная матрица называется также *обратимой* (см. 4с).

г) *Следом* (Sp) квадратной матрицы $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ называется сумма ее диагональных элементов:

$$\text{Sp } \mathfrak{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Имеют место равенства

$$\text{Sp} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \text{Sp } \mathfrak{A} + \text{Sp } \mathfrak{B}$$

и

$$\text{Sp} (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \text{Sp} (\mathfrak{B} \mathfrak{A}),$$

или, иначе, $\text{Sp} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$.

4. Специальные матрицы

а) Нулевая матрица. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*; она обозначается символом $\mathfrak{0}$ или просто 0. Имеют место равенства:

$$\det \mathfrak{0} = 0, \quad \mathfrak{A} + 0 = 0 + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} 0 = 0 \mathfrak{A} = 0.$$

В противоположность тому, что справедливо для обычных чисел; из $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$ не следует ни $\mathfrak{A} = 0$ или $\mathfrak{B} = 0$, ни $\mathfrak{B} \mathfrak{A} = 0$. Например,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{0} \quad \text{при любых } a, b, c, d.$$

Обе матрицы, стоящие в левой части, называются *делителями нуля*. В то же время

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac + bd & 0 \end{pmatrix} \neq \mathfrak{M}.$$

б) Единичная матрица. Она определяется условиями:

$$\mathfrak{E} = (\delta_{ik}), \text{ где } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Элементы, стоящие на *главной диагонали*: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, все равны 1, все прочие элементы равны нулю. Имеем:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}; \quad \det \mathfrak{E} = 1.$$

Вместо \mathfrak{E} пишут также 1.

с) Обратная матрица. Для всякой *невырожденной* конечной матрицы \mathfrak{M} ($\det \mathfrak{M} \neq 0$) существует однозначно определенная *обратная матрица* \mathfrak{M}^{-1} со свойствами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} &= \mathfrak{E}, & (\mathfrak{M}^{-1})^{-1} &= \mathfrak{M}, \\ (\mathfrak{M}\mathfrak{B})^{-1} &= \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}, & \det \mathfrak{M}^{-1} &= (\det \mathfrak{M})^{-1}. \end{aligned}$$

Вырожденные конечные матрицы ($\det \mathfrak{M} = 0$) не имеют обратных. Если \mathfrak{M}^{-1} существует, то \mathfrak{M} называется также *обратимой*.

Задача отыскания матрицы \mathfrak{M}^{-1} равносильна задаче отыскания решения системы линейных уравнений $\mathfrak{y} = \mathfrak{M}\mathfrak{x}$ или $\mathfrak{y} = \mathfrak{M}\mathfrak{x}$, в которой неизвестным служит \mathfrak{x} .

д) Степени, полиномы. Степени $\mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^3$ и т. д. часто называют *итерациями* матрицы \mathfrak{M} и соответственно также $\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}^{-2}$ и т. д., $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{E}$. Выражения вида

$$F(\mathfrak{M}) = \rho_0 \mathfrak{M}^h + \rho_1 \mathfrak{M}^{h-1} + \dots + \rho_{h-1} \mathfrak{M} + \rho_h \mathfrak{E}$$

называются *полиномами* от \mathfrak{M} .

5. Матрицы со свойствами симметрии

а) Квадратная матрица \mathfrak{R} называется *канонической*, если $a_{ik} = 0$ при $i < k$ или $i > k$, т. е. если все ее элементы, расположенные выше главной диагонали, или все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Матрица \mathfrak{E} является, следовательно, канонической. Имеем:

$$\det \mathfrak{R} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Если равны нулю *все* элементы, не принадлежащие главной диагонали, т. е. если матрица имеет вид $\mathfrak{D} = (d_k \delta_{ik})$, то она называется *диагональной*. Имеем:

$$\det \mathfrak{D} = d_1 d_2 \dots d_n.$$

Поскольку диагональные матрицы обладают преимуществом особой наглядности, часто стремятся заменить матрицы соответствующими им диа-

гональными матрицами. Диагональные матрицы всегда перестановочны между собой. В частности, матрицы вида $\rho \mathcal{E}$ (которые ведут себя так же, как числа ρ) перестановочны со всеми матрицами (см. (2)). Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы по модулю равны 1, называется *фазовой матрицей* ($e^{i\varphi_{ik}} \delta_{ik}$) (Phasenmatrix). Если элементы диагональной матрицы сами являются матрицами, то такая матрица называется *квазидиагональной*, или *клеточно-диагональной*.

б) Транспонированная, комплексно-сопряженная, сопряженная, контрагredientная матрицы. Матрицы \mathfrak{A} соответствуют¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{транспонированная матрица:} & \quad \tilde{\mathfrak{A}} = (a_{ki}), \\ \text{комплексно-сопряженная матрица:} & \quad \mathfrak{A}^* = (a_{ik}^*), \\ \text{сопряженная матрица:} & \quad \mathfrak{A}^\dagger = (a_{ki}^*) = \tilde{\mathfrak{A}}^*. \end{aligned}$$

$(\mathfrak{A}^\dagger)^{-1}$ называется также матрицей, *контрагredientной* к \mathfrak{A} . Имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \overbrace{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})} &= \tilde{\mathfrak{A}} + \tilde{\mathfrak{B}}; & (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^* &= \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*; & (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger &= \mathfrak{A}^\dagger + \mathfrak{B}^\dagger; \\ \overbrace{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} &= \tilde{\mathfrak{B}}\tilde{\mathfrak{A}}; & (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* &= \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*; & (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger &= \mathfrak{B}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger; \\ \overbrace{\mathfrak{A}^{-1}} &= (\tilde{\mathfrak{A}})^{-1}; & (\mathfrak{A}^{-1})^* &= (\mathfrak{A}^*)^{-1}; & (\mathfrak{A}^{-1})^\dagger &= (\mathfrak{A}^\dagger)^{-1}; \\ \det \tilde{\mathfrak{A}} &= \det \mathfrak{A}; & \det \mathfrak{A}^* &= (\det \mathfrak{A})^*; & \det \mathfrak{A}^\dagger &= (\det \mathfrak{A})^*; \\ \tilde{\tilde{\mathfrak{A}}} &= \mathfrak{A}; & \mathfrak{A}^{**} &= \mathfrak{A}; & \mathfrak{A}^{\dagger\dagger} &= \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

с) Симметрические, эрмитовы, кососимметрические, альтернирующие матрицы. Если матрица \mathfrak{A} совпадает со своей транспонированной: $\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$, $a_{ik} = a_{ki}$ для всех i, k , то она называется *симметрической*. Если матрица \mathfrak{A} совпадает со своей сопряженной, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$, $a_{ik} = a_{ki}^*$, то она называется *эрмитовой*, или *самосопряженной*. Диагональные элементы эрмитовой матрицы, а также ее определитель действительны. Действительная эрмитова матрица является симметрической. Следующие формулы справедливы также для произвольной симметрической матрицы (\sim вместо †). Из $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\dagger$ следует: $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $(F(\mathfrak{A}))^\dagger = F(\mathfrak{A})$ ($F(a)$ — произвольный полином), $(\mathfrak{A}^{-1})^\dagger = \mathfrak{A}^{-1}$ при условии, что $\det \mathfrak{A} \neq 0$; в то же время

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{B}\mathfrak{A},$$

т. е. произведение двух эрмитовых матриц является эрмитовой матрицей *лишь в том случае*, когда множители перестановочны.

Все собственные значения эрмитовой матрицы действительны (см. 6б, стр. 173); действительными будут также значения *эрмитовой*

¹⁾ Встречающиеся в литературе обозначения очень различны. Обозначения, применяемые здесь, сохраняют свой смысл на протяжении всей книги.

формы $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k^*$, $(a_{ik}) = (a_{ki}^*)$ при любых значениях x_i . Если эрмитова форма при произвольных значениях переменных x_i всегда имеет положительные (неотрицательные) значения, то она называется *положительно определенной (полуопределенной)*. В этом случае собственные значения матрицы, соответствующие рассматриваемой форме, все положительны (неотрицательны).

Матрица \mathfrak{A} со свойством $\mathfrak{A}^\dagger = -\mathfrak{A}$ называется *альтернирующей*¹⁾; такая матрица может быть представлена в виде произведения i на эрмитову матрицу. Действительная альтернирующая матрица называется *кососимметрической*, или *антисимметрической*, $\mathfrak{A}^\dagger = -\mathfrak{A}$. Все диагональные элементы a_{ii} альтернирующей матрицы являются чисто мнимыми, все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны нулю. Альтернирующая матрица четного порядка имеет действительный определитель, нечетного порядка — чисто мнимый; ранг кососимметрической матрицы всегда есть четное число.

Произвольную матрицу всегда можно однозначным образом представить в виде суммы:

эрмитовой и альтернирующей матриц,
симметрической и кососимметрической²⁾ матриц.

д) Унитарные, ортогональные матрицы. Матрица \mathfrak{U} , удовлетворяющая условию $\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, или, что то же, $\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}$, называется *унитарной*. Если матрица \mathfrak{U} является унитарной, то унитарными будут также матрицы \mathfrak{U}^{-1} , $\bar{\mathfrak{U}}$, \mathfrak{U}^* , \mathfrak{U}^\dagger ; вместе с \mathfrak{U}_1 и \mathfrak{U}_2 унитарными будут также $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ и $\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1$. Для конечных унитарных матриц имеем $|\det \mathfrak{U}| = 1$, т. е. $\det \mathfrak{U} = e^{i\varphi}$. Матрица $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U}$, *полученная из эрмитовой матрицы \mathfrak{A} преобразованием с помощью унитарной матрицы \mathfrak{U}* , всегда является также эрмитовой.

Матрица \mathfrak{D} называется *ортогональной*, если для нее справедливо равенство $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$. Всякая действительная унитарная матрица является ортогональной. Все правила действий с унитарными матрицами могут быть перенесены на ортогональные. Для конечной ортогональной матрицы \mathfrak{D} имеем: $\det \mathfrak{D} = \pm 1$ (см. также стр. 188).

6. Преобразование матриц

а) Общие факты. Матрицей, полученной из произвольной квадратной (или бесконечной) матрицы \mathfrak{A} преобразованием с помощью *обратимой* матрицы \mathfrak{S} , называется матрица $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}$; обратно, матрица $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathfrak{C}\mathfrak{S}^{-1}$ является матрицей, полученной из матрицы \mathfrak{C} преобразованием с помощью матрицы \mathfrak{S}^{-1} . Матрицы \mathfrak{A} и $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}$

¹⁾ Или *эрмитовой кососимметрической*. (Прим. ред.)

²⁾ При условии, что кососимметрическими будем называть также и не вещественные матрицы, обладающие свойством $\mathfrak{A}^\dagger = -\mathfrak{A}$. (Прим. ред.)

называются *подобными*. Подобные матрицы имеют один и тот же ранг; они описывают одно и то же линейное преобразование (см. стр. 186). Матрица, подобная сумме (произведению) двух матриц, равна сумме (произведению) подобных матриц:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} &= \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{C}; \\ \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} &= (\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C})(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C})^{-1} \text{ и } \mathcal{C}^{-1}F(\mathcal{A})\mathcal{C} = F(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}),$$

где $F(\mathcal{A})$ означает произвольный полином от матрицы \mathcal{A} . Таким образом, каждому преобразованию матриц с помощью какой-либо невырожденной матрицы соответствует такое же преобразование их сумм, произведений, обратных матриц и полиномов от них.

б) Инварианты (см. также стр. 185; сказанное там с соответствующими изменениями сохраняет силу также для данного раздела).

Важнейшие инварианты даются инвариантным *характеристическим*, или *вековым*, *полиномом* матрицы:

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum a_{ii} \lambda^{n-1} + \dots - \sum A_{ii} \lambda + \det \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Коэффициенты этого полинома являются инвариантами; среди них — *след*

$$\sum a_{ii} = \text{Sp} \mathcal{A} = \text{Sp}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C})$$

и *определитель*

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}).$$

Важными инвариантами служат n корней *характеристического уравнения* матрицы \mathcal{A} , $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$, — *собственные значения* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Их совокупность (каждый корень считается столько раз, какова его кратность) образует *спектр* матрицы \mathcal{A} ; он состоит в точности из тех значений λ , для которых $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ — *резольвента* матрицы \mathcal{A} — перестает существовать. Имеем:

$$\text{Sp} \mathcal{A} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Ранг равен числу отличных от нуля собственных значений; матрица \mathcal{A} является вырожденной в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из собственных значений равно нулю. Степеням \mathcal{A}^h ($h=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) матрицы \mathcal{A} соответствуют собственные значения $(\lambda_i)^h$ ($i=1, \dots, n$), полиномам $F(\mathcal{A})$ (см. 4d) — собственные значения $F(\lambda_i)$.

Пример. Для квадратной матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4} + bc}.$$

с) *Нормальная форма.* Важной является задача отыскания для данной матрицы \mathfrak{A} подобной ей матрицы $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ возможно более простого вида (*приведение матрицы \mathfrak{A} к нормальной форме*). По нормальной форме можно более легко усмотреть свойства, остающиеся при преобразовании инвариантными; кроме того, подобными друг другу являются те и только те матрицы, которые могут быть приведены к одной и той же нормальной форме. Если нормальная форма представляет собой диагональную матрицу, то имеем $\mathfrak{D} = (\lambda_i \delta_{ik})$; на главной диагонали стоят собственные значения.

Матрица \mathfrak{A} может быть преобразована к диагональной форме:

а) если ее собственные значения все различны. k -й столбец \mathfrak{s}_k матрицы \mathfrak{S} находится из системы линейных уравнений $(\mathfrak{A} - \lambda_k \mathfrak{E}) \mathfrak{s}_k = 0$ и определен с точностью до постоянного множителя;

б) если матрица \mathfrak{A} является эрмитовой, унитарной или симметрической (см. также d). В этих случаях спектр представляет собой *полную систему инвариантов* (см. стр. 185). В прочих случаях существуют, вообще говоря, еще и дальнейшие инварианты, отысканием которых занимается теория элементарных делителей. Преобразование к диагональной форме в общем случае невозможно.

д) *Унитарные преобразования.* Какова бы ни была эрмитова или унитарная матрица \mathfrak{H} , всегда существует *унитарная* матрица \mathfrak{U} такая, что матрица

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{U} = \mathfrak{D} = (\lambda_i \delta_{ik}) = \sum_{j=1}^l \Lambda_j \mathfrak{F}^{(j)} \quad (8)$$

имеет диагональную форму. Здесь $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_l$ означают различные собственные значения \mathfrak{H} из числа n имеющихся собственных значений, причем Λ_j как корень уравнения $\det(\mathfrak{H} - \Lambda \mathfrak{E}) = 0$ имеет кратность ρ_j ; $\mathfrak{F}^{(j)} = (f_{ik}^{(j)})$ означает диагональную матрицу, для которой $f_{ii}^{(j)} = 1$ при $\lambda_i = \Lambda_j$ и $f_{ii}^{(j)} = 0$ при $\lambda_i \neq \Lambda_j$.

Однородная линейная система уравнений

$$(\mathfrak{H} - \Lambda_j \mathfrak{E})\mathfrak{I}_j = 0, \quad \mathfrak{H}^\dagger = \mathfrak{H},$$

имеет ρ_j линейно независимых решений $\mathfrak{I}_j^{(1)}, \mathfrak{I}_j^{(2)}, \dots, \mathfrak{I}_j^{(\rho_j)}$ — *собственных решений* матрицы \mathfrak{H} , принадлежащих значению Λ_j , которые могут быть выбраны нормированными и попарно ортогональными:

$$(\mathfrak{I}_j^{(h)}, \mathfrak{I}_j^{(k)}) = 1, \quad (\mathfrak{I}_j^{(h)}, \mathfrak{I}_k^{(k)}) = 0, \quad h \neq k.$$

Таких различных нормированных и попарно ортогональных собствен-

ных решений $\Gamma_j^{(k)}$ ($k=1, \dots, \rho_j$; $j=1, \dots, l$) мы получим всего $n = \sum_{j=1}^l \rho_j$. Они могут быть приняты за n столбцов унитарной матрицы U в равенстве (8). Аналогичные факты имеют место для ортогональных преобразований симметрических матриц (см. также стр. 164 — 165).

Если также $U_1^{-1} \mathfrak{H} U_1 = \mathfrak{D}$, то $U_1 U^{-1}$ — квазидиагональная матрица, l диагональных клеток которой являются унитарными матрицами, имеющими соответственно порядки ρ_1, \dots, ρ_l ; если среди чисел λ_i нет совпадающих, то $U_1 U^{-1}$ — фазовая матрица.

Всякая унитарная матрица может быть при помощи унитарной матрицы преобразована к диагональной форме, т. е. к некоторой фазовой матрице.

е) Одновременное преобразование нескольких матриц. Если эрмитовы или унитарные матрицы $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m$ все попарно перестановочны, то существует унитарная матрица U такая, что матрицы $U^{-1} \mathfrak{B}_1 U, U^{-1} \mathfrak{B}_2 U, \dots, U^{-1} \mathfrak{B}_m U$, полученные из данных матриц преобразованием с помощью матрицы U , все являются диагональными матрицами.

7. Бесконечные матрицы

а) Если порядок n квадратной матрицы неограниченно возрастает, то получаем бесконечную матрицу

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (a_{ik}).$$

Квадратная матрица, у которой оба индекса $\leq q$, являющаяся частью данной бесконечной матрицы, называется *усеченной матрицей* порядка q , $(a_{ik})_{(q)}$ (q -ter Abschnitt) бесконечной матрицы.

Определения и правила, сформулированные на стр. 167 и следующих, относящиеся к действиям с конечными квадратными матрицами, справедливы здесь лишь с некоторыми дополнительными ограничениями. Для того чтобы можно было образовать произведение в соответствии с правилом (3), необходимо потребовать, чтобы все встречающиеся суммы были сходящимися. Законы (4), (5), (6), вообще говоря, утрачивают силу. На случай так называемых ограниченных матриц могут быть перенесены 2а и 2б (стр. 167). При этом матрица называется *ограниченной*, если для любых систем значений x_1, x_2, \dots и y_1, y_2, \dots , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \leq 1, \quad \text{имеем} \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k \right| \leq M$$

(M не зависит от x_i и y_i).

След определяется согласно (7) при условии, что сумма сходится. Возможен случай, когда, несмотря на то, что $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\text{Sp } \mathfrak{A}$ и $\text{Sp } \mathfrak{B}$

существуют, $\text{Sp } \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ и $\text{Sp } \mathfrak{B} \mathfrak{A}$ расходятся, причем $\text{Sp } [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ (см. (4)) существует и не равен 0.

Относительно определителя бесконечной матрицы см. «Бесконечные определители», стр. 180. Вообще говоря, ранг является бесконечным, дефект же и число линейно независимых решений системы однородных линейных уравнений, соответствующей данной матрице, конечны.

б) Нулевая матрица и единичная матрица определяются в соответствии с 4а и 4б. Что касается матрицы, обратной бесконечной матрице, то необходимо различать:

матрицу \mathfrak{X} , *левую обратную* по отношению к матрице \mathfrak{A} , определяемую условием $\mathfrak{X} \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$,

матрицу \mathfrak{Y} , *правую обратную* по отношению к матрице \mathfrak{A} , определяемую условием $\mathfrak{A} \mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$.

Равносильными являются (см. также А1б, стр. 161): задача отыскания матрицы \mathfrak{X} — задаче решения системы линейных уравнений $\eta = \mathfrak{A} \xi$ относительно ξ ,

матрицы \mathfrak{Y} — задаче решения системы линейных уравнений $\eta = \mathfrak{A} \xi$ относительно ξ .

Для каждой системы, в которой действия, указанные в 2, являются неограниченно выполнимыми и подчиняются перечисленным там законам (например, для системы ограниченных матриц), справедливы предложения:

а) Если \mathfrak{A} имеет как левую, так и правую обратные матрицы, то эти матрицы совпадают и определены однозначно.

б) Если \mathfrak{A} имеет одну и только одну правую обратную матрицу, то эта матрица является также левой обратной и определена однозначно.

В частности, для эрмитовой матрицы \mathfrak{H} имеем теорему: либо для \mathfrak{H} не существует ни левой, ни правой обратных матриц, либо же существует в точности одна матрица, являющаяся для \mathfrak{H} одновременно и левой, и правой (эрмитовой) обратной матрицей.

с) Относительно преобразований бесконечных матриц остается в силе сказанное в 6а. Собственные значения определяются как те значения λ , для которых резольвента перестает существовать. Является существенным то, что определенные таким образом собственные значения могут заполнять непрерывную область (*непрерывный спектр*). Нормальная форма (8), стр. 174, содержит в этом случае еще одно слагаемое, имеющее вид интеграла.

С. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Определения

Определителем квадратной матрицы из $n \cdot n$ элементов a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) называется сумма всех произведений

$$\epsilon(r_1, r_2, \dots, r_n) a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

в которых (r_1, r_2, \dots, r_n) есть некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$; при этом $\epsilon(r_1, r_2, \dots, r_n) = +1$, если перестановка (r_1, r_2, \dots, r_n) четная и $= -1$, если эта перестановка нечетная (см. D1, стр. 181).

Соответствующий квадратной матрице $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ n -го порядка *определитель n -го порядка* записывается в форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ik}) = \det \mathfrak{A} = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Миноры¹⁾. Определители квадратных матриц r -го порядка, получающихся из матрицы \mathfrak{B} с m строками и n столбцами посредством вычеркивания из нее $m - r$ строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_{m-r} и $n - r$ столбцов с номерами k_1, k_2, \dots, k_{n-r} , называются *минорами r -го порядка матрицы \mathfrak{B}* . Произведение этого минора на $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_{m-r}+k_1+k_2+\dots+k_{n-r}}$ (показатель называется индексом минора) называется *субопределителем r -го порядка матрицы \mathfrak{B}* . Матрица \mathfrak{B} имеет всего $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$ миноров (субопределителей) r -го порядка. Если матрица \mathfrak{B} — квадратная, то минор $n - r$ -го порядка (субопределитель $n - r$ -го порядка), получающийся посредством вычеркивания из матрицы тех r строк и r столбцов, которые перед этим сохранялись, называется *дополнительным минором* (соответственно *алгебраическим дополнением*) минора, рассматривавшегося ранее. Если, в частности, из квадратной матрицы (a_{ik}) вычеркнуть i -ю строку и k -й столбец и умножить полученный минор на $(-1)^{i+k}$, то полученное произведение называется *алгебраическим дополнением элемента a_{ik}* (оно обозначается через A_{ik}).

2. Теоремы об определителях

а) Теорема о разложении (Лаплас):

$$\det \mathfrak{A} = |a_{ik}| = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu h} A_{\nu h} = \sum_{\nu=1}^n a_{h\nu} A_{h\nu} \quad (h = 1, 2, \dots, n);$$

в то же время

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu h} A_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^n a_{h\nu} A_{j\nu} = 0 \quad (h \neq j).$$

б) Определитель *равен нулю*, если

- 1) все элементы одного ряда (столбца или строки) равны нулю, или
- 2) все элементы какого-либо ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ему ряда, или

¹⁾ Русская и немецкая терминологии здесь значительно расходятся. В соответствии с принятым в русской математической литературе словоупотреблением мы переводим немецкие наименования следующим образом: *Unterdeterminante einer Matrix* — *минор матрицы*, *Minor einer Matrix* — *субопределитель матрицы* (этот термин в современной русской литературе почти не встречается), *konjugierte Unterdeterminante* — *дополнительный минор*, *konjugierter Minor* — *алгебраическое дополнение минора*, *Minor zum Element* — *алгебраическое дополнение элемента*. (Прим. ред.)

3) все элементы какого-либо ряда представляют собой одну и ту же линейную комбинацию соответствующих элементов параллельных ему рядов, т. е. вообще: если несколько параллельных рядов линейно зависимы.

с) Определитель *не изменяет своего значения*, если

1) он подвергается транспонированию, т. е. все элементы a_{ik} заменяются элементами a_{ki} ,

2) к элементам одного из его рядов прибавляются соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

д) При перестановке двух параллельных рядов определитель *изменяет только свой знак*.

е) Если все элементы какого-либо ряда определителя умножаются на одно и то же число, то определитель *умножается на это же число*.

3. Умножение, дифференцирование

Произведение двух определителей $\det(a_{ik}) \cdot \det(b_{ik})$ равно определителю $\det(c_{ik})$, элементы которого могут быть получены любым из четырех следующих способов (справа записаны соответствующие матричные уравнения):

$$1. c_{ik} = \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}; \quad \mathbb{C} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}.$$

$$2. c_{ik} = \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{k\nu} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}; \quad \mathbb{C} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}.$$

$$3. c_{ik} = \sum_{\nu} a_{\nu i} b_{k\nu} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots + a_{ni} b_{kn}; \quad \mathbb{C} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}.$$

$$4. c_{ik} = \sum_{\nu} a_{\nu i} b_{\nu k} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots + a_{ni} b_{nk}; \quad \mathbb{C} = \mathfrak{N}\mathfrak{B}.$$

Относительно *дифференцирования* определителя справедливо следующее:

$$\frac{\partial |a_{ik}|}{\partial a_{nj}} = A_{nj} \quad (A_{nj} \text{ — алгебраическое}$$

$$\frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{nj} \partial a_{lm}} = - \frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{nm} \partial a_{lj}}, \quad \text{дополнение элемента } a_{nj}),$$

при условии, что все a_{ik} являются независимыми переменными.

4. Оценка и окаймление определителя

а) Для определителя n -го порядка справедливо следующее неравенство, принадлежащее Адамару:

$$|\det(a_{ik})|^2 \leq \prod_{i=1}^n (|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \dots + |a_{in}|^2).$$

б) Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & \omega \end{vmatrix} = \omega |a_{ik}| - \sum_i \sum_k A_{ik} u_i v_k$$

В частном случае, когда $\omega = 1$ и все $u_i = 0$ или все $v_i = 0$, получаем для рассматриваемого определителя значение $= |a_{ik}|$, т. е. значение исходного определителя.

5. Специальные определители

а) Для так называемого *определителя Вандермонда*, в котором $a_{ik} = (a_k)^{i-1}$, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k, l \\ k > l}} (a_k - a_l) \quad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные числа.

б) Симметрический определитель, в котором $a_{ik} = a_{i+k-1}$ и $a_{i \pm n} \equiv a_i$, т. е. имеющий вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = Z_n,$$

называется *циркулянт*ом, или *циклическим определителем*.

Его значение равно

$$Z_n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \omega^k + a_3 \omega^{2k} + \dots + a_n \omega^{(n-1)k}),$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (или какому-либо другому *первообразному* корню n -й степени из единицы).

с) *Определитель Грама*. Для существования линейной зависимости между m векторами n -мерного пространства $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$ (см. стр. 25) необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама этих векторов

$$\det(a_i, a_k) = \det \left(\sum_{v=1}^n a_{iv} a_{kv}^* \right) = \begin{vmatrix} a_1^2 & (a_1 a_2) & \dots & (a_1 a_m) \\ (a_2 a_1) & a_2^2 & \dots & (a_2 a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m a_1) & (a_m a_2) & \dots & a_m^2 \end{vmatrix} = \det (\mathfrak{A} \mathfrak{A}^t)^1,$$

¹⁾ Здесь автор обозначает скалярное произведение векторов a_i и a_k символом $(a_i a_k)$ (а не $(a_i a_k^*)$, как выше). (Прим. ред.)

где $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, был равен нулю. Этот определитель равен квадрату объема гиперпараллелепипеда, построенного на векторах α_i .

d) *Определитель Вронского.* Для существования линейной зависимости между n функциями $f_k(x)$ переменного x необходимо¹⁾, чтобы определитель Вронского

$$\det \left| \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} f_k(x) \right| = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_1(x) & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_2(x) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_n(x) \\ \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} f_1(x) & \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} f_2(x) & \dots & \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} f_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_1(x)}{dx} & \frac{df_2(x)}{dx} & \dots & \frac{df_n(x)}{dx} \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \end{vmatrix}$$

был тождественно равен нулю.

6. Бесконечные определители

Если существует предел определителя усеченной матрицы порядка q бесконечной матрицы,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \det (a_{ik})_{[q]} = D,$$

то D называется определителем бесконечной матрицы (a_{ik}) ; в этом случае D есть *сходящийся бесконечный определитель*. Если при этом

$$\text{ряд } \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^{\infty} a_{ik} \text{ и бесконечное произведение } \prod_{i=1}^{\infty} a_{ii}$$

оба являются сходящимися, то определитель называется *нормальным*. Миноры нормального определителя нормальны. Для нормальных определителей справедливы предложения, аналогичные тем, которые имеют место для конечных определителей (см. пп. 2 и 3).

7. Практическое вычисление

Из элементов i -й строки определителя $\det (a_{ik})$ вычитают соответствующие элементы первой строки, умноженные предварительно на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Значение определителя при этом не изменится. Если проделать

¹⁾ Если функции $f_k(x)$ ($k=1, \dots, n$) являются частными решениями дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0,$$

коэффициенты которого $p_1(x), \dots, p_n(x)$ непрерывны, то обращение в нуль определителя Вронского этих функций представляет собой также достаточное условие линейной зависимости этих функций. (Прим. ред.)

это со всеми строками (кроме первой), то определитель примет вид

$$\det(a_{ik}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

При помощи того же самого способа понижают порядок определителя, образованного числами b и т. д. В конце концов значение определителя $\det(a_{ik})$ получается в виде произведения n чисел. Часто при этом бывает полезно переставить строки или столбцы (необходимо учитывать, что такая перестановка может повлечь перемену знака определителя); в тех случаях, когда это возможно, общие множители элементов строки или столбца следует выносить за знак определителя.

Значение $\det(a_{ik})$ можно найти также при помощи решения систем линейных уравнений. Следует решить последовательно такие системы уравнений:

1. $a_{11}x = 1$.
2. $\begin{cases} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 = 0, \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 = 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3 = 0, \\ a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}z_3 = 0, \\ a_{31}x_3 + a_{32}y_3 + a_{33}z_3 = 1 \end{cases}$ и т. д.

Тогда получим:

$$\det(a_{ik}) = \frac{1}{x_1 y_2 z_3 \cdots \omega_n}.$$

Таким образом, вычисление определителей и решение систем линейных уравнений представляют собой практически одну и ту же задачу.

D. КОМБИНАТОРИКА

1. Перестановки

а) n различных элементов допускают $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ (n факториал) различных способов упорядочения в одну последовательность (*перестановки*). *Перестановка* называется *четной* (*нечетной*), если она может быть получена из первоначального расположения при помощи четного (нечетного) числа *транспозиций*. Транспозицией называется преобразование перестановки, состоящее в том, что два ее элемента меняют местами. Если перестановка чисел $1, 2, \dots, n$ является четной (нечетной), то общее число случаев, когда большее число предшествует меньшему (число *беспорядков*), также будет четным (нечетным).

б) Если среди n элементов имеются совпадающие, а именно, имеется класс, состоящий из α совпадающих между собой элементов, затем класс, состоящий из β совпадающих между собой элементов, затем класс, состоящий из γ совпадающих между собой элементов и т. д., то такие n элементов допускают $\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$ различных способов упорядочения (*перестановки с повторениями*).

2. Сочетания, размещения

а) r различных элементов из общего числа имеющих n различных элементов могут быть

выбраны (без учета порядка) $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ различными способами (*сочетания*),

выбраны и упорядочены $\binom{n}{r} r! = \frac{n!}{(n-r)!}$ различными способами (*размещения*).

б) Если каждый из n имеющих r различных элементов может быть взят любое число раз, то r элементов могут быть

выбраны $\binom{n+r-1}{r} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}$ различными способами (*сочетания с повторениями*); **выбраны и упорядочены** n^r различными способами (*размещения с повторениями*).

3. Биномиальные коэффициенты

Здесь k — натуральное число $\leq n$; m, n — произвольные натуральные числа; x, y — произвольные действительные или комплексные числа.

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = \binom{x}{m-1} \frac{x-m+1}{m};$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

В частности, имеем:

$$\binom{x}{0} = 1; \quad \binom{x}{1} = x; \quad \binom{n}{n-1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{m} = 0 \quad \text{при } m > n.$$

Имеют место правила (в предположении, что $m \leq x, m \leq y$):

$$\binom{x+y}{m} = \binom{x}{m} \binom{y}{0} + \binom{x}{m-1} \binom{y}{1} + \dots$$

$$\dots + \binom{x}{0} \binom{y}{m} \quad (\text{теорема сложения}).$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \binom{x+1}{m} &= \binom{x}{m} + \binom{x}{m-1}, \\ \binom{2n}{n} &= 1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2, \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k}, \\ \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} (-1)^n, \\ \binom{-x}{n} &= (-1)^n \binom{x+n-1}{n}, \\ \binom{n-x}{n} &= (-1)^n \binom{x-n}{n}. \end{aligned}$$

Далее, при $n \neq 0$ имеем:

$$\binom{n}{0} \pm \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \dots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} = (1 \pm 1)^n = \begin{cases} 2^n \\ 0 \end{cases}$$

Поведение $\binom{n}{k}$ при больших n и k характеризуется соотношениями:

$$\binom{n}{k} = e^{-\frac{n-1}{2} z^2} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} F_n; \quad z = \frac{\left| \frac{n}{2} - k \right|}{\frac{n}{2}}; \quad z \ll \sqrt[3]{\frac{1}{n}},$$

где

$$F_n = e^{\theta \frac{nz^3}{1-z}} = 1 + \theta \frac{nz^3}{1-z} + \dots; \quad -\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}.$$

Приближение тем лучше, чем ближе k к $\frac{n}{2}$. Если $k \ll n$, то

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} e^{-\theta \frac{k^2}{n-k}}; \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

При k , n и $n-k$, больших по сравнению с 1, с помощью формулы Стирлинга (стр. 154) получаем $\left(\frac{k}{n} = \alpha\right)$:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \alpha (1-\alpha)}} \left\{ \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right\}^n.$$

РАЗДЕЛ ШЕСТОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А. ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Общие сведения

а) Преобразование ставит в соответствие системе значений x_1, x_2, \dots, x_n некоторую другую систему значений x'_1, x'_2, \dots, x'_n при помощи системы уравнений вида

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad x'_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Обращение. Относительно функций f_i мы предполагаем, что они являются непрерывными и дифференцируемыми и что их функциональный определитель — *определитель преобразования* —

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$$

для подвергающихся преобразованию систем значений отличен от нуля. Тогда система уравнений (1) может быть разрешена относительно x_i^{-1} ; уравнения

$$x_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

определяют *обратное* преобразование. Преобразование (1) при этом называется *обратимым*.

б) Групповое свойство. Обратимые преобразования некоторого многообразия образуют группу (см. стр. 288); два последовательно произведенных преобразования S и T равносильны одному преобразованию TS . Вообще говоря, $TS \neq ST$. Единичным элементом группы является тождественное преобразование E :

$$x_i = x'_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Обратным элементом для преобразования S является обратное преобразование S^{-1} , определяемое соотношениями (2), для которого имеем $SS^{-1} = S^{-1}S = E$.

¹⁾ Это утверждение требует уточнения, которое дается автором ниже (см. 2с). (Прим. ред.)

2. Геометрическая интерпретация

Преобразование может быть геометрически интерпретировано как:

а) *Преобразование координат*, т. е. переход от описания с помощью координат x_1, \dots, x_n к описанию с помощью координат x'_1, \dots, x'_n . В этом случае x_i и x'_i представляют собой координаты одной и той же точки в различных системах координат. Если f_i — произвольные дифференцируемые функции, то, исходя из декартовой системы координат, мы получаем, вообще говоря, некоторую систему криволинейных координат.

б) *Деформация* многообразия, т. е. отображение многообразия в себя, перемещение точки x_i в точку x'_i в той же системе координат. При этом прямые линии переходят, вообще говоря, в кривые.

с) *Отображение* x_1, \dots, x_n -многообразия в некоторое другое многообразие, элементами которого служат системы значений x'_1, \dots, x'_n . При произвольных (дифференцируемых) функциях f_i отображение в целом не обязательно будет однозначным; в малом преобразование всегда однозначно (при условии, что определитель преобразования $\neq 0$), т. е. *достаточно малая окрестность* точки x_i всегда отображается в окрестность точки x'_i однозначно обратимым образом.

Определитель преобразования всегда представляет собой отношение, в котором изменяется бесконечно малый объем, т. е. отношение преобразующихся друг в друга элементов объема (см. стр. 65).

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

3. Инварианты

Характер преобразования $T: x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ выявляется в тех свойствах преобразуемого многообразия, которые при преобразовании T остаются *инвариантными*. Для функций, описывающих такие свойства, справедливо равенство

$$K(x_1, \dots, x_n) = x \cdot K(x'_1, \dots, x'_n),$$

иначе говоря, при замене первоначальных координат x_1, \dots, x_n новыми координатами x'_1, \dots, x'_n эти функции сохраняют свои значения с точностью до множителя x , который зависит лишь от параметров, характеризующих преобразование. Функции $K(x_1, \dots, x_n)$ называются *инвариантами*. Уравнения и системы уравнений, которые при преобразовании не изменяются, называются *ковариантными*.

Преобразования данного многообразия, исходя из характера их инвариантов, подразделяют на классы. Преобразования, принадлежащие к одному классу, образуют группу. *Полной* называется такая система независимых инвариантов, которая достаточна для того, чтобы полностью характеризовать класс преобразований; все прочие инварианты

преобразований этого класса могут быть получены с помощью инвариантов полной системы. Вообще говоря, чем уже класс преобразований, тем больше имеется независимых инвариантов, принадлежащих ему.

Далее, инварианты привлекаются для решения вопроса о том, в каких случаях два многообразия могут быть отображены одно на другое с помощью преобразований, принадлежащих данному классу. Это имеет место в том и только в том случае, когда значения инвариантов, образующих относительно данного класса преобразований полную систему, для обоих многообразий совпадают.

Инварианты преобразования координат называются также *скалярами* (например, расстояние между двумя точками, площадь поверхности); особую важность имеет линейный элемент, или элемент длины дуги, $ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k} = \sqrt{\sum_{i,k} g'_{ik} dx'_i dx'_k}$. Если зависимость g_{ik} от x_i известна, то тем самым в многообразии, описываемом с помощью x_i , определены все метрические соотношения.

Примеры см. на стр. 256.

В. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Линейные пространства

а) n -мерное *линейное*, или *аффинное*, пространство состоит из всех точек, положение которых относительно некоторой фиксированной системы координат определяется n координатами x_1, x_2, \dots, x_n (*точечное пространство*) или из всех векторов $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ (*векторное пространство*). При линейном преобразовании

$$x'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad \xi' = \mathfrak{A}\xi \quad (3)$$

оно преобразуется в себя, отображается на себя. Каждой точке (соответственно, каждому вектору) ставится в соответствие другая точка (соответственно, вектор), притом однозначно обратимым образом¹). Матрица $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ представляет оператор, осуществляющий отображение.

б) Унитарное пространство. Если x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные комплексные числа и длина $|\xi|$ вектора ξ задана при помощи единичной эрмитовой формы

$$|\xi| = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \quad (x_i^* \text{ — число, комплексно-сопряженное с } x_i), \quad (4)$$

¹ Однозначная обратимость имеет место, конечно, лишь при условии, что матрица \mathfrak{A} является невырожденной. (Прим. ред.)

При *коллинеарном* отображении остаются *инвариантными*: двойное отношение четырех элементов (прямых, точек), степень алгебраических кривых и поверхностей.

Таким образом, прямые, плоскости, пучки прямых и т. д., конические сечения и вообще кривые и поверхности второго порядка остаются таковыми же.

Бесконечно удаленные элементы переходят, вообще говоря, в конечные, системы параллельных прямых переходят в пучки прямых.

Декартова система координат переходит в проективную систему координат, состоящую из $n - 1$ пучков прямых (или пучков плоскостей).

Если знаменатели приводятся к постоянным, то преобразование называется «*аффинным*». При аффинном преобразовании конечная часть пространства переходит в себя (параллельные прямые остаются параллельными).

3. Унитарные и ортогональные преобразования

Линейное *однородное* преобразование, для которого

$$\sum_k a_{ik}^* a_{ik} = \sum_k a_{ki}^* a_{ki} = \delta_{ii} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

называется *унитарным*¹⁾. Если все a_{ik} действительны, то преобразование обычно называют *ортогональным*. Преобразование оставляет инвариантной форму $\sum_i x_i^* x_i$ (соответственно $\sum_i x_i^2$). Для определителя унитарного преобразования имеем $|\det(a_{ik})| = 1$ (для ортогонального преобразования будет, следовательно, $\det(a_{ik}) = \pm 1$). Число независимых коэффициентов преобразования равно $\frac{n}{2}(n - 1)$. Если записать преобразование символически в виде $\tau' = \mathfrak{D}\tau$, рассматривая при этом x_i как декартовы координаты (компоненты вектора τ), то будем иметь:

$$\mathfrak{D}^* \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^* \mathfrak{D} = \mathfrak{E} \text{ или } \mathfrak{D}^\dagger = \mathfrak{D}^{-1}.$$

$n = 2$. Наиболее общее унитарное преобразование в двумерном пространстве имеет вид

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi e^{i\alpha} - x_2 \sin \varphi e^{i\beta}, \quad x'_2 = x_1 \sin \varphi e^{i\gamma} + x_2 \cos \varphi e^{i\delta},$$

где $\alpha - \beta - \gamma + \delta = 0$.

Действительное ортогональное преобразование с определителем $\det(a_{ik}) = +1$ представляет собой *поворот* на угол φ вокруг начала координат некоторой декартовой системы координат x, y :

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ или } x' + iy' = (x + iy) e^{i\varphi}.$$

¹⁾ При условии, что базисные векторы образуют ортогональную нормированную систему. (*Прим. ред.*)

Ортогональное преобразование с определителем $\det(a_{ik}) = -1$:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ или } x' + iy' = (x - iy) e^{i\varphi};$$

оно представляет собой *отражение* в прямой $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

n = 3. Действительное ортогональное преобразование с положительным определителем в трехмерном пространстве представляет собой *вращение (поворот)* \mathfrak{C} на угол δ вокруг неподвижной оси α , проходящей через начало координат. Оно может быть представлено в виде

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' = r \cos \delta + \alpha (\alpha\mathfrak{r}) (1 - \cos \delta) + [\alpha\mathfrak{r}] \sin \delta \quad (\alpha^2 = 1),$$

или, если ввести

$$c = a \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \quad \left(a = \frac{c}{c} \right),$$

в виде

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' = \frac{1}{1+c^2} \{ r(1-c^2) + 2c(\mathfrak{r}, \alpha) + 2[\mathfrak{r}, \alpha] \}.$$

Для компонент, вводя обозначения $a_x = \cos \alpha_1$, $a_y = \cos \alpha_2$, $a_z = \cos \alpha_3$, получим:

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - \sin^2 \alpha_1 (1 - \cos \delta)) + y(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) - \\ &\quad - \cos \alpha_3 \sin \delta) + z(\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_2 \sin \delta), \\ y' &= x(\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_3 \sin \delta) + y(1 - \sin^2 \alpha_2 (1 - \cos \delta)) + \\ &\quad + z(\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_1 \sin \delta), \\ z' &= x(\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 (1 - \cos \delta) - \cos \alpha_2 \sin \delta) + \\ &\quad + y(\cos \alpha_3 \cos \alpha_2 (1 - \cos \delta) + \cos \alpha_1 \sin \delta) + z(1 - \sin^2 \alpha_3 (1 - \cos \delta)) \end{aligned}$$

и при этом

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1), \\ \cos \alpha_i &= \sqrt{\frac{a_{ii} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Особые случаи.

1) Для весьма малых δ (*бесконечно малое* ортогональное преобразование) будем иметь:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \delta[\alpha\mathfrak{r}].$$

2) При $\delta = \pi$, $|c| = \pm \infty$ говорят об *отражении в прямой*:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' = -\mathfrak{r} + 2\alpha(\alpha\mathfrak{r}).$$

3) При $\delta = \frac{2\pi}{n}$ мы применяем символ \mathfrak{C}_n , так что

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n.$$

В этом случае ось называется «*осью n-го порядка*» (*n-zählig*). Будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \mathfrak{C} = \text{тождественному преобразованию,} \\ \mathfrak{C}_n^n &= \mathfrak{C}. \end{aligned}$$

4) Действительное ортогональное преобразование в трех измерениях с отрицательным определителем представляет собой *инверсионный поворот*. Обозначив это преобразование через \mathfrak{I} , получим:

$$\mathfrak{I}\mathbf{r} = \mathbf{r}' = -\mathfrak{C}\mathbf{r}, \text{ так что } \mathfrak{I} = -\mathfrak{C}, \mathfrak{I}_n = -\mathfrak{C}_n.$$

\mathfrak{I}_1 называется *инверсией*: $\mathfrak{I}_1\mathbf{r} = \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$.

$\mathfrak{I}_1\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{I}_1\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2\mathfrak{I}_1 = -\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{S}_1$ есть *отражение* \mathfrak{S}_1 :

$\mathfrak{S}_1\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2\alpha(\alpha\mathbf{r})$, $\alpha^2 = 1$ относительно плоскости, проходящей через $\mathbf{r} = 0$, перпендикулярной к вектору α .

$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_1\mathfrak{C}_n = -\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_n$ есть *зеркальный поворот*.

Имеем:

$$\mathfrak{S}_n^n = (-1)^n \mathfrak{C}, \mathfrak{S}_n^n = (-\mathfrak{C}_2)^n, \text{ т. е. } = \mathfrak{C} \text{ при четном } n \text{ и} \\ = \mathfrak{S}_1 \text{ при нечетном } n.$$

Далее, для отражений $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}''_1$ с различными α', α'' имеем:

$$\mathfrak{S}'_1\mathfrak{S}''_1\mathbf{r} = \mathfrak{C}\mathbf{r} \text{ с } c = -\frac{[\alpha'\alpha'']}{\alpha'\alpha''}.$$

5) Если перенести начало координат в точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, то получим:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathfrak{D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathfrak{D}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 - \mathfrak{D}\mathbf{r}_0.$$

Мы имеем здесь, таким образом, *неоднородное* преобразование: $\mathbf{r}' = \mathfrak{D}\mathbf{r} + \mathbf{t}$ ($\mathbf{t} = \mathbf{r}_0 - \mathfrak{D}\mathbf{r}_0$). Преобразование $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{t}$ называется *трансляцией*.

6) Комбинация поворота и параллельного переноса в направлении оси вращения называется *винтовым движением* \mathfrak{C} . Принимая точку $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{t} - \frac{[\mathbf{c}\mathbf{t}]}{c}\right)$ за начало координат, можно всякое неоднородное ортогональное преобразование с положительным определителем представить в виде винтового движения.

Комбинацию отражения относительно плоскости и трансляции в направлении какой-либо прямой, параллельной этой плоскости, называют *скользящим отражением* \mathfrak{S} .

Пусть два преобразования \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 , рассматриваемые в одной и той же системе координат, являются взаимно обратными ($\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{C}$). Тогда последовательное их выполнение в системах координат, получающихся одна из другой при помощи параллельного переноса, дает в качестве результирующего преобразования чистую трансляцию. Примерами этого могут служить две инверсии относительно различных точек, два отражения относительно параллельных плоскостей, два отражения относительно параллельных прямых и т. п.

7) Последовательное выполнение двух вращений дает снова вращение, причем результирующее преобразование, вообще говоря, зависит от порядка выполнения исходных преобразований. Имеем:

$$\mathbb{C}'\mathbb{C}''r = \mathbb{C}'''r,$$

где

$$c''' = \frac{c' + c'' + [c'c'']}{1 - (c'c'')}.$$

Перестановочными являются лишь вращения вокруг одной и той же оси и бесконечно малые вращения.

8) Всякое вращение, характеризующееся вектором вращения c , может быть разложено на два вращения с векторами c_1 и c_2 вокруг взаимно перпендикулярных осей $((c_1, c_2) = 0)$ и допускает представление с помощью углов Эйлера φ, ψ, ϑ , если положить (см. рис. 25):

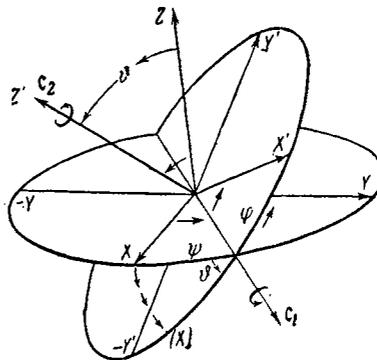


Рис. 25. Углы Эйлера.

1. $c_{1x} = \cos \psi \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ — поворот вокруг лежащей в x, y -плоскости «линии узлов» на угол ϑ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$)

$$c_{1y} = \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

$c_{1z} = 0$ ψ — угол между c_1 и осью x ($0 \leq \psi \leq 2\pi$).

2. $c_{2x} = \sin \vartheta \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$ — поворот на угол $\varphi + \psi$ вокруг новой оси z' .

$$c_{2y} = -\sin \vartheta \cos \psi \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$c_{2z} = \cos \vartheta \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$ φ — угол между c_1 и осью x' ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$),

ϑ — угол между осями z и z' .

Отсюда получаем:

$$c_x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi + \varphi}{2}},$$

$$1 + c^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\psi + \varphi}{2}},$$

$$c_y = \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi + \varphi}{2}},$$

$$c = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2};$$

$$c_z = \operatorname{tg} \frac{\psi + \varphi}{2},$$

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}.$$

С помощью этих соотношений получаем следующие явные выражения

для x' , y' , z' :

$$\begin{aligned} x' &= x (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + \\ &\quad + y (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z \sin \varphi \sin \vartheta, \\ y' &= -x (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + \\ &\quad + y (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z \cos \varphi \sin \vartheta, \\ z' &= x \sin \psi \sin \vartheta - y \cos \psi \sin \vartheta + z \cos \vartheta. \end{aligned}$$

$n = 4$. Ортогональное преобразование в четырех измерениях наиболее просто представляется при помощи кватернионов (см. стр. 237—238).

$n = N$. Частным случаем унитарного преобразования в N измерениях служит преобразование

$$\left. \begin{aligned} y_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \eta_{lk} e^{\frac{2\pi i k l}{N}}, \\ \eta_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l y_l e^{-\frac{2\pi i l k}{N}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{преобразование Фурье}).$$

Отправляясь от него, можно при помощи предельного перехода $N \rightarrow \infty$, $\frac{l}{N} = \frac{x}{L}$ получить ряд Фурье:

$$y(x) = \sum_k C_k e^{\frac{2\pi i k x}{L}}; \quad C_k = \frac{\eta_k}{\sqrt{N}} = \frac{1}{L} \int_0^L y(x) e^{-\frac{2\pi i k x}{L}} dx,$$

а также при $N \rightarrow \infty$, $\frac{l}{N} = x$, $\frac{k}{N} = s$ — интегралы Фурье:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(s) e^{2\pi i x s} ds; \quad \eta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) e^{-2\pi i x s} dx.$$

4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм

При линейном преобразовании $x_i = \sum_j b_{ij} x'_j$, $(b_{ik}) = \mathfrak{B}$, квадратичная форма $Q = \sum_{i,k} q_{ik} x_i x_k$ с симметрической матрицей $\mathfrak{Q} = (q_{ik})$ переходит в форму $Q' = \sum_{i,k} q'_{ik} x'_i x'_k$ с матрицей $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{B} \mathfrak{Q} \mathfrak{B}$. Матрицы \mathfrak{Q} и \mathfrak{Q}' (при условии, что $\det \mathfrak{B} \neq 0$) всегда имеют один и тот же ранг r (ранг квадратичной формы). При преобразовании эрмитовой формы $H = \sum_{i,k} h_{ik} x_i x_k^*$ аналогично этому получим $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{H} \mathfrak{B}$.

Используя тензорную символику, будем иметь:

$$r' = \mathfrak{B} r, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$$

$$Q = (r \mathfrak{Q} r) = (\mathfrak{B} r' \mathfrak{Q} \mathfrak{B} r') = (r' \mathfrak{Q}' \mathfrak{B} \mathfrak{B} r') = (r' \mathfrak{B} \mathfrak{Q} \mathfrak{B} r') = (r' \mathfrak{Q}' r'),$$

где

$$\Omega' = \mathfrak{B}\Omega\mathfrak{B}.$$

При помощи линейного преобразования *всякая квадратичная форма* ранга r может быть преобразована в *единичную форму* $x_1^2 + \dots + x_r^2$. Всякие две квадратичные формы одинакового ранга могут быть линейно преобразованы одна в другую.

Действительные квадратичные формы (все q_{ik} действительны) могут быть при помощи *действительного* линейного преобразования (все b_{ik} действительны) приведены к виду $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$. Эрмитовы формы всегда могут быть приведены к виду $x_1 x_1^* + \dots + x_p x_p^* - x_{p+1} x_{p+1}^* - \dots - x_r x_r^*$. *Индекс инерции* p при этом вполне определяется исходной формой и при действительных преобразованиях (если форма эрмитова, то при любых) остается инвариантным (закон инерции квадратичных форм). Если $p=r$, то форма при произвольных x_1, x_2, \dots, x_n (не все $x_i=0$) принимает только положительные (при $p=0$ только отрицательные) значения; форма в этом случае называется *положительно (отрицательно) определенной*.

При помощи *ортогонального* преобразования квадратичные формы могут быть приведены к виду $\sum \lambda_i x_i^2$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы формы. При помощи *унитарного* преобразования эрмитовы формы могут быть приведены к виду $\sum \lambda_i x_i x_i^*$. Матрицей ортогонально (унитарно) преобразованной формы служит матрица, получающаяся соответствующим преобразованием матрицы исходной формы (см. стр. 174 — 175).

С. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРИКОСНОВЕНИЯ (КОНТАКТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ)¹⁾

1. Двумерный случай

а) Общие сведения

Посредством уравнения вида

$$W(x, y, X, Y) = 0 \quad (\text{направляющее уравнение})^2)$$

каждой точке x, y -плоскости ставится в соответствие кривая X, Y -плоскости и обратно; кривой $\varphi(x, y) = 0$ или $x = x(t), y = y(t)$ ставится в соответствие семейство кривых $F(X, Y, t) = 0$, огибающую которого можно рассматривать как образ кривой $\varphi = 0$.

Название «преобразование прикосновения» обязано своим происхождением тому обстоятельству, что образами двух соприкасающихся кривых служат снова соприкасающиеся кривые.

¹⁾ Говорят также «касательное преобразование». (Прим. ред.)

²⁾ Aequatio directrix.

Уравнение образа кривой $\varphi = 0$ получают путем исключения параметра t из уравнений $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ или путем исключения x и y из уравнений $W = 0$, $\varphi = 0$ и

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Хотя здесь точки x, y -плоскости не находятся во взаимно однозначном соответствии с точками X, Y -плоскости, это имеет место по отношению к точкам данной кривой $\varphi = 0$ и точкам ее образа (так что точки этих кривых могут быть представлены с помощью одного и того же параметра t).

Если положить $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dY}{dX} = P$, то с помощью трех уравнений

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} + p \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X} + P \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

можно рассматриваемому преобразованию придать форму:

$$X = X(x, y, p), \quad Y = Y(x, y, p), \quad P = P(x, y, p),$$

причем выполняется условие

$$\frac{\partial X}{\partial p} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial Y}{\partial p} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0.$$

б) Преобразование Лежандра

представляет собой простой пример:

$$dy = p dx.$$

Определяем Y посредством

$$dY = x dp = P dX; \quad x = P, \quad p = X;$$

следовательно,

$$y + Y = xp + \text{const},$$

и мы получаем:

$$y + Y - xX = \text{const}$$

в качестве направляющего уравнения.

Это преобразование находит применение в теории дифференциальных уравнений. Оно позволяет привести дифференциальное уравнение $f(x, y, p) = 0$ к другому дифференциальному уравнению

$$f(P, (XP - Y), X) = 0,$$

которое может оказаться более легко решаемым. Производная p служит здесь независимым переменным X (см. также стр. 316).

с) Каноническое преобразование

представляет собой преобразование прикосновения, важное для механики. Оно определяется равенством

$$z - Z = \Phi(q, Q),$$

в котором Φ означает произвольную функцию. Она называется *производящей функцией*. Положив

$$p = \frac{dz}{dq}, \quad P = \frac{dZ}{dQ},$$

получим:

$$p dq - P dQ = d\Phi, \quad (1)$$

так что

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q}.$$

Эти уравнения позволяют выразить Q и P в виде функций от q и p .

Это преобразование называется *каноническим* ввиду того, что оно переводит так называемые канонические уравнения механики (см. стр. 418)

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (2)$$

(в которых параметр t означает время, а H есть функция Гамильтона, зависящая от координат q и p , характеризующих соответственно положение и импульс) снова в канонические уравнения относительно Q и P .

Для доказательства образуем вариацию уравнения (1), разделив предварительно его члены на dt . Будем иметь:

$$p \delta \dot{q} + \dot{q} \delta p - P \delta \dot{Q} - \dot{Q} \delta P - \delta \dot{\Phi} = 0.$$

Ввиду того, что $\frac{d}{dt}(\delta \Phi) = \delta \dot{\Phi}$, это выражение можно переписать в форме

$$\frac{d}{dt}(p \delta q - P \delta Q - \delta \Phi) - \dot{p} \delta q + \dot{P} \delta Q + \dot{q} \delta p - \dot{Q} \delta P = 0. \quad (3)$$

Вследствие (1) выражение, стоящее в скобках, обращается в нуль.

Положив далее

$$H(q, p) = K(Q, P),$$

получим:

$$\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial K}{\partial Q} \delta Q - \frac{\partial K}{\partial P} \delta P = 0;$$

вычитая это равенство из (3) и принимая во внимание (2), непосредственно находим:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

Мы получили снова каноническую систему в новых переменных с новой функцией Гамильтона K .

Следующие уравнения эквивалентны уравнению (1):

$$\left. \begin{aligned} p \, dq + Q \, dP &= dX(q, P), \\ q \, dp + P \, dQ &= d\Psi(p, Q), \\ q \, dp - Q \, dP &= d\Omega(p, P). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При $X = qP$ или $\Psi = pQ$ преобразование превращается в тождество, т. е. $p = P$, $q = Q$.

Если представить преобразование в форме

$$p = p(P, Q), \quad q = q(P, Q),$$

то из (1) и (4) будет следовать, что

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p}, \quad (5)$$

а также

$$\frac{\partial p}{\partial P} \cdot \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot \frac{\partial q}{\partial P} = 1, \quad (6)$$

т. е. определитель преобразования $\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}$ равен единице; отображение p, q -плоскости на P, Q -плоскость сохраняет площади.

Специальные случаи:

1) Преобразование

$$Q = f(q), \quad P = \frac{p}{f'(q)}$$

является каноническим.

2) *Линейное* преобразование

$$Q = \alpha q + \beta p, \quad P = \gamma q + \delta p$$

является каноническим, если $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В частности, если положить $\alpha = \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \gamma = \frac{i}{\sqrt{2}}$, получим

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) = iP^*, \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(q - ip) = iQ^*.$$

Таким образом, *действительные* переменные q, p переходят в *комплексные* переменные Q, P , причем

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^*), \\ p &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(Q + iP) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(Q - Q^*). \end{aligned}$$

3) *Бесконечно малое каноническое преобразование* определяется равенствами:

$$Q = q + \lambda \frac{\partial F(q, p)}{\partial p}, \quad P = p - \lambda \frac{\partial F(q, p)}{\partial q},$$

где λ — малая константа.

Например, преобразование

$$Q = q + \dot{q} dt = q + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} dt,$$

$$P = p + \dot{p} dt = p - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} dt$$

также является каноническим, и вследствие группового свойства преобразований (см. стр. 288) то же можно сказать и о преобразовании

$$q = q_0 + \int_{t_0}^t \dot{q} dt, \quad p = p_0 + \int_{t_0}^t \dot{p} dt,$$

переводящем q_0, p_0 в q, p .

Имеем поэтому:

$$p = \frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q}, \quad p_0 = - \frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q_0}.$$

В механике S называют *функцией действия* (см. стр. 419). Там она определяется обычно следующим образом:

$$S = \int_{t_0}^t (p \dot{q} - H) dt = \int_{t_0}^t L dt;$$

$L = p\dot{q} - H$ называется *функцией Лагранжа*.

Действительно, откуда с помощью (2) находим:

$$\delta S = p \delta q - p_0 \delta q_0.$$

4) Особый интерес представляют канонические преобразования, которые переводят функцию $K(Q, P)$ в функцию, зависящую только от P , например $K(Q, P) = \omega P$.

Тогда будем иметь:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, \quad Q = \omega t + \alpha,$$

$$\dot{P} = - \frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad P = \beta,$$

где ω, α, β — константы.

Таким образом, мы получаем здесь очень простое решение преобразованного уравнения Гамильтона и, тем самым, при помощи обратного преобразования — решение исходного уравнения.

Если в задачах механики Q представляет собой отвлеченную (безразмерную) величину или угол такой, что q и p являются функциями от Q с периодом 2π , то Q называется *угловой переменной* (пример см. Приложение 5, стр. 573).

d) Обобщение

изложенной теории можно получить, рассматривая случай, когда каноническое преобразование само зависит от t , т. е. когда формулы имеют вид $p = p(Q, P, t)$, $q = q(Q, P, t)$ и, следовательно, явным образом содержат t .

Простейшим преобразованием такого рода является:

$$p = P + At, \quad q = Q + Bt,$$

где A и B — произвольные константы.

Это преобразование будет каноническим, если положим:

$$K(P, Q) = H(p, q) + (Aq - Bp).$$

Оно приводит к более общему зависящему от времени преобразованию с новыми переменными P' и Q' :

$$p = P(P', Q') + At, \quad q = Q(P', Q') + Bt;$$

при этом

$$K'(P', Q') = K(P, Q) = H(p, q) + (Aq - Bp).$$

Рассматриваемые преобразования являются, таким образом, преобразованиями к движущимся системам координат.

Это можно использовать в случае, когда требуется привести $K(P, Q)$ к виду $K_0(P) + K_1(P, Q)$, где K_1 мало по сравнению с K_0 .

Тогда имеем:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K_0}{\partial P} + \frac{\partial K_1}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K_1}{\partial Q}, \quad P = \beta_0 - \int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt.$$

Если, теперь, интеграл $\int_0^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt$ мал по сравнению с β_0 , то можно

при помощи преобразования

$$Q = \omega t + \alpha, \quad P = \beta_0 + \beta$$

ввести α и β в качестве новых переменных; при этом они сами также должны рассматриваться как малые величины.

Согласно изложенному выше это приводит к соотношению

$$K(P, Q) = \Omega(\alpha, \beta) - \omega(\beta_0 + \beta)$$

и

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Величины α и β являются, таким образом, снова каноническими переменными с функцией Гамильтона Ω .

Функция Ω называется *возмущающей функцией*.

Описанный метод называется методом *вариации постоянных*.

2. Многомерный случай

Здесь направляющим уравнением будет:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n) = 0.$$

Общее преобразование Лежандра: для данной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l);$$

$$df = \sum_i X_i dx_i + Y_i dy_i; \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

строят другую:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k, y_1, y_2, \dots, y_l),$$

для которой выполнено условие

$$dF = \sum_i x_i dX_i - Y_i dy_i.$$

Таким образом,

$$f + F - \sum_i x_i X_i = \text{const.}$$

Это и есть направляющее уравнение, если положить $f = x_{k+1}$, $F = X_{k+1}$.

Мы имеем, таким образом:

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = x_i; \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i} = Y_i.$$

Это преобразование находит применение в вариационном исчислении при униформизации общих задач, а также для вывода канонических уравнений (см. стр. 386), в частности, в механике при переходе от функции Лагранжа $L(\dot{x}, x)$ к функции Гамильтона $H(p, x)$ (см. стр. 418). Оно используется и в термодинамике (см. стр. 540).

Понятие канонического преобразования может быть без труда обобщено на многомерный случай (см. также Приложение 5, стр. 573); (1) переходит в

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i = d\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n; Q_1, Q_2, \dots, Q_n),$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, так что

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i}.$$

Все остается в силе без каких-либо изменений, следует лишь добавить знаки суммирования; уравнения (5) и (6) обобщаются следующим образом:

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}.$$

Мы будем иметь поэтому:

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial x}.$$

что равно 1 при $x=Q_k$ и равно 0, если вместо x подставить другие P и Q , кроме Q_k .

Выражение $(x, y) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial y} \right)$ называется *скобкой Лагранжа*. Имеем, таким образом:

$$(Q_k, P_j) = -(P_j, Q_k) = \delta_{jk}, \quad (Q_k, Q_j) = (P_k, P_j) = 0.$$

Специальные случаи:

1) Если из переменных образовать векторы:

$$q = \{q_i\}, \quad p = \{p_i\}, \quad \mathfrak{Q} = \{Q_i\}, \quad \mathfrak{P} = \{P_i\},$$

то линейное преобразование можно представить с помощью тензоров \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} :

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}q + \mathfrak{B}p, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{C}q + \mathfrak{D}p.$$

Оно является каноническим, если

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{E} = \mathfrak{D}\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\mathfrak{B}.$$

Для компонент получаем $A_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$ и т. д.

2) *Комплексные переменные*. При помощи канонического преобразования

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + Q dP + Q^* dP^* = d\Phi(q_1, q_2, P, P^*),$$

где

$$\Phi = k(P(q_1 + iq_2) + P^*(q_1 - iq_2)) \equiv k(q_1(P + P^*) + iq_2(P - P^*)),$$

получаем:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial \Phi}{\partial P} = k(q_1 + iq_2); & Q^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial P^*} = k(q_1 - iq_2), \\ p_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = k(P + P^*); & p_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = ik(P - P^*), \\ P &= \frac{1}{2k}(p_1 - ip_2); & P^* &= \frac{1}{2k}(p_1 + ip_2). \end{aligned}$$

Из действительных координат q_1, q_2 здесь составлена комплексная величина Q с соответствующим (комплексным) импульсом P ($\neq p_1 + ip_2!$). Например:

$$H = \frac{\alpha}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\beta}{2}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{\alpha}{2k^2} QQ^* + 2\beta k^2 PP^*.$$

РАЗДЕЛ СЕДЬМОЙ

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

А. ВЕКТОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Определения

Векторный анализ объединяет геометрические и алгебраические понятия и формулирует имеющие для них место соотношения при помощи символики, приспособленной к его целям.

Основными его понятиями являются скаляры, векторы и тензоры.

1) *Скаляром* называется функция точки, которая каждой точке ставит в соответствие определенное число.

2) *Вектором* называется функция точки, которая каждой точке ставит в соответствие определенное число и определенное направление. Для наглядного изображения векторов часто применяют направленные отрезки (стрелки).

3) *Тензором* (второго ранга) называется функция точки, которая заданному в этой точке вектору ставит в соответствие другой вектор, причем соответствие между векторами является линейным. Тензор высшего ранга таким же образом ставит каждому вектору в соответствие тензор на единицу меньшего ранга (вектор = тензору первого ранга).

Эти функции, помимо их зависимости от точки, могут содержать и другие параметры, например время.

Если эти функции определены в каждой точке пространства, то говорят о *скалярных полях, векторных полях, тензорных полях*, соответственно о *векторе поля* и т. д.

Возможны случаи, когда поле определено лишь на некоторой поверхности, на некоторой линии или в отдельных точках.

Если функции, о которых идет речь, не зависят от положения точки, то такие скаляры, векторы и тензоры мы в дальнейшем будем называть *свободными*.

Вектор, заданный в одной какой-либо точке, может быть с сохранением величины и направления *перенесен* в другую точку. То же имеет место и для тензоров.

Векторы, длина которых равна единице, называются *единичными векторами*. Длина вектора является скаляром.

Обозначения. В дальнейшем мы пользуемся большей частью следующими обозначениями:

скаляры обозначаются греческими буквами, например φ ,
векторы обозначаются готическими буквами, например \mathfrak{a} ¹⁾,

тензоры обозначаются прописными готическими буквами, например \mathfrak{T} .

Длина вектора \mathfrak{a} обозначается той же буквой латинского алфавита a . Употребительно также обозначение $|\mathfrak{a}|$.

Чтобы показать, что скаляр является функцией точки, применяют обычно запись $\varphi(\mathfrak{r})$ (\mathfrak{r} — радиус-вектор, см. стр. 209). Если, кроме того, скаляр зависит от времени t , то пишут $\varphi(\mathfrak{r}, t)$. Аналогичные обозначения применяются для векторов и тензоров.

2. Векторная алгебра

Под *суммой двух векторов* \mathfrak{a} и \mathfrak{b} понимают вектор

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

длина и направление которого в каждой точке зависят от слагаемых таким же образом, как длина и направление диагонали параллелограмма зависят от сторон, исходящих из вершин того же угла, что и диагональ. Отсюда следует, что для сложения векторов справедливы *коммутативный закон*:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

и *ассоциативный закон*:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

Операция вычитания получается посредством обращения:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}.$$

Под произведением $a\varphi$ вектора \mathfrak{a} на скаляр φ понимают вектор длины $|\mathfrak{a}|\varphi = a\varphi$, направление которого совпадает с направлением вектора \mathfrak{a} ²⁾. Таким образом, $\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}_1$, где через \mathfrak{a}_1 обозначен единичный вектор, имеющий направление вектора \mathfrak{a} .

Произведением двух векторов \mathfrak{a} и \mathfrak{b} называют две различные величины:

а) *Скалярное произведение* $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ (называемое также внутренним произведением). Оно представляет собой скаляр, равный

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

¹⁾ Весьма часто употребляется также обозначение $\vec{a} \equiv \mathfrak{a}$.

²⁾ Это определение имеет силу лишь при $\varphi \geq 0$. При $\varphi < 0$ оно должно быть заменено таким: длина вектора $a\varphi$ равна $|\mathfrak{a}||\varphi|$, направление его противоположно направлению вектора \mathfrak{a} . (*Прим. ред.*)

— произведению длин векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , умноженному на косинус угла, образованного их направлениями. Отсюда вытекает, что $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\mathbf{a})$ (коммутативный закон).

Длина вектора \mathbf{a} равна

$$a = \sqrt{(\mathbf{a}\mathbf{a})} = |\mathbf{a}|.$$

Ее следует брать всегда положительной.

б) *Векторное произведение* $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ (называемое также *внешним произведением*). Оно представляет собой вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ; длина его равна

$$|[\mathbf{a}\mathbf{b}]| = a \cdot b \cdot \sin \varphi,$$

т. е. равна площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} . Направление вектора $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ подчинено условию: векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$, взятые в указанной последовательности, должны образовывать правую систему ¹⁾.

Отсюда следует, что

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}] = -[\mathbf{b}\mathbf{a}].$$

Имеют место следующие правила:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0, \quad (\mathbf{a}[\mathbf{a}\mathbf{b}]) = 0, \\ &(\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})), \quad \left. \begin{aligned} &[\mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{c}] = [\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \end{aligned} \right\} \text{(дистрибутивный закон),} \\ &(\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]) = (\mathbf{b}[\mathbf{c}\mathbf{a}]) = (\mathbf{c}[\mathbf{a}\mathbf{b}]), \\ &[\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \\ &([\mathbf{a}\mathbf{b}][\mathbf{c}\mathbf{d}]) = (\mathbf{a}[\mathbf{b}[\mathbf{c}\mathbf{d}]]) = (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\mathbf{c})(\mathbf{a}\mathbf{d}), \\ &|[\mathbf{a}\mathbf{b}]|^2 = a^2b^2 - (\mathbf{a}\mathbf{b})^2, \\ &[\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]] + [\mathbf{b}[\mathbf{c}\mathbf{a}]] + [\mathbf{c}[\mathbf{a}\mathbf{b}]] = 0, \\ &\mathbf{a}(\mathbf{b}[\mathbf{c}\mathbf{d}]) + \mathbf{b}(\mathbf{c}[\mathbf{d}\mathbf{a}]) + \mathbf{c}(\mathbf{d}[\mathbf{a}\mathbf{b}]) = \mathbf{d}(\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]). \end{aligned}$$

$(\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}])$ представляет собой объем параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Если эти векторы компланарны, то $(\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]) = 0$, и обратно.

¹⁾ Тройка векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ при переходе от правой системы координат к левой меняет свою ориентацию. (*Прим. ред.*)

Далее, имеет место равенство

$$(a[bc])(e[fg]) = \begin{vmatrix} (ae) & (af) & (ag) \\ (be) & (bf) & (bg) \\ (ce) & (cf) & (cg) \end{vmatrix},$$

в силу которого имеем:

$$\begin{aligned} (a[bc])^2 &= \begin{vmatrix} a^2 & (ab) & (ac) \\ (ab) & b^2 & (bc) \\ (ac) & (bc) & c^2 \end{vmatrix} = \\ &= a^2 b^2 c^2 - a^2 (bc)^2 - b^2 (ac)^2 - c^2 (ab)^2 + 2(ab)(bc)(ac). \end{aligned}$$

3. Алгебраические векторные уравнения

Подлежащие разысканию неизвестный вектор и неизвестные числовые множители обозначаются соответственно через χ и x, y, z ; a, b, c, p, q, r означают данные векторы.

1. $\chi + a = b$. Решение: $\chi = b - a$.

2. $\begin{cases} (\chi a) = p, \\ [\chi a] = b, \end{cases}$ Решение: $\chi = \frac{ap}{a^2} + \frac{[ab]}{a^2}$.

3. $\begin{cases} (\chi a) = p, \\ (\chi b) = q, \\ (r c) = r. \end{cases}$ Решение: $\chi = \frac{p[bc] + q[ca] + r[ab]}{a[bc]}$.

4. $p = \chi a + yb + zc$ (разложение вектора p на три вектора, параллельных a, b и c).

Решение: $x = \frac{(p[bc])}{(a[bc])}, \quad y = \frac{(p[ca])}{(a[bc])}, \quad z = \frac{(p[ab])}{(a[bc])}$.

5. $p = x[bc] + y[ca] + z[ab]$.

Решение: $x = \frac{(pa)}{(a[bc])}, \quad y = \frac{(pb)}{(a[bc])}, \quad z = \frac{(pc)}{(a[bc])}$.

6. $p = \chi a + [\chi a]$ (разложение вектора p на два вектора — параллельный a и перпендикулярный a).

Решение: $x = \frac{(ap)}{a^2}, \quad \chi = \frac{[ap]}{a^2}$.

Следует иметь в виду, что уравнение, связывающее два вектора, эквивалентно трем алгебраическим уравнениям. С другой стороны, неизвестный вектор эквивалентен трем алгебраическим неизвестным.

Если вектор представлен в виде суммы, то слагаемые называются «компонентами», или «составляющими», вектора.

4. Интегральные и дифференциальные выражения

Интегралы могут быть распространены на различные пространственные области — кривые: $\int ds$, поверхности: $\int df$, объемы: $\int dv^1$). Подынтегральная функция может представлять собой либо скаляр, либо вектор поля. Интеграл имеет тот же характер, что и подынтегральная функция.

Область интегрирования G указывают, помещая ее обозначение ниже знака интеграла: \int_G . Если интегрирование производится по границе замкнутой области, то мы будем заключать в скобки букву, обозначающую эту область: $\int_{(G)}$.

а) Скалярные интегралы

Линейным интегралом вектора α , взятым по некоторой кривой, называется величина

$$\int (\alpha d\hat{s}) = \int (\alpha \hat{s}_1) ds,$$

где \hat{s}_1 есть единичный вектор, направление которого совпадает с направлением элемента кривой $d\hat{s}_1 = \hat{s}_1 ds$. Скалярное произведение $(\alpha \hat{s}_1)$ записывают также при помощи символа a_s , и тогда линейный интеграл обозначается $\int a_s ds$.

Поверхностным интегралом называется величина

$$\int (\alpha n) df,$$

где n — единичный вектор, направление которого перпендикулярно к элементу поверхности df . Вместо (αn) пишут также a_n , и тогда поверхностный интеграл обозначается $\int a_n df$.

б) Векторные интегралы

Можно образовать величины $\int \alpha ds$, которые в отличие от ненаправленных (скалярных) величин $\int a_s ds$ являются векторами.

Под интегралом $\int \alpha ds$ понимают вектор, возникающий при суммировании векторных дифференциалов αds вдоль некоторой кривой (после того как все они будут параллельно перенесены в одну точку). Аналогично определяются $\int \alpha df$ и $\int \alpha dv$. Эти векторы не связываются с какой-либо определенной точкой и являются, следовательно, свободными.

¹⁾ Вместо $\int dv$ употребляется иногда обозначение $\int dx$.

с) Дифференциальные операции над векторами и скалярами

По аналогии с производной функции, для данного поля можно определить новые поля, получающиеся из него при помощи операции дифференцирования. Аналогично с

$$a \frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \epsilon a) - f(x)}{\epsilon} \right)$$

мы получаем:

1) $\mathbf{grad} \varphi$ — вектор (*градиент*), определяемый равенством

$$(\mathbf{n} \mathbf{grad} \varphi) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{n}) - \varphi(\mathbf{r})}{\epsilon} \right)^{1)}$$

или, при $d\mathbf{s} = \epsilon \mathbf{n}$, — равенством

$$(d\mathbf{s} \mathbf{grad} \varphi) = d\varphi.$$

Требование, чтобы уравнение удовлетворялось тождественно относительно \mathbf{a} (соответственно относительно $d\mathbf{s}$), определяет однозначно $\mathbf{grad} \varphi$ как некоторое векторное поле, поставленное в соответствие данному скалярному полю φ . Вектор этого поля направлен перпендикулярно к поверхностям $\varphi = \text{const}$ и указывает направление, в котором функция возрастает. Его длина равна максимальному значению, которое может иметь $\frac{d\varphi}{ds}$ при перемещении из данной точки по всевозможным направлениям. Можно также дать эквивалентное определение в форме

$$\mathbf{grad} \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_{(V)} d\mathbf{f} \mathbf{n} \varphi \right).$$

Здесь поверхностный векторный интеграл распространен на замкнутую поверхность, ограничивающую объем V . При этом единичный вектор нормали \mathbf{n} ($\mathbf{n}^2 = 1$) направлен во внешнюю сторону. При определениях такого рода (см. также 3) и 4)) величины, о которых идет речь, определяются в точке, где берутся бесконечно малые V или F и, тем самым, являются функциями точки.

2) $(\mathbf{a} \mathbf{grad}) \mathbf{b}$ — вектор (*векторный градиент*), определяемый формулой

$$(\mathbf{a} \mathbf{grad}) \mathbf{b} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{b}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{a}) - \mathbf{b}(\mathbf{r})}{\epsilon} \right)$$

или

$$(d\mathbf{s} \mathbf{grad}) \mathbf{b} = d\mathbf{b}.$$

Здесь $d\mathbf{b}$ представляет собой изменение вектора \mathbf{b} при перемещении $d\mathbf{s}$.

¹⁾ Ввиду этого иногда применяется также запись $\mathbf{grad} \varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\mathbf{r}}$.

3) $\operatorname{div} \mathbf{a}$ — скаляр (*дивергенция*), определяемый формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_{(V)} df(\mathbf{a}) \right).$$

4) $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ — вектор (*ротор*, или *вихрь*), определяемый формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_{(V)} df[\mathbf{a}] \right),$$

или также формулой

$$(\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \lim_{F \rightarrow 0} \left(\frac{1}{F} \int_{(F)} (\mathbf{a} d\mathbf{s}) \right).$$

Линейный интеграл распространен здесь на замкнутую линию, ограничивающую часть поверхности F . Вектор \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к поверхности ¹⁾.

Символы grad , div , rot представляют линейные дифференциальные операторы, которые данным полям ставят в соответствие другие поля.

5. Преобразование результатов дифференциальных операций

Применяя перечисленные выше дифференциальные операторы к скалярному и векторному произведениям, получаем, в частности:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \\ \operatorname{div}(\mathbf{a}\varphi) &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi), \\ \operatorname{rot}(\mathbf{a}\varphi) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi], \\ \operatorname{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] &= (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}), \\ \operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}] &= (\mathbf{b} \operatorname{grad} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \operatorname{grad} \mathbf{b}) + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}, \\ \operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \operatorname{grad} \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \mathbf{b}) + [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

Двукратное применение операторов дает, в частности:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= 0. \end{aligned}$$

Комбинации

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

и

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

обозначаются обычно соответственно через $\Delta\varphi$ и $\Delta\mathbf{a}$.

¹⁾ Направление \mathbf{n} должно быть согласовано с направлением обхода контура (F). См. сноску на стр. 212. (*Прим. ред.*)

Если f представляет собой свободный (не зависящий от положения) вектор, то справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} f &= \operatorname{rot} f = (\alpha \operatorname{grad}) f = \Delta f = 0, \\ (\alpha \operatorname{grad} (fb)) &= (f \alpha \operatorname{grad}) b, \\ \Delta (fa) &= (f \Delta a), \\ \Delta [fa] &= [f \Delta a].\end{aligned}$$

Часто бывает необходимо образовать дифференциальные выражения для некоторой функции $f(\varphi)$ скаляра φ . Здесь имеют место, в частности, следующие правила:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(\varphi) &= \frac{df}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi, \\ \Delta f(\varphi) &= \frac{df}{d\varphi} \Delta \varphi + \frac{d^2 f}{d\varphi^2} (\operatorname{grad} \varphi)^2,\end{aligned}$$

а также следующие специальные правила:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\psi) &= \varphi \Delta\psi + \psi \Delta\varphi + 2(\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi), \\ \Delta^2 \varphi &= \alpha \varphi^{\alpha-2} (\varphi \Delta\varphi + (\alpha-1)(\operatorname{grad} \varphi)^2), \\ \Delta \ln \varphi &= \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \left(\frac{\operatorname{grad} \varphi}{\varphi}\right)^2, \\ \Delta e^\varphi &= e^\varphi (\Delta\varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2).\end{aligned}$$

Векторные операторы. Дифференциальный оператор grad можно формально рассматривать как вектор g (его часто обозначают также ∇ («набла»)); при этом будем иметь:

$$\operatorname{grad} \varphi = g\varphi, \quad \operatorname{div} a = (ga), \quad \operatorname{rot} a = [ga],$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (gg)\varphi, \\ \Delta a &= g(ga) - [g[ga]] = (gg)a.\end{aligned}$$

При этом, однако, необходимо сохранять порядок множителей; например, $(a[gb]) = ([ag]b)$ означает, что $([a \operatorname{grad}] b) = (a \operatorname{rot} b)$. В противном случае следует иметь в виду правила перестановки множителей, например,

$$\begin{aligned}(a[ab]) &= (b[ga]) - (a[gb]), \\ g(ab) &= (ag)b + (bg)a + [a[gb]] + [b[ga]] \quad \text{и т. п.}\end{aligned}$$

Можно также ввести вектор $[r \operatorname{grad}] = m$, т. е. $m\varphi = [r \operatorname{grad} \varphi]$; $(ma) = (r \operatorname{rot} a)$. Для него справедливы, в частности, операторные уравнения

$$[mm] = -m$$

и при постоянных α и β :

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{g})\mathbf{m} - \mathbf{m}(\alpha\mathbf{g}) &= [\alpha\mathbf{g}], \\ (\alpha\mathbf{m})(\beta\mathbf{m}) - (\beta\mathbf{m})(\alpha\mathbf{m}) &= -([\alpha\beta]\mathbf{m}), \\ [\tau\text{ grad}]^2 = (\mathbf{m}\mathbf{m}) &= r^2(\mathbf{g}\mathbf{g}) - (\tau\mathbf{g})^2 - (\tau\mathbf{g}) = r^2\Delta - (\tau\text{ grad})^2 - (\tau\text{ grad}). \end{aligned}$$

6. Радиус-вектор τ

Важным вектором является *радиус-вектор* τ , определяющий положение данной точки по отношению к фиксированной точке $\tau=0$. Поле этого вектора мы получим, поставив каждой точке пространства в соответствие вектор τ , направленный от нулевой точки к данной точке и имеющий длину r , равную расстоянию между этими точками.

Если в качестве нулевой точки выбрать точку с радиусом-вектором τ_0 , то положение точки τ *относительно нулевой точки* будет характеризоваться вектором $\tau - \tau_0$.

Вектор $\tau - \tau'$, характеризующий относительное положение двух точек τ и τ' , не зависит от выбора нулевой точки. Если образовать функции от $\tau - \tau'$, то эти функции будут зависеть как от τ , так и от τ' . Дифференцирование и интегрирование поэтому могут выполняться по каждому из аргументов, и в записи должно быть указано, какой из аргументов имеется в виду, что можно сделать, например, при помощи штриха, сопровождающего обозначение операции.

Уравнение $(\alpha\tau) = p$ является уравнением плоскости, перпендикулярной к вектору α и отстоящей от нулевой точки на расстоянии, равном $\frac{|p|}{|\alpha|}$ ¹⁾.

Если дана кривая, s — измеряемая вдоль нее длина дуги, τ — радиус-вектор ее точек, то имеем:

$$\frac{d\tau}{ds} = \mathbf{t},$$

где \mathbf{t} — единичный вектор, направленный по касательной к кривой в точке τ .

Далее, получим:

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} = \frac{\mathfrak{N}}{R^2}.$$

Здесь \mathfrak{N} означает вектор, определяющий направление и длину радиуса кривизны кривой в точке τ .

Векторы \mathfrak{N} и \mathbf{t} определяют соприкасающуюся плоскость кривой в точке τ .

Дифференциальные операции над скалярами и векторами, образованными из вектора τ и свободных векторов $\alpha, \beta, \dots, \mathbf{f}$, выполняются

¹⁾ Вектор α , будучи отложен от начала, обращен в сторону плоскости при $p > 0$ и в противоположную сторону при $p < 0$. (Прим. ред.)

v	$\text{div } v$	$\text{rot } v$	$\text{grad div } v$	Δv	(f-grad) v
$a r^n$	$n (ar) r^{n-2}$	$n r^{n-2} [ra]$	$u n r^{n-2} + v n (n-2) (ar) r^{n-4}$	$an (n+1) r^{n-2}$	$a (rf) n r^{n-2}$
$r r^n$	$(n+3) r^n$	0	$v n (n+3) r^{n-2}$	$v n (n+3) r^{n-2}$	$f r^n + r (fr) n r^{n-2}$
$a (br) r^n$	$(a b) r^n + (ar) (br) n r^{n-2}$	$[ba] r^n + [ra] (br) n r^{n-2}$	$u (br) n r^{n-2} + v (ar) n r^{n-2} + r (ab) n r^{n-2} + r (ar) (br) \times n (n-2) r^{n-4}$	$an (n+3) r^{n-2}$	$u (fb) r^n + a (rf) (fb) n r^{n-2}$
$r (ar) r^n$	$(n+4) (ar) r^n$	$[ar] r^n$	$a (n+4) r^n + r (n+4) n (ar) r^{n-2}$	$r (ar) n (n+5) \times r^{n-2} + 2a r^n$	$f (ar) r^n + r (af) r^n + r (ar) (fr) n r^{n-2}$
$r (ar) (br) r^n$	$(n+5) (ar) (br) r^n$	$[ar] (br) r^n + [br] (ar) r^n$	$(n+5) \{ a (br) + b (ar) + r \frac{(ar) (br)}{r^2} \} r^n$	$2 \{ a (br) + b (ar) + r (ab) \} r^n + r (ar) (br) n (n+7) r^{n-2}$	$f (ar) (br) r^n + r (af) (br) + r (ar) (bf) r^n + r (ar) (br) (fr) n r^{n-2}$
$[ar] r^n$	0	$u (n+2) r^n - r (ar) n r^{n-2}$	0	$[ar] n (n+3) r^{n-2}$	$[af] r^n + [ar] (fr) n r^{n-2}$
$[ar] (br) r^n$	$(r [ba]) r^n$	$a (n+3) (br) r^n - r \{ (ab) + \frac{(br) (ar)}{r^2} \} r^n$	$[ba] r^n + r (r [ba]) n r^{n-2}$	$[ar] (br) n (n+5) r^{n-2} + 2 [ab] r^n$	$[af] (br) r^n + [ar] (br) (fr) n r^{n-2} + [ar] (br) r^n$
$a \ln r$	$\frac{(ar)}{r^2}$	$\frac{[ra]}{r^2}$	$\frac{a}{r^2} - \frac{2r (ar)}{r^4}$	$\frac{a}{r^2}$	$a \frac{(fr)}{r^2}$

без труда. В таблицах на стр. 210 и 212—213 представлены важнейшие типы таких операций и результаты, к которым они приводят.

Если в этих и следующих далее формулах вместо r писать $r - r'$, то они сохраняют силу при условии, что дифференцирование производится по r . В то же время будем иметь, например,

$$\text{grad}(\alpha; r - r') = -\text{grad}'(\alpha, r - r').$$

В частности, следует иметь в виду соотношения:

$$\begin{aligned} \text{rot } r &= 0, \\ \text{div } r &= 3, \\ \text{grad}(\alpha r) &= \alpha, \\ \text{rot}[\alpha r] &= 2\alpha, \\ \text{div}[\alpha r] &= 0, \end{aligned}$$

а также

$$\text{grad}\left(\frac{(\alpha r)}{r^3}\right) = -\text{rot}\left(\frac{[\alpha r]}{r^3}\right) \quad (r \neq 0).$$

Далее, для произвольного скаляра φ , соответственно вектора v , имеем:

$$\begin{aligned} (v \text{ grad}) r &= v, \\ \Delta(rv) &= (r \Delta v) + 2 \text{div } v, \\ \Delta(r\varphi) &= r \Delta\varphi + 2 \text{grad } \varphi, \\ \text{rot}[rv] + \text{grad}(rv) &= -v + r \text{div } v + [r \text{rot } v]. \end{aligned}$$

Для функции $\varphi(r)$, зависящей только от $r = |r|$ (сферическая симметрия), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi'' + \frac{2}{r} \varphi', \\ \Delta\left(\frac{\varphi}{r}\right) &= \frac{\varphi''}{r}. \end{aligned}$$

Степенные ряды в векторной форме. Произвольные скалярные поля φ или векторные поля v , не имеющие в нулевой точке особенностей, можно представить в виде разложений по r , используя константы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ и постоянные векторы a, b, c, \dots в качестве параметров разложения. Разложения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha + (\alpha r) + \{\beta r^2 + (br)(cr)\} + \{r^2(dr) + (er)(fr)(gr)\} + \\ &\quad + \{\gamma r^3 + r^2(hr)(ir) + (lr)(lr)(mr)(nr)\} + \dots \\ v &= a + \{\alpha r + [br] + c(dr)\} + \{er^2 + r(fr) + [gr](hr) + \\ &\quad + i(fr)(lr)\} + \{\beta r^2 + [mr]r^2 + r(ur)(or) + pr^2(qr) + \\ &\quad + [sr](tr)(ur) + v(tv)(tr)(yr)\} + \dots \end{aligned}$$

Если поля представлены такого рода разложениями, то применение к ним дифференциальных операторов выполняется легко.

φ	$\text{grad } \varphi$	$\Delta \varphi$
r^n	$n r^{n-2}$	$n(n+1)r^{n-2}$
$\ln r$	$\frac{r}{r^2}$	$\frac{1}{r^2}$
$(\text{ar}) r^n$	$\text{ar} r^n + r (\text{ar}) n r^{n-2}$	$(\text{ar}) n(n+3)r^{n-2}$
$(\text{ar})(\text{br}) r^n$	$a(\text{br}) r^n + b(\text{ar}) r^n + r (\text{ar})(\text{br}) n r^{n-2}$	$2(a'b) r^n + n(n+5)(\text{ar})(\text{br}) r^{n-2}$

При решении скалярных или векторных дифференциальных уравнений можно брать такие представления в качестве исходных и затем выводить отсюда алгебраические соотношения между параметрами разложения.

7. Интегральные теоремы

а) Скалярные интегралы

Теорема Гаусса:

$$\int_{(V)} df a_n = \int_V dv \text{div } a.$$

Первый интеграл распространен на замкнутую поверхность, второй — на ограничиваемый ею объем. Вектор n в выражении $a_n = (an)$ есть единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Теорема Стокса:

$$\int_{(F)} ds a_s = \int_F df \text{rot}_n a, \quad [\text{rot}_n a = (n \text{ rot } a)].$$

Первый интеграл берется по замкнутой кривой, второй — по произвольной поверхности, ограниченной этой кривой¹⁾.

Теорема Грина: применяя теорему Гаусса к вектору $\psi \text{ grad } \varphi$, получаем:

$$\int_{(V)} df \psi \text{ grad}_n \varphi = \int_V dv [\psi \Delta \varphi + (\text{grad } \psi \text{ grad } \varphi)].$$

¹⁾ Положительное направление нормали к поверхности должно быть ориентировано относительно направления обхода контура интегрирования так же, как положительное направление оси z — относительно положительного направления вращения в x, y -плоскости. (Прим. ред.)

$\text{grad } \Delta\varphi$	$\Delta\Delta\varphi$
$rn(n+1)(n-2)r^{n-4}$	$n(n+1)(n-2)(n-1)r^{n-4}$
$-\frac{2}{r^3}r$	$\frac{2}{r^3}$
$an(n+3)r^{n-2} + rn(n-2)(n+3)(ar)r^{n-4}$	$n(n+1)(n-2)(n+3)(ar)r^{n-4}$
$n(n+5)\left\{a(br) + b(ar) + r(n-2)\frac{(ar)(br)}{r^2}\right\}r^{n-2} + 2r(ab)nr^{n-2}$	$n\left\{4(n+3)(ab) + (n+5)(n-2)(n+3)\frac{(ar)(br)}{r^2}\right\}r^{n-2}$

Отсюда вытекает следующая полезная формула:

$$\int_V df(\psi \text{grad}_n \varphi - \varphi \text{grad}_n \psi) = \int_V dv(\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi).$$

Особенно важны следующие частные случаи:

1. $\psi = 1$. $\int df \text{grad}_n \varphi = \int dv \Delta\varphi$.

2. $\psi = \frac{1}{r}$. Тогда $\Delta\psi = 0$ при $r \neq 0$. Будем иметь:

$$\int df\left(\frac{1}{r} \text{grad}_n \varphi - \varphi \text{grad}_n \frac{1}{r}\right) = \int dv\left(\frac{1}{r} \Delta\varphi\right) - \int dv\left(\varphi \Delta\frac{1}{r}\right).$$

Последний интеграл равен нулю, если поверхность, по которой берется стоящий слева интеграл, не включает внутри себя точки $r = 0$. Если же эта точка находится внутри поверхности, то получим:

$$\int dv\left(\varphi \Delta\frac{1}{r}\right) = -4\pi\varphi_0,$$

где φ_0 — значение φ в нулевой точке. Таким образом, выражение $-\frac{1}{4\pi} \Delta\frac{1}{r}$ представляет собой обобщение дельта-функции на трехмерный случай (см. стр. 35). Имеем:

$$\Delta\frac{1}{r} = \Delta\frac{1}{|r-r_0|} = -4\pi\delta(r-r_0).$$

В случае, когда поверхность включает внутри себя нулевую точку, получаем:

$$4\pi\varphi_0 = -\int dv\frac{\Delta\varphi}{r} + \int df\left(\frac{1}{r} \text{grad}_n \varphi - \varphi \text{grad}_n \frac{1}{r}\right).$$

2а. $\varphi = 1$ дает:

$$\int dv \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \int df \operatorname{grad}_n \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi, \text{ соответственно } = 0,$$

смотря по тому, принадлежит нулевая точка рассматриваемому объему или нет.

3. $\phi = \frac{e^{ikr}}{r}$. Тогда $\Delta\phi = -k^2\phi$ при $r \neq 0$.

Если функция φ удовлетворяет всюду уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, то

$$\int df \left(\frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) = 4\pi\varphi_0, \text{ соответственно } = 0,$$

смотря по тому, заключает поверхность внутри себя точку $r = 0$ или нет.

Теорема Пуассона:

$$\Delta \int \frac{dv}{r} \varphi = \int dv \varphi \Delta \frac{1}{r} = \int dv \frac{\Delta\varphi}{r} = -4\pi\varphi_0,$$

или, в более точной записи:

$$\Delta \int \frac{dv' \varphi(r')}{|r-r'|} = -4\pi\varphi(r).$$

Эта теорема справедлива также для векторов:

$$\Delta \int dv \frac{\alpha}{r} = \int \frac{dv}{r} \Delta\alpha = -4\pi\alpha_0.$$

Поэтому из $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ следует $\varphi = \int dv \frac{\rho}{r}$, из $\Delta\alpha = -4\pi b$ следует $\alpha = \int dv \frac{b}{r}$. Справедливо также более общее утверждение:

$$\text{из } \Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho \text{ следует } \varphi = \int dv \frac{\rho e^{ikr}}{r}.$$

б) Векторные интегралы

Для произвольной замкнутой кривой имеем:

$$\int_{(F)} d\mathfrak{s}\varphi = \int_F df [n \operatorname{grad} \varphi];$$

интеграл в правой части берется по поверхности, ограниченной этой кривой.

Специальные случаи

1. Собственные интегралы

$$\begin{aligned} \int df \varphi n &= \int dv \operatorname{grad} \varphi, \\ \int df [na] &= \int dv \operatorname{rot} a, \\ \int df (n \operatorname{rot} a) &= 0, \\ \int df a(bn) &= \int dv (a \operatorname{div} b + (b \operatorname{grad} a)), \\ \int df n(ab) &= \int dv \operatorname{grad} (ab) = \\ &= \int dv ((a \operatorname{grad} b) + (b \operatorname{grad} a) + [a \operatorname{rot} b] + [b \operatorname{rot} a]), \\ \int df (n(ab) - a(bn) - b(an)) &= \\ &= \int dv ([a \operatorname{rot} b] + [b \operatorname{rot} a] - a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a), \\ \int df \left(\frac{n}{2} a^2 - a(an) \right) &= \int dv ([a \operatorname{rot} a] - a \operatorname{div} a). \end{aligned}$$

2. Несобственные интегралы

Следующие далее интегралы берутся по всему пространству (до $r = \infty$). Подынтегральная функция должна быть непрерывной и при больших r исчезать быстрее, чем $\frac{1}{r^3}$.

Скалярные интегралы:

$$\begin{aligned} \int dv \operatorname{div} a &= 0, \\ \int dv \varphi \operatorname{div} a &= - \int dv (a \operatorname{grad} \varphi), \\ \int dv (a \operatorname{rot} b) &= \int dv (b \operatorname{rot} a). \end{aligned}$$

В частности, для радиуса-вектора r :

$$\begin{aligned} \int dv \frac{\operatorname{div} a}{r} &= - \int dv \left(a \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = \int dv \frac{(ar)}{r^3}, \\ \int dv (r \operatorname{grad} \varphi) &= -3 \int dv \varphi, \\ \int dv (r \operatorname{rot} a) &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь имеется в виду убывание на бесконечности порядка $\frac{1}{r^{3+\epsilon}}$, где $\epsilon > 0$. Это условие достаточно для сходимости тройного интеграла, но оно не является необходимым. (Прим. ред.)

Векторные интегралы:

$$\begin{aligned} \int dv \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \int dv \operatorname{rot} \alpha &= 0, \\ \int dv \alpha \operatorname{div} \mathbf{b} &= - \int dv (\mathbf{b} \operatorname{grad}) \alpha, \\ \int dv \varphi \operatorname{rot} \alpha &= \int dv [\alpha \operatorname{grad} \varphi], \\ \int dv \varphi \operatorname{grad} \psi &= - \int dv \psi \operatorname{grad} \varphi, \\ \int dv (\alpha \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{div} \alpha) &= \int dv ([\alpha \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \alpha]). \end{aligned}$$

В частности, для радиуса-вектора \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \int dv \frac{\operatorname{rot} \alpha}{r} &= \int dv \left[\alpha \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] = - \int dv \frac{[\alpha \mathbf{r}]}{r^3}, \\ \int dv [\mathbf{r} \operatorname{grad} \varphi] &= 0, \\ \int dv \mathbf{r} \operatorname{div} \alpha &= - \int dv \alpha, \\ \int dv [\mathbf{r} \operatorname{rot} \alpha] &= 2 \int dv \alpha, \\ \int dv \frac{\operatorname{grad} \varphi}{r} &= \int dv \frac{\varphi \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Если образовать интеграл, например, вида

$$\psi(\mathbf{r}') = \int \frac{dv \varphi(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

то он будет представлять собой функцию от \mathbf{r}' . Мы будем при этом иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}' \psi(\mathbf{r}') &= \int dv \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int dv \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= - \int dv \operatorname{grad} \frac{\varphi(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int dv \frac{\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Если интегрирование выполняется по всему пространству, то первый интеграл равен нулю при условии, что φ при $r \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{r}$.

В таких случаях пишут более просто:

$$\psi = \int \frac{dv \varphi}{r} \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} \int \frac{dv \varphi}{r} = \int dv \frac{\operatorname{grad} \varphi}{r}.$$

8. Специальные векторные поля

1) Векторное поле α , для которого $\text{rot } \alpha$ всюду равен нулю, называется *безвихревым полем*.

Безвихревое векторное поле α может быть представлено в виде поля (отрицательного) градиента некоторого скаляра φ ,

$$\alpha = -\text{grad } \varphi,$$

называемого *потенциалом*, или *скалярным потенциалом*. Тогда будем иметь:

$$\int_1^2 a_s ds = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Значение интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек и не зависит от пути интегрирования; в случае замкнутого пути интегрирования интеграл равен нулю. Справедливо также обратное утверждение: поле градиента скаляра всегда является безвихревым.

Если положить

$$\text{div } \alpha = -\text{div grad } \varphi = -\Delta \varphi = 4\pi\rho,$$

то будем иметь $\varphi = \int \frac{dv \rho}{r}$, где r означает расстояние элемента объема от точки, в которой разыскивается значение φ . Интеграл в случае, если не оговорено чего-либо иного, берется по всему пространству. Конечно, необходимо проверить, сходится ли он.

Таким образом, если $\text{div } \alpha$ всюду задана и $\text{rot } \alpha = 0$, то эта формула позволяет вычислить φ , а следовательно, также и вектор α .

2) Векторное поле α , для которого $\text{div } \alpha$ всюду равна нулю, называется *соленоидальным*, или *свободным от источников*. Свободный от источников вектор α может быть представлен в виде ротора свободного от источников вектора \mathfrak{A} :

$$\alpha = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \text{div } \mathfrak{A} = 0.$$

Вектор \mathfrak{A} называется *векторным потенциалом* вектора α .

Если положить

$$\text{rot } \alpha = \text{rot}(\text{rot } \mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A} = 4\pi\epsilon,$$

то получим:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv \epsilon}{r}.$$

Таким образом, если $\text{rot } \alpha$ всюду задан и $\text{div } \alpha = 0$, то эта формула позволяет вычислить \mathfrak{A} , а следовательно, также и α .

3) Всякое векторное поле при условии, что оно всюду непрерывно и на бесконечности достаточно быстро исчезает, может быть однозначным

образом представлено в виде суммы (суперпозиции) двух полей — безвихревого и свободного от источников:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'',$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \alpha' &= 0, \quad \operatorname{div} \alpha'' = 0; \\ \alpha' &= -\operatorname{grad} \int \frac{dv \operatorname{div} \alpha}{4\pi r}, \quad \alpha'' = \operatorname{rot} \int \frac{dv \operatorname{rot} \alpha}{4\pi r}. \end{aligned}$$

Операции, фигурирующие в этих формулах *под* знаком интеграла, должны выполняться в той точке, в которой берется элемент объема; операции, указанные *перед* знаком интеграла, выполняются в точке, где вычисляется вектор α' , соответственно α'' .

9. Векторные поля, не всюду непрерывные

1) Пусть

$$\operatorname{rot} \alpha = 0$$

и

$$\operatorname{div} \alpha = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Тогда

$$\int a_n df = \operatorname{const} = 4\pi e$$

для всякой замкнутой поверхности, заключающей внутри себя точку $r = 0$, и

$$\int a_n df = 0$$

для всякой замкнутой поверхности, не заключающей внутри себя точки $r = 0$ (см. стр. 213—214).

Множитель e называется *мощностью* находящегося в точке $r = 0$ источника.

В этом случае поле α может быть получено из некоторого потенциала φ :

$$\alpha = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}.$$

Функция φ имеет особенность при $r = 0$.

Это же поле может быть получено из некоторого векторного потенциала \mathcal{A} :

$$\alpha = \operatorname{rot} \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = e \frac{[nr]}{r(r + [nr])} = e [n, \operatorname{grad} \ln(r + [nr])] = -e \operatorname{rot} (n \ln(r + [nr])),$$

где $n^2 = 1$. \mathcal{A} имеет особую линию, определяемую условием $r = -[nr]$, т. е. полупрямую $r = -\alpha n$.

1а) Пусть $\operatorname{div} \alpha = 0$ во всех точках, кроме $r = 0$ и $r = l$, где находятся источники мощностей соответственно $-e$ и e . Если теперь заставить l стремиться к нулю так, чтобы при этом произведение

Если \mathfrak{m} оставалось конечным, то получим *двойной источник*, или *диполь*, с *моментом* \mathfrak{m} .

Имеем:

$$\mathfrak{a} = -\text{grad } \varphi, \quad -\varphi = \left(\mathfrak{m} \text{ grad } \frac{1}{r} \right) = -\frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{r})}{r^3} = \text{div} \left(\frac{\mathfrak{m}}{r} \right)$$

и

$$\mathfrak{a} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \frac{[\mathfrak{m}\mathfrak{r}]}{r^3} = -\left[\mathfrak{m} \text{ grad } \frac{1}{r} \right] = \text{rot} \left(\frac{\mathfrak{m}}{r} \right),$$

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0.$$

2) Пусть

$$\text{rot } \mathfrak{a} = 0$$

и

$$\text{div } \mathfrak{a} = 0.$$

Относительно вектора \mathfrak{a} предположим, что он терпит разрыв на некоторой поверхности, так что $a_n = (\mathfrak{a}\mathfrak{n})$ при переходе с одной стороны поверхности на другую изменяется скачком от значения a_{n1} к значению $-a_{n2}$. Здесь \mathfrak{n} означает нормальный вектор к поверхности, направленный от 1-й стороны ко 2-й.

Если положить

$$\omega = -\frac{1}{4\pi} (a_{n1} + a_{n2}),$$

то $4\pi\omega = \text{div } \mathfrak{a}$ называется *поверхностной дивергенцией*.

ω есть мощность источников, которые мыслятся распределенными на поверхности, отнесенная к единице площади поверхности.

Если φ также терпит разрыв на поверхности, то мы определяем величину

$$\tau = \frac{1}{4\pi} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

В этом случае говорят о *двойном слое с моментом* τ .

Мы имеем: $\mathfrak{a} = -\text{grad } \varphi$,

$$\varphi = \int df \left(\frac{\omega}{r} + \tau \left(\mathfrak{n}_1 \text{ grad } \frac{1}{r} \right) \right);$$

интеграл распространен на поверхность.

Если τ на поверхности сохраняет постоянное значение и $\omega = 0$, то будем иметь:

$$\varphi = \tau\Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым поверхность видна из точки, в которой разыскивается значение φ .

3) Пусть всюду $\text{div } \mathfrak{a} = 0$ и всюду, *кроме точек некоторой линии* L (*вихревой линии*), $\text{rot } \mathfrak{a} = 0$.

Тогда линия L либо является замкнутой, либо простирается в бесконечность. Для всякой замкнутой кривой, охватывающей линию L , будем иметь:

$$\int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \alpha = \operatorname{const} = 4\pi\tau \quad (\text{см. стр. 212}),$$

причем поверхность $\int df$ может быть произвольным образом деформирована. Отсюда следует, что τ вдоль линии L остается постоянным. τ называется *моментом вихревой линии*.

Ввиду того, что $dv = ds df$, векторный потенциал вихревой линии дается формулой

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{ds df \operatorname{rot} \alpha}{r} = \tau \int_L \frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

откуда следует, что

$$\alpha = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \tau \int_L \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}].$$

Так как вектор α всюду, кроме точек линии L , является *безвихревым*, то он может быть получен из некоторого скалярного потенциала φ , $\alpha = -\operatorname{grad} \varphi$; однако при этом для всякой кривой, охватывающей замкнутую вихревую линию (см. выше), будем иметь:

$$\int_2^1 ds a_s = \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau,$$

где 1 и 2 — совпадающие начальная и конечная точки замкнутого пути интегрирования, которые считаются принадлежащими различным сторонам поверхности F , натянутой на линию L . Таким образом, вихревая линия L с моментом τ эквивалентна двойному слою F с моментом τ , произвольным образом натянутому на линию L . Скалярным потенциалом, как и выше, является $\varphi = \tau\Omega$.

4) Пусть $\operatorname{rot} \alpha = 0$ *всюду, кроме точек, принадлежащих некоторой поверхности*, и $\operatorname{div} \alpha = 0$, т. е. вектор α терпит разрыв на поверхности, причем $[\mathfrak{n}\alpha]$ (компонента вектора, параллельная поверхности) при переходе с одной стороны поверхности на другую изменяется скачком от значения $[\mathfrak{n}\alpha_1]$ к значению $[\mathfrak{n}\alpha_2]$.

Введем вектор

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{n}(\alpha_1 - \alpha_2)].$$

$4\pi\mathfrak{g} = \operatorname{rot} \alpha$ называется *поверхностным вихрем*, или *поверхностным ротором*. При этом имеем:

$$\mathfrak{A} = \int df \frac{\mathfrak{g}}{r}, \quad \alpha = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

10. Совокупности векторов

Геометрическое пространство заполняется совокупностью всех значений радиуса-вектора \mathbf{r} , или, что то же, оно представляет собой совокупность всевозможных значений этого вектора. Аналогично этому, совокупность значений вектора \mathbf{f} какой-либо иной природы образует \mathbf{f} -пространство с координатами k_x, k_y, k_z . В этом пространстве могут быть введены все обычные понятия, такие как скаляры, векторы и т. п., а также дифференциальные и интегральные операции, такие как grad , div , $\int dv$ и т. д. Соответствующие величины и операторы обычно обозначают при помощи индекса k : $\text{grad}_k, \text{div}_k, \int dv_k$; $\rho_k = \rho(\mathbf{f}) = \rho(k_x, k_y, k_z)$ — плотности в \mathbf{f} -пространстве.

Возможно, далее, комбинирование геометрического \mathbf{r} -пространства с некоторым \mathbf{f} -пространством. В этом многообразии размерности 2×3 каждой точке \mathbf{r} соответствует целое \mathbf{f} -пространство.

В этом случае точка в (\mathbf{r}, \mathbf{f}) -пространстве представляет собой элемент, который определяется своим положением \mathbf{r} и одновременно некоторым вектором \mathbf{f} . Множество таких точек имеет плотность, характеризующуюся функцией распределения $F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$. Объемная плотность (в \mathbf{r} -пространстве) этих элементов равна $\rho = \int dv_k F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$. Величина $\rho_k = \int dv F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$ представляет собой их плотность в \mathbf{f} -пространстве, величина $M = \int \rho dv = \int \rho_k dv_k = \iint dv dv_k F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$ — все их множество.

Посредством интегрирования по \mathbf{f} можно для функций от \mathbf{r} и \mathbf{f} образовать их локальные средние значения:

$$\bar{\varphi} = \frac{\int dv_k \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{f}) F(\mathbf{r}, \mathbf{f})}{\int dv_k F(\mathbf{r}, \mathbf{f})} = \frac{1}{\rho} \int dv_k \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{f}) F(\mathbf{r}, \mathbf{f}),$$

а также, следовательно, обычные скаляры и векторы, например:

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\int dv_k \mathbf{f} F(\mathbf{r}, \mathbf{f})}{\int dv_k F(\mathbf{r}, \mathbf{f})} = \frac{1}{\rho} \int dv_k \mathbf{f} F(\mathbf{r}, \mathbf{f}).$$

Функция $F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$ при этом играет роль весовой функции.

Применение. Эти понятия служат, в частности, для описания систем, состоящих из в каком-либо смысле плотно распределенных элементов, каждый из которых обладает качеством, которое можно изобразить с помощью вектора \mathbf{f} (скорость, импульс, момент и т. п.). Данный формализм может быть применен также к сложным полям излучения (\mathbf{f} — волновой вектор (см. стр. 226)).

Распределение, задаваемое функцией $F(\mathbf{r}, \mathbf{f})$, может зависеть от времени: $F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)$. Изменение $F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t_2) - F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t_1)$ за время $t_2 - t_1$ может осуществляться в силу различных причин:

1) благодаря удалению или введению элементов:

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)}{\partial t} = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{f});$$

2) благодаря перемещению элементов из положения \mathbf{r} в положение \mathbf{r}' при неизменном \mathbf{f} :

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)}{\partial t} = \int d\mathbf{v}' \{ F(\mathbf{r}', \mathbf{f}) V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - F(\mathbf{r}, \mathbf{f}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \};$$

3) благодаря изменению характеризующего элементы вектора с \mathbf{f} на \mathbf{f}' при неизменном \mathbf{r} :

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)}{\partial t} = \int d\mathbf{v}'_k \{ F(\mathbf{r}, \mathbf{f}') W(\mathbf{f}', \mathbf{f}) - F(\mathbf{r}, \mathbf{f}) W(\mathbf{f}, \mathbf{f}') \}.$$

Здесь φ означает функцию, появление которой обусловлено внешним воздействием. V и W суть функции, описывающие соответственно переходы от \mathbf{r} к \mathbf{r}' и от \mathbf{f} к \mathbf{f}' . Они называются *функциями перехода* (Übergangsfunktionen). В случаях 2) и 3) ρ_k , соответственно ρ , остается постоянным, и, следовательно, постоянным будет также и M .

Если конечные изменения положения происходят лишь за конечное время, то функция $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ существует лишь для малых $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. В этом случае 2) может быть заменено соотношением

2') $\frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{v}F(\mathbf{r}, \mathbf{f}))$ с *вектором тока* \mathbf{v} . Аналогично для 3) имеем:

3') $\frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{f}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}_k(\mathfrak{K}F(\mathbf{r}, \mathbf{f}))$ с *вектором возмущения* \mathfrak{K} . Все эти функции могут зависеть от \mathbf{r} , \mathbf{f} и t .

11. Точечная решетка и взаимная решетка

Элементарной пространственной точечной решеткой, или *пространственной решеткой Браве*, называется система бесконечного числа точек, радиус-вектор которых \mathbf{r} может быть представлен с помощью трех некопланарных основных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ формулой

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r}_0 + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^3 n_i\mathbf{e}_i \quad (1)$$

с тремя целыми (положительными или отрицательными) числами n_1, n_2, n_3 . Положение каждой точки решетки характеризуется этими тремя числами. (Мы полагаем в дальнейшем $\mathbf{r}_0 = 0$.)

Та же решетка может быть представлена с помощью других основных векторов e'_i , которые получаются из векторов e_i посредством преобразования $e'_i = \sum_k a_{ik} e_k$, где матрица a_{ik} состоит из целых чисел и имеет определитель $\det(a_{ik}) = 1$.

Объем одной ячейки решетки (элементарной ячейки), построенной на трех основных векторах, равен

$$V_g = (e_1 [e_2 e_3]) = \frac{1}{\rho},$$

где ρ означает среднюю объемную плотность точек решетки.

Прямая, содержащая две точки решетки, содержит бесконечное множество таких точек, причем соседние точки находятся на равных расстояниях друг от друга.

Плоскость, содержащая три точки решетки, содержит бесконечное множество точек решетки, которые образуют плоскую решетку. Такая плоскость называется *плоскостью, принадлежащей решетке*. Для данной плоскости, принадлежащей решетке, существует бесконечное множество параллельных ей плоскостей, принадлежащих решетке; эти плоскости находятся на равных расстояниях друг от друга и в совокупности содержат все точки решетки.

Если посредством равенств $(e_i e^k) = \delta_{ik}$ определим векторы e^1, e^2, e^3 , *взаимные* к векторам e_i , так что $e^1 = \frac{[e_2 e_3]}{(e_1 [e_2 e_3])}$ и т. д., то будем иметь:

$$(r_g e^i) = n_i. \quad (2)$$

При помощи векторов e^i можно для решетки r_g построить *взаимную решетку* \tilde{r}_g :

$$\tilde{r}_g = \sum_i l_i e^i, \quad (\tilde{r}_g e_i) = l_i, \quad (3)$$

где l_i — целые числа.

Объем одной ячейки взаимной решетки, построенной на векторах e^i , равен

$$\tilde{V}_g = (e^1 [e^2 e^3]) = \frac{1}{(e_1 [e_2 e_3])} = \frac{1}{V_g};$$

таким образом, средняя объемная плотность ρ точек, принадлежащих пространственной решетке, равна \tilde{V}_g .

Всякая плоскость, принадлежащая решетке, может быть представлена в виде

$$(\tilde{r}_{g_0}) = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4)$$

т. е. как плоскость, нормальная к вектору

$$\tilde{r}_{g_0} = \sum_i l_i e^i \quad \text{с целочисленными } l_i, \quad (5)$$

не имеющими (иначе, чем в (3)) общих делителей. Вектор \vec{r}_{g_0} является кратчайшим вектором взаимной решетки, идущим по направлению, перпендикулярному к плоскости.

Семейству параллельных плоскостей, принадлежащих решетке, в представлении вида (4) соответствует один и тот же вектор \vec{r}_{g_0} . Отдельные плоскости семейства отличаются друг от друга значениями n . Принадлежащая решетке плоскость, ближайшая к началу координат, задается условием $n=1$. Каждому семейству параллельных плоскостей, принадлежащих пространственной решетке, при помощи соотношения (4) ставится в соответствие (ближайшая к началу координат) определенная точка \vec{r}_{g_0} взаимной решетки.

На всякой прямой, проходящей через начало координат и через \vec{r}_{g_0} , лежат точки взаимной решетки, располагающиеся на равных расстояниях друг от друга; точки взаимной решетки можно поэтому, каждую отдельно, поставить в соответствие значениям n , фигурирующим в (4): $\vec{r}_g = n\vec{r}_{g_0}$. Тогда каждой отдельной плоскости, принадлежащей пространственной решетке, соответствует одна определенная точка взаимной решетки. Это соотношение является взаимно однозначным и двойственным.

Взаимно простые коэффициенты l_i в (5) называются *индексами Миллера* и характеризуют ориентацию семейства перпендикулярных к \vec{r}_{g_0} плоскостей, принадлежащих пространственной решетке.

Отрезки a_i , отсекаемые на осях принадлежащей решетке плоскостью (4), измеренные в единицах $|e_i|$, получаются из соотношения

$$a_i l_i = n \quad (i = 1, 2, 3).$$

Величины a_i могут быть и нецелыми положительными или отрицательными рациональными числами.

Для принадлежащей решетке плоскости, проходящей через три точки $\vec{r}_i = \sum_j n_{ij} e_j$, имеем:

$$a_i = \frac{\Delta}{\sum_{j=1}^3 A_{ji}},$$

где $\Delta = \det(n_{ij})$, а A_{ji} означает алгебраическое дополнение элемента n_{ji} в определителе $\det(n_{ij})$. Далее, имеем $l_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^3 A_{ji}$ и $n = \frac{\Delta}{m}$, где m означает общий наибольший делитель трех сумм $\sum_j A_{ji}$.

Расстояние до плоскости, принадлежащей решетке, от начала координат: $nd = \frac{n}{|\vec{r}_{g_0}|}$. При этом $d = \frac{1}{|\vec{r}_{g_0}|}$ представляет собой расстояние от начала координат до ближайшей к началу принадлежа-

шей решетке плоскости того же направления ($n = 1$) и одновременно — расстояние между двумя принадлежащими решетке соседними плоскостями того же направления.

Для плоскости, принадлежащей решетке, средняя плотность расположенных на ней точек решетки равна

$$\sigma = \frac{d}{V_g} = \tilde{V}_g d = \rho d.$$

Еще одно свойство взаимных векторов выражается тождеством

$$\tau = \sum_i e_i(\tau e^i) = \sum_i e^i(\tau e_i)$$

(вытекающим для частного случая векторов пространственной решетки из (1) и (2)) (см. стр. 253).

12. Волновые поля

а) Скалярные волны

Процесс, *периодически повторяющийся во времени*, называется *колебанием*. Он может быть представлен с помощью одной или нескольких функций времени t , для которых имеет место равенство $s(t) = s(t + T)$. Если колебание описывается действительной или мнимой частью функции

$$s(t) = Ae^{2\pi i \frac{t}{T}} = Ae^{i\omega t},$$

то говорят о *гармоническом* колебании. При этом множитель A (вещественный или комплексный), характеризующий амплитуду, может представлять собой функцию точки, а также других параметров.

Можно также рассматривать явление, *периодически повторяющееся в пространстве*¹⁾:

$$s(\tau) = s(\tau + \lambda n),$$

в частности описываемое формулой, связанной с синусоидальной плоской волной:

$$s(\tau) = Ae^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}} = Ae^{i(n\tau)} \quad (n^2 = 1);$$

A может зависеть от времени и других параметров.

Процесс, периодически повторяющийся как во времени, так и в пространстве, называют *волной*, в частности *плоской элементарной*

¹⁾ В оригинале здесь употреблен термин «Wellung». Соответствующего русского термина нет. (Прим. ред.)

волной, если она может быть представлена в следующей *нормальной форме*:

$$s(\tau, t) = Ae^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{n\tau}{\lambda} \right)} = Ae^{i(\omega t - (n\tau))} = Ae^{i\omega \left(t - \frac{(n\tau)}{V} \right)} = Ae^{ik(Vt - (n\tau))}.$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= n \frac{\omega}{V}, & k &= \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}, & T &= \frac{2\pi}{\omega}, & V &= \frac{\omega}{k}, \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi V}{\omega}, & n &= \frac{\mathfrak{f}}{k}. \end{aligned}$$

При $A = |A| e^{i\alpha}$ фигурирующие здесь действительные величины имеют следующие названия:

- $|A|$ — амплитуда,
- α — фазовая постоянная,
- ω — круговая частота,
- \mathfrak{f} — волновой вектор,
- n — волновая нормаль ($n^2 = 1$),
- V — фазовая скорость, или скорость распространения фазы,

$$T — \text{период колебания} \left(\frac{1}{T} = \nu — \text{частота; } \omega = 2\pi\nu \right),$$

$$\lambda — \text{длина волны} (\lambda\nu = V),$$

$$k = |\mathfrak{f}| — \text{называется также волновым числом,}$$

$$\omega t - (n\tau) + \alpha — \text{фаза.}$$

$I = |A|^2$ представляет собой меру (математической) *интенсивности* волны. В качестве меры физической интенсивности берутся пропорциональные величины, определяемые в разных случаях различным образом.

Элементарная волна такого рода задается шестью числовыми параметрами.

В физике V является, вообще говоря, функцией от ω (*дисперсия*) и n (*анизотропия*): $V = f(\omega, n)$, так что $\frac{\omega}{k} = f\left(\omega, \frac{\mathfrak{f}}{k}\right)$ или $\omega = F(\mathfrak{f})$, $V = \frac{1}{k} F(\mathfrak{f})$. Поэтому ω и V для однородной среды, в которой распространяется волна, представляют собой скалярные функции в \mathfrak{f} -пространстве.

Элементарная волна называется *монохроматической* в отличие от более общих волновых образований, получающихся как линейные комбинации элементарных волн. Для элементарных волн справедливо *волновое уравнение*

$$\Delta s = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta s + k^2 s = 0,$$

так же как и для всех комбинаций с одинаковыми V или k , а следовательно, и с одинаковыми ω . Если определить волну как общее

решение волнового уравнения, то сюда не войдут комбинации с различными V и k .

Имеется ряд важных частных случаев.

1) Комбинация двух элементарных волн с одной и той же амплитудой:

$$s(\tau, t) = 2|A| \cos \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \tau)}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right\} \times \\ \times e^{i \left\{ \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t - \frac{(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \tau)}{2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right\}} = f(t, \tau) e^{i(\bar{\omega}t - (\bar{\mathbf{f}}, \tau) + \bar{\alpha})}.$$

Мы имеем здесь дело с частным случаем *модулированной* волны, т. е. с произведением амплитудного множителя $f(t, \tau)$, зависящего от времени и положения, и фазового множителя со средними значениями параметров. Вид первого множителя типичен для *интерференции*. В случае, когда $\omega_1 = \omega_2$, он сам по себе имеет здесь вид волны, так называемой *стоячей волны*. Если $\omega_1 - \omega_2$ и $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ малы по сравнению с $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, соответственно с $\frac{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2}{2}$, то амплитудный множитель $f(t, \tau)$ «медленно изменяется», в противоположность фазовому множителю.

Интенсивность такой комбинации характеризуется зависящей от положения и времени величиной $|f(t, \tau)|^2$.

2) *Группа волн*, т. е. комбинация бесконечного множества элементарных волн с приблизительно одинаковым волновым вектором $\mathbf{f} \cong \bar{\mathbf{f}}$:

$$s = \int d\nu_k A(\mathbf{f}) e^{i(\omega t - (\mathbf{f}, \tau)}.$$

Интегрирование распространено на малую окрестность $\Delta\nu_k$ \mathbf{f} -пространства, окружающую $\bar{\mathbf{f}}$, в которой комплексная функция $A(\mathbf{f})$ отлична от нуля. Если $\omega = F(\bar{\mathbf{f}})$, то

$$s = f(\tau - t\mathbf{u}) e^{i(\bar{\omega}t - (\bar{\mathbf{f}}, \tau)}, \\ \bar{\omega} = F(\bar{\mathbf{f}}), \mathbf{u} = \overline{\text{grad}_k \omega}, \quad \text{т. е. } u_x = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right)_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}}, \quad \text{и т. д.}$$

Мы снова получаем модулированную волну, амплитудный множитель $f(\tau - t\mathbf{u})$ которой «движется» с *групповой скоростью* \mathbf{u} . Справедливо также соотношение

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}V + k \text{ grad}_k V)_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}}.$$

При помощи надлежащего выбора $A(\mathbf{f})$ можно группу волн сконцентрировать в части пространства $\Delta\nu$, наименьшее протяжение которой обратно величине области интегрирования: $\Delta\nu \Delta\nu_k \cong 1$. В этом случае говорят о *волновом пакете*.

Если $\Delta v_k = \Delta f_k$ двумерно (например, $|\mathbf{f}| = |\bar{\mathbf{f}}|$), то получаем *волновой луч* с поперечным сечением $\Delta f \cong \frac{1}{\Delta f_k}$. Если $\Delta v_k = \Delta l_k$ одномерно (например, $\frac{f}{k} = \pi = \text{const}$), то получаем *волновой фронт* глубины $\Delta l \cong \frac{1}{\Delta l_k}$.

Если в соотношении $A(\mathbf{f}) = |A(\mathbf{f})| e^{i\alpha(\mathbf{f})}$ фазовая функция $\alpha(\mathbf{f})$ всюду разрывна в том смысле, что $\alpha(\mathbf{f})$ внутри сколь угодно малой области \mathbf{f} -пространства принимает все значения между 0 и 2π , то амплитудный множитель и тем самым интенсивность волны не зависят от положения и времени. Между этим крайним случаем и случаями, описанными выше, имеется много промежуточных.

Если интегрирование распространить здесь на все \mathbf{f} -пространство, то получим диффузную совокупность волн с непрерывным спектром, которая в акустике известна как шум, а в оптике — как белый свет. Их общая интенсивность дается интегралом $I = \int dv_k |A(\mathbf{f})|^2$. Две совокупности такого рода называются *некогерентными*, если их интенсивности комбинируются аддитивно. Условием этого служит ортогональность их спектральных функций:

$$\int dv_k A_1^*(\mathbf{f}) A_2(\mathbf{f}) = 0.$$

Дальнейшими важными типами волн служат:

3) *Затухающие волны*. Их получают, беря в качестве параметров ω и \mathbf{f} элементарной волны комплексные величины. Общий вид зависимости при $\omega = \omega_0 + i\beta$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 - i\mathbf{a}$ таков:

$$s = A e^{-\beta t - (\mathbf{a}\mathbf{r})} e^{i(\omega_0 t - (\mathbf{f}_0\mathbf{r}))}.$$

Затухающие волны допускают представление с помощью интегралов, содержащих незатухающие элементарные волны с действительными ω и \mathbf{f} только в части пространства, например при $t > 0$, $(\mathbf{a}\mathbf{r}) > 0$, для чего служит тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2\pi(\beta + i\omega)} d\omega = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t > 0 \quad (\beta > 0), \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

4) *Сферические волны* (в изотропных средах $\omega = F(k)$):

$$s = A \frac{e^{i(\omega t - k\mathbf{r})}}{r} = A \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v}\right)}}{r} = A \frac{e^{ik(vt - r)}}{r}.$$

Эти волны могут быть построены из плоских элементарных волн лишь в частях пространства, не содержащих *источника* $r = 0$ (см. стр. 346).

Из сферических волн можно составить также более общие волны, в частности при помощи интегрирования по линейно или поверхностно распределенным источникам.

Математическая формулировка *принципа Гюйгенса* (построение волнового поля из сферических волн) дается при помощи тождества (см. стр. 214):

$$s|_{r=0} = \frac{1}{4\pi} \int df \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial s}{\partial n} - s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\}; \quad \frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n} \text{ grad}),$$

если внутри области, содержащей точку $r=0$ и ограниченной поверхностью, по которой берется интеграл, всюду выполнено условие $\Delta s + k^2 s = 0$.

При помощи дифференцирования можно получить волны из *двойных источников*:

$$s = A \left(\mathbf{n} \text{ grad} \left(\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \right) \right) = -A (\mathbf{n} r) \left(\frac{ik}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{i(\omega t - kr)}.$$

Важно, что они при больших r убывают лишь как $\frac{k}{r}$ (в отличие от соответствующих полей, убывающих как $\frac{1}{r^2}$). Для объемного интеграла $s = \int dV \rho \frac{e^{ikr}}{r}$ имеем:

$$\Delta s + k^2 s = -4\pi\rho.$$

Это уже не есть волна в обычном смысле.

5) *Цилиндрические волны* (см. стр. 343):

$$s = A e^{i\omega t} J_0(kr),$$

где J_0 — бесселева функция нулевого порядка (см. стр. 146), r — измераемое по перпендикуляру расстояние до оси цилиндра.

б) Векторные волны

Векторной элементарной волной называют векторное поле, имеющее вид

$$\mathbf{f}(r, t) = \mathfrak{A} e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}.$$

Вектор амплитуды \mathfrak{A} мы считаем не зависящим от положения r и времени t . Эта волна называется *продольной*, если $\mathfrak{A} \parallel \mathbf{k}$ и, значит, $\text{rot } \mathbf{f} = 0$; она называется *поперечной*, если $\mathfrak{A} \perp \mathbf{k}$ и, значит, $(\mathfrak{A} \mathbf{k}) = 0$, откуда следует, что $\text{div } \mathbf{f} = 0$.

Направление вектора \mathfrak{A} называется *направлением поляризации*; плоскость, проходящая через \mathfrak{A} и \mathbf{k} , называется *плоскостью поляризации* волны. Если $(\mathfrak{A} \mathbf{k}) = 0$ и \mathfrak{A} — комплексный вектор, то волна называется *эллиптически поляризованной*.

Векторная элементарная волна имеет три компоненты, которые являются скалярными волнами.

Комбинации векторных волн могут быть поэтому полностью описаны тремя скалярными волнами. При этом, однако, следует иметь в виду, что соотношение $\omega = F(\mathbf{k})$ должно быть заменено соотношением $\omega = F(\mathbf{k}, \mathcal{M})$ и что потому эти три скалярные волны, вообще говоря, зависят друг от друга.

13. Представление Фурье периодических и непериодических полей

а) *Периодическая* функция, периоды которой образуют пространственную решетку (см. стр. 222), т. е. удовлетворяющая соотношению

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi\left(\mathbf{r} - \sum_{i=1}^3 n_i(\mathbf{e}_i)\right) = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g)$$

с произвольными целочисленными n_i , может быть представлена с помощью суммы Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_g} \sum_{\lambda} F(\mathbf{k}_\lambda) e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k}_\lambda)}, \quad \text{где } \mathbf{k}_\lambda = \sum_i l_i \mathbf{e}_i,$$

т. е. каждый вектор \mathbf{k}_λ равен одному из векторов $\tilde{\mathbf{r}}_g$ взаимной решетки¹⁾. Суммирование по λ распространено на все точки взаимной решетки. Коэффициенты определяются равенством

$$F(\mathbf{k}_\lambda) = \int_{V_g} d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{r}) e^{-2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k}_\lambda)},$$

в котором интеграл распространен на одну ячейку V_g решетки.

б) *Непериодические* функции могут быть в области, целиком принадлежащей одной из ячеек решетки, представлены таким же образом. Если в таком представлении перейти к бесконечно большой ячейке, то получим, так как в этом случае вектор \mathbf{k}_λ принимает все значения, интегралы Фурье

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{v}_k F(\mathbf{k}) e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k})},$$

$$\text{где } F(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{r}) e^{-2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k})}, \quad \int d\mathbf{v}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \int dk_x dk_y dk_z.$$

Аналогичным образом могут быть представлены векторные поля с векторными коэффициентами:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_g} \sum_{\lambda} \mathfrak{F}(\mathbf{k}_\lambda) e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k}_\lambda)}, \quad \text{соответственно } \int d\mathbf{v}_k \mathfrak{F}(\mathbf{k}) e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{k})}.$$

Чтобы получающиеся поля были действительными, должны выполняться условия

$$F^*(\mathbf{k}_\lambda) = F(-\mathbf{k}_\lambda), \quad \text{соответственно, } \mathfrak{F}^*(\mathbf{k}_\lambda) = \mathfrak{F}(-\mathbf{k}_\lambda).$$

¹⁾ Здесь (в 13) волновой вектор записывается в виде $2\pi\mathbf{k}$.

Эти представления можно обобщить, вводя при \mathbf{f} масштабный множитель β :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V\beta^3} \int d\nu_k F(\mathbf{f}) e^{2\pi i \frac{(\mathbf{r}\mathbf{f})}{\beta}}, \quad \text{где} \quad F(\mathbf{f}) = \frac{1}{V\beta^3} \int d\nu \varphi(\mathbf{r}) e^{-2\pi i \frac{(\mathbf{r}\mathbf{f})}{\beta}}$$

и точно также для $\nu(\mathbf{r})$. Здесь часто выбирают, например, $\beta = 2\pi$. Важен следующий частный случай:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int d\nu_k e^{\pm 2\pi i (\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{f})} \quad (\text{см. стр. 36}).$$

с) Если функция $\varphi(\mathbf{r})$ обладает *сферической симметрией*, т. е. является функцией только от $r > 0$, то сферической симметрией будет обладать и функция $F(\mathbf{f})$, т. е. она будет функцией только от $k = |\mathbf{f}| \geq 0$. В этом случае имеем соотношения

$$\varphi(r) = \frac{2}{r} \int_0^\infty dk k F(k) \sin 2\pi kr \quad \text{и} \quad F(k) = \frac{2}{k} \int_0^\infty dr r \varphi(r) \sin 2\pi kr.$$

Это дает среди прочих, следующие частные случаи:

$\varphi(r)$	$F(k)$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{\pi k^2}$
$\frac{1}{r^2}$	$\frac{\pi}{k}$
$\delta(r - r_0)$	$\frac{2r_0}{k} \sin 2\pi k r_0$
$\frac{\sin 2\pi \alpha r}{r}$	$\frac{\delta(k - \alpha)}{2\alpha} = \frac{\delta(k - \alpha)}{k + \alpha} \quad (\alpha > 0)$
$\frac{\cos 2\pi \alpha r}{r}$	$\frac{1}{\pi(k^2 - \alpha^2)}$
$\frac{e^{-2\pi \alpha r}}{r}$	$\frac{1}{\pi(k^2 + \alpha^2)} \quad (\alpha \geq 0)$
$\frac{e^{2\pi i \alpha r}}{r}$	$\frac{1}{\pi(k + \alpha)} \left\{ \frac{1}{k - \alpha} + i\pi \delta(k - \alpha) \right\} = \frac{2i}{k + \alpha} \delta_-(k - \alpha) \quad (\alpha > 0)$
$\frac{e^{2\pi i \alpha r} e^{-\beta r}}{r}$	$\frac{1}{k} \left\{ \frac{2\pi(k - \alpha) + i\beta}{4\pi^2(k - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{2\pi(k + \alpha) - i\beta}{4\pi^2(k + \alpha)^2 + \beta^2} \right\} \quad (\beta > 0)$
$e^{-2\pi \alpha r}$	$\frac{\alpha}{\pi^2(k^2 + \alpha^2)^2} \quad (\alpha > 0)$
$e^{-\frac{r^2}{\alpha}}$	$\alpha^{3/2} \pi^{1/2} e^{-\pi^2 k^2 \alpha} \quad (\alpha > 0)$

(см. стр. 36)

а также аналогичные формулы, получающиеся при перестановке r и k . Так, например, из

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{2\pi i(r\mathbf{t})}}{k^2} d\mathbf{v}_k$$

следует:

$$\frac{1}{\pi k^2} = \int \frac{e^{-2\pi i(r\mathbf{t})}}{r} d\mathbf{v}.$$

Сюда относятся также следующие интегралы Фурье, используемые в релятивистской волновой теории:

$$U(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_k \frac{\cos ct k}{k^2} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{r})} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} & \text{при } r > c|t|, \\ 0 & \text{при } r < c|t|, \end{cases}$$

$$D(r, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_k \frac{\sin ct k}{ck} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{r})} = \frac{1}{2\pi c} \frac{t}{|t|} \delta(r^2 - c^2 t^2),$$

$$D^{(1)}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_k \frac{\cos ckt}{ck} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{r})} = \frac{1}{2\pi^2 c} \frac{1}{(r^2 - c^2 t^2)},$$

$$D_{\mu}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_k \frac{\sin ct \sqrt{k^2 + \mu^2}}{c \sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{r})} = \\ = \frac{1}{2\pi c} \frac{t}{|t|} \delta(r^2 - c^2 t^2) - \frac{\mu}{4\pi c} \frac{t}{|t|} \operatorname{Re} \left(\frac{H_1^{(1)}(\mu \sqrt{c^2 t^2 - r^2})}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right),$$

$$D_{\mu}^{(1)}(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v}_k \frac{\cos ct \sqrt{k^2 + \mu^2}}{c \sqrt{k^2 + \mu^2}} e^{i(\mathbf{t}\mathbf{r})} = \frac{\mu}{4\pi c} \operatorname{Im} \left(\frac{H_1^{(1)}(\mu \sqrt{c^2 t^2 - r^2})}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right)$$

($H_1^{(1)} = J_1 + iN_1$ — цилиндрическая функция).

д) Если периодическая функция $\varphi(\mathbf{r})$ с образующими решетку периодами определена равенством

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{g}}),$$

где сумма распространена на все точки решетки, а $\phi(\mathbf{r})$ — непериодическая функция, заданная равенством $\phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{v}_k F(\mathbf{k}) e^{2\pi i(\mathbf{k}\mathbf{r})}$, то $\varphi(\mathbf{r})$ допускает представление вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_{\mathbf{g}}} \sum_{\lambda} F(\mathbf{k}_{\lambda}) e^{2\pi i(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r})}$$

или

$$\sum_{\mathbf{g}} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{g}}) = \frac{1}{V_{\mathbf{g}}} \sum_{\lambda} e^{2\pi i(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r}_{\mathbf{g}})} \int \phi(\mathbf{r}') e^{-2\pi i(\mathbf{k}_{\lambda}\mathbf{r}')} d\mathbf{v}'.$$

1-й пример: $\psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$;

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \sum_g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) = \frac{1}{V_g} \sum_\lambda e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda)} \int \delta(\mathbf{r}') e^{-2\pi i(\mathbf{r}'\mathbf{r}_\lambda)} d\mathbf{v}' = \\ &= \frac{1}{V_g} \sum_\lambda e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda)}. \end{aligned}$$

2-й пример: $\psi(\mathbf{r}) = e^{-\frac{r^2}{\alpha}}$;

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \sum_g e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_g)^2}{\alpha}} = \frac{1}{V_g} \sum_\lambda e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda)} \int e^{-\frac{r'^2}{\alpha} - 2\pi i(\mathbf{r}'\mathbf{r}_\lambda)} d\mathbf{v}' = \\ &= \frac{\pi^{3/2} \alpha^{3/2}}{V_g} \sum_\lambda e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda) - \alpha\pi^2 k_\lambda^2} \end{aligned} \quad (6)$$

(так называемая *тройная формула тэта-преобразования Эвальда*).

3-й пример: $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$;

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_g \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|} = \frac{1}{\pi V_g} \sum_\lambda \frac{e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda)}}{k_\lambda^2} + \frac{1}{V_g} \int \frac{d\mathbf{v}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

\sum_g и $\int \frac{d\mathbf{v}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ расходятся как $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi R^2}{V_g} \right)$. Их разность $\frac{1}{\pi V_g} \sum_\lambda$ остается конечной ($\lambda \neq 0$).

Интегрируя (6) по α в промежутке от 0 до $1/\epsilon^2$, получают для функции

$$G(x) = 1 - \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad G(0) = 1; \quad G(\infty) = 0 \quad (\text{см. стр. 67})$$

соотношение

$$\sum_g \frac{G(\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|} = \frac{1}{\pi V_g} \sum_\lambda \frac{e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda)}}{k_\lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{\pi^2 k_\lambda^2}{\epsilon^2}} \right) + \frac{\pi}{\epsilon^2 V_g},$$

и отсюда:

$$\begin{aligned} \sum_g \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|} - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi R^2}{V_g} \right) &= \sum_g \frac{G(\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g|} - \frac{\pi}{\epsilon^2 V_g} + \\ &+ \frac{1}{\pi V_g} \sum_\lambda \frac{e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{r}_\lambda) - \frac{\pi^2 k_\lambda^2}{\epsilon^2}}}{k_\lambda^2}. \end{aligned}$$

Надлежащим выбором ϵ можно достичь того, что суммы \sum_k и \sum_l будут обе быстро сходиться. При $r \rightarrow \infty$ член, содержащий $r_g = 0$, становится равным $\frac{1}{r} - \frac{2\epsilon}{V\pi}$.

Эта формула служит для вычисления потенциала решеток по Эвальду.

е) Для упрощения часто полезно положить:

$$\alpha_\lambda(r) = \frac{1}{V V_g} e^{2\pi i (r \cdot \mathbf{f}_\lambda)}.$$

Эти α_λ образуют полную ортогональную нормированную систему:

$$\int dv \alpha_\lambda^* \alpha_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}; \quad \sum_\lambda \alpha_\lambda^*(r) \alpha_\lambda(r') = \delta(r - r').$$

Для этой системы имеем:

$$\text{grad } \alpha_\lambda = 2\pi i \mathbf{f}_\lambda \alpha_\lambda; \quad \Delta \alpha_\lambda = -4\pi^2 k_\lambda^2 \alpha_\lambda.$$

Положив, далее:

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{V V_g} F(\mathbf{f}_\lambda); \quad v_\lambda = \frac{1}{V V_g} \mathcal{F}(\mathbf{f}_\lambda),$$

получим:

$$\varphi(r) = \sum_\lambda \varphi_\lambda \alpha_\lambda(r), \quad \text{где} \quad \varphi_\lambda = \int dv \varphi(r) \alpha_\lambda^*(r),$$

$$v(r) = \sum_\lambda v_\lambda \alpha_\lambda(r), \quad \text{где} \quad v_\lambda = \int dv v(r) \alpha_\lambda^*(r).$$

Далее, можно v_λ представить в компонентах, из которых одна (v_λ) имеет направление \mathbf{f}_λ (продольная), а обе остальные перпендикулярны к этому направлению. Эти две последние (поперечные) компоненты удобнее обозначать через v_{τ_1} и v_{τ_2} . Объединяя α_λ с соответствующими векторами направлений в векторы $a_\lambda(r)$, $a_{\tau_1}(r)$ и $a_{\tau_2}(r)$, получаем представление

$$v(r) = \sum_\lambda v_\lambda a_\lambda(r) + \sum_{\tau_1} v_{\tau_1} a_{\tau_1}(r) + \sum_{\tau_2} v_{\tau_2} a_{\tau_2}(r).$$

Для этих $a(r)$ имеем:

$$\begin{aligned} (a_\lambda a_{\tau_i}) &= 0; & (\mathbf{f}_\lambda a_\lambda) &= k_\lambda a_\lambda; & (\mathbf{f}_\lambda a_{\tau_i}) &= 0 & (i=1, 2), \\ \text{div } a_\lambda &= 2\pi i k_\lambda a_\lambda; & \text{rot } a_\lambda &= 0, \\ \text{div } a_{\tau_i} &= 0; & \text{rot } a_{\tau_i} &= 2\pi i [\mathbf{f}_\lambda a_{\tau_i}], \\ \int dv (a_\lambda^* a_{\lambda'}) &= \delta_{\lambda\lambda'}; & \int dv (a_{\tau_i}^* a_{\tau_i'}) &= \delta_{\tau_i \tau_i'}. \end{aligned}$$

и

$$v_\lambda = \int dv (v(r) a_\lambda^*(r)); \quad v_{\tau_i} = \int dv (v(r) a_{\tau_i}^*(r)).$$

С этим представлением связано, таким образом, также разложение векторного поля на безвихревую (продольную) и свободную от источников (поперечную) составляющие. Это разложение удобно применять лишь в линейных задачах.

Имеем:

$$\Delta v(\mathbf{r}) = -4\pi^2 \left\{ \sum_{\lambda} k_{\lambda}^2 v_{\lambda} a_{\lambda}(\mathbf{r}) + \sum_{\tau_1} k_{\tau_1}^2 v_{\tau_1} a_{\tau_1}(\mathbf{r}) + \sum_{\tau_2} k_{\tau_2}^2 v_{\tau_2} a_{\tau_2}(\mathbf{r}) \right\}.$$

Вместо того чтобы разлагать по комплексным функциям $e^{2\pi i(\mathbf{r}\mathbf{f}_{\lambda})}$, можно воспользоваться для этой цели действительными функциями $\cos 2\pi(\mathbf{r}\mathbf{f}_{\lambda})$ и $\sin 2\pi(\mathbf{r}\mathbf{f}_{\lambda})$. Следует учитывать, что число слагаемых при этом остается неизменным, т. е. следует суммировать лишь по половине общего числа точек взаимной решетки, и каждая из них (кроме нулевой) дает два члена разложения.

Суммы \sum_{λ} и \sum_{τ_i} следует понимать именно в этом смысле. В качестве различных α_{λ} можно ввести величины $\sqrt{\frac{2}{V_g}} \cos 2\pi(\mathbf{r}\mathbf{f}_{\lambda})$ и $\sqrt{\frac{2}{V_g}} \sin 2\pi(\mathbf{r}\mathbf{f}_{\lambda})$, которые образуют пары, соответствующие парам \mathbf{f}_{λ} и $-\mathbf{f}_{\lambda} = \mathbf{f}_{-\lambda}$; в своей совокупности эти α_{λ} также образуют полную ортогональную нормированную систему. Формулы разложения при этом остаются в существенном теми же, однако некоторые выгоды комплексного представления, облегчающие, например, образование grad, div и rot, утрачиваются.

Можно также наряду с α_{λ} использовать α_{λ}^* в качестве независимых функций, входящих в систему, по которой берется разложение, и писать в случае действительных полей

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} \alpha_{\lambda} + \varphi_{\lambda}^* \alpha_{\lambda}^*$$

(и аналогично для $v(\mathbf{r})$), если снова ограничиться, как выше, *половиной* точек взаимной решетки, или же писать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} \alpha_{\lambda} + \varphi_{\lambda}^* \alpha_{\lambda}^*$$

с суммированием по *всем* точкам решетки.

f) Если поле, помимо зависимости от положения \mathbf{r} , зависит также от времени t , то F , \mathfrak{F} , соответственно φ_{λ} , v_{λ} , v_{τ_i} , также становятся функциями от t .

Такое поле можно разложить в ряд, соответственно в интеграл Фурье относительно t ; при этом получается, например, представление

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v}_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu F(\mathbf{f}, \nu) e^{2\pi i(\nu t + \mathbf{r}\mathbf{f})},$$

где

$$F(\mathbf{f}, \nu) = \int dv \int_{-\infty}^{+\infty} dt \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-2\pi i(\nu t + (\mathbf{r}\mathbf{f}))}.$$

Отсюда видно, что поле построено из плоских волн, которые при отрицательном ν движутся по направлению \mathbf{f} , при положительном же ν — в противоположном направлении. В соответствии с этим можно писать:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int dv_k \int_0^{\infty} dv \{F(\mathbf{f}, \nu) e^{2\pi i(\nu t + (\mathbf{r}\mathbf{f}))} - F(\mathbf{f}, -\nu) e^{-2\pi i(\nu t - (\mathbf{r}\mathbf{f}))}\}.$$

Здесь часто встречается случай, когда φ удовлетворяет дифференциальному уравнению, из которого следует, что $\nu = \pm \nu(\mathbf{f})$. Тогда получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int dv_k \int_0^{\infty} dv \delta(\nu - \nu(\mathbf{f})) \{F_1(\mathbf{f}) e^{2\pi i(\nu t + (\mathbf{r}\mathbf{f}))} - F_2(\mathbf{f}) e^{-2\pi i(\nu t - (\mathbf{r}\mathbf{f}))}\}.$$

14. Комплексные векторы

Понятие комплексного вектора вводится при помощи формальных сумм $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\alpha^* = \alpha' - i\alpha''$, в которых α' и α'' означают действительные векторы. Комплексной длиной вектора α мы называем число $a = \sqrt{(\alpha\alpha)} = \sqrt{a'^2 - a''^2 + 2i(\alpha'\alpha'')}$; «нормой» называется действительное число:

$$(\alpha\alpha^*) = a'^2 + a''^2 \quad (\neq \alpha\alpha^* = |a|^2!).$$

Произведение $\alpha\alpha = \mathbf{b}$ с комплексным числовым множителем $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ определяется как

$$\alpha\alpha = (\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'') + i(\alpha''\alpha' + \alpha'\alpha'') = \mathbf{b}' + i\mathbf{b}'' = \mathbf{b}.$$

Как \mathbf{b}' , так и \mathbf{b}'' представляют всевозможные линейные комбинации векторов α' и α'' , являющиеся функциями от α . При отображении $\alpha \rightarrow \alpha\alpha$ здесь остается инвариантным не направление, а некоторая плоскость вместе с направлением нормали к ней.

При $\alpha = e^{i\varphi}$ векторы \mathbf{b}' и \mathbf{b}'' , рассматриваемые как радиусы-векторы, описывают эллипс с φ в качестве параметра кривой. Этот эллипс может служить для геометрического представления вектора α ; α' и α'' являются сопряженными радиусами-векторами эллипса. Площадь эллипса $I = \pi |[\alpha'\alpha'']|$.

Отображение $\alpha \rightarrow \alpha e^{i\varphi}$ оставляет этот эллипс инвариантным так же, как и величины $\alpha\alpha^*$, $(\alpha\alpha^*)$ и $[\alpha\alpha^*] = -2i[\alpha'\alpha'']$.

Для $\alpha = e^{i\varphi} = \pm \sqrt{\pm \frac{\alpha^*}{a}}$ имеем:

$$\alpha \sqrt{\frac{\alpha^*}{a}} = \mathbf{b}' + i\mathbf{b}'',$$

где $(b'b'')=0$ (преобразование к главным осям);

$$b' = \frac{1}{\sqrt{aa^*}} \left(\frac{aa^* + a^*a}{2} \right); \quad b'' = \frac{1}{\sqrt{aa^*}} \left(\frac{aa^* - a^*a}{2i} \right).$$

Важным частным случаем комплексного вектора служит вектор с комплексной длиной, равной нулю, *нуль-вектор*, с $a = a^* = 0$ и, следовательно, $a' = a''$, $(a'a'') = 0$.

Мы нормируем его условием $(aa^*) = 1$, т. е. $a' = a'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Представляющий его эллипс является кругом радиуса 1.

Перпендикулярным к нему действительным единичным вектором служит $a_1 = 2[a'a'']$. Мы имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} a_1 &= i[a^*a], & a_1 &= 1, & (aa^*) &= 1, \\ a &= -i[a_1a], & a &= 0, & (a_1a) &= 0, \\ a^* &= +i[a_1a^*], & a^* &= 0, & (a_1a^*) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для любого, действительного или комплексного, вектора b возможно следующее представление:

$$b = c_1 a_1 + c_2 a + c_3 a^*,$$

где

$$c_1 = (a_1 b); \quad c_2 = (a^* b); \quad c_3 = (a b).$$

Применение. Эти комплексные векторы можно применить, в особенности в виде $a e^{i\omega t}$, к представлению пространственных колебаний, прецессионных движений, вращений и векторных волн.

Решением дифференциального векторного уравнения

$$\frac{da}{dt} = [u a] \quad (u \text{ — постоянный вектор})$$

служит комплексный вектор

$$a = \alpha u + a_0 e^{i\omega t}, \quad \omega = |u|, \quad a_0^2 = 0,$$

где α — произвольная постоянная, a_0 — нуль-вектор, причем $a_0 \perp u$. Вектор a «прецессирует» вокруг u с угловой скоростью, равной ω .

Как действительная, так и мнимая часть любого решения этого дифференциального уравнения служат его решениями, равно как и любая их линейная комбинация.

15. Кватернионы в векторной символике

Кватернион A (см. стр. 27) можно рассматривать как объединение вектора a и скаляра α в *одну* величину, в записи: $A = (a, \alpha)$ или также $= (a + \alpha)$. Вычисления с такими величинами подчинены следующим правилам:

- 1) сложение: $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$,
- 2) умножение: $(a, \alpha) \times (b, \beta) = (c, \gamma) = ([a, b] + \alpha b + \beta a, \alpha\beta - (ab))$.

При этом получаем:

$$c^2 + \gamma^2 = (a^2 + \alpha^2)(b^2 + \beta^2);$$

$$(\alpha, \alpha) \times (-\alpha, \alpha) = (0, a^2 + \alpha^2) = (a^2 + \alpha^2)(0, 1);$$

$(0, 1)$ есть единица, равная единичному кватерниону E .

$\frac{(-\alpha, \alpha)}{a^2 + \alpha^2}$ представляет собой кватернион A^{-1} , обратный кватерниону (α, α) .

Если рассматривать кватернион $R = (\tau, \rho)$ как вектор четырехмерного пространства, считая, что скаляр ρ представляет собой четвертую компоненту, «перпендикулярную» к τ , то умножение на другой кватернион будет тензорным оператором

$$(\tau', \rho') = (\alpha, \alpha) \times (\tau, \rho); \quad R' = A \times R.$$

При $a^2 + \alpha^2 = 1$ это есть специальное ортогональное преобразование в четырехмерном пространстве: $\tau'^2 + \rho'^2 = \tau^2 + \rho^2$. Общее ортогональное преобразование имеет вид

$$(\tau', \rho') = (\alpha, \alpha)(\tau, \rho)(\beta, \beta); \quad R' = A \times R \times B,$$

где $(a^2 + \alpha^2)(b^2 + \beta^2) = 1$.

Если здесь $\alpha = \beta$, $\alpha = \beta$ ($A = B$), то данное преобразование принадлежит к классу *преобразований Лоренца* (см. стр. 477); если $\alpha = -\beta$, $\alpha = \beta$, ($B = A^{-1}$), то имеем $\rho' = \rho$, и остается лишь вращение в трехмерном пространстве с $|\tau'| = |\tau|$ (см. стр. 189).

16. Гиперкомплексные векторы

Из пентады, состоящей из пяти гиперкомплексных чисел (см. стр. 27), удовлетворяющих условию $\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik}$, можно выбрать три и объединить их в один вектор \mathfrak{h} , положив, например, $h_x = \gamma_1$, $h_y = \gamma_2$, $h_z = \gamma_3$. Тогда получим:

$$(\mathfrak{h}\mathfrak{h}) = 3.$$

Произведение $[\mathfrak{h}\mathfrak{h}]$ здесь не равно нулю и определяет вектор

$$[\mathfrak{h}\mathfrak{h}] = 2i\mathfrak{s},$$

для которого $is_x = \gamma_2 \gamma_3$, $is_y = \gamma_3 \gamma_1$, $is_z = \gamma_1 \gamma_2$.

При этом имеем:

$$(\mathfrak{s}\mathfrak{s}) = 3, \quad [\mathfrak{s}\mathfrak{s}] = 2i\mathfrak{h},$$

$$[\mathfrak{s}\mathfrak{h}] = [\mathfrak{h}\mathfrak{s}] = -2i\mathfrak{h},$$

$(\mathfrak{h}\mathfrak{s}) = (\mathfrak{s}\mathfrak{h}) = -3i\tau$ определяет скаляр $\tau = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$,

$$\tau^2 = -1,$$

$$\mathfrak{h}\tau = \tau\mathfrak{h} = i\mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s}\tau = \tau\mathfrak{s} = i\mathfrak{h}.$$

Если a, b, \dots — обыкновенные векторы, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(a\mathfrak{h}) + (a\mathfrak{h})\mathfrak{h} &= 2a; \\ \mathfrak{h}(a\mathfrak{h}) - (a\mathfrak{h})\mathfrak{h} &= 2i[a\mathfrak{s}]; \\ (a\mathfrak{h})(b\mathfrak{h}) + (b\mathfrak{h})(a\mathfrak{h}) &= 2(ab), \quad (a\mathfrak{h})^2 = a^2; \\ (a\mathfrak{h})(b\mathfrak{h}) - (b\mathfrak{h})(a\mathfrak{h}) &= 2i(\mathfrak{s}[ab]); \\ (\mathfrak{h}[a\mathfrak{h}]) &= -(a[\mathfrak{h}\mathfrak{h}]) = -([\mathfrak{a}\mathfrak{h}]\mathfrak{h}) = -2i(a\mathfrak{s}); \\ [\mathfrak{h}[a\mathfrak{h}]] &= 3a - (a\mathfrak{h})\mathfrak{h} = 2a + i[a\mathfrak{s}]; \\ ([\mathfrak{a}\mathfrak{h}][b\mathfrak{h}]) &= ([b\mathfrak{h}][a\mathfrak{h}]) = 4(ab), \quad ([a\mathfrak{h}])^2 = 2a^2; \\ ([\mathfrak{a}\mathfrak{h}][b\mathfrak{h}]) - ([b\mathfrak{h}][a\mathfrak{h}]) &= 2i(\mathfrak{s}[ab]). \end{aligned}$$

Умножая на $-i\tau$, соответственно на $-\tau^2$, получим также:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(a\mathfrak{h}) &= \mathfrak{h}(a\mathfrak{s}); \quad \mathfrak{s}(a\mathfrak{s}) = \mathfrak{h}(a\mathfrak{h}); \quad (a\mathfrak{h})\mathfrak{s} = (a\mathfrak{s})\mathfrak{h}; \\ (a\mathfrak{s})\mathfrak{s} &= (a\mathfrak{h})\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{s}(a\mathfrak{h}) + (a\mathfrak{h})\mathfrak{s} = -2i\tau a \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

При умножении на четвертое число γ_4 пентады будем иметь:

$$\gamma_4\mathfrak{h} = -\mathfrak{h}\gamma_4; \quad \gamma_4\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\gamma_4; \quad \gamma_4\tau = -\tau\gamma_4.$$

Эти величины можно также комбинировать с дифференциальными операторами, такими, как grad и $[\tau \text{ grad}]$, которые можно рассматривать как векторы, не подчиняющиеся, вообще говоря, коммутативному закону (см. стр. 208). При этом получаем, в числе прочих, следующие операторные уравнения:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h} \text{ grad})[\tau \text{ grad}] - [\tau \text{ grad}](\mathfrak{h} \text{ grad}) &= [\mathfrak{h} \text{ grad}], \\ (\mathfrak{h} \text{ grad})\mathfrak{s} - \mathfrak{s}(\mathfrak{h} \text{ grad}) &= 2i[\mathfrak{h} \text{ grad}], \\ (\mathfrak{h} \text{ grad})(\mathfrak{s}[\tau \text{ grad}]) + (\mathfrak{s}[\tau \text{ grad}])(\mathfrak{h} \text{ grad}) &= -2i(\mathfrak{h} \text{ grad}), \\ (\mathfrak{h} \text{ grad})\gamma_4 - \gamma_4(\mathfrak{h} \text{ grad}) &= 2(\mathfrak{h} \text{ grad})\gamma_4. \end{aligned}$$

Поэтому

$$[\tau \text{ grad}] + i \frac{\mathfrak{s}}{2} \quad \text{и} \quad \{(\mathfrak{s}[\tau \text{ grad}]) + i\} \gamma_4$$

представляют собой операторы, перестановочные с $(\mathfrak{h} \text{ grad})$.

17. Дуальные векторы

Под дуальным числом понимают (по аналогии с комплексными числами) объединение двух чисел a_1 и a_2 в одну величину A . Если писать $A = a_1 + \varepsilon a_2$, то при вычислениях с такими числами следует принимать во внимание правило $\varepsilon^2 = 0$, так что, например, $AB = BA = a_1 b_1 + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

$$A^n = a_1^n \left(1 + \varepsilon n \frac{a_2}{a_1} \right); \quad A^{-1} = \frac{1}{a_1} \left(1 - \varepsilon \frac{a_2}{a_1} \right) \text{ и т. д.}$$

Дуальные векторы мы образуем аналогично: $\mathfrak{A} = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2$.

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\alpha_1, \beta_1) + \varepsilon \{(\alpha_1, \beta_2) + (\alpha_2, \beta_1)\}; \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\alpha_1 \beta_1] + \varepsilon \{[\alpha_1 \beta_2] + [\alpha_2 \beta_1]\},$$

$$\mathfrak{A}^2 = \alpha_1^2 + \varepsilon \cdot 2(\alpha_1 \alpha_2); \quad \sqrt{\mathfrak{A}^2} = \alpha_1 + \varepsilon \frac{(\alpha_1 \alpha_2)}{\alpha_1} \text{ и т. д.}$$

Они являются единичными векторами ($\mathfrak{A}^2 = 1$) при $\alpha_1^2 = 1$, $(\alpha_1 \alpha_2) = 0$.

Их нормируют следующим образом: $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1} - \varepsilon \frac{[\alpha_1, [\alpha_1 \alpha_2]]}{\alpha_1^3}$.

Применение. Положение прямой \mathfrak{A} в пространстве может быть описано при помощи единичного вектора \underline{a} ($a^2 = 1$), направленного по прямой, и вектора \underline{a} , направление и длина которого совпадают с направлением и длиной перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат: $(\underline{a}\underline{a}) = 0$.

Уравнение прямой при этом принимает вид $\underline{r} = \underline{a} + \alpha \underline{a}$ (α — параметр линии) или $[\underline{r}\underline{a}] = \bar{a}$, где $\bar{a} = [\underline{a}\underline{a}]$ (момент относительно начала координат).

Имеем: $\underline{a} = [\underline{a}\bar{a}]$ и $(\underline{a}\bar{a}) = 0$.

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми \mathfrak{A} и \mathfrak{B} дается формулой

$$d = \frac{((\underline{b} - \underline{a})[\underline{a}\underline{b}])}{|[\underline{a}\underline{b}]|} = - \frac{(\underline{b}\bar{a}) + (\underline{a}\bar{b})}{|[\underline{a}\underline{b}]|} \left(= \sqrt{\frac{(\bar{a}\bar{b})}{(\underline{a}\underline{b})}} \right).$$

Если ввести нормированный дуальный вектор $\mathfrak{A} = \underline{a} + \varepsilon \bar{a}$, то им тоже полностью описывается некоторая прямая. Для двух прямых имеем:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\underline{a}\underline{b}) + \varepsilon \{(\underline{a}\bar{b}) + (\underline{b}\bar{a})\} = \cos \varphi - \varepsilon d \sin \varphi,$$

где φ — угол между \underline{a} и \underline{b} .

Положив $\Phi = \varphi + \varepsilon d$, будем иметь:

$$\cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon d \sin \varphi = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Таким образом, дуальное произведение $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ или дуальный угол Φ характеризует относительное положение двух прямых. Эти прямые пересекаются, если $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ «действительно»; точкой пересечения служит

$$\underline{r}_{ab} = \frac{[\underline{b}\bar{a}]}{(\underline{a}\underline{b})} = \frac{[\bar{a}\bar{b}]}{(\underline{b}\underline{a})} = \underline{a} + \underline{a} \frac{(\underline{a}\bar{b})}{(\underline{a}\underline{b})} = \underline{b} + \underline{b} \frac{(\underline{a}\bar{b})}{(\underline{a}\underline{b})}.$$

Если $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$, то прямые пересекаются под прямым углом. Прямая

$\mathfrak{C} = \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{\sqrt{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]^2}} = \underline{c} + \varepsilon \bar{c}$ ($\mathfrak{C}^2 = 1$) пересекает обе прямые \mathfrak{A} и \mathfrak{B} под

прямым углом. Для нее имеем:

$$\underline{c} = \frac{[\underline{a}\underline{b}]}{|[\underline{a}\underline{b}]|}, \quad \underline{c} = \frac{[\underline{c}, [\underline{a}\bar{b}] + [\bar{a}\underline{b}]]}{|[\underline{a}\underline{b}]|} = \frac{\underline{a}(\underline{a}\underline{b}) + \underline{b}(\underline{b}\underline{a})}{|[\underline{a}\underline{b}]|^2},$$

$$\bar{c} = -[\underline{c}\underline{c}] = \frac{[\bar{a}\bar{b}] + [\bar{a}\bar{b}]}{|[\underline{a}\underline{b}]|} + cd \operatorname{ctg} \varphi.$$

Точки пересечения \mathcal{C} с \mathcal{A} и \mathcal{B} :

$$\mathbf{r}_{ac} = \underline{c} + \frac{[\underline{a}\underline{b}](\bar{a}\underline{b})}{[\underline{a}\underline{b}]^2}; \quad \mathbf{r}_{bc} = \underline{c} - \frac{[\underline{a}\underline{b}](\underline{a}\bar{b})}{[\underline{a}\underline{b}]^2}.$$

Если прямые \mathcal{A} и \mathcal{B} находятся на бесконечно малом расстоянии друг от друга, т. е. если мы положим $\underline{b} = \underline{a} + \underline{u}$, $\underline{b} = \underline{a} + \underline{v}$ и перейдем к пределу при $\underline{u} \rightarrow 0$, $\underline{v} \rightarrow 0$, то будем иметь:

$$d = \frac{(\underline{a}[\underline{u}\underline{v}])}{u} \rightarrow 0; \quad (\underline{a}\underline{u}) = -\frac{u^2}{2} \rightarrow 0 \text{ (бесконечно малые второго порядка);}$$

$$(\underline{a}\underline{v}) + (\underline{a}\underline{u}) = -(\underline{u}\underline{v}) \rightarrow 0;$$

$$\underline{c} = \frac{[\underline{a}\underline{u}]}{u}; \quad \underline{c} = \frac{-\underline{a}(\underline{u}\underline{v}) - \underline{u}(\underline{a}\underline{v})}{u^2}; \quad \underline{c} = \frac{\underline{u}(\underline{u}\underline{v})}{u^2} - \frac{\underline{a}(\underline{a}\underline{v})}{u}$$

и кратчайшее расстояние d между ними получается при

$$\underline{r} = \underline{a} - \frac{\underline{a}(\underline{u}\underline{v})}{u^2}.$$

18. Преобразование к движущейся системе координат

Если скалярные или векторные поля заданы как функции радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, который зависит от одного параметра, например от времени t , то это означает, что поля заданы в некоторой «движущейся» системе координат. Если скорость ее движения равна $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underline{v}$, то изменение скаляра φ , который сам по себе от времени не зависит, вычисленное для фиксированной точки движущейся системы, дается формулой

$$\delta\varphi = (\underline{v} \text{ grad } \varphi) \delta t$$

и аналогично для вектора — формулой

$$\delta\mathbf{a} = \{(\underline{v} \text{ grad } \mathbf{a} - (\underline{a} \text{ grad } \underline{v})\} \delta t.$$

$\underline{v} = \text{const}$ означает, что система движется поступательно; $\underline{v} = [\underline{u}\underline{t}]$, где $\underline{u} = \text{const}$, означает, что система вращается как твердое тело вокруг неподвижной оси. В последнем случае имеем:

$$\delta\mathbf{a} = \{([\underline{u}\underline{t}] \text{ grad } \mathbf{a} - [\underline{u}\underline{a}])\} \delta t.$$

Поле $\mathbf{a} = \mathbf{r}f(r)$ остается при этом неизменным.

В случае, если имеется явная зависимость от времени, то она с указанными неявными зависимостями комбинируется аддитивно.

19. Область интегрирования, зависящая от времени

Для линейного интеграла $\int_1^2 (\mathbf{a} d\mathbf{s})$, который берется по некоторой кривой, движущейся со скоростью \mathbf{v} , имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_1^2 ds a_s = \int_1^2 ds \left(\frac{\partial a_s}{\partial t} + \text{grad} (va) - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{a}] \right)_s;$$

для поверхностного интеграла $\int df a_n$:

$$\frac{d}{dt} \int df a_n = \int df \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{a}\mathbf{v}] + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{a} \right)_n;$$

для объемного интеграла $\int dv \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dv \varphi &= \int dv \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \text{ div } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{ grad } \varphi) \right\} = \\ &= \int dv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int df \varphi (\text{vnl}). \end{aligned}$$

В. ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Линейные функции поля

Если при движении в векторном поле \mathbf{a} по произвольной прямой оказывается, что вектор \mathbf{a} является линейной функцией длины, измеряемой по этой прямой, и, следовательно, представим в форме $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = b d$, где b — постоянный вектор, зависящий только от направления прямой, а d — расстояние между точками, в которых взяты векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , то векторное поле \mathbf{a} называется *линейной вектор-функцией точки*.

Такая функция может быть построена из нескольких величин вида

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + kx + \sum_n ([\mathbf{u}_n x] + \mathbf{p}_n (q_n x) + [\mathbf{d}_n [\mathbf{e}_n x]] + \dots),$$

т. е. она выражается как сумма *векторов*, линейно зависящих от x . Через \mathbf{a}_0 , k , \mathbf{u}_n , \mathbf{p}_n , q_n , \mathbf{d}_n , \mathbf{e}_n здесь обозначены константы и векторы, не зависящие от положения.

Это выражение можно, однако, без ограничения его общности, записать и в более простой форме:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \sum_n \mathbf{p}_n (q_n x) \quad (n = 1, 2, 3),$$

где \mathbf{p}_n и q_n — свободные векторы.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \alpha &= \sum_n (p_n q_n), \\ \operatorname{rot} \alpha &= \sum_n [p_n q_n].\end{aligned}$$

Если разложить $\alpha - \alpha_0$ на два поля α' и α'' так, чтобы было: $\operatorname{div} \alpha' = 0$, $\operatorname{rot} \alpha'' = 0$ (см. стр. 218), т. е. на свободную от источников и безвихревую составляющие, то получим:

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= \alpha' + \alpha'', \\ \alpha' &= [\operatorname{ur}], \quad \operatorname{rot} \alpha' = 2u, \quad u = \frac{1}{2} \sum [p_n q_n]; \\ \alpha'' &= \frac{1}{2} \sum (p_n (q_n r) + q_n (p_n r)), \quad \operatorname{div} \alpha'' = \sum (p_n q_n).\end{aligned}$$

2. Понятие тензора

Линейную зависимость предыдущего пункта, при которой каждому вектору r ставится в соответствие некоторый вектор a , мы будем символически записывать в виде

$$a - \alpha_0 = \mathfrak{T}r,$$

равно как и вообще линейную зависимость двух векторов a и b :

$$a = \mathfrak{T}b = \sum_{n=1}^3 p_n (q_n b).$$

Оператор \mathfrak{T} называется *тензором*¹⁾.

Требование линейности означает, что должно быть

$$ka = k\mathfrak{T}b = \mathfrak{T}kb,$$

а также, что при $a' = \mathfrak{T}b'$

$$a + a' = \mathfrak{T}b + \mathfrak{T}b' = \mathfrak{T}(b + b').$$

Если определить, далее, сумму двух тензоров \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 условием

$$(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2)b = \mathfrak{T}_1 b + \mathfrak{T}_2 b,$$

то ясно, что оператор \mathfrak{T} можно рассматривать как алгебраическую величину, аддитивную в смысле приведенных выше формул.

Тензор называется *симметрическим*, если для *произвольных* векторов a и b

$$(a\mathfrak{T}b) = (b\mathfrak{T}a),$$

¹⁾ Более точно — тензором второго ранга. По причинам, которые станут ясны впоследствии (см. стр. 251), можно скаляр называть тензором нулевого ранга, вектор — тензором первого ранга.

антисимметрическим (или кососимметрическим), если

$$(a\mathfrak{I}b) = -(b\mathfrak{I}a).$$

Любой тензор \mathfrak{I} может быть однозначно представлен в виде суммы симметрического тензора \mathfrak{I}_1 и антисимметрического тензора \mathfrak{I}_2 :

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2.$$

Тензор $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2$ называется тензором, *сопряженным*, или *транспонированным*, по отношению к \mathfrak{I} . Симметрический тензор является, таким образом, сопряженным по отношению к самому себе. Всегда справедливо соотношение $(a\mathfrak{I}b) = (b\mathfrak{I}a)$.

Ввиду того, что векторы a и b связаны линейным соотношением, можно, вообще говоря, получить вектор b из вектора a при помощи некоторого нового тензора. Этот тензор называется *обратным* тензором по отношению к тензору \mathfrak{I} и обозначается через \mathfrak{I}^{-1} :

$$b = \mathfrak{I}^{-1}a.$$

Если существует вектор $e \neq 0$ такой, что $\mathfrak{I}e = 0$, то тензор \mathfrak{I} называется *сингулярным*. В этом случае $\mathfrak{I}^{-1}a$ определено лишь с точностью до произвольного слагаемого, кратного e^1 .

Если, кроме зависимости

$$a = \mathfrak{I}b,$$

имеем также:

$$b = \mathfrak{C}c$$

и, следовательно,

$$a = \mathfrak{I}\mathfrak{C}c,$$

то эта формула также определяет линейную зависимость между a и c . Это означает, что $\mathfrak{I}\mathfrak{C}$ представляет собой некоторый новый тензор, называемый *операторным произведением* тензоров \mathfrak{I} и \mathfrak{C} . Вообще говоря,

$$\mathfrak{I}\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}\mathfrak{I}.$$

Операторное произведение тензора на самого себя $\mathfrak{I}\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^2$ называется *итерацией* тензора. Этот процесс может быть повторен любое число раз:

$$\mathfrak{I}\mathfrak{I}\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^3, \dots$$

Следует обратить внимание на соотношение $\mathfrak{I}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{I}$, из которого следует, что $(a\mathfrak{I}\mathfrak{C}b) = (b\mathfrak{C}\mathfrak{I}a)$.

¹ Здесь имеется в виду случай «однократного» вырождения тензора \mathfrak{I} . (Прим. ред.)

3. Специальные тензоры

Единичным тензором \mathfrak{E} мы называем тензор, который произвольному вектору \mathfrak{a} ставит в соответствие этот же вектор:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Для всякого тензора имеем: $\mathfrak{E}\mathfrak{E}^{-1} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{-1} = \mathfrak{E}$.

Ортогональным тензором \mathfrak{D} мы называем тензор, для которого имеет место равенство

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{-1}.$$

Отсюда для произвольных векторов \mathfrak{a} и \mathfrak{b} следует:

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{D}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Соответствие, устанавливаемое тензором такого рода, может быть для произвольной системы векторов описано как чистое вращение, зависящее только от самого тензора, т. е. при этом соответствии сохраняются как длины всех векторов, $(\mathfrak{D}\mathfrak{a})^2 = \mathfrak{a}^2$, так и углы между ними.

4. Скаляры, связанные с тензорами

Рассматривая выражение

$$\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])}{(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])} = |T|,$$

образованное для трех произвольных некопланарных векторов \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , легко убедиться, что оно не зависит от векторов \mathfrak{a} , \mathfrak{b} и \mathfrak{c} . Тем самым оно представляет собой скаляр, зависящий только от \mathfrak{A} . Он называется *определителем* тензора \mathfrak{A} (см. также стр. 173). Для сингулярного тензора имеем: $|T| = 0$. Обратно, при $|T| = 0$ существует вектор $\mathfrak{e} \neq 0$ такой, что $\mathfrak{A}\mathfrak{e} = 0$ и, значит, \mathfrak{A} является сингулярным тензором.

Если образовать определитель тензора

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{E}$$

и разложить его по степеням λ , то получим выражение вида

$$|S| = -\lambda^3 + \lambda^2 T_{(1)} - \lambda T_{(2)} + |T| = -\varphi(\lambda).$$

$\varphi(\lambda)$ называется *характеристическим полиномом* тензора \mathfrak{A} .

Фигурирующие здесь величины $T_{(1)}$ и $T_{(2)}$ представляют собой два новых скаляра, получаемых из тензора \mathfrak{A} . В дальнейшем мы будем вместо $T_{(1)}$ писать $|\mathfrak{A}|$; эта величина называется *следом* тензора. Далее, имеем:

$$T_{(2)} = |T||\mathfrak{A}^{-1}|.$$

Скалярным произведением тензоров \mathfrak{I} и \mathfrak{E} называется след операторного произведения $\mathfrak{I}\mathfrak{E}$:

$$(\mathfrak{I}\mathfrak{E}) = |\mathfrak{I}\mathfrak{E}|.$$

Имеем:

$$(\mathfrak{I}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}\mathfrak{I}).$$

Составленное таким же образом произведение тензора с самим собой приводит к новому скаляру $(\mathfrak{I}^2) = (\mathfrak{I}\mathfrak{I}) = |\mathfrak{I}\mathfrak{I}| = T_{(1)}^2 - 2T_{(2)}$, который можно назвать *скалярным квадратом* тензора.

5. Собственные значения и собственные векторы

Если определитель $|S| = \varphi(\lambda)$ тензора $\mathfrak{S} = \mathfrak{I} - \lambda\mathfrak{E}$ равен нулю, т. е. $\varphi(\lambda) = 0$, то существует вектор $e \neq 0$ такой, что $\mathfrak{S}e = 0$. Три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ называются *собственными значениями* тензора \mathfrak{I} ; соответствующие векторы e_1, e_2, e_3 , нормированные условием $|e_n| = 1$, называются его *собственными векторами*¹⁾. Для них имеем: $\mathfrak{S}_n e_n = 0$, где $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{I} - \lambda_n \mathfrak{E}$, т. е.

$$\mathfrak{I}e_n = \lambda_n e_n.$$

Очевидно, что $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 e_n = 0$ для каждого из векторов e_n и, тем самым, для произвольных векторов. Вследствие того, что $\varphi(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$, можем написать:

$$\varphi(\mathfrak{I}) = -(\mathfrak{I} - \lambda_1 \mathfrak{E})(\mathfrak{I} - \lambda_2 \mathfrak{E})(\mathfrak{I} - \lambda_3 \mathfrak{E}) = -\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \equiv 0,$$

т. е.

$\mathfrak{I}^3 - T_{(1)}\mathfrak{I}^2 + T_{(2)}\mathfrak{I} - |T|\mathfrak{E} \equiv 0$ (уравнение Гамильтона — Кэли), или, в более общем виде:

$$\mathfrak{I}^m - T_{(1)}\mathfrak{I}^{m-1} + T_{(2)}\mathfrak{I}^{m-2} - |T|\mathfrak{I}^{m-3} \equiv 0.$$

Это дает линейное соотношение между четырьмя последовательными итерациями тензора.

Инварианты могут быть выражены через собственные значения:

$$T_{(1)} = |\mathfrak{I}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad T_{(2)} = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2, \quad |T| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Итерации \mathfrak{I}^m тензора \mathfrak{I} имеют те же собственные векторы, что и \mathfrak{I} ; соответствующие собственные значения равны λ_n^m . Это верно также при $m < 0$.

Если тензор сингулярен, то по крайней мере одно собственное значение его равно нулю. В этом случае обратного тензора \mathfrak{I}^{-1} не существует.

¹⁾ Собственные значения и собственные векторы могут быть и комплексными. (Прим. ред.)

6. Геометрическая интерпретация тензора

Уравнением

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{r}) = C$$

определяется некоторая поверхность второго порядка. Она может служить для наглядной интерпретации симметрической части \mathfrak{T}_1 тензора \mathfrak{T} , в то время как для антисимметрической части выражение $(\mathfrak{T}_2\mathfrak{r})$ равно нулю.

Варьируя \mathfrak{r} , получим: $\delta(\mathfrak{T}\mathfrak{r}) = 2(\delta\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}) = 0$. Вариация $\delta\mathfrak{r}$ лежит в плоскости, касающейся поверхности в точке \mathfrak{r} ; следовательно, вектор $\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}$ направлен по перпендикуляру к этой плоскости. Зная ее расстояние h от начала координат, можно из равенства $|\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}| = \frac{C}{h}$ опреде-

лить длину вектора $\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}$, так что рассмотренное построение позволяет установить связь между $\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}$ и \mathfrak{r} . $|\mathfrak{r}|$ имеет стационарное значение в точках, где $\delta(r^2) = 2(\mathfrak{r}\delta\mathfrak{r}) = 0$. Следовательно, только здесь, в вершинах (Scheitelpunkte) поверхности, \mathfrak{r} параллелен $\mathfrak{T}_1\mathfrak{r}$. Таким образом, в этих точках имеем $\mathfrak{T}_1\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}$, где $\lambda = \frac{C}{r^2}$. Единичные векторы $e = \frac{\mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}|}$

соответствующих направлений, являющихся направлениями главных осей поверхности, служат *собственными векторами* тензора \mathfrak{T}_1 . Для них имеем поэтому $\mathfrak{T}_1 e_n = \lambda_n e_n$ ($n = 1, 2, 3$). Числа λ_n являются *собственными значениями*. Векторы e_n попарно перпендикулярны, как это следует из $(e_n \mathfrak{T}_1 e_{n'}) = \lambda_n (e_n e_{n'}) = \lambda_{n'} (e_n e_{n'})$, если только $\lambda_n \neq \lambda_{n'}$. Последнее условие исключает вращательную симметрию, которая делает направления осей неопределенными.

Во многих случаях, имеющих практическую важность, выражение $(\mathfrak{T}\mathfrak{r})$ является положительным для всех \mathfrak{r} . Тогда полагают $C = 1$. Поверхность в этом случае представляет собой эллипсоид — так называемый *тензорный эллипсоид*. Поверхность $(\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{r}) = 1$ иногда называют *вторым* тензорным эллипсоидом.

Антисимметрическая часть \mathfrak{T}_2 , рассматриваемая как оператор, эквивалентна векторному умножению на некоторый вектор \mathfrak{u} : $\mathfrak{T}_2\mathfrak{r} = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ и, следовательно, может быть интерпретирована с помощью этого вектора или, лучше, с помощью плоскости $(\mathfrak{u}\mathfrak{T}_2\mathfrak{r}) = 0$, образованной всеми векторами $\mathfrak{T}_2\mathfrak{r}$.

7. Представление тензоров с помощью векторов

Общее представление тензора (см. стр. 242) $\mathfrak{A} = \sum_n \mathfrak{p}_n (q_n a)$, содержащее шесть векторов \mathfrak{p}_n, q_n , в случае *симметрического* тензора может быть приведено к более простой форме:

$$\mathfrak{A} = \sum_n \alpha_n \mathfrak{p}_n (p_n a); \quad |\mathfrak{p}_n| = 1$$

с тремя единичными векторами и тремя числами; далее, используя собственные векторы и собственные значения, получим:

$$\mathfrak{A}a = \sum_n \lambda_n e_n (e_n a).$$

Иногда может оказаться более удобным представление

$$\mathfrak{A}a = \alpha a + p(qa) + q(pa); \quad |p| = |q|,$$

содержащее два вектора одинаковой длины и одно число. Главные оси здесь идут по направлениям $p + q$, $p - q$ и $[pq]$. Соответствующие собственные значения: $\alpha + (pq) + |p||q|$, $\alpha + (pq) - |p||q|$ и α .

Эти векторы p и q соответствуют *оптическим осям* в кристаллооптике. Если две оси совпадают, то оказывается возможным еще более простое представление:

$$\mathfrak{A}a = \alpha a + \beta p(ap); \quad |p| = 1,$$

содержащее один единичный вектор и два числа.

Вектор p является собственным; остальные две оси перпендикулярны к нему, в остальном же их положение произвольно. Собственные значения равны $\alpha + \beta$, α , α .

Для *антисимметрического* тензора имеем представление

$$\mathfrak{A}a = [ua].$$

Этот тензор имеет собственные значения 0 и $\pm i|u|$; собственными векторами его служат

$$\frac{u}{|u|} \text{ и } b' \pm ib'',$$

где $(b'u) = (b''u) = (b'b'') = 0$, $|b'| = |b''| = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ортогональный тензор \mathfrak{D} может быть представлен в форме

$$\mathfrak{D}r = r \cos \delta + a(ar)(1 - \cos \delta) + [ar] \sin \delta, \quad |a| = 1$$

(см. стр. 189). Он имеет собственные значения 1 и $e^{\pm i\delta}$ и собственные векторы a и $b' + ib''$ — те же, что и $[ar]$.

8. Тензорные поля

Если тензор задан как функция точки, то говорят о *тензорном поле*. Из такого поля можно получить *векторное поле*, возникающее вследствие зависимости тензора от точки:

$$\operatorname{div} \mathfrak{T} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V df \mathfrak{T}n;$$

как и выше, n означает здесь внешнюю нормаль к поверхности, заключающей объем V .

Если тензор \mathfrak{I} антисимметричен, то ввиду $\mathfrak{I}\mathfrak{n} = [\mathfrak{I}\mathfrak{n}]$ будем иметь:

$$\operatorname{div} \mathfrak{I} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int df [\mathfrak{I}\mathfrak{n}] = -\operatorname{rot} \mathfrak{n} \quad (\text{см. стр. 207}).$$

Теореме Гаусса соответствует равенство

$$\int df \mathfrak{I}\mathfrak{n} = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{I}.$$

Далее, имеем:

$$\operatorname{div} (\varphi \mathfrak{I}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{I} + \mathfrak{I} \operatorname{grad} \varphi;$$

в частности, для единичного тензора:

$$\operatorname{div} (\varphi \mathfrak{E}) = \operatorname{grad} \varphi.$$

Применяя теорему Гаусса к вектору $\mathfrak{I}\mathfrak{a}$, получаем:

$$\int dv \operatorname{div} \mathfrak{I}\mathfrak{a} = \int df (\mathfrak{n}\mathfrak{I}\mathfrak{a}) = \int df (\mathfrak{n}\mathfrak{I}\mathfrak{n}).$$

9. Тензоры, зависящие от времени

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{I}\mathfrak{a}) = \mathfrak{I} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \mathfrak{I}'\mathfrak{a}, \quad \text{где } \mathfrak{I}' = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t}.$$

Для ортогонального тензора \mathfrak{D} получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{D}\mathfrak{a}) = \mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + [\mathfrak{n}\mathfrak{a}],$$

где \mathfrak{n} означает вектор угловой скорости, т. е. вектор, направленный по оси вращения, длина которого равна угловой скорости. Отсюда следует, что применением некоторого зависящего от времени ортогонального тензора можно произвольным образом движущуюся жесткую систему преобразовать к покою (см. стр. 241).

10. Тензорные поля, получаемые из векторных полей при помощи дифференциальных операций

Операция образования градиента позволяет из скалярного поля φ получить векторное поле $\operatorname{grad} \varphi$; подобно этому, применяя дифференциальные операции, можно получить тензорное поле \mathfrak{A} из векторного поля \mathfrak{a} . Для этого существует много возможностей, как и в простейшем случае, когда мы, беря произвольный вспомогательный вектор \mathfrak{i} , пишем общее выражение:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{i} = \alpha \mathfrak{i} \operatorname{div} \mathfrak{a} + \beta (\mathfrak{i} \operatorname{grad}) \mathfrak{a} + \gamma [\mathfrak{i} \operatorname{rot} \mathfrak{a}].$$

Выбирая различным образом числа α , β , γ , получаем различные $\mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma)$.

След имеет вид:

$$|\mathfrak{A}| = (3\alpha + \beta) \operatorname{div} \mathfrak{a}.$$

Скалярный квадрат:

$$(\mathfrak{A}^2) = (3\alpha^2 + 2\alpha\beta)(\operatorname{div} \mathfrak{a})^2 + \beta^2 \left(\Delta \frac{\alpha^2}{2} - (\mathfrak{a}\Delta\mathfrak{a}) \right) + (2\gamma^2 - 2\gamma\beta)(\operatorname{rot} \mathfrak{a})^2,$$

далее,

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \gamma \Delta \mathfrak{a} + (\alpha + \beta - \gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{a}.$$

Тензор \mathfrak{A} можно разложить на симметрическую часть:

$$\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A} \left(\alpha, \beta, \frac{\beta}{2} \right),$$

т. е. тензор \mathfrak{A} симметричен при $\gamma = \frac{\beta}{2}$, и антисимметрическую часть:

$$\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A} \left(0, 0, \gamma - \frac{\beta}{2} \right); \quad |\mathfrak{A}_a| = 0.$$

\mathfrak{A}_s допускает дальнейшее разложение на две части:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \left(\alpha + \frac{\beta}{3}, 0, 0 \right); \quad |\mathfrak{A}_1| = |\mathfrak{A}|,$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \left(-\frac{\beta}{3}, \beta, \frac{\beta}{2} \right),$$

так что будем иметь:

$$\mathfrak{A}_1 = \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) \operatorname{div} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{E}$$

и

$$|\mathfrak{A}_2| = 0.$$

Тогда получим:

$$(\mathfrak{A}_1^2) = 3 \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right)^2 (\operatorname{div} \mathfrak{a})^2,$$

$$(\mathfrak{A}_2^2) = \beta^2 \left[\Delta \frac{\alpha^2}{2} - (\mathfrak{a}\Delta\mathfrak{a}) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathfrak{a})^2 - \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathfrak{a})^2 \right],$$

$$(\mathfrak{A}_a^2) = 2 \left(\gamma - \frac{\beta}{2} \right)^2 (\operatorname{rot} \mathfrak{a})^2,$$

так что

$$(\mathfrak{A}^2) = (\mathfrak{A}_1^2) + (\mathfrak{A}_2^2) + (\mathfrak{A}_a^2).$$

Эти части можно поэтому назвать попарно ортогональными. Далее, имеем:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A}_1 + \operatorname{div} \mathfrak{A}_2 + \operatorname{div} \mathfrak{A}_a,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_1 = \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{a},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = \frac{\beta}{2} \left(\Delta \mathfrak{a} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{a} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_a = \left(\frac{\beta}{2} - \gamma \right) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{a}.$$

Аналогично тому, как скаляр φ разлагается в окрестности какой-либо

точки по формуле $\varphi = \varphi_0 + (\mathbf{r} \operatorname{grad}_0 \varphi) + \dots$ ($\operatorname{grad}_0 \varphi$ означает $(\operatorname{grad} \varphi)_{\mathbf{r}=0}$), можно и для вектора \mathbf{a} получить разложение вида

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{r} + \dots, \quad \text{где } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0.$$

Здесь можно снова разложить тензор \mathfrak{A} на слагаемые:

$$1) \mathfrak{A}_1 \mathbf{r} = \frac{1}{3} \mathbf{r} \operatorname{div}_0 \mathbf{a} \quad (\operatorname{div}_0 \mathbf{a} \text{ означает } (\operatorname{div} \mathbf{a})_{\mathbf{r}=0} \text{ и т. д.}),$$

$$2) \mathfrak{A}_2 \mathbf{r} = -\frac{1}{3} \mathbf{r} \operatorname{div}_0 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \operatorname{grad}_0) \mathbf{a} + \frac{1}{2} [\mathbf{r} \operatorname{rot}_0 \mathbf{a}],$$

$$3) \mathfrak{A}_3 \mathbf{r} = -\frac{1}{2} [\mathbf{r} \operatorname{rot}_0 \mathbf{a}].$$

Такое разложение часто бывает полезным, так как поля 1) и 2) являются безвихревыми, 2) и 3) — свободными от источников. 1) дает дивергенцию, 3) дает ротор и 2) представляет собой свободную от вихрей и источников так называемую *деформацию* поля.

11. Тензоры высшего ранга

Тензор третьего ранга $\mathfrak{F}^{(3)}$ ставит вектору \mathbf{a} линейным образом в соответствие обычный тензор (второго ранга): $\mathfrak{F}^{(3)} \mathbf{a} = \mathfrak{F}^{(2)}$. Мы имеем, таким образом:

$$(\mathfrak{F}^{(3)} \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathfrak{F}^{(2)} \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

т. е. $\mathfrak{F}^{(3)}$ описывает линейную зависимость вектора \mathbf{c} от двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . (Пример: $\mathbf{c} = \mathbf{p}(q\mathbf{a})(r\mathbf{b})$).

Вообще, $\mathfrak{F}^{(n+1)}$ можно определить соотношением

$$\mathfrak{F}^{(n+1)} \mathbf{a} = \mathfrak{F}^{(n)}.$$

Тензор 1-го ранга есть вектор; тензор нулевого ранга есть скаляр. Тензоры ранга выше второго для практических целей употребляются редко. Общеупотребительных обозначений для них не существует.

Тензор 4-го ранга может быть использован также для описания линейной зависимости между двумя тензорами 2-го ранга.

С. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

1. Системы векторов

Все понятия трехмерного векторного исчисления могут быть, в соответствии с их смыслом, почти без изменений перенесены на пространства с числом измерений $n > 3$, за исключением векторного произведения двух векторов и ротора, которые заменяются тензорами и лишь в трехмерном пространстве могут рассматриваться как векторы.

Выражению $(a[bc])$ соответствует общее выражение $(a[bcde\dots])$, которым определяется объем V_n n -мерного параллелепипеда, построенного на n векторах a, b, c, d, e, \dots , причем каждые три идущие подряд вектора должны образовывать правую систему. Имеют место правила перестановок:

$$V_n = (a[bcde\dots]) = (-1)^{n-1} (b[cdef\dots a]) = (c[defg\dots ab]) = \dots$$

При этом

$$[bcd\dots] = \bar{a} V_n$$

означает вектор, перпендикулярный ко всем векторам b, c, d, \dots , длина которого определяется условием $(\bar{a}\bar{a}) = 1$. Таким образом, имеем $(\bar{a}b) = (\bar{a}c) = \dots = 0$. Этими соотношениями вектор \bar{a} однозначно определен. Вектор $[bcd\dots]$ представляет собой аналог векторного произведения¹⁾: он меняет свой знак, сохраняя абсолютную величину, при перестановке двух векторных множителей и обращается в нуль, когда два множителя равны между собой, как и вообще в случае, когда множители b, c, d, \dots не являются линейно независимыми.

Объем V_n может быть представлен в виде определителя

$$V_n^2 = \begin{vmatrix} a^2 & (ab) & (ac) & \dots \\ (ab) & b^2 & (bc) & \dots \\ (ac) & (bc) & c^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Система векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \dots$, определенных тем же способом, что и выше, является взаимной по отношению к системе a, b, c, d, \dots

Имеем: $(\bar{a}[bcde\dots]) = \frac{1}{V_n}$;

$$\frac{\bar{a}}{V_n} = [\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\dots] \text{ и т. д.}$$

При изменении a на величину da будем иметь $dV_n = (\bar{a} da) V_n$; изменяя все a, b, c, \dots , получим $\frac{dV_n}{V_n} = (\bar{a} da) + (\bar{b} db) + (\bar{c} dc) + \dots$

Ввиду $(\bar{a} da) + (a d\bar{a}) = 0$ имеем:

$$(a d\bar{a}) + (b d\bar{b}) + (c d\bar{c}) + \dots = -\frac{dV_n}{V_n} = V_n d\left(\frac{1}{V_n}\right).$$

Если в n -мерном векторном пространстве приходится иметь дело с такого рода величинами, то представляется более удобным различать векторы a, b, c, \dots при помощи индексов, т. е. писать $e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$

¹⁾ В двумерном пространстве пишут: $V_2 = (a[b])$. При этом $[b]$ представляет собой вектор, перпендикулярный к b и равный ему по длине, и $\bar{a} = \frac{[b]}{(a[b])}$.

вместо a, b, c, d, \dots и $e^1, e^2, e^3, e^4, \dots$ вместо $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \dots$. Мы имеем, следовательно, $(e_i e^k) = \delta_{ik}$. Далее, принято писать $(e_i e_k) = g_{ik}$ и $(e^i e^k) = g^{ik}$. Тогда $V_n^2 = |g_{ik}| = g$, где g — определитель с элементами g_{ik} . Тем самым, ввиду $e^i = \sum_k g^{ik} e_k$, имеем соотношение

$$\sum_k g_{ik} g^{kl} = \delta_{il}.$$

Из теоремы о разложении определителя по элементам строки (см. стр. 177):

$$\sum_k g_{ik} G_{kl} = g \delta_{il}$$

вытекает:

$$g^{kl} = \frac{G_{kl}}{g} \quad \text{и} \quad |g^{ik}| = \frac{1}{g}.$$

Далее, имеем:

$$\frac{dV_n}{V_n} = \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \sum_i (e^i de_i) = - \sum_i (e_i de^i).$$

2. Системы координат

В n -мерном пространстве, в котором введена некоторая система координат $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$, можно каждой точке поставить в соответствие систему *основных векторов* e_i так, чтобы было $d\bar{s} = \sum_i e_i dx^i$ или $e_i = \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^i}$. Здесь $d\bar{s}$ означает вектор, направление и длина которого соответствуют отрезку, соединяющему точку x^1, x^2, x^3, \dots с точкой $x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots$. Вектор e_i указывает направление, в котором возрастает только x^i , в то время как остальные координаты сохраняют свои значения постоянными; длина его равна абсолютной величине производной длины дуги соответствующей линии по x^i . Векторы же e^i направлены перпендикулярно к поверхностям $x^i = \text{const}$. Имеем $(e^i d\bar{s}) = dx^i$, так что $e^i = \text{grad } x^i$.

Эти векторы e_i и e^i образуют векторные поля. Их производные по координатам связаны соотношениями

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial e_k}{\partial x^i}.$$

Линейным элементом координатной системы называют $ds = |d\bar{s}|$. Имеем, следовательно:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k.$$

Величины g_{ik} являются функциями координат. Будучи *скалярными* величинами, они более удобны для практического использования при вычислениях, чем e_i и e^i .

Правила, относящиеся к суммированию:

1° Суммирование по индексу должно производиться *в том и только в том случае*, когда он встречается в одном и том же члене *дважды*, причем *один раз в качестве верхнего, другой раз в качестве нижнего*. Для упрощения записи принято (в физической литературе) в подобных случаях знаки суммирования (как сами собой разумеющиеся) не выписывать, а дополнять ими соответствующие выражения мысленно. Неясностей при следовании этому правилу можно не опасаться.

2° Индексы, встречающиеся в члене только *один раз*, по которым, следовательно, не подразумевается никакого суммирования, должны во *всех* членах равенства занимать *одно и то же* положение (вверху или внизу).

3. Компоненты вектора

Система линейно независимых векторов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ может служить для представления произвольного вектора ν в виде

$$\nu = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \dots$$

Числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ называются *компонентами* ν в этом представлении. Используя e_i , пишут:

$$\alpha = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 + \dots = \sum_i \alpha^i e_i,$$

или, опуская сам собой разумеющийся знак суммирования,

$$\alpha = \alpha^i e_i, \text{ соответственно } \alpha = \alpha_i e^i.$$

Числа α^i называются *контравариантными*, числа α_i — *ковариантными* компонентами вектора α в используемой системе координат. Имеем: $\alpha^i = (\alpha e^i)$ и $\alpha_i = (\alpha e_i)$, т. е. справедливо тождество $\alpha = e_i (\alpha e^i) = e^i (\alpha e_i)$ (разложение вектора по направлениям, параллельным координатным линиям, соответственно перпендикулярным координатным поверхностям). Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \alpha^i &= a_k (e^k e^i) = g^{ik} a_k, & \alpha_i &= g_{ik} a^k, \\ \alpha^2 &= (\alpha \alpha) = a^i a^k g_{ik} = a^i a_i = a_i a_k g^{ik}. \end{aligned}$$

Для двух векторов α и β получим:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^i &= \alpha^i + \beta^i, & (\alpha + \beta)_i &= \alpha_i + \beta_i, \\ (\alpha\beta) &= a^i b^k g_{ik} = a_i b_k g^{ik} = a_i b^i = a^i b_i = (\alpha e^i) (\beta e_i) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Для n -мерного объема $V_n = (\alpha[\beta\gamma\delta \dots])$ будем иметь:

$$V_n = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 & \dots \\ \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

4. Компоненты тензора

Имея соотношение $a = \mathfrak{A}b$, можем написать:

$$a^i = (ae^i) = (e^i \mathfrak{A}b) = (e^i \mathfrak{A}e^k) b_k = T^{ik} b_k.$$

Величины $T^{ik} = (e^i \mathfrak{A}e^k)$ называются контравариантными компонентами тензора \mathfrak{A} . Аналогично получаем ковариантные компоненты $T_{ik} = (e_i \mathfrak{A}e_k)$ тензора \mathfrak{A} , а также $T_i{}^k = (e_i \mathfrak{A}e^k)$ и $T^i{}_k = (e^i \mathfrak{A}e_k)$ — смешанные компоненты тензора \mathfrak{A} .

Вместе с тем имеем, следовательно: $a^i = T^{ik} b_k = T^i{}_k b^k$, $a_i = T_{ik} b^k = T_i{}^k b_k$. Величины $g_{ik} = g^{ik}$ также являются компонентами некоторого тензора, а именно, компонентами *метрического фундаментального тензора*, ибо с помощью g_{ik} получается выражение линейного элемента, которое лежит в основе всех метрических соотношений; величины $g_i{}^k = g^k{}_i = \delta_{ik}$ являются компонентами единичного тензора \mathfrak{E} .

Компоненты транспонированного тензора \mathfrak{A} находятся при помощи простой перестановки индексов (без перемены их положения):

$$\tilde{T}_{ik} = T_{ki}, \quad \tilde{T}^{ik} = T^{ki}, \quad \tilde{T}^i{}_k = T_k{}^i.$$

Операторное произведение $\mathfrak{E}\mathfrak{A}$ имеет компоненты $(\mathfrak{E}\mathfrak{A})_{ik} = S_i T^i{}_k$ и т. д. Скалярное произведение $(\mathfrak{E}\mathfrak{A}) = S_{ik} T^{ik}$ ¹⁾ и т. д. След $|\mathfrak{A}| = T_i{}^i = T_{ik} g^{ik} = T^{ik} g_{ik}$ и т. д.

Компоненты тензоров высших рангов образуются аналогично. Число индексов совпадает с рангом тензора. Поэтому векторы можно также называть тензорами 1-го ранга, а скаляры — тензорами нулевого ранга.

Так, компоненты тензора третьего ранга $\mathfrak{A}^{(3)}$ суть:

$$T_{ikl}^{(3)} = (e_i (\mathfrak{A}^{(3)} e_l) e_k) = (\mathfrak{A}^{(3)} e_l e_k e_i) \quad \text{и т. д.}$$

Так же образуются компоненты тензоров более высокого ранга.

5. Преобразования

Если при помощи преобразования

$$x'^r = f_r(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) = f_r(x^i)$$

перейти от системы координат x^i к некоторой новой системе координат x'^r , то все величины e_i , e^i , g_{ik} и т. д. и вследствие этого все компоненты векторов и тензоров изменятся, в то время как сами векторы и тензоры, равно как и все связывающие их соотношения,

¹⁾ В общеупотребительных терминах тензорного исчисления эти выражения представляют собой результаты умножения тензоров \mathfrak{E} и \mathfrak{A} с последующим однократным, соответственно двукратным, свертыванием. (*Прим. ред.*)

останутся теми же. Поэтому в новых координатах, так же как и в исходных, должно быть, например:

$$a = a^i e_i = a'^r e'_r, \quad a^2 = a^i a_i = a'^r a'_r, \quad (ab) = a^i b_i = a'^r b'_r;$$

из $a = b$, $a^i = b^i$ следует $a'^r = b'^r$.

Скалярные величины, такие как a^2 , (ab) , $(a \mathfrak{I} b)$, $|\mathfrak{I}|$, $(\mathfrak{E} \mathfrak{I})$ и т. п., хотя они и выражаются через компоненты, являются, таким образом, *инвариантами* преобразования.

$$\text{Положив } \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} = \alpha'_i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} = \beta^i_r, \text{ получим: } \alpha'_i \beta^i_s = \delta_{rs}.$$

Из $d\mathfrak{E} = e_i dx^i = e'_r dx'^r = e'_r \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} dx^i = e_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} dx'^r$ следует:

$$e'_r = e_i \beta^i_r, \quad e_i = e'_r \alpha'_i,$$

$a'_r = a_i \beta^i_r$, $a_i = a'_r \alpha'_i$ для *ковариантных* компонент вектора,

$a'^r = a^i \alpha'_i$, $a_i = a'^r \beta^i_r$ для *контравариантных* компонент вектора.

Закон преобразования усматривается, таким образом, из положения индекса. Это правило справедливо также для компонент тензора; мы имеем, например:

$$T'^{rs} = T^{ik} \alpha'_i \alpha'_k \text{ и т. д.}$$

Если, напротив, трансформационные свойства числовых величин заранее известны, то отсюда можно заключить, имеем ли мы право рассматривать их как компоненты векторов или тензоров.

Следует, далее, обратить внимание на очевидные правила:

$$\frac{\partial}{\partial x'^r} = \beta^i_r \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \alpha'_i \frac{\partial}{\partial x'^r}.$$

Эти дифференциальные операторы преобразуются, таким образом, как ковариантные компоненты вектора.

6. Дифференцирование и свертывание

а) В результате дифференцирования («Erweiterung») (представляющего собой обобщение операции образования градиента) возникают:

из скаляра φ — вектор $\text{grad } \varphi$: $d\varphi = (\text{grad } \varphi) d\tau$,

из вектора a — тензор \mathfrak{A} : $da = \mathfrak{A} d\tau$,

из тензора $\mathfrak{I}^{(2)}$ — тензор $\mathfrak{I}^{(3)}$: $d\mathfrak{I}^{(2)} = \mathfrak{I}^{(3)} d\tau$.

В получающихся при этой операции уравнениях для компонент встречаются выражения вида

$$\Gamma_{ikl} = \left(e_i \frac{\partial e_k}{\partial x^l} \right) \quad \text{и} \quad \Gamma^i_{kl} = \left(e^i \frac{\partial e_k}{\partial x^l} \right) = - \left(e_k \frac{\partial e^i}{\partial x^l} \right).$$

Они называются *трехиндексными символами Кристоффеля*.

Они могут быть выражены также через g_{ik} :

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right\}; \quad \Gamma_{kl}^i = g^{ir} \Gamma_{rkl}.$$

Они симметричны по k, l : $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$.

В частности, имеем:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} = \left(e^i \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \right) = - \left(e_k \frac{\partial e^i}{\partial x^i} \right) = \operatorname{div} e_k.$$

Используя эти символы, получаем:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = (e_i \operatorname{grad} \varphi) dx^i, \text{ следовательно, } (\operatorname{grad} \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \\ da = \frac{\partial a}{\partial x^k} dx^k = e^i A_{ik} dx^k,$$

следовательно,

$$A_{ik} = \left(e_i \frac{\partial a}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (e_i a) - \left(a \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_l \Gamma_{ik}^l;$$

соответственно

$$A_k^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^l \Gamma_{lk}^i, \\ d\mathfrak{F}^{(2)} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{(2)}}{\partial x^k} dx^k = \mathfrak{F}^{(3)} e_k dx^k,$$

следовательно,

$$T_{ik}^{(3)} = \left(e_i \frac{\partial \mathfrak{F}^{(2)}}{\partial x^k} e_l \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (e_i \mathfrak{F}^{(2)} e_l) - \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^k} \mathfrak{F}^{(2)} e_l \right) - \left(e_i \mathfrak{F}^{(2)} \frac{\partial e_l}{\partial x^k} \right), \\ T_{ik}^{(3)} = \frac{\partial T_{il}^{(2)}}{\partial x^k} - T_{rl}^{(2)} \Gamma_{ik}^r - T_{ir}^{(2)} \Gamma_{lk}^r;$$

соответственно

$$T_{ik}^{(3)j} = \frac{\partial T_{il}^{(2)j}}{\partial x^k} + T_{lr}^{(2)j} \Gamma_{rk}^l - T_{rl}^{(2)j} \Gamma_{ik}^r, \\ T_k^{(3)ij} = \frac{\partial T^{(2)ij}}{\partial x^k} + T^{(2)rl} \Gamma_{rk}^i + T^{(2)ir} \Gamma_{lk}^j.$$

Отметим также соотношения, свободные от Γ , например:

$$C_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}.$$

(Уравнение $c_i = C_{ik} b^k$ в трехмерном случае переходит в $c = \mathfrak{C}b = [\operatorname{rot} a, b]$.)

$$S_{ikl} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x^k}, \text{ если } T_{ik} = -T_{ki}.$$

б) *Свертывание* представляет собой обобщение операции образования следа. При этом возникают:

- из тензора (2-го ранга) \mathfrak{T} — скаляр $|\mathfrak{T}|$,
- из тензора (3-го ранга) $\mathfrak{T}^{(3)}$ — вектор \mathfrak{t} .

Свертывание осуществляют, отбирая компоненты тензора, у которых совпадают один верхний и один нижний индекс (по этому индексу производят суммирование), или же при помощи умножения на g_{ik} или g^{ik} :

$$|\mathfrak{T}| = T_i^i = g_{ik} T^{ik} = g^{ik} T_{ik} = (e^i \mathfrak{T} e_i) = (e_i \mathfrak{T} e^i),$$

$$t_k = T_{ik}^{(3)} g^{il} = T_{kl}^{(3)}; \quad \mathfrak{t} = (\mathfrak{T}^{(3)} e_i) e^i.$$

с) Комбинируя операции дифференцирования и свертывания, приходят к обобщению операции образования дивергенции. Таким путем получают:

- из вектора α — скаляр $\operatorname{div} \alpha$,
- из тензора \mathfrak{T} — вектор $\operatorname{div} \mathfrak{T}$;

$$\operatorname{div} \alpha = \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ir}^r \alpha^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \alpha^i)}{\partial x^i} = \left(e^i \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right);$$

$$(\operatorname{div} \mathfrak{T})_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T_i^k)}{\partial x^k} - \Gamma_{ir}^r T_i^r; \quad (\operatorname{div} \mathfrak{T})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T_i^k)}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^r T^{rs};$$

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right).$$

д) Применение этих понятий к метрическому фундаментальному тензору g_{ik} дает тождества:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} g^{ik})}{\partial x^k} + \Gamma_{rs}^r g^{rs} = (\operatorname{div} \mathfrak{G})^i = 0,$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} + \Gamma_{lr}^r g^{rk} + \Gamma_{lr}^k g^{ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^r g_{ir} - \Gamma_{li}^r g_{rk} = 0.$$

Отсюда можно получить тензор 4-го ранга:

$$R_{jhk}^i = \frac{\partial}{\partial x^h} \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jh}^i + \Gamma_{rh}^i \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jh}^r =$$

$$= \left(e^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\partial e_j}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial e_j}{\partial x^h} \right) \right\} \right).$$

Он называется *тензором кривизны Римана—Кристоффеля*. Этот тензор имеет $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ независимых компонент. При его свертывании воз-

никает симметрический тензор \mathfrak{R} 2-го ранга с компонентами:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= \frac{\partial}{\partial x^r} \Gamma_{ik}^r - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ir}^r + \Gamma_{rs}^s \Gamma_{ik}^r - \Gamma_{ri}^s \Gamma_{ks}^r = \\ &= \left(e^r \left\{ \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial e_r}{\partial x^i} \right) \right\} \right): \end{aligned}$$

При повторном свертывании получается скаляр $|\mathfrak{R}| = R = g^{ik} R_{ik}$. Между ними имеется следующее соотношение:

$$\operatorname{div} \mathfrak{R} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} R.$$

7. Неевклидовы пространства

Если вектор a , не изменяя его, параллельно перенести на $d\xi$, то будем иметь $da = 0$:

$$da^i = -\Gamma_{kr}^i a^k dx^r.$$

Если принять это уравнение в качестве общего определения *параллельного переноса* на бесконечно малые расстояния в произвольных пространствах, то следует иметь в виду, что оно лишь в том случае является интегрируемым и, тем самым, определяющим параллельность и равенство также и для конечных расстояний, когда для тензора кривизны:

$$R_{jhk}^i = 0.$$

Если имеет место этот случай, то пространство называется *евклидовым*, в противном случае — *неевклидовым*, или *искривленным* (точнее, соответствующие наименования присваиваются метрике пространства). Равенство нулю компонент этого тензора R_{jhk}^i представляет собой условие того, чтобы при определении метрики с помощью линейного элемента $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$ оставались в силе все метрические соотношения евклидовой геометрии. Только в этом случае можно при помощи соответствующим образом подобранного преобразования перейти к $g_{ik} = \delta_{ik}$, т. е. ввести декартову координатную систему. Неевклидовы пространства существуют уже в случае двух измерений; например, таким пространством является поверхность сферы.

Кривая называется *геодезической*, или, в евклидовом пространстве, «прямой», если при движении вдоль нее направление касательной остается постоянным¹⁾. Касательный вектор t имеет компоненты $t^i = \frac{dx^i}{ds}$. Для них, следовательно, должно быть $\frac{\partial t}{\partial s} = 0$, и тем самым

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{kr}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^r}{ds}.$$

¹⁾ Определение Г. Вейля. Постоянство направления касательной понимается в смысле внутренней метрики пространства. (Прим. ред.)

8. Системы координат, зависящие от времени (движущиеся)

Изменение системы координат во времени может быть описано при помощи поля вектора u , представляющего собой скорость u точки $x' = \text{const}$. Положив $u = e_i u^i$, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_i}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x^i} - u^r \frac{\partial e_i}{\partial x^r} = e_l \frac{\partial u^l}{\partial x^i}; & \frac{\partial e^i}{\partial t} &= -e^l \frac{\partial u^l}{\partial x^i}; \\ \frac{\partial g_{ih}}{\partial t} &= g_{kl} \frac{\partial u^l}{\partial x^i} + g_{il} \frac{\partial u^k}{\partial x^h}; & \frac{\partial g^{ik}}{\partial t} &= -g^{il} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} - g^{kl} \frac{\partial u^i}{\partial x^k}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ir}^k &= \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^i \partial x^r} + \Gamma_{lr}^k \frac{\partial u^l}{\partial x^i} - \Gamma_{lr}^l \frac{\partial u^k}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Компоненты вектора a , который сам по себе является постоянным, изменяются при этом на

$$\delta a_i = a_l \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \delta t; \quad \delta a^i = -a^l \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \delta t.$$

Эти производные по времени относятся к неподвижной точке. Если отнести их к точке, движущейся со скоростью v : $v^i = u^i + \frac{dx^i}{dt}$, то для произвольного скаляра, соответственно вектора, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}; \quad \frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + v^i \frac{\partial a}{\partial x^i}.$$

Если $\frac{dx^i}{dt} = 0$, то $v^i = u^i$, и мы получаем:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x^i} \quad (\text{производная по времени при фиксированных } x^i).$$

Здесь $\delta a^i = \left(u^l \frac{\partial a^i}{\partial x^l} - a^l \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \right) \delta t \quad (\neq (\delta a^i))$.

Вращение декартовой координатной системы как твердого тела описывается соотношениями

$$u_i = \varepsilon_{ik} x^k, \quad \text{где } \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$$

что дает:

$$\begin{aligned}\delta a^i &= \left(\varepsilon_{ik} x^k \frac{\partial a^i}{\partial x^l} - a^r \varepsilon_{ir} \right) \delta t = \varepsilon_{ik} \left(x^k \frac{\partial a^i}{\partial x^l} - \delta_{il} \delta_{kr} a^r \right) \delta t = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \left(x^k \frac{\partial a^i}{\partial x^l} - x^l \frac{\partial a^i}{\partial x^k} - (\delta_{il} \delta_{kr} - \delta_{ik} \delta_{lr}) a^r \right) \delta t.\end{aligned}$$

9. Ортогональные координаты¹⁾

Ортогональная система координат определяется при помощи линейного элемента

$$(ds)^2 = \sum_i g_{ii} (dx^i)^2;$$

при этом $g_{ii} = |e_i|^2 = e_i^2$ и $g^{ii} = |e^i|^2 = e^{i2}$, так что

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \quad \text{и} \quad e_i = \frac{1}{e^i}.$$

Здесь часто оказывается целесообразным, кроме ковариантных и контравариантных компонент, между которыми имеется зависимость

$$a^i e_i = a_i e^i, \quad \text{или} \quad a^i = a_i g^{ii} = \frac{a_i}{g_{ii}},$$

вести еще их геометрическое среднее

$$\bar{a}_i = \sqrt{a_i a^i} = a^i e_i = a_i e^i = \frac{a_i}{e_i}.$$

Величины \bar{a}_i мы будем называть *натуральными компонентами*; они служат длинами составляющих векторов.

Мы введем теперь вместо основных векторов e_k единичные векторы i_k , имеющие те же направления; тогда

$$a = \sum_k a_k e^k = \sum_k (a_k e^k) i^k = \sum_k \bar{a}_k i^k, \quad a = \sum_k a^k e_k = \sum_k (a^k e_k) i_k = \sum_k \bar{a}^k i_k,$$

и поэтому $i^k = i_k$.

dx^i не являются натуральными векторными компонентами, однако таковыми будут

$$e_i dx^i = \overline{ds}_i.$$

Аналогичным способом можно определить натуральные компоненты тензора \mathfrak{S} ; тензорное соотношение $a = \mathfrak{S}b$ записывается в виде

$$\bar{a}_i = \sum_k \bar{T}_{ik} \bar{b}_k,$$

причем натуральные компоненты тензора даются равенствами

$$\bar{T}_{ik} = \frac{T_{ih}}{e_i e_k} = T^{ik} e_i e_k = T_{ik}^{e_i} = T_i^k \frac{e_k}{e_i} = (i_i \mathfrak{S} i_k).$$

Метрический фундаментальный тензор. Он имеет диагональную форму:

$$g_{ik} = g_{ii} \delta_{ik} = e_i^2 \delta_{ik}, \quad \text{где} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}.$$

¹⁾ В настоящем п. 9 все знаки суммирования выписаны.

Определитель:

$$g = g_{11}g_{22}g_{33} \dots, \quad \sqrt{g} = e_1 e_2 e_3 \dots$$

Трехиндексные символы:

$$\Gamma_{l, ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k \neq l \neq i,$$

$$\Gamma_{l, ii} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \quad (l \neq i),$$

$$\Gamma_{i, ki} = \Gamma_{i, ik} = +\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (k \neq i),$$

$$\Gamma_{i, ii} = +\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

$$\Gamma'_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k \neq l \neq i,$$

$$\Gamma'_{ii} = -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \quad (l \neq i),$$

$$\Gamma'_{ki} = \Gamma'_{ik} = +\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{ii}}{\partial x^k} \quad (k \neq i),$$

$$\Gamma'_{ii} = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{ii}}{\partial x^i}.$$

Благодаря этим соотношениям формулы стр. 257 при переходе к натуральным компонентам преобразуются следующим образом:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (\alpha = \text{grad } \varphi),$$

$$\bar{A}_{ik} = \frac{1}{e_k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{a_k}{e_i} \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + \delta_{ik} \sum_r \frac{a_r}{e_r} \frac{\partial e_k}{\partial x^r} \right) \quad (\mathfrak{A} = \text{grad } \alpha,$$

т. е. $\mathfrak{A}b = (b \text{ grad } \alpha)$,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{a}_i}{e_i} \right) \quad (\psi = \text{div } \alpha),$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{1}{e_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \quad (\psi = \Delta \varphi),$$

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{T}_{ir}}{e_i e_r} \right) + \sum_r \frac{(\bar{T}_{ri} + \bar{T}_{ir})}{e_i e_r} \frac{\partial e_i}{\partial x^r} - \sum_r \frac{\bar{T}_{rr}}{e_i e_r} \frac{\partial e_r}{\partial x^i} \quad (\alpha = \text{div } \mathfrak{T}).$$

Если здесь \bar{T}_{ik} — компоненты антисимметрического тензора ($\bar{T}_{ik} = -\bar{T}_{ki}$), то оба последних члена исчезают.

Если, в частности,

$$\bar{T}_{ik} = \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right),$$

то будем иметь:

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^r} - \frac{\partial (\bar{b}_r e_r)}{\partial x^i} \right)}{e_i^2 e_r^2} \right) \quad (\mathfrak{a} = -\text{rot rot } \mathfrak{b}).$$

Это выражение может быть разложено на две части:

$$-\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{b}_r}{e_r} \right) \right) - \bar{c}_i,$$

где первая часть представляет собой $\text{grad div } \mathfrak{b}$, а вторая — вектор $\mathfrak{c} = \Delta \mathfrak{b}$. Симметрическая часть тензора \bar{a}_{ik} записывается в форме

$$\bar{S}_{ik} = \frac{\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{ki}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_i}{e_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\bar{b}^i}{e_i} \right) + \frac{e_k}{e_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\bar{b}_k}{e_k} \right) \right) + \frac{\delta_{ik}}{e_k} \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \frac{\partial e_k}{\partial x^r}.$$

Антисимметрические тензоры в трех измерениях имеют только три компоненты. Если интерпретировать их как компоненты некоторого вектора, полагая

$$\bar{T}_{12} = \bar{a}_3, \quad \bar{T}_{23} = \bar{a}_1, \quad \bar{T}_{31} = \bar{a}_2,$$

то последний будет определен этим независимо от системы координат.

Например, тензор $\bar{a}_i \bar{b}_k - \bar{a}_k \bar{b}_i = \bar{c}_l$ определяет вектор $\mathfrak{c} = [\mathfrak{a} \mathfrak{b}]$; далее, тензор

$$\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right) = -\bar{c}_l$$

определяет вектор $\mathfrak{c} = \text{rot } \mathfrak{b}$.

Эти векторы называются *аксиальными* в отличие от обычных векторов, называемых *полярными*.

Операция rot , применяемая к аксиальному вектору, идентична операции div , применяемой к антисимметрическому тензору (например, $\text{rot rot } \mathfrak{b}$).

При переходе от одной ортогональной системы координат к другой такой же системе имеют место следующие формулы преобразования:

$$(e'_i)^2 = \sum_k e_k^2 \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right)^2, \quad \bar{a}'_i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{a}_k$$

с ортогональной матрицей:

$$\alpha_{ik} = \frac{e'_i \partial x'^i}{e_k \partial x^k} = \frac{e_k \partial x^k}{e'_i \partial x'^i} = \sqrt{\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}}.$$

РАЗДЕЛ ВОСЬМОЙ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Специальные системы координат применяются при изучении специальных задач. Они могут приводить к методическим упрощениям по сравнению с описанием, не использующим никакой системы координат. Их выбирают по возможности такими, чтобы они были приспособлены к задаче. При этом, однако, часто возникают трудности в установлении более общих зависимостей. Поэтому такие специальные системы не должны вводиться слишком рано.

Практическое применение находят почти исключительно *ортогональные* системы и в них — почти исключительно *натуральные* компоненты векторов и тензоров (см. стр. 261).

В этих случаях координаты при практических вычислениях различаются не при помощи числовых индексов, а при помощи различных букв. Компоненты векторов и тензоров обозначаются при этом соответствующими буквенными индексами.

Все формулы *векторной и тензорной алгебры* для всех ортогональных систем сохраняют силу *в той же самой* простой форме, какую они имеют в декартовых координатах. Лишь величины, образуемые при помощи дифференцирования, имеют в каждой координатной системе свою специфическую форму.

А. ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Векторное произведение и ротор имеют здесь только одну компоненту. Они представляют собой так называемые *псевдоскаляры*.

1. Декартова система координат x, y (равноотстоящие прямые)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$
$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad g = 1, \quad e_i = 1; \quad \Gamma_{i, ik} = 0,$$
$$(ab) = a_x b_x + a_y b_y,$$
$$[ab] = a_x b_y - a_y b_x \quad (\text{псевдоскаляр}).$$

Общие формулы стр. 261 и дальнейших применяются в следующей простейшей форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_x \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \operatorname{grad}_y \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \operatorname{div} \alpha &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}, \\ \Delta \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \operatorname{rot} \alpha &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad (\text{псевдоскаляр}). \end{aligned}$$

2. Общие (в общем случае неортогональные) системы координат ξ, η

$$\begin{aligned} x^1 &= \xi(x, y), & x^2 &= \eta(x, y), \\ ds^2 &= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \\ &+ \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right) d\eta^2 = \\ &= \frac{\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right)}{g} d\xi^2 - 2 \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}{g} d\xi d\eta + \frac{\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)}{g} d\eta^2, \\ g &= \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда находят значения g_{ik} , так же как и

$$\begin{aligned} g^{11} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right) g, \\ g^{12} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) g, \\ g^{22} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right) g. \end{aligned}$$

Контравариантные компоненты вектора α таковы:

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} a_y = \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta} a_x - \frac{\partial x}{\partial \eta} a_y}{\sqrt{g}}, \\ a^2 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} a_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} a_y = \frac{-\frac{\partial y}{\partial \xi} a_x + \frac{\partial x}{\partial \xi} a_y}{\sqrt{g}}, \end{aligned}$$

ковариантные же:

$$a_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} a_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} a_y = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y} a_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} a_y}{\sqrt{g}},$$

$$a_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} a_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} a_y = \frac{-\frac{\partial \xi}{\partial y} a_x + \frac{\partial \xi}{\partial x} a_y}{\sqrt{g}}.$$

3. Общие ортогональные системы координат u, v (ξ, η)

Такие системы получают, исходя из декартовых координат x, y , при помощи соотношения

$$u + iv = f(x + iy),$$

где f — произвольная аналитическая функция (см. стр. 100), причем возможен переход к более общим координатам ξ, η посредством соотношений

$$\xi = \xi(u), \quad \eta = \eta(v), \quad \text{соответственно } u = u(\xi), \quad v = v(\eta).$$

Линейный элемент тогда имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{D} (du^2 + dv^2) = \frac{1}{D} \left\{ d\xi^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + d\eta^2 \left(\frac{dv}{d\eta} \right)^2 \right\},$$

где

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{e_1^2} = \frac{1}{e_2^2} = \frac{1}{Vg},$$

и для *элемента площади* получаем выражение

$$df = \sqrt{g} du dv = \frac{1}{D} du dv.$$

В качестве компонент векторов и тензоров мы применяем натуральные компоненты $\bar{a}_i = \sqrt{a^i a_i}$ (см. стр. 260). Для вектора a с декартовыми компонентами a_x и a_y будем при этом иметь (ввиду $\frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial x}{\partial u}$ и т. д.):

$$a_u = \left(a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad a_x = \left(a_u \frac{\partial x}{\partial u} + a_v \frac{\partial x}{\partial v} \right) \sqrt{D},$$

$$a_v = \left(a_x \frac{\partial v}{\partial x} + a_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad a_y = \left(a_u \frac{\partial y}{\partial u} + a_v \frac{\partial y}{\partial v} \right) \sqrt{D}.$$

Вектор $\alpha = \text{grad } \psi$ имеет компоненты:

$$\begin{aligned} \text{grad}_u \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \sqrt{D}, & \text{grad}_v \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial v} \sqrt{D}. \\ \text{div } \alpha &= D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_u}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_v}{\sqrt{D}} \right) \right\}, \\ \Delta \psi &= D \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right\}, \\ \text{rot } \alpha &= D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_v}{\sqrt{D}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_u}{\sqrt{D}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к более общей системе ξ, η , следует положить:

$$\begin{aligned} a_u &= a_\xi, & a_v &= a_\eta, & \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{1}{du} \frac{\partial}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{1}{dv} \frac{\partial}{\partial \eta}. \\ a_\xi &= \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{du}{d\xi} \left\{ a_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\}, & a_x &= \sqrt{D} \left\{ a_\xi \frac{d\xi}{du} \frac{\partial x}{\partial \xi} + a_\eta \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\}, \\ a_\eta &= \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{dv}{d\eta} \left\{ a_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\}, & a_y &= \sqrt{D} \left\{ a_\xi \frac{d\xi}{du} \frac{\partial y}{\partial \xi} + a_\eta \frac{d\eta}{dv} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\}. \end{aligned}$$

4. Плоские полярные координаты

(концентрические u -окружности и радиальные v -лучи)

$$\begin{aligned} u + iv &= \ln(x + iy), \\ u &= \ln \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= e^u \cos v, & -\infty < u < +\infty, \\ v &= \text{arctg } \frac{y}{x}, & y &= e^u \sin v, & 0 \leq v < 2\pi. \end{aligned}$$

Линейный элемент: $ds^2 = e^{2u} (du^2 + dv^2)$.

$$D = e^{-2u} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Элемент площади: $df = e^{2u} du dv$.

Здесь обычно вводят новые координаты r, φ при помощи соотношений $r = e^u, \varphi = v$. Это дает $\frac{\partial}{\partial u} = r \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= r \cos \varphi, & 0 \leq r < \infty, \\ \varphi &= \text{arctg } \frac{y}{x}, & y &= r \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Линейный элемент: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

$$D = \frac{1}{r^2}.$$

Элемент площади: $df = r dr d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\begin{aligned} a_r &= a_u = \frac{a_x x + a_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & a_x &= a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \\ a_\varphi &= a_v = \frac{-a_x y + a_y x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & a_y &= a_r \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_r \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r}, & \operatorname{grad}_\varphi \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Delta \phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

5. Плоские параболические координаты

(софокусные u - и v -параболы с общей осью симметрии)

$$\frac{u + iv}{\sqrt{2}} = \sqrt{x + iy},$$

$u = \sqrt{r + x}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (расстояние от фокуса $x = 0, y = 0$),

$v = \sqrt{r - x}$,

$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad 0 \leq u < \infty, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ (для данных значений } u, v$
 $y = \pm uv, \quad 0 \leq v < \infty \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ получаются два значения } y!$

Линейный элемент: $ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)$.

$$D = \frac{1}{2r} = \frac{1}{u^2 + v^2}.$$

Элемент площади: $df = (u^2 + v^2) du dv$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\begin{aligned} a_u &= \frac{a_x \sqrt{r+x} + a_y \sqrt{r-x}}{\sqrt{2r}}, & a_x &= \frac{a_u u - a_v v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ a_v &= \frac{-a_x \sqrt{r-x} + a_y \sqrt{r+x}}{\sqrt{2r}}, & a_y &= \frac{a_u v + a_v u}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

В остальном применяются формулы стр. 266—267. Можно, например, ввести $u^2 = \xi, v^2 = \eta$, однако это редко приносит пользу.

6. Плоские эллиптические координаты

(софокусные u -гиперболы и v -эллипсы)

$$\begin{aligned} u + iv &= \operatorname{arcsin} \frac{x + iy}{a}, \\ \sin u &= \frac{s_1 - s_2}{2a}, \quad \operatorname{ch} v = \frac{s_1 + s_2}{2a}, \end{aligned}$$

где $s_1 = \sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2}$, $s_2 = \sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}$ — расстояния точки x, y от фокусов, лежащих на x -оси в точках $x_1 = -\alpha$ и $x_2 = +\alpha$.
 $\left(\frac{\pi}{2} - u = \varepsilon \right.$ есть эксцентрическая аномалия эллипса, см. Приложение 9, стр. 581, $\frac{1}{\operatorname{ch} v}$ — его численный эксцентриситет.)

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha \sin u \operatorname{ch} v, & 0 \leq u < 2\pi, \\ y &= \pm \alpha \cos u \operatorname{sh} v, & 0 \leq v < \infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(для данных } u, v \text{ получаются} \\ \text{два значения } y!). \end{array}$$

Отсюда следует:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 v} = 1 \quad (v\text{-эллипсы}), \quad \frac{x^2}{\alpha^2 \sin^2 u} - \frac{y^2}{\alpha^2 \cos^2 u} = 1 \quad (u\text{-гиперболы}).$$

$$\begin{aligned} \text{Линейный элемент: } ds^2 &= \alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) (du^2 + dv^2) = \\ &= s_1 s_2 (du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)} = \frac{1}{s_1 s_2}.$$

$$\text{Элемент площади: } df = \alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) du dv = s_1 s_2 du dv.$$

Натуральные векторные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= a_x \cos \delta - a_y \sin \delta, \\ a_v &= a_x \sin \delta + a_y \cos \delta, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{где вспомогательный угол } \delta \text{ удовлет-} \\ \text{воряет условию } \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} u \operatorname{th} v, \end{array}$$

$$a_x = \frac{a_u \cos u \operatorname{ch} v + a_v \sin u \operatorname{sh} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}}, \quad a_y = \frac{-a_u \sin u \operatorname{sh} v + a_v \cos u \operatorname{ch} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}}.$$

В литературе встречается также подстановка:

$$\xi = \sin u, \quad \eta = \operatorname{ch} v.$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ получим $\alpha \operatorname{ch} v = r$. Мы приходим к полярным координатам r, φ , где $\varphi = \frac{\pi}{2} - u$.

В пределе при $\alpha \rightarrow \infty$ получаем декартовы координаты с $x = \alpha \sin u, y = \alpha \operatorname{sh} v$.

7. Плоские биполярные координаты

(пучок u -окружностей, охватывающих полюсы, лежащие на x -оси в точках $x_1 = +\alpha$ и $x_2 = -\alpha$, и пучок v -окружностей, проходящих через эти полюсы)

$$u + iv = \ln \frac{\alpha + x + iy}{\alpha - x - iy} = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{x + iy}{\alpha}; \quad x + iy = \alpha \operatorname{th} \frac{u + iv}{2},$$

$$\operatorname{th} u = \frac{2\alpha x}{\alpha^2 + x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{2\alpha y}{\alpha^2 - x^2 - y^2}.$$

(e^u представляет собой отношение $\frac{s_1}{s_2}$ расстояний s_1 и s_2 точки x, y

от полюсов; $\pi - v$ есть угол, под которым из точки x, y виден отрезок, соединяющий полюсы.)

$$x = \frac{\alpha \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad -\infty < u < +\infty,$$

$$y = \frac{\alpha \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

$u = \text{const}$: окружности с $R_u = \frac{\alpha}{|\operatorname{sh} u|}$ вокруг $x = \frac{\alpha}{\operatorname{th} u}$, $y = 0$ (аполлониевы окружности);

$v = \text{const}$: окружности с $R_v = \frac{\alpha}{|\sin v|}$ вокруг $x = 0$, $y = \frac{-\alpha}{\operatorname{tg} v}$ (пучок окружностей, проходящих через полюсы).

Линейный элемент: $ds^2 = \frac{\alpha^2 (du^2 + dv^2)}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}$.

$$D = \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2} = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}.$$

Элемент площади: $df = \frac{\alpha^2 du dv}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}$.

Натуральные векторные компоненты:

$$a_u = \{a_x (\alpha^2 - x^2 + y^2) - a_y \cdot 2xy\} \frac{\sqrt{D}}{2\alpha},$$

$$a_v = \{a_x \cdot 2xy + a_y (\alpha^2 - x^2 + y^2)\} \frac{\sqrt{D}}{2\alpha},$$

$$a_x = \frac{a_u (1 + \operatorname{ch} u \cos v) + a_v \operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v},$$

$$a_y = \frac{-a_u \operatorname{sh} u \sin v + a_v (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{\operatorname{ch} u + \cos v}.$$

В литературе применяется также подстановка

$$\xi = e^{-u}, \quad \eta = \pi - v.$$

В. ТРЕХМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Декартова система координат x, y, z

Она получается из двумерной декартовой системы координат посредством присоединения еще одной координаты z . Все сказанное относительно двумерной системы остается в силе. Формулы стр. 261 и дальнейших могут применяться в простейшей форме со всеми $e_i = 1$.

Мы имеем здесь, в частности:

$$(ab) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$[ab]_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad [ab]_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad [ab]_z = a_x b_y - a_y b_x,$$

$$\operatorname{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \operatorname{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \alpha &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\ \operatorname{rot}_x \alpha &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \alpha = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \alpha = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \\ \Delta \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ (\alpha \operatorname{grad})_x \beta &= a_x \frac{\partial \beta}{\partial x} + a_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + a_z \frac{\partial \beta}{\partial z} \quad \text{и т. д.}, \\ \Delta_x \alpha &= \Delta a_x \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Тензоры имеют компоненты T_{xx} , T_{xy} и т. д. При этом имеем:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}\alpha)_x &= T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z \quad \text{и т. д.}, \\ (\operatorname{div} \mathfrak{T})_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \quad \text{и т. д.}, \\ |\mathfrak{T}| &= T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, \quad |T| = \det(T_{ik}), \\ (\mathfrak{T}\mathfrak{T}) &= T_{xx}^2 + T_{yy}^2 + T_{zz}^2 + T_{xy}^2 + T_{xz}^2 + T_{yz}^2 + T_{yx}^2 + T_{zx}^2 + T_{zy}^2, \\ (\mathfrak{S}\mathfrak{T}) &= (S_{xx}T_{xx} + S_{xy}T_{xy} + S_{xz}T_{xz}) + \\ &\quad + (S_{yx}T_{yx} + S_{yy}T_{yy} + S_{yz}T_{yz}) + (\dots). \end{aligned}$$

2. Общие цилиндрические координаты

Они получаются из двумерных плоских координат u, v посредством присоединения декартовой координаты z , перпендикулярной к u, v -плоскости. Они являются ортогональными, если ортогональна плоская система u, v (соответственно ξ, η), и в этом случае линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{D} + dz^2 \quad (\text{см. стр. 266}), \quad e_z = 1$$

и элемент объема $dV = \sqrt{g} du dv dz = \frac{1}{D} du dv dz$.

Натуральные векторные компоненты a_u, a_v, a_x, a_y выглядят точно так же, как для соответствующих плоских координат. Независимо от них присоединяется третья компонента a_z .

$\operatorname{grad} \phi$ следует дополнить z -компонентой: $\operatorname{grad}_z \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z}$,

$\operatorname{div} \alpha$ следует дополнить аддитивным членом $\frac{\partial a_z}{\partial z}$: $\dots + \frac{\partial a_z}{\partial z}$,

$\Delta \phi$ следует дополнить аддитивным членом $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$: $\dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$.

$\text{rot } \alpha$ имеет компоненты:

$$\begin{aligned}\text{rot}_u \alpha &= \sqrt{D} \frac{\partial a_z}{\partial v} - \frac{\partial a_v}{\partial z}, \\ \text{rot}_v \alpha &= \frac{\partial a_u}{\partial z} - \sqrt{D} \frac{\partial a_z}{\partial u}, \\ \text{rot}_z \alpha &= D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_v}{\sqrt{D}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_u}{\sqrt{D}} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Примеры:

а) *Круговые цилиндрические координаты* u, v, z .

$$\begin{aligned}u &= \ln \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= e^u \cos v, & -\infty < u < +\infty, \\ v &= \text{arctg } \frac{y}{x}, & y &= e^u \sin v, & 0 \leq v < 2\pi, \\ z &, & z &, & -\infty < z < +\infty.\end{aligned}$$

Линейный элемент: $ds^2 = e^{2u} (du^2 + dv^2) + dz^2$.

$$D = \frac{1}{x^2 + y^2} = e^{-2u}.$$

Элемент объема: $dV = e^{2u} du dv dz$,

или при $\rho = e^u, \varphi = v; \frac{\partial}{\partial u} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; & x &= \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < \infty, \\ \varphi &= \text{arctg } \frac{y}{x}, & y &= \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ z &, & z &, & -\infty < z < +\infty.\end{aligned}$$

Линейный элемент: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$.

$$D = \frac{1}{\rho^2}.$$

Элемент объема: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$.

Натуральные векторные компоненты $a_\rho, a_\varphi, a_x, a_y$ выглядят, как и в плоских полярных координатах (см. стр. 267). К ним присоединяется третья компонента a_z , не зависящая от остальных.

Векторные дифференциальные операции:

$$\text{grad}_\rho \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad \text{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \text{grad}_z \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$\text{div } \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

$$\text{rot}_\rho \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \quad \text{rot}_\varphi \alpha = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \quad \text{rot}_z \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}.$$

б) *Параболические цилиндрические координаты* u, v — как в плоских параболических координатах (см. стр. 268); к ним присоединяется третья, не зависящая от них координата z . Линейный элемент, элемент объема, натуральные векторные компоненты и векторные дифференциальные операции см. выше.

γ) *Эллиптические цилиндрические координаты*: u, v — как в плоских эллиптических координатах (см. стр. 268); к ним присоединяется третья, не зависящая от них координата z . Линейный элемент, элемент объема, натуральные векторные компоненты и векторные дифференциальные операции см. выше.

3. Вращательно-симметричные координаты u, v, φ

Они получаются из соответствующих плоских координат u, v при помощи вращения на угол φ вокруг оси симметрии $v=0$. Координата φ изменяется в промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$, в то время как u, v изменяются в полуплоскости. Они являются ортогональными, если ортогональна система u, v . Для построения общих вращательно-симметричных координат с осью вращения z следует положить:

$$u = u(z, \rho), \quad v = v(z, \rho), \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

т. е.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Для построения ортогональных вращательно-симметричных координат следует положить:

$$u + iv = f(z + i\rho),$$

где f — произвольная аналитическая функция (см. стр. 266). Тогда оказываются справедливыми следующие общие формулы.

$$\text{Линейный элемент: } ds^2 = \frac{1}{D} \{du^2 + dv^2\} + \rho^2 d\varphi^2.$$

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2.$$

$$\text{Элемент объема: } dV = \rho \sqrt{g} du dv d\varphi = \frac{\rho}{D} du dv d\varphi.$$

Натуральные векторные компоненты:

$$a_u = \frac{1}{\sqrt{D}} \left\{ a_x \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} + a_y \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\},$$

$$a_v = \frac{1}{\sqrt{D}} \left\{ a_x \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} + a_y \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + a_z \frac{\partial v}{\partial z} \right\},$$

$$a_\varphi = -a_x \frac{y}{\rho} + a_y \frac{x}{\rho},$$

$$a_x = \left\{ a_u \frac{\partial \rho}{\partial u} + a_v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right\} \sqrt{D} \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi,$$

$$a_y = \left\{ a_u \frac{\partial \rho}{\partial u} + a_v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right\} \sqrt{D} \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi,$$

$$a_z = \left\{ a_u \frac{\partial z}{\partial u} + a_v \frac{\partial z}{\partial v} \right\} \sqrt{D}.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\text{grad}_u \phi = \sqrt{D} \frac{\partial \phi}{\partial u}; \quad \text{grad}_v \phi = \sqrt{D} \frac{\partial \phi}{\partial v}; \quad \text{grad}_\varphi \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi},$$

$$\text{div } \alpha = \frac{D}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\rho}{\sqrt{D}} a_u \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{\sqrt{D}} a_v \right) \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \phi = \frac{D}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2},$$

или

$$\Delta \phi = \frac{D}{\sqrt{D} \rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\rho^2 D} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) \right\} (\phi \sqrt{D}),$$

$$\text{rot}_u \alpha = \frac{\sqrt{D}}{\rho} \frac{\partial}{\partial v} (\rho a_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_v}{\partial \varphi},$$

$$\text{rot}_v \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_u}{\partial \varphi} - \frac{\sqrt{D}}{\rho} \frac{\partial}{\partial u} (\rho a_\varphi),$$

$$\text{rot}_\varphi \alpha = D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_v}{\sqrt{D}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_u}{\sqrt{D}} \right) \right\}.$$

Примеры:

а) *Сферические координаты* (см. плоские полярные координаты).

$$u + iv = \ln(z + i\rho)$$

$$u = \ln \sqrt{z^2 + \rho^2} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad x = e^u \sin v \cos \varphi, \quad -\infty < u < +\infty,$$

$$v = \arctg \frac{\rho}{z}, \quad y = e^u \sin v \sin \varphi, \quad 0 \leq v \leq \pi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = e^u \cos v, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\rho = e^u \sin v.$$

Линейный элемент: $ds^2 = e^{2u} (du^2 + dv^2 + d\varphi^2 \sin^2 v)$.

$$D = e^{-2u} = \frac{1}{z^2 + \rho^2}.$$

Элемент объема: $dV = e^{3u} \sin v du dv d\varphi$.

Обычно вводят другие координаты r, θ при помощи соотношений $r = e^u, \theta = v$:

$$\rho = r \sin \theta, \quad \frac{\partial}{\partial u} = r \frac{\partial}{\partial r},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = r \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Линейный элемент: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$.

$$D = \frac{1}{r^2}.$$

Элемент объема: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$a_r = a_x \frac{x}{r} + a_y \frac{y}{r} + a_z \frac{z}{r},$$

$$a_\theta = \frac{a_x x z}{r \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{a_y y z}{r \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a_z \sqrt{x^2 + y^2}}{r}, \quad a_\varphi = \frac{-a_x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{a_y x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$a_x = a_r \sin \theta \cos \varphi + a_\theta \cos \theta \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi,$$

$$a_y = a_r \sin \theta \sin \varphi + a_\theta \cos \theta \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi,$$

$$a_z = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\text{grad}_r \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$\text{div } a = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2},$$

$$\text{rot}_r a = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right\},$$

$$\text{rot}_\theta a = \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right\},$$

$$\text{rot}_\varphi a = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right\},$$

$$(\Delta a)_r = \frac{1}{r} \Delta (r a_r) - \frac{2}{r} \text{div } a,$$

$$[r \text{ grad } \psi] = r \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad [r \text{ grad } \psi]_r = 0, \quad [r \text{ grad } \psi]_\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$[r \text{ grad } \psi]_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad [r \text{ grad } \psi]_z = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$[r \text{ grad}]^2 \psi = (r \text{ rot } [r \text{ grad } \psi]) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

β) *Параболические координаты вращения.*

$$\frac{u + iv}{\sqrt{2}} = \sqrt{z + i\rho} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$u^2 = r + z, \quad \text{где } r = \sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad x = uv \cos \varphi, \quad 0 \leq u < \infty,$$

$$v^2 = r - z, \quad y = uv \sin \varphi, \quad 0 \leq v < \infty,$$

$$\varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\rho = uv, \quad r = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{2u} \frac{\rho}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{2v} \frac{\rho}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Линейный элемент: $ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\varphi^2.$

$$D = \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2r}.$$

Элемент объема: $dV = uv(u^2 + v^2) du dv d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\begin{aligned} a_u &= \frac{a_x x + a_y y}{\sqrt{2r(r+z)}} + a_z \sqrt{\frac{r+z}{2r}}, & a_x &= \frac{a_u v + a_v u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cos \varphi - a_z \sin \varphi, \\ a_v &= \frac{a_x x + a_y y}{\sqrt{2r(r-z)}} - a_z \sqrt{\frac{r-z}{2r}}, & a_y &= \frac{a_u v + a_v u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sin \varphi + a_z \cos \varphi, \\ a_\varphi &= \frac{-a_x y + a_y x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & a_z &= \frac{a_u u - a_v v}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\begin{aligned} \text{grad}_u \phi &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial \phi}{\partial u}, & \text{grad}_v \phi &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial \phi}{\partial v}, & \text{grad}_\varphi \phi &= \frac{1}{uv} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}, \\ \text{div } a &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left\{ \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (ua_u) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} (va_v) + \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{ua_u + va_v}{u^2 + v^2} \right\}, \\ \Delta \phi &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}, \\ \text{rot}_u a &= \frac{1}{v \sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial v} (va_\varphi) - \frac{1}{uv} \frac{\partial a_v}{\partial \varphi}, \\ \text{rot}_v a &= \frac{1}{uv} \frac{\partial a_u}{\partial \varphi} - \frac{1}{u \sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial u} (ua_\varphi), \\ \text{rot}_\varphi a &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left\{ \left(\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v} \right) + \frac{ua_v - va_u}{u^2 + v^2} \right\}. \end{aligned}$$

γ) Координаты вытянутого эллипсоида вращения (софокусные двуполостные u -гиперboloиды вращения и вытянутые v -эллипсоиды вращения).

$$u + iv = \arcsin \frac{z + i\rho}{\alpha},$$

$$\sin u = \frac{s_1 - s_2}{2\alpha}, \quad \text{ch } v = \frac{s_1 + s_2}{2\alpha}, \quad \varphi = \text{arctg } \frac{y}{x},$$

где $s_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \alpha)^2}$, $s_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2}$ — расстояния точки x, y, z от фокусов, лежащих на оси z в точках $z_1 = -\alpha$ и $z_2 = +\alpha$.

$$x = \alpha \cos u \text{ sh } v \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq +\frac{\pi}{2},$$

$$y = \alpha \cos u \text{ sh } v \sin \varphi, \quad 0 \leq v < \infty,$$

$$z = \alpha \sin u \text{ ch } v, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha \cos u \text{ sh } v.$$

Линейный элемент:

$$ds^2 = \alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) (du^2 + dv^2) + \alpha^2 \cos^2 u \operatorname{sh}^2 v d\varphi^2.$$

$$D = \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)} = \frac{1}{s_1 s_2}.$$

Элемент объема: $dV = \alpha^3 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) \cos u \operatorname{sh} v du dv d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \sin \delta + a_z \cos \delta, \\ a_v &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \cos \delta - a_z \sin \delta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{с вспомогательным углом } \delta: \\ \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} u \operatorname{th} v, \end{array}$$

$$a_\varphi = -a_x \frac{y}{\rho} + a_y \frac{x}{\rho},$$

$$a_x = \left(\frac{-a_u \sin u \operatorname{sh} v + a_v \cos u \operatorname{ch} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \right) \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi,$$

$$a_y = \left(\frac{-a_u \sin u \operatorname{sh} v + a_v \cos u \operatorname{ch} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \right) \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi,$$

$$a_z = \frac{a_u \cos u \operatorname{ch} v + a_v \sin u \operatorname{sh} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}}.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u \psi = \frac{1}{\alpha \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v \psi = \frac{1}{\alpha \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\operatorname{grad}_\varphi \psi = \frac{1}{\alpha \cos u \operatorname{sh} v} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)} \left\{ \frac{1}{\cos u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\cos u \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\operatorname{sh} v \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} + \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u \operatorname{sh}^2 v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

В литературе часто применяется подстановка $\xi = \sin u$, $\eta = \operatorname{ch} v$.

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$, полагая $\alpha \operatorname{ch} v = r$, получаем сферические координаты r, θ, φ с $\theta = \frac{\pi}{2} - u$.

В пределе при $\alpha \rightarrow \infty$, полагая $z = \alpha \sin u$, $\rho = \alpha \operatorname{sh} v$, получаем круговые цилиндрические координаты ρ, φ, z .

д) Координаты сплющенного эллипсоида вращения (софокусные однополостные u -гиперboloиды вращения и сплющенные v -эллипсоиды вращения).

$$u + iv = \arcsin \frac{\rho + iz}{\alpha},$$

$$\sin u = \frac{s_1 - s_2}{2\alpha}, \quad \operatorname{ch} v = \frac{s_1 + s_2}{2\alpha}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

где $s_1 = \sqrt{z^2 + (\rho + \alpha)^2}$, $s_2 = \sqrt{z^2 + (\rho - \alpha)^2}$ представляют собой соответственно наибольшее и наименьшее расстояние от точки x, y, z до окружности радиуса α с центром в начале координат, лежащей в x, y -плоскости. (При отрицательном z следует для s_1 и s_2 брать отрицательные значения!)

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sin u \operatorname{ch} v \cos \varphi, & 0 \leq u \leq \pi, \\ y &= \alpha \sin u \operatorname{ch} v \sin \varphi, & 0 \leq v < \infty, \\ z &= \alpha \cos u \operatorname{sh} v, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha \sin u \operatorname{ch} v. \end{aligned}$$

Линейный элемент:

$$ds^2 = \alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) (du^2 + dv^2) + \alpha^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 v d\varphi^2.$$

$$D = \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)}.$$

Элемент объема: $dV = \alpha^3 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u) \sin u \operatorname{ch} v du dv d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \cos \delta - a_z \sin \delta, \\ a_v &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \sin \delta + a_z \cos \delta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{с вспомогательным углом } \delta: \\ \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} u \operatorname{th} v, \end{array}$$

$$a_\varphi = -a_x \frac{y}{\rho} + a_y \frac{x}{\rho},$$

$$a_x = \left(\frac{a_u \cos u \operatorname{ch} v + a_v \sin u \operatorname{sh} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \right) \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi,$$

$$a_y = \left(\frac{a_u \cos u \operatorname{ch} v + a_v \sin u \operatorname{sh} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}} \right) \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi,$$

$$a_z = \frac{-a_u \sin u \operatorname{sh} v + a_v \cos u \operatorname{ch} v}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u}}.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\Delta \psi = \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)} \left\{ \frac{1}{\sin u} \frac{\partial}{\partial u} \sin u \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{ch} v} \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{ch} v \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 u \operatorname{ch}^2 v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

В литературе часто полагают $\xi = \cos u$, $\eta = \operatorname{sh} v$.

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$, полагая $\alpha \operatorname{ch} v = r$, получаем сферические координаты r , θ , φ с $\theta = u$.

В пределе при $\alpha \rightarrow \infty$, полагая $\rho = \alpha \sin u$, $z = \alpha \operatorname{sh} v$, получаем круговые цилиндрические координаты ρ , φ , z .

е) *Торидальные координаты* (семейство u -торов и семейство сферических v -сегментов, соответственно заключающих внутри себя и проходящих через окружность радиуса α с центром в начале координат, лежащую в x , y -плоскости).

$$u + iv = \ln \frac{\alpha + \rho + iz}{\alpha - \rho - iz} = 2 \operatorname{Arth} \frac{\rho + iz}{\alpha},$$

$$\operatorname{th} u = \frac{2\alpha\rho}{\alpha^2 + \rho^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{2\alpha z}{\alpha^2 - \rho^2 - z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

(e^u представляет собой отношение $\frac{s_1}{s_2}$ наибольшего расстояния s_1 точки x , y , z от «базисной окружности» к наименьшему расстоянию s_2 ; $\pi - v$ есть наименьший из углов, под которыми виден диаметр базисной окружности).

$$x = \frac{\alpha \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \cos \varphi, \quad 0 \leq u < \infty,$$

$$y = \frac{\alpha \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \sin \varphi, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

$$z = \frac{\alpha \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\rho = \frac{\alpha \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}.$$

Поверхности $u = \operatorname{const}$ — торы, производящий круг которых принадлежит системе биполярных плоских координат. Поверхности $v = \operatorname{const}$ представляют собой сферические сегменты, проходящие через базисную окружность (см. стр. 269—270).

Линейный элемент: $ds^2 = \frac{\alpha^2}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} \{ du^2 + dv^2 + d\varphi^2 \operatorname{sh}^2 u \}$.

$$D = \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2}.$$

Элемент объема: $dV = \frac{\alpha^2 \operatorname{sh} u}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} du dv d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \cos \delta - a_z \sin \delta, \\ a_v &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \sin \delta + a_z \cos \delta \end{aligned} \right\} \text{ с вспомогательным углом } \delta:$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2xy}{(a^2 - x^2 + y^2)},$$

$$a_\varphi = -a_x \frac{y}{\rho} + a_y \frac{x}{\rho},$$

$$\begin{aligned} a_x &= \left\{ \frac{a_u (1 + \operatorname{ch} u \cos v) + a_v \operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right\} \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \\ a_y &= \left\{ \frac{a_u (1 + \operatorname{ch} u \cos v) + a_v \operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right\} \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi, \\ a_z &= \frac{-a_u \operatorname{sh} u \sin v + a_v (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{\operatorname{ch} u + \cos v}. \end{aligned}$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2 \operatorname{sh} u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} + \\ &+ \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{D}{V \rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) \right\} (\psi \sqrt{\rho}). \end{aligned}$$

В литературе применяется также подстановка: $\xi = e^{-u}$, $\eta = \pi - v$.

ζ) Пространственные биполярные координаты.

$$\begin{aligned} u + iv &= \ln \frac{\alpha + z + i\rho}{\alpha - z - i\rho} = 2 \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{z + i\rho}{\alpha}, \\ \operatorname{th} u &= \frac{2\alpha z}{\alpha^2 + \rho^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{2\alpha\rho}{\alpha^2 + \rho^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

(e^u представляет собой отношение расстояний $\frac{s_1}{s_2}$ точки x, y, z от полюсов, лежащих на оси z в точках $z_1 = -\alpha$ и $z_2 = +\alpha$; $\pi - v$ есть угол, под которым из точки x, y, z виден отрезок 2α , соединяющий полюсы).

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \cos \varphi, & -\infty < u < +\infty, \\ y &= \frac{\alpha \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \sin \varphi, & 0 \leq v \leq \pi, \\ z &= \frac{\alpha \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \rho &= \frac{\alpha \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}. \end{aligned}$$

$u = \text{const}$: сферы с радиусом $R_u = \left| \frac{\alpha}{\operatorname{sh} u} \right|$ и центром в точке $x = y = 0$, $z = \frac{\alpha}{\operatorname{th} u}$.

$v = \text{const}$: поверхности, образованные вращением круговых дуг, проходящих через полюсы, с радиусом $R_v = \frac{\alpha}{\sin v}$ и центром в точке $\rho = \left| \frac{\alpha}{\operatorname{tg} v} \right|$, $z = 0$.

Линейный элемент: $ds^2 = \frac{\alpha^2}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} \{ du^2 + dv^2 + d\varphi^2 \sin^2 v \}$.

$$D = \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2}.$$

Элемент объема: $dV = \frac{\alpha^2 \sin v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} du dv d\varphi$.

Натуральные векторные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= - \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \sin \delta + a_z \cos \delta, \\ a_v &= \left(a_x \frac{x}{\rho} + a_y \frac{y}{\rho} \right) \cos \delta + a_z \sin \delta \end{aligned} \right\} \text{ с вспомогательным углом } \delta: \\ a_\varphi &= - a_x \frac{y}{\rho} + a_y \frac{x}{\rho}, \\ a_x &= \left\{ \frac{- a_u \operatorname{sh} u \sin v + a_v (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right\} \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi, \\ a_y &= \left\{ \frac{- a_u \operatorname{sh} u \sin v + a_v (1 + \operatorname{ch} u \cos v)}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right\} \sin \varphi + a_\varphi \cos \varphi, \\ a_z &= \frac{a_u (1 + \operatorname{ch} u \cos v) + a_v \operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}.$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\rho z}{(\alpha^2 - z^2 + \rho^2)},$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\Delta\psi = \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2 \sin v} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} + \\ + \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}{\alpha^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2},$$

или, в более удобной записи:

$$\Delta\psi = \frac{D}{V\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{1}{\sin^2 v} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) \right\} (\psi \sqrt{\rho}).$$

По аналогии с тороидальными координатами здесь также можно применить подстановку:

$$\xi = e^{-u}, \quad \eta = \pi - v.$$

4. Конические координаты r, u, v

Их получают при помощи стереографической проекции, проектируя двумерную ортогональную систему координат u, v на сферу радиуса 1 и присоединяя радиальную координату r , т. е. при помощи соотношений

$$\frac{x + iy}{r + z} = f(u + iv), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

или, в явном виде:

$$x + iy = \frac{2r}{1 + |f|^2} f(u + iv), \quad z = r \frac{1 - |f|^2}{1 + |f|^2}.$$

Тогда получим:

$$ds^2 = dr^2 + \frac{4r^2 |f'|^2}{(1 + |f|^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Отсюда можно получить, например, сферические координаты (r, θ, φ) , взяв $f(u + iv) = e^{u+iv}$, $\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$, $\varphi = v$.

Специальная система *эллиптических конических координат* возникает, когда в качестве f берут подходящим образом выбранный эллиптический интеграл. Ее можно получить более удобным путем как один из случаев вырождения общих эллипсоидальных координат (см. стр. 284). Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned}x &= r \frac{\mu\nu}{k}; & y &= \frac{z}{k \sqrt{1-k^2}} \sqrt{(k^2 - \mu^2)(\nu^2 - k^2)}; \\z &= \frac{r}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)}; \\ds^2 &= dr^2 + r^2(\nu^2 - \mu^2) \left(\frac{d\mu^2}{(1-\mu^2)(k^2 - \mu^2)} + \frac{d\nu^2}{(1-\nu^2)(\nu^2 - k^2)} \right).\end{aligned}$$

Б. Общие эллипсоидальные координаты¹⁾

Если вместо двумерных эллиптических координат u, v (см. стр. 268) взять величины $\lambda_1 = a \sin u$ и $\lambda_2 = a \operatorname{ch} v$, где $\lambda_2 > a > \lambda_1 > 0$, то оба значения λ будут удовлетворять одному и тому же уравнению

$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - a^2} = 1$. Поэтому при определении эллиптических координат можно исходить из этого уравнения. Для u и v получается более удобное представление в виде

$$\begin{aligned}u &= \arcsin \frac{\lambda_1}{a} = \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}, \\v &= \operatorname{Ar ch} \frac{\lambda_2}{a} = \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}.\end{aligned}$$

В случае трех измерений поступают аналогичным образом.

Уравнение

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

определяет некоторую поверхность второго порядка. Без ограничения общности можно считать, что

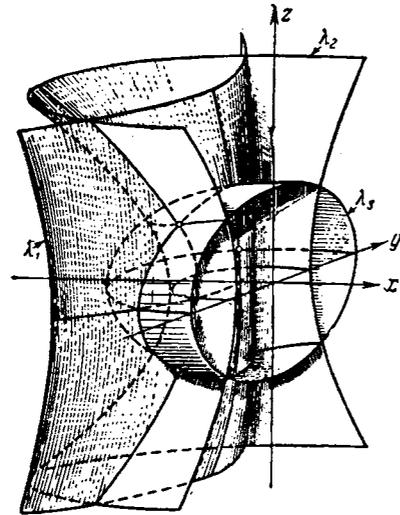


Рис. 26. Эллипсоидальные координаты.

здесь $a = 0$ и $c > b$. Если заставить λ изменяться от ∞ до c , то при этом получим семейство софокусных эллипсоидов, заполняющее

¹⁾ Их часто называют также эллиптическими координатами в пространстве. (Прим. ред.)

все пространство. Аналогичным образом, при $c > \lambda > b$ (соответственно $b > \lambda > 0$), получим аналогичное семейство однополостных (соответственно двуполостных) гиперboloидов. Эти три семейства поверхностей попарно ортогональны.

Если выбрать три различных значения λ , удовлетворяющих условию $\lambda_3 > c > \lambda_2 > b > \lambda_1 > 0$, и положить:

$$\frac{\lambda_1}{c} = \mu, \quad \frac{\lambda_2}{c} = \nu, \quad \frac{\lambda_3}{c} = \lambda, \quad k = \frac{b}{c} < 1,$$

так что $\lambda > 1 > \nu > k > \mu > 0$, то для декартовых координат x, y, z точки пересечения поверхностей, определяемых значениями μ, ν, λ (рис. 26), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{c}{k} \mu \nu \lambda, \\ y &= \pm \frac{c}{k} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{(k^2-\mu^2)(\nu^2-k^2)(\lambda^2-k^2)}, \\ z &= \pm c \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)(\lambda^2-1)}, \end{aligned}$$

т. е. значения μ, ν, λ определяют x, y, z с точностью до знака. Числа μ, ν, λ называются *общими эллипсоидальными координатами* с параметрами k и c .

Линейный элемент в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2 d\mu^2 (\lambda^2 - \mu^2) (\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \mu^2) (k^2 - \mu^2)} + \frac{c^2 d\nu^2 (\lambda^2 - \nu^2) (\nu^2 - \mu^2)}{(1 - \nu^2) (\nu^2 - k^2)} + \frac{c^2 d\lambda^2 (\lambda^2 - \mu^2) (\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - 1) (\lambda^2 - k^2)}.$$

Отсюда получаются выражения для $g_{ii} = e_i^2$. В частности, находим:

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{1}{(\lambda^2 - \nu^2) (\lambda^2 - \mu^2) (\nu^2 - \mu^2)} \left\{ (\lambda^2 - \nu^2) A \frac{\partial}{\partial \mu} \left(A \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right) + \right. \\ \left. + (\lambda^2 - \mu^2) B \frac{\partial}{\partial \nu} \left(B \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) + (\nu^2 - \mu^2) C \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(C \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) \right\},$$

где

$$A^2 = (1 - \mu^2) (k^2 - \mu^2), \quad B^2 = (1 - \nu^2) (\nu^2 - k^2), \quad C^2 = (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 - k^2).$$

Если положить

$$\phi = M(\mu) N(\nu) \Lambda(\lambda),$$

то уравнение $\Delta\phi + \alpha^2 \phi = 0$ распадется на три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} A \frac{d}{d\mu} \left(A \frac{dM}{d\mu} \right) + c^2 (\alpha^2 \mu^4 + \alpha \mu^2 + \beta) M &= 0, \\ B \frac{d}{d\nu} \left(B \frac{dN}{d\nu} \right) + c^2 (\alpha^2 \nu^4 + \alpha \nu^2 + \beta) N &= 0, \\ C \frac{d}{d\lambda} \left(C \frac{d\Lambda}{d\lambda} \right) + c^2 (\alpha^2 \lambda^4 + \alpha \lambda^2 + \beta) \Lambda &= 0, \end{aligned}$$

с постоянными деления α и β . Эти уравнения представляют собой три так называемых *дифференциальных уравнения Ламе*.

Введение новых независимых переменных

$$d\alpha = \frac{d\mu}{A(\mu)}, \quad d\beta = \frac{d\nu}{B(\nu)}, \quad d\gamma = \frac{d\lambda}{C(\lambda)}$$

ведет, очевидно, к дальнейшим упрощениям. Эти переменные представляют собой эллиптические интегралы от исходных переменных.

Вместо μ , ν , λ поэтому используются также координаты θ , φ , ψ или α , β , γ , определяемые посредством соотношений:

$$\begin{aligned} \mu &= k \sin \theta, & \nu &= \sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}, & \lambda &= \frac{1}{\cos \psi}, \\ \alpha &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)}}, \\ \beta &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cos^2 \varphi}} = \int_k^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(1 - \nu^2)(\nu^2 - k^2)}}, \\ \gamma &= \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = \int_1^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - k^2)}}. \end{aligned}$$

Важное свойство этих α , β , γ состоит в том, что всякая функция, линейная относительно каждого из этих переменных, $F(\alpha, \beta, \gamma) = c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{12}\alpha\beta + \dots + c_{123}\alpha\beta\gamma$, удовлетворяет уравнению $\Delta F = 0$.

Общие эллипсоидальные системы координат вырождаются в более простые (рассмотренные выше) системы, если c или k или они оба стремятся к пределам ∞ и 0 , соответственно 1 и 0 . Координаты при этом следует в зависимости от надобности преобразовать так, чтобы они изменялись в свойственной им области. Имеются следующие случаи вырождения:

1) $c \rightarrow \infty$. Будем иметь: $\mu \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow k$, $\lambda \rightarrow 1$.

Преобразование $c\mu = x$, $c\sqrt{\nu^2 - k^2} = y$, $c\sqrt{\lambda^2 - 1} = z$ дает декартову систему x , y , z .

2) $c \rightarrow 0$. Будем иметь: $\lambda \rightarrow \infty$.

Преобразование $c\lambda = r$ дает систему эллиптических конических координат r , μ , ν .

3) $k \rightarrow 1$. Будем иметь: $\nu \rightarrow 1$.

Преобразование $\sqrt{\frac{1 - \nu^2}{1 - k^2}} = \cos \varphi$ дает систему координат μ , λ , φ эллипсоида вращения с осью x в качестве оси вращения.

4) $k \rightarrow 0$. Будем иметь: $\mu \rightarrow 0$.

Преобразование $\frac{\mu}{k} = \sin \varphi$ дает ту же систему, что и 3), с переменными ν, λ, φ и осью z в качестве оси вращения.

5) $c \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 1$. Будем иметь: $\mu \rightarrow 0, \nu \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 1$.

Преобразование $c\mu = x, \sqrt{\frac{1-\nu^2}{1-k^2}} = \sigma, \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-k^2}} = \tau$ дает систему эллиптических цилиндрических координат x, σ, τ с осью x в качестве оси вращения.

6) $c \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$. Будем иметь: $\mu \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1$.

Преобразование $\frac{\mu}{k} = \sigma, \frac{\nu}{k} = \tau, c\sqrt{\lambda^2-1} = z$ дает ту же систему, что и 5), с переменными z, σ, τ и осью z в качестве оси вращения.

6*) как 6) при $kc \rightarrow 0$.

Преобразование $\frac{\mu}{k} = \sin \varphi, c\nu = \rho, c\sqrt{\lambda^2-1} = z$ дает систему круговых цилиндрических координат z, ρ, φ .

7) $c \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 1$. Будем иметь: $\nu \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \infty$.

Преобразование $\mu = \sin \theta, \sqrt{\frac{1-\nu^2}{1-k^2}} = \cos \varphi, c\lambda = r$ дает сферические координаты r, θ, φ с осью x в качестве оси вращения.

С. N-МЕРНЫЕ ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

$$r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}.$$

Эти координаты являются ортогональными и связаны с декартовыми координатами x_i соотношениями:

$$x_1 = r \cos \theta_1,$$

$$x_i = r \cos \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \sin \theta_j \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, N-1$$

и

$$x_N = r \prod_{j=1}^{N-1} \sin \theta_j.$$

Область изменения координат: $0 \leq r < \infty; 0 \leq \theta_i \leq \pi$ при $i = 1, 2, \dots, N-2; 0 \leq \theta_{N-1} < 2\pi$.

Имеет место равенство $\sum_{i=1}^N x_i^2 = r^2$. При $N = 2$ и $N = 3$ получают соответственно плоские полярные координаты и сферические координаты.

Линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta_1^2 + r^2 \sum_{j=2}^{N-1} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_k d\theta_j^2,$$

так что $e_1 = 1$, $e_2 = r$, $e_i = r \prod_{j=1}^{i-2} \sin \theta_j$ при $i = 3, 4, \dots, N$, и элемент объема:

$$dV = r^{N-1} dr \prod_{j=1}^{N-1} (\sin \theta_j)^{N-1-j} d\theta_j.$$

Дифференциальный оператор Лапласа имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{(N-1)}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1^2} + (N-2) \operatorname{ctg} \theta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right\} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_2^2} + (N-3) \operatorname{ctg} \theta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \right\} + \dots \\ \dots + \frac{1}{r^2 \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i^2} + (N-1-i) \operatorname{ctg} \theta_i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \right\} + \dots \\ \dots + \frac{1}{r^2 \prod_{j=1}^{N-2} \sin^2 \theta_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_{N-1}^2}. \end{aligned}$$

Так, например, при $N=5$, полагая $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \beta$, $\theta_3 = \gamma$, $\theta_4 = \delta$, будем иметь:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha, \\ x_2 &= r \sin \alpha \cos \beta, \\ x_3 &= r \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ x_4 &= r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta, \\ x_5 &= r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta, \end{aligned}$$

где $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ и $0 \leq \delta < 2\pi$.

Далее:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + r^2 (\sin^2 \alpha d\beta^2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta d\gamma^2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma d\delta^2);$$

$$e_1 = 1, e_2 = r, e_3 = r \sin \alpha, e_4 = r \sin \alpha \sin \beta, e_5 = r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$dV = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 dr d\alpha d\beta d\gamma d\delta = r^4 dr \sin^3 \alpha d\alpha \sin^2 \beta d\beta \sin \gamma d\gamma d\delta$$

и

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + 3 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right\} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + 2 \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right\} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} + \operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \delta^2}. \end{aligned}$$

Для объема N -мерного шара радиуса R получим:

$$V_{(N)} = \int dV = \frac{2\pi}{N} R^N S_{(1)} S_{(2)} \dots S_{(N-2)}, \text{ где } S_{(k)} = \int_0^\pi \sin^k \theta d\theta,$$

то есть

$$V_{(N)} = \begin{cases} \frac{\pi^\nu R^N}{\nu!} & \text{при } N = 2\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \\ \frac{\pi^\nu \nu! 2^N R^N}{N!} & \text{при } N = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Поверхность n -мерной сферы равна $O_{(N)} = \frac{N}{R} V_{(N)}$. Числовые значения даются следующей таблицей.

N	$O_{(N)}$	$V_{(N)}$
2	$2\pi R$	πR^2
3	$4\pi R^2$	$\frac{4\pi}{3} R^3$
4	$2\pi^2 R^3$	$\frac{\pi^2}{2} R^4$
5	$\frac{8\pi^2}{3} R^4$	$\frac{8\pi^2}{15} R^5$
6	$\pi^3 R^5$	$\frac{\pi^3}{6} R^6$
7	$\frac{16}{15} \pi^3 R^6$	$\frac{16}{105} \pi^3 R^7$
8	$\frac{\pi^4}{3} R^7$	$\frac{\pi^4}{24} R^8$
9	$\frac{32}{105} \pi^4 R^8$	$\frac{32}{945} \pi^4 R^9$
10	$\frac{\pi^5}{12} R^9$	$\frac{\pi^5}{120} R^{10}$
(10)	$\left(\frac{\pi^5}{11,802} R^9\right)$	$\left(\frac{\pi^5}{118,02} R^{10}\right)$ (Вычислено при помощи приближенной формулы для $N \gg 1$)
$N \gg 1$	$\sqrt{\frac{N}{\pi}} \left(\frac{2\pi e}{N}\right)^{\frac{N}{2}} R^{N-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi N}} \left(\frac{2\pi e}{N}\right)^{\frac{N}{2}} R^N$ (Асимптотические формулы)

РАЗДЕЛ ДЕВЯТЫЙ ТЕОРИЯ ГРУПП

А. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

1. Группы

а) Совокупность (множество) \mathfrak{G} конечного или бесконечного числа отличных друг от друга математических объектов (см. стр. 19), *элементов*, называется конечной, соответственно бесконечной, *группой*, если выполнены следующие так называемые *групповые аксиомы*:

I. Существует *закон композиции* (т. е. определена операция), который каждой (упорядоченной) паре элементов A, B из \mathfrak{G} ставит однозначным образом в соответствие определенный элемент $C = AB$ из \mathfrak{G} ; элементы AB и BA , вообще говоря, различны.

II. Для упомянутой в I операции справедлив *ассоциативный закон*: имеем $(AB)C = A(BC) = ABC$ для произвольных A, B, C из \mathfrak{G} .

III. Для двух произвольных элементов A, B из \mathfrak{G} всегда существуют однозначно определенные элементы X и Y из \mathfrak{G} такие, что $AX = B, YA = B$ (закон однозначного и неограниченно выполнимого *правого* и *левого* деления); X называется *правым*, Y — *левым частным* при делении B на A .

Аксиома III равнозначна аксиоме

III'. В группе \mathfrak{G} существуют: 1) (*левый*) *единичный элемент* E такой, что $EA = A$ для произвольного A из \mathfrak{G} , 2) для каждого A (*левый*) *обратный элемент* A^{-1} такой, что $A^{-1}A = E$ (см. также с)).

б) Число g элементов группы (конечное или бесконечное) называется *порядком* группы; операция обычно называется умножением, хотя роль группового умножения может играть любая другая подходящая операция, например сложение. Если коммутативный закон $AB = BA$ справедлив для произвольных A, B из \mathfrak{G} , то \mathfrak{G} называется *абелевой группой*.

Примеры. Группу образуют, например, перестановки n предметов (для всякой конечной группы существует изоморфная ей (см. 1е) группа перестановок¹⁾). Все целые числа (так же, как и все числовые

¹⁾ Мы сохраняем здесь терминологию автора (Permutation). В русской литературе употребляется термин «группа подстановок». (*Прим. ред.*)

матрицы с m строками и n столбцами) образуют абелеву группу по отношению к сложению как групповой операции; положительные рациональные числа образуют абелеву группу относительно умножения. Вращения, переводящие правильное тело в себя, как и линейные (или только ортогональные) преобразования n -мерного пространства в себя, образуют группу (операция: последовательное выполнение). Группа может быть также определена при помощи чисто формальных правил оперирования (см. пример в Приложении 7, стр. 576).

с) Всегда имеем $AB \neq AC$ и $BA \neq CA$, если $B \neq C$. Если B пробегает все элементы \mathfrak{G} , то при фиксированном A также AB , BA и B^{-1} будут пробегать все элементы группы \mathfrak{G} , причем в каждом из этих случаев каждый элемент встретится ровно один раз.

д) Среднее значение. Пусть функция $F(A)$ определена для произвольного элемента A группы \mathfrak{G} (функция на группе), т. е. пусть каждому элементу A поставлено в соответствие определенное числовое значение $F(A)$. Если группа \mathfrak{G} конечна и состоит из элементов A_1, \dots, A_g , то величина

$$\frac{1}{g} \sum_{v=1}^g F(A_v) \equiv \frac{1}{g} \sum_A F(A) = \mathbf{M}_A(F(A))$$

называется *средним значением* функции $F(A)$ на \mathfrak{G} . Имеем:

$$\mathbf{M}_A(F(A)) = \mathbf{M}_A(F(SA)) = \mathbf{M}_A(F(AS)) = \mathbf{M}_A(F(A^{-1}))$$

для каждого S из \mathfrak{G} .

е) Изоморфизм. Говорят, что группа \mathfrak{G} *гомоморфно* отображена на группу \mathfrak{G}' , если каждому элементу группы \mathfrak{G} однозначно поставлен в соответствие определенный элемент группы \mathfrak{G}' таким образом, что произведению двух элементов из \mathfrak{G} соответствует произведение соответствующих элементов из \mathfrak{G}' . Если это соответствие *взаимно однозначно*, т. е. если группа \mathfrak{G}' также гомоморфно отображается на группу \mathfrak{G} , то группы \mathfrak{G} и \mathfrak{G}' называются (взаимно) *изоморфными* (см. также 3с)).

2. Подгруппы

а) Всякое подмножество \mathfrak{H} группы \mathfrak{G} , которое само по себе уже образует группу, называется *подгруппой* группы \mathfrak{G} .

Если \mathfrak{G} представляет собой конечную группу порядка g , то порядок h всякой ее подгруппы \mathfrak{H} является *делителем* g : $g = hj$; число j называется *индексом* \mathfrak{H} относительно \mathfrak{G} (пример см. в Приложении 7, стр. 576).

Каждая группа содержит в качестве (*несобственных*) подгрупп себя самое и *единичную* подгруппу, состоящую только из E . Прочие подгруппы называются *истинными*, или *собственными*.

б) Если среди «степеней» $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA, \dots$ элемента A группы \mathfrak{G} две равны между собой, то существует наименьшее натуральное число k такое, что $A^k = E$; это число k называется *порядком элемента A* и является делителем g .

Группа, все элементы которой являются степенями одного и того же элемента, называется *циклической* и является абелевой группой.

с) Разложение по подгруппе. Если $A_1 = E$, A_2, \dots, A_h — элементы подгруппы \mathfrak{H} группы \mathfrak{G} , B — произвольный элемент из \mathfrak{G} , то элементы

$$BA_l \quad (l=1, 2, \dots, h)$$

образуют левый смежный класс, или класс вычетов, $B\mathfrak{H}$, а

$$A_l B \quad (l=1, 2, \dots, h)$$

образуют правый смежный класс (класс вычетов $\mathfrak{H}B$) группы \mathfrak{G} по подгруппе \mathfrak{H} .

Подгруппа \mathfrak{H} сама является как левым, так и правым смежным классом. Смежные классы, отличные от \mathfrak{H} , не являются группами.

д) Прямое произведение. Группа \mathfrak{G} называется *прямым произведением* двух подгрупп \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G}_2 : $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$, если каждый элемент \mathfrak{G}_1 перестановочен с каждым элементом \mathfrak{G}_2 и каждый элемент \mathfrak{G} может быть единственным образом представлен в виде произведения элемента \mathfrak{G}_1 на элемент \mathfrak{G}_2 ; порядок \mathfrak{G} равен, следовательно, произведению порядков \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G}_2 .

Пример. Трехмерная полная ортогональная группа \mathfrak{D}'_3 , состоящая из всех вращений и зеркальных поворотов в трехмерном пространстве (см. также С4), является прямым произведением группы вращений \mathfrak{D}_3 и группы, состоящей из покоя (тождественного преобразования) E и отражения S относительно нулевой точки. Всегда можно (абстрактно) построить группу, являющуюся прямым произведением двух произвольно заданных групп.

3. Преобразование, нормальный делитель

а) Сопряженные элементы. Если T и A — элементы группы \mathfrak{G} , то элемент $B = T^{-1}AT$ называется элементом, полученным из A преобразованием с помощью T . Элемент B называется *сопряженным* с элементом A ; имеем $A = TBT^{-1}$, и, следовательно, элемент A также является сопряженным с элементом B . Если элемент A сопряжен с элементами B и C , то сопряжены также элементы B и C . Элементы, сопряженные друг с другом, образуют класс сопряженных элементов (*класс*). Если T пробегает все элементы \mathfrak{G} , то произведение $T^{-1}AT$ представляет все элементы класса, к которому принадлежит A (все элементы при этом появляются одинаково часто). Группа \mathfrak{G} полностью распадается на классы сопряженных между собой элементов, каждый элемент \mathfrak{G} принадлежит к одному и только одному классу. Класс

элементов, сопряженных с E , содержит только сам элемент E . В абелевой группе каждый элемент сам по себе образует класс.

Элементы, принадлежащие к одному и тому же классу, имеют один и тот же порядок. Элемент, обратный элементу, сопряженному с A , является сопряженным с элементом A^{-1} .

б) Сопряженные подгруппы, нормальный делитель. Элементы, полученные из элементов некоторой подгруппы \mathfrak{H} группы \mathfrak{G} преобразованием при помощи фиксированного элемента T из \mathfrak{G} , также образуют подгруппу $T^{-1}\mathfrak{H}T$ — одну из подгрупп, сопряженных с \mathfrak{H} . Сопряженные подгруппы изоморфны. Если подгруппа \mathfrak{H} совпадает со всеми своими сопряженными, т. е. содержит все элементы, сопряженные с любым ее элементом, то \mathfrak{H} называется *инвариантной подгруппой*, или *нормальным делителем* (см. пример в Приложении 7, стр. 576). Подгруппа является нормальным делителем в том и только в том случае, когда она вместе с каждым своим элементом содержит весь класс элементов, сопряженных с ним. Подгруппа индекса 2 всегда является нормальным делителем. Если группа абелева, то нормальным делителем служит всякая подгруппа.

с) Факторгруппа. Всякий правый смежный класс $\mathfrak{H}B$ по нормальному делителю \mathfrak{H} является в то же время левым смежным классом $C\mathfrak{H}$. Смежные классы по нормальному делителю \mathfrak{H} вместе с ним образуют *факторгруппу* $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, если произведением смежных классов $A\mathfrak{H}$ и $B\mathfrak{H}$ считать смежный класс $AB\mathfrak{H}$. Элементами факторгруппы служат, таким образом, некоторый нормальный делитель и его смежные классы (см. пример в Приложении 7). Порядок факторгруппы равен индексу нормального делителя. Если группа \mathfrak{G} абелева, то абелевой будет и всякая ее факторгруппа.

Если каждому элементу группы \mathfrak{G} поставить в соответствие его смежный класс по некоторому нормальному делителю, то группа \mathfrak{G} гомоморфно отобразится на соответствующую факторгруппу. Обратно, всякая группа \mathfrak{G}' , на которую группа \mathfrak{G} может быть гомоморфно отображена, изоморфна некоторой факторгруппе группы \mathfrak{G} .

В. НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

а) Если элементы A группы \mathfrak{G} могут быть однозначно охарактеризованы n параметрами a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$A = A(a_1, \dots, a_n) = \{a_1, \dots, a_n\},$$

изменяющимися непрерывно в некоторой области (причем параметры произведения и обратного элемента зависят непрерывно дифференцируемым образом от параметров исходных элементов), то \mathfrak{G} называется *непрерывной группой*. При этом связь между параметрами произведения:

$$BA = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

элемента A на элемент $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ устанавливается соотношениями вида

$$p_k = p_k(b_1, b_2, \dots, b_n; a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Если число n параметров конечно, то \mathfrak{G} называется *конечно непрерывной* (n -параметрической) группой; если же параметров имеется бесконечное счетное множество, то \mathfrak{G} называется *бесконечной непрерывной* группой. Далее, группа \mathfrak{G} называется *связной непрерывной*, если область, в которой могут изменяться параметры, — так называемая основная область G — является связной, и *смешанной непрерывной*, если G состоит из нескольких (возможно, из счетного множества) разобщенных частичных областей G_1, G_2, \dots .

Примеры. Действительные ортогональные преобразования n -мерного пространства с $\det \mathfrak{D} = +1$ образуют связную непрерывную, с $\det \mathfrak{D} = \pm 1$ — смешанную непрерывную $\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)$ -параметрическую) группу. Ортогональные матрицы, элементами которых служат рациональные числа, образуют бесконечную группу, но не непрерывную группу.

б) Элементы, параметры которых имеют мало отличающиеся значения, называются *соседними*. Элемент *изменяется непрерывно*, если характеризующие его параметры изменяются непрерывно.

Элементы смешанной непрерывной группы \mathfrak{G} , принадлежащие той частичной области (назовем ее G_1) основной области G , которая содержит единственный элемент, образуют связную непрерывную подгруппу группы \mathfrak{G} — ее нормальный делитель. Элементы какой-либо иной частичной области G_r области G образуют смежный класс по этому нормальному делителю; индекс этого нормального делителя равен числу частичных областей G_r основной области G .

с) Среднее значение. Образует функциональный определитель

$$g(A) = g(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial(p_1(BA), \dots, p_n(BA))}{\partial(a_1, \dots, a_n)},$$

в котором (после дифференцирования) положим $B = A^{-1}$ и $dA = g(a_1, \dots, a_n) da_1 \dots da_n$. Среднему значению $\frac{1}{g} \sum_A F(A)$ для конечных групп будет тогда соответствовать *среднее значение* $F(A)$ на *непрерывной* группе \mathfrak{G}

$$M_{\mathfrak{G}}(F(A)) = \int_A F(A) dA / \int_{\mathfrak{G}} dA.$$

Этим выражением всегда следует заменять выражение $\frac{1}{g} \sum_A F(A)$ в случае, когда речь идет о непрерывной группе. Функция $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$

при образовании среднего значения по a_1, a_2, \dots, a_n играет, таким образом, роль весовой функции (см. стр. 396).

Для группы вращений действительного трехмерного пространства (см. стр. 189) будем иметь:

$$A = \{u_x u_y u_z\}, \quad B = \{v_x v_y v_z\}, \quad AB = \{w_x w_y w_z\}.$$

При этом получим: $g(u_x u_y u_z) = \frac{1}{(1+u^2)^2}$.

С. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1. Общие сведения относительно представлений группы

а) Всякая группа \mathfrak{M} *конечных* квадратных матриц (или линейных подстановок) с *не равным нулю* определителем, на которую может быть гомоморфно отображена (см. А1е) данная абстрактная группа \mathfrak{G} , называется *представлением* группы \mathfrak{G} . Каждому элементу A группы \mathfrak{G} при этом однозначно соответствует матрица $\mathfrak{M}(A) = (m_{ik}(A))$ группы \mathfrak{M} таким образом, что произведению AB двух элементов A и B из \mathfrak{G} соответствует произведение матриц, соответствующих этим элементам: $\mathfrak{M}(A)\mathfrak{M}(B) = \mathfrak{M}(AB)$. Порядок h матриц из \mathfrak{M} (число переменных линейной подстановки) называется *степенью*, или *размерностью*, представления. Если соответствие взаимно однозначно, т. е. если группы \mathfrak{G} и \mathfrak{M} изоморфны, то представление \mathfrak{M} называется *точным*. Всякое представление группы \mathfrak{G} является точным представлением некоторой ее факторгруппы; элементы, поставленные в соответствие единичному элементу представления (им всегда служит единичная матрица), образуют в группе \mathfrak{G} соответствующий нормальный делитель.

б) Эквивалентность, характеры. Если каждую матрицу представления \mathfrak{M} подвергнуть преобразованию с помощью одной и той же матрицы T (см. стр. 290), т. е. в пространстве, где действуют линейные подстановки, соответствующие матрицам представления \mathfrak{M} , выполнить аффинное преобразование T , то получим представление $\mathfrak{M}_T = T^{-1}\mathfrak{M}T$, *эквивалентное* представлению \mathfrak{M} . Эквивалентные представления не считаются существенно различными.

Характером представления \mathfrak{M} называется функция

$$\chi(A) = \chi_{\mathfrak{M}}(A) = \text{Sp}(\mathfrak{M}(A)) = \sum_{k=1}^h m_{kk}(A)$$

матриц $\mathfrak{M}(A)$. Для сопряженных элементов группы характер принимает одно и то же значение:

$$\chi(A) = \chi(B^{-1}AB);$$

он зависит только от класса элементов, сопряженных с A , т. е. является функцией, определенной на множестве классов.

При линейном преобразовании представления \mathfrak{M} характер не изменяется. Имеет место предложение:

два представления эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им характеры совпадают для всех элементов группы.

с) Приводимость. Из двух произвольных представлений \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 одной и той же группы \mathfrak{G} (с размерностями h_1 и h_2) можно получить новое представление, объединяя матрицы $\mathfrak{M}_1(A)$ и $\mathfrak{M}_2(A)$, которые соответствуют элементу A группы \mathfrak{G} , в одну клеточную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1(A) & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2(A) \end{pmatrix}$$

порядка $h_1 + h_2$.

Всякое представление группы \mathfrak{G} , которое эквивалентно представлению такого вида и, следовательно, может быть получено при помощи объединения двух других представлений группы \mathfrak{G} и линейного преобразования, называется *приводимым*. Представление, не являющееся приводимым, называется *неприводимым*. Разложение приводимого представления на неприводимые представления осуществляется с точностью до порядка и эквивалентности единственным образом.

Критерии: а) Если существует матрица \mathfrak{B} , не кратная единичной матрице: $\mathfrak{B} \neq \lambda \mathfrak{E}$ ни для одного λ , и если матрица \mathfrak{B} перестановочна со всеми матрицами представления \mathfrak{M} :

$$\mathfrak{B}\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(A)\mathfrak{B},$$

то представление \mathfrak{M} приводимо.

б) Если для (h', h) -матрицы \mathfrak{B} и всех матриц двух *неприводимых* представлений \mathfrak{M} и \mathfrak{M}' имеем:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}'(A)\mathfrak{B}, \quad \nu = 1, \dots, g,$$

то либо представления \mathfrak{M} и \mathfrak{M}' эквивалентны, либо \mathfrak{B} есть нулевая матрица (*лемма Шура*).

γ) Для характера представления \mathfrak{M} имеем:

$$\mathfrak{M}(|\chi(A)|^2) \begin{cases} = 1, & \text{если } \mathfrak{M} \text{ неприводимо,} \\ > 1, & \text{если } \mathfrak{M} \text{ приводимо.} \end{cases}$$

д) Унитарные представления. Для всякого представления группы \mathfrak{G} ¹⁾ существует эквивалентное ему представление, состоящее только из унитарных матриц (см. стр. 172) (*унитарное представление*). Эквивалентные унитарные представления всегда могут быть унитарно преобразованы одно в другое. Достаточно поэтому рассмотреть неприводимые унитарные представления группы, чтобы получить обзор всех ее представлений.

¹⁾ Конечной. (*Прим. ред.*)

2. Основные теоремы о представлениях

а) конечных групп

(пример см. Приложение 7, стр. 576)

а) Для конечной группы \mathfrak{G} порядка g , элементы которой образуют c различных классов сопряженных элементов, существуют ровно c попарно неэквивалентных неприводимых представлений с размерностями h_1, \dots, h_c . Размерности h_i являются делителями g , причем:

$$h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_c^2 = g.$$

б) Если эти представления $\mathfrak{M}^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, c$) элементов A_r ($r=1, 2, \dots, g$) унитарны (что всегда может быть достигнуто соответствующим преобразованием), то имеют место следующие соотношения ортогональности.

Пусть $(m_{ik}^{(l)}(A))$ — матрица неприводимого унитарного представления $\mathfrak{M}^{(l)}$; тогда имеем:

$$\frac{1}{g} \sum_A m_{ik}^{(l)}(A) (m_{i'k'}^{(l')}(A))^* = \frac{1}{h_l} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \delta_{kk'},$$

т. е. это среднее значение отлично от нуля лишь в том случае, когда $l=l', i=i', k=k'$. Векторы $v_{ik}^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, c$), число которых равно g , с компонентами

$$(v_{ik}^{(l)})_r = m_{ik}^{(l)}(A_r) \sqrt{\frac{h_l}{g}}$$

образуют полную эрмитово-ортогональную нормированную систему векторов g -мерного пространства (которая, вообще говоря, изменяется при переходе к эквивалентному представлению).

с) Если из каждого из c классов группы \mathfrak{G} выбрать по одному элементу B_1, \dots, B_c и если h_k есть число элементов, сопряженных с элементом B_k , то для характеров неприводимых представлений $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(c)}$ имеем:

$$\frac{1}{g} \sum_A \chi^{(l)}(A) (\chi^{(l')}(A))^* = \sum_{k=1}^c \sqrt{\frac{h_k}{g}} \chi^{(l)}(B_k) \left\{ \sqrt{\frac{h_k}{g}} \chi^{(l')}(B_k) \right\}^* = \delta_{ll'}$$

т. е. векторы $w^{(l)}$ с компонентами

$$(w^{(l)})_k = \chi^{(l)}(B_k) \sqrt{\frac{h_k}{g}}$$

образуют полную эрмитово-ортогональную нормированную систему векторов c -мерного пространства.

д) Для характера χ произвольного (приводимого) представления \mathfrak{M} группы \mathfrak{G} , составленного из неприводимых представлений (см. 1с)

$\mathfrak{M}^{(l)}$ (возможно, линейно преобразованных) так, что представление $\mathfrak{M}^{(l)}$ встречается в \mathfrak{M} q_l раз, имеем:

$$\chi(B_k) = \sum_{l=1}^c q_l \chi^{(l)}(B_k) \quad (k=1, \dots, c).$$

Числа q_l (и тем самым в существенном разложение представления \mathfrak{M}), таким образом, определены однозначно. Имеем:

$$q_l = \frac{1}{g} \sum_A \chi(A) (\chi^{(l)}(A))^*$$

и, далее,

$$\frac{1}{g} \sum_A |\chi(A)|^2 = \sum_{l=1}^c q_l^2.$$

е) Если $\mathfrak{M}_1^{(c_1)}, \dots, \mathfrak{M}_1^{(c_1)}$ и $\mathfrak{M}_2^{(c_2)}, \dots, \mathfrak{M}_2^{(c_2)}$ — полные системы неприводимых представлений соответственно групп \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G}_2 , то $c_1 c_2$ матричных групп $\mathfrak{M}^{(k, l)} = \mathfrak{M}_1^{(k)} \times \mathfrak{M}_2^{(l)}$, $k=1, \dots, c_1$; $l=1, \dots, c_2$, которые состоят из всех матриц $\mathfrak{M}^{(k, l)}(A) = \mathfrak{M}_1^{(k)}(A) \times \mathfrak{M}_2^{(l)}(A)$, образуют полную систему неприводимых представлений прямого произведения

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2.$$

§) произвольных групп

Формулы, справедливые для представлений произвольных групп, получаются из формул, указанных в а), заменой в случае необходимости $\frac{1}{g} \sum_A$ средним значением M . Вообще, для двух неприводимых представлений \mathfrak{M}' и \mathfrak{M}'' произвольной группы \mathfrak{G} с размерностями h' и h'' имеют место следующие соотношения, в которых B означает фиксированный элемент из \mathfrak{G} :

$$M_A(m'_{ik}(A) m''_{i'k'}(A^{-1}B)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M}' \text{ неэквивалентно } \mathfrak{M}'', \\ \frac{1}{h} \delta_{ki'} m_{ik'}(B), & \text{если } \mathfrak{M}' \text{ эквивалентно } \mathfrak{M}''. \end{cases}$$

В общем случае аналогично этому будем иметь, если χ' и χ'' — характеры соответственно \mathfrak{M}' и \mathfrak{M}'' :

$$M_A \chi'(A) \chi''(A^{-1}B) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M}' \text{ неэквивалентно } \mathfrak{M}'', \\ \frac{1}{h} \chi'(B), & \text{если } \mathfrak{M}' \text{ эквивалентно } \mathfrak{M}'' \\ \text{и, значит, } \chi' = \chi'', & \end{cases}$$

и если (приводимое) представление \mathfrak{M} содержит q' раз неприводимое представление \mathfrak{M}' , то

$$q' = M(\chi(A))(\chi'(A^{-1})).$$

Далее, если в представлении \mathfrak{M} встречается лишь конечное число различных неприводимых представлений $\mathfrak{M}^{(1)}, \dots, \mathfrak{M}^{(r)}$, то

$$M(\chi(A)\chi(A^{-1})) = M(|\chi(A)|^2) = \sum_{\nu=1}^r q_{\nu}^2.$$

Д. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ

1. Группы вращений и их представления

а) n -мерная полная ортогональная группа \mathfrak{D}'_n содержит все повороты и зеркальные повороты (все действительные ортогональные преобразования с определителем $d=1$ или $d=-1$) n -мерного пространства (см. стр. 189). \mathfrak{D}'_n есть смешанная непрерывная $\frac{1}{2}(n-1)$ n -параметрическая группа. Основная область G состоит из двух отдельных частей, соответствующих $d=1$ и $d=-1$. Подгруппа вращений ($d=+1$) — n -мерная группа чистых вращений \mathfrak{D}_n — является нормальным делителем индекса $[\mathfrak{D}'_n:\mathfrak{D}_n]=2$ в группе \mathfrak{D}'_n .

б) $n=2$. Элементы $A_d(\varphi)$ группы \mathfrak{D}'_2 задаются при помощи $A_d(\varphi)$:

$$A_d(\varphi): \left\{ \begin{array}{l} x' = xd \cos \varphi - yd \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{array} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad d = \pm 1;$$

φ представляет собой угол поворота. Имеем:

$$A_d(\varphi) A_t(\psi) = A_{td}(t\varphi + \psi);$$

группа \mathfrak{D}'_2 является поэтому неабелевой, в то время как однопараметрическая связная непрерывная группа \mathfrak{D}_2 , состоящая из всех $A_1(\varphi)$, является, напротив, абелевой. Каждый класс сопряженных элементов группы \mathfrak{D}'_2 либо состоит из двух элементов $A_1(\varphi)$ и $A_1(-\varphi)$, либо состоит из всех элементов $A_{-1}(\varphi)$.

Весовой функцией при образовании среднего значения (см. стр. 293) служит $g(\varphi)=1$:

$$\int_{\mathfrak{D}'_2} F(A) dA = \sum_{d=1, -1} \int_0^{2\pi} F(A_d(\varphi)) d\varphi = \sum_{d=1, -1} \int_0^{2\pi} F(A_d(\varphi) A_t(\psi)) d\varphi$$

для каждого фиксированного $A_t(\psi)$ из \mathfrak{D}'_2 ,

$$\int_{\mathfrak{D}_2} F(A) dA = \int_0^{2\pi} F(A(\varphi)) d\varphi = \int_0^{2\pi} F(A(\varphi + \psi)) d\varphi$$

для каждого ψ .

Все *неприводимые представления* двумерной группы чистых вращений \mathfrak{D}_2 одномерны и даются формулой

$$\mathfrak{M}^{(m)}(A_1(\varphi)) = (e^{im\varphi}) \text{ при } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Соответствующие соотношения ортогональности совпадают с таковыми для разложения Фурье (см. стр. 94).

Полная система неприводимых представлений двумерной полной ортогональной группы \mathfrak{D}'_2 дается посредством:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(A_d(\varphi)) &= (1) && \text{(тождественное представление),} \\ \mathfrak{M}^{(0)}(A_d(\varphi)) &= (d) \end{aligned}$$

и

$$\mathfrak{M}^{(m)}(A_1(\varphi)) = \begin{pmatrix} e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-im\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(m)}(A_{-1}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-im\varphi} \\ e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$m = 1, 2, \dots$$

с) $n=3$. Всякое вращение A из \mathfrak{D}_3 может быть составлено из вращения $A(0, 0, \gamma)$ вокруг оси z (угол поворота γ), вращения $A(0, \beta, 0)$ вокруг (новой) оси x (угол поворота β) и вращения $A(0, 0, \alpha) = A(\alpha, 0, 0)$ вокруг (новой) оси z (угол поворота α):

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = A(\alpha, 0, 0) A(0, \beta, 0) A(0, 0, \gamma);$$

α, β, γ представляют собой три так называемых эйлеровых угла. Достаточно поэтому указать элементы матриц неприводимых представлений вращений $A(\alpha, 0, 0)$ и $A(0, \beta, 0)$: $l=0, 1, 2, \dots$

$$m_{rs}^{(l)}(A(\alpha, 0, 0)) = e^{i\alpha s} \delta_{rs}; \quad r, s = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

$$\begin{aligned} m_{rs}^{(l)}(A(0, \beta, 0)) &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(l+r)!(l-r)!(l+s)!(l-s)!}}{(l-r-k)!(l+s-k)!k!(k-r-s)!} \times \\ &\times \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2l+s-r-2k} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2k+r-s}; \quad r, s, \text{ как выше.} \end{aligned}$$

Вращения на один и тот же угол δ (см. стр. 189) принадлежат к одному и тому же классу.

2. Представления и характеры групп перестановок

а) $n!$ перестановок n предметов образуют так называемую *симметрическую группу* \mathfrak{S}_n n -й степени.

Символом (r_1, r_2, \dots, r_k) обозначают перестановку k элементов r_1, \dots, r_k , которая переводит r_i в r_{i+1} ($i=1, \dots, k-1$) и r_k в r_1 (*цикл*). Всякая перестановка допускает разложение на циклы:

$$P = \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{matrix} \right) = (1i_1i_2 \dots j_1)(ki_k \dots j_k)(l \dots), \dots,$$

если j_1 переходит в 1, j_k переходит в k , ... и если k не встречается в первом цикле, l не встречается в обоих первых циклах и т. д.

Неприводимое представление, соответствующее разложению n на ν двоек и $n - 2\nu$ единиц, получим, умножая на -1 матрицы представления $\mathfrak{M}^{(\nu)}$, соответствующие нечетным перестановкам.

Характер $\chi^{(\nu)}(P)$ представления $\mathfrak{M}^{(\nu)}(P)$ для $\nu = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ может быть получен из тождества

$$(1-x)(1+x)^{\lambda_1}(1+x^2)^{\lambda_2} \dots (1+x^n)^{\lambda_n} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \chi^{(\nu)}(P) x^\nu,$$

если $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — тип P .

с) В общем случае характер $\chi^{(\mu_1, \dots, \mu_n)}$ неприводимого представления, соответствующего разложению $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n$ (все $\mu_i \geq 0$), получают, образуя определитель

$$\Phi^{(\mu_1, \dots, \mu_n)} = \det(p_{\mu_i - i + k}(Y_1, \dots, Y_n));$$

при этом $p_\nu(Y_1, \dots, Y_n)$ для $\nu = 1, 2, \dots$ означает сумму всевозможных произведений степеней n переменных Y_1, \dots, Y_n , причем степень каждого произведения равна ν :

$$p_\nu = \sum Y_1^{\beta_1} Y_2^{\beta_2} \dots Y_n^{\beta_n} \text{ по всем } \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \nu, \beta_i \geq 0,$$

и $p_0 = 1, p_{-1} = p_{-2} = \dots = 0$. $\Phi^{(\mu_1, \dots, \mu_n)}$, будучи симметрической функцией от Y_1, \dots, Y_n , допускает разложение по степеням степенных сумм $s_k = Y_1^k + \dots + Y_n^k$; при этом получаем:

$$\Phi^{(\mu_1, \dots, \mu_n)} = \sum_{\text{по всем } P \text{ из } \mathfrak{F}_n} \frac{\chi^{(\mu_1, \dots, \mu_n)}(P) s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \dots s_n^{\lambda_n}}{1^{\lambda_1} \lambda_1! 2^{\lambda_2} \lambda_2! \dots n^{\lambda_n} \lambda_n!},$$

если P имеет тип $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3. Группы симметрии (кристаллы)

Совокупность всех операций наложения или конгруэнций, т. е. преобразований $r \rightarrow r'$, переводящих в себя с сохранением всех расстояний и углов некоторый геометрический образ, состоящий из точек, линий, поверхностей и т. п., образует группу \mathfrak{R} , называемую *группой симметрии* (данного образа).

Образ называется k -кратно *периодическим*, если в группе \mathfrak{R} содержатся k линейно независимых *трансляций*: $r' = r + t_i$. Группа \mathfrak{R} в этом случае является бесконечной. Совокупность всех трансляций, содержащихся в \mathfrak{R} , образует *инвариантную* подгруппу \mathfrak{G} . Операции из \mathfrak{G} переводят произвольную точку в случае $k=1$ в *цепь точек*, в случае $k=2$ — в *сеть точек*, в случае $k=3$ — в *решетку точек* (решетку Браве). Группы симметрии в соответствии с этим называются *цепными* (Kettengruppen), *сетчатыми* (Netzgruppen) или *пространственными*. Подгруппа \mathfrak{G} и ее смежные классы образуют факторгруппу $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}/\mathfrak{G}$ — *точечную группу*, изоморфную группе симметрии.

В *непериодическом* случае ($k=0$) \mathfrak{F} идентична с \mathfrak{R} . Группа \mathfrak{F} тогда может быть построена из вращений \mathfrak{C}_n и инверсионных вращений \mathfrak{I}_n или зеркальных поворотов \mathfrak{S}_n (см. стр. 190). Оси вращений и плоскости отражений называются *элементами симметрии*. Они все проходят через общий центр. Для того чтобы группа \mathfrak{F} была конечной, элементы должны иметь конечный порядок и определенное взаимное расположение.

Группу \mathfrak{F} характеризуют при помощи элементов, достаточных для ее построения; эти элементы могут выбираться различным образом из совокупности имеющихся элементов¹⁾.

В *периодическом* случае ($k \neq 0$) для построения группы \mathfrak{F} могут применяться также винтовые перемещения $\overline{\mathfrak{C}}_n$ и скользящие отражения $\overline{\mathfrak{S}}$. Рассматриваемые как образующие элементы факторгруппы \mathfrak{F} , они являются циклическими. Они не обязательно должны иметь общий центр. Их возможные трансляционные составляющие и относительные положения определяются группой трансляций \mathfrak{G} . При $k=2$ или 3 порядки элементов симметрии могут быть равны только $n=1, 2, 3, 4, 6$.

Этот случай представляет особый интерес ввиду того, что трижды периодические функции реализуются в природе как распределения масс и зарядов внутри кристаллов. Симметрия кристаллов проявляется как в относительном расположении их естественных граничных поверхностей, так и во многих физических свойствах. Их периодичность ясна уже из наличия встречающихся у них элементов симметрии с $n=1, 2, 3, 4, 6$. При помощи макроскопических наблюдений, однако, невозможно ни установить тип соответствующей кристаллу решетки Браве (т. е. тип группы трансляций \mathfrak{G}), ни отличить оси вращений \mathfrak{C} от осей винтовых перемещений $\overline{\mathfrak{C}}$ или — плоскости отражений \mathfrak{S} от плоскостей скользящих отражений $\overline{\mathfrak{S}}$. Поэтому различные кристаллы классифицируют вначале, не принимая во внимание таких отличий, в результате чего получаются 32 *кристаллографических класса*. Каждый такой класс означает *точечную группу*, образованную так, как если бы существовали только некоторые \mathfrak{C}_n и \mathfrak{S}_n с общим центром. Наименования классов и соответствующие им символы связаны с их элементами симметрии или с известными симметричными формами: D_n — n -кратный диэдр ($D_2 = V$), T — тетраэдр, O — октаэдр.

¹⁾ В таблице на стр. 302 и следующих указаны различные номенклатуры такого рода. Элементы, характеризующие группу, обозначаются: для системы Шенфлиса — S , Викоффа — W , Германа и Могаэна — H , Ниггли в случае расхождений с шенфлисовской — N . Заключенное в скобки H , так же как и заключенные в скобки составные части символов, означают те элементы, без которых можно обойтись при построении точечной группы, но которые полезны при полном обзоре пространственных групп.

Обзор 32 кристалло

Порядок точечной группы	Наименование по Гроту	Наименование по номенклатуре Федоровского института (1935 г.)	Сим	
			Шенфлис (Нингди)	
Т р и к л и н н а я				
Гемиздрия, 1	1. Моноэдрический (triklin pedial)	Примитивный	C_1	
Голоэдрия, 2	2. Пинакоидальный (triklin pinakoidal)	Центральный	$S_2 (C_i)$	
М о н о к л и н н а я				
Гемиздрии: 2	3. Диэдрический безосный (monoklin domatisch)	Планальный	$C_{1h} (C_s)$	
2	4. Диэдрический осевой (monoklin sphenoidisch)	Аксиальный	C_2	
Голоэдрия, 4	5. Призматический (monoklin prismatisch)	Планаксиальный	C_{2h}	
Р о м б и ч е с к а я				
Гемиздрии: 4	6. Ромбо-пирамидальный	Планиальный	C_{2v}	
4	7. Ромбо-тетраэдрический (rhombsch disphenoidisch)	Аксиальный	$D_2 (V)$	
Голоэдрия, 8	8. Ромбо-дипирамидальный	Планаксиальный	$D_{2h} (V_h)$	
Т е т р а г о н а л ь н а я				
Тетартоэдри: 4	9. Тетрагонально-тетраэдрический (tetragonal disphenoidisch)	Гироидо-примитивный	S_4	
4	10. Тетрагонально-пирамидальный	Примитивный	C_4	
Гемиздрии: 8	11. Тетрагонально-дипирамидальный	Центральный	C_{4h}	
8	12. Тетрагонально-скаленоэдрический	Гироидо-планальный	$S_{4d} (D_{2d}, V_d)$	
8	13. Дитетрагонально-пирамидальный	Планаксиальный	C_{4v}	
8	14. Тетрагонально-трапезоэдрический	Аксиальный	D_4	
Голоэдрия, 16	15. Дитетрагонально-дипирамидальный	Планаксиальный	D_{4h}	

¹⁾ Исходя из интересов читателей, мы сочли возможным дополнить настоящего института, установленной в 1935 г., и символы классов по Шубникову.

В столбце «Наименование по Гроту» мы даем наименования по номенклатуре Грота (последние в случае несовпадений указываются в скобках).

графических классов¹⁾

волы			Элементы симметрии				Примечания
Вя-кофф	Герман-Могэн	Шуб-ников	Центр	x-направление	y-направление	z-направление	
система							
1C	1	1	—	—	—	—	
1C1	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\mathfrak{I}^{SWH}	—	—	—	
система							
2c	m	m	—	—	—	\mathfrak{C}^{SWH}	
2C	2	2	—	—	—	\mathfrak{C}_2^{SWH}	
2C1	2/m	2:m	\mathfrak{I}^W	—	—	$\mathfrak{C}_2^{SWH}, \mathfrak{C}^{SH}$	
система							
2e	mm	2:m	—	\mathfrak{C}^{SWH}	\mathfrak{C}^H	\mathfrak{C}_2^{SW}	По одному x-, y- и z-направлению, все углы 90°
2D	22(2)	2:2	—	\mathfrak{C}_2^{SWH}	$\mathfrak{C}_2^{(H)}$	\mathfrak{C}_2^{SWH}	
2D1	mmm	m·2:m	\mathfrak{I}^W	$\mathfrak{C}_2^{SW}, \mathfrak{C}^H$	$\mathfrak{C}_2^{SW}, \mathfrak{C}^H$	$\mathfrak{C}_2^{SW}, \mathfrak{C}^H$	
система							
4c	$\bar{4}$	$\bar{4}$	—	—	—	$\mathfrak{I}_4^{WH} = \mathfrak{C}_4^S$	Два x-направления под 90°, два такие же y-направления, $\angle(xy) = 45^\circ$, одно z-направление, перпендикулярное к x и y.
4C	4	4	—	—	—	\mathfrak{C}_4^{SWH}	
4C1	4/m	4:m	\mathfrak{I}^W	—	—	$\mathfrak{C}_4^{SWH}, \mathfrak{C}^{SH}$	
4d	$\bar{4}m(2)$	$\bar{4}\cdot m$	—	$\mathfrak{C}_2^{SW(H)}$	\mathfrak{C}^{NH}	$\mathfrak{I}_4^{WH} = \mathfrak{C}_4^S$, содержит \mathfrak{C}_2^N	
4e	4m(m)	4·m	—	\mathfrak{C}^{SWH}	\mathfrak{C}^H	\mathfrak{C}_4^{SWH}	
4D	42(2)	4:2	—	\mathfrak{C}_2^{SWH}	$\mathfrak{C}_2^{(H)}$	\mathfrak{C}_4^{SWH}	
4D1	4/mm(m)	m·4:m	\mathfrak{I}^W	$\mathfrak{C}_2^{SW}, \mathfrak{C}^H$	\mathfrak{C}_2^SH	$\mathfrak{C}_4^{SWH}, \mathfrak{C}^H$	

шую таблицу, включив в нее наименования классов по номенклатуре Федоров-туре Федоровского института, установленной в 1924 г., близкие к наименова-
(Прим. ред.)

Порядок точечной группы	Наименование по Гроту	Наименование по номенклатуре Федоровского института (1935 г.)	Сим	
			Шенфлис (Нитгли)	
Р о м б о э д р и ч е с к а я (и л и				
Тетарто-эдриа: 3	16. Тригонально-пирамидальный	Примитивный	C_3	
Гемиедри: 6	17. Ромбоэдрический	Центральный	$S_6 (C_{3i})$	
6	18. Дитригонально-пирамидальный	Планальный	C_{3v}	
6	19. Тригонально-трапецоэдрический	Аксиальный	D_3	
Голоэдриа, 12	20. Дитригонально-скаленоэдрический	Планаксиальный	$S_{6h} (D_{3d})$	
Г е к с а г о н а л ь н а я				
Тетарто-эдри: 6	21. Тригонально-дипирамидальный	Гироидо-примитивный	C_{3h}	
6	22. Гексагонально-пирамидальный	Примитивный	C_6	
Гемиедри: 12	23. Гексагонально-дипирамидальный	Центральный	C_{6h}	
12	24. Дитригонально-дипирамидальный	Гироидо-планальный	D_{3h}	
12	25. Дигексагонально-пирамидальный	Планальный	C_{6v}	
12	26. Гексагонально-трапецоэдрический	Аксиальный	D_6	
Голоэдриа, 24	27. Дигексагонально-дипирамидальный	Планаксиальный	D_{6h}	
К у б и ч е с к а я (и л и				
Тетарто-эдриа, 12	28. Тритетраэдрический (tetraedrisch-dodekaedrisch)	Примитивный	T	
Гемиедри: 24	29. Дидодекаэдрический (dyakis-dodekaedrisch)	Центральный	T_h	
24	30. Гексатетраэдрический	Планальный	T_d	
24	31. Триоктаэдрический (pentagon-ikositetraedrisch)	Аксиальный	O	
Голоэдриа, 48	32. Гексоктаэдрический	Планаксиальный	O_h	

Продолжение

воды			Элементы симметрии				Примечания
Ви-кофф	Герман-Могэн	Шубников	Центр	x-направление	y-направление	z-направление	
т р и г о н а л ь н а я) с и с т е м а							
3C	3	3	—	—	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	Три x-направления под 60°, одно z-направление, перпендикулярное к ним
3Ci	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\mathbb{I}W$	—	—	$\mathbb{I}_3^H = \mathbb{C}_6^S$, содержит \mathbb{C}_3^{AW}	
3e	3m	3·m	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	
3D	32	3:2	—	\mathbb{C}_2^{SWH}	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	
3Di	$\bar{3}m$	$\bar{6}m$	$\mathbb{I}W$	$\mathbb{C}_2^{SW}, \mathbb{C}_2^{NH}$	—	$\mathbb{I}_3^H = \mathbb{C}_6^S$, содержит \mathbb{C}_3^{NW}	
с и с т е м а							
6c	$\bar{6}$	3:m	—	—	—	$\mathbb{I}_6^{WH} = \mathbb{C}_3^S, \mathbb{C}_2^S$	Три x-направления под 60°, три таких же y-направления, $\angle(xy) = 30^\circ$, одно z-направление, перпендикулярное ко всем x, y
6C	6	6	—	—	—	\mathbb{C}_6^{SWH}	
6Ci	6/m	6:m	$\mathbb{I}W$	—	—	$\mathbb{C}_6^{SWH}, \mathbb{C}_2^SH$	
6d	$\bar{6}m(2)$	m·3:m	—	$\mathbb{C}_2^{SW(H)}$	\mathbb{C}_2^H	$\mathbb{I}_6^{WH} = \mathbb{C}_3^S, \mathbb{C}_2^S$	
6e	6m(m)	6·m	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	\mathbb{C}_2^H	\mathbb{C}_6^{SWH}	
6D	62(2)	6:2	—	\mathbb{C}_2^{SWH}	\mathbb{C}_2^H	\mathbb{C}_6^{SWH}	
6Di	6/mm(m)	m·6:m	$\mathbb{I}W$	$\mathbb{C}_2^{SW}, \mathbb{C}_2^H$	$\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_2^H$	$\mathbb{C}_6^{SWH}, \mathbb{C}_2^SH$	
р е г у л я р н а я) с и с т е м а							
T	23	3/2	—	\mathbb{C}_2^{SWH}	—	\mathbb{C}_3^{SWH}	Три x-направления (ребра куба), шесть y-направлений (диагонали граней), четыре z-направления (пространственные диагонали). Углы: $xx': 90^\circ; yy': 60^\circ, 90^\circ; zz': \tau \sim 109,5^\circ$, $\cos \tau = -1/3$; $xy: 45^\circ, 90^\circ; xz: 1/2\tau$; $yz: 90^\circ - 1/2\tau, 90^\circ$
Ti	m3	$\bar{6}/2$	$\mathbb{I}W$	$\mathbb{C}_2^{SWH}, \mathbb{C}_2^SH$	—	\mathbb{I}_3 , содержит \mathbb{C}_3^{SWH}	
Te	$\bar{4}3(m)$	3/4	—	\mathbb{I}_4^H , содержит \mathbb{C}_2^{SW}	$\mathbb{C}_2^{SW(H)}$	\mathbb{C}_3^{SWH}	
O	43(2)	$\bar{3}/4$	—	\mathbb{C}_4^{SWH}	\mathbb{C}_2^H	\mathbb{C}_3^{SWH}	
Oi	m3m	$\bar{6}/4$	$\mathbb{I}W$	$\mathbb{C}_4^{SW}, \mathbb{C}_2^H$	$\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_2^H$	\mathbb{I}_3 , содержит \mathbb{C}_3^{SWH}	

Решетки Браве

Название и символ	a^2	b^2	c^2	(bc)	(ca)	(ab)	Симметрия	Кристаллографические оси
1. Кубическая примитивная	a	a	a	—	—	—	O_h	a, b, c
2. Кубическая гранецентрированная	a	a	a	$a/2$	$a/2$	$a/2$	O_h	$-a + b + c, a - b + c, a + b - c$
3. Кубическая объемноцентрированная	a	a	a	$-a/3$	$-a/3$	$-a/3$	O_h	$b + c, c + a, a + b$
4. Гексагональная	a	a	β	—	—	$-a/2$	D_{6h}	$a, b, c (- (a + b))^{1)}$
5. Ромбоэдрическая	a	a	α	β	β	β	D_{3d}	$b - c, c - a, a + b + c$
6. Тетрагональная примитивная	a	a	β	—	—	—	D_{4h}	a, b, c
7. Тетрагональная объемноцентрированная	a	a	α	β	β	$-\alpha - 2\beta$	D_{4h}	$b + c, c + a, a + b$
8. Ромбическая примитивная	a	β	γ	—	—	—	D_{2h}	a, b, c
9. Ромбическая базоцентрированная	a	α	β	—	—	γ	D_{2h}	$a - b, a + b, c$
10. Ромбическая гранецентрированная	$\beta + \gamma + \alpha + \beta$	$\gamma + \alpha + \beta$	α	α	β	γ	D_{2h}	$-a + b + c, a - b + c, a + b - c$
11. Ромбическая объемноцентрированная	a	α	α	β	γ	$-(\alpha + \beta + \gamma)$	D_{2h}	$b + c, c + a, a + b$
12. Моноклиная примитивная	a	β	γ	—	δ	—	C_{2h}	a, b, c
13. Моноклиная базоцентрированная	a	α	β	γ	γ	δ	C_{2h}	$a + b, a - b, c$
14. Триклинная	a	β	γ	δ	ϵ	ζ	C_1	a, b, c

¹⁾ В гексагональной системе не существует трех векторов, пригодных для простого изображения полной симметрии. Если ввести еще четвертый, избыточный вектор $b' = -(a + b)$, то все операции симметрии могут быть с удобством представлены как перестановки векторов a, b, b' между собой с одновременной переменной переменной знака a, b, b' и, независимо от этого, знака c .

Кристаллографические классы в зависимости от симметрии допустимых для них решеток Браве разделяются на семь *кристаллографических систем*¹⁾. При этом класс, для которого решетка Браве обладает полной симметрией, называется *голоэдрическим*, класс, порядок которого вдвое или вчетверо меньше, называется *гемидрическим*, соответственно *тетраэдрическим*.

Решетки Браве задаются тремя векторами $t = a$, $t_2 = b$, $t_3 = c$: $ro = la + mb + n$ с целыми l, m, n .

Они подразделяются на 14 классов, в соответствии с их симметрией (см. таблицу на стр. 306).

На основе более тонкого анализа возможна дальнейшая классификация, подразделяющая каждый кристаллографический класс на некоторое число различных *структур*. Они различаются при помощи соответствующих им решеток Браве, а также благодаря различию между \mathcal{C} и \mathcal{C} или между \mathcal{S} и \mathcal{S} и различию в положении этих осей и плоскостей. Это дает в целом 230 возможных структур (так называемых *пространственных групп*), которые распределяются по классам следующим образом.

1. Кубическая система:

	O_h	O	T_d	T_h	T
Γ_c	4	4	2	3	2
Γ'_c	4	2	2	2	1
Γ''_c	2	2	2	2	2

Всего 36

2. Тетрагональная система:

	D_{4h}	D_4	C_{4v}	V_d	C_{4h}	C_4	S_4
Γ_t	16	8	8	8	4	4	1
Γ'_t	4	2	4	4	2	2	1

Всего 68

3. Гексагональная система:

	D_{6h}	D_6	C_{6v}	D_{3h}	C_{6h}	C_6	C_{3h}
Γ_h	4	6	4	4	2	6	1

Всего 27

¹⁾ Называемых также *сингониями*. (Прим. ред.)

4. Ромбоэдрическая система:

	D_{3d}	D_3	C_{3v}	C_{3i}	C_3
Γ_h	4	6	4	1	3
Γ_{rh}	2	1	2	1	1

Всего 25

5. Ромбическая система:

	D_{2h}	V	C_{2v}
Γ_0	16	4	10
Γ'_0	6	2	7
Γ''_0	2	1	2
Γ'''_0	4	2	3

Всего 59

6. Моноклиная система:

	C_{2h}	C_s	C_2
Γ_m	4	2	2
Γ'_m	2	2	1

Всего 13

7. Триклинная система:

	C_i	C_1
Γ_{tr}	1	1

Всего 2

Общее число: 230

РАЗДЕЛ ДЕСЯТЫЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1. Классификация дифференциальных уравнений

Уравнение называется *дифференциальным*, если оно наряду с одной или несколькими независимыми или зависимыми переменными содержит также производные последних по первым.

Различают дифференциальные уравнения с *частными производными* и *обыкновенные*, смотря по тому, содержит уравнение частные производные или нет.

Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат поэтому только одно независимое переменное, уравнения же с частными производными — два или больше.

Дифференциальные уравнения классифицируются:

1) По *порядку* n старшей входящей в него производной $\frac{d^n y}{dx^n}$, соответственно $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ или $\frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^{m-a}}$ и т. д.;

2) Иногда по старшей *степени* p , в которой входят в него производные, например:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^p,$$

если уравнение рационально относительно y и его производных или может быть приведено к такому виду с помощью алгебраических операций.

В частности, дифференциальное уравнение называется *линейным*, если зависимые переменные и их производные входят в него лишь в первой степени и не умножаются друг на друга.

Говорят также об *однородных* дифференциальных уравнениях. Это название употребляется в различных смыслах.

1) Дифференциальное уравнение $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots\right) = 0$ называется *однородным*, если F представляет собой целую рациональную

функцию от $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$. Так, например, уравнение

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = 0$$

является *однородным линейным* дифференциальным уравнением. Здесь X_0, \dots, X_n означают произвольные функции от x .

2) Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ часто также называется *однородным*, если $f(x, y)$ является функцией только от $\frac{y}{x}$, вследствие чего уравнение может быть записано в форме

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

В этом смысле однородным является, например, уравнение

$$M \frac{dy}{dx} = N,$$

в котором $M(x, y)$ и $N(x, y)$ представляют собой однородные функции от x и y одной и той же степени.

3) «*Равноразмерными*» («gleichdimensional») называются дифференциальные уравнения (иногда также называемые однородными) следующего вида.

Будем рассматривать y как величину измерения n , x^n пусть имеет измерение m , $\frac{dy}{dx}$ — измерение $n - 1$ и т. д.

Если тогда все члены уравнения имеют одинаковое измерение в указанном смысле, то оно называется *равноразмерным*. Например:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = V^1),$$

где $V = f(x)$ или же постоянна, а A_i означают постоянные.

2. Решения дифференциальных уравнений

Решением дифференциального уравнения называется функция независимых переменных, которая, будучи подставлена в уравнение вместо зависимой переменной (y), превращает его в тождество по независимым переменным.

Интегралом дифференциального уравнения называется функция независимых и зависимых переменных, а также, возможно, произвольных постоянных, которая, будучи приравнена произвольной постоянной, при любом значении последней дает уравнение, удовлетворяющееся решениями дифференциального уравнения.

¹⁾ Это дифференциальное уравнение при $V = 0$ обычно называют *уравнением Эйлера*; оно интегрируется подстановкой $y = x^r$. (Прим. ред.)

Промежуточным интегралом дифференциального уравнения n -го порядка называется функция независимых и зависимых переменных и постоянных, а также производных порядка не выше $n - 1$, которая, будучи приравнена постоянной, дает дифференциальное уравнение порядка ниже n , удовлетворяющееся решениями исходного уравнения.

Дифференциальное уравнение называется *интегрируемым в конечном виде*, если его решение может быть представлено в явной форме при помощи элементарных функций (алгебраических, логарифмических, показательных) и конечного числа *квадратур*, т. е. определенных интегралов.

а) Обыкновенные дифференциальные уравнения

Полное, или *общее*, решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка содержит n произвольных постоянных. Придавая этим постоянным определенные числовые значения, мы получаем *частные* решения.

Кроме того, дифференциальные уравнения *первого порядка* в случае, когда они нелинейны, иногда имеют решения, которые не могут быть получены из общего решения ни при каком выборе произвольной постоянной. Эти решения называются *особыми решениями*¹⁾.

Если особое решение дифференциального уравнения

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

существует, то оно должно одновременно удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

где p означает $\frac{dy}{dx}$.

Геометрическая интерпретация решения. Частное решение дифференциального уравнения, связывающего одну зависимую переменную y и одну независимую переменную x , представляет кривую в x, y -плоскости. Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка представляет семейство кривых, зависящее от n параметров. Если при $n = 1$ это семейство кривых имеет *огibaющую*, то ее уравнение служит особым решением.

Отдельная кривая (частное решение) определяется n условиями, могущими служить для определения n параметров (начальные или краевые условия).

¹⁾ Такое определение особого решения не вполне корректно. Однако в простых случаях, встречающихся в приложениях, оно достаточно. (*Прим. ред.*)

в) Дифференциальные уравнения с частными производными

Общее решение (интеграл) дифференциального уравнения n -го порядка с частными производными и p независимыми переменными есть решение, которое содержит n произвольных функций от $p - 1$ переменных. Этими переменными могут быть некоторые из *независимых* переменных или же их комбинации.

Для дифференциальных уравнений *первого порядка* наряду с этим играет роль понятие *полного* интеграла. Под полным интегралом понимают решение, содержащее p произвольных *постоянных*.

Из полного интеграла следующим образом получают *общее* решение дифференциального уравнения *первого порядка*. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p; a_1, a_2, \dots, a_p)$ есть полное решение (где a_1, a_2, \dots, a_p — произвольные постоянные). Из этого p -кратного семейства функций выделяют $(p - 1)$ -кратное, полагая, например, $a_p = \theta(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$ и выражая отсюда и из уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} \frac{\partial \theta}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p - 1)$$

a_i как функции x_i и затем подставляя эти выражения в φ . При этом возникает функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению и зависящая от произвольной функции θ от $p - 1$ переменных, т. е. *общее* решение.

Чтобы получить *особое* решение из полного, следует из уравнений $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0$ выразить величины a_i как функции x_i и подставить их в φ . Если возникающая при этом функция является решением дифференциального уравнения, то она является *особым* решением.

Геометрическая интерпретация решения уравнения первого порядка. Если налицо имеются лишь две независимые (x и y) и одна зависимая (u) переменная, то решения могут быть геометрически интерпретированы в x, y, u -пространстве.

1) *Полный интеграл* представляет дважды бесконечную систему поверхностей вида

$$\varphi(x, y, u; a, b) = 0$$

с двумя произвольными параметрами a и b .

2) Полагая один параметр равным произвольной функции другого и исключая a из трех уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, u; a, b) &= 0, \\ b &= \theta(a), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \theta'(a) &= 0, \end{aligned}$$

иными словами, выводя из полного интеграла *общий интеграл*, мы тем самым осуществляем выбор *одного* (однопараметрического) семей

ства поверхностей из двухпараметрической системы поверхностей и определяем его огибающую. Общий интеграл представляет семейство таких огибающих.

3) *Особый интеграл* представляет общую огибающую всех поверхностей, содержащихся в полном интеграле.

3. Линейные задачи

С данным дифференциальным уравнением будет связана определенная задача лишь в том случае, когда на решение дифференциального уравнения налагаются определенные условия. Если, например, решение ищется лишь в некоторой определенной области изменения переменных (*основная область*), то на границе этой области на него могут быть наложены определенные условия (*краевые условия*). Если речь идет о задании для решения условий на некотором начальном многообразии, то говорят о *начальных условиях*. Прочими часто встречающимися требованиями служат периодичность, нормируемость, регулярность, ограниченность (конечность) и др.

Задача называется *линейной*, если соответствующее дифференциальное уравнение линейно. Если решением задачи вместе с u служит также ku (k — произвольная постоянная), то задача называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Однородная задача называется *задачей о собственных значениях*, если в дифференциальное уравнение линейно входит параметр, который должен быть определен таким образом, чтобы задача имела нетривиальное решение (тривиальным решением называется $u \equiv 0$). Определенное таким образом значение параметра называется *собственным значением*, соответствующее решение — *собственным решением*, или *собственной функцией*. Если одному и тому же собственному значению принадлежат r линейно независимых собственных функций, то собственное значение называется $(r - 1)$ -кратно вырожденным.

В. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий общий вид:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

а) Некоторые легко решаемые типы приведены на стр. 314—315.

В этой таблице p всюду означает $\frac{dy}{dx}$. Некоторые результаты даны в параметрическом представлении. Подлежащие при известных условиях исключению параметры (v, p) указаны в пятом столбце. В третьем столбце указаны важнейшие нормальные формы, к которым приводятся уравнения типов, перечисленных во втором столбце.

	Тип	Уравнение	Решение	Исклю- чить
a	Уравнение с разделяющимися переменными $p = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$	$f_1(y) dy = f_2(x) dx$	$\int f_1(y) dy = \int f_2(x) dx + C$	—
b	Линейное уравнение	1. $p + yf_1(x) + f_2(x) = 0$ 2. Обобщение: $p + yf_1(x) + y^{(1-\alpha)}f_2(x) = 0$	$y = e^{-\int f_1 dx} \times$ $\times (C - \int f_2 e^{\int f_1 dx} dx)$ $y^\alpha = e^{-\alpha \int f_1 dx} \times$ $\times (C - \alpha \int f_2 e^{\alpha \int f_1 dx} dx)$	—
c	Однородное уравнение $F\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$	1. $p = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\ln x + \int \frac{y = vx}{v - f(v)} dv = C$	v
		2. $\frac{y}{x} = f(p)$	$\ln x = C + \int \frac{f'(p) dp}{p - f(p)}$	p
d	Отсутствует независимая переменная: $\psi(y, p) = 0$	1. $p = f(y)$	$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$	—
		2. $y = f(p)$	$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C$	p
		3. Параметрическое представление: $y = f(u), p = g(u)$	$x = \int \frac{f'(u) du}{g(u)} + C$	u
e	Отсутствует зависимая переменная: $\varphi(x, p) = 0$		1. Преобразовать к виду $\Phi\left(x, \frac{dx}{dy}\right) = 0$ (случай d)	—
		2. $p = F(x)$	$y = \int F(x) dx + C$	—
		3. $x = F(p)$	$y = \int pF'(p) dp + C$	p

Продолжение

	Тип	Уравнение	Решение	Исключить
f	Уравнение Клеро	$y = xp + f(p)$	$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0,$ так что либо $\frac{dp}{dx} = 0:$ $y = Cx + f(C),$ (1) где $C = p = \text{const}$	—
			либо $x + f'(p) = 0$ (2) (особое решение — огибающая прямых (1))	p

Объяснение см. стр. 313.

б) Дифференциальное уравнение Рикатти. Общее дифференциальное уравнение Рикатти имеет вид

$$y' = P(x) + yQ(x) + y^2R(x). \quad (1)$$

Для четырех частных решений этого уравнения y_1, y_2, y_3, y_4 имеем:

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)} = \text{const}, \text{ т. е. это выражение не зависит от } x.$$

Поэтому, если три частных решения y_1, y_2, y_3 известны, то получаем общее решение:

$$y = \frac{y_1(y_2 - y_3) + Cy_2(y_1 - y_3)}{y_2 - y_3 + C(y_1 - y_3)}$$

с произвольной постоянной C . Если известны лишь два решения y_1 и y_2 , то будем иметь:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{1 + Ce^{\int R(y_2 - y_1) dx}}.$$

Если известно только y_1 , то

$$y = y_1 + \frac{1}{v},$$

где v — решение линейного уравнения (см. стр. 314):

$$v' + (2Ry_1 + Q)v - R = 0.$$

Если положить $y = -\frac{1}{R} \frac{z'}{z}$, то z будет служить решением однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (см. стр. 324)

$$z'' - \left(\frac{R'}{R} + Q\right)z' + PRz = 0.$$

Если положить $y = \frac{1}{z}$, то для z следует:

$$z' = -R - Qz + Pz^2.$$

Может случиться, что это уравнение решается более просто, чем уравнение (1).

Специальное уравнение Рикатти имеет вид:

$$\begin{aligned} 1\text{-я форма: } a \frac{dy}{dx} + by^2 &= cx^r, & (a, b, r, s \text{ — постоянные,} \\ 2\text{-я форма: } x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 &= cx^s & a \neq 0). \end{aligned}$$

Замена $x^a = X$, $y = XY$ переводит 2-ю форму в 1-ю с $r = \frac{s}{a} - 2$.

Эти уравнения интегрируются в конечном виде лишь в следующих случаях:

Случай 1: $r = 0$, соответственно $s = 2a$, дает случай d (стр. 314).

Случай 2: $r = \frac{-4k}{2k \pm 1}$, $k = 1, 2, \dots$, соответственно $s = \frac{2a}{1 - 2h}$, $h = 0, \pm 1, \dots$

а) Если $h = \frac{s - 2a}{2s} > 0$, то h преобразований

$$y_{2l-1} = \frac{(2l-1)n + a}{c} + \frac{x^n}{y_{2l}}; \quad y_{2l} = \frac{2ln + a}{b} + \frac{x^n}{y_{2l+1}}, \quad l = 0, 1, \dots$$

переводят уравнение формы 2 с $y = y_0$ в

$$\begin{aligned} xy'_h - (a + hs)y_h + by_h^2 &= cx^s, & \text{если } h \text{ четно,} \\ xy'_h - (a + hs)y_h + cy_h^2 &= bx^s, & \text{если } h \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

Эти уравнения относятся к случаю 1.

б) Если $h = \frac{s - 2a}{2s} < 0$, то подстановка $y = \frac{x^n}{y_0}$ приводит к а).

с) Часто к цели приводит *преобразование Лежандра* (см. стр. 194).

Вводят новую зависимую переменную Y : $Y = px - u = \frac{dy}{dx}x - u$, откуда $dY = p dx + x dp - du = x dp$. Затем вводят p в качестве новой независимой переменной:

$$X = p = \frac{dy}{dx},$$

что дает

$$x = \frac{dY}{dp} = \frac{dY}{dX} = P.$$

Теперь уравнение $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ приводится к виду

$$F(P, PX - Y, X) = 0.$$

Если интеграл этого уравнения известен, то интеграл исходного уравнения находится при помощи дифференцирования и исключения.

Если, например, интегралом нового уравнения служит:

$$f(X, Y) = 0,$$

то будем иметь:

$$0 = \frac{df}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + x \frac{\partial f}{\partial Y}$$

и

$$-y \frac{\partial f}{\partial Y} = (Y - px) \frac{\partial f}{\partial Y} = Y \frac{\partial f}{\partial Y} + X \frac{\partial f}{\partial X}.$$

Исключение X и Y из этих трех уравнений дает интеграл (уравнение, связывающее x и y).

2. Некоторые особые формы дифференциальных уравнений высшего порядка

а) $\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(y).$

Это уравнение решается в квадратурах только при $n=1$ и $n=2$ (при $n=1$ см. стр. 314, случай d).

При $n=2$, умножая на $2 \frac{dy}{dx}$ и интегрируя, находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \int \varphi(y) dy + A$$

и отсюда (см. стр. 314, случай d)

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) dy + A}} + B.$$

б₁) Всякое уравнение вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

интегрируется в квадратурах. Положив

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = z, \quad \frac{dz}{dx} = F(z),$$

получим:

$$\int \frac{dz}{F(z)} = x + C.$$

Решая это уравнение относительно z , получаем промежуточный

интеграл

$$z = \varphi(x + C) = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Относительно решения этого уравнения см. случай е стр. 314.

b₂) Для решения уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

полагаем

$$z = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

и получаем:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(z).$$

Отсюда согласно а) (см. выше) будем иметь решение

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{2 \int F(z) dz + A}} + B.$$

Разрешая относительно $z = f(x) = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, получим окончательное решение при помощи интегрирования (см. стр. 314, случай е).

с) **Понижение порядка.** Дифференциальное уравнение *второго* порядка, не содержащее явно одной из переменных, может быть посредством подстановки превращено в уравнение *первого* порядка.

$$1. \quad \psi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Отсутствует } x.$$

Положим $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$ и будем рассматривать p как функцию от y . Тогда получим уравнение первого порядка

$$\psi\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

с решением $p(y) = \frac{dy}{dx}$, откуда $x = \int \frac{dy}{p(y)} + A$.

$$2. \quad \psi\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Отсутствует } y.$$

Если положим $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ и будем рассматривать p как функцию от x , то получим уравнение первого порядка

$$\psi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

д) **Равноразмерные дифференциальные уравнения** (см. стр. 310). Если (при рассмотрении y , а также x как величин первого измерения) дифференциальное уравнение является равноразмерным, то полагаем¹⁾:

$$y = xz \text{ и } x = e^{\theta};$$

ввиду

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{x}$$

будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\theta} + z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta} \right) e^{-\theta}.$$

При выполнении подстановки оказывается, что новая независимая переменная θ не встречается в уравнении в явном виде. Равноразмерное уравнение допускает поэтому подобно уравнениям, рассмотренным в с), понижение порядка. То же самое имеет место, если предложенное дифференциальное уравнение является равноразмерным при рассмотрении y как величины измерения m . В этом случае полагаем:

$$y = x^m z, \quad x = e^{\theta},$$

так что

$$y = z e^{m\theta}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{d\theta} + mz \right) e^{(m-1)\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2z}{d\theta^2} + (2m-1) \frac{dz}{d\theta} + m(m-1)z \right\} e^{(m-2)\theta} \text{ и т. д.}$$

е) **Точные дифференциальные уравнения**²⁾. Точным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F \equiv f \left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, x \right) = 0,$$

если $F dx$ является полным дифференциалом некоторой функции U , причем U есть функция от x , y и производных до $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ включительно.

Тогда равенство $U = \text{const}$ представляет собой промежуточный интеграл. Может случиться, что $F dx$ посредством умножения на некоторую функцию от $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dx}, y$ и x может быть превращено в полный дифференциал (*интегрирующий множитель*).

¹⁾ См. также сноску на стр. 310. (Прим. ред.)

²⁾ Этот термин не общепринят (в оригинале «exakte Differentialgleichungen»). При $n=1$ речь идет об уравнении в полных дифференциалах. (Прим. ред.).

3. Линейные дифференциальные уравнения

а) Общие сведения

1) Общее уравнение n -го порядка этого вида мы пишем в форме

$$X_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + X_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n(x) y = V(x),$$

где X_i и V являются функциями от x . Уравнение называется однородным, если $V=0$, и неоднородным, если $V \neq 0$. Для таких уравнений можно, пользуясь более простой символикой, писать также

$$L(y) = V(x),$$

а для линейного дифференциального оператора L :

$$L = \Phi(D) = X_0 D^n + X_1 D^{n-1} + \dots + X_n = \text{полиному } n\text{-й степени от } D.$$

Здесь приняты обозначения: $D = \frac{d}{dx}$, $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, ..., $D^{-1} = \int dx = \frac{1}{D}$, ... (см. стр. 54). Ценность этого способа записи заключается

в том, что при известных условиях D можно рассматривать как алгебраическую величину (см. стр. 39—40). Следует, однако, иметь в виду ее неперестановочность с теми X_i , которые не являются постоянными;

$$L^\dagger = (-1)^n \{ D^n X_0 - D^{n-1} X_1 + D^{n-2} X_2 - \dots - (-1)^n X_n \}$$

называется дифференциальным оператором, сопряженным с L .

При любых функциях f и g выражение $g(x) Lf(x) - f(x) L^\dagger g(x)$ представляет собой точную производную¹⁾. Если $L = L^\dagger$, то оператор L называется *самосопряженным*.

2) Из линейности дифференциального оператора L получаем: вместе с $L(y_i) = V_i$ ($i=1, 2, 3, \dots$) справедливо $L(\sum_i a_i y_i) = \sum_i a_i V_i$

(здесь и ниже a_i означают постоянные). Отсюда вытекают некоторые важные теоремы:

а) Вместе с $L(y_i) = 0$ справедливо $L(\sum a_i y_i) = 0$, т. е. линейная комбинация решений однородного уравнения снова является его решением. Его общее решение представляет собой такую же комбинацию.

б) Вместе с $L(y_1) = V$ и $L(y_2) = V$ справедливо $L(y_1 - y_2) = 0$, т. е. различные решения неоднородного уравнения отличаются друг от друга лишь на некоторое решение соответствующего однородного уравнения.

¹⁾ Т. е. $g(x) Lf(x) - f(x) L^\dagger g(x) = \frac{d}{dx} h(x)$, где $h(x)$ выражается через f и g без квадратур. (Прим. ред.)

Общее решение неоднородного уравнения равно любому решению плюс общее решение соответствующего однородного уравнения.

с) Если известны решения y_i уравнений $L(y) = V_i$, то известно и решение $y = \sum_i a_i y_i$ уравнения $L(y) = \sum_i a_i V_i = V$. Поэтому, если можно V разложить на слагаемые, для каждого из которых известно одно решение, то можно построить решение и для V .

3) Чтобы k уравнений вида $L(y_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) с различными линейно независимыми y_i были совместными, k не должно превышать n , ибо при $k = n + 1$ определитель Вронского (см. стр. 180) должен был бы быть равным нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^n y_1}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \frac{d^n y_2}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{dy_2}{dx} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n y_{n+1}}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y_{n+1}}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{dy_{n+1}}{dx} & y_{n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

что ввиду предположенной линейной независимости невозможно. Этот определитель будет, однако, равен нулю, если одно из $n + 1$ решений y_i заменить общим решением $y = \sum_{i=1}^n a_i y_i$, построенным с помощью n остальных. Мы возвращаемся, таким образом, к исходному однородному дифференциальному уравнению, в котором коэффициентами X_i служат миноры соответствующих производных от y . Например, при $n = 2$ будем иметь:

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } X_0 y'' + X_1 y' + X_2 y = 0,$$

где

$$X_0 = y_1' y_2 - y_2' y_1,$$

$$X_1 = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -\frac{d}{dx} X_0,$$

$$X_2 = y_1'' y_2' - y_2'' y_1'.$$

Мы имеем здесь соотношение $\frac{X_1}{X_0} = -\frac{d}{dx} \ln(y_1' y_2 - y_2' y_1)$ и другие менее простые соотношения между коэффициентами дифференциального уравнения и его решениями. (Чтобы получить аналогичные соотношения для неоднородного уравнения, следует дополнить определитель строкой производных y_{n+2} и столбцом, состоящим только из единиц.)

4) Для отыскания решения неоднородного уравнения $L(y) = V$ можно положить:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi) V(\xi) d\xi.$$

$G(x, \xi)$ есть функция Грина (см. стр. 48). Чтобы определить ее, подставим предыдущее выражение в уравнение; получим условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(G(x, \xi)) V(\xi) d\xi = V(x); \text{ следовательно, } L(G(x, \xi)) = \delta(x - \xi).$$

Тем самым G , будучи рассматриваема как функция от x (для всех ξ), должна удовлетворять однородному уравнению всюду, кроме $x = \xi$. Мы можем представлять себе ее составленной из двух различных решений уравнения $L(y) = 0$, граничащих друг с другом в точке $x = \xi$.

Далее, должно быть: $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} L(G(x, \xi)) d\xi = 1$. Мы достигнем этого, если заставим $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ совершать скачок на $1/X_0$, в то время как сама G и ее производные более низкого порядка останутся непрерывными.

Этим функция $G(x, \xi)$ еще не определена однозначно, так как не наложены краевые условия. Однако нам нужно знать ее лишь с такой точностью, чтобы с ее помощью получалось *какое-либо одно* решение уравнения $L(y) = V$. В рассматриваемой задаче проще всего положить $G(x, \xi)$ равной нулю при $\xi > x$. Мы суживаем поэтому класс рассматриваемых функций, принимая $y = \int_{-\infty}^x G(x, \xi) V(\xi) d\xi$, и требуем:

$$L(G(x, \xi)) = 0,$$

а также

$$G = \frac{\partial G}{\partial x} = \dots = \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}} = 0 \text{ и } \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{X_0} \text{ при } x = \xi.$$

Если общее решение $y = \sum_{i=1}^n a_i y_i$ уравнения $L(y) = 0$ известно, то полагают $G(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) y_i(x)$ и находят функции $\varphi_i(\xi)$ из системы линейных уравнений как функции известных $y_i(\xi)$ и их производных

$$\sum_i \varphi_i(\xi) \frac{d^k}{d\xi^k} y_i(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < n-1, \\ \frac{1}{X_0(\xi)} & \text{при } k = n-1. \end{cases}$$

Найденное решение может быть записано также в форме

$$y = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{-\infty}^x \varphi_i(\xi) V(\xi) d\xi.$$

Оно представляет собой, таким образом, линейную комбинацию функций $y_i(x)$ с коэффициентами, зависящими от x (так называемая вариация постоянных).

**в) Линейные дифференциальные уравнения
с постоянными коэффициентами**

Общий способ допускает упрощение, если коэффициенты X_i являются постоянными: $X_i = A_i$.

Образум уравнение, называемое «характеристическим»:

$$\Phi(\alpha) = A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \dots + A_n = 0.$$

Предположим, что все его n корней α_i различны. Тогда $y = \sum_{i=1}^n a_i e^{\alpha_i x}$ с произвольными a_i представляет собой общее решение *однородного* уравнения.

Если ν корней α_i равны между собой: $\alpha_l = \alpha_{l+1} = \alpha_{l+2} = \dots = \alpha_{l+\nu-1}$, то соответствующую им часть общего решения следует заменить выражением $(a_l + x a_{l+1} + x^2 a_{l+2} + \dots + x^{\nu-1} a_{l+\nu-1}) e^{\alpha_l x}$.

Частное решение *неоднородного* уравнения находится с помощью функции Грина, которая здесь имеет вид

$$G(x, \xi) = G(x - \xi).$$

При этом можно применять следующие методы:

1) Будем рассматривать $D = \frac{\partial}{\partial x}$ как алгебраическую величину и разложим $\frac{1}{\Phi(D)}$ по *убывающим* степеням D . Тогда решение можно представить в форме

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} V(x) = \sum_k c_k \frac{1}{D^k} V(x).$$

Но, как легко убедиться (см. стр. 54),

$$\frac{1}{D^k} V(x) = \int \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} V(\xi) d\xi.$$

Отсюда получаем:

$$y = \int \sum_k c_k \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} V(\xi) d\xi.$$

Сумма, очевидно, представляет собой искомую функцию Грина. Неопределенности нижнего предела интегрирования соответствует свобода выбора постоянных в решении однородного уравнения.

Уравнение $\frac{d^n}{dx^n} y = V(x)$ допускает решение:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x V(t) (x-t)^{n-1} dt + \text{произвольный полином } (n-1)\text{-й степени.}$$

2) Вместо разложения, приведенного выше, можно также разложить $\frac{1}{\Phi(D)}$ на простейшие дроби (см. стр. 62):

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \sum_k \sum_{\nu=1}^{\nu_k} \frac{C_k^{(\nu)}}{(D - \alpha_k)^\nu} \quad (\nu_k \text{ — кратность корня } \alpha_k).$$

Ввиду

$$\frac{1}{(D - \alpha_k)^\nu} V(x) = \int \frac{(x - \xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\alpha_k(x-\xi)} V(\xi) d\xi$$

мы получим:

$$y = \int \sum_k \sum_{\nu=1}^{\nu_k} C_k^{(\nu)} \frac{(x - \xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\alpha_k(x-\xi)} V(\xi) d\xi.$$

3) Можно также $V(x)$ представить в виде

$$V(x) = \sum_k C_k e^{\omega_k x},$$

где ω_k и C_k будут, вообще говоря, комплексными. Тогда получим решение в форме

$$y = \sum_k \frac{C_k e^{\omega_k x}}{\Phi(\omega_k)}.$$

4) Если разложим $\frac{1}{\Phi(D)}$ по *возрастающим* степеням D , то будем иметь:

$$y = \sum_k C_k D^k V(x).$$

Этот ряд обрывается, если $V(x)$ — целая рациональная функция.

Какой из способов 1) — 4) является более удобным, зависит от вида заданных функций Φ и V , а также от начальных условий. Сходимость различных встречающихся разложений, разумеется, должна быть исследована дополнительно.

К этим решениям следует присоединить общее решение однородного уравнения.

с) Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид уравнений здесь таков:

$$L(y) = X_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1(x) \frac{dy}{dx} + X_2(x) y = V(x).$$

L является самосопряженным, если $X_1 = \frac{d}{dx} X_0$, и, следовательно, $L = DX_0 D + X_2$. Этому всегда можно достичь либо умножением обеих частей уравнения на $\frac{1}{X_0} e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx}$, либо введением новой зависимой пере-

менной: $z = \frac{y}{X_0} e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx}$.

Решения дифференциального уравнения мы ищем в виде:

- 1) известных функций или функций, получаемых из них посредством преобразований,
 - 2) разложений в ряды,
 - 3) интегралов,
- или при помощи
- 4) понижения порядка,
- или также при помощи
- 5) численных методов (например, метода Рунге — Кутты).

Ниже мы используем более удобную для дальнейшего форму с $X_0(x) = 1$, которая получается при помощи деления на X_0 и соответствующего переименования.

При интегрировании, как правило, сначала пытаются найти хотя бы одно решение однородного уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1(x) \frac{dy}{dx} + X_2(x)y = 0.$$

Между двумя решениями y_1 и y_2 этого уравнения существует соотношение $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = Be^{-\int X_1 dx}$ с неопределенной постоянной B , так что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{B}{y_1^2} e^{-\int X_1 dx}.$$

Поэтому, если какое-либо y_1 известно, то y_2 получается при помощи квадратур в виде

$$y_2 = y_1 \left(A + B \int \frac{dx e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2} \right).$$

Общее решение однородного уравнения есть произвольная линейная комбинация:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

1. Метод преобразования. Если ни одно y_1 не удастся выразить через известные функции, то пытаются преобразовать уравнение таким образом, чтобы прийти к какому-либо уравнению с известным решением. При этом в первую очередь следует иметь в виду:

а) *Преобразование зависимой переменной y .* Здесь можно рекомендовать подстановку $z = ye^{\int f dx}$. Она приводит к уравнению

$$z'' + (X_1 - 2f)z' + (X_2 - fX_1 - f' + f^2)z = 0.$$

Может случиться, что при надлежащем выборе функции $f(x)$ мы придем к уравнению, для которого одно решение $z(x)$ известно.

Частные случаи:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}; z = yx^\alpha; z'' + \left(X_1 - 2\frac{\alpha}{x}\right)z' + \left(X_2 - \frac{\alpha}{x}X_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right)z = 0.$$

$$f(x) = \beta; z = ye^{\beta x}; z'' + (X_1 - 2\beta)z' + (X_2 - \beta X_1 + \beta^2)z = 0.$$

$$f(x) = \gamma x; z = ye^{\int \frac{x^2}{2}}; z'' + (X_1 - 2\gamma x)z' + (X_2 - \gamma x X_1 - \gamma + \gamma^2 x^2)z = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}X_1; z = ye^{\frac{1}{2}\int X_1 dx}; z'' + \left(X_2 - \frac{1}{2}X_1' - \frac{1}{4}X_1^2\right)z = 0.$$

Последняя форма: $z'' + I(x)z = 0$ называется также «нормальной формой».

β) Преобразование независимой переменной x . Сделаем подстановку: $z(x) = u(u(x))$. Она приводит к уравнению

$$z'' + \left(u'X_1(u(x)) - \frac{u''}{u'}\right)z' + u'^2X_2(u(x))z = 0,$$

т. е. в данных функциях $X_1(x)$ и $X_2(x)$ следует x заменить на u . Функция $u(x)$ должна быть выбрана надлежащим образом.

Частные случаи:

$$u = ax; z(x) = y(ax); z'' + aX_1(ax)z' + a^2X_2(ax)z = 0.$$

$$u = x^b; z(x) = y(x^b);$$

$$z'' + \left(bx^{b-1}X_1(x^b) + \frac{1-b}{x}\right)z' + (bx^{b-1})^2X_2(x^b)z = 0.$$

Если функция $u(x)$ определена посредством $x = \int ds e^{-\int X_1(t)dt}$ и, зна-

чит, $u' = e^{\int X_1(t)dt}$, $u'' = X_1(u)u'^2$, то отсюда следует: $z'' + u'^2X_2(u)z = 0$, так что мы снова приходим к нормальной форме $z'' + Iz = 0$. Можно также комбинировать несколько таких преобразований.

Если дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$X_0 y'' + X_1 y' + X_2 y = \lambda y$$

с (не зависящим от x) параметром λ , то при помощи преобразования $y = zf(x)$ оно приводится к самосопряженной форме:

$$\frac{d}{dx}(X_0 z') + \left(\frac{f''}{f}X_0 + \frac{f'}{f}X_1 + X_2\right)z = \lambda z,$$

если положить: $f = \sqrt{X_0} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{X_1}{X_0} dx}$.

Если известны два решения z_1 и z_2 , соответствующие двум различным λ_1 и λ_2 , то имеем:

$$X_0(z_2 z_1' - z_1 z_2') \Big|_\alpha^\beta = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_\alpha^\beta z_1 z_2 dx.$$

Если при определенном выборе α и β левая часть обращается в нуль, то z_1 и z_2 будут ортогональны в полученной области:

$$\int_{\alpha}^{\beta} z_1 z_2 dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y_1 y_2}{f^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y_1 y_2}{X_0} e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx} dx = 0.$$

Функция $1/f^2$ называется *весовой функцией* соотношений ортогональности.

Если общее решение однородного уравнения найдено, то мы получаем

общее решение неоднородного уравнения ($V(x) \neq 0$) при помощи метода стр. 332 или при помощи метода *вариации постоянных* в симметричной форме:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \frac{1}{B} \int_{\xi}^x V(\xi) e^{\int X_1 dx} (y_1(\xi) y_2(x) - y_1(x) y_2(\xi)) d\xi.$$

C_1 и C_2 — постоянные, значениями которых мы можем распорядиться; B определяется выбором y_1 и y_2 (см. стр. 325).

Таким образом, если известно *одно* решение однородного уравнения, то можно найти общее решение неоднородного уравнения при помощи одних лишь квадратур. Правда, этот способ не имеет большого практического значения.

2. Решение при помощи разложения в ряд. Этот метод применим в том случае, когда уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} (a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots) + \frac{dy}{dx} (a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots) + y (a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

Чтобы привести уравнение к такому виду, иногда приходится прибегать к разложению его коэффициентов в степенные ряды.

Предположим, что y имеет вид

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{1}$$

и подставим это выражение в уравнение. Сравнивая коэффициенты, мы получим для c_k , вообще говоря, бесконечную систему линейных

уравнений $\sum_{k=0}^{\infty} A_{ik} c_k = b_i$, начинающуюся с

$$\begin{aligned} c_0 a_{20} + c_1 a_{10} + c_2 \cdot 2a_{00} &= b_0, \\ c_0 a_{21} + c_1 (a_{11} + a_{20}) &= c_2 (2a_{01} + 2a_{10}) + c_3 \cdot 3a_{00} = b_1, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Эта система легко решается. Каждое новое уравнение содержит по сравнению с предшествующим одно новое неизвестное c_k . Если ни одно из a_{ik} не исчезает, то два c_k остаются неопределенными и играют роль произвольных постоянных интегрирования.

Также и здесь мы сначала ищем решения однородного уравнения с $b_i = 0$.

Чтобы сделать систему уравнений более удобообозримой, напомним схему ее коэффициентов A_{ik} в следующей форме:

$k \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	a_{20}	a_{10}	$2a_{00}$	—	—	—
1	a_{21}	$a_{11} + a_{20}$	$2a_{01} + 2a_{10}$	$2 \cdot 3a_{00}$	—	—
2	a_{22}	$a_{12} + a_{21}$	$2a_{02} + 2a_{11}$	$2 \cdot 3a_{01} + 2a_{10}$	$3 \cdot 4a_{00}$	—
3	a_{23}	$a_{13} + a_{22}$	$2a_{03} + 2a_{12}$	$2 \cdot 3a_{02} + 3a_{11} + a_{20}$	$3 \cdot 4a_{01} + 4a_{10}$	$4 \cdot 5a_{00}$
4	a_{24}	$a_{14} + a_{23}$	$2a_{04} + 2a_{13}$	$2 \cdot 3a_{03} + 3a_{12} + a_{21}$	$3 \cdot 4a_{02} + 4a_{11} + a_{20}$	$4 \cdot 5a_{01} + 5a_{10}$

$$A_{ik} = k(k-1)a_{0,i-k+2} + ka_{1,i-k+1} + a_{2,i-k} \quad (2)$$

Если в каждом из данных рядов не более чем два коэффициента A_{ik} отличны от нуля, то легко видеть, что A_{ik} будут представлять собой комбинации одних и тех же трех a_{ik} , вследствие чего система будет решаться при помощи двучленных рекуррентных формул. К числу таких случаев принадлежат следующие:

Неисчезающие a_{ik}	Тип дифференциального уравнения
$(a_{02}, a_{11}, a_{20})(a_{01}, a_{10})$ $(a_{02}, a_{11}, a_{20})a_{00}$	Гипергеометрическое дифференциальное уравнение Дифференциальные уравнения Чебышева и Лежандра
$(a_{11}, a_{20})(a_{01}, a_{10})$ $(a_{11}, a_{20})a_{00}$	Дифференциальное уравнение Лагерра Дифференциальное уравнение Эрмита
$(a_{02}, a_{11}, a_{20})a_{22}$ a_{00}, a_{20}	Дифференциальное уравнение Бесселя Уравнение колебаний

Если в данных рядах имеется не более чем по три отличных от нуля a_{ik} , то получаем трехчленные рекуррентные формулы, и т. д.

Часто, однако, случается, что при применении этого способа остается только одно произвольное постоянное c_k или же ни одного, или возникают противоречия; в частности, это будет иметь место, если X_1 или X_2 при $x=0$ становятся бесконечными. В этом случае мы не получаем никакого решения или не получаем общего решения.

Исходное предположение (1) является слишком узким. Здесь может вести к цели следующий способ: положив

$$y = x^\alpha (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = x^\alpha u(x, \alpha),$$

находим α из «определяющего уравнения»:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha x \frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots} + x^2 \frac{a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots} = 0$$

при $x = 0$,

т. е. в применявшихся ранее обозначениях:

$$(\alpha(\alpha - 1) + \alpha x X_1 + x^2 X_2)_{x=0} = 0.$$

Это возможно лишь при условии, что X_1 и X_2 при $x=0$ обращаются в бесконечность не выше первого, соответственно второго, порядка. Мы получаем тогда два корня $\alpha_1 = \sigma$ и $\alpha_2 = \tau$ — так называемые *показатели* особой точки $x=0$, и два соответствующих им решения. Схема коэффициентов (2) в этом случае должна быть заменена следующей:

$$A_{ik} = (k + \alpha)(k + \alpha - 1)a_{0, i-k+2} + (k + \alpha)a_{1, i-k+1} + a_{2, i-k}.$$

Если определяющее уравнение для α имеет двойной корень $\alpha = \sigma$ или два корня σ и τ ($\sigma > \tau$), разность которых есть целое число, то при этом снова теряется одно решение, т. е. оба решения

$$y_1 = x^\sigma u(x, \sigma) \text{ и } y_2 = x^\tau u(x, \tau)$$

совпадают.

В этом случае вторым решением будет:

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^\alpha u(x, \alpha)) \Big|_{\alpha=\sigma} = y_1 \ln x + x^\sigma \frac{\partial}{\partial \alpha} u(x, \alpha) \Big|_{\alpha=\sigma}$$

или

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^\alpha u(x, \alpha)) \Big|_{\alpha=\tau} = x^\tau u(x, \tau) \ln x + x^\tau \frac{\partial}{\partial \alpha} u(x, \alpha) \Big|_{\alpha=\tau}.$$

Если удастся описанным способом найти общее решение однородного уравнения, то достаточно прибавить к нему произвольное решение неоднородного уравнения, чтобы получить общее решение последнего.

Областью сходимости для полученных разложений служит круг с центром в $x=0$, окружность которого проходит через ближайшую особую точку X_1 или X_2 .

После соответствующего преобразования $x' = x - c$ можно, конечно, искать решение в виде разложения в окрестности точки $x=c$. Такие точки, где определяющее уравнение имеет два конечных корня, называются *правильными точками дифференциального уравнения*, или *точками определенности*. Если встречаются бесконечные корни, точка называется *неправильной*. Метод разложения здесь перестает быть применимым.

3. Решение при помощи определенных интегралов. Излагаемый далее метод применяется к однородным дифференциальным уравнениям вида

$$(a + \alpha x)y'' + (b + \beta x)y' + (c + \gamma x)y = 0$$

с постоянными $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$.

Образует функции:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= at^2 + bt + c, \\ \psi(t) &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma\end{aligned}$$

и с их помощью — функцию

$$f(t) = e^{\int \frac{\varphi - \psi'}{\psi} dt} = \frac{1}{\psi} e^{\int \frac{\varphi}{\psi} dt}.$$

Тогда

$$y = \int_A^B e^{tx} f(t) dt$$

представляет собой решение данного дифференциального уравнения, если пределы интеграла (который может быть и комплексным) выбраны так, чтобы было:

$$e^{tx} \psi(t) f(t) \Big|_A^B = 0.$$

В общем случае существуют два различных пути интегрирования, удовлетворяющих этому условию, что приводит к двум линейно независимым решениям. Путь интегрирования часто бывает замкнутым и включает внутри себя особенность функции $f(t)$, или же он начинается и оканчивается в бесконечности.

Решениями служат выражения вида

$$y = e^{\beta x} F(\alpha, \gamma, \xi), \quad \text{где } \xi = a + \alpha x \quad (\text{см. стр. 140}).$$

Метод может быть применен также к дифференциальным уравнениям, несколько отличным по форме от приведенных выше. В этих случаях, однако, нельзя дать столь же простых указаний.

4. Решение при помощи понижения порядка. Если вместо y ввести новую независимую переменную $z = \frac{y'}{y}$, откуда следует, что

$$y = Ae^{\int z dx},$$

то z будет удовлетворять уравнению Рикатти (см. стр. 313):

$$z' + X_2 + X_1 z + z^2 = 0.$$

Это уравнение можно решать, заменяя z выражением

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \dots,$$

после чего результирующее уравнение распадается на ряд уравнений, из которых каждое z_k может быть найдено в виде функции от предыдущих и их производных.

В случае нормальной формы $y'' + Iy = 0$, к которой может быть приведено всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка (см. стр. 326), получаем:

$$z_0^2 + I = 0, \quad z_0 = \pm \sqrt{-I},$$

$$2z_0 z_1 + z_0' = 0, \quad z_1 = -\frac{1}{2} \frac{z_0'}{z_0} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln z_0,$$

$$2z_0 z_2 + z_1^2 + z_1' = 0, \quad z_2 = -\frac{1}{2z_0} (z_1^2 + z_1'),$$

$$2z_0 z_3 + 2z_1 z_2 + z_2' = 0, \quad z_3 = -\frac{1}{2z_0} (2z_1 z_2 + z_2'),$$

$$2z_0 z_4 + 2z_1 z_3 + z_3^2 + z_3' = 0, \quad z_4 = -\frac{1}{2z_0} (2z_1 z_3 + z_3^2 + z_3'),$$

.....

Нечетные члены всегда являются действительными; знак их однозначно определен, и, будучи производными, они интегрируемы. Четные члены при положительном I являются мнимыми. Выбирая двумя способами знак у z_0 , мы получаем две системы четных членов и тем самым оба независимых частных решения дифференциального уравнения второго порядка.

Нечетные члены определяют действительный амплитудный множитель, четные — фазовый множитель в представлении

$$y = Ae^{-\frac{1}{2} \left(\ln z_0 + \frac{z_2}{z_0} + \frac{z_4}{z_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{z_2}{z_0} \right)^2 + \dots \right)} e^{\pm i \int dx \sqrt{I} \left(1 + \frac{z_2}{z_0} + \frac{z_4}{z_0} + \dots \right)},$$

первым приближением для которого является:

$$y = AI^{-1/4} e^{\pm i \int I^{1/2} dx}.$$

Метод отказывается служить вблизи точек, в которых I обращается в нуль, а также там, где производные I слишком велики. Судить о сходимости, вообще говоря, трудно.

Все же оказывается возможным указать по обе стороны простого нуля функции I такие аппроксимации, которые являются приближениями одного и того же точного частного решения дифференциального уравнения. Если, например, $I(x_0) = 0$ и $I(x) < 0$ при $x < x_0$,

$I(x) > 0$ при $x > x_0$, то получаем:

$$y(x) = \frac{A}{i} |I^{-1/4}| e^{\int_x^{x_0} I^{1/2} dx} + \frac{A}{2} |I^{-1/4}| e^{-\int_x^{x_0} I^{1/2} dx} \quad \text{при } x < x_0,$$

$$y(x) = AI^{-1/4} e^{i \left[\int_{x_0}^x I^{1/2} dx - \frac{\pi}{4} \right]} \quad \text{при } x > x_0.$$

Действительная и мнимая части этого представления дают два независимых частных решения. Вблизи нуля $x = x_0$ совпадающие частные решения могут быть представлены разложением

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{i\pi}{3}} (I'(x_0))^{-\frac{1}{6}} \left\{ 3^{-\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + 3^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2\pi i}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right\} \times \\ \times (I'(x_0))^{\frac{1}{3}} (x - x_0) - 3^{-\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{I'(x_0)}{6} (x - x_0)^2 + \dots \}^1.$$

4. Системы дифференциальных уравнений

Систему n дифференциальных уравнений *первого порядка*, разрешенных относительно производных, в которой наряду с n зависимыми переменными y содержится лишь *одно* независимое переменное x , можно записать в форме:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Всякая система дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями одной независимой переменной может быть приведена к такому виду. В частности, например, если встречаются и вторые производные, например $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$, то вводят новое зависимое переменное y_{n+1} при помощи еще одного уравнения $\frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}$ и заменяют $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$ через $\frac{dy_{n+1}}{dx}$. Аналогичным образом поступают в случаях, когда встречаются высшие производные.

¹⁾ Дальнейшие подробности относительно этого метода (в квантовой механике называемого методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна) см. Н. А. Кратерс, Z. f. Phys. 39, 828 (1926) или А. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien II (см. русский перевод: А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. II, М., 1956, стр. 592).

Полное решение представляется системой n уравнений вида
 $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n; C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$

где C_i — произвольные постоянные. Кроме того, могут существовать и особые решения.

Дифференциальные уравнения могут быть также записаны в форме:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{X_2}{X} \quad \text{и т. д.},$$

где X, X_1 и т. д. — функции от x, y_1, y_2, \dots, y_n , так что будем иметь:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \dots = \frac{dy_n}{X_n}.$$

Далее, решения могут быть записаны также в форме:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_1, \\ \Psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_2 \quad \text{и т. д.}, \end{aligned}$$

где функции Ψ_i не связаны друг с другом никакой зависимостью (т. е. их функциональный определитель не исчезает тождественно).

Всякая функция $\Pi(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$, будучи приравнена постоянной, точно так же представляет собой решение, и в этом случае справедливо уравнение

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \dots = 0.$$

а) Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть число уравнений равно числу зависимых переменных.

Если имеются только две зависимые переменные x и y и одна независимая переменная t , то система в символической записи, применявшейся на стр. 320, будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_1(D)x + \varphi_1(D)y &= T_1, \\ f_2(D)x + \varphi_2(D)y &= T_2; \end{aligned}$$

T_1 и T_2 — функции только от t .

Если теперь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — корни уравнения

$$\varphi_2(\lambda)f_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda)f_2(\lambda) = 0,$$

предполагаемые различными, то *полное* решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_m e^{\lambda_m t} + P(t), \\ y &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + B_m e^{\lambda_m t} + Q(t), \end{aligned}$$

в котором A_i — произвольные постоянные.

Числа B_i находятся из соотношений

$$A_i f_1(\lambda_i) + B_i \varphi_1(\lambda_i) = 0.$$

При этом $P(t)$ представляет собой *частный* интеграл уравнения

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} x = \varphi_2(D) T_1 - \varphi_1(D) T_2,$$

$Q(t)$ — *частный* интеграл уравнения

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} y = f_1(D) T_2 - f_2(D) T_1.$$

Если два λ , например λ_1 и λ_2 , комплексно сопряженные,

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

то соответствующая часть выражения для x —

$$e^{\alpha t} (L_1 \cos \beta t + L_2 \sin \beta t)$$

и выражения для y —

$$e^{\alpha t} (M_1 \cos \beta t + M_2 \sin \beta t).$$

Соотношения между L и M проще всего находить посредством подстановки в дифференциальное уравнение.

Если два λ , например λ_1 и λ_2 , равны, то соответствующая часть выражения для x —

$$e^{\lambda t} (A + A't)$$

и выражения для y —

$$e^{\lambda t} (B + B't).$$

При этом справедливы соотношения

$$A' f_1(\lambda) + B' \varphi_1(\lambda) = 0,$$

$$A f_1(\lambda) + B \varphi_1(\lambda) + A' \frac{df_1(\lambda)}{d\lambda} + B' \frac{d\varphi_1(\lambda)}{d\lambda} = 0.$$

Если в соответствии со стр. 332 введем новые зависимые переменные y_i , то придем к общему случаю

б) Системы однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка¹⁾

$$\frac{dy_1}{dx} = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n,$$

$$\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n.$$

¹⁾ В тензорных обозначениях система имеет вид $\frac{d\eta}{dx} = \mathfrak{L}\eta$, и вектор-решение $\eta = \eta_0 e^{\lambda x}$, где λ определяется из задачи о собственных значениях: $\mathfrak{L}\eta = \lambda\eta$. Таков смысл уравнения, содержащего определитель.

— так называемое *условие интегрируемости* — представляет собой необходимое и достаточное условие существования решения, имеющего вид

$$\Phi(x, y, z) = C.$$

Геометрически решение определяет семейство поверхностей. Уравнение, для которого выполнено условие интегрируемости, называется «уравнением в полных дифференциалах».

б) Если $K \neq 0$, то берем произвольное соотношение

$$\psi(x, y, z) = 0$$

и его дифференциал

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0.$$

Выразив из этих двух уравнений z и dz через x , y , dx и dy и подставив полученные выражения в дифференциальное уравнение Пфаффа, получим уравнение вида

$$M dx + N dy = 0,$$

где M и N представляют собой функции от x и y . Пусть

$$\varphi(x, y) = C$$

служит интегралом этого уравнения. Тогда *решение* исходного уравнения состоит из двух совместных уравнений:

$$\psi(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y) = C.$$

Решение представляет, таким образом, некоторые семейства кривых на произвольных поверхностях.

с) В случае $K = 0$ решение $\Phi(x, y, z) = \text{const}$ находится следующим образом. Образует вспомогательное уравнение

$$P dx + Q dy = 0,$$

в котором z рассматриваем как постоянную, и ищем интеграл $u(x, y, z) = \text{const}$, для которого, следовательно, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0;$$

после этого находим «интегрирующий» множитель λ из уравнений

$$\lambda = \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y},$$

который приводит уравнение

$$\lambda(P dx + Q dy + R dz) = 0$$

к виду

$$du + S dz = 0,$$

где

$$\lambda R - \frac{\partial u}{\partial z} = S.$$

Если, наконец, S , зависящее от x, y, z , выразить через переменные x, u, z с помощью уравнения $u(x, y, z) = u$,

$$S(x, y, z) = \bar{S}(x, u, z),$$

то в этой новой форме \bar{S} не будет зависеть от x . Полный интеграл $\psi(u, z) = \text{const}$ уравнения

$$du + \bar{S} dz = 0$$

дает тогда полное решение исходного дифференциального уравнения, если еще в $\psi(u, z)$ заменить u через $u(x, y, z)$:

$$\psi(u, z) = \Phi(x, y, z) = \text{const}.$$

Вместе с определенным выше λ , интегрирующим множителем, будет также $\lambda F(\Phi)$, где F является произвольной функцией решения Φ . Интегрируемость, т. е. существование интегрирующего множителя, имеет следующий геометрический смысл: если x, y, z интерпретируются как пространственные координаты, то, исходя из данной точки и двигаясь по кривым, являющимся решениями дифференциального уравнения, нельзя достичь *каждой* точки, принадлежащей окрестности данной точки ¹⁾.

Для случаев более чем трех переменных имеют место аналогичные факты в многомерном пространстве; в случае двух переменных всегда существует интегрирующий множитель.

С. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В дальнейшем u, v всегда означают зависимые, x, y — независимые переменные. Кроме того, используются обозначения:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \\ r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$

1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

а) Уравнения, линейные относительно производных

В случае двух независимых переменных уравнение имеет вид

$$P(x, y, u) p + Q(x, y, u) q = R(x, y, u).$$

¹⁾ Это означает, что совокупность таких кривых образует многообразное меньшего числа измерений, чем само пространство. (Прим. ред.)

Образует систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. стр. 332):

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$$

(характеристическую систему) и найдем для нее два независимых интеграла

$$\varphi(x, y, u) = a$$

и

$$\psi(x, y, u) = b.$$

Тогда

$$f(\varphi, \psi) = 0 \quad (f \text{ — произвольная функция})$$

представляет собой решение дифференциального уравнения, содержащее все решения, за исключением особых.

Способ этот может быть перенесен на случай более чем двух независимых переменных.

б) Важные частные случаи

1-й случай: $\varphi(p, q) = 0$ или $q = f(p)$.

Переменные не входят в явном виде в уравнение.

Полным интегралом служит

$$u = ax + by + c, \text{ где } \varphi(a, b) = 0 \text{ или } b = f(a);$$

таким образом,

$$u = ax + yf(a) + c.$$

2-й случай: $\chi(u, p, q) = 0$.

Независимые переменные не входят в явном виде в уравнение.

Положим $u = u(x + ay) = u(\xi)$. Тогда будем иметь:

$$p = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad q = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \frac{du}{d\xi}.$$

Это приводит к уравнению $\chi\left(u, \frac{du}{d\xi}, a \frac{du}{d\xi}\right)$, являющемуся обыкновенным дифференциальным уравнением, из которого находим:

$$\frac{du}{d\xi} = \varphi(u, a)$$

и, следовательно,

$$x + ay + b = \int \frac{du}{\varphi(u, a)} = F(u, a).$$

3-й случай: $\varphi(x, p) = \psi(y, q)$ (разделение переменных).

Приравнявая обе части уравнения постоянной a , получаем:

$$p = \theta_1(x, a), \quad q = \theta_2(y, a).$$

Интегралы обоих этих уравнений:

$u = f_1(x, a) +$ произвольная функция, не зависящая от x ,
 $u = f_2(y, a) +$ произвольная функция, не зависящая от y ,
 содержатся в

$$u = f_1(x, a) + f_2(y, a) + b$$

— полным решением исходного уравнения.

4-й случай: $u = px + qy + \varphi(p, q)$.

Полным решением этого уравнения является

$$u = ax + by + \varphi(a, b).$$

2. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно вторых производных

а) Нормальная форма уравнения с двумя независимыми переменными

Пусть дано действительное дифференциальное уравнение

$$R(x, y)r + 2S(x, y)s + T(x, y)t = V(x, y, p, q, u). \quad (1)$$

В зависимости от того, будет ли в точке x, y определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} > 0, = 0, < 0,$$

дифференциальное уравнение в этой точке называется уравнением соответственно *эллиптического, параболического, гиперболического* типа.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2S\frac{dy}{dx} + T = 0,$$

распадающееся на два линейных дифференциальных уравнения, имеет в качестве решений два однопараметрических семейства кривых на x, y -плоскости:

$$f_1(x, y) = a, \quad f_2(x, y) = b.$$

При $\Delta < 0$ эти кривые действительны (*характеристики*), при $\Delta > 0$ они являются комплексными. При $\Delta = 0$ оба семейства совпадают.

Если ввести параметры a и b в качестве новых независимых переменных, то уравнение (1) перейдет в

$$u_{ab} = F(a, b, u, u_a, u_b). \quad (2)$$

Это уравнение является действительным в *гиперболическом* случае (1-я *нормальная форма*). При помощи подстановки

$$a = \xi + \eta, \quad b = \xi - \eta$$

оно может быть преобразовано в уравнение

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

которое точно так же является действительным при $\Delta < 0$ (2-я нормальная форма). В эллиптическом случае ($\Delta > 0$) из уравнения (2) можно при помощи подстановки

$$a = \xi + i\eta, \quad b = \xi - i\eta$$

получить действительную нормальную форму

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

В параболическом случае ($\Delta = 0$) мы имеем $a \equiv b$. Положив

$$a = b = \xi, \quad \eta = \text{произвольной функции от } x, y,$$

получим следующую нормальную форму:

$$u_{\xi\xi} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

б) Метод разделения переменных

При приведении линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными по двум или большему числу независимых переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) к обыкновенным дифференциальным уравнениям часто оказывается удобным исходить из следующего представления искомой функции:

$$u = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n). \quad (3)$$

Во многих случаях бывает также необходимо предварительно перейти от переменных x к другой системе переменных $x'_i = x'_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы затем попытаться использовать выражение вида (3), составленное для новых переменных. Полное решение находится тогда как линейная комбинация частных решений, имеющих вид (3).

Этот метод ведет к цели, если дифференциальное уравнение посредством подстановки в него выражения (3) может быть приведено (например, с помощью деления на $f_2 f_3 \dots f_n$) к виду

$$\Phi_1\left(x_1, \frac{df_1}{dx_1}, \frac{d^2 f_1}{dx_1^2}\right) + \Phi_2\left(x_2, x_3, \dots, x_n, \frac{df_2}{dx_2}, \dots\right) = 0,$$

характеризующемуся тем, что уравнение распадается на два слагаемых, из которых одно (Φ_1) содержит лишь одно независимое переменное, например x_1 , в то время как другое этого переменного не содержит. Ввиду того, что это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях x_1 , функция Φ_1 должна быть равна постоянной.

Мы полагаем поэтому $\Phi_1 = k_1 = -\Phi_2$. Первое уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение; второе уравнение пытаются разложить дальше, аналогично тому, как это было проделано для исходного уравнения.

Если этот метод удастся провести до конца, то мы получаем решение вида (3), содержащее $n - 1$ произвольных постоянных разде-

ления $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$. Эти постоянные часто бывают подчинены ограничениям, налагаемым дополнительными требованиями (однозначность, краевые условия и т. п.), допускающими для них лишь некоторое определенное, например дискретное, множество значений.

При помощи этого метода находятся, в частности, следующие

с) Специальные частные решения важных дифференциальных уравнений физики

1) Основное уравнение теории функций (уравнение Лапласа):

$$\Delta V = 0 \text{ на плоскости}^1).$$

a) $x_1 = x, x_2 = y; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$

Частное решение: $V_k = e^{\pm k(x \pm iy)}, V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2)$,
соответственно $V = f_1(x + iy) + f_2(x - iy).$

b) $x_1 = \rho, x_2 = \varphi; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$

Частное решение: $V_k = \rho^{\pm k} e^{ik\varphi}, V_0 = a_1 + a_2 \ln \rho.$

2) Основное уравнение теории потенциала:

$$\Delta V = 0 \text{ в пространстве.}$$

a) $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Частное решение: $V_{klm} = e^{(kx + ly + mz)}$, где $k^2 + l^2 + m^2 = 0.$

b) $x_1 = \rho, x_2 = \varphi, x_3 = z; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Частное решение ²⁾: $V_{km} = e^{\pm i(kz \pm m\varphi)} Z_m(ik\rho),$

$$V_m = (a_1 z + a_2) \rho^m e^{\pm im\varphi},$$

$$V_{k0} = e^{\pm ikz} (b_1 \varphi + b_2) Z_0(ik\rho), V_{00} = (a_1 z + a_2)(b_1 \varphi + b_2)(c_1 + c_2 \ln \rho).$$

c) $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = \vartheta;$

$$r^2 \Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

¹⁾ Решением неоднородного уравнения $\Delta V = a$ служит $V = V_1 + V_2$, где $\Delta V_1 = 0, \Delta V_2 = a$, причем можно взять, например, $V_2 = \frac{a}{2} x^2$, или $\frac{a}{2} y^2$, или $\frac{ar^2}{4} = \frac{a}{4} (x^2 + y^2).$

²⁾ Z_m означает цилиндрическую функцию порядка m (см. стр. 146). Y_n означает сферическую функцию порядка n (см. стр. 137). P_n^k означает присоединенную сферическую функцию (см. стр. 136).

Частное решение:

$$V_n = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) Y_n(\vartheta, \varphi),$$

соответственно $V_{nk} = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) e^{\pm ik\varphi} P_n^k(\cos \vartheta)$. Если $V(r, \vartheta, \varphi)$ есть решение, то таковым является также и $\frac{1}{r} V\left(\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi\right)$.

3) Уравнение одномерных диффузионных процессов и процессов теплопроводности (t — время):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$V_k = e^{\pm ikx - k^2 a^2 t} \quad (\text{тепловая волна}),$$

$$V_0 = a_1 x + a_2.$$

4) Одномерное волновое уравнение (t — время, a — скорость распространения):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{см. также 1a}),$$

$$V_k = e^{\pm ik(x \pm at)},$$

$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 t + b_2);$$

соответственно, общее решение:

$$V = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad \text{с произвольными } f_1 \text{ и } f_2.$$

5) Уравнение одномерной затухающей волны:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$V_k = e^{\pm ik \left(at \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^4 k^2}} x \right) e^{-\frac{bx}{2a^2}}},$$

$$V_0 = \left(a_1 + a_2 e^{-\frac{b}{a^2} x} \right) (b_1 t + b_2).$$

6) Уравнение теплопроводности в трех измерениях:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V,$$

$$V_{\alpha, \beta, \gamma} = e^{\pm i(\alpha x + \beta y + \gamma z) - a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t} = e^{\pm i(\mathbf{r}t) - k^2 a^2 t},$$

где $\alpha = k_x$, $\beta = k_y$, $\gamma = k_z$.

7) Уравнение стоячих волн (уравнение колебаний) на плоскости:

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0.$$

a) $x_1 = x, x_2 = y; \Delta V + \lambda^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0.$

$$V_\alpha = e^{\pm i(\alpha x \pm \beta y)},$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2$ (соответствует прямолинейной волне),

$$V_\alpha = e^{\pm i\lambda(x \cos \vartheta \pm y \sin \vartheta)},$$

где $\cos \vartheta = \frac{\alpha}{\lambda}$,

$$V_0 = (a_1 x + a_2) e^{i\lambda y}.$$

b) $x_1 = \rho, x_2 = \varphi,$

$$V_k = e^{ik\varphi} Z_k(\lambda\rho)$$

(соответствует круговой волне),

$$V_0 = (a_1 \varphi + a_2) Z_0(\lambda\rho).$$

8) Уравнение колебаний в пространстве:

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0.$$

a) $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z;$

$$V_{lm} = e^{i(kx + ly + mz)},$$

где $\lambda^2 = k^2 + l^2 + m^2$ (соответствует плоской волне).

b) $x_1 = \rho, x_2 = \varphi, x_3 = z;$

$$V_{km} = e^{\pm i(kz + m\varphi)} Z_m(\rho \sqrt{\lambda^2 - k^2})$$

(соответствует модулированной цилиндрической волне),

$$V_{00} = (a_1 \varphi + a_2)(b_1 z + b_2) Z_0(\lambda\rho).$$

c) $x_1 = r, x_2 = \vartheta, x_3 = \varphi;$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+1/2}(\lambda r) Y_n(\vartheta, \varphi)$$

(см. 2) (соответствует модулированной сферической волне),

$$V_0 = \frac{e^{i\lambda r}}{r}.$$

9) Задача Кеплера квантовой теории:

$$\Delta V + \left(\lambda^2 + \frac{2\beta}{r} \right) V = 0.$$

a) В сферических координатах (r, ϑ, φ) (см. стр. 274—275) в обозначениях: $\epsilon^2 = -\lambda^2$, $F_a(\alpha, \gamma, x)$ — общая конфлюэнтная гипер-

геометрическая функция (см. стр. 143), $L_n^k(x)$ — обобщенная функция Лагерра (см. стр. 142), будем иметь:

$$V = R(r) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (l = 0, 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l),$$

где

$$R^{(1)}(r) = r^l e^{-\varepsilon r} F_a \left(1 - \frac{\beta}{\varepsilon} + l, 2l + 2, 2\varepsilon r \right) = Cr^l e^{-\varepsilon r} L_{\frac{\beta}{\varepsilon} + l}^{2l+1}(2\varepsilon r),$$

или

$$\begin{aligned} R^{(2)}(r) &= r^{-(l+1)} e^{-\varepsilon r} F_a \left(-\frac{\beta}{\varepsilon} - l, -2l, 2\varepsilon r \right) = \\ &= Cr^{-(l+1)} e^{-\varepsilon r} L_{\frac{\beta}{\varepsilon} - l - 1}^{-2l-1}(2\varepsilon r). \end{aligned}$$

При $\beta = 0$ отсюда следует: $R^{(1)}(r) = Cr^{-1/2} Z_{l+1/2}(-i\varepsilon r)$ (см. 8).

б) В *параболических координатах вращения* (u, v, φ) (см. стр. 276) с параметром разделения p , сохраняя в остальном прежние обозначения, будем иметь:

$$V = M(u) N(v) e^{im\varphi},$$

где

$$M(u) = u^{\pm m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} F_a \left(-\frac{\beta+p}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}, 1 \pm m, \varepsilon u^2 \right) =$$

$$= Cu^{\pm m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} u^2} L_{\frac{\beta+p}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}}^{\pm m}(\varepsilon u^2),$$

$$N(v) = v^{\pm m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} F_{a'} \left(-\frac{\beta-p}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}, 1 \pm m, \varepsilon v^2 \right) =$$

$$= Cv^{\pm m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} v^2} L_{\frac{\beta-p}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}}^{\pm m}(\varepsilon v^2).$$

10) Релятивистское волновое уравнение (уравнение Клейна — Гердона):

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \mu^2 \Phi = 0.$$

$$\Phi = e^{\pm i\omega t} V(x, y, z), \text{ причем } \Delta V + \lambda^2 V = 0,$$

где $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu^2$ (см. 8).

При $\omega = 0$ имеем решение специального вида: $\Phi = \frac{e^{\pm \mu r}}{r}$.

д) Комбинированные решения

Дальнейшие частные решения находятся с помощью указанных выше как их специальные линейные комбинации, в частности также в виде:

1) производных по некоторым параметрам k, m, \dots , например:

$$\frac{\partial V_k}{\partial k}, \frac{\partial^2 V_k}{\partial k^2}, \frac{\partial^2 V_{km}}{\partial k \partial m} \text{ и т. д.};$$

2) интегралов по параметру с зависящей от него весовой функцией, например:

$$\int \psi(k) V_k dk \text{ и т. д.}$$

Если дифференциальное уравнение не содержит в явном виде координат x, y, z и t , то решениями будут также:

3) производные по x, y, z и t , например:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x}, \frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V_k}{\partial x \partial y}, \frac{\partial V_k}{\partial t}, (\text{a grad } V_k) \text{ и т. д.};$$

4) неопределенные интегралы по x, y, z и t . Таким путем получают, в частности, следующие

Типичные решения. 1) Для уравнения $\Delta V = 0$ (в пространстве):

а) $V = \int_x^{\infty} dx \frac{1}{r} = \ln(r + x)$, функция сингулярна на полупрямой $x = -r$.

б) $V(\rho, z) = i\pi \sum_n \mu_n H_0^{(1)}\left(i \frac{2\pi n \rho}{a}\right) e^{2\pi i \frac{n}{a} z}$ — потенциал линейно-периодического распределения зарядов, имеющего при $\rho = 0$ плотность $\mu(z) = \sum_n \mu_n e^{2\pi i \frac{nz}{a}}$.

в) $V(x, y, z) = 2\pi \sum_n \frac{\mu_n}{k_n} e^{i(k_n x)} e^{-k_n |z|}$ — потенциал плоского решетчато-периодического распределения зарядов, при $z = 0$ имеющего плотность $\mu(x, y) = \sum_n \mu_n e^{i(k_n x)}$.

2) Для уравнения $\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$:

$$V = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{\pm ikx - k^2 a^2 t} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t}} \text{ при } t \geq 0.$$

Тепловой импульс в случае одного измерения; сингулярен при $t = 0$ в точке $x = 0$.

3) Для уравнения $\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V$ (в пространстве):

$$V = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y dk_z e^{\pm i (kx - k^2 a^2 t)} = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{t^3}} \quad \text{при } t \geq 0.$$

Тепловой импульс в пространстве; сингулярен при $t=0$ в точке $r=0$.

4) Для уравнения $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ (в двух измерениях):

$$\alpha) V = \int_{-\frac{\pi}{2} - i\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\beta} e^{i(\alpha x + i\beta y)}, \quad \text{где } \beta = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \text{ или } \alpha = \lambda \sin \vartheta,$$

$$V = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{+\infty} d\vartheta e^{i\lambda(x \sin \vartheta + i y \cos \vartheta)} \quad (\text{комплексное интегрирование}),$$

$$= \pi H_0^{(1)}(\lambda \rho), \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{перемена знака при } y=0!).$$

$$\beta) V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(\lambda \rho) e^{in\varphi} = e^{i\lambda \rho \cos \varphi} = e^{i\lambda x}, \quad \text{где } x = \rho \cos \varphi.$$

5) Для уравнения $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ (в пространстве):

$$\alpha) V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} e^{i(\alpha x + i\beta y + i\gamma z)}, \quad \text{где } \gamma = \sqrt{\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}, \text{ или, полагая}$$

$$\alpha = \lambda \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \beta = \lambda \sin \vartheta \sin \varphi:$$

$$V = \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{+\infty} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\lambda(x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + i z \cos \vartheta)} = \frac{e^{i\lambda r}}{r}$$

(см. также 4а).

$$\beta) V = \frac{i\lambda}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} H_0^{(1)}(\rho \lambda \sin \vartheta) e^{i\lambda |z \cos \vartheta|} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{e^{i\lambda r}}{r},$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{r^2 - z^2}.$$

$$\gamma) V = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} i^n J_{n+1/2}(\lambda r) P_n(\cos \vartheta) = e^{i\lambda r \cos \vartheta} = e^{i\lambda z}.$$

е) Эллипсоидальный потенциал

Специальное частное решение уравнения $\Delta V = 0$, удовлетворяющее определенным крайвым условиям на поверхности эллипсоида, можно получить, полагая

$$V = \varphi = x^2 A(\lambda) + y^2 B(\lambda) + z^2 C(\lambda) + F(\lambda), \quad (1)$$

где параметр λ представляет собой функцию от x, y, z , определяемую соотношением

$$x^2\alpha(\lambda) + y^2\beta(\lambda) + z^2\gamma(\lambda) = 1. \quad (1')$$

Семь функций A, \dots, γ должны быть определены так, чтобы получалось какое-либо простое решение.

Для выражения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xA + (x^2A' + y^2B' + z^2C' + F')\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xA,$$

если, учитывая (1'), положим $A' = -\alpha F'$, $B' = -\beta F'$, $C' = -\gamma F'$.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2A + 2xA'\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 2A - 2\alpha xF'\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 2A + \frac{4\alpha^2 x^2 F'}{x^2\alpha' + y^2\beta' + z^2\gamma'}$$

ввиду соотношения $2\alpha x + (x^2\alpha' + y^2\beta' + z^2\gamma')\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$, вытекающего из (1'); следовательно, если положим

$$\alpha^2 = -k\alpha', \quad \beta^2 = -k\beta', \quad \gamma^2 = -k\gamma'$$

с произвольным k , то будем иметь:

$$\Delta\varphi = 2(A + B + C) - 4kF',$$

т. е. $\Delta\varphi$ будет зависеть только от λ . Отсюда получаем:

$$\alpha = \frac{k}{a + \lambda}, \quad \beta = \frac{k}{b + \lambda}, \quad \gamma = \frac{k}{c + \lambda}$$

с произвольными a, b, c и

$$A = k \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds F'(s)}{a + s}, \quad B = k \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds F'(s)}{b + s}, \quad C = k \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds F'(s)}{c + s}$$

($A_{(\infty)} = B_{(\infty)} = C_{(\infty)} = 0$), так что

$$\varphi = k \int_{\lambda}^{\infty} ds F'(s) \left\{ \frac{x^2}{a + s} + \frac{y^2}{b + s} + \frac{z^2}{c + s} - \frac{1}{k} \right\}$$

при $F_{(\infty)} = 0$ и

$$\Delta\varphi = 2k \int_{\lambda}^{\infty} ds \left\{ F'(s) \left(\frac{1}{a + s} + \frac{1}{b + s} + \frac{1}{c + s} \right) + 2F''(s) \right\}$$

при $F'_{(\infty)} = 0$.

Отсюда следует, что $\Delta\varphi = 0$, если

$$\frac{F''(s)}{F'(s)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+s} + \frac{1}{b+s} + \frac{1}{c+s} \right),$$

т. е., с постоянной G :

$$F'(s) = \frac{G}{k\sqrt{(a+s)(b+s)(c+s)}}; \quad F(\lambda) = -\frac{G}{k} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a+s)(b+s)(c+s)}}.$$

Мы получаем тем самым решения уравнения $\Delta V = 0$ в виде

$$V = \varphi = G \int_{\lambda}^{\infty} ds \left(\frac{x^2}{a+s} + \frac{y^2}{b+s} + \frac{z^2}{c+s} - \frac{1}{k} \right) \frac{1}{\sqrt{(a+s)(b+s)(c+s)}}, \quad (2)$$

где

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = \frac{1}{k}. \quad (2')$$

Параметру k , без ограничения общности решений, может быть при этом придано значение 1.

Дальнейшие решения находятся отсюда при помощи дифференцирования по x , y , z , например:

$$\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xA = 2xG \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{a+s} \frac{1}{\sqrt{(a+s)(b+s)(c+s)}},$$

а также по какому-либо параметру, например:

$$\varphi_k = \frac{\partial\varphi}{\partial k} = \frac{G}{k^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a+s)(b+s)(c+s)}} = -\frac{F(\lambda)}{k}$$

(член $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial\lambda}{\partial k}$ исчезает ввиду (2')).

Решениями уравнения

$$\Delta V = \text{const}$$

являются, в частности,

$$V = \psi = x^2 A_{(0)} + y^2 B_{(0)} + z^2 C_{(0)} + F_{(0)},$$

где

$$\Delta\psi = 2(A_{(0)} + B_{(0)} + C_{(0)}) = 4kF'_{(0)} = \frac{4G}{\sqrt{abc}} = -4\pi\rho$$

при $G = -\pi\rho\sqrt{abc}$.

Эта функция ψ становится равной φ при $\lambda = 0$, т. е. на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Можно поэтому рассматривать φ как потен-

циал во внешнем пространстве, ψ — как потенциал во внутреннем пространстве такого эллипсоида, равномерно заполненного зарядом плотности ρ . Полный заряд равен $-\frac{4}{3}G$.

Функция φ_k представляет собой потенциал эллипсоидального проводника, несущего поверхностный заряд. Плотность заряда равна

$$4\pi\sigma = |\text{grad } \varphi|_{\lambda=0} = \frac{G}{V_{abc}} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}},$$

полный заряд равен $2G$.

Функция ψ_x является потенциалом однородного поляризованного в направлении оси x эллипсоида с моментом $\frac{4}{3}G$.

D. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ¹⁾

1. Общие сведения

а) Однородные и неоднородные задачи

Мы будем рассматривать уравнения вида

$$L(u) + \lambda \rho u = V(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где L — линейный дифференциальный оператор, λ — параметр, ρ и V — данные функции.

Краевые условия называются *однородными*, если при $V=0$ соответствующая задача является однородной (см. стр. 313). Во всех остальных случаях они называются *неоднородными*. Таким образом, поставленная задача является неоднородной, если 1) $V=0$, но краевые условия неоднородны, или 2) $V \neq 0$, краевые же условия могут быть какими угодно (однородными или неоднородными). Неоднородные задачи различных типов часто могут быть сведены одна к другой.

Особенно важные типы *однородных* краевых условий характеризуются тем, что требуется, чтобы было $\bar{u} = 0$ (\bar{u} означает: u на границе основной области), или чтобы первая или высшие производные обращались на границе в нуль, или чтобы некоторая линейная комбинация функции и ее производных обращалась на границе в нуль.

Важнейшие *неоднородные* случаи характеризуются тем, что от таких выражений требуется, чтобы они представляли собой определенные функции f_i точки границы.

Всякой неоднородной задаче может быть однозначно сопоставлена однородная, получающаяся при $V=0$, $f_i=0$.

¹⁾ См. предварительное замечание к разделу C, стр. 337.

b) Теорема об альтернативе

(см. стр. 161 и след., «Линейные уравнения», а также стр. 376, «Интегральные уравнения»).

Неоднородная задача *либо* имеет одно и только одно решение, что будет иметь место в том случае, когда соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение $u=0$; *либо* же однородная задача имеет одно или несколько нетривиальных решений (собственные решения), и тогда неоднородная задача разрешима лишь при определенных обстоятельствах. В случае неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями разрешимости служит соотношение

$$\int_{(G)} \dots \int V(x_1, x_2, \dots, x_n) \dot{u}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0, \\ i = 1, 2, \dots, r,$$

где \dot{u}_i ($i=1, 2, \dots, r$) означает все решения однородного уравнения с теми же краевыми условиями¹⁾. Такие собственные решения существуют, вообще говоря, лишь для определенных значений λ (*собственных значений* $\lambda = \lambda_n$, $n=1, 2, 3, \dots$). Отыскание решения однородной задачи поэтому неразрывно связано с нахождением собственных значений.

c) Общая методика

При решении задачи часто бывает необходимо произвести подходящее преобразование независимой переменной (*выбор системы координат*). Общих правил указать здесь нельзя. К цели часто ведут следующие способы:

- 1) превратить дифференциальное уравнение в уравнение с *разделяющимися переменными*;
- 2) заставить одну из независимых переменных стать постоянной на границе основной области, т. е. взять *границу в качестве одной из координатных поверхностей*.

d) Формула Грина

Пусть дано

$$L(u) = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu \quad (1)$$

— линейное дифференциальное выражение, коэффициенты которого представляют собой данные функции от x, y . Сопряженное выражение имеет вид:

$$M(v) = (Av)_{xx} + 2(Bv)_{xy} + (Cv)_{yy} - (Dv)_x - (Ev)_y + Fv. \quad (2)$$

Пусть, далее, задана основная область G на x, y -плоскости с ограни-

¹⁾ Здесь имеется в виду самосопряженное дифференциальное уравнение. (Прим. ред.)

чивающей ее кривой Γ , s — длина дуги вдоль Γ , n — нормаль к Γ , направленная внутрь области. Определим направление n' (конормаль) равенствами:

$$\left. \begin{aligned} A \cos(n, x) + B \cos(n, y) &= P \cos(n', x), \\ B \cos(n, x) + C \cos(n, y) &= P \cos(n', y), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

откуда P может быть определено при помощи соотношения

$$\cos^2(n', x) + \cos^2(n', y) = 1.$$

Определим, далее, на границе Γ «сопряженную функцию»:

$$Q = (A_x + B_y - D) \cos(n, x) + (B_x + C_y - E) \cos(n, y), \quad (4)$$

которая для самосопряженных дифференциальных выражений обращается в нуль. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_G \{vL(u) - uM(v)\} dx dy = \int_{\Gamma} \left\{ P \left(u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) + Quv \right\} ds. \quad (5)$$

Эта формула легко может быть обобщена на случай более чем двух независимых переменных. При этом уравнения (1) — (5) заменяются следующими:

$$L(u) = \sum_i \sum_k A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_i B_i u_{x_i} + Fu \quad (A_{ik} = A_{ki}), \quad (1')$$

$$M(v) = \sum_i \sum_k (A_{ik} v)_{x_i x_k} - \sum_i (B_i v)_{x_i} + Fv, \quad (2')$$

$$\sum_k A_{ik} \cos(n, x_k) = P \cos(n', x_i), \quad (3')$$

$$Q = \sum_k \cos(n, x_k) \left(\sum_i (A_{ik})_{x_i} - B_k \right), \quad (4')$$

$$\begin{aligned} \int \dots \int_G \{vL(u) - uM(v)\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \int_{\Gamma} \dots \int \left\{ P \left(u \frac{\partial v}{\partial n'} - v \frac{\partial u}{\partial n'} \right) + Quv \right\} dS \end{aligned} \quad (5')$$

(dS — элемент площади границы Γ основной области G).

2. Однородные задачи второго порядка

а) Одномерный случай

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L(u) + \lambda u = 0. \quad (6)$$

Если $L(u)$ представляет собой линейный дифференциальный оператор второго порядка, то его можно всегда сделать самосопряженным.

(см. стр. 324). Уравнение принимает тогда несколько более общую форму:

$$L(u) + \lambda \rho(x) u = 0, \quad L(u) = (Pu')' - Qu. \quad (7)$$

Однородная задача, поставленная для уравнения (7) в *конечной* основной области G , при условии, что коэффициенты уравнения регулярны в G и на границе G , всегда имеет счетное множество дискретных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ с собственными функциями u_1, u_2, \dots , образующими *полную ортогональную систему*, относительно которой всегда можно принять, что она *нормирована на единицу*:

$$\int \rho u_i u_k dx = \delta_{ik}.$$

Поэтому всякая функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи, допускает разложение по собственным функциям.

Задача называется задачей Штурма — Лиувилля, если, в дополнение к сделанным ранее предположениям, должны быть удовлетворены следующие краевые условия (основная область $a \leq x \leq b$):

1. $u(a) = 0$ и $u(b) = 0$, или
2. $u'(a) = 0$ и $u'(b) = 0$, или
3. $\alpha \cdot u(a) = u'(a)$ и $-\beta \cdot u(b) = u'(b)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$).

При этом P и ρ должны быть положительны в основной области. В таком образом сформулированных задачах все собственные значения являются простыми (невыврожденными) и положительными.

В случае, когда *основная область бесконечна* или когда коэффициенты дифференциального уравнения имеют на границе области *особенности*, кроме дискретного (*точечного*) спектра может появиться плотное распределение собственных значений (*непрерывный спектр*).

Для определения собственных значений и собственных функций можно рекомендовать следующий метод. Положим

$$u = \varphi(x) F(x) \quad (8)$$

и будем пытаться определить функцию $\varphi(x)$ таким образом, чтобы функция $F(x)$ была полиномом или целой трансцендентной (при $n \rightarrow \infty$):

$$F(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (9)$$

с постоянными α_i (*метод полиномов*). Функция $\varphi(x)$ должна поэтому, в частности, правильно отражать поведение u в окрестности ее особенностей. Обращение функций u в нуль при $x = \pm \infty$ часто достигается введением подходящего экспоненциального множителя. Подстановка (8) в (6) дает дифференциальное уравнение для $F(x)$, в которое следует подставить выражение (9). Если таким путем удастся получить *двучленные рекуррентные формулы* для α_i , то примененный способ непосредственно ведет к цели. Полином n -й степени получают, вводя условие $\alpha_{n+1} = 0$; это условие (при каждом значении n) дает уравнение для отыскания соответствующего собственного значения $\lambda = \lambda_n$.

Если же получаются рекуррентные формулы, содержащие *несколько членов*, то в случае полинома n -й степени приходится решать систему линейных уравнений с n неизвестными α_i .

Пример:

$$u'' + (1 - x^2)u + \lambda u = 0.$$

Краевые условия: $u = 0$ при $x = \pm \infty$.

Краевые условия наводят на мысль, что решение следует искать в виде

$$\varphi(x) = e^{-\beta x^2} F(x).$$

Эта функция будет при больших $|x|$ асимптотически удовлетворять уравнению, если положить $\beta = \frac{1}{2}$. Тогда получим:

$$F'' - 2xF' + \lambda F = 0.$$

Подставляя сюда выражение (9), получаем в качестве множителя при любом x^i :

$$(i+2)(i+1)\alpha_{i+2} - 2i\alpha_i + \lambda\alpha_i = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$$

или

$$\alpha_{i+2} = \alpha_i \frac{2i - \lambda}{(i+1)(i+2)}. \quad (10)$$

Из $\alpha_{n+2} = 0$ следует $2n = \lambda_n$ для n -го собственного значения при $n = 0, 1, 2, \dots$. Собственные функции можно теперь получить одну за другой с помощью (10). Ими служат ортогональные функции Эрмита (см. стр. 144):

$$u_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

в) Многомерный случай

Также и в этом случае уравнение (6) может быть приведено к само-сопряженной форме, если

$$L(u) = \sum_i \sum_k A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_i B_i u_{x_i} + Cu,$$

причем функции A_{ik} , B_i , C , которые служат коэффициентами этого выражения, дважды дифференцируемы. Уравнение тогда будет иметь форму

$$L(u) + \lambda ru = 0, \quad \text{причем} \quad \sum_k (A_{ik})_{x_k} = B_i.$$

Собственные функции, как и прежде, образуют полную ортогональную нормированную систему (см. стр. 356):

с) Некоторые часто встречающиеся краевые задачи и их решения

Уравнение	Основная область	Краевые условия	Собственные значения λ_n	Собственные функции u_n
1. $\begin{aligned} (1-x^2)u'' + \lambda u &= 0 \\ (1-x^2)u' - 2xu' + \lambda u &= 0 \end{aligned}$	$-1 \leq x \leq +1$	$u(\pm 1)$ конечно	$n(n+1)$	$P_n(x)$ (сферические функции, см. стр. 132)
2. $(1-x^2)u'' - \frac{m^2 u}{1-x^2} + \lambda u = 0$	$-1 \leq x \leq +1$	$u(\pm 1)$ конечно	$n(n+1)$ $n \geq m$	$P_n^m(x)$ (при соединенные сферические функции, см. стр. 136)
3. $\begin{aligned} (\sqrt{1-x^2}u')' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}u &= 0 \\ (1-x^2)u'' - xu' + \lambda u &= 0 \end{aligned}$	$-1 \leq x \leq +1$	$u(\pm 1)$ конечно	n^2	$T_n(x)$ (полиномы Чебышева, см. стр. 138)
4. $\begin{aligned} [x^q(1-x)^{p-q+1}u']' + \\ + \lambda(1-x)^{p-q}x^{q-1}u &= 0 \\ x(1-x)u'' + [q-(p+1)x]u' + \\ + \lambda u &= 0 \end{aligned}$	$-1 \leq x \leq +1$	$u(\pm 1)$ конечно	$(p+n)n$	$F(p+n, -n, q, x)$ (полиномы Якоби, т. е. обрывающиеся гипергеометрические ряды, см. стр. 130)
5. $\begin{aligned} (xe^{-x}u')' + \lambda e^{-x}u &= 0 \\ xu'' + (1-x)u' + \lambda u &= 0 \end{aligned}$	$0 \leq x \leq +\infty$	$u(0)$ конечно, нормируемость	n	$L_n(x)$ (полиномы Лагерра, см. стр. 142)

Продолжение

	Уравнение	Основная область	Крайевые условия	Собственные значения λ_n	Собственные функции u_n
6.	$(xu')' + \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{4}\right)u + \lambda u = 0$	$0 \leq x \leq +\infty$	$u(0)$ конечно, нормируемость	n	$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$
7.	$(x^{m+1}e^{-x}u')' + x^m e^{-x}(\lambda - m)u = 0$ $xu'' + (m+1-x)u' + (\lambda - m)u = 0$	$0 \leq x \leq +\infty$	$u(0)$ конечно, нормируемость	n $n \geq m$	$L_n^m(x)$ (полиномы Лагерра m -го порядка, см. стр. 143)
8.	$(xu')' + \left(\frac{1-m}{2} - \frac{x}{4} - \frac{m^2}{4x}\right)u + \lambda u = 0$	$0 \leq x \leq +\infty$	$u(0)$ конечно, нормируемость	n	$x^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^m(x)$
9.	$(e^{-x^2}u')' + \lambda e^{-x^2}u = 0$ $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	нормируемость	$2n$	$H_n(x)$ (полиномы Эрмита, см. стр. 145)
10.	$u'' + (1-x^2)u + \lambda u = 0$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	нормируемость	$2n$	$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$

$m, n = 0, 1, 2, \dots$ Из приведенных здесь дифференциальных уравнений первое всюду имеет самосопряженную форму; условие «нормируемость» означает, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_n^2 dx, \quad \int v_n v_m dx = \delta_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} v_n^2 dx.$$

распространенный на основную область. Функции $v_n = \sqrt{\rho} u_n$ образуют полную ортогональную систему, причем

$$\iint_G \dots \int \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) u_i u_k dx_1 dx_2 \dots dx_n = \delta_{ik}.$$

3. Краевые задачи для эллиптических уравнений

а) Неоднородное уравнение с однородными краевыми условиями

$$L(u) + \lambda \rho u = V.$$

Сначала определяют собственные значения λ_i и собственные функции u_i однородной задачи $V=0$ с теми же краевыми условиями. Если $L(u)$ — самосопряженное выражение, то эти функции образуют полную ортогональную систему. Решение неоднородного уравнения ищут в виде разложения по этой ортогональной системе:

$$u = \sum_i c_i u_i$$

и определяют коэффициенты c_i . Это можно выполнить, например, заменяя также и V/ρ разложением по ортогональной системе $\{u_i\}$:

$$V = \sum k_i \rho \cdot u_i,$$

$$k_i = \int V u_i dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Тогда ввиду того, что

$$\sum_i c_i \rho (\lambda - \lambda_i) u_i = V,$$

будет иметь место соотношение

$$c_i = \frac{k_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Этот способ отказывается служить, если λ является одним из собственных значений; см. в связи с этим теорему об альтернативе (стр. 350).

б) Однородное уравнение с неоднородными краевыми условиями

Различают следующие стандартные задачи:

1-я *краевая задача*: на границе области должно быть $u = \bar{u} = f$, где f — данная функция.

2-я *краевая задача*: на границе области задаются значения $\frac{\partial u}{\partial n} = f$.

3-я *краевая задача*: на границе области задаются значения линейной комбинации $\alpha \bar{u} + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f$.

Метод функции Грина. Для решения 1-й краевой задачи для уравнения

$$L(u) + \lambda u = u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + (c + \lambda) u = 0$$

мы применяем формулу Грина (стр. 351). В качестве v мы выбираем функцию Грина, которая определяется следующими свойствами: в точке $x = \xi$, $y = \eta$, расположенной внутри области, она имеет логарифмическую особенность, а именно, представима там в виде

$$v(x, y, \xi, \eta) = -\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \text{регулярные члены.}$$

В каждой из остальных точек она удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению $M(v) = 0$. Наконец, она удовлетворяет однородному краевому условию $v = 0$. Такая функция всегда существует (Гильберт). Решение тогда имеет вид

$$2\pi u(\xi, \eta) = \oint ds \left(\bar{u} \frac{\partial v}{\partial n} \right).$$

Этот способ допускает обобщение на случай более чем двух независимых переменных. Вместо логарифмической особенности функция Грина имеет тогда полюс $(n - 2)$ -го порядка ($n > 2$) в точке $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Приведение к интегральным уравнениям. Мы разъясним метод на примере уравнения потенциала:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Пусть F — замкнутая односвязная поверхность. Значение функции u разыскивается в точке P ; в точке Q на поверхности F расположен «источник»; dF_Q — элемент площади поверхности F в точке Q . Если точка P приближается к точке Q извне, то $u \rightarrow (u_Q)_a$, если изнутри, то $u \rightarrow (u_Q)_i$.

Если краевые условия имеют вид:

$$\alpha (u_Q)_i + \beta (u_Q)_a = f(Q) \quad (1\text{-я краевая задача}),$$

то мы исходим из двойного слоя с моментом $\mu(Q)$ на поверхности F (см. стр. 219), т. е. полагаем:

$$u(P) = \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \mu(Q) dF_Q. \quad (11)$$

Если предположим, в частности, что $P \rightarrow Q'$ на F , то

$$u(Q') = (u_{Q'})_i - 2\pi \mu(Q') = (u_{Q'})_a + 2\pi \mu(Q'),$$

так что мы получаем:

$$f(Q') = 2\pi(\alpha - \beta)\mu(Q') + (\alpha + \beta) \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{QQ'}} \right) \mu(Q) dF_Q.$$

Это равенство представляет собой интегральное уравнение второго рода для момента $\mu(Q)$:

$$\frac{f(Q')}{2\pi(\alpha - \beta)} = g(Q') = \mu(Q') - \lambda \int_F K(Q', Q) \mu(Q) dF_Q$$

с несимметрическим ядром

$$K(Q', Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{QQ'}} \right) \quad \text{и} \quad \lambda = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}. \quad (12)$$

$\lambda = -1$ ($\beta = 0$) не является собственным значением, иначе говоря, во внутренней области 1-я краевая задача всегда имеет однозначное решение. $\lambda = +1$ ($\alpha = 0$) является собственным значением ядра; решение во внешней области существует поэтому лишь при некоторых ограничивающих предположениях.

Аналогичным образом, при краевых условиях

$$\alpha \left(\frac{\partial u_Q}{\partial n} \right)_i + \beta \left(\frac{\partial u_Q}{\partial n} \right)_a = f(Q) \quad (2\text{-я краевая задача})$$

для решения, разыскиваемого в виде

$$u(P) = \int_F \frac{1}{r_{PQ}} \rho(Q) dF_Q \quad (13)$$

(простой слой на поверхности F), получается интегральное уравнение

$$f(Q') = -2\pi(\alpha - \beta) \rho(Q') + (\alpha + \beta) \int_F \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\frac{1}{r_{QQ'}} \right) \rho(Q) dF_Q,$$

или

$$-\frac{f(Q')}{2\pi(\alpha - \beta)} = g(Q') = \rho(Q') - \lambda \int_F K(Q, Q') \rho(Q) dF_Q,$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta},$$

а K — то же самое ядро, что и в (12), с переставленными аргументами. Здесь также $\lambda = -1$ ($\alpha = 0$) не является собственным значением, т. е. 2-я краевая задача во внешней области всегда имеет одно решение; $\lambda = +1$ ($\beta = 0$) является собственным значением, следовательно, решение во внутренней области существует лишь при ограничивающих предположениях ($\int_F f(Q) dF_Q = 0$).

Решения 3-й краевой задачи могут быть найдены в виде линейных комбинаций выражений вида (11) и (13).

Для двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

справедливы соответствующие утверждения, следует лишь в (11) и (13) вместо $1/r$ (ньютонов потенциал) ввести $\ln r$ (логарифмический потенциал) и множитель 2π всюду заменить на π . Выражение $\frac{\partial}{\partial n_Q} (\ln r_{PQ}) ds_Q$ (где s — длина дуги вдоль граничной кривой) может быть интерпретировано геометрически как угол, под которым ds виден из точки P .

Два важных частных случая (интегральные формулы Пуассона):

1. $\Delta u = 0$ на плоскости; на окружности $r = R$ пусть имеем $u(R, \varphi) = F(\varphi)$. Решение:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\Phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \Phi) + r^2} d\Phi.$$

2. $\Delta u = 0$ в пространстве; на сфере $r = R$ пусть имеем $u(R, \varphi, \vartheta) = F(\varphi, \vartheta)$. Решение:

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Phi, \Theta) \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2rR \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \sin \Theta d\Theta d\Phi,$$

где

$$\cos \gamma = \cos \Theta \cos \vartheta + \sin \Theta \sin \vartheta \cos(\Phi - \varphi).$$

4. Задачи с начальными условиями¹⁾ для гиперболических уравнений

$$Ru_{xx} + 2Su_{xy} + Tu_{yy} = V(x, y, u, u_x, u_y). \quad (14)$$

Пусть на лежащей в x, y -плоскости кривой $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, которая каждую характеристику (см. стр. 339) уравнения (14) пересекает только один раз²⁾ (параметр τ может быть, например, длиной дуги; $du/d\tau = u'$ и т. д.), заданы:

$$u(\tau) = F(\tau) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = G(\tau) \quad (\text{начальная полоса}).$$

Мы можем следующим образом одну за другой вычислить все производные функции u первого и высших порядков по x и y в этой полосе:

1-е производные:

$$u_x x' + u_y y' = F',$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -u_x \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + u_y \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = G.$$

¹⁾ Или «задачи Коши». (Прим. ред.)

²⁾ В частности, таким образом, начальная кривая, например, не должна быть замкнутой, не должна касаться какой-либо характеристики или сама быть характеристикой.

Из этих уравнений можно найти $u_x = p(\tau)$ и $u_y = q(\tau)$, так как определитель $\sqrt{x'^2 + y'^2} \neq 0$.

2-е производные:

$$\begin{aligned} p' &= u_{xx}x' + u_{xy}y', \\ q' &= u_{xy}x' + u_{yy}y', \\ V &= u_{xx}R + u_{xy}2S + u_{yy}T. \end{aligned}$$

Отсюда находятся $u_{xx} = r(\tau)$, $u_{xy} = s(\tau)$, $u_{yy} = t(\tau)$, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ R & 2S & T \end{vmatrix} = Tx'^2 - 2Sx'y' + Ry'^2$$

отличен от нуля. При $\Delta \neq 0$ можно, продолжая вычисления таким же образом, последовательно определить и производные высших порядков; например, производные третьего порядка находятся из соответствующих уравнений для r' , s' , t' , V_x или V_y . При этом всюду встречается один и тот же определитель Δ . Зная все производные вдоль начальной полосы, можно построить решение u в виде разложения Тейлора.

Метод интегрирования Римана. Пусть дифференциальное уравнение приведено к нормальной форме

$$L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0;$$

тогда оно имеет характеристики $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Относительно начальной кривой Γ предположим, что она каждую характеристику пересекает только *один раз* в той области, в которой разыскивается решение. В частности, следовательно, эта кривая не может быть замкнутой. Пусть вдоль Γ заданы значения u и du/dn (и тем самым также du/dn'). Чтобы найти $u(\xi, \eta)$, проведем через точку $Q(\xi, \eta)$ характеристики $y = \eta$ и $x = \xi$, пересекающие Γ в точках A и B .

Найдем, далее, функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, такую, чтобы:

1) всюду в области ABQ и на ее границе эта функция, как функция от x, y , удовлетворяла сопряженному дифференциальному уравнению $M(G) = 0$,

2) на линии $y = \eta$: $G_x - bG = 0$,

3) на линии $x = \xi$: $G_y - aG = 0$,

4) $G(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$.

Тогда решение уравнения $L(u) = 0$ получим, применяя формулу Грина к области ABQ и интегрируя по частям вдоль путей AQ и BQ :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} [(uG)_A + (uG)_B] + \\ &+ \int_A^B \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial u}{\partial n'} \right) - (a \cos(n, x) + b \cos(n, y)) uG \right] ds. \end{aligned}$$

Тем самым u выражено через значения u и du/dn' на кривой Γ .

Если, в частности, $a = b = c = 0$, то можно положить $G(x, y; \xi, \eta) = 1$.

Рассмотрим приложения метода интегрирования Римана к конкретным уравнениям.

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть $u(x, y)$ вместе со своими производными $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$ задана на некоторой кривой $y = f(x)$, т. е. $u(x, f(x)) = F(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x} + f'(x) \frac{\partial u}{\partial y} = G(x)$, где $F(x)$ и $G(x)$ — известные функции от x . Определим точки $x = \alpha$ и $x = \beta$ кривой с помощью уравнений

$$\alpha - f(\alpha) = x - y, \quad \beta + f(\beta) = x + y.$$

Тогда получим:

$$2u(x, y) = F(\alpha) + F(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} G(s) \left(f'(s) + \frac{1}{f'(s)} \right) ds.$$

Метод неприменим, если уравнения, из которых находятся α и β , имеют более одного решения.

$$2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

Предположения те же, что и в 1). Здесь будем иметь:

$$2u(x, y) = F(\alpha) + F(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} \left(G(s) v(s) - F(s) \frac{dv}{ds} \right) \left(f'(s) + \frac{1}{f'(s)} \right) ds,$$

причем

$$v(s) = J_0 \left(i \sqrt{(y - f(s))^2 - (x - s)^2} \right),$$

где J_0 — бесселева функция нулевого порядка.

Правая часть зависит от x и y через α , β и $v(s)$.

Е. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Если дифференциальный оператор T не решенного еще дифференциального уравнения допускает разложение вида

$$T = T^{(0)} + \epsilon S,$$

причем $T^{(0)}$ взят из некоторой, уже решенной, «невозмущенной» задачи, а возмущение ϵS с параметром возмущения ϵ мало по сравнению с $T^{(0)}$, то можно указать вычислительный метод, позволяющий, вслед за решением невозмущенной задачи, шаг за шагом получить

точное или, по крайней мере, приближенное решение «возмущенной» задачи с оператором T .

Для этого часто применяется разложение по степеням ϵ . Если старшей из степеней ϵ , которые еще учитываются, является ϵ^m , то говорят об « m -м приближении». Решение исходной невозмущенной задачи представляет собой, таким образом, «нулевое приближение».

В сложных задачах о возмущениях иногда удается исходное дифференциальное уравнение преобразовать в более простое, к которому затем применяют методы теории возмущений.

Если имеются несколько параметров возмущения, то выгоднее проводить вычисления сначала для того параметра, для которого получаются более точные и более простые решения, и затем использовать эти возмущенные решения как невозмущенные в процессе применения метода возмущений к остальным параметрам. Правильный выбор последовательности рассмотрения параметров иногда позволяет значительно упростить получение результата и сделать его более точным.

1. Задачи о собственных значениях

Пусть *невозмущенная задача* имеет вид

$$T^{(0)}\varphi_l^{(0)} - \lambda_l^{(0)}\varphi_l^{(0)} = 0, \quad (1)$$

где собственные значения $\lambda_l^{(0)}$ и собственные функции $\varphi_l^{(0)}$ известны. Разыскиваются собственные значения λ и собственные функции φ *возмущенной задачи о собственных значениях*:

$$T\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$T = T^{(0)} + \epsilon S,$$

с теми же самыми однородными краевыми условиями, т. е. спрашивается, как изменяются невозмущенные собственные значения и собственные функции при возмущении ϵS .

а) Простые собственные значения

Общая схема: предположим, что невозмущенное собственное значение задачи (1) является простым и равно $\lambda_k^{(0)}$; соответствующей ему невозмущенной собственной функцией пусть будет $\varphi_k^{(0)}$. Мы полагаем тогда:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \lambda_k^{(m)}, \\ \varphi_k &= \varphi_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \varphi_k^{(m)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где собственные значения $\lambda_k^{(m)}$ и собственные функции $\varphi_k^{(m)}$ возмущений m -го порядка подлежат еще отысканию. Верхний, заключенный в скобки индекс указывает порядок приближения, нижний — невозмущенные исходные значения $\lambda_k^{(0)}, \varphi_k^{(0)}$, на которые налагается возмущение. Сходимость рядов (3) требует, конечно, особого исследования.

Если подставить (3) в (2) и потребовать, чтобы все коэффициенты разложения по степеням ϵ обращались в нуль, то результирующая система дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$T^{(0)}\varphi_k^{(m)} - \lambda_k^{(0)}\varphi_k^{(m)} = -S\varphi_k^{(m-1)} + \sum_{n=1}^m \lambda_k^{(n)}\varphi_k^{(m-n)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Отсюда можно (по крайней мере, в принципе) последовательно вычислять $\lambda_k^{(m)}$ и $\varphi_k^{(m)}$, исходя из низших приближений $\lambda_k^{(0)}, \dots, \lambda_k^{(m-1)}$; $\varphi_k^{(0)}, \dots, \varphi_k^{(m-1)}$. При этом $\varphi_k^{(m)}$ сначала известно лишь с точностью до произвольного кратного $\varphi_k^{(0)}$. Для устранения неопределенности удобно положить

$$\Phi_{kk}^{(m)} = (\varphi_k^{(0)*}, \varphi_k^{(m)}) = \int \varphi_k^{(0)*} \varphi_k^{(m)} d\tau = 0 \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Общие сведения о возмущениях собственных значений. Неоднородные уравнения (4) разрешимы лишь в том случае, когда их правые части ортогональны к решению $\varphi_k^{(0)}$ однородного уравнения (1), т. е. когда

$$(\varphi_k^{(0)*}, \sum_{n=1}^m \lambda_k^{(n)}\varphi_k^{(m-n)} - S\varphi_k^{(m-1)}) = 0;$$

в силу (5) при нормированном $\varphi_k^{(0)}$ это означает, что

$$\lambda_k^{(m)} = (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(m-1)}). \quad (6)$$

Таким образом, если известны собственные функции $(m-1)$ -го приближения, то при помощи квадратур можно получить возмущения собственных значений m -го приближения. Первые три приближения таковы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(0)}) \equiv S_{kk}, \\ \lambda_k^{(2)} &= (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(1)}), \\ \lambda_k^{(3)} &= (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{см. также (11)}). \quad (7)$$

В случае самосопряженного оператора T можно вместо (6) найти другую форму, которая иногда бывает более простой. А именно,

тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_k^{(i)*}, T^{(0)}\varphi_k^{(j)}) &= (\varphi_k^{(j)}, T^{(0)*}\varphi_k^{(i)*}), \\ (\varphi_k^{(i)*}, S\varphi_k^{(j)}) &= (\varphi_k^{(j)}, S^*\varphi_k^{(i)*}), \\ \lambda_k^{(i)} &= \lambda_k^{(i)*}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и можно, умножая уравнения (4) и (1) на множители $\varphi_k^{(n)*}$ и интегрируя по переменным, достичь того, что большое число элементов матрицы (8) исключится. Мы находим, таким образом:

при *четном* $m = 2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\lambda_k^{(m)} = (\varphi_k^{(n)*}, S\varphi_k^{(n-1)}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_k^{(m-i-j)} (\varphi_k^{(i)*}, \varphi_k^{(j)})$$

и при *нечетном* $m = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$\lambda_k^{(m)} = (\varphi_k^{(n)*}, S\varphi_k^{(n)}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_k^{(m-i-j)} (\varphi_k^{(i)*}, \varphi_k^{(j)}).$$

Если собственные функции n -го приближения известны, например, численно, или в виде разложений в ряды (см. следующие разделы), или в аналитической форме, то, пользуясь ими, можно в самосопряженных задачах тотчас же определить возмущения собственных значений до $(2n + 1)$ -го приближения при помощи конечного числа квадратур. В частности, для первых трех приближений получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(0)}) \quad (\text{как в (7)}), \\ \lambda_k^{(2)} &= -(\varphi_k^{(1)*}, T^{(0)}\varphi_k^{(1)}) + \lambda_k^{(0)} (\varphi_k^{(1)*}, \varphi_k^{(1)}) = (\varphi_k^{(1)*}, S\varphi_k^{(0)}), \\ \lambda_k^{(3)} &= (\varphi_k^{(1)*}, S\varphi_k^{(1)}) - (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_k^{(0)}) (\varphi_k^{(1)*}, \varphi_k^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Разложение в ряд по невозмущенным собственным функциям (метод Шредингера). Неизвестные еще приближения собственных функций $\varphi_k^{(m)}$ будем искать в виде разложений по собственным функциям $\varphi_l^{(0)}$ невозмущенного уравнения (1), которые должны образовывать нормированную ортогональную систему:

$$\varphi_k^{(m)} = \sum_l \Phi_{kl}^{(m)} \varphi_l^{(0)}, \quad \text{где} \quad \Phi_{kl}^{(m)} = (\varphi_l^{(0)*}, \varphi_k^{(m)}). \quad (10)$$

Ввиду (5) имеем $\Phi_{kk}^{(m)} = 0$, так что суммы (10) не содержат слагаемого ($l = k$) с невозмущенной исходной функцией $\varphi_k^{(0)}$.

Далее, ввиду (1) имеем:

$$T^{(0)}\varphi_k^{(m)} = \sum_l \Phi_{kl}^{(m)} \lambda_l^{(0)} \varphi_l^{(0)}$$

и

$$(\varphi_l^{(0)*}, T^{(0)}\varphi_k^{(m)} - \lambda_k^{(0)} \varphi_k^{(m)}) = (\lambda_l^{(0)} - \lambda_k^{(0)}) \Phi_{kl}^{(m)}.$$

Если, вводя для краткости обозначение

$$(\varphi_i^{(0)*}, S\varphi_j^{(0)}) = S_{ij}^{(0)} \equiv S_{ij}, \quad (11)$$

умножим первое из уравнений (4) на $\varphi_i^{(0)*}$ и проинтегрируем по переменным, то получим:

$$\begin{aligned} (\varphi_i^{(0)*}, T^{(0)}\varphi_k^{(1)} - \lambda_k^{(0)}\varphi_k^{(1)}) &= (\lambda_l^{(0)} - \lambda_k^{(0)})\Phi_{kl}^{(1)} = \\ &= (\varphi_i^{(0)*}, \lambda_k^{(1)}\varphi_k^{(0)} - S\varphi_k^{(0)}) = -S_{ik}, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$\Phi_{kl}^{(1)} = \frac{S_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \quad (12a)$$

и, с помощью (10),

$$\varphi_k^{(1)} = \sum_{l \neq k} \frac{S_{lk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \varphi_l^{(0)}. \quad (12b)$$

Подставив (12b) в (7), будем иметь:

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{l \neq k} \frac{S_{lk}S_{kl}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}}. \quad (12c)$$

Умножая второе из уравнений (4) на $\varphi_i^{(0)*}$ и интегрируя по переменным, находим:

$$\begin{aligned} (\varphi_i^{(0)*}, T^{(0)}\varphi_k^{(2)} - \lambda_k^{(0)}\varphi_k^{(2)}) &= (\lambda_l^{(0)} - \lambda_k^{(0)})\Phi_{kl}^{(2)} = \\ &= (\varphi_i^{(0)*}, \lambda_k^{(1)}\varphi_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\varphi_k^{(0)} - S\varphi_k^{(1)}) = \lambda_k^{(1)}\Phi_{kl}^{(1)} - \sum_{i \neq k} \frac{S_{li}S_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (7) и (12a), получим:

$$\Phi_{kl}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \left\{ \sum_{i \neq k} \frac{S_{li}S_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} - \frac{S_{kl}S_{lk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \right\}; \quad (13a)$$

следовательно, по формуле (10),

$$\varphi_k^{(2)} = \sum_{i \neq k} \frac{\varphi_i^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \left\{ \sum_{i \neq k} \frac{S_{li}S_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} - \frac{S_{kl}S_{lk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \right\}, \quad (13b)$$

и в силу (6)

$$\lambda_k^{(3)} = \sum_{i \neq k} \sum_{l \neq k} \frac{S_{kl}S_{li}S_{ik}}{(\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)})(\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)})} - \sum_{l \neq k} \frac{S_{kl}S_{kl}S_{lk}}{(\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)})^2}. \quad (13c)$$

В самосопряженных задачах можно было бы с помощью (9) получить формулу, подобную формуле (13c), сразу из (12b) без предварительного вычисления $\varphi_k^{(2)}$ по формуле (13b).

Аналогичным образом можно использовать третье из уравнений (4) для последовательного вычисления высших приближений для собственных значений и собственных функций.

b) Кратные собственные значения

Приспособление собственных функций к возмущению; собственные значения первого приближения. Если одному и тому же невозмущенному собственному значению $\lambda_k^{(0)}$ принадлежат n различных ортогонализированных функций $\varphi_k^{(0)}(\alpha) (\alpha = 1, 2, \dots, n)$, то сначала необходимо нулевое приближение собственных функций приспособить к возмущению. Для этого подставим в (3) более общее выражение

$$\varphi_k^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \varphi_k^{(0)}(\alpha) \quad (14)$$

и для первого приближения ($m=1$) из уравнений (4) будем иметь:

$$T^{(0)}\varphi_k^{(1)} - \lambda_k^{(0)}\varphi_k^{(1)} = - \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} (S - \lambda_k^{(1)})\varphi_k^{(0)}(\alpha).$$

Правая часть здесь должна быть ортогональна ко всем $\varphi_k^{(0)}(\alpha')$, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} (\varphi_k^{(0)*}(\alpha'), S\varphi_k^{(0)}(\alpha) - \lambda_k^{(1)}\varphi_k^{(0)}(\alpha)) = 0, \quad \alpha' = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Эти равенства представляют собой систему n уравнений для определения c_{α} ; мы запишем их при помощи сокращений:

$$S_{k\alpha', k\alpha} = (\varphi_k^{(0)*}(\alpha'), S\varphi_k^{(0)}(\alpha))$$

и с нормированными $\varphi_k^{(0)}(\alpha)$ в форме

$$\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} (S_{k\alpha', k\alpha} - \lambda_k^{(1)}\delta_{\alpha'\alpha}) = 0. \quad (15)$$

Условием разрешимости служит вековое уравнение

$$\det |S_{k\alpha', k\alpha} - \lambda_k^{(1)}\delta_{\alpha'\alpha}| = 0 \quad (\alpha', \alpha = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Оно имеет n корней $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)}(j)$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$), каждому из которых, согласно (15), соответствует система коэффициентов $c_{\alpha} = c_{\alpha j}$. Остающийся еще при вычислении $c_{\alpha j}$ из (15) неопределенный множитель может быть фиксирован нормирующим условием

$$\sum_{j=1}^n |c_{\alpha j}|^2 = 1.$$

Этим нормированные собственные функции нулевого приближения (14), приспособленные к возмущению, полностью определены. Чтобы отличить их от неприспособленных функций $\varphi_k^{(0)}(\alpha)$, мы будем в дальнейшем обозначать их через $\chi_{kj}^{(0)}$. Таким образом,

$$\chi_{kj}^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha j} \varphi_k^{(0)}(\alpha).$$

Для этих функций имеем:

$$(\chi_{k'j'}^{(0)*}, \chi_{kj}^{(0)}) = \delta_{kk'} \delta_{jj'}$$

и

$$(\chi_{k'j'}^{(0)*}, S\chi_{kj}^{(0)}) = \lambda_{kj}^{(1)} \delta_{jj'}$$

Пример: $n = 2$, причем предполагаем, что

$$S_{k_1, k_1} = S_{k_2, k_2}, \quad S_{k_1, k_2} = S_{k_2, k_1} \neq 0 \quad (\text{симметрическое возмущение}).$$

Тогда

$$\lambda_{k(1)}^{(1)} = S_{k_1, k_1} + S_{k_1, k_2}, \quad \text{где } \chi_{k_1}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{k(1)}^{(0)} + \varphi_{k(2)}^{(0)})$$

(симметрическое решение)

и

$$\lambda_{k(2)}^{(1)} = S_{k_1, k_1} - S_{k_1, k_2}, \quad \text{где } \chi_{k_2}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{k(1)}^{(0)} - \varphi_{k(2)}^{(0)})$$

(антисимметрическое решение).

Высшие приближения. Если $\lambda_{k(j)}^{(1)}$ все различны, то благодаря возмущению вырождение снято уже в первом приближении. Собственное значение $\lambda_k^{(0)}$, имеющее кратность n , расщепляется на n различных $\lambda_{kj} = \lambda_k^{(0)} + \varepsilon \lambda_{k(j)}^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Высшие приближения могут тогда вычисляться, как в случае простых собственных значений.

Именно, взяв вместо (3) более общее выражение

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{kj} &= \lambda_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_{k(j)}^{(m)}, \\ \varphi_{kj} &= \chi_{kj}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \chi_{kj}^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

получим систему, аналогичную системе (4):

$$T^{(0)} \chi_{kj}^{(m)} - \lambda_k^{(0)} \chi_{kj}^{(m)} = -S \chi_{kj}^{(m-1)} + \sum_{n=1}^m \lambda_{k(j)}^{(n)} \chi_{kj}^{(m-n)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

из которой можно последовательно вычислить $\chi_{kj}^{(m)}$. Эти функции вначале определяются лишь с точностью до суммы произвольных кратных n различных $\chi_{kj}^{(0)}$. Остающиеся пока еще неопределенными n коэффициентов определяются так, чтобы правая часть того из уравнений (16), в котором впервые встречается $\chi_{kj}^{(m)}$, была ортогональна ко всем n функциям $\chi_{kj}^{(0)}$.

Это дает n условий. Первое из них ($j' = j$) дает приближение собственного значения $\lambda_{k(j)}^{(m+1)}$ ближайшего более высокого порядка, а остальные $n - 1$ определяют $n - 1$ оставшихся еще неизвестными коэффициентов. При этом остается неопределенным лишь коэффициент, соответствующий $j' = j$. Он может быть определен при помощи условия, аналогичного условию (5), или при помощи какого-либо требования

нормированности. Это окончательное определение функций $\chi_{kj}^{(m)}$ происходит одновременно с вычислением $\lambda_{k(j)}^{(m+1)}$ подобно тому, как это имеет место для приспособленных к возмущению собственных функций нулевого приближения $\chi_{kj}^{(0)}$, получающихся одновременно с $\lambda_{k(j)}^{(1)}$.

Дальнейшее вычисление высших приближений при полностью расщепляющемся n -кратном собственном значении аналогично вычислению в случае простых собственных значений; в частности, возможны аналогичные приведенным выше разложения в ряд по собственным функциям невозмущенной задачи или по приспособленным собственным функциям. В первом приближении тогда, пользуясь сокращениями

$$X_{kj, k'j'} = (\chi_{k'j'}^{(0)*}, \chi_{kj}^{(0)}); \quad U_{k'j', kj} = (\chi_{k'j'}^{(0)*}, S\chi_{kj}^{(0)}),$$

получим для возмущений собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_{k(j)}^{(1)} = U_{kj, kj} \quad \chi_{kj}^{(1)} = \sum_{k', j'} X_{kj, k'j'} \chi_{k'j'}^{(0)},$$

где

$$X_{kj, k'j'} = \frac{U_{k'j', kj}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_{k'}^{(0)}} \quad \text{при } k' \neq k,$$

$$X_{kj, k'j'} = \frac{1}{\lambda_{kj}^{(1)} - \lambda_{k'j'}^{(1)}} \sum_{l \neq k} \sum_m \frac{U_{k'j', lm} U_{lm, kj}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \quad \text{при } j' \neq j,$$

и для возмущений собственных значений второго приближения:

$$\lambda_{k(j)}^{(2)} = \sum_{l \neq k} \sum_m \frac{U_{kj, lm} U_{lm, kj}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}}.$$

Если $\lambda_{k(j)}^{(1)}$ не все различны, то вырождение в первом приближении еще не полностью снято. Тогда остаются неопределенными также c_{aj} и приспособленные собственные функции нулевого приближения. В этом случае к возмущению должны быть приспособлены собственные функции приближений второго или более высокого порядка. Окажется ли возможным в высших приближениях дальнейшее, и, в частности, полное снятие вырождения, выясняется из исследования встречающихся вековых уравнений.

Трансформационные свойства (симметрия) операторов $T^{(0)}$ и S часто позволяют заключить, снимаются ли вырождения (см. Приложение 13, стр. 587).

с) Непрерывные собственные значения

Если часть невозмущенных собственных значений образует плотную последовательность, т. е. $\lambda_k^{(0)} = \lambda^{(0)}(k)$, причем область изменения индекса k содержит частичные области, в которых k изменяется непрерывно, но исходное собственное значение, к которому возмущение непрерывно примыкает, не принадлежит этому континууму, то применим метод воз-

мущений, изложенный в предыдущих разделах а) и б). Следует лишь при разложении в ряд по невозмущенной ортогональной системе принять во внимание собственные значения и собственные функции континуума и к суммам по дискретным собственным значениям добавить интегралы по непрерывным собственным значениям.

Так, например, из (10) получаем:

$$\varphi_k^{(m)} = \sum \Phi_{kl}^{(m)} \varphi_l^{(0)} + \int \Phi^{(m)}(k, l) \varphi^{(0)}(l) dl,$$

если для непрерывно изменяющегося индекса писать $\varphi^{(m)}(l)$ вместо применявшегося ранее обозначения $\varphi_l^{(m)}$; из (12б) следует:

$$\varphi_k^{(1)} = \sum_{l \neq k} \frac{S_{lk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \varphi_l^{(0)} + \int \frac{S(l, k)}{\lambda_k^{(0)} - \lambda^{(0)}(l)} \varphi^{(0)}(l) dl,$$

где

$$S(l, k) = (\varphi^{(0)*}(l), S\varphi^{(0)}(k));$$

из (12с) следует:

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{l \neq k} \frac{S_{lk} S_{kl}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} + \int \frac{S(l, k) S(k, l)}{\lambda_k^{(0)} - \lambda^{(0)}(l)} dl$$

и т. д.

Если исходное невозмущенное собственное значение, возмущение которого подлежит исследованию, само принадлежит континууму или если имеются только непрерывные собственные значения $\lambda^{(0)}(k)$, то мы вместо (3) полагаем:

$$\varphi(k) = \varphi^{(0)}(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \varphi^{(m)}(k),$$

не определяя в явном виде возмущенных собственных значений, как это делалось в случае дискретных собственных значений. Функция $\varphi^{(0)}(k)$ удовлетворяет невозмущенному уравнению

$$T^{(0)}\varphi^{(0)}(k) - \lambda(k)\varphi^{(0)}(k) = 0.$$

По аналогии с разделом а) мы получаем неоднородные дифференциальные уравнения

$$T^{(0)}\varphi^{(m)}(k) - \lambda(k)\varphi^{(m)}(k) = -S\varphi^{(m-1)}(k), \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

из которых могут быть последовательно вычислены различные приближения $\varphi^{(m)}$.

Наряду с другими методами, которые можно применить для этого (например, метод, использующий функцию Грина), такое вычисление может быть выполнено аналогично предыдущему при помощи разложения $\varphi^{(m)}(k)$ по ортогональной системе $\varphi^{(0)}(k)$. Например, для *первого приближения* полагаем:

$$\varphi^{(1)}(k) = \int c^{(1)}(k, k') \varphi^{(0)}(k') dk', \quad (17)$$

причем, согласно сказанному выше,

$$(\varphi^{(0)*}(k), \varphi^{(0)}(k')) = \delta(k - k').$$

Тогда будем иметь:

$$c^{(1)}(k, k') = \frac{S(k, k')}{\lambda(k) - \lambda(k')},$$

где $S(k, k') = (\varphi^{(0)*}(k'), S\varphi^{(0)}(k))$. Так как $c(k, k')$ при $k = k'$ имеет особенность, необходимо еще проверить сходимость интеграла (17).

Аналогичным образом получаем для *второго приближения*:

$$\psi^{(2)}(k) = \int c^{(2)}(k, k') \varphi^{(0)}(k') dk',$$

где

$$c^{(2)}(k, k') = \frac{1}{\lambda(k) - \lambda(k')} \int \frac{S(k, k'') S(k'', k')}{\lambda(k'') - \lambda(k'')} dk'' \quad \text{и т. д.}$$

Если, помимо непрерывных собственных значений, имеются также дискретные, то интегралы, в соответствии со смыслом, частично вырождаются в суммы.

2. Метод вариации постоянных

Он применим к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = T y(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

если

- 1) $T = T^{(0)} + \varepsilon S$ и
- 2) $T^{(0)}$ не зависит от t , и собственные значения λ_k , как и собственные функции $\varphi_k^{(0)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ невозмущенной задачи $T^{(0)}\varphi_k^{(0)} - \lambda_k\varphi_k^{(0)} = 0$, известны.

Возмущающий оператор S может зависеть от $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ и t . Мы ищем y в виде

$$y = \sum_k c_k(t) \varphi_k^{(0)}(x) e^{\lambda_k t}$$

и для определения функций $c_k(t)$ получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt} c_k(t) = \varepsilon \sum_l S_{kl} c_l(t) e^{(\lambda_l - \lambda_k)t}, \quad \text{где } S_{kl} = (\varphi_k^{(0)*}, S\varphi_l^{(0)}).$$

Ее решают, применяя последовательные приближения $c_k^{(n)}(t)$, т. е. принимают

$$c_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)}(t),$$

Числа $\lambda_\alpha^{(0)}$ для различных α могут быть как различными, так и равными. Если несколько чисел $\lambda_\alpha^{(0)}$ равны или приблизительно равны друг другу, то задача в нулевом приближении является вырожденной или почти вырожденной. Мы получаем, таким образом:

$$\{T - \lambda\} \left\{ \sum_{\alpha} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{(0)} + \varphi^{(1)} \right\} = 0,$$

откуда следуют n уравнений:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \{(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, T\varphi_{\alpha}^{(0)}) - \lambda(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, \varphi_{\alpha}^{(0)})\} + (\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, T\varphi^{(1)}) - \lambda(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, \varphi^{(1)}) = 0, \\ \alpha' = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Сумма по α здесь, ввиду (19), является величиной того же порядка, что и $\varphi^{(1)}$. Оба последних слагаемых являются величинами порядка $(\varphi^{(1)})^2$; ими по сравнению с суммой по α можно пренебречь, так как для эрмитова оператора T получаем (с учетом (19)):

$$(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, T\varphi^{(1)}) - \lambda(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, \varphi^{(1)}) = (\varphi^{(1)}, T^* \varphi_{\alpha'}^{(0)*}) - \lambda(\varphi^{(1)}, \varphi_{\alpha'}^{(0)*}) \cong (\varphi^{(1)*}, \varphi^{(1)}).$$

Вводя сокращенные обозначения

$$(\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, T\varphi_{\alpha}^{(0)}) = T_{\alpha\alpha'}, \quad (\varphi_{\alpha'}^{(0)*}, \varphi_{\alpha}^{(0)}) = \Phi_{\alpha\alpha'},$$

получаем отсюда систему линейных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \{T_{\alpha\alpha'} - \lambda\Phi_{\alpha\alpha'}\} = 0, \quad \alpha' = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (20)$$

Условием разрешимости служит обращение в нуль определителя:

$$\det |T_{\alpha\alpha'} - \lambda\Phi_{\alpha\alpha'}| = 0, \quad \alpha, \alpha' = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

откуда находятся n собственных значений первого приближения $\lambda = \lambda_{\alpha}$.

Если некоторые из них совпадают, то задача является вырожденной уже в первом приближении.

С помощью выводимых из (20) соответствующих систем значений $c_{\alpha} = c_{\alpha\alpha'}$ собственные функции нулевого приближения определены с точностью до нормирующего множителя.

Насколько хорошим будет приближение, зависит от того, насколько хорошо (19) удовлетворяется найденными значениями $\lambda = \lambda_{\alpha}$. Существенно, чтобы $\varphi_{\alpha}^{(0)}$ выбирались надлежащим образом. Те $\varphi_{\alpha}^{(0)}$, для которых $\lambda = \lambda_{\alpha}^{(0)}$ имеет наименьшее значение, имеют в (18) наибольшие $|c_{\alpha}|$; в то время как $\varphi_{\alpha}^{(0)}$ с большими $\lambda = \lambda_{\alpha}^{(0)}$ встречаются с соответственно меньшими $|c_{\alpha}|$. Поэтому, если функции $\varphi_{\alpha}^{(0)}$ имеют одинаковые или почти одинаковые $\lambda_{\alpha}^{(0)}$ и удовлетворяют условиям (19) с одной и той же степенью точности, то они должны быть все учтены в выражении (18).

Высшие приближения (т. е. более точные, так как параметр возмущения ϵ отсутствует) получают, включая в выражение (18) также

такие $\varphi_\alpha^{(0)}$, для которых $\lambda - \lambda_\alpha^{(0)}$ имеет бóльшие значения, чем для функций $\varphi_\alpha^{(0)}$, использованных при отыскании первого приближения.

Описанный в 1 метод возмущений можно рассматривать как частный случай этого обобщенного способа. Там мы разлагали возмущенную собственную функцию по функциям $\varphi_\alpha^{(0)}$, которые образовывали полную ортогональную систему собственных функций невозмущенного оператора $T^{(0)}$, в то время как при применении обобщенного способа берется разложение по, вообще говоря, неортогональной системе функций $\varphi_\alpha^{(0)}$, которая, однако, должна быть по возможности полной.

Пример: предположим, что задача в первом приближении является однократно вырожденной, причем для одного и того же значения $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)}$ мы имеем два невозмущенных решения $\varphi_1^{(0)}$ и $\varphi_2^{(0)}$, приближенно решающих задачу с одинаковой степенью точности. Пусть, далее, симметрия T , $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$ такова, что

$$T_{11} = T_{22} = C; \quad T_{12} = T_{21} = A; \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = 1 \quad (\text{нормировка}); \\ \Phi_{12} = \Phi_{21} = S \quad (\text{неортогональность } \varphi_1^{(0)} \text{ и } \varphi_2^{(0)}).$$

Из (20) и (21) получаем тогда оба собственных значения первого приближения (расщепление на λ_+ и λ_-):

$$\lambda_+ = \frac{C+A}{1+S}, \quad \text{где } \varphi_+^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \{\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)}\} \\ (\text{симметрическое решение})$$

и

$$\lambda_- = \frac{C-A}{1-S}, \quad \text{где } \varphi_-^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} \{\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}\} \\ (\text{антисимметрическое решение}).$$

(См. в связи с этим также пример на стр. 367, который может иллюстрировать случай обладающего аналогичной симметрией оператора T с ортогональными собственными функциями нулевого приближения.)

б) Применение вариационного исчисления

Если рассматривается какая-либо задача о собственных значениях $T\varphi - \lambda\varphi = 0$, которая, в частности, может и не содержать параметра возмущения, как это было описано в предыдущем разделе, то для произвольных $\lambda^{(0)}$ и $\varphi^{(0)}$ выражение

$$D = T\varphi^{(0)} - \lambda^{(0)}\varphi^{(0)},$$

называемое «отклонением», вообще говоря, не равно нулю. Можно, однако, попытаться, варьируя $\lambda^{(0)}$ и параметры в удачно подобранных $\varphi^{(0)}$,

достичь того, чтобы всегда положительный «квадрат отклонения»

$$\overline{D}^2 = \int |D|^2 d\tau \quad (22)$$

имел минимальное значение.

Если $\lambda^{(0)}$ и $\varphi^{(0)}$ могут быть определены так, чтобы было $\overline{D}^2 = 0$, то тогда должно быть всюду $D = 0$, т. е. $\lambda^{(0)}$ и $\varphi^{(0)}$ будут точными решениями задачи. Преимущество этого способа, таким образом, состоит в том, что имеется точный критерий для оценки достигаемой с его помощью степени точности.

Если оператор T является эрмитовым, то будем иметь:

$$\overline{D}^2 = \int (T - \lambda^{(0)}) \varphi^{(0)} (T^* - \lambda^{(0)}) \varphi^{(0)*} d\tau = \int \varphi^{(0)*} (T - \lambda^{(0)})^* \varphi^{(0)} d\tau. \quad (23)$$

Если тогда $\varphi^{(0)}$ ищется нормированной и без параметров, то варьировать можно только $\lambda^{(0)}$, и из требования минимальности мы посредством дифференцирования по $\lambda^{(0)}$ получаем в качестве наилучшего собственного значения:

$$\lambda^{(0)} = \int \varphi^{(0)*} T \varphi^{(0)} d\tau. \quad (24)$$

Оно отличается от точного значения λ лишь на величину второго порядка малости относительно $\frac{\varphi - \varphi^{(0)}}{\varphi^{(0)}}$.

Если $\varphi^{(0)}$ зависит также от параметров, то $\lambda^{(0)}$ в (24) становится функцией этих параметров. Они должны быть определены так, чтобы выражение \overline{D}^2 имело минимум. Соответствующее собственное значение определяется тогда при помощи (22).

В отличие от описанного ранее метода возмущений, при применении методов вариационного исчисления невозможно постепенное улучшение приближений более низкого порядка. Поэтому для всякого улучшения выражения, в виде которого ищется $\varphi^{(0)}$, приходится снова определять также и все параметры. Удастся ли при этом получить хорошее приближение с помощью малого числа параметров и без громоздких вычислений, существенно зависит от того, насколько удачно выбраны функции $\varphi^{(0)}$. Неудобство способа состоит в том, что T в (22), соответственно в (23), входит в квадрате.

При эрмитовом операторе T часто бывает проще прямо применить вариационный принцип:

$$\delta \int \varphi^* T \varphi d\tau = 0 \quad \text{с дополнительным условием} \quad \int \varphi^* \varphi d\tau = 1,$$

эквивалентный задаче о собственных значениях $T\varphi - \lambda\varphi = 0$. При этом экстремальное значение варьируемого интеграла равно соответствующему собственному значению:

$$\lambda = \int \varphi^* T \varphi d\tau,$$

так что фактически варьируется λ .

Преимущество этого способа состоит в том, что T входит лишь линейно.

Для наименьшего собственного значения следует, таким образом, искать абсолютный минимум λ при помощи варьирования параметров в соответствующим образом выбранных φ . Наиболее точным является решение с абсолютно наименьшим λ . Это — единственный критерий для оценки степени точности приближения. Для дальнейших собственных значений какой-либо общий практически применимый способ оценки ошибки приближения до сих пор неизвестен. В этом заключается недостаток описанного метода. Поэтому может случиться, что, несмотря на то, что абсолютный минимум λ найден достаточно хорошо, выражение для φ будет отличаться от точной собственной функции на величину, не поддающуюся оценке.

Если собственную функцию искать в виде $\varphi = \sum c_a \varphi_a^{(0)}$ и варьировать только c_a , то оба вариационных метода дают систему уравнений (21) обобщенного метода возмущений, описанного в предыдущем разделе.

РАЗДЕЛ ОДИННАДЦАТЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предварительное замечание

Теорию интегральных уравнений можно рассматривать как распространение теории систем линейных уравнений (см. стр. 165) для n переменных на случай $n \rightarrow \infty$. Возможное при конечных n тензорное представление может при этом служить для наглядной интерпретации. Аналогичные формулы тензорного исчисления в дальнейшем, поскольку это возможно, добавляются в скобках. Однако из этой аналогии нельзя извлечь всех деталей. Существенным всюду остается вопрос о сходимости формально образованных выражений.

Величинам λ , называемым в теории интегральных уравнений собственными значениями, соответствуют *обратные* собственные значения тензорного и операторного исчисления. Это следует иметь в виду при сравнении соответствующих формул; в них всюду λ заменено на $\frac{1}{\lambda}$.

А. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

1. Общие положения

а) Функциональное уравнение

$$U(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) U(t) dt = f(x) \quad (\mathfrak{R}u - \lambda u = f) \quad (J)$$

называется при данных $K(x, y)$ и $f(x)$ *интегральным уравнением второго рода* для функции $U(x)$; функция $K(x, t)$ называется *ядром* интегрального уравнения, λ представляет собой параметр; относительно переменных x, y предполагаем, что они изменяются в действительном (конечном или бесконечном) интервале $(a \dots b)$ — так называемой *основной области*, на которую распространены все интегралы. Все встречающиеся функции мы считаем действительными.

Следующие далее рассуждения остаются в силе также для интегральных уравнений для функций нескольких переменных. Тогда обозначение x объединяет переменные x_1, \dots, x_m , которые изменяются

в основной области G ; аналогичный смысл в этом случае имеют также y, t, s .

Однородным, соответственно транспонированным, уравнением, соответствующим уравнению (J), называется уравнение

$$U(x) - \lambda \int K(x, t) U(t) dt = 0 \quad (\mathfrak{R}u - \lambda u = 0), \quad (J_h)$$

соответственно

$$\tilde{U}(x) - \lambda \int K(t, x) \tilde{U}(t) dt = f(x) \quad (\mathfrak{R}'u' - \lambda u' = f). \quad (\tilde{J})$$

б) Если функция $f(x)$ непрерывна и интегралы

$$W = \iint K^2(s, t) ds dt \quad \text{и} \quad \int f^2(t) dt \quad (W = (\mathfrak{R}^2) \quad \text{и} \quad (ff))$$

существуют, и при этом ядро $K(x, y)$ либо кусочно-непрерывно (см. стр. 98), либо имеет при $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ не более чем счетное множество разрывов, причем интегралы $\int K^2(x, t) dt$ и $\int K^2(t, x) dt$ существуют и, как функции от x , ограничены в основной области¹⁾, то при фиксированном значении λ справедливы следующие предложения:

I. Число ρ линейно независимых решений $u^{(1)}(x), \dots, u^{(\rho)}(x)$ уравнения (J_h) конечно и равно числу линейно независимых решений $\tilde{u}^{(1)}(x), \dots, \tilde{u}^{(\rho)}(x)$ уравнения (\tilde{J}_h) ; ρ называется *дефектом* ядра $K(x, y)$ для данного значения λ . *Общим* решением уравнения (J_h) служит выражение $c_1 u^{(1)}(x) + \dots + c_\rho u^{(\rho)}(x)$ с произвольными действительными c_i .

II. Если $\rho = 0$ ²⁾, то уравнения (J) и (\tilde{J}) всегда однозначно разрешимы, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$. Существует *разрешающее ядро* $L(x, y)$ такое, что решения даются равенствами

$$U(x) = f(x) + \lambda \int L(x, t) f(t) dt, \quad \tilde{U}(x) = f(x) + \lambda \int L(t, x) f(t) dt. \quad (1)$$

III. Если $\rho > 0$, то уравнение (J) имеет решение в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\int \tilde{u}^{(i)}(t) f(t) dt = 0 \quad (i = 1, \dots, \rho) \quad ((\mathfrak{R}'^{(i)} f) = 0). \quad (2)$$

Общее решение уравнения (J) получается из *одного* решения уравнения (J) сложением его с общим решением уравнения (J_h) .

¹⁾ Единичное ядро $E(x, t) = \delta(x - t)$ здесь, следовательно, не допускается!

²⁾ Это означает, что однородное уравнение (J_h) не имеет решений, отличных от тривиального решения $u \equiv 0$. (Прим. ред.)

с) Решение интегрального уравнения (J) равнозначно решению следующей бесконечной системы уравнений:

$$x_i - \lambda \sum_k K_{ik} x_k = f_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

в которой следует положить $(i, k = 1, 2, \dots)$:

$$x_i = \int u(t) \omega_i(t) dt, \quad \text{следовательно,} \quad \sum_i x_i^2 = \int u^2(t) dt,$$

$$f_i = \int f(t) \omega_i(t) dt, \quad \text{следовательно,} \quad \sum_i f_i^2 = \int f^2(t) dt,$$

$$K_{ik} = \iint K(s, t) \omega_i(s) \omega_k(t) ds dt, \quad \sum_{i,k} K_{ik}^2 \leq W$$

и где функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... образуют полную систему нормированных ортогональных функций в интервале $(a \dots b)$. (Этому соответствует переход от тензорной символики к уравнениям, связывающим компоненты в декартовых координатах.)

2. Симметрическое ядро, однородное уравнение

Ядро $K(x, y)$ называется *симметрическим*, если

$$K(x, y) = K(y, x) \quad (\mathfrak{K} = \tilde{\mathfrak{K}}).$$

а) При предположениях, сформулированных в 1b, уравнение (J_h) будет нетривиально разрешимо (т. е. соответствующий дефект $\rho > 0$) лишь при определенных дискретных значениях λ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$). Эти значения λ_i называются *собственными значениями*; соответствующие решения $u_i(x)$ называются *собственными* (или *фундаментальными*) *функциями* ядра $K(x, y)$. Для дефекта ρ справедливо неравенство

$$\rho \leq \lambda^2 W \quad (\mathfrak{K}u_n = \lambda_n u_n).$$

б) Всякое симметрическое неисчезающее ядро имеет не менее чем одно и не более чем счетное множество собственных значений, которые не могут накапливаться ни в какой ограниченной области. Собственные значения действительного симметрического ядра действительны. В интервале $-A \leq \lambda \leq +A$ лежит не более чем $A^2 W$ собственных значений; поэтому справедливо неравенство

$$\lambda_n^2 \geq \frac{1}{W}.$$

Если собственному значению λ_n принадлежат ρ_n линейно независимых функций $u^{(1)}(x), \dots, u^{(\rho_n)}(x)$, то их можно считать нормированными и попарно ортогональными:

$$\int u_n^{(h)}(t) u_n^{(h)}(t) dt = 1, \quad \int u_n^{(h)}(t) u_n^{(j)}(t) dt = 0, \quad h \neq j.$$

Собственные функции всегда могут быть выбраны действительными.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_m \neq \lambda_n$, всегда ортогональны:

$$\int u_m(t) u_n(t) dt = 0.$$

Собственные функции $u_n^{(h)}(x)$ образуют полную ортогональную систему (см. стр. 88).

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные собственные значения и ρ_i — дефект ядра при собственном значении λ_i , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{\lambda_n^2} < W,$$

т. е. ряд в левой части всегда сходится.

с) Последовательные приближения собственных значений и собственных функций. Исходя из произвольной нормированной функции $q_0(x)$, образуем $q_n(x) = \lambda'_n \int K(x, t) q_{n-1}(t) dt$, причем λ'_n должно быть определено так, чтобы функция q_n также была нормированной. Тогда $q_n(x)$ сходится к собственной функции, λ'_n — к собственному значению (Э. Шмидт).

д) Билинейный ряд. Ядро $K(x, y)$ представляется рядом

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\rho_n} \frac{u_n^{(\nu)}(x) u_n^{(\nu)}(y)}{\lambda_n} \quad (3)$$

$$\langle \mathfrak{R}x = \sum_n \lambda_n u_n(u_n x) \text{ при произвольном } x \rangle,$$

если этот ряд в основной области сходится равномерно по x и y . Это имеет место, если

а) $K(x, y)$ имеет лишь конечное число собственных значений (*вырожденное ядро, ядро конечного ранга*);

б) для произвольных x, y в основной области справедливо условие Липшица

$$|K(x, t) - K(y, t)| < M|x - y|, \quad M \text{ не зависит от } x, y. \quad (4)$$

Достаточно, чтобы интеграл от квадрата разностного отношения, соответствующего (4), был конечен (Гаммерштейн);

γ) $K(x, y)$ в *конечной* основной области непрерывно и имеет лишь конечное число собственных значений одного из двух знаков (например, не имеет совсем: *определенное ядро*) (Мерсер).

Положительно (отрицательно) определенным называется ядро, которое имеет только положительные (соответственно только отрицательные) собственные значения. Так называемая *интегральная квадратичная форма*

$$\iint K(s, t) q(s) q(t) ds dt$$

для всякой функции $q(x)$, кусочно-непрерывной в основной области, принимает тогда только положительные (соответственно только отрицательные) значения.

3. Симметрическое ядро, неоднородное уравнение

а) Формула Шмидта. Если уравнение (J) разрешимо, то решение всегда может быть записано в виде

$$U(x) = f(x) + \lambda \sum_{n,v} \lambda_n^{(v)} \frac{u_n^{(v)}(x)}{\lambda_n - \lambda}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_n^{(v)} = \int f(t) u_n^{(v)}(t) dt \quad \left(u = \sum_n \frac{u_n(u_n f)}{\lambda_n - \lambda} \right).$$

Ряд сходится равномерно по x ; λ_n и $u_n^{(v)}(x)$ — собственные значения и собственные функции ядра (см. 2). Если уравнение (J) при собственном значении λ_n разрешимо, то ввиду (2) члены, содержащие λ_n , в формуле (5) отсутствуют.

б) Последовательное приближение. Последовательность функций

$$p_1(x) = f(x), \quad p_n(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t) p_{n-1}(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

сходится равномерно к решению $U(x)$ уравнения (J), если

$$\lambda^2 \leq \frac{1}{W} \quad (\text{соответственно } \lambda^2 \leq \Lambda < \frac{1}{W}, \quad (6)$$

если имеется только одно собственное значение) (см. также с)). Этот метод равнозначен разложению в

с) Ряд Неймана. Решение уравнения (J) дается формулой

$$U(x) = f(x) + \sum_v \lambda^v \int K^{(v)}(x, t) f(t) dt$$

$$\left(u = \sum_n \frac{\mathfrak{R}^n f}{\lambda^{n+1}} \cdot (\mathfrak{R}^n - n\text{-я итерация тензора } \mathfrak{R}) \right),$$

если выполнено условие (6). Тогда для разрешающего ядра (см. (1)) имеем:

$$L(x, y) = \sum_v \lambda^{v-1} K^{(v)}(x, y). \quad (7)$$

При этом

$$K^{(n)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(n)}(x, y) = \int K^{(n-1)}(x, t) K(t, y) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

$K^{(n)}(x, y)$ называется n -й итерацией ядра $K(x, y)$.

Чтобы распространить метод последовательных приближений на случай произвольно заданного λ , ядро $K(x, y)$ аппроксимируют

возможно более простой суммой вида $\sum_{n=1}^q a_n(x) b_n(y) = A(x, y)$ таким образом, чтобы для двойного интеграла от остатка $K - A = R(x, y)$ выполнялось условие $\lambda^2 W_R = \lambda^2 \iint R^2(s, t) ds dt < 1$. Тогда согласно (7) для $R(x, y)$ можно найти разрешающее ядро $S(x, y)$ и с его помощью — функции

$$\bar{a}_n(x) = a_n(x) + \lambda \int S(x, t) a_n(t) dt \quad (n = 1, \dots, q)$$

и

$$\bar{f}(x) = f(x) + \lambda \int S(x, t) f(t) dt.$$

Для $U(x)$ тогда получаем интегральное уравнение с *вырожденным ядром*

$$U(x) - \lambda \int \sum_{n=1}^q \bar{a}_n(x) b_n(t) U(t) dt = \bar{f}(x).$$

д) Решение уравнения (J) с *вырожденным ядром* эквивалентно (см. 1с) решению системы линейных уравнений с конечным числом неизвестных, так как вырожденное ядро может быть представлено с помощью конечного числа ортогональных функций.

е) Итерированные ядра. Если действительное симметрическое ядро $K(x, y)$ удовлетворяет предположениям, сформулированным в 1б, то его n -я итерация $K^{(n)}(x, y)$ ($n = 2, 3, \dots$) представляет собой ядро действительное, симметрическое и, сверх того, непрерывное. Собственными значениями для $K^{(n)}$ служат $\lambda_i = \lambda_i^n$, т. е. n -ые степени собственных значений ядра K ; собственные функции, принадлежащие λ_i , в точности совпадают с собственными функциями ядра K , принадлежащими λ_i и, при определенных условиях, — λ_i . Аналогично (3) имеем:

$$K^{(n)}(x, y) = \sum_{\nu} \sum_{\mu} \frac{u_{\nu}^{(\mu)}(x) u_{\nu}^{(\mu)}(y)}{\lambda_{\nu}^n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

и этот ряд в отличие от ряда (3) *всегда* сходится в основной области равномерно и абсолютно.

ф) Интегральное уравнение

$$U(x) - \lambda^n \int K^{(n)}(x, t) U(t) dt = f_n(x), \quad (J^{(n)})$$

где

$$f_n(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(x, t) f(t) dt + \dots + \lambda^{n-1} \int K^{(n-1)}(x, t) f(t) dt,$$

имеет в точности те же решения, что и уравнение (J); вместо (J) можно решать $(J^{(n)})$ и наоборот. Если $K(x, y)$ не удовлетворяет предположениям, сформулированным в 1б, которые, однако, выполнены для $K^{(n)}(x, y)$, то можно, решая $(J^{(n)})$, получить решения (J).

4. Несимметрическое ядро

а) Решения *однородного* уравнения (J_n) ортогональной системы, вообще говоря, не образуют. Уравнение (J_n) имеет решения не при всяком ядре; существуют ядра, не имеющие собственных значений. Все же всякому ядру $K(x, y)$ можно всегда поставить в соответствие две ортогональные системы, состоящие из собственных функций $v_n(x)$ и $w_n(x)$ двух симметрических положительно определенных вспомогательных ядер:

$$K_1(x, y) = \int K(x, t) K(y, t) dt, \quad K_2(x, y) = \int K(t, x) K(t, y) dt$$

с собственными значениями (одинаковыми для обоих ядер) $\mu_n = \lambda_n^2$. Система

$$v_n(x) = \lambda \int K(x, t) w_n(t) dt, \quad w_n(x) = \lambda \int K(t, x) v_n(t) dt$$

решается только при $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и только собственными функциями ядер K_1 и K_2 . Всякая функция $\varphi(t)$, допускающая представление вида $\int K(x, t) \chi(t) dt$ или $\int K(t, x) \chi(t) dt$, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по функциям $v_n(x)$, соответственно $w_n(x)$.

б) Относительно решения уравнения (J) остается в силе сказанное в 3б), с), d), f). Уравнение (J) имеет то же решение, что и уравнение

$$u(x) = \lambda \int \bar{K}(x, t) u(t) dt = \bar{f}(x)$$

с симметрическим ядром

$$\bar{K}(x, y) = K(x, y) + K(y, x) - \lambda \int K(t, x) K(t, y) dt$$

и

$$\bar{f}(x) = f(x) - \lambda \int K(t, x) f(t) dt.$$

В. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

1. Уравнение вида

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (\mathfrak{A}u = f) \quad (8)$$

называется *интегральным уравнением первого рода* для функции $\varphi(x)$. Если уравнение (8) имеет решение, то о функции $f(x)$ говорят, что она *представлена истокообразно* с помощью ядра $K(x, y)$.

2. Для симметрического ядра (т. е. если в основной области $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ справедливо равенство $K(x, y) = K(y, x)$) имеет место

Теорема о разложении: всякая функция $f(x)$, которая с помощью некоторого симметрического ядра может быть представлена

в форме (8), разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $u_n(x)$ ядра $K(x, y)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u_n(x), \quad \text{где } \gamma_n = \int_a^b u_n(t) f(t) dt \quad \left(f = \sum_n u_n(u_n f) \right),$$

причем $u_n(x)$ пробегает все попарно ортогональные нормированные собственные функции. Решение уравнения (8) дается формулой

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda_n u_n(x) \quad \left(u = \sum_n \frac{u_n(u_n f)}{\lambda_n} \right).$$

3. Несимметрическое ядро. Всякая функция $f(x)$, которая может быть представлена истокообразно (формула (8)), разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(x), \quad \text{где } \alpha_n = \int_a^b v_n(t) f(t) dt$$

(относительно $v_n(x)$ см. А4а). Аналогично из представления

$$f(x) = \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt$$

следует разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w_n(x), \quad \text{где } \beta_n = \int_a^b w_n(t) f(t) dt.$$

РАЗДЕЛ ДВЕНАДЦАТЫЙ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Вариационное исчисление ставит перед собой задачу отыскания функций x, y, z, \dots от s, t, \dots , при которых интеграл

$$S = \int_{s_1, t_1}^{s_2, t_2} \dots V(s, t, \dots, x, y, \dots, x_s, x_t, \dots) ds dt \dots \quad (x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \dots)$$

имеет минимальное или максимальное значение (экстремум). Пределы интегрирования при этом могут предполагаться фиксированными или же переменными, при определенных ограничивающих условиях. Случай переменных пределов интегрирования, однако, приводится к случаю постоянных пределов. Функции из рассматриваемого класса, дающие решение задачи, называются *экстремальями*.

Вариационные задачи могут решаться *прямыми* методами (например, с помощью аппроксимации) или косвенным путем — с помощью приведения к дифференциальным уравнениям. В то же время часто может оказаться полезным обратный путь — приведение дифференциального уравнения к вариационной задаче с последующим ее решением прямыми методами вариационного исчисления.

А. ПРИВЕДЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1. Вариация без дополнительных условий

а) Уравнения Эйлера — Лагранжа

Далее приводятся наиболее важные случаи.

а) $V(x, \dot{x}, t)$ содержит *одну* функцию $x(t)$ *одной* независимой переменной t и ее производную $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. Если мы будем *варьировать* функцию $x(t)$, заменяя ее выражением

$$x(t) + \varepsilon \xi(t) \equiv x(t) + \delta x,$$

то соответствующая вариация S определится формулой

$$\delta S = \varepsilon \frac{\partial S(x + \varepsilon \xi)}{\partial \varepsilon} = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \xi + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \dot{\xi} \right) dt,$$

откуда, интегрируя по частям член, содержащий $\dot{\xi}$, будем иметь:

$$\delta S = \varepsilon \left[\frac{dV}{dx} \xi \right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt.$$

Если функция $x(t)$ задана для значений t_1 и t_2 , то в этих точках $\xi = 0$ и, следовательно, первое слагаемое выпадает. Из необходимого условия экстремума S , согласно которому для всех допустимых функций ξ должно быть $\delta S = 0$, следует *дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа*:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

Оно определяет $x(t)$ с точностью до двух произвольных постоянных, значения которых находятся с помощью краевых условий.

b) $V(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dots, t)$ содержит *несколько* (n) функций одной независимой переменной t . Здесь будем иметь $\delta S = 0$, если функции $x(t), y(t), \dots$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \dots$$

Это — n дифференциальных уравнений второго порядка. Они определяют $x(t), y(t), \dots$ с точностью до $2n$ постоянных интегрирования, которые находятся с помощью краевых условий.

c) $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, t)$ содержит *одну* функцию и ее производные до третьего порядка включительно. Здесь получим:

$$\delta S = \varepsilon \left[\xi \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) + \dot{\xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) + \ddot{\xi} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) dt.$$

Таким образом, δS будет равно нулю, если при t_1 и t_2 заданы, кроме $x(t)$, также \dot{x} и \ddot{x} и удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} = 0.$$

d) $V(s, t, \dots, x, y, \dots, x_s, x_t, \dots, y_s, y_t, \dots)$ содержит *несколько* независимых переменных s, t, \dots несколько зависимых переменных x, y, \dots и их производные x_s, y_s, \dots . Вариация δS будет равна нулю, если $x(s, t, \dots)$ и т. д. определяются из уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial V}{\partial x_s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x_t} \right) - \dots = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial V}{\partial y_s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial y_t} \right) - \dots = 0 \text{ и т. д. } ^1).$$

¹⁾ В предположении, что на границе области изменения независимых переменных s, t, \dots функции x, y, \dots принимают заданные значения (см. ниже, γ). (Прим. ред.)

Выражения, встречающиеся в подобного рода вариационных задачах в левых частях уравнений Эйлера — Лагранжа, называются *функциональными производными* (также вариационными, или эйлеровыми, производными) от V и записываются в виде $\frac{\delta V}{\delta x}$, $\frac{\delta V}{\delta y}$ и т. д.

β) Канонические уравнения

а) $V = V(x, \dot{x}, t)$ с $\delta x = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$. Введем при помощи преобразования Лежандра новую переменную $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = p(x, \dot{x}, t)$, так что \dot{x} представится в виде $\dot{x} = \dot{x}(x, p, t)$, и построим новую функцию (функцию Гамильтона): $H(x, p, t) = p\dot{x} - V$.

Тогда условие

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta p \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) + p \frac{d}{dt} \delta x - \delta x \frac{\partial H}{\partial x} \right\} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta p \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \delta x \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

приводит к каноническим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{и} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

б) $V = V(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ с $\delta x = 0$, $\delta \dot{x} = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$. Введем $\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} = r(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, так что $\ddot{x} = \ddot{x}(x, \dot{x}, r, t)$, и построим функцию $H_1(x, \dot{x}, r, t) = r\ddot{x} - V$. Тогда

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (r\ddot{x} - H_1) dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{r}\dot{x} + H_1) dt = 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} V_1(x, \dot{x}, r, \dot{r}, t) &= \dot{r}\dot{x} + H_1(x, \dot{x}, r, t), \quad \frac{\partial V_1}{\partial \dot{x}} = p(x, \dot{x}, r, \dot{r}, t), \\ \frac{\partial V_1}{\partial \dot{r}} &= s(x, \dot{x}, r, \dot{r}, t) \end{aligned}$$

и построим функцию Гамильтона:

$$H_2(x, r, p, s, t) = p\dot{x} + s\dot{r} - V_1.$$

Задача

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} V dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} V_1 dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} \{p\dot{x} + s\dot{r} - H_2\} dt = 0$$

приводит к каноническим уравнениям:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_2}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad \dot{r} = \frac{\partial H_2}{\partial s}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial H_2}{\partial r}.$$

Эта система четырех дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению Эйлера — Лагранжа (четвертого порядка):

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Аналогичным образом можно вариационные задачи с производными еще более высокого порядка свести к вариационным задачам с только первыми производными и соответственно бóльшим числом зависимых переменных (*униформизация*); тем самым для каждой вариационной задачи можно найти соответствующую систему канонических дифференциальных уравнений. К задачам с многими зависимыми переменными $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$, ..., $x_k^{(n)}(t)$ возможен тот же подход.

γ) Более общие краевые условия

Решения приведенных выше дифференциальных уравнений должны выбираться так, чтобы s, t, x, y, \dots на границе имели заданные значения.

Если подставить их в V и образовать интеграл S , то экстремальное значение интеграла найдется в виде функции граничных значений:

$$S = S(s_1, t_1, x_1, y_1, \dots, s_2, t_2, x_2, y_2, \dots).$$

Тогда, например, для простейшего случая а) получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{dS}{dt_2} = \frac{\partial S}{\partial t_2} + \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x_2}, & \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_2}, \\ \frac{\partial S}{\partial x_1} &= - \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, & \frac{\partial S}{\partial x_2} &= \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_2}, \\ \frac{\partial S}{\partial t_1} &= - \left(V - \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=x_1}, & \frac{\partial S}{\partial t_2} &= \left(V - \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=x_2}. \end{aligned}$$

Если же значения на границе не задаются, но требуется, чтобы было $f_1(x_1, t_1) = 0$, $f_2(x_2, t_2) = 0$, то на границе должно быть:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Это приводит к *условиям трансверсальности*, которые должны там выполняться:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(V - \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

2. Вариация с дополнительными условиями

Вариационная задача. Если в качестве решений задачи

$$\delta \int \dots \int V ds dt \dots = 0$$

допускаются лишь функции, удовлетворяющие каким-либо *дополнительным условиям* вида

$$\int \dots \int G ds dt \dots = \text{const}, \quad \int \dots \int H ds dt \dots = \text{const}, \dots$$

или

$$G=0, \quad H=0, \dots,$$

то V в уравнениях Лагранжа следует заменить выражением

$$V + \lambda G + \mu H + \dots$$

При этом множители Лагранжа λ, μ, \dots должны быть впоследствии определены из краевых и дополнительных условий¹⁾.

Эквивалентность задачам о собственных значениях (см. стр. 351). Если вариационная задача имеет специальный вид:

$$\delta \int_a^b \left\{ A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - Bu^2 \right\} dx = 0, \quad (1)$$

где A и B — данные функции от x , с дополнительным условием

$$\int_a^b \rho u^2 dx = \text{const} \quad (2)$$

и краевыми условиями $x(a) = x(b) = 0$, то уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(A \frac{du}{dx} \right) + Bx + \lambda \rho x = 0. \quad (3)$$

Таким образом, и обратно, задача о собственных значениях (3) всегда может быть сведена к вариационной задаче (1), (2).

Совершенно аналогично, многомерная задача о собственных значениях

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Bu + \lambda \rho u = 0$$

может быть сведена к задаче:

$$\delta \int \dots \int \left\{ \sum_k \sum_i A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - Bu^2 \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

с дополнительным условием

$$\int \dots \int \rho u^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n = \text{const}.$$

¹⁾ Этот метод разъясняется еще раз более подробно на физическом примере сил реакции, стр. 415.

Эквивалентность интегральным уравнениям. Задача

$$\iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \text{extremum},$$

$$\int \varphi^2(t) dt = 1, \quad \varphi = 0 \text{ на границе}$$

имеет те же собственные значения λ и решения $\varphi(t)$ в качестве собственных функций, что и однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

В. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1. Метод Ритца

Основная идея метода Ритца состоит в следующем: в основной области выбирают подходящую полную систему функций $\{f_p(t)\}$ такую, чтобы каждая из принадлежащих ей функций удовлетворяла краевым условиям задачи. Затем пытаются построить экстремали в виде

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p f_p(t).$$

Решение вариационной задачи $\delta S = 0$ сводится, таким образом, к прямому определению бесконечного числа постоянных коэффициентов c_p . Это выполняется следующим образом: образуют *конечные* суммы

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^n c_p f_p(t)$$

и определяют n коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n из n уравнений:

$$\frac{\partial S_n}{\partial c_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

где $S_n = S_n(c_1, c_2, \dots, c_n)$ представляют собой ту функцию величин c_p , которая получится, если в интеграл S , экстремум которого разыскивается, вместо $x(t)$ подставить функцию $x_n(t)$. Если получаемая таким путем последовательность функций $x_n(t)$ с возрастанием n сходится к некоторой допустимой функции, то $x_n(t)$ являются приближенными решениями задачи. Успех этого метода в большой степени зависит от того, насколько удачно выбрана система функций $\{f_p(t)\}$. (Пример см. Приложение 8, стр. 579.)

2. Сведение к задаче с бесконечным числом переменных

Решение задачи ищется в виде разложения в ряд по соответствующим образом выбранным ортогональным функциям; коэффициенты Фурье определяются так, чтобы разлагаемая функция представляла

собой экстремаль задачи. В качестве примера мы приведем решение Гурвица *изопериметрической задачи*: замкнутая плоская дифференцируемая кривая длины L должна быть выбрана так, чтобы ограничиваемая ею площадь была возможно большей.

Введем на кривой вместо длины дуги s параметр $t = \frac{2\pi s}{L}$, пробегающий значения от 0 до 2π . Тогда задача может быть сформулирована следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt = \text{extremum}$$

с дополнительным условием

$$L^2 = \int_0^{2\pi} \frac{L^2 dt}{2\pi} = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt = \text{const.}$$

Мы ищем функции x и y в виде рядов Фурье:

$$x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

и после простого вычисления, использующего соотношения ортогональности для $\sin nt$ и $\cos nt$, находим:

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n),$$

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Отсюда можно получить выражение

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (c_n^2 + d_n^2)(n^2 - 1)],$$

в котором каждое слагаемое неотрицательно; следовательно, $L^2 - 4\pi F \geq 0$, и равенство (т. е. $F = \max$) наступает лишь в том случае, когда все слагаемые обращаются в нуль, т. е. при

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

$$y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t.$$

Это — параметрические уравнения окружности.

3. Аппроксимация ломаными линиями

Интеграл, экстремум которого разыскивается, заменяют приближенно равной ему суммой:

$$S = \int_a^b V(t, x, \dot{x}) dt = \sum_{i=0}^n V\left(t_i, x_i, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right) \Delta t = \sum_{i=0}^n V_i \Delta t,$$

иначе говоря, подразделяют интервал $a \leq t \leq b$ на n равных частей длины Δt . Значения x_i функции $x(t)$ в точках t_i определяются тогда из $n + 1$ уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0.$$

Возникающие таким путем уравнения могут также рассматриваться как система разностных уравнений, заменяющая дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа. Эта система имеет вид

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \dot{x}_{i-1}} \right) = 0.$$

РАЗДЕЛ ТРИНАДЦАТЫЙ СТАТИСТИКА (ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ)

А. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Способ описания

Дать количественное описание какой-либо ситуации или события — значит для некоторого числа параметров $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, выбранных в качестве характеристических, указать числовые значения, которые устанавливаются при помощи наблюдений.

Две ситуации, или два события, мы будем называть *сравнимыми*, если характеристические параметры для них одни и те же. Два описания, использующие одни и те же параметры, мы называем *равноценными*.

Если имеется некоторое число N равноценных описаний сравнимых ситуаций или событий (так называемый *коллектив*), то мы можем каждое из них изобразить точкой в n -мерном *пространстве* с параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ в качестве координат. *Распределение* этих N точек дает представление всего опытного материала. Если известно достаточное количество точек, то такое распределение можно рассматривать как функцию, дающую плотность $\rho(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$. Если множество точек концентрируется в пространстве меньшего числа измерений $k < n$, то между параметрами существуют $n - k$ *закономерных* соотношений, отыскание которых составляет одну из основных задач физики. В противном случае мы знаем лишь *статистические* соотношения, которые представляются с помощью функции $\rho(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$. Если параметры могут принимать лишь дискретные значения, то их распределение дается целыми положительными числами $n(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, которые указывают, как часто встречаются ситуации с определенной системой значений параметров. Мы остановимся сначала на этом случае.

При помощи предельного перехода можно перейти к непрерывному распределению. Имеем:

$$N = \sum_{\alpha, \beta, \dots} n(\alpha, \beta, \dots) = \iint \dots d\alpha d\beta \dots \rho(\alpha, \beta, \dots).$$

2. Относительные частоты

Вместо целых чисел $n(\alpha, \beta, \dots)$ удобнее ввести *относительные частоты* $w(\alpha, \beta, \dots) = \frac{n(\alpha, \beta, \dots)}{N}$, где $\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} w(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 1$.

Это означает такую нормировку ρ , что $\iint \dots d\alpha d\beta \dots \rho(\alpha, \beta, \dots) = 1$.

Мы подразделяем теперь параметры на три группы:

1) *истинные* параметры, распределение значений которых нас интересует,

2) *постоянные* параметры, значения которых принимаются постоянными, т. е. остаются одними и теми же во всех рассматриваемых случаях,

3) *свободные* параметры, т. е. такие, которые не принимаются во внимание.

Мы пишем $w(\alpha, \beta, \gamma | \delta, \epsilon)$, если α, β, γ — истинные, δ, ϵ — постоянные параметры, в то время как свободные параметры $\zeta, \eta, \vartheta, \dots$ не выписываются. Тогда, как легко видеть, имеем, например:

$$w(\alpha, \beta, \gamma | \delta, \epsilon) = \frac{\sum_{\zeta, \eta, \vartheta, \dots} n(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \dots)}{\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta, \vartheta, \dots} n(\dots)},$$

т. е. в числителе производится суммирование по свободным параметрам $\zeta, \eta, \vartheta, \dots$, так как все возможности, соответствующие их различным значениям, рассматриваются как одна, в то время как в знаменателе суммирование производится по всем параметрам, за исключением фиксированных δ, ϵ .

Таким образом, имеем: $\sum_{\alpha, \beta, \gamma} w(\alpha, \beta, \gamma | \delta, \epsilon) = 1$.

Если во внимание принимаются только два параметра, то мы имеем следующие различные понятия:

$$w(\alpha, \beta) = \frac{n(\alpha, \beta)}{\sum_{\alpha, \beta} n}, \quad w(\alpha | \beta) = \frac{n}{\sum_{\alpha} n}, \quad w(\beta | \alpha) = \frac{n}{\sum_{\beta} n},$$

$$w(\alpha) = \frac{\sum_{\beta} n}{\sum_{\alpha, \beta} n}, \quad w(\beta) = \frac{\sum_{\alpha} n}{\sum_{\alpha, \beta} n}.$$

Отсюда следует: $\sum_{\alpha, \beta} w(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha} w(\alpha | \beta) = \sum_{\alpha} w(\alpha) = 1$,

$w(\alpha, \beta) = w(\alpha | \beta) w(\beta) = w(\beta | \alpha) w(\alpha)$ (теорема умножения),

$\sum_{\alpha} w(\alpha, \beta) = w(\beta)$; $\sum_{\beta} w(\alpha, \beta) = w(\alpha)$ (теоремы сложения),

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha) &= \sum_{\beta} w(\alpha | \beta) w(\beta), \\ w(\beta) &= \sum_{\alpha} w(\beta | \alpha) w(\alpha) \end{aligned} \right\} \text{(теоремы разложения)}$$

и далее:

$$\omega(\beta|\alpha) = \frac{\omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)}{\sum_{\beta} \omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)} = \frac{\omega(\beta)}{\omega(\alpha)} \omega(\alpha|\beta) \text{ (формула Бейеса).}$$

Два параметра α и β называются *независимыми*, если $\omega(\alpha|\beta)$ не зависит от β . Тогда $\omega(\alpha|\beta) = \omega(\alpha)$, и мы имеем:

$$\omega(\beta|\alpha) = \omega(\beta),$$

а также

$$\omega(\alpha, \beta) = \omega(\alpha)\omega(\beta) \text{ (специальная теорема умножения).}$$

Если в рассмотрении участвуют три параметра, то необходимо различать следующие типы:

$$\omega(\alpha) = \frac{\sum_{\beta, \gamma} n}{\sum_{\alpha, \beta, \gamma} n}; \quad \omega(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{\gamma} n}{\sum_{\alpha, \beta, \gamma} n}; \quad \omega(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{n}{\sum_{\alpha, \beta, \gamma} n};$$

$$\omega(\alpha|\beta) = \frac{\sum_{\gamma} n}{\sum_{\alpha, \gamma} n}; \quad \omega(\alpha, \beta|\gamma) = \frac{n}{\sum_{\alpha, \beta} n}; \quad \omega(\alpha|\beta, \gamma) = \frac{n}{\sum_{\alpha} n}.$$

Здесь имеют место, в числе прочих, следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta, \gamma) &= \omega(\gamma)\omega(\alpha, \beta|\gamma), \\ &= \omega(\gamma|\alpha, \beta)\omega(\alpha, \beta), \\ &= \omega(\alpha)\omega(\beta|\alpha)\omega(\gamma|\alpha, \beta), \\ \omega(\alpha, \beta) &= \omega(\alpha)\omega(\beta|\alpha), \\ \omega(\alpha|\beta) &= \sum_{\gamma} \omega(\alpha, \gamma|\beta), \end{aligned}$$

$$\omega(\alpha, \beta|\gamma) = \omega(\beta|\gamma)\omega(\alpha|\beta, \gamma) = \frac{\omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)\omega(\alpha|\beta, \gamma)}{\sum_{\beta} \omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)},$$

$$\omega(\beta|\alpha) = \frac{\omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)}{\sum_{\beta} \omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)}, \quad \omega(\gamma|\alpha) = \frac{\sum_{\beta} \omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)\omega(\gamma|\alpha, \beta)}{\sum_{\beta} \omega(\beta)\omega(\alpha|\beta)}.$$

При еще большем числе параметров можно легко образовать аналогичные формулы.

3. Вероятность

Чем больше число N известных ситуаций, тем богаче имеющийся опыт. Мы можем вообразить, что совершен предельный переход при $N \rightarrow \infty$, принимая при этом в качестве *аксиомы*, что существует предел $W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(\alpha, \beta, \dots)}{N}$, к которому мы при неограниченном воз-

растании N можем подойти сколь угодно близко. Эти числа $W(\alpha, \beta, \dots)$ мы можем рассматривать как выражение идеального (практически нереализуемого) опыта, состоящего в наблюдении бесконечного множества *прецедентов*. При применении такого опыта к некоторому *конкретному* случаю, однородному с прецедентами, мы называем $W(\alpha, \beta, \dots)$ *вероятностью*¹⁾ того, что соответствующие этому случаю, пока еще неизвестные, значения параметров равны α, β, \dots . Каждая такая система значений описывает некоторую *возможность*. Если несколько параметров δ, ϵ, \dots для рассматриваемого конкретного случая известны, то для остальных вероятность дается выражением $W(\alpha, \beta, \dots | \delta, \epsilon, \dots)$. Параметры, которые не принимаются во внимание, считаются свободными.

Теория вероятностей имеет целью вычисление системы чисел $W(\alpha, \beta, \dots)$. Ее метод состоит в дополнении весьма ограниченной области действительного опыта общими соображениями, которые отчасти опираются на интуицию, отчасти же имеют гипотетическую природу. С помощью указанных выше теорем, справедливых для W так же, как и для w , можно, исходя из фундаментальных, принимаемых правильными, *вероятностей a priori*, выводить дальнейшие вероятности.

Азартные игры, исторически послужившие отправным пунктом, со свойственной им, бесполезной для физика, постановкой вопросов, оставили свои следы в обычной терминологии. Говорят о «событиях» и «испытаниях», которые по отношению к определенным ожиданиям протекают «благоприятно» или «неблагоприятно», хотя эти слова и способны вызвать неправильные представления.

4. Основные элементарные правила

Меняя способ описания возможностей при помощи индексов, т. е. выполняя некоторое преобразование, можно перейти к новым параметрам. Если некоторые из них оставляют свободными, то по ним должно производиться суммирование. Это дает следующее

Правило. Вероятность наступления одного, безразлично, какого именно, события из некоторой группы событий равна сумме вероятностей всех этих отдельных событий²⁾. Если эти вероятности равны, то искомая вероятность равна отношению числа элементов рассматриваемой группы событий, так называемых *благоприятных случаев*, к числу всех возможных случаев.

¹⁾ Фактически в предшествующем тексте дано определение вероятности как предела относительной частоты. Такая концепция, как известно, не выдерживает критики. Однако характер определения самого понятия вероятности не играет существенной роли в конкретных приложениях теории вероятностей. (Прим. ред.)

²⁾ В предположении, что одновременное наступление двух событий исключено, т. е. что события *несовместны*. (Прим. ред.)

Частный случай представляет собой разделение всех возможностей на две группы, которые характеризуются при помощи параметра α , способного принимать лишь два значения α_1 и α_2 . Если мы оставим все остальные параметры свободными, то будем иметь $W(\alpha_1) = 1 - W(\alpha_2)$. Здесь часто употребляется обозначение: $W(\alpha_1) = p$, $W(\alpha_2) = q = 1 - p$.

Специальная теорема умножения дает здесь следующее

Правило. Вероятность наступления события, которое характеризуется двумя *независимыми* параметрами, равна произведению вероятностей, которые мы получим, оставляя один из параметров свободным.

Эти два правила представляют собой основу элементарного исчисления вероятностей.

5. Средние значения

Образованное с помощью $W(\alpha, \beta, \dots)$ в качестве весовой функции среднее значение функции $f(\alpha, \beta, \dots)$ от параметров α, β, \dots :

$$\bar{f} = \frac{\sum_{\alpha, \beta, \dots} W(\alpha, \beta, \dots) f(\alpha, \beta, \dots)}{\sum_{\alpha, \beta, \dots} W(\alpha, \beta, \dots)}$$

представляет особый интерес. Оно называется *математическим ожиданием* функции f .

Знаменатель $\sum_{\alpha, \beta, \dots} W(\alpha, \beta, \dots)$ равен 1 и в силу этого может быть опущен. Мы пишем его, имея в виду тот случай, когда W определено лишь с точностью до множителя пропорциональности (т. е. не нормировано).

Аналогичное выражение:

$$\bar{f} = \frac{\iint \dots d\alpha d\beta \dots \rho(\alpha, \beta, \dots) f(\alpha, \beta, \dots)}{\iint \dots d\alpha d\beta \dots \rho(\alpha, \beta, \dots)}$$

применяется в случае непрерывно изменяющихся параметров.

Если некоторые из параметров постоянны, то суммирования, соответственно интегрирования, по ним не производят. \bar{f} становится тогда функцией от них.

В. СТАТИСТИКА СЕРИЙ

1. Общие правила

Особенно важным для практики является тот случай, когда каждая из ситуаций, статистическое распределение которых подлежит исследованию, состоит из целой *серии* не зависящих от N аналогичных событий, так называемых *испытаний*. Пусть результат («успех») каждого из этих испытаний характеризуется лишь *одним* истинным

параметром α , который может принимать значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$, с вероятностями $W(\alpha_i)$. Порядковый номер испытания в качестве свободного параметра во внимание не принимается.

Мы спрашиваем теперь, какова вероятность того, что в серии значение α_1 встретится n_1 раз, значение α_2 — n_2 раз, ..., значение α_j — n_j раз. Она равна:

$$W(n_1, n_2, \dots, n_j) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_j!} W(\alpha_1)^{n_1} W(\alpha_2)^{n_2} \dots W(\alpha_j)^{n_j},$$

где

$$N = \sum_{i=1}^j n_i.$$

Если мы интересуемся лишь одним значением α_1 параметра в качестве «благоприятного» (или некоторой выбранной группой значений α_i) с $W(\alpha_1) = p = 1 - q$; $q = \sum_{i=2}^j W(\alpha_i)$ и пишем $n_1 = n$, то следует формально положить $j = 2$, и мы получаем *формулу Ньютона*:

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}; \quad \sum_{n=0}^N W(n) = (p + q)^N = 1,$$

которая при $N \gg 1$ переходит в *формулу Лапласа*

$$W(n) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi Npq}}, \quad \text{где } z = \frac{n - Np}{\sqrt{2Npq}},$$

а при $p \ll 1$, $N \gg Np$ — в *формулу Пуассона*

$$W(n) = \frac{e^{-Np} (Np)^n}{n!}.$$

При этом имеем:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n W(n) = Np \quad (\text{Бернулли}).$$

2. Отклонения

Вероятность $W(n)$ имеет, вообще говоря, при $n = \bar{n}$ максимум, вокруг которого значения n рассеиваются, или «отклоняются».

Величины

$$s = n - \bar{n}, \quad \delta = \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}$$

называются соответственно абсолютным и относительным *отклонением*.

«Средним абсолютным отклонением» называется

$$|\bar{s}| = 2W(\bar{v}) \left(\bar{n} - \frac{\bar{v}\bar{n}}{N} \right),$$

где ν означает наибольшее целое число $\leq \bar{n}$; «среднее *относительное* отклонение» поэтому равно

$$|\bar{\delta}| = \frac{|\bar{s}|}{\bar{n}} = 2W(\nu) \left(1 - \frac{\nu}{N}\right).$$

«*Абсолютное* среднее квадратическое отклонение» $\sqrt{\bar{s}^2}$ дается формулой

$$\bar{s}^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = Npq = \bar{n}q;$$

«*относительное* среднее квадратическое отклонение» $\sqrt{\bar{\delta}^2}$ поэтому будет равно

$$\bar{\delta}^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{q}{n}.$$

Среднее уклонение различных значений n от определенного *наперед* заданного n_1 равно

$$\overline{n_1 - n} = n_1 - \bar{n}.$$

«Среднее квадратическое уклонение» двух следующих одно за другим испытаний дается формулой

$$\overline{(n_1 - n_2)^2} = 2\bar{s}^2 = 2\bar{n}^2\bar{\delta}^2 = 2\bar{n}q.$$

Предельные случаи. а) Если $p \ll 1$, $N \gg 1$ и $pN = \bar{n}$ конечно, то справедлива *формула Пуассона*

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}.$$

В этом случае абсолютное и относительное среднеквадратические отклонения определяются посредством равенств

$$\bar{s}^2 = \bar{n}, \quad \bar{\delta}^2 = \frac{1}{\bar{n}}.$$

б) Пусть как N , так и \bar{n} столь велики, что величину δ можно рассматривать как непрерывно изменяющуюся, без того, чтобы было $p \ll 1$. Тогда справедлив *гауссов закон ошибок*: вероятность того, что для δ будет найдено значение, лежащее в промежутке между δ и $\delta + d\delta$, равна

$$W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi q}} e^{-\frac{\bar{n}}{2q} \delta^2} d\delta.$$

В этом случае среднее отклонение равно

$$|\bar{\delta}| = 2 \int_0^{\infty} \delta W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{2q}{\pi \bar{n}}}$$

и относительное среднее квадратическое отклонение $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ определяется формулой

$$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 W(\delta) d\delta = \frac{q}{n}.$$

Закон ошибок может быть, следовательно, записан также в форме

$$W(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\delta^2}}} e^{-\frac{\delta^2}{2\overline{\delta^2}}} d\delta.$$

Далее, получаем:

$$\frac{|\overline{\delta}|}{\sqrt{\overline{\delta^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

отношение абсолютных отклонений имеет то же значение.

с) Если, кроме того, $p \ll 1$, то в формулах следует всюду положить $q=1$. Тогда получаем, в частности:

$$|\overline{\delta}| = \sqrt{\frac{2}{\pi n}},$$

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{n}.$$

3. Особые случаи

а) Если в опытах, статистиках и т. п. оказывается, что действительно $\overline{s^2} = \overline{n}$, то говорят, что имеется *нормальная дисперсия*;

при $\overline{s^2} > \overline{n}$ имеем *супернормальную*,

при $\overline{s^2} < \overline{n}$ имеем *субнормальную* дисперсию.

Причины таких уклонений кроются в невыполнении требования независимости испытаний.

б) Если последовательные серии испытаний отделены одна от другой промежутком времени τ , то во многих встречающихся в практике случаях числа n испытаний одной серии, давших благоприятный результат, не являются независимыми от исхода испытаний предыдущей серии.

Особенно простым и важным является случай

$$N \gg 1, \quad p \ll 1, \quad pN = n \text{ конечно.}$$

Тогда имеем:

$$\overline{n_i - n_{i+1}} = P(n_i - \overline{n})$$

и

$$\overline{(n_i - n_{i+1})^2} = 2Pn.$$

При этом n_i и n_{i+1} означают n для следующих одна за другой серий, а $P < 1$ — постоянная, которая зависит от условий опыта и от промежутка времени τ , разделяющего серии, и с возрастанием τ растет от 0 до 1.

Все прочие формулы для отклонений остаются неизменными.

4. Корреляция

Если результат испытаний характеризуется *несколькими* (k) числами (n_1, n_2, \dots, n_k) , то можно определить *многопараметрическую вероятность* $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$, для которой будем иметь:

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_k} W(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1.$$

Средние значения (математические ожидания) определяются при помощи формулы

$$\bar{n}_i = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_k} n_i W(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Если k параметров не зависят друг от друга, то будем иметь:

$$W(n_1, n_2, \dots, n_k) = \prod_i W_i(n_i). \quad (1)$$

Если, *в частности*, справедлив гауссов закон ошибок, то, полагая

$$x_i = \frac{n_i - \bar{n}_i}{n_i},$$

получим вероятность

$$W(x_1, x_2, \dots, x_k) = C e^{-\sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j},$$

и это выражение разлагается в произведение выражений вида (1), если коэффициенты a_{ij} образуют диагональную матрицу ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), т. е. если система координат x_j совпадает с системой главных осей «эллипсоида рассеивания» $\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 1$. Величины a_{ij} с точностью до общего множителя равны

$$r_{ij} = \frac{\overline{x_i x_j}}{\sqrt{\overline{x_i^2} \overline{x_j^2}}} \quad (\text{коэффициенты корреляции}).$$

Значение r_{ij} представляет собой меру зависимости параметров x_i и x_j (соответственно n_i и n_j) друг от друга. При $r_{ij} = 0$ корреляция отсутствует, при $r_{ij} = 1$ существует строгая пропорциональность от-

клонений $x_i = \sum_j c_{ij} x_j^1$) (функциональная зависимость). При $r_{ij} < 1$ множитель c_{ij} определен не точно. Если образовать величину $\tilde{c}_{ij} = \operatorname{tg} \varphi_{ij}$ при условии, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{ij} = \frac{2\overline{x_i x_j}}{x_i^2 - x_j^2},$$

то минимум выражения

$$\left(\frac{(x_i - \tilde{c}_{ij} x_j)^2}{1 + c_{ij}^2} \right)$$

(среднее значение квадрата отклонения всех полученных измерением точек от гиперплоскости $x_i = \sum_j \tilde{c}_{ij} x_j$) достигается при $c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$.

С. ТЕОРИЯ ВЫРАВНИВАНИЯ

1. Теория ошибок

Пусть при n -кратном измерении какой-либо физической величины, истинное значение которой равно x , найдены ошибочные значения l_i . Величины $\varepsilon_i = x - l_i$ называются (неизвестными) *истинными ошибками* измерения.

Относительно этих ε_i принимается, что для достаточно большого числа n будем иметь:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cong 0,$$

т. е. что эта сумма мала по сравнению со *средней абсолютной ошибкой* $|\bar{\varepsilon}|$, определяемой равенством

$$|\bar{\varepsilon}| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| = d.$$

Это соотношение должно оставаться справедливым при увеличении или уменьшении числа измерений, а также в случае, когда при образовании среднего значения используются произвольные (не зависящие от l_i) положительные весовые множители p_i :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum p_i \varepsilon_i}{\sum p_i} \cong 0.$$

Отсюда следует:

$$\bar{\varepsilon}^2 \cong \frac{\bar{\varepsilon}^2}{n} \left(= \frac{\sum p_i \varepsilon_i^2}{\sum p_i} \right).$$

¹⁾ Т. е. в случае $r_{ij} = 1$ $c_{ij} = 0$ для $i \neq j$. (Прим. ред.)

Величина $m = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2}$ называется *средней квадратической ошибкой*. Она указывает степень точности (но не степень правильности!) одного измерения с весом $p = 1$.

Опыт и теоретико-вероятностные соображения позволяют представить распределение ошибок формулой

$$W(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \right).$$

При этом имеем:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{2h^2} = m^2,$$

следовательно,

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

$$|\bar{\varepsilon}| = 2 \left| \int_0^{\infty} W(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \right| = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = d = m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cong \frac{4}{5} m.$$

Вероятная ошибка w определяется равенством

$$\int_{-w}^{+w} W(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2}; \quad w \cong \frac{2}{3} m.$$

Имеем:

$$\int_{-m}^{+m} W(\varepsilon) d\varepsilon \cong \frac{2}{3}.$$

Если $x = f(x_1, x_2, \dots, x_l)$ — функция l величин x_k , которые при i -м измерении были найдены с ошибками ε_{ki} , то будем иметь:

$$\varepsilon_i = \sum_k f_k \varepsilon_{ki}; \quad \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_k f_k^2 \sum_i \varepsilon_{ik}^2, \quad \text{где } f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

$$m = \sqrt{\sum_k f_k^2 m_k^2}, \quad \text{где } m_k = \sqrt{\sum_i \varepsilon_{ik}^2}.$$

2. Выравнивание

Вероятное значение L величины x находится при помощи «метода наименьших квадратов» на основе требования

$$\sum_i p_i (L - l_i)^2 = \min$$

или, при $L - l_i = v_i$, из условия

$$\sum_i p_i (L - l_i) = \sum_i p_i v_i = 0;$$

при

$$L = \frac{\sum_i p_i l_i}{\sum_i p_i} = \bar{l}$$

будем иметь $\bar{v} = 0$.

Ввиду того, что $\epsilon_i = v_i + (x_i - L)$, получаем $\bar{\epsilon} = x - L$ и

$$\bar{\epsilon}^2 = \bar{v}^2 + \bar{\epsilon}^2 \approx \bar{v}^2 + \frac{\bar{\epsilon}^2}{n},$$

следовательно,

$$m = \sqrt{\bar{\epsilon}^2} = \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Множитель $\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$, однако, практически не играет роли, ибо вычисления имеют смысл лишь при больших n .

3. Выравнивание посредственных наблюдений

Пусть для определения l величин x_k даны n *определяющих уравнений* вида $f_i(x_1, x_2, \dots, x_l) = 0$. Допустим, что эти уравнения составлены на основе законов или гипотез и содержат параметры, значения которых найдены при помощи наблюдений. Если бы исходные предпосылки были строго справедливы, а наблюдения — свободны от ошибок, то эти уравнения должны были бы быть совместны и при $n \geq l$ позволяли бы точно вычислить истинные значения x_k , не приводя к противоречиям.

Если, например, требуется найти параболу $y = ax^2 + bx + c$, то a, b, c представляют собой искомые x_k и каждая найденная из опыта пара чисел x, y доставляет одно определяющее уравнение. Основная предпосылка состоит здесь в том, что если бы измерения положений точек были свободны от ошибок, то все точки лежали бы на одной и той же параболе.

В действительности же при $n > l$ всегда возникают противоречия, которые для отыскания вероятных значений \bar{x}_k величин x_k следует устранить путем выравнивания.

Чтобы применить здесь метод наименьших квадратов, выберем приближенные значения x_{0k} так, чтобы (известные) величины $f_i(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0l}) = l_i$ были малы, и будем искать поправки ξ_k такими, чтобы было:

$$\sum_i p_i (f_i(x_{0k} + \xi_k))^2 = \sum_i p_i \left(l_i + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi_k \right)^2 = \min \text{ при } \xi_k = \bar{\xi}_k.$$

Полагая $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{x_k = x_{0k}} = a_{ik}$, получаем *нормальные уравнения*:

$$\sum_i p_i a_{ik} (l_i + \sum_k a_{ik} \bar{\xi}_k) = 0,$$

или

$$\sum_k \bar{\xi}_k \sum_i p_i a_{ir} a_{ik} = - \sum_i p_i a_{ir} l_i \quad (r = 1, 2, \dots, l).$$

Эти l линейных уравнений вида

$$\sum_k \bar{\xi}_k A_{rk} = \sum_i l_i B_{ir}$$

имеют решения

$$\bar{\xi}_k = \sum_i \alpha_{ik} l_i \quad \left(\sum_k \alpha_{ik} A_{rk} = B_{ir} \right),$$

и мы получаем:

$$\bar{x}_k = x_{0k} + \bar{\xi}_k.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФИЗИКА

СИСТЕМА ПОНЯТИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Теоретическая физика пользуется *математическим аппаратом* для описания *эмпирических закономерностей*, обнаруживаемых в явлениях природы. Для этого необходимо *отображение* чувственно воспринимаемого материала в некоторую математическую схему. Наглядная схема (трехмерной евклидовой) *геометрии*, применение которой, вероятно, напрашивается более всего, во многих отношениях оказывается слишком узкой; схема *анализа* пока представляется достаточной, и в настоящее время ее применение преобладает. Так как она в конечном счете состоит из одних лишь чисел, то в теоретической физике, следовательно, речь идет об отображении мира в некоторую систему чисел. Наблюдаемые закономерности представляются тогда как соотношения между числами; эти соотношения, будучи сформулированы на языке математики, называются *законами*.

Предпосылкой для осуществления этой программы служит фиксация *метода установления соответствия* между тем, что составляет предмет чувственного восприятия, и числами схемы. Применять этот метод значит *измерять*. Измерение выполняется при помощи определенного *способа измерения*, который представляет собой совокупность действий, выполнимых при помощи средств, доставляемых природой, и приводящих к установлению некоторого числа, *меры*. Называя это число, обычно добавляют определенный символ (наименование или знак, например *см* длины, ° Цельсия), указывающий (более или менее однозначно) на метод измерения, который позволяет получить это число. Этот символ обозначает измеряемое *качество*, которое в физике *определяется только через способ измерения*, в то время как мера указывает *количество*. Единство количества и качества называется *физической величиной*.

Точная формулировка способа измерения должна содержать все необходимые для измерения указания, а именно наименования необходимых *средств измерения* (органы чувств и приборы), описание действий, производимых с их помощью над измеряемым объектом, и оценку чувственно воспринимаемого материала при помощи некоторого (отсчитываемого или подсчитываемого) числа, для получения которого иногда дается также специальное *вычислительное правило* (формула). Инструменты, употребляемые при измерении, должны быть достаточно подробно

описаны как индивидуальные физические объекты, которые либо готовы к употреблению, либо, при определенных условиях, могут быть изготовлены. Точное однозначное описание способов измерения, равно как и точное следование им, невозможны. К ним можно лишь приблизиться.

Из бесчисленного множества способов измерения, которые можно изобрести, физическая *теория измерений* выбирает ограниченное число, имея в виду ту цель, чтобы получаемые с их помощью числа удовлетворяли *возможно более простым соотношениям*.

Часто различные способы, будучи применены к одному и тому же объекту, неизменно приводят к одинаковым числам. Это дает простейшее из могущих быть найденными соотношений, $a = a'$, которое выражает, следовательно, некий закон. В таких случаях, однако, предпочитают говорить: различные способы измеряют *одну и ту же* физическую величину. В случае соотношения $a = F(a')$ часто говорят лишь о различии в *шкале* для одной и той же величины; в частности, это имеет место, если $a = \alpha a'$, т. е. если числа отличаются лишь некоторым постоянным множителем α .

Выделяются особо такие способы измерения, которые, будучи применены к определенным классам различных объектов, неизменно приводят к соотношениям, имеющим форму: $a = b + c + \dots$. В таких случаях полученное количество можно рассматривать как сумму частичных количеств того же самого качества. Если последние равны между собой, то полученное количество является кратным определенной *единице*: $a = na_0$, а отвлеченное число $n = \frac{a}{a_0}$ называется *мерой* по отношению к этой единице. Обычные способы измерения длин, промежутков времени, масс и многих других физических величин удовлетворяют этому соотношению.

Единицы для целей практики должны фиксироваться в виде воспроизводимых объектов. Таким путем возникает *система единиц*, в которой единицам соответствует мера 1. Теперь становится возможным описывать встречающиеся ситуации при помощи уравнений, связывающих меры: 1) $s = f(a, b, c, \dots)$, или при помощи уравнений, содержащих отвлеченные числа: 2) $\frac{s}{s_0} = f\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{b_0}, \frac{c}{c_0}, \dots\right)$. В отличие от уравнения 1), уравнение 2) остается справедливым при переходе к другим единицам: $a = \alpha a'$, $a_0 = \alpha a'_0$ и т. д. Если более простое соотношение 1) также должно обладать ценным свойством *ковариантности относительно преобразований масштабов*, то между единицами, которые вначале для каждой физической величины могли выбираться произвольно, должны существовать такие соотношения, чтобы 1) следовало из 2).

Пример. 1) $x = a + bt + ct^2$, 2) $\frac{x}{x_0} = \frac{a}{a_0} + \frac{bt}{b_0 t_0} + \frac{ct^2}{c_0 t_0^2}$; должно быть, следовательно, $x_0 = a_0$, $b_0 = \frac{x_0}{t_0}$, $c_0 = \frac{x_0}{t_0^2}$, т. е. единица для a

должна быть той же, что и для x , единица для b — той же, что и для $\frac{x}{t}$, и т. д. Это записывают большей частью в форме $[a] = [x]$, $[b] = \left[\frac{x}{t}\right]$ и т. д. Если таким путем все единицы сводятся к единицам длины l , времени t и массы m , то система единиц называется *абсолютной*. Символ $[l^2 t^2 m^2]$ называется *размерностью* соответствующей единицы.

Физика не может довольствоваться только тем, чтобы кодифицировать количественные результаты экспериментов при помощи математических формул. Она должна, прибегая к обобщениям, т. е. при помощи применений к случаям, рассматриваемым как аналогичные, выйти за пределы области опыта и объединить частные опыты, невзирая на возможные пробелы в них, в более обширную систему. Для этого служат общие *теории*, образующие рамки, в которые должны укладываться частные опыты, причем теория имеет тем большую ценность, чем больше она в состоянии охватить и чем проще она по своей структуре. Эта структура устанавливается при помощи *аксиом*, которые должны образовывать непротиворечивую систему.

В современной физике мы встречаем следующие виды теорий, которые классифицируются по используемым ими средствам описания:

1° *Точечные теории* (теории дальнего действия), например механика точки.

Физические величины определены лишь в *дискретных* точках трехмерного пространства. Каждая точка обозначается при помощи координат, которые являются функциями времени (движение). Физические величины представляют собой явные или, в случае, если они зависят от координат, неявные функции одного лишь времени. Имеется, таким образом, только одна независимая переменная t . Поля встречаются лишь как вспомогательные математические образы (потенциальные поля).

2° *Континуальные теории* (теории поля, теории ближнего действия), например электродинамика в вакууме.

Физические величины определены в каждой точке пространства. Они являются функциями времени и места. Координаты представляют собой независимые переменные. Поля имеют здесь физический смысл и изображаются при помощи математических полей. Понятие движения существует лишь формально (волна)¹⁾.

3° *Комбинации континуальных и точечных теорий*, например электронная теория.

Здесь одновременно применяются полевые и точечные величины, причем оба рода величин функционально связаны в точках. Точечные величины могут рассматриваться как сингулярности поля, для которых действуют особые законы.

¹⁾ Здесь, подразумевается, что, например, при распространении электромагнитной волны не происходит перемещения вещества в пространстве. (*Прим. ред.*)

4° *Системные теории*, например термодинамика.

В них физические величины ставятся в соответствие не точкам, а пространственно протяженным системам (индексы вместо координат!). Такие величины, относящиеся к системам, являются функциями одного лишь времени.

При помощи предельного перехода и соответствующего абстрагирования можно от одной формы теории перейти к другой, например от многоточечной теории к континуальной, и обратно.

Если предельный переход выполняется лишь в математической схеме при сохранении допредельных физических представлений, то получаются теории аппроксимативного характера.

5° *Квазиточечные теории*, например механика протяженных тел.

Здесь величины, характеризующие непрерывные или дискретные системы, представляются в виде точечных величин, образуя среднее значение по пространству. В качестве характерной величины в этой теории встречается, например, эффективное сечение.

6° *Квазиконтинуальные теории* (многоточечные теории), например гидродинамика.

Континуальные величины в многоточечных системах определяются при помощи «сглаживания» и представляются полями. Здесь в качестве характеристических полевых величин встречаются понятия плотности точек и средней скорости, которые чужды чисто континуальной теории.

7° *Статистические теории*.

В основу их кладется конечное или бесконечное число точно определенных возможностей. Состояние системы задается при помощи *чисел заполнения*.

Этим теориям, пользуясь соответствующим *многомерным* («конфигурационным» или «фазовым») *пространством*, можно придать форму точечной или квазиконтинуальной теории.

Следующие формы теории можно рассматривать как методические варианты:

Одноточечная теория в конфигурационном или фазовом пространстве (для представления многоточечных систем в трехмерном пространстве).

Многоточечная теория там же (для представления совокупностей систем).

Точечная теория и *теория поля* в четырехмерном пространственно-временном континууме (теория относительности).

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ МЕХАНИКА

А. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТОЧКИ

Классическая механика выбирает для описания реальных процессов следующие математические образы:

- 1° однородное, изотропное, неограниченное трехмерное пространство;
- 2° точки в нем для описания положений материальных элементов;
- 3° временной параметр для упорядочения последовательности положений.

Она предполагает (постулирует):

- 1° что применение масштабов (и, в случае необходимости, световых лучей, считающихся прямолинейными) позволяет внести в пространство евклидову метрику так, что каждое положение можно точно охарактеризовать при помощи измерения расстояний и углов и описать в системе координат или векторном пространстве. Каждому положению соответствует вначале своя собственная система координат;
- 2° что применение часов позволяет внести метрику в последовательность положений так, что каждому положению может быть точно поставлена в соответствие некоторая точка линейной временной шкалы;
- 3° что положения непрерывно примыкают друг к другу так, что каждый элемент сохраняет свою индивидуальность. Если того же требуют от систем координат, то координаты *элементов* становятся непрерывными функциями временного параметра;
- 4° что пространственная метрика с течением времени не изменяется, т. е. что используемые масштабы можно рассматривать как неизменные;
- 5° что изменения положений материальных элементов взаимно обуславливают друг друга и что является возможным (например, благодаря достаточно далеким расстояниям) отдельные элементы или группы элементов освободить от влияния остальных, т. е. образовать или найти «свободные» элементы или «замкнутые» системы элементов.

Тогда, исходя из идеализированного и обобщенного опыта, принимают в качестве справедливых следующие принципы (тезисы, аксиомы):

- 1° При помощи надлежащего выбора систем координат в последовательностях положений и отождествления этих систем возможно

образовать общую, не зависящую от времени систему (*инерциальная система*), в которой при надлежащем выборе временной шкалы движение *всех* свободных элементов описывается как прямолинейное и равномерное:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{t}\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \text{const}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{b} = 0.$$

2° Элементам α замкнутой системы возможно поставить в соответствие (положительные) не зависящие от времени числа m_α , характеризующие массы элементов таким образом, что (математическая) точка

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} \quad (\text{центр тяжести})$$

в инерциальной системе будет двигаться прямолинейно и равномерно:

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{t}\bar{\mathbf{v}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \bar{\mathbf{v}} = \text{const}, \quad \ddot{\bar{\mathbf{r}}} = 0.$$

3° Возможно ввести векторные величины $\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = -\mathfrak{R}_{\beta\alpha}$ такие, что уравнение $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = 0 = \sum_{\alpha, \beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta}$, вытекающее из 2°, допускает расщепление на уравнения движения:

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta},$$

причем $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ зависит лишь от элементов α и β .

Величина $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ называется *силой* (*Einzelkraft*), с которой β действует на α ; $\sum_{\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ называется *полной силой*, действующей на α .

4° Возможные эквивалентные инерциальные системы могут отличаться друг от друга своей ориентацией, началами отсчета, масштабами и равномерным относительным поступательным движением (без вращения); временные шкалы могут отличаться началами отсчета и масштабами; числа, характеризующие массу — единицами, примененными при ее измерении.

5° При фиксированной единице массы величины $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ не зависят от выбора инерциальной системы и начала отсчета времени.

Эти средства описания, постулаты и принципы характеризуют классическую механику точки (в отличие от других теорий). В принципах содержится в несколько модифицированной форме три аксиомы (закона) Ньютона, предложения о векторной аддитивности сил (правило параллелограмма) и об их разложимости на силы взаимодействия между парами элементов, свойства однородности и изотропности физического пространства и так называемый принцип относительности Галилея.

Эта механика имеет ограниченную применимость ввиду того, что средства описания во многих случаях оказываются недостаточными,

что постулаты либо не выполняются, либо же представляют собой нецелесообразные допущения, а также потому, что принципы покоятся на идеализациях, справедливых лишь в пределе и не допускающих произвольных обобщений.

В. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Задачи механики точки имеют очень разнообразные формы, в зависимости от того, что дано и что разыскивается. Мы классифицируем их следующим образом:

1° Даны: массы m_α и силы $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ как функции от τ , $\dot{\tau}$ и, возможно, прочих параметров σ_α .

Разыскиваются: $\tau_\alpha(t)$ — положения как функции времени.

Метод: решение системы дифференциальных уравнений второго порядка и определение постоянных интегрирования из дополнительных условий.

Частный случай: разыскание положений равновесия, т. е. таких решений, при которых все $\dot{\tau}_\alpha = 0$.

2° Даны: функции $\tau_\alpha(t)$ и массы m_α .

Разыскиваются: силы $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$.

Метод: дифференцирование. Уравнения недостаточны для однозначного разложения на силы взаимодействия между парами элементов. Часть этих сил должна быть задана.

Частный случай: все $\dot{\tau}_\alpha = 0$ (статика).

3° Даны: некоторые из сил, движений и масс.

Разыскиваются: величины, еще остающиеся неизвестными.

Ввиду того, что здесь некоторые из величин τ_α представляют собой известные функции времени, часть сил, возникающую благодаря им, можно отделить как «внешние» силы, в которые параметр времени t входит в явном виде (силы, зависящие от времени).

Во всех случаях необходимо установить, достаточны ли данные величины для отыскания однозначного решения и существует ли такое решение вообще.

С. МЕХАНИКА ОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Общие сведения

Мы рассматриваем только одну материальную точку. Для остальных точек пусть заданы положения и движения. Мы примем эти точки во внимание, вводя силы \mathfrak{R} , вообще говоря, зависящие от времени:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\tau, \nu, t).$$

Уравнение движения тогда имеет вид

$$m\ddot{\tau} = \mathfrak{R} \quad (\text{Ньютон}).$$

При решении задач оказываются полезными следующие понятия:

а) $v = \dot{r}$ ($v^i = \frac{dx^i}{dt}$) — скорость;

$b = \dot{v} = \ddot{r}$ ($b^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{kt}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^t}{dt}$) — ускорение.

Если разложим ускорение на радиальное и тангенциальное ускорения, $b = b_r + b_t$, то будем иметь (см. стр. 209):

$$b_r = \frac{\mathfrak{R}}{R^2} v^2 = \frac{[v][bv]}{v^2}, \quad b_t = \frac{v(bv)}{v^2} = \frac{v}{v} \frac{dv}{dt}.$$

При этом \mathfrak{R} означает вектор, имеющий направление и длину радиуса кривизны кривой, описываемой движущейся точкой.

— mb_r называется *центробежной силой* (см. стр. 416).

б) $p = mv$ — *импульс*, или *количество движения*. Ввиду того, что m не зависит от времени, имеем также:

$$\mathfrak{R} = \frac{dp}{dt} \left(K^i = \frac{dp^i}{dt} + \Gamma_{ht}^i \frac{p^h p^t}{m} \right).$$

с) $dA = (\mathfrak{R}v) dt = (\mathfrak{R}dr)$ ($dA = (K_i v^i) dt = K_i dx^i$) — работа, совершаемая силой \mathfrak{R} при перемещении dr .

Имеем:

$$dA = m \left(\frac{dv}{dt} v \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) dt = dT,$$

$$dT = (p dv) \quad \left(p_i = \frac{\partial T}{\partial v^i}, \quad dT = p_i dv^i \right).$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} (pv) = \frac{p^2}{2m} \text{ — кинетическая энергия,}$$

$$T = \frac{m}{2} (v^i v_i) = \frac{m}{2} (v^i v^k g_{ik}) = \frac{1}{2} (p_i v^i) = \frac{1}{2m} (p_i p^i),$$

т. е. работа, совершаемая силой \mathfrak{R} , равна приращению кинетической энергии T .

д) $\frac{dA}{dt}$ — *мощность* (силы).

$$\text{Размерности: } [v] = \frac{l}{t}; [\mathfrak{R}] = \frac{ml}{t^2}; [p] = \frac{ml}{t}; [T] = [A] = \frac{ml^2}{t^2}.$$

2. Особые случаи

а) **Центральная сила.** Если $\mathfrak{R} \parallel r$ и, значит, $[\mathfrak{R}r] = 0$, то отсюда следует *теорема площадей*:

$$\frac{d}{dt} [r\dot{r}] = [r\ddot{r}] = 0.$$

Таким образом, имеем:

$$[r\dot{r}] = \mathfrak{k},$$

где \mathbf{i} — постоянный свободный вектор, и $(\mathbf{r}\mathbf{i})=0$, т. е. движение происходит в одной и той же плоскости. (Относящийся сюда пример имеется в Приложении 9, стр. 581.)

б) **Материальная точка в потенциальном поле.** Если сила задана как функция своей точки приложения и, возможно, времени, то можно ввести понятие (потенциального) силового поля $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbf{r}, t)$, определенного в каждой точке. Если это поле может быть представлено как отрицательный градиент некоторого скалярного поля V :

$$\mathfrak{R} = -\text{grad } V,$$

то V называется *потенциалом* силы (или *силовой функцией*). Значение, которое эта функция принимает там, где расположена материальная точка, $W(t) = V(\mathbf{r}(t), t)$, называется *потенциальной энергией*. Если V не зависит явно от времени, то \mathfrak{R} называется *консервативной силой* (dA представляет собой тогда полный дифференциал по координатам), и мы имеем:

$$\frac{d}{dt}(T + W) = 0 \quad (\text{закон сохранения энергии в механике}).$$

$T + W = E$ называется *полной энергией*.

с) **Силы реакции.** Если материальная точка под действием силы \mathfrak{R} должна двигаться таким образом, чтобы в каждый момент времени ее координаты удовлетворяли k условиям¹⁾

$$f_\alpha(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k),$$

т. е. если соответствующим воздействием заставить ее совершать свободное от трения движение, ограниченное уравнениями $f_\alpha = 0$ (уравнения *связей*), то к «внешней» силе \mathfrak{R} необходимо добавить *силу реакции* \mathfrak{Z} , имеющую вид:

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \text{grad } f_\alpha \quad \left(Z = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \right),$$

где λ_α вначале представляют собой неизвестные функции положения и времени. При $k=1$ связь представляет собой поверхность $f_1=0$, при $k=2$ — кривую $f_1=0, f_2=0$. Случай $k>2$ для одной материальной точки не имеет геометрического смысла. Силы реакции направлены перпендикулярно к поверхности (кривой) и поэтому не совершают при движении материальной точки никакой работы:

$$(\mathfrak{Z} dx) = 0 \quad \left(\sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} dx^i = 0 \right).$$

¹⁾ Условия, имеющие вид $f_\alpha(x^1, x^2, x^3) = 0$, называются *голономными*. Если они задаются в виде $L dx^1 + M dx^2 + N dx^3$, причем левая часть не является полным дифференциалом (и не может быть сделана таковым при помощи умножения на подходящий множитель), то они называются *неголономными*.

При применении закона сохранения энергии можно поэтому не принимать во внимание сил реакции.

Уравнения движения тогда имеют вид (*уравнения Лагранжа первого рода*):

$$m\ddot{x} = \mathfrak{R} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \text{grad} f_{\alpha} \left(m\ddot{x}^i = K^i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^i} \right) \quad (3 \text{ уравнения}).$$

с дополнительными условиями

$$f_{\alpha}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (k \text{ уравнений}).$$

Мы получаем $(3+k)$ уравнений для $(3+k)$ функций $r(t)$ и $\lambda_{\alpha}(x^1, x^2, x^3, t)$. Их решают, алгебраически исключая λ_{α} из уравнений движения; из получающихся таким путем $(3-k)$ уравнений вместе с k дополнительными условиями находят $r(t)$.

Силы реакции можно получить из найденного описанным способом решения при помощи простого дифференцирования.

д) **Фиктивные силы.** Приведенные выше формулировки законов механики справедливы для произвольных инерциальных систем. Если же преобразовать уравнения к другим системам отсчета, то появятся дополнительные члены, которые носят название *фиктивных сил*.

Важными частными случаями служат:

1. *Ускоренная система отсчета:* $r = r' + \frac{a}{2} t^2,$

$$m\ddot{x}' = \mathfrak{R} - ma.$$

Вообще $r = r' + a(t),$

$$m\ddot{x}' = \mathfrak{R} - m\ddot{a}.$$

Дополнительный член, стоящий в правой части, называется *силой инерции*.

2. *Вращающаяся система отсчета:*

$$r = r' \cos \omega t + a(\alpha r')(1 - \cos \omega t) - [\alpha r'] \sin \omega t \quad (\text{см. стр. 189}),$$

$$m\ddot{x}' = \mathfrak{R} - 2m\omega [\alpha \dot{r}'] - m\omega^2 [a[\alpha r']] \quad (a^2 = 1);$$

$-2m\omega (\alpha \dot{r}')$ называется *силой Кориолиса*,

$-m\omega^2 [a[\alpha r']] = m\omega^2 (r' - a(\alpha r'))$ называется *центробежной силой*.

Важнейшим примером такой неинерциальной системы отсчета с действующими в ней фиктивными силами является система отсчета, связанная с Землей. Здесь имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164,1} \text{сек}^{-1} = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}.$$

3. Уравнения движения в произвольных координатах

Часто оказывается выгодным записывать уравнения движения в произвольных криволинейных координатах x^i ; это относится к тем случаям, когда силы в таких координатах выражаются более просто и, в особенности, когда при наличии сил реакции уравнения связей допускают приведение к простой форме $x^k = \text{const}$. Если, кроме того, справедливо соотношение $\mathfrak{R} = -\text{grad } V$, то в ковариантной записи, используя основные векторы (см. стр. 252—253), будем иметь:

$$\begin{aligned} d\tau &= e_i dx^i, & v &= e_i v^i, & p &= mv = m v^i e_i, \\ \mathfrak{R} &= K^i e_i, & -dV &= (\mathfrak{R} d\tau) = K^k dx^k (e_k e_i), \end{aligned}$$

следовательно,

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} = K^k (e_i e_k) = K_i.$$

а) Уравнения Лагранжа второго рода. Уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = \mathfrak{R} = -\text{grad } V$$

после умножения на e_k записывается в форме

$$\left(e_k \frac{d}{dt} (mv) \right) = \frac{d}{dt} (mv_k) - m \left(v \frac{de_k}{dt} \right) = K_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Ввиду $\frac{de_k}{dt} = v^i \frac{\partial e_k}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial e_i}{\partial x^k} = \frac{\partial v}{\partial x^k}$ получаем:

$$\frac{d}{dt} (mv_k) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = -\frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Если ввести кинетическую энергию в форме

$$T = \frac{m}{2} v^i v_i = \frac{m}{2} (v^i v^k (e_i e_k))$$

и рассматривать T как функцию от x^i и v^i (обе эти величины, конечно, зависят от t), то отсюда получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = -\frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

В системе координат, не меняющейся с течением времени, будет $v^i = \frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i$. При $T = T(x^i, \dot{x}^i)$, т. е. если T представляет собой

функцию координат и их производных по времени, мы получаем, таким образом, уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = - \frac{\partial V}{\partial x^k} = K_k.$$

Эта форма уравнений сохраняет силу и в том случае, когда используется система координат, изменяющаяся во времени: $v^i = \dot{x}^i + u^i$, где u произвольным образом зависит от положения и времени.

Вводя функцию Лагранжа $L(x^k, \dot{x}^k, t)$: $L = T - V$, можно получить также более простую форму уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0.$$

Мы имеем здесь три дифференциальных уравнения второго порядка, которые сводятся к меньшему числу, если одно или два из x^k следует, согласно уравнениям связей, положить постоянными.

Координата x^k называется *циклической*, если $\frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$. Тогда соотношение $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \text{const}$ представляет собой промежуточный интеграл.

б) Уравнения Гамильтона. Ввиду ¹⁾

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{\dot{x}^r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} + p_i \frac{\partial u^i}{\partial \dot{x}^i}, \quad \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{v^r} = - \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{v^r}, \quad \frac{\partial V}{\partial x^i} \Big|_{v^r} = \frac{\partial V}{\partial x^i} \Big|_{v^r}$$

из уравнений Лагранжа возникает при введении функции Гамильтона

$$H(x^i, p_i, t) = T + V - p_i u^i = p_i \dot{x}^i - (T - V)$$

система, содержащая шесть дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x^i} \Big|_{p^r} \\ \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{x^r} \end{aligned} \quad (\text{канонические уравнения Гамильтона}),$$

¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} &= m v^i v^k \left(e_i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} \right) = m v_i v^k \left(e^i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{v^r} &= m v_i v_k \left(e^k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i} \right) = m v_i v^k \left(e_k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i} \right), \end{aligned}$$

причем ввиду $(e^i e_k) = \delta_{ik}$ имеем:

$$e^i \frac{\partial e_k}{\partial \dot{x}^i} = - e_k \frac{\partial e^i}{\partial \dot{x}^i}.$$

причем последнее уравнение следует из

$$2T = p_i v^i, \quad v^i - u^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dT}{\partial p_i} \Big|_{x^r} - u^i = \frac{\partial(T+V - u^i p_i)}{\partial p_i} \Big|_{x^r}.$$

Величины x^i и p_i (не $p^i = m \frac{dx^i}{dt}$) называются *обобщенными координатами* и *обобщенными импульсами*. (Часто можно встретить обозначение q_i вместо x^i .)

При $u^i = 0$ будем иметь $H = T + V = T + W$, т. е. H представляет собой энергию E , и если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то ввиду

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

получаем закон сохранения энергии $\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$.

с) **Уравнение Гамильтона — Якоби.** Если положим $S = \int_{t_0}^t L dt$ (*функция действия*), где интеграл берется вдоль некоторого пути, а S рассматривается как функция координат x^i , времени t и параметров, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = \\ &= \int_{t_0}^t \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right) \right\} dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = p_i \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \Big|_t = p_i,$$

далее,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i (v^i - u) = \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + 2T - p_i u^i = \frac{\partial S}{\partial t} + H + L, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}) = 0 \quad (\text{уравнение Гамильтона — Якоби}).$$

Предположим, что из этого дифференциального уравнения S найдена как функция от t , x^i и постоянных интегрирования α_i , среди которых, в случае, если H не зависит явно от t , содержится константа

энергии $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$. Если положить $A = S + E(t - t_0)$, то $\frac{\partial A}{\partial x_i} = \beta_i$ станут новыми константами. Выбирая их значения так, чтобы были удовлетворены начальные условия, мы из последнего уравнения получим уравнения кривой, описываемой движущейся точкой:

$$x^i = f^i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Для практического решения задач уравнения Лагранжа и уравнения Гамильтона одинаково пригодны. Последние часто можно с выгодой привести к иному виду при помощи какого-либо канонического преобразования (см. стр. 195). Метод, основанный на уравнении Гамильтона — Якоби, менее удобен.

При общих рассуждениях (статистическая механика и др.) канонические уравнения являются особенно ценными.

$$\text{Размерности: } [T] = [V] = [L] = [H] = \frac{ml^2}{t^2}; \quad [S] = \frac{ml^2}{t}.$$

d) **Силы, не имеющие потенциала.** Если только часть имеющих сил может быть получена из некоторого потенциала: $\mathfrak{R} = -\text{grad } V + \mathfrak{K}'$, то уравнения Лагранжа второго рода с $L = T - V$ принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = K_k'.$$

В случае, когда существует функция $M(x^k, \dot{x}^k, t)$, для которой справедливы соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial M}{\partial x^k} = K_k',$$

мы получаем, вводя обобщенную функцию Лагранжа $L' = L - M = T - V - M$, следующие уравнения в качестве уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x^k} = 0.$$

Уравнения Гамильтона получаются тогда аналогичным образом с функцией Гамильтона

$$H'(x^k, p_k, t) = p_k \dot{x}^k - L'$$

в виде

$$\frac{dp_k}{dt} = - \left. \frac{\partial H'}{\partial x^k} \right|_{p_i}; \quad \frac{dx^k}{dt} = \left. \frac{\partial H'}{\partial p_k} \right|_{x^i}.$$

В этом случае снова, вообще говоря, $p^k \neq m\dot{x}^k$.

С помощью $S' = \int_{t_0}^{t_1} L' dt$ и H' можно соответствующим методом вывести уравнение Гамильтона — Якоби.

4. Так называемые принципы механики точки

Для законов движения материальной точки, кроме уже упомянутых форм — уравнений движения Ньютона, уравнений Лагранжа первого или второго рода, канонических уравнений Гамильтона, уравнения Гамильтона — Якоби — имеются еще и другие формулировки, эквивалентные предыдущим и являющиеся иногда более удобными, в частности для систем материальных точек (см. стр. 423).

1° Принцип наименьшего принуждения (Гаусса)

Величину

$$\frac{1}{m} (m\ddot{x} - \mathfrak{R})^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} (m\ddot{x}^i - K^i)^2$$

называют *принуждением*. Движение происходит так, что принуждение в каждый момент имеет минимум.

2° Принцип виртуальных перемещений (статики)

Материальная точка находится в состоянии равновесия, если полная работа всех внешних сил при любом «виртуальном», т. е. совместном с наложенными на точку связями, перемещении равна нулю:

$$(\mathfrak{R} \delta r) = \sum_{i=1}^3 K^i \delta x^i = 0.$$

3° Принцип Даламбера

Если величину — $m\ddot{x}$, рассматриваемую как сила инерции, причислить к внешним силам, то из принципа виртуальных перемещений получится принцип Даламбера, который динамику как «динамическое равновесие» формально сводит к статике:

$$(\mathfrak{R} - m\ddot{x}, \delta r) = \sum_{i=1}^3 (K^i - m\ddot{x}^i) \delta x^i = 0.$$

4° Вариационные принципы

а) **Принцип Гамильтона.** Из всех движений, совместных с крайними и дополнительными условиями, которым подчинена механическая система, осуществляется между двумя моментами времени t_1 и t_2 то, для которого будет иметь место равенство

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 \quad (A = \int (\mathfrak{R} dr)).$$

Варьирование относится не ко времени, а к пути, причем должно быть $\delta t = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$, т. е. начальная и конечная точки пути не варьируются.

Этот принцип является наиболее общим принципом механики. В этой форме он справедлив для произвольного числа точек и произвольного числа степеней свободы. В дополнительные условия может явно входить время.

Если силы имеют потенциал, то получим:

$$\int \delta A dt = - \int \delta V dt = - \delta \int V dt$$

(так как время не варьируется), и для консервативных систем принцип Гамильтона принимает форму

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

б) **Принцип наименьшего действия (Эйлера — Мопертюи).** В случае консервативных систем для действительно совершающегося движения в каждый момент времени t справедливо равенство

$$\delta \int_{t_1}^t T dt = 0,$$

причем вариация относится ко всем движениям с той же энергией $E = T + V$, совместным со связями. При этом начальный момент t_1 , а также начальная и конечная точки пути остаются постоянными; конечные моменты, напротив, могут быть различными.

с) **Принцип Якоби.** В случае консервативных систем для пробегаемого в действительности пути справедливо равенство

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{E - V(r)} ds = 0,$$

где r_1, r_2 означают фиксированные точки, а интегрирование распространяется на виртуальные пути, проходящие через r_1, r_2 . Закон движения определяется из $E = T + V$.

Если величину

$$n(r) = \sqrt{E - V(r)}$$

назвать коэффициентом преломления, то данный принцип будет формально идентичен с принципом Ферма геометрической оптики.

D. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

1. Общие сведения

Будем предполагать, что система состоит из N материальных точек. Мы различаем их при помощи индексов α, β, \dots

Разложение сил на силы взаимодействия между парами точек дает «внешние» силы \mathfrak{R}_α , которые могут явно зависеть от времени, и «внутренние» силы $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$, каждая из которых действует между двумя точками системы. Если все $\mathfrak{R}_\alpha = 0$, то система называется *замкнутой*.

Тогда для любой материальной точки справедливы соотношения (уравнения движения Ньютона)

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathfrak{R}_\alpha + \sum_{\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

При этом имеет место *принцип равенства действия и противодействия*:

$$\mathfrak{R}_{\beta\alpha} = -\mathfrak{R}_{\alpha\beta}.$$

Мы вводим следующие понятия:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha & \quad \text{— полная сила, действующая на систему,} \\ \sum_{\alpha} m_\alpha & = M \quad \text{— полная масса системы,} \\ \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha & = \bar{\mathbf{r}} \quad \text{— положение центра тяжести.} \end{aligned}$$

Тогда имеем:

$$M \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \sum_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha \quad (\text{теорема о центре тяжести}).$$

Если внутренние силы являются центральными: $\mathfrak{R}_{\alpha\beta} \parallel \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta$, то для замкнутой системы будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_\alpha [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha] = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha} m_\alpha [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha] = \mathfrak{f},$$

где \mathfrak{f} — постоянный (свободный) вектор (*обобщенная теорема площадей*).

Работа сил равна

$$dA = \sum_{\alpha} (\mathfrak{R}_\alpha d\mathbf{r}_\alpha) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (\mathfrak{R}_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_\alpha).$$

Если некоторые из сил \mathfrak{R}_α и $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ представляют собой силы реакции, т. е. могут быть заменены уравнениями связей, то соответствующая им часть выпадает из выражения для dA .

Если dA является полным дифференциалом некоторого потенциала V , зависящего от координат всех материальных точек, то в этом случае говорят о *консервативных* силах, представимых в виде

$$\mathfrak{R}_\alpha = \sum_{\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = -\text{grad}_\alpha V,$$

и становится возможным введение понятия потенциальной энергии системы

$$W(t) = V(r_1, r_2, \dots, t).$$

Тогда получим:

$$dW = -\sum_{\alpha} dT_{\alpha} = -dT, \text{ следовательно, } \frac{d}{dt}(W + T) = 0.$$

В отличие от T , W не может быть локализована, а лишь допускает разложение следующего вида:

$$W = \sum_{\alpha} W_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}.$$

2. Формальное сведение к динамике одной материальной точки

Динамика системы N материальных точек в трехмерном пространстве может быть формально сведена к динамике одной материальной точки в $3N$ -мерном пространстве.

Уравнения Лагранжа и Гамильтона не изменяют своего вида, только индекс у x и p пробегает номера всех $3N$ координат, и величины T , V и соответственно L , H становятся функциями всех координат и их производных по времени, соответственно координат и сопряженных импульсов.

Объединяя выбранные вначале декартовы координаты $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ в $3N$ -мерное декартово многообразие, мы получаем *конфигурационное пространство*, в котором движение системы может быть описано как движение одной изображающей систему точки.

Теперь можно ввести произвольные новые координаты:

$$x^i = f_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

для которых вышеприведенные уравнения остаются справедливыми без каких-либо изменений. Если необходимо принять во внимание силы реакции, обусловленные связями, заданными при помощи α уравнений, то функции f_i выбирают так, чтобы α из их числа были пригодны для представления этих связей в форме $f_i = 0$. Тогда останется решить только $3N - \alpha$ уравнений движения и выполнить обратное преобразование. $3N - \alpha$ называется числом *степеней свободы* системы.

Если в качестве дальнейших декартовых координат ввести импульсы, сопряженные с x_a, y_a, z_a , то получим $6N$ -мерное *фазовое пространство*. Одна точка в нем описывает положение и состояние движения всей системы. Если уравнения Гамильтона должны оставаться справедливыми, не меняя своего вида, то в нем допустимы лишь канонические преобразования (см. стр. 195).

3. Колебания около положений равновесия

Если потенциальная энергия системы, имеющей n степеней свободы, допускает представление в форме

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k A_{ik} (x^i - x_0^i) (x^k - x_0^k) + \dots$$

с симметрической матрицей A_{ik} и постоянными x_0^i , то система имеет *положение равновесия* x_0^i , т. е. существует не зависящее от времени решение $x^i = x_0^i$. Чтобы рассмотреть движение вблизи положения равновесия, целесообразно выбрать это положение в качестве нулевой точки системы координат x^i . Если ограничиться движениями, при которых можно пренебречь высшими членами разложения V по сравнению с первыми, то $V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k x_i x_k$, и мы получаем n уравнений движения:

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Полагая $x_i = \frac{a}{\sqrt{m_i}} e^{i\omega t}$, мы получаем для определения a_k однородную систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{A_{ik}}{\sqrt{m_i m_k}} - \omega^2 \delta_{ik} \right) a_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которую можно решить при помощи способа, изложенного на стр. 164; n действительных собственных значений ω_j^2 этой системы определяют *собственные частоты* ω_j и соответствующие *амплитуды* $\frac{a_{i,j}}{\sqrt{m_i}}$; последние определены лишь с точностью до постоянного множителя C_j . Общее решение тогда имеет вид (в действительной форме)

$$x_i = \sum_j C_j \frac{a_{i,j}}{\sqrt{m_i}} \cos(\omega_j t + \alpha_j)$$

с произвольными *фазовыми постоянными* α_j . (Имеет место соотношение $\sum_i a_{i,j} a_{i,k} = \delta_{j,k}$.)

Вместо x_i можно ввести *нормальные координаты* $x_j' = \sum_i a_{ij} x_i \sqrt{m_i}$.

В этих координатах кинетическая и потенциальная энергия принимают вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \dot{x}_j'^2 \quad \text{и} \quad V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^2 x_j'^2.$$

Система совершает n не зависящих друг от друга *нормальных колебаний*: $x_j' = C_j \cos(\omega_j t + \alpha_j)$.

Движение является (n -кратно) периодическим, если все $\omega_j^2 > 0$ и, следовательно, все ω_j действительны. Равновесие тогда называется *устойчивым*, в противном случае — *неустойчивым*. Материальные точки системы совершают около своих положений равновесия колебания, причем эти колебания *связаны между собой* (*gekoppelte Schwingungen*). Теория допускает обобщение на следующие случаи:

1. Когда имеются линейные силы трения, представимые при помощи *функции рассеяния* в виде $F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} B_{ik} \dot{x}^i x^k$ ($B_{ik} = B_{ki}$), при наличии которой уравнения Лагранжа принимают более общий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = - \frac{\partial V}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}.$$

В декартовых координатах это дает уравнения

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_k A_{ik} x_k - \sum_k B_{ik} \dot{x}_k.$$

Решения в виде *затухающих колебаний* находятся при помощи способа, принципиально не отличающегося от приведенного выше. Собственные частоты становятся комплексными.

2. Когда имеются внешние силы, *зависящие от времени*. Эти силы разлагают на синусоидальные составляющие вида $K_i = C_i e^{i\omega t}$. Результирующее движение представляет собой суперпозицию возникающих при этом *вынужденных колебаний* и полученных выше свободных колебаний с частотами ω_i . Для первых мы имеем:

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_k A_{ik} x_k = C_i e^{i\omega t}.$$

Полагая здесь

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{m_i}} e^{i\omega t},$$

мы получаем систему неоднородных уравнений для отыскания a_k :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{A_{ik}}{\sqrt{m_i m_k}} - \omega^2 \delta_{ik} \right) a_k = \frac{C_i}{\sqrt{m_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которую можно решить при помощи способа, изложенного на стр. 164. В случае, когда одна из собственных частот ω_j совпадает с одной из частот ω вынужденных колебаний, возникает явление *резонанса*. Возможна также комбинация обоих обобщений.

4. Механика твердого тела

Система материальных точек, состоящая из масс m_α , жестко связанных между собой при помощи сил реакции, называется *твердым телом*.

Удобно взять одну из точек тела в качестве нулевой точки r_0 подвижной системы координат и положения остальных точек тела по отношению к этой точке обозначать через r_α . Тогда вектор скорости имеет вид $\dot{r}_\alpha = [\omega r_\alpha]$, где ω представляет собой общий для всех точек *вектор вращения*, направленный по оси вращения; длина этого вектора представляет угловую скорость вращения.

Состояние движения всего тела представляется уравнением

$$v_\alpha = \dot{r}_0 + \dot{r}_\alpha = v_0 + [\omega r_\alpha]$$

с зависящими от времени векторами v_0 и ω .

Вектор ω не зависит от выбора нулевой точки r_0 . Надлежащим выбором нулевой точки можно достичь того, что векторы v_0 и ω станут параллельными. Ось ω , проходящая через r_0 , называется тогда *мгновенной осью винтового движения* или соответственно *мгновенной осью вращения*.

Мы образуем, далее, следующие величины:

$M = \sum m_\alpha$	— полную массу,
$\bar{r} = r_0 + \bar{r}_0 = r_0 + \frac{\sum m_\alpha r_\alpha}{M}$	— положение центра тяжести,
$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = v_0 + [\omega \bar{r}_0]$	— скорость центра тяжести,
$p = \sum m_\alpha v_\alpha = M\bar{v}$,	— полный импульс,
$q = \sum m_\alpha [r_\alpha + r_\alpha, v_\alpha] = [r_0 p] + q_0$	— полный момент количества движения,
$q_0 = \sum m_\alpha [r_0 v_\alpha] = M[\bar{r}_0 v_0] + \sum m_\alpha [r_\alpha [\omega r_\alpha]]$	— относительный момент количества движения,
$\mathfrak{K} = \sum \mathfrak{K}_\alpha$	— полную силу,
$\mathfrak{L} = \sum [r_0 + r_\alpha, \mathfrak{K}_\alpha] = [r_0 \mathfrak{K}] + \mathfrak{L}_0$	— полный вращающий момент,
$\mathfrak{L}_0 = \sum [r_\alpha \mathfrak{K}_\alpha]$	— относительный вращающий момент.

Уравнения движения, записанные при помощи этих величин, принимают вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathfrak{R}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathfrak{L}, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathfrak{L}_0 - [\mathbf{v}_0, \mathbf{p}],$$

Они служат для определения \mathbf{v}_0 и \mathbf{u} как функций времени. Кинетическая энергия может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{q}_0) = \frac{M}{2}v_0^2 + M(\mathbf{u}[\bar{\mathbf{r}}_0, \mathbf{v}]) + \frac{1}{2} \sum m_a [\mathbf{u}\mathbf{r}_a]^2.$$

Эти формулы упрощаются, если в качестве нулевой точки \mathbf{r}_0 выбрать центр тяжести $\bar{\mathbf{r}}$. Тогда будем иметь $\bar{\mathbf{r}}_0 = 0$.

Если одна точка тела удерживается силой реакции на месте (*волчок*), то в качестве нулевой точки удобнее выбрать ее. Тогда имеем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$.

Если внешние силы имеют вид $\mathfrak{R}_a \mathbf{g} = m_a \mathbf{g}$ с общим, не зависящим от места вектором \mathbf{g} (гравитация), то будем иметь:

$$\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{g} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L} = M[\mathbf{r}_0, \mathbf{g}] + \mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{L}_0 = M[\bar{\mathbf{r}}_0, \mathbf{g}].$$

При помощи зависящего от времени ортогонального преобразования $\mathbf{r} = \mathfrak{D}\mathbf{r}'$ можно перейти к системе отсчета, *жестко скрепленной с телом*, в которой векторы \mathbf{r}'_a уже не будут зависеть от времени. Имеем:

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \mathfrak{D}\dot{\mathbf{r}}'_a = [\mathbf{u}\mathbf{r}_a] = \mathfrak{D}[\mathbf{u}'\mathbf{r}'_a].$$

Для произвольного вектора \mathbf{a} получаем:

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathfrak{D}(\dot{\mathbf{a}}' + [\mathbf{u}'\mathbf{a}']).$$

Уравнение $\dot{\mathbf{q}} = \mathfrak{L}$ преобразуется при этом в следующее:

$$\dot{\mathbf{q}}' + [\mathbf{u}'\mathbf{q}'] = \mathfrak{L}' \quad (\text{уравнение Эйлера}).$$

Вектор $\mathbf{q}_0 - M[\bar{\mathbf{r}}_0, \mathbf{v}_0] = \sum m_a [\mathbf{r}_a [\mathbf{u}\mathbf{r}_a]]$ может быть с помощью симметрического *тензора инерции* \mathfrak{I} представлен как линейная функция вектора \mathbf{u} в виде $\mathfrak{I}\mathbf{u}$. В системе отсчета, жестко скрепленной с телом, \mathfrak{I} не зависит от времени. Эллипсоид инерции $(\mathbf{r}\mathfrak{I}\mathbf{r}) = 1$ занимает в теле постоянное положение и движется вместе с телом.

Величина $\left(\frac{\mathbf{u}\mathfrak{I}\mathbf{u}}{u^2}\right) = I_n$ называется *моментом инерции* тела относительно оси вращения \mathbf{u} . Если \mathbf{u} имеет направление одной из осей эллипсоида инерции, то мы получаем *главные моменты инерции*.

Кинетическая энергия равна: $\frac{I_u \dot{u}^2}{2} = (u \mathfrak{I} u) + \frac{Mv_0^2}{2}$.

Размерности: $[u] = \frac{ml^2}{t^2}$, $[q] = \frac{ml^2}{t}$, $[I] = ml^2$, $[u] = \frac{1}{t}$.

Волчок, свободный от действия сил

$$\mathfrak{R} = 0, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad q = \mathfrak{I} u, \quad \dot{q} = 0.$$

Тогда имеем: $2T = (uq) = (u \mathfrak{I} u) = C_1$,

$$q^2 = (\mathfrak{I} u, \mathfrak{I} u) = (u \mathfrak{I}^2 u) = C_2.$$

Линия пересечения этих двух эллипсоидов (*поллодия*) в u -пространстве описывает движение оси вращения в теле.

Уравнения $(uq) = C_1$, $(u\dot{q}) = 0$ могут быть интерпретированы как движение вектора u на некоторой плоскости, перпендикулярной к постоянному вектору q . Эта плоскость одновременно является касательной плоскостью к эллипсоиду $(u \mathfrak{I} u) = C_1$. Движение тела может быть в силу этого описано как качение этого эллипсоида с закрепленным центром по фиксированной плоскости, отстоящей от центра на расстоянии $\frac{C_1}{\sqrt{C_2}}$ и касающейся эллипсоида в точке u . Точка u при этом описывает плоскую кривую, называемую *герполодией*.

Симметрический волчок

В случае *вращательной симметрии* тела или вообще при равенстве двух его главных моментов инерции тензорный аппарат не нужен. Здесь вместо $q = \mathfrak{I} u$ достаточно положить:

$$q = \alpha u + \beta \hat{f} (u \hat{f}) \quad (\hat{f}^2 = 1),$$

где единичный вектор \hat{f} направлен по оси фигуры, а α и β — две константы, характеризующие распределение масс, т. е. главные моменты инерции. Если мы предположим, что все внешние силы могут быть объединены в одну силу \mathfrak{R} , точка приложения которой находится на оси фигуры на равном единиче расстоянии от точки, вокруг которой совершается вращение, то будут справедливы следующие уравнения:

$$\frac{dq}{dt} = [\hat{f} \mathfrak{R}], \quad \frac{d\hat{f}}{dt} = [u \hat{f}].$$

Эти уравнения достаточны для определения неизвестных векторов u и \hat{f} при заданных начальных условиях и заданной силе \mathfrak{R} .

Прежде всего получаем то следствие, что $(u \hat{f}) = D$ не изменяется с течением времени. Если сила \mathfrak{R} является постоянной и мы исходим из состояния, в котором \mathfrak{R} , \hat{f} и u , а следовательно, также и q ,

компланарны, причем имеет место соотношение

$$\mathfrak{R} = \tau \mathfrak{q} + \alpha \tau^2 \mathfrak{f},$$

где τ означает некоторый множитель, то получаем, что система этих векторов, не изменяясь как таковая, вращается со скоростью $\omega = \frac{K}{\alpha \tau}$ вокруг \mathfrak{R} (*регулярная прецессия*). При этом имеем: $(\mathfrak{R}\mathfrak{f}) = \tau(\alpha + \beta)D + \alpha \tau^2 = \text{const.}$

Для отыскания общего решения обычно применяют переход к подходящей новой системе координат. Дальнейшие вычисления приводят тогда к эллиптическим функциям.

Если ограничиться исследованием движений, близких к регулярной прецессии, то задача может быть линеаризована при помощи следующего приема.

Произведем сначала преобразование к системе отсчета, вращающейся вокруг \mathfrak{R} со скоростью ω . В этой системе характеризующие регулярную прецессию \mathfrak{f} , u и q становятся постоянными, равными \mathfrak{f}_0 , u_0 и q_0 . Близкая форма движения задается тогда уравнениями

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \delta \mathfrak{f}, \quad u = u_0 + \delta u, \quad q = q_0 + \delta q,$$

причем мы рассматриваем $\delta \mathfrak{f}$, δu и δq как величины столь малые, что их произведениями можно пренебречь. Для определения этих величин получаем тогда уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathfrak{f} &= -\frac{K}{\alpha \omega} \left[\mathfrak{f}_0 \left(\delta \mathfrak{f} + \frac{\omega}{K} \delta q \right) \right], \\ \frac{d}{dt} \delta q &= -\left[\mathfrak{R} \left(\delta \mathfrak{f} + \frac{\omega}{K} \delta q \right) \right]. \end{aligned}$$

Эти линейные уравнения легко решаются (их можно решить и в векторной форме, см. стр. 237). Движение получается снова в виде прецессионного движения, например \mathfrak{f} вокруг \mathfrak{f}_0 , налагающегося на регулярную прецессию. Такое движение называется *нутацией*.

Е. МЕХАНИКА КОНТИНУУМА

Предварительное замечание

Так называемая механика континуума представляет собой квази-континуальную теорию, т. е. обобщение механики материальных точек на многоточечные задачи. Объектом рассмотрений является среда, состоящая из очень большого числа материальных точек, которые располагаются в пространстве в известном смысле плотно. В качестве методического вспомогательного средства вводятся математические полевые величины, делающие возможным приближенное описание системы, в деталях необозримой. Эти поля следует рассматривать

как результат процесса усреднения. Континуальным является, следовательно, лишь математический образ, но не отображаемая система.

Теорию, таким образом, следует расценивать как приближенную. Она применима лишь к таким задачам, в которых относительные изменения поля на расстояниях, равных среднему расстоянию a между материальными точками, могут рассматриваться как малые, т. е. где выполнены условия вида $|\text{grad } \varphi| \ll \frac{\varphi}{a}$.

1. Основные понятия и кинематика

Среди понятий, связываемых с полями, основную роль играют *плотность массы* $\rho(v, t)$ и *скорость течения* $v(r, t)$. Они могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} f(|r - r_{\alpha}(t)|), \\ \rho v(r, t) &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}(t) f(|r - r_{\alpha}(t)|). \end{aligned}$$

Вводимая здесь *сглаживающая функция* f должна быть непрерывной, дифференцируемой и удовлетворять соотношениям:

$$1. \int_{\infty} f(r) dv = 1 \text{ и, следовательно, } \int_{\infty} \rho dv = \sum_{\alpha} m_{\alpha},$$

2. $f(r)r^3 \ll 1$ при $r > ka$, где k есть величина порядка 5—10. В остальном форма этой функции не имеет существенного значения. Она может, например, представляться «колоколообразной кривой» $f(r) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha r^2}$ с $\alpha > \frac{1}{a^2}$.

Ввиду $\frac{dm_{\alpha}}{dt} = 0$ из приведенных выше определений следует *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0.$$

В случае величины, являющейся функцией независимых переменных r и t , символ $\frac{\partial}{\partial t}$ означает дифференцирование при фиксированном r (*локальная производная*). Наряду с этим часто представляет интерес изменение такой величины во времени в точке, уносимой течением. Это изменение мы обозначаем символом $\frac{d}{dt}$ (*субстанциальная производная*). Тогда имеем для скалярной величины:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (v \text{ grad } \alpha)$$

и для векторной:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \alpha.$$

Тем самым справедливо также равенство

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Несжимаемой называется среда, для которой имеет место равенство $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (не $\frac{\partial\rho}{\partial t}$), откуда $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Смещения $\delta\mathbf{r}_a$ материальных точек из начального положения могут быть в среднем описаны при помощи векторного поля \mathbf{f} . Его можно определить посредством соотношения: $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum m_a \delta\mathbf{r}_a f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|)$. В окрестности какой-либо точки \mathbf{r}_0 , это поле \mathbf{f} может быть представлено как линейная функция точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} [\delta\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{f}] = \mathcal{E} \delta\mathbf{r}$$

с ковариантным представлением компонент

$$s^i = s_0^i + \delta x^k R_k^i + \delta x^k S_k^i,$$

где

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right)$$

и

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right) - s_i \Gamma_{ik}^i.$$

\mathbf{f}_0 есть смещение точки \mathbf{r}_0 .

$\frac{1}{2} [\delta\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{f}]$ есть жесткое вращение.

$\mathcal{E} \delta\mathbf{r}$ называется *деформацией*. \mathcal{E} представляет собой симметрический тензор (*тензор деформации*). $\mathcal{E} \delta\mathbf{r}$ допускает следующее разложение:

$$\mathcal{E} \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r} \frac{\operatorname{div} \mathbf{f}}{3} + \mathcal{E}' \delta\mathbf{r},$$

причем $\operatorname{div} (\mathcal{E}' \delta\mathbf{r}) = 0$, или, в ковариантных компонентах ¹⁾:

$$S_{ik} = \frac{1}{3} g_{ik} + S'_{ik} \quad \text{и, следовательно, } |\mathcal{E}'| = 0.$$

Первое слагаемое соответствует однородному *растяжению*.

¹⁾ $|\mathcal{E}'|$ означает $\sum S_i^i$ (см. стр. 258).

Второе слагаемое соответствует *сдвигу*, т. е. изменению формы при постоянном объеме (см. стр. 250).

Поле скоростей $v = \frac{di}{dt}$ в окрестности точки r_0 может быть представлено аналогичным образом:

$$v = v_0 + \frac{1}{2} [\delta r \operatorname{rot} v] + \mathfrak{B} \delta r$$

и

$$\mathfrak{B} \delta r = \delta r \frac{\operatorname{div} v}{3} + \mathfrak{B}' \delta r.$$

2. Силы

Силы, действующие на материальные точки пространственно ограниченной квазиконтинуальной среды, по методическим основаниям разделяются:

- 1) на внутренние и внешние силы,
- 2) на близкодействующие и далекодействующие силы.

Под близкодействующими силами мы понимаем такие силы, действие которых распространяется лишь на ближайшие соседние области (молекулярные силы). В качестве внешних сил они играют роль только на ограничивающих поверхностях. Они называются тогда *поверхностными силами* и в среднем могут быть представлены векторами поверхностной плотности силы \mathfrak{p} (касание, трение).

В противоположность этому, далекодействующие силы называются *объемными силами* и в среднем могут быть представлены векторами объемной плотности силы \mathfrak{f} (гравитация и т. п.). Фиктивные силы, так называемые «массовые силы» (центробежная сила), могут быть представлены таким же образом.

Силы, имеющие малый радиус действия, но все же значительно превосходящий расстояние a , играют роль во многих явлениях, в особенности в явлениях, связанных с жидкостями (внутреннее давление, капиллярность, силы сцепления). Эти силы следует рассматривать как объемные, хотя их действие проявляется, главным образом, на поверхностях.

Чтобы внутренние близкодействующие силы ввести в вычисления, поступают следующим образом: представляют себе тело рассеченным на две части и ставят вопрос относительно поверхностных сил \mathfrak{p}' , которые следует приложить к двум образовавшимся поверхностям, чтобы они оказывали такое же действие, как существовавшие первоначально, но разорванные теперь молекулярные связи. Эти силы \mathfrak{p}' , приложенные к двум поверхностям, равны и противоположно направлены. В каждом месте они зависят, вообще говоря, от ориентации

секущей поверхности. Эта зависимость принимается линейной и представляется в виде

$$p' = \mathfrak{P}n, \quad p'^i = P^{ik}n_k,$$

где n означает единичный вектор внешней нормали к поверхности сечения.

\mathfrak{P} называется *тензором напряжений*.

$\mathfrak{P}n$ можно разложить следующим образом:

$$\mathfrak{P}n = -np + \mathfrak{P}'n, \quad P_{ik} = \frac{|\mathfrak{P}|}{3} g_{ik} + P'_{ik},$$

где $|\mathfrak{P}'| = 0$, так что $\operatorname{div} \mathfrak{P}' = 0$.

$$-\frac{|\mathfrak{P}|}{3} = p \text{ называется давлением.}$$

Полная сила, действующая на объем V , равна

$$\mathfrak{R} = \int \mathfrak{f} dv + \int p df.$$

Вращающий момент равен

$$\mathfrak{L} = \int dv [\mathfrak{r}\mathfrak{f}] + \int df [\mathfrak{r}p].$$

Равнодействующая поверхностных сил, приложенных к границе элемента объема ¹⁾, может быть заменена вектором поля \mathfrak{f} :

$$\mathfrak{f} = \operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Размерности:

$$[\mathfrak{f}] = \frac{m}{l^2 l^2}, \quad [p] = [\mathfrak{P}] = [p] = \frac{m}{l^2}, \quad [\mathfrak{L}] = 1, \quad [\mathfrak{R}] = \frac{1}{l}.$$

3. Теория упругости

Статическая теория упругости занимается вопросами равновесия тела, деформируемого воздействием сил \mathfrak{f} и p . Равновесие может существовать только при $\mathfrak{f} = -\operatorname{div} \mathfrak{P}$ внутри и для $p = \mathfrak{P}n$ на внешней поверхности. Далее, тензор \mathfrak{P} должен быть симметрическим, чтобы не возникало никакого вращающего момента.

Согласно *закону Гука* смещения \mathfrak{f} представляют собой линейные функции сил p , \mathfrak{f} . Это, однако, есть идеализация, оправданная в какой-то мере лишь для малых сил и малых смещений.

¹⁾ Отнесенная к единице объема. (Прим. ред.)

Работа внешних сил при статической деформации поэтому равна

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{f}\mathfrak{f}) + \frac{1}{2} \int df (\mathfrak{f}\mathfrak{p}) = \\ &= -\frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{f} \operatorname{div} \mathfrak{P}) + \frac{1}{2} \int df (\mathfrak{f}\mathfrak{P}\mathfrak{n}) = \\ &= \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{P}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathfrak{P}\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} P_{ik} S^{ik}$$

есть *потенциальная энергия*, заключенная в единице объема, т. е. плотность энергии. Таким образом, ω является однородной функцией второй степени от компонент тензоров деформации и напряжений.

Отсюда следует:

$$P_{ik} = \frac{\partial \omega}{\partial S^{ik}}.$$

Если закон Гука записать как линейное соотношение между тензорами \mathfrak{P} и \mathfrak{E} в виде $P_{ik} = a_{ik}^{lm} S_{lm}$, то вследствие симметрии \mathfrak{P} и \mathfrak{E} , выражаемой равенствами

$$a_{ik}^{lm} = a_{ki}^{ml} = a_{ki}^{lm} = a_{ik}^{ml},$$

в этом соотношении будет содержаться 21 константа.

Для *изотропных сред* зависимость упрощается. Здесь из соображений симметрии вытекает, что направления главных осей тензоров \mathfrak{P} и \mathfrak{E} должны совпадать. Легко видеть, что в этом случае наиболее общая форма линейной зависимости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{f}}{3} &= -\alpha p, & \mathfrak{E}' &= \beta \mathfrak{P}', \\ S_i^i &= \alpha P_i^i, & S'_{ik} &= \beta P'_{ik}. \end{aligned}$$

Физический смысл постоянных α и β виден из применений к специальным задачам. Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-2\mu}{E} = \frac{\kappa}{3}, & \beta &= \frac{1+\mu}{E}, \\ E &= \frac{3}{\alpha+2\beta}, & \mu &= \frac{\beta-\alpha}{\alpha+2\beta}, \end{aligned}$$

где E есть *модуль упругости*¹⁾.

μ есть коэффициент поперечного сжатия²⁾ (*число Пуассона*)
 $(0 \leq \mu < \frac{1}{2})$,

¹⁾ Модуль Юнга. (*Прим. ред.*)

²⁾ Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению. (*Прим. ред.*)

κ есть коэффициент (всестороннего) сжатия, $\frac{1}{2\beta} = \frac{E}{2(1+\mu)}$ называется *модулем кручения* или *модулем сдвига*.

Зависимость между \mathfrak{P} и \mathfrak{S} может быть, таким образом, записана в форме:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{S}| \mathfrak{E} + \mathfrak{S}' = \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}| \mathfrak{E} + \beta \mathfrak{P} = \frac{1}{E} \{-\mu |\mathfrak{P}| \mathfrak{E} + (\mu + 1) \mathfrak{P}\}, \\ \mathfrak{P} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{P}| \mathfrak{E} + \mathfrak{P}' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{S}| \mathfrak{E} + \frac{1}{\beta} \mathfrak{S} = \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{\mu}{1-2\mu} |\mathfrak{S}| \mathfrak{E} + \mathfrak{S} \right\} \quad (\mathfrak{E} - \text{единичный тензор})\end{aligned}$$

или в ковариантной форме:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{S}| &= \alpha |\mathfrak{P}|, \quad S'_{ik} = \beta P'_{ik} \quad (|\mathfrak{S}| = S^{ik} g_{ik}), \\ S_{ik} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{S}| g_{ik} + S'_{ik} = \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}| g_{ik} + \beta P_{ik} = \\ &= -\frac{\mu}{E} |\mathfrak{P}| g_{ik} + \frac{\mu + 1}{E} P_{ik}, \\ P_{ik} &= \frac{1}{3} |\mathfrak{P}| g_{ik} + P'_{ik} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{S}| g_{ik} + \frac{1}{\beta} S_{ik} = \\ &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} |\mathfrak{S}| g_{ik} + \frac{E}{1+\mu} S_{ik}.\end{aligned}$$

Для плотности энергии получим¹⁾:

$$\begin{aligned}2\omega &= S_{ik} P^{ik} = \frac{1}{\beta} (S^2) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |\mathfrak{S}|^2 = \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ (S^2) + \frac{\mu}{1-2\mu} |\mathfrak{S}|^2 \right\} = \beta (P^2) + \frac{\alpha - \beta}{3} |\mathfrak{P}|^2 = \\ &= \frac{1+\mu}{E} \left\{ (P^2) - \frac{\mu}{1+\mu} |\mathfrak{P}|^2 \right\} \\ &\left((S^2) = S_{ik} S^{ik} = \frac{1}{2} \Delta \dot{\gamma}^2 - (f\Delta f) - \frac{1}{2} (\text{rot } f)^2 \right).\end{aligned}$$

¹⁾ Большей частью принято исходить из этого уравнения, так как (S^2) и $|\mathfrak{S}|^2$ являются единственными независимыми квадратичными инвариантами смещений. Если положить $2\omega = A(S^2) + B|\mathfrak{S}|^2$, то будем иметь

$$A = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{1+\mu}$$

и

$$B = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)}.$$

Размерности:

$$[E] = [\rho] = [\mathfrak{B}] = \frac{m}{lt^2}, \quad [\alpha] = [\beta] = [\chi] = \frac{lt^2}{m}, \quad [\mathfrak{C}] = 1.$$

а) Статические задачи теории упругости

Либо даются \mathfrak{f} и \mathfrak{p} и разыскивается \mathfrak{i} , либо наоборот. Между этими величинами согласно вышеизложенной теории существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= -\frac{1}{2\beta} \Delta \mathfrak{i} - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \text{grad div } \mathfrak{i} = \\ &= -\frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \Delta \mathfrak{i} + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad div } \mathfrak{i} \right\}, \\ \mathfrak{p} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \mathfrak{n} \text{ div } \mathfrak{i} + \frac{1}{2\beta} [\mathfrak{n} \text{ rot } \mathfrak{i}] + \frac{1}{\beta} (\mathfrak{n} \text{ grad } \mathfrak{i}) = \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{\mu}{1-2\mu} \mathfrak{n} \text{ div } \mathfrak{i} + \frac{1}{2} [\mathfrak{n} \text{ rot } \mathfrak{i}] + (\mathfrak{n} \text{ grad } \mathfrak{i}) \right\}. \end{aligned}$$

При заданных деформациях, таким образом, силы находятся при помощи дифференцирования. Деформация же при заданных силах может быть найдена только при помощи значительно более трудной задачи решения дифференциального уравнения. В простейших случаях достаточно методом дифференцирования найти некоторое число решений и среди них отыскать желаемое решение. Особенно важны при этом случаи, когда объемные силы \mathfrak{f} отсутствуют. При этом имеем $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ и, следовательно,

$$\Delta \mathfrak{i} + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad div } \mathfrak{i} = 0,$$

или

$$\text{rot rot } \mathfrak{i} - 2 \frac{1-\mu}{1-2\mu} \text{grad div } \mathfrak{i} = 0.$$

Для этого дифференциального уравнения можно найти частные решения, из которых можно построить искомое решение.

Специальными видами решений служат:

1° Решения, обладающие сферической симметрией:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{r} \quad (\text{однородное растяжение}),$$

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{r}}{r^3} \quad (\text{растяжение с особенностью при } r=0: \text{ «ядро растяжения»}).$$

2° Вращения вокруг вектора \mathfrak{a} как оси:

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{a} \mathfrak{r}] \quad (\text{жесткое вращение}),$$

$$\mathfrak{f} = \frac{[\mathfrak{a} \mathfrak{r}]}{r^3} \quad (\text{ядро вращения: внешняя пара сил, приложенная в точке } r=0, \text{ здесь особенность}).$$

3° $\mathfrak{f} = (\mathfrak{a} \mathfrak{r}) [\mathfrak{a} \mathfrak{r}]$ (кручение).

4° Прочие решения:

а) свободное от особенностей (изгиб):

$$\mathbf{f} = -\frac{3-2\mu}{4-6\mu} r^2 \mathbf{a} + (a\mathbf{r}) \mathbf{r};$$

б) решения с особенностью в $r=0$, например:

$$\mathbf{f} = (3-4\mu) \frac{\mathbf{a}}{r} + \frac{(a\mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r}.$$

Векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (a \operatorname{grad}) \mathbf{f}_0, & \mathbf{f}_2 &= (b \operatorname{grad}) ((a \operatorname{grad}) \mathbf{f}_0), \\ \mathbf{f}_3 &= (c \operatorname{grad}) ((b \operatorname{grad}) ((a \operatorname{grad}) \mathbf{f}_0)) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

при всяком $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$ с произвольными постоянными векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ также служат частными решениями. Поступая подобным образом, можно из любого решения получить решение с особенностью сколь угодно высокого порядка.

б) Уравнения движения изотропной упругой среды

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} &= \mathbf{f} + \frac{1}{2\beta} \Delta \mathbf{f} + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f} = \\ &= \mathbf{f} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f} - \frac{1}{2\beta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Если разложить \mathbf{f} на \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 так, чтобы было $\operatorname{div} \mathbf{f}_1 = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{f}_2 = 0$ и, следовательно, $\mathbf{f}_2 = -\operatorname{grad} \varphi$, то при $\mathbf{f} = 0$ будем иметь:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{f}_1}{dt^2} = \frac{1}{2\beta} \Delta \mathbf{f}_1 \text{ (поперечная волна, или волна сдвига)}$$

и

$$\rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \Delta \varphi \text{ (продольная волна, или волна сжатия)}.$$

Скорости распространения равны:

$$\text{для поперечной волны: } V_t = \sqrt{\frac{1}{2\beta\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}},$$

$$\text{для продольной волны: } V_l = \sqrt{\frac{1}{3\rho \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-2\mu)(1+\mu)}}.$$

Для идеальной жидкости имеем $E=0$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\beta = \infty$ и, тем самым:

$$V_t = 0, \quad V_l = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}.$$

4. Переход к гидродинамике

В не вполне упругих телах при постоянной деформации напряжения \mathfrak{P}' с течением времени исчезают. Это ведет к наиболее простому, однако все же специальному предположению:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Если $\frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} = 0$, то отсюда следует

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau - \text{время релаксации}).$$

Если будем писать $\frac{\partial f}{\partial t} = v$ и представим v (так же как и f) в виде

$$v = v_0 + \frac{1}{2} [\delta r \cdot \text{rot } v] + \mathfrak{B} \delta r \quad \left(V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) \right)$$

и

$$\mathfrak{B} \delta r = \delta r \frac{\text{div } v}{3} + \mathfrak{B}' \delta r \quad \left(V'_{ik} = V_{ik} - \frac{1}{3} \text{div } v \cdot \delta_{ik} \right),$$

то получим:

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \mathfrak{B}' - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

При медленно изменяющемся \mathfrak{B}' , соответственно при малом τ , т. е. для жидкостей, мы получаем отсюда:

$$\mathfrak{P}' = \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}' = 2\eta \mathfrak{B}'.$$

$$\eta = \frac{\tau}{2\beta} \text{ есть коэффициент трения (вязкость).}$$

Таким образом, \mathfrak{P}' теперь находится из распределения скоростей. Соотношение $|\mathfrak{S}'| = \alpha |\mathfrak{P}'|$, как показывает опыт, остается в силе. Отсюда получаем:

$$\mathfrak{P} = -p\mathfrak{E} + 2\eta \mathfrak{B}'.$$

На поверхности будем иметь:

$$p = \mathfrak{P}n = -n \left(p + \frac{2}{3} \eta \text{div } v \right) + 2\eta (n \text{ grad } v) + \eta [n \text{ rot } v].$$

Размерности:

$$|\mathfrak{B}'| = \frac{1}{t}, \quad [\eta] = \frac{m}{t}.$$

5. Гидродинамика

Уравнения движения вязкой жидкости принимают вид:

$$\rho \frac{dv}{dt} = f + \operatorname{div} \mathfrak{P} = f + \operatorname{div} \left(\mathfrak{C} \frac{|\mathfrak{B}|}{3} + \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}' \right) =$$

$$= f - \operatorname{grad} p + \eta \left(\Delta v + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} v \right) \quad (\text{уравнение Навье — Стокса}),$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (\text{уравнение непрерывности}),$$

$p = p(\rho)$ (уравнение состояния, характеризующее материальную среду¹⁾).

Баланс энергии: внешняя работа δA для части массы $M = \int \rho dv$ равна $\left(\frac{dM}{dt} = 0 \right)$:

$$\delta A = \delta t \int (v \mathfrak{P} \Pi) df = \delta t \int \operatorname{div} (\mathfrak{P} v) dv = \delta t \int \{ v \operatorname{div} \mathfrak{P} + (\mathfrak{P} v) \} dv =$$

$$= \delta t \int \left\{ \left(v \rho \frac{dv}{dt} \right) - p \operatorname{div} v + 2\eta (\mathfrak{B}'^2) \right\} dv.$$

В последнем интеграле слагаемые по порядку имеют следующий смысл:

1) приращение кинетической энергии $T = \int dv \cdot \rho \frac{v^2}{2},$

2) приращение потенциальной энергии $W = \int dv \cdot \rho \int \frac{p}{\rho^2} d\rho,$

3) теплота трения $\delta Q = \delta t \cdot 2\eta \int dv (\mathfrak{B}'^2),$

$$2(\mathfrak{B}'^2) = \Delta v^2 - 2(v \Delta v) - (\operatorname{rot} v)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} v)^2.$$

Плотность внутренней потенциальной энергии равна $w = \rho \int \frac{p}{\rho^2} d\rho,$

$$\frac{dw}{d\rho} = \frac{w + p}{\rho} = P = \int \frac{p}{\rho}, \quad dP = \frac{dp}{\rho}.$$

Полагая $p = p_0 + (\rho - \rho_0) \frac{dp}{d\rho} + \dots$, получим для массы жидкости, имеющей постоянную массу и постоянный объем:

$$W = W_0 + \int dv \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\kappa\rho_0^2} + \dots \quad \left(\kappa = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \right).$$

Задачи гидродинамики очень разнообразны. При их решении большей частью ограничиваются специальными случаями, используя комбинации следующих предположений:

¹⁾ Уравнение баротропности. (Прим. ред.)

- 1° $\eta = 0$ (отсутствие трения);
- 2° $\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ (стационарность);
- 3° $\text{rot } v = 0$ (отсутствие вихрей);
- 4° $\text{div } v = 0, \quad \text{grad } \rho = 0$ (несжимаемость и однородность);
- 5° $f = -\rho \text{ grad } \varphi$ (сила имеет потенциал).

При этих предположениях имеются, среди прочих, следующие возможности:

При выполнении условия 1°: $\rho \frac{dv}{dt} = f - \text{grad } p$, или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{\rho} - \text{grad } P,$$

или, ввиду $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} - (v \text{ grad}) v = \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + [v \text{ rot } v]$,
 $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f}{\rho} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P \right) + [v \text{ rot } v]$ (уравнение движения Эйлера).

При выполнении условий 1°, 2°, 3°: $\frac{f}{\rho} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P \right) = 0$, соответственно, при постоянном ρ .

При выполнении условий 1°, 2°, 3°, 4°: $f - \text{grad} \left(\rho \frac{v^2}{2} + p \right) = 0$;

$\left(\rho \frac{v^2}{2} + p \right)$ называется гидродинамическим давлением.

При выполнении условий 1°, 5°: $\frac{\partial \text{rot } v}{\partial t} = \text{rot} [v \text{ rot } v]$ и отсюда

$$\frac{d}{dt} \int df \text{rot}_n v = \frac{d}{dt} \oint (v d\bar{s}) = 0$$

(см. стр. 242), т. е. вихревой момент поверхности, движущейся (вместе с жидкостью, остается постоянным (Гельмгольц).

При выполнении условия 3° можно v представить в виде $v = \text{grad } \Phi$ (потенциал скоростей).

Тогда имеем:

при выполнении условий 1°, 3°: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi + P + \frac{1}{2} \text{grad}^2 \Phi = \text{const}$,

при выполнении условий 1°, 3°, 4°: $\Delta \Phi = 0$.

Большинство задач гидродинамики приводится к решению этих дифференциальных уравнений с учетом налагаемых ограниченностью потока краевых условий $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ или $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n$, где v_n — нормальная компонента скоростей на границе.

При более строгом приближении к действительности необходимо учитывать действующие на границе силы трения между жидкостью и

твердыми телами. Требование $\text{rot } v = 0$ в этом случае, вообще говоря, не выполняется.

Если скорость мала, то можно $\frac{dv}{dt}$ заменить на $\frac{\partial v}{\partial t}$ без дополнительных членов. Тогда получим:

$$\text{при выполнении условий 4}^\circ: \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = f - \text{grad } p + \eta \Delta v \quad \text{и}$$

$$\text{при выполнении условий 4}^\circ \text{ и 2}^\circ: \quad \eta \Delta v = \text{grad } p - f.$$

Если, наконец, $v = 0$ (*гидростатика*), то в качестве условия равновесия остается лишь

$$f = \text{grad } p,$$

и при выполнении условия 5^o: $-\text{grad } \varphi = \frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } P; \quad \varphi + P = \text{const.}$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА (С ВКЛЮЧЕНИЕМ ОПТИКИ)

А. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Предварительное замечание

Электродинамика пользуется различными видами теории¹⁾.

Можно строить ее как чисто континуальную теорию, основываясь на понятиях плотности заряда и плотности тока, связанных с электрическими и магнитными полями. Так как в такой теории понятия скорости не существует, то ток здесь не может рассматриваться как движение зарядов и теория «электродинамики движущихся сред» должна быть присоединена в качестве дополнения.

Если же принять за основу тот факт, что электричество и магнетизм всегда связаны с веществом, атомистическая природа которого твердо установлена, то представляется более естественным исходить из понятия точечного заряда, т. е. несущей заряд материальной точки, и построить сначала точечные теории электростатики и магнетизма, а от них перейти к квазиконтинуальной теории плотностей зарядов, дipoлей и токов. Вначале здесь используются, как в механике, только потенциальные поля, т. е. некоторые вспомогательные величины, позволяющие вычислять механически измеримые силы. Лишь установление того факта, что электромагнитное поле может существовать также и самостоятельно в виде поля излучения, приводит к выводу, что это поле следует рассматривать как реальный физический объект.

Тем самым вводится элемент континуальной теории, и электродинамика превращается в комбинированную теорию, где одновременно используются точечные и континуальные понятия. Эта разнородность методов ведет к некоторым трудностям.

Так называемая электронная теория, в частности, проводит эту точку зрения, пользуясь статистическими методами, причем связь с механикой выступает здесь особенно отчетливо.

¹⁾ См. стр. 409—410. (*Прим. ред.*).

1. Электростатика

В основе электростатики лежат следующие идеализированные опытные факты.

1° Закон Кулона: покоящийся *точечный электрический заряд* величины e_1 , находящийся в точке r_1 , воздействует на другой заряд e_2 , находящийся в точке r_2 , с силой \mathfrak{R}_{21} , равной

$$\mathfrak{R}_{21} = \frac{e_1 e_2 (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}.$$

2° Заряды e представляют собой неизменные и аддитивно комбинирующиеся величины (закон *сохранения заряда*, или *количества электричества*).

3° Электрические силы суперпонируются (по правилу параллелограмма).

С помощью этих предложений можно однозначно определить величины e , измеряя силы (из трех уравнений при применении, по крайней мере, трех зарядов).

Сила \mathfrak{R}_{21} может быть записана также в форме

$$\mathfrak{R}_{21} = -e_2 \text{grad} \left(\frac{e_1}{|r_2 - r_1|} \right) = -e_2 \text{grad} \varphi_2 = e_2 \mathfrak{E}_2,$$

где градиент следует образовать в точке r_2 , т. е. функцию $\varphi_2 = \frac{e_1}{|r_1 - r_2|}$ следует рассматривать как функцию от r_2 . В общем случае силу, действующую на заряд e , записывают в более простой форме:

$$\mathfrak{R} = e\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad} \varphi.$$

φ называется *потенциалом* в точке, где находится заряд e , \mathfrak{E} называется *напряженностью* электрического поля в этой же точке. При этом φ образует скалярное, \mathfrak{E} — векторное поле.

При многих действующих зарядах e_i имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \sum_i \mathfrak{R}_i, \quad \varphi = \sum_i \varphi_i, \quad \mathfrak{E} = \sum_i \mathfrak{E}_i = -\text{grad} \left(\sum_i \varphi_i \right), \\ \varphi &= \sum_i \frac{e_i}{r_i}, \quad \text{где } r_i = |r - r_i|, \end{aligned}$$

$\Delta\varphi = 0$ всюду, кроме $r = r_i$ (уравнение Лапласа).

Понятие *пространственного заряда* и его плотности ρ получают, исходя из картины большого числа малых, тесно расположенных в пространстве зарядов e_a и полагая $\rho(r) = \sum_a e_a f(|r - r_a|)$ с какой-либо сглаживающей функцией f (см. стр. 431). Аналогичным путем вводят понятие *поверхностного заряда* и его плотности σ . Потенциалы,

создаваемые такими зарядами, равны

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dv \frac{\rho}{r}, \text{ соответственно } \varphi = \int df \frac{\sigma}{r}.$$

Отсюда следует (см. стр. 214):

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= -\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathfrak{E} && \text{(уравнение Пуассона),} \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \end{aligned}$$

Электрическим *диполем* называется комбинация двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов $\pm e$, находящихся друг от друга на бесконечно малом расстоянии $\delta\mathbf{r}$ ¹⁾. Величина $e \delta\mathbf{r} = \mathfrak{P}$ называется *моментом диполя* (см. стр. 219). Если диполь помещается в точке \mathbf{r}' , то его потенциал дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{e}{|\mathbf{r}' + \delta\mathbf{r} - \mathbf{r}|} - \frac{e}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) = \\ &= - \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right). \end{aligned}$$

Понятие *плотности диполей*, или *поляризации*, \mathfrak{P} вводится, как выше. Это приводит к потенциалу

$$\varphi = \int dv \left(\mathfrak{P} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = - \int dv \frac{\operatorname{div} \mathfrak{P}}{r} + \int dv \operatorname{div} \left(\frac{\mathfrak{P}}{r} \right).$$

Последний интеграл обращается в нуль, если интегрирование распространено на все пространство и \mathfrak{P} на бесконечности достаточно быстро стремится к нулю, или при интегрировании, распространенном на конечный объем, на поверхности которого $\mathfrak{P} = 0$.

Если одновременно существуют истинные и поляризационные заряды, то имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int dv \frac{\rho - \operatorname{div} \mathfrak{P}}{r}, \\ -\Delta\varphi &= \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathfrak{P}), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$4\pi\rho = \operatorname{div} (\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}).$$

В чисто континуальной теории употребляются следующие понятия:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}) \quad \text{— плотность истинных зарядов,}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \rho - \operatorname{div} \mathfrak{P} \quad \text{— плотность свободных зарядов,}$$

$$\bar{\rho} - \rho = -\operatorname{div} \mathfrak{P} \quad \text{— плотность поляризационных зарядов²⁾}. \quad \underline{\hspace{10em}}$$

¹⁾ В физике под диполем часто понимают также совокупность зарядов $\pm e$, находящихся друг от друга на конечном расстоянии. (Прим. ред.)

²⁾ Эта терминология не является общепринятой. См., например, И. Е. Тамм, Теория электричества, изд. 7-е, Гостехиздат, М., 1957. (Прим. ред.)

В электронной теории $\bar{\rho} = \rho - \operatorname{div} \mathfrak{F}$ представляет собой несомую заряженными частицами *действительную* плотность заряда.

В изотропной среде (*диэлектрике*) благодаря воздействию \mathfrak{E} происходит ориентирование диполей, т. е. поляризация. В общем случае тогда \mathfrak{F} параллельно и пропорционально \mathfrak{E} . Поэтому имеем:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{F} = \epsilon\mathfrak{E} \quad , \quad \mathfrak{F} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}.$$

Величина ϵ называется *диэлектрической проницаемостью*. Она никогда не бывает меньше 1.

В вакууме $\mathfrak{F} = 0$, т. е. $\epsilon = 1$. Комбинация \mathfrak{D} по историческим причинам называется *диэлектрическим смещением*, или *электрической индукцией*. Уравнения

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \quad \mathfrak{D} = \epsilon\mathfrak{E}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

представляют собой основные уравнения электростатики.

При помощи понятия поляризации (не наблюдаемой непосредственно) объясняются изменения электрического поля, возникающие при внесении незаряженного диэлектрика в электрическое поле. Внутри диэлектрика имеем тогда $4\pi\bar{\rho} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$, но в то же время

$$4\pi\bar{\rho} = \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{1}{\epsilon}(\mathfrak{E} \operatorname{grad} \epsilon).$$

На поверхности, где ϵ изменяется скачком от значения ϵ_1 к значению ϵ_2 , поверхностная дивергенция σ остается равной нулю, т. е. *нормальная компонента \mathfrak{D} непрерывно переходит через поверхность*. С другой стороны, ввиду условия $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ на поверхности *остается непрерывной тангенциальная компонента \mathfrak{E}* .

Отсюда вытекает закон преломления силовых линий: $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, где α означает угол между силовыми линиями \mathfrak{E} или между \mathfrak{D} и нормалью к поверхности. Действительная поверхностная плотность зарядов $\bar{\sigma}$ равна

$$4\pi\bar{\sigma} = E_{n_2} - E_{n_1} = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1\right) E_{n_1}.$$

Ни \mathfrak{E} , ни \mathfrak{D} не может быть внутри тела измерено непосредственно. Однако если провести через тело сечение, *перпендикулярное* к силовым линиям, то в образованном таким путем свободном от вещества сечении можно будет измерить величину \mathfrak{E}' (как силу, действующую на единичный заряд), которая будет равна \mathfrak{D} в граничащем с сечением теле. С другой стороны, если проводить разрезы (или «сверлить») *параллельно* силовым линиям, то \mathfrak{E}' будет измерять граничное значение \mathfrak{E} ¹⁾. Если внутри тела имеется полость сферической формы,

¹⁾ Это можно принять за определение \mathfrak{D} и \mathfrak{E} внутри тел.

то в ней

$$\mathcal{E}' = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} \mathcal{E} = \frac{3}{1+2\epsilon} \mathcal{D}.$$

Число линий поля \mathcal{E} , соответственно \mathcal{D} , проходящих через сечение q , называется (по Фарадею) поверхностный интеграл

$$Z_E = \int_q df E_n, \quad \text{соответственно} \quad Z_D = \int_q df D_n.$$

Число Z_D линий индукции \mathcal{D} , выходящих из заряда e , равно $4\pi e$. Они могут оканчиваться только на отрицательных истинных зарядах или в бесконечности.

Проводниками электричества называются тела, для которых в статических условиях $\varphi = \text{const}$, т. е. $\mathcal{E} = 0$ и $\rho = 0$. Они могут нести только поверхностные заряды σ . Проводник статически ведет себя как тело с бесконечно большим ϵ . Поляризационные заряды на проводниках называются *индуцированными зарядами (Influenzladungen)*. Они могут быть отделены и могут рассматриваться как истинные заряды.

Так называемая *электростатическая задача* состоит в отыскании полей при заданных по форме и положению проводниках и непроводниках и их зарядах e_i . При этом приходится решать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathcal{D} &= 4\pi\rho && \text{вне проводников,} \\ 4\pi e_i &= \int_{F_i} df D_n, && \text{интегралы распространены на} \\ &&& \text{поверхности проводников } (F_i), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \quad \text{rot } \mathcal{E} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \text{const} = \varphi_i \quad \text{на } F_i.$$

2. Магнитостатика

В основе магнитостатики лежат опытные факты, вполне аналогичные тем, на которые опирается электростатика. Если вместо электрического заряда e ввести *магнитный заряд m (Polstärke)*, помещенный в полюсе постоянного магнита, то для силы взаимодействия между двумя магнитными полюсами будет справедлив закон, соответствующий закону Кулона. Поэтому остаются в силе также все формулы электростатики при условии соответствующей интерпретации встречающихся величин:

- m — *магнитный заряд* (соответствует e),
- \mathfrak{H} — *напряженность магнитного поля* (соответствует \mathcal{E}),
- \mathfrak{M} — *намагниченность* (соответствует \mathfrak{P}),
- \mathfrak{B} — *магнитная индукция* (соответствует \mathcal{D}),
- μ — *магнитная проницаемость* (соответствует ϵ).

Имеются, однако, следующие различия:

1° Не существует никакой *истинной* плотности магнитных зарядов. Основные уравнения поэтому принимают вид:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0.$$

2° Для многих веществ (*ферромагнетики*) μ не является постоянной и сложным образом зависит от \mathfrak{H} (*гистерезис*). Поэтому \mathfrak{M} может существовать и в отсутствие \mathfrak{H} (например, в постоянных магнитах).

3° Не существует никаких проводников магнетизма; однако некоторые вещества, обладающие весьма большой магнитной проницаемостью μ , ведут себя приблизительно как магнитные проводники (например, мягкое железо).

4° Поле \mathfrak{B} ввиду того, что оно свободно от источников, может быть представлено в форме

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

где

$$\mathfrak{A} = \int dv \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{M}}{r} \text{ (векторный потенциал),}$$

так что

$$\Delta \mathfrak{A} = -4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{M}.$$

Помещенный в полюсе магнитный заряд m является *свободным* магнитным зарядом, т. е.

$$m = \frac{1}{4\pi} \int dv \operatorname{div} \mathfrak{H} = - \int_V dv \operatorname{div} \mathfrak{M} = - \int_V df(\mathfrak{M} \cdot \mathbf{n});$$

интеграл распространен на часть пространства V , содержащую лишь *один* полюс магнита.

3. Электрический ток.

Всякий перенос зарядов называется электрическим током. *Силой тока* I называется количество электричества, проходящее через поверхность F в единицу времени:

$$I = \frac{\delta e}{\delta t}.$$

Плотность тока i при помощи формулы

$$I = \int_F df i_n$$

определяется однозначно лишь в том случае, когда можно принять, что $\operatorname{rot} i = 0$. Электронная теория понимает плотность тока более

общим образом, а именно, как

$$\mathbf{i} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha} f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|).$$

В силу теоремы о сохранении заряда $\frac{de_{\alpha}}{dt} = 0$ имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ (уравнение непрерывности).}$$

Электрический ток встречается феноменологически в различных формах:

1) Как *конвекционный ток*: заряд плотности ρ переносится средой, движущейся со скоростью \mathbf{v} : $\mathbf{i}_K = \rho \mathbf{v}$.

2) Как *ток проводимости*: заряд движется в проводнике под силовым воздействием электрического поля \mathfrak{E} , причем это движение непосредственно не наблюдаемо: $\mathbf{i} = \sigma \mathfrak{E}$. Величина σ называется *проводимостью*.

3) Так называемый *ток смещения* $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ также может считаться током. В частности, имеем:

$$\operatorname{div} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{D} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Полным током \mathbf{c} называется

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Для него справедлива формула $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$.

В смысле электронной теории

$$\bar{\mathbf{i}} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M}$$

представляет собой *действительную* плотность всего тока, обусловленного движением частиц (см. стр. 446). (Относительно остающегося пока без обоснования члена $c \operatorname{rot} \mathfrak{M}$ см. стр. 451.)

Для этой величины имеем:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{i}} = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}, \quad \text{где} \quad \bar{\rho} = \rho - \operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Стационарными называются токи, для которых $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Если такой ток идет по тонкому проводнику сечения q , то величина $I = \int_q d\mathbf{f} i_n$ вдоль проводника остается постоянной и $i_n = \frac{I}{q} = |\mathbf{i}|$.

Разность потенциалов между двумя точками проводника равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 ds E_s = \int_1^2 ds \frac{I_s}{\sigma} = \int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} I = WI$$

и в случае, когда σ не зависит от i , становится пропорциональной I с множителем пропорциональности W , называемым *омическим сопротивлением*, который зависит лишь от геометрических размеров проводника и его проводимости (*закон Ома*).

В замкнутом проводнике, согласно сказанному выше, будем иметь $\oint ds E_s = 0$, т. е. $I = 0$. Если же где-либо в нем соотношение $i = \sigma \mathcal{E}$ не выполняется, как это имеет место, например, в гальванических элементах, термоэлементах и т. п., то величина

$$\int ds \left(\frac{i}{\sigma} - \mathcal{E} \right)_s = E$$

называется *электродвижущей силой* (э. д. с.), и мы имеем:

$$E = IW.$$

Это соотношение также называется *законом Ома*, хотя по содержанию оно отличается от приведенной ранее формулы с тем же названием.

Величину $\frac{i}{\sigma} - \mathcal{E} = \mathcal{E}'$ следует рассматривать как «стороннее поле» («Scheinfeld»), так как имеем:

$$i = \sigma (\mathcal{E} + \mathcal{E}').$$

4. Электромагнетизм

В основе лежат следующие опытные факты.

Постоянные электрические токи сопровождаются магнитными полями (Эрстед). Поле \mathfrak{H} малого кругового тока силы I , обтекающего поверхность df , совпадает с полем магнитного диполя, перпендикулярного к поверхности и имеющего момент $\frac{I}{c} df$ (Ампер). При этом c является константой с размерностью скорости, а именно, она равна скорости света (Вебер):

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Поэтому поле произвольного замкнутого тока I совпадает с полем магнитного двойного слоя с моментом $\frac{I}{c}$ (см. стр. 219) и может быть представлено векторным потенциалом

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\mathfrak{R}}{r}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} = -\frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathfrak{R}, r]}{r^3} \quad (\text{закон Био — Савара}).$$

При этом интеграл берется по всему пути, пробегаемому током. При

произвольном свободном от источников распределении токов ($\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$) будем поэтому иметь:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int dv \frac{\mathbf{i}}{r},$$

и вместе с тем

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi\mathbf{i}}{c} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0.$$

Если наряду с полем тока имеется еще поле постоянных магнитов, то будем иметь

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv}{r} \left(\frac{\mathbf{i}}{c} + \operatorname{rot} \mathfrak{M} \right), \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

$$-\Delta \mathfrak{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 4\pi \left(\frac{\mathbf{i}}{c} + \operatorname{rot} \mathfrak{M} \right) = \operatorname{rot} (\mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}) = \operatorname{rot} \mathfrak{B},$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Эта форма векторного потенциала показывает, что $c \operatorname{rot} \mathfrak{M}$ естественно интерпретировать как плотность некоторого тока и рассматривать как часть действительной плотности тока $\bar{\mathbf{i}}$ (см. стр. 449). В этом состоит теория «камперовых молекулярных токов».

Основные уравнения электромагнетизма имеют вид

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi\mathbf{i}}{c}.$$

Б. Электродинамика

Электродинамика обобщает законы электромагнетизма, вводя в рассмотрение временные изменения.

В основе лежат следующие опытные факты:

1° *Закон индукции* (Фарадей, Ф. Нейман), формулируемый при помощи соотношения

$$\oint ds E_s = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int df B_n = \int df \operatorname{rot}_n \mathfrak{E}$$

(см. стр. 212, теорема Стокса), т. е. состоящий в утверждении, что величина линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого по замкнутой кривой (физически — электродвижущая сила в замкнутом контуре), пропорциональна скорости изменения потока индукции, проходящего через ограничиваемую контуром поверхность.

2° Магнитное поле создается не одним только током проводимости или конвекционным током $\dot{\mathbf{i}}$, а «полным» током

$$\mathbf{c} = \dot{\mathbf{i}} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \quad (\text{Максвелл}).$$

Это приводит к следующим *основным уравнениям электродинамики*, или

уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho.$$

Эти уравнения, используя действительные плотности тока и заряда, можно записать также в форме:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = \frac{4\pi \bar{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \bar{\rho},$$

где в качестве векторов поля фигурируют только \mathfrak{E} и \mathfrak{B} .

К этому следует присоединить *материальную систему*:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E},$$

$$i = \sigma \mathfrak{E}.$$

Все эти уравнения содержат предыдущие в качестве частных случаев.

Размерности электромагнитных величин: $[m^{\xi} \eta t^{\zeta}]$

	ξ	η	ζ
$\mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \mathfrak{M} \dots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
φ, \mathfrak{A} , электродвижущая сила $E \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$\epsilon, \mu \dots$	0	0	0
e , магнитный заряд $m \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1
Плотность электрических зарядов $\rho \dots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
Поверхностная плотность электрических зарядов $\sigma \dots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
Плотность тока $i \dots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
Сила тока $I \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2
Электрическая проводимость $\sigma \dots$	0	0	-1
Сопротивление $W \dots$	0	-1	1
Постоянная Вебера $c \dots$	0	1	-1

6. Силы

Пондеромоторными силами в электромагнитных системах называются механические силы, действующие на материальные части системы, в которых имеются заряды, поляризация или токи.

а) Покоящаяся среда

1. Электростатика. Сила, действующая на материальную точку, несущую заряд e , равна $\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}$; полная сила, действующая на систему точек, равна $\mathfrak{K} = \sum_i e_i \mathfrak{E}_i$; при непрерывном распределении зарядов соответственно $\mathfrak{K} = \int dv \rho \mathfrak{E}$.

Поле \mathfrak{E} состоит при этом из двух частей — из «внешнего» поля \mathfrak{E}^0 , создаваемого посторонними зарядами, и «внутреннего» поля

$$\sum_{i, k} \frac{e_k}{r_{ik}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k).$$

Последнее не дает вклада в выражение для полной силы, так что справедливы также формулы

$$\mathfrak{K} = \sum e_i \mathfrak{E}_i^0, \text{ где } \mathfrak{E}_i^0 = \mathfrak{E}^0(\mathbf{r}_i), \text{ соответственно } \mathfrak{K} = \int dv \rho \mathfrak{E}^0.$$

Плотностью силы называется величина $\mathfrak{f} = \rho \mathfrak{E}$ или $\rho \mathfrak{E}^0$ в зависимости от определения. При рассмотрении вопроса о силах, действующих на части системы, необходимо делать соответствующее различие.

Сила, действующая на диполь, равна $\mathfrak{K} = (\text{m grad}) \mathfrak{E}$; поэтому сила, действующая на систему, в которой имеется только поляризация, выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \int dv (\mathfrak{P} \text{ grad}) \mathfrak{E} = \int dv (\mathfrak{P} \text{ grad}) \mathfrak{E}^0 = \\ &= - \int dv \mathfrak{E} \text{ div } \mathfrak{P} = - \int dv \mathfrak{E}^0 \text{ div } \mathfrak{P}. \end{aligned}$$

Преобразование справедливо в случае, когда \mathfrak{P} вне области интегрирования исчезает; для частей системы, следовательно, оно справедливо лишь при соответствующей постановке задачи.

В общем случае, когда в рассматриваемой системе имеется и заряд, и поляризация, получим:

$$\mathfrak{K} = - \int dv \mathfrak{E} (\rho - \text{div } \mathfrak{P}) = \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E} \text{ div } \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E}^0 \text{ div } \mathfrak{E}.$$

Объемный интеграл может быть преобразован в поверхностный (см. стр. 215):

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi} \int df (\mathfrak{E} (\mathfrak{E}_{\perp}) - \frac{n}{2} \mathfrak{E}^2),$$

который берется по произвольной поверхности, заключающей систему и проходящей в вакууме, в котором предполагается наличие \mathfrak{E} (не \mathfrak{E}^0). Подынтегральная функция может быть записана в форме \mathfrak{L} . Здесь \mathfrak{L} называется *максвелловым тензором натяжений*:

$$\operatorname{div} \mathfrak{L} = \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Так как на поверхности, на которую распространен интеграл, имеем $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$ (вакуум!), то \mathfrak{E} можно произвольным образом заменить на \mathfrak{D} ; например,

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi} \int df \left(\mathfrak{D} (\mathfrak{D}n) - \frac{n}{2} \mathfrak{D}^2 \right),$$

или также

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi} \int df \left(\mathfrak{E} (\mathfrak{D}n) - \frac{n}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) \right).$$

Последнее выражение может быть преобразовано в объемный интеграл лишь при постоянном ϵ^1). Представить \mathfrak{K} в виде объемного интеграла можно следующим образом (ввиду $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho$, $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathfrak{P})$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{D} = 4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{P}$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \int dv (\rho \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P}) = \int dv \bar{\rho} \mathfrak{E} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dv ((\mathfrak{D} \operatorname{div} \mathfrak{D}) - [\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{D}]) = \int dv (\rho \mathfrak{D} - [\mathfrak{D} \operatorname{rot} \mathfrak{P}]). \end{aligned}$$

В качестве определения плотности силы, действующей на части среды, несущие заряд или поляризацию, предпочитают брать подынтегральную функцию $\bar{\rho} \mathfrak{E}$ (а не $\rho \mathfrak{E}$).

Вращающий момент, действующий на электростатическую систему, равен

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \int dv ([r\mathfrak{E}] \rho + [r \mathfrak{P} \operatorname{grad} \mathfrak{E}] + [\mathfrak{E}\mathfrak{P}]) = \frac{1}{4\pi} \int dv [r\mathfrak{E}] \operatorname{div} \mathfrak{E} = \\ &= \int dv \bar{\rho} [r\mathfrak{E}] = \frac{1}{4\pi} \int df [r (\mathfrak{E} (\mathfrak{E}n) - \frac{n}{2} \mathfrak{E}^2)]. \end{aligned}$$

2. Электродинамизм. Все приведенные выше формулы остаются справедливыми и в магнитостатике, если заменить в них \mathfrak{E} на \mathfrak{H} и т. д. Ввиду того, что ток²⁾ и двойной магнитный слой в отношении создаваемых ими полей эквивалентны, можно заключить об эквивалентности соответствующих сил (Ампер) и рассматривать соотношение

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi} \int df \left(\mathfrak{H} (\mathfrak{H}n) - \frac{n}{2} \mathfrak{H}^2 \right)$$

как справедливое во всех случаях.

¹⁾ Несмотря на это, именно последняя форма выбирается большей частью для определения максвеллова тензора натяжений, причем подынтегральная функция объемного интеграла интерпретируется как плотность силы.

²⁾ Здесь имеется в виду ток в замкнутом контуре. (*Прим. ред.*)

Это дает (вследствие $\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}$, $\text{div } \mathfrak{H} = -4\pi \text{div } \mathfrak{M}$, $\text{div } \mathfrak{B} = 0$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{1}{4\pi} \int dv (\mathfrak{H} \text{div } \mathfrak{H} - [\mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{H}]) = \int dv \left(\frac{[\mathfrak{H}^2]}{c} - \mathfrak{H} \text{div } \mathfrak{M} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int dv [\mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{B}] = \int dv \left(\frac{[\mathfrak{B}^2]}{c} - [\mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{M}] \right) = \int dv \left[\frac{\bar{i}}{c} \mathfrak{B} \right]. \end{aligned}$$

Подынтегральные функции, в зависимости от определения, можно рассматривать как плотности сил. Обычно по определению считают $\frac{[\mathfrak{H}^2]}{c}$ плотностью силы, действующей на токопроводящую часть среды, $-[\mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{M}]$ — плотностью силы, действующей на намагниченную ее часть.

Вращающий момент, действующий на магнитную систему, равен

$$\mathfrak{L} = \int dv \left[r \left[\frac{\bar{i}}{c} \mathfrak{B} \right] \right].$$

3. Электродинамика. Для систем, изменяющихся во времени, справедливы те же формулы для поверхностных интегралов, если на границе производные по времени обращаются в нуль. При преобразовании объемных интегралов следует иметь в виду уравнения Максвелла. Таким путем находим:

$$\mathfrak{K} = \int dv \left\{ \bar{p} \mathfrak{E} + \left[\frac{\bar{i}}{c} \mathfrak{B} \right] + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \right\},$$

т. е. в формулу входят два дополнительных члена к статической силе, которые можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \right) \quad \text{и} \quad -\frac{1}{c} \left[\mathfrak{B} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} \right].$$

Второй член представляет собой плотность силы, действующей на ток, связанный с изменениями поляризации; первый интерпретируется как выражение временного изменения $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}$ *плотности электромагнитного импульса*

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{4\pi c} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] = \frac{\mu}{c^2} \mathfrak{S}.$$

Важно, что \mathfrak{p} существует также и в вакууме.

б) Движущаяся среда

На материальную точку, движущуюся со скоростью \mathfrak{v} и несущую заряд e , электромагнитное поле действует с силой, которую можно вычислить с помощью изложенного выше. В первом приближении,

т. е. при малых $\frac{v}{c}$, мы получаем:

$$\mathfrak{K} = e \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v\mathfrak{H}] \right) \quad (\text{лоренцова сила}).$$

Это можно истолковать таким образом: воздействие движения эквивалентно воздействию «фиктивного поля» $\mathfrak{E}' = \frac{1}{c} [v\mathfrak{H}]$. Во втором приближении получаем второе фиктивное поле $\mathfrak{H}' = -\frac{1}{c} [v\mathfrak{E}]$.

То же справедливо для действия, оказываемого движением на среду, в которой имеются заряды, поляризация и токи. Фиктивные поля вызывают в ней дополнительные поляризации и токи.

Полную теорию электродинамики в движущихся средах дает только теория относительности (см. стр. 482).

7. Энергия

Под приращением δW энергии электромагнитной системы понимают внешнюю работу δA , которую необходимо приложить, чтобы изменить систему, за вычетом энергии, утекающей из системы. Так как выполняющие работу внешние силы могут быть приложены только к зарядам, то имеем:

$$\delta A = \int dv (\mathfrak{E} i_K) \delta t,$$

где i_K означает плотность конвекционного тока: $i_K = -\dot{i} + \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$, который возникает при вызванном внешними силами изменении, происходящем в течение промежутка времени δt ; таким образом, имеем (если $\dot{i} = \sigma \mathfrak{E}$ — ток проводимости):

$$\begin{aligned} \delta A &= \int dv (\mathfrak{E} i) \delta t - \frac{c}{4\pi} \int dv (\mathfrak{E} \text{rot } \mathfrak{H}) \delta t + \frac{1}{4\pi} \int dv (\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) = \\ &= \delta t \left\{ \int dv (\mathfrak{E} i) + \frac{c}{4\pi} \int dv \text{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \right\} + \frac{1}{4\pi} \int dv ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B})) = \\ &= \delta t \left\{ \int dv (\mathfrak{E} i) + \frac{c}{4\pi} \int df [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_n \right\} + \frac{1}{4\pi} \int dv ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B})). \end{aligned}$$

Эта формула интерпретируется следующим образом: $\int dv (\mathfrak{E} i)$ представляет собой выделяющееся в единицу времени *джоулево тепло*; $\frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$ (вектор Пойнтинга) представляет собой плотность проходящего через поверхность потока энергии; наконец,

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int dv ((\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \delta \mathfrak{B}))$$

представляет собой приращение внутренней энергии поля. Если $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, где ϵ и μ не зависят от поля, то получим:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int dv ((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})).$$

Если пределы интегрирования лежат в бесконечности, то этот интеграл можно преобразовать в

$$W = \frac{1}{2} \int dv \left\{ \rho\varphi + \left(\frac{i}{c} \mathfrak{M} \right) \right\}.$$

Системно-теоретическое описание (см. стр. 410):

1. Энергия системы, состоящей из заряженных проводников с зарядами e_i , равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i.$$

Потенциалы φ_i являются линейными функциями от e_i . Поэтому энергия W может быть представлена в форме

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{C_{ik}}.$$

Коэффициенты $C_{ik} = C_{ki}$ называются *коэффициентами взаимной электростатической индукции*, коэффициент C_{ii} называется *емкостью* i -го проводника. В качестве следствия получаем:

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial e_i} = \sum_k \frac{e_k}{C_{ik}}.$$

Если имеются только два проводника с зарядами $e_1 = -e_2 = e$ (*конденсатор*), то получим:

$$W = \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{C_{11}} - \frac{2}{C_{12}} + \frac{1}{C_{22}} \right) = \frac{e}{2} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Величина

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} - \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{22}}} = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

называется *емкостью системы*.

2. Энергия системы, состоящей из токов I_i в замкнутых контурах, равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint (\mathfrak{M} d\mathfrak{s}).$$

Линейные интегралы являются линейными функциями от I_i . Поэтому W допускает представление вида

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_i I_k L_{ik}.$$

Коэффициенты $L_{ik} = L_{ki}$ называются *коэффициентами взаимной индукции* проводников, коэффициент L_{ii} называется *коэффициентом*

самоиндукции i -го проводника. В качестве следствия получаем:

$$\oint (\mathfrak{A} d\mathfrak{s}) = \frac{\partial W}{\partial I_i} = \sum_k I_k L_{ik}.$$

Размерности: $[C]=l$, $[L]=\frac{l^2}{l}$.

8. Электрические системы единиц

Исходя из использованной выше *гауссовой системы единиц*, можно перейти к другим системам единиц при помощи преобразования масштабов. При этом можно ввести иначе определенные единицы. Основные уравнения тогда модифицируются, приобретая соответствующие дополнительные коэффициенты.

Обобщенное в указанном смысле описание можно получить, полагая

$$e' = \alpha e, \quad \varphi' = \beta \varphi, \quad \mathfrak{H}' = \gamma \mathfrak{H}, \quad \epsilon' = \epsilon_0 \beta, \quad \mu' = \mu_0 \alpha.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \beta \mathfrak{E} \quad (\mathfrak{E}' = -\text{grad } \varphi'), \quad \mathfrak{D}' = \epsilon_0 \beta \mathfrak{D} \quad (\mathfrak{D}' = \epsilon' \mathfrak{E}'), \\ \mathfrak{B}' &= \mu_0 \gamma \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{B}' = \mu' \mathfrak{H}'), \quad \mathfrak{H}' = \mu_0 \gamma \mathfrak{H} \quad (\mathfrak{B}' = \text{rot } \mathfrak{H}'), \\ \rho' &= \alpha \rho, \quad i' = \alpha i, \quad I' = \alpha I, \\ W' &= \alpha \beta W, \quad \mathfrak{K}' = \alpha \beta \mathfrak{K} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Модифицированные уравнения поля тогда имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H}' - \frac{\gamma}{\epsilon_0 \beta} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t} &= \frac{\gamma}{\alpha} \frac{4\pi}{c} i', \\ \text{rot } \mathfrak{E}' + \frac{\beta}{\mu_0 \gamma} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \mathfrak{D}' &= \frac{\epsilon_0 \beta}{\alpha} 4\pi \rho', \\ \text{div } \mathfrak{B}' &= 0; \end{aligned}$$

материальные уравнения имеют вид:

$$\mathfrak{D}' = \epsilon' \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{B}' = \mu' \mathfrak{H}', \quad i' = \sigma' \mathfrak{E}', \quad \text{где } \sigma' = \frac{\alpha}{\beta} \sigma.$$

Законы Кулона и Био—Савара принимают форму:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}'_{эл} &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{\epsilon_0}{\epsilon'} \frac{e'_1 e'_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}}, \\ \mathfrak{K}'_{магн} &= \frac{\gamma^2}{\alpha \beta} \frac{\mu_0}{\mu'} \frac{m'_1 m'_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}}, \\ d\mathfrak{H}' &= \frac{\gamma}{\alpha} \frac{I'}{c} \frac{[r d\mathfrak{s}]}{r^3}. \end{aligned}$$

Далее, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} i' &= 0, \\ \mathcal{E}' &= \frac{\alpha}{\gamma} \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E}' \mathcal{D}'], \\ W' &= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} (\mathcal{E}' \mathcal{D}') + \frac{1}{\mu_0 \gamma^2} (\mathcal{H}' \mathcal{B}') \right\} dv = \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{\alpha \beta} \rho' \varphi' + \frac{1}{\mu_0 \alpha \gamma} \left(\frac{i'}{c} \mathcal{M}' \right) \right\} dv. \end{aligned}$$

Здесь получаются симметричные формы, если принять $\epsilon_0 \beta^2 = \mu_0 \gamma^2$ и $\beta = \mu_0 \gamma$.

Коэффициентам α, \dots, μ_0 , даже если они численно принимаются равными 1, можно приписать в широких пределах произвольные размерности.

Системами единиц, которые употребляются чаще других, являются:

Системы единиц	α	β	γ	ϵ_0	μ_0
Абсолютная электростатическая (гауссова) система единиц (называемая также системой CGSE)	1	1	1	1	1
Абсолютная электромагнитная система единиц (называемая также системой CGSM)	$\frac{1}{c}$	c	1	1	1
Техническая система единиц	$\frac{10}{c}$	$c \cdot 10^{-9}$	1	1	1
Так называемая «рационализованная» лоренцова система единиц	$\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	1	1
Так называемая «практическая» система единиц (система Ми, называемая также системой кулон-вольт-см-сек)	$\frac{10}{c}$ <i>a · сек</i>	$c \cdot 10^{-9}$ <i>в</i>	$\frac{10}{4\pi}$ $\frac{a}{c \cdot \text{см}}$	$\frac{10^9}{4\pi c^2}$ $\frac{a \cdot \text{сек}}{в \cdot \text{см}}$	$4\pi \cdot 10^{-9}$ $\frac{в \cdot \text{сек}}{a \cdot \text{см}}$

В так называемой «практической системе единиц Джорджи» в качестве единицы длины используется метр вместо сантиметра, в то время как для электрических величин применяются те же единицы, что и в системе Ми, — ампер, секунда и вольт (*система кулон-вольт-метр-секунда*). Если для длины, следовательно, применить преобразование масштаба $l' = \lambda l$ с $\lambda = 10^{-2}$, то следует положить:

$$\text{grad}' = \frac{1}{\lambda} \text{grad} \quad \text{и т. д.}, \quad c' = \lambda c,$$

$$e' = \alpha e, \quad \varphi' = \beta \varphi, \quad \mathfrak{H}' = \frac{\gamma}{\lambda} \mathfrak{H}, \quad \epsilon' = \epsilon_0 \epsilon, \quad \mu' = \mu_0 \mu,$$

откуда следует, например:

$$\rho' = \frac{1}{\lambda^3} \rho, \quad \mathfrak{E}' = \frac{\beta}{\lambda} \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D}' = \epsilon_0 \frac{\beta}{\lambda} \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{B}' = \mu_0 \frac{\gamma}{\lambda} \mathfrak{B}, \quad i' = \frac{\alpha}{\lambda^2} i \quad \text{и т. д.}$$

В этой системе единиц α , β , γ — те же, что и в системе Ми; и

$$\epsilon_0 = \frac{10^{11}}{4\pi c^2} \frac{\text{а} \cdot \text{сек}}{\text{в} \cdot \text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{а} \cdot \text{м}}.$$

В системе Джорджи в качестве единицы массы берут килограмм вместо грамма, отсюда встречающееся также наименование «МКСА-система». Тогда механические единицы энергии становятся равными электрическим: $1 \text{ дж} = 1 \text{ вт} \cdot \text{сек} = 10^7 \text{ эрг}$. Единица силы носит название «дина» или «ньютон».

В. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

1. Электродинамика квазистационарных токов

Если током смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости можно пренебречь, то это приводит к упрощениям. Для замкнутого проводника получаем:

$$\oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int df B_n = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint (\mathfrak{H} d\mathfrak{s}) = IW = -L \frac{dI}{dt},$$

где L означает самоиндукцию проводника, W — его сопротивление. Рассмотрение задач с величинами I , W , L , C можно и дальше вести в духе чистой системной теории. Если речь идет о системе проводников, то имеем систему уравнений

$$I_i W_i + \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} = 0.$$

Если в проводниках имеются также электродвижущие силы E_i

(см. стр. 450), то получаем

$$I_i W_i + \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} = E_i.$$

Если, кроме того, включены конденсаторы с емкостями C_i , то к $\oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{s})$ добавляется еще слагаемое $\frac{e_i}{C_i}$, и вследствие $I = \frac{de}{dt}$ мы получаем:

$$\frac{1}{C_i} I_i + W_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_k L_{ik} \frac{d^2 I_k}{dt^2} = \frac{dE_i}{dt}. \quad (1)$$

Эта система уравнений служит исходным пунктом при рассмотрении индуктивно связанных круговых токов.

Если имеется только *один* круговой ток, то система (1) превращается просто в уравнение

$$\frac{1}{C} I + W \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{dE}{dt}.$$

Это — уравнение вынужденных затухающих колебаний, вызываемых изменением электродвижущей силы E . Если E постоянно, то колебания будут свободными (*колебательный контур*) с комплексной круговой частотой, равной

$$\omega = \frac{iW}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{W^2}{4L^2}}$$

и, в частности, при $W = 0$:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{формула Томсона}).$$

2. Электродинамика однородной среды

Если ϵ , μ и σ не зависят ни от положения, ни от поля, то становятся возможными упрощающие преобразования. При помощи исключения находим:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\text{rot rot } \mathfrak{E}.$$

Такие же формулы справедливы для \mathfrak{H} , \mathfrak{D} , \mathfrak{B} и i .

В случае $\sigma = 0$ вместо потенциалов φ и \mathfrak{A} ($\text{div } \mathfrak{A} = 0$) вводят потенциалы Φ и \mathfrak{A} при помощи совместных с уравнениями Максвелла требований:

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

и

$$\text{div } \mathfrak{A} = -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{условие Лоренца}).$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{A} &= \frac{4\pi i}{c} \mu, \\ \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi &= 4\pi \rho \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Эти потенциалы определяются большей частью в случае $\epsilon = \mu = 1$. \mathcal{A} и Φ определены лишь с точностью до аддитивных членов (*градиентная инвариантность*):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \frac{\epsilon\mu}{c} \text{grad} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \Phi = \Phi_0 + \Delta \chi$$

с произвольным χ , удовлетворяющим условию $\Delta \chi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$.

Если ввести вектор \mathcal{Z} (*вектор Герца*) при помощи равенств

$$\mathcal{A} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t}, \quad \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \text{div} \mathcal{Z},$$

то получим:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{Z} = 4\pi \mathbf{q}, \quad \text{где } \mathbf{q} = \int^t \mathbf{i} dt, \quad \text{т. е. } \mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad \rho = -\text{div} \mathbf{q} + \rho_0.$$

Решения этих уравнений, записанные в интегральной форме, имеют вид:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \int \frac{dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t'), \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{c} \int \frac{dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{i}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathcal{Z}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{q}(\mathbf{r}', t'),\end{aligned}$$

где

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{V} \quad \text{и} \quad V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

т. е. значения Φ , \mathcal{A} , \mathcal{Z} в точке \mathbf{r} в момент времени t вычисляются, исходя из значений ρ , \mathbf{i} , \mathbf{q} в точках \mathbf{r}' , удаленных от \mathbf{r} на расстояния $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, взятых в момент t' . Таким образом, необходим промежуток времени $\frac{r}{V}$ для того, чтобы действие ρ , \mathbf{i} , \mathbf{q} сказалось на расстоянии r ; их действие представляется «запаздывающим».

Эта форма решений позволяет в то же время усмотреть, что статические соотношения остаются в силе лишь при весьма малых r или при медленно изменяющихся ρ , \mathbf{i} , \mathbf{q} .

Отсюда вытекает следующее удобное в методическом отношении правило: представим себе сферическую волну, начинающую распространяться с формальной скоростью $-V$ в момент t из точки, в которой исследуется поле. Тогда действие всех зарядов в момент t

характеризуется теми величинами, которые они имеют при прохождении через них этой волны.

С помощью этих формул можно вычислять поля движущихся зарядов

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{Z},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad div } \mathfrak{Z} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \text{rot rot } \mathfrak{Z} - \frac{4\pi}{\epsilon} \rho.$$

а) Для точечного заряда e , движущегося со скоростью v в вакууме ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$), находим:

$$\Phi(r, t) = \frac{e}{r - \frac{(rv)}{c}} \Big|_{t - \frac{r}{c}}$$

и

$$\mathfrak{A}(r, t) = \frac{ev}{c \left(r - \frac{(rv)}{c} \right)} \Big|_{t - \frac{r}{c}}.$$

В частном случае $v = \text{const}$ получаем:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{r^2 (1 - \beta^2) + \frac{(rv)^2}{c^2}}},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{ev}{c \sqrt{r^2 (1 - \beta^2) + \frac{(rv)^2}{c^2}}}, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c},$$

и отсюда

$$\mathfrak{E} = \frac{(1 - \beta^2) e r}{(V)^3}, \quad \mathfrak{H} = \frac{(1 - \beta^2) e [v r]}{c (V)^3}.$$

Уравнение $\Phi = \text{const}$ представляет сплюснутый эллипсоид вращения с отношением осей $\sqrt{1 - \beta^2}$ (эллипсоид Хевисайда).

Сила, действующая на второй заряд e_2 , который движется с той же скоростью v , будет тогда равна

$$\mathfrak{R} = e_2 \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v, \mathfrak{H}] \right) = - (1 - \beta^2) \text{grad } \Phi.$$

$\Psi = (1 - \beta^2) \Phi$ называется конвекционным потенциалом.

б) Дипольное излучение. Пусть момент \mathfrak{m} диполя задан как функция времени, и скорости его составных частей малы по сравнению с $V = \frac{c}{\epsilon \mu}$. Тогда в точке r , при условии, что r велико по

сравнению с размерами диполя, помещенного в точке $r=0$, и что $\sigma=0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{\dot{m}}{r}, \\ \epsilon \mathfrak{E} = \mathfrak{D} &= \frac{3r(mr) - r^2 \dot{m}}{r^3} + \frac{3r(\ddot{m}r) - r^2 \ddot{m}}{Vr^3} + \frac{1}{V^2 r^3} [r[r\ddot{m}]], \\ \frac{\mathfrak{B}}{\mu} = \mathfrak{H} &= -\frac{[r\dot{m}]}{cr^3} - \frac{[r\ddot{m}]}{cVr^2}, \end{aligned}$$

где m означает момент диполя в момент времени $(t - \frac{r}{V})$ и

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}, \quad \ddot{m} = \frac{d^2m}{dt^2}.$$

Для больших r будем согласно этому иметь:

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{1}{4\pi\epsilon V^3} \frac{r}{r^3} [r\ddot{m}]^2.$$

Полная энергия, излучаемая за время dt , будет тогда равна

$$-dW = \int S_n df dt = \frac{2}{3\epsilon V^3} |\ddot{m}|^2 dt.$$

Если $m = m_0 \sin \omega t = m_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} Vt$ (λ — длина волны), то усредненная по одному периоду мощность излучения будет равна

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{16\pi^4}{3} \frac{c}{\epsilon \lambda^3} |m_0|^2.$$

3. Электродинамика периодических полей в однородной среде

Пусть

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega t} \quad \text{и т. д.,} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ и ω предполагаются постоянными, причем для них возможны и комплексные значения. В качестве частных решений могут употребляться независимо друг от друга действительная и мнимая части.

1-й случай: токи и заряды заданы (действительные части!):

$$\begin{aligned} \dot{i} &= i_0 e^{i\omega t}, \quad \rho = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} i, \quad q = \frac{-i}{\omega} i, \quad \rho = -\operatorname{div} q, \\ \mathfrak{B} &= \int \frac{dv}{r} q e^{-\frac{i\omega r}{V}}, \quad V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{i\omega}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{B} + \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \mathfrak{B} - \operatorname{grad} \varphi_0. \end{aligned}$$

2-й случай: $\rho = 0$, $i = \sigma \mathcal{E}$ не задано. Полагаем

$$p = \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}} \quad (\text{комплексный показатель преломления}),$$

$$k = \frac{\omega p}{c} \quad (\text{комплексное волновое число})$$

и вводим новый вектор $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 e^{i\omega t}$, для которого требуем:

$$\Delta \mathfrak{F} + k^2 \mathfrak{F} = 0.$$

Тогда формулы

$$I. \quad \mathfrak{H} = \frac{ip}{\mu k} \text{rot } \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot } \mathfrak{F}$$

и

$$II. \quad \mathfrak{H} = \frac{ip}{\mu k^2} \text{rot rot } \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{k} \text{rot } \mathfrak{F}$$

дают частные решения задачи.

Если две однородные среды граничат друг с другом, то должны быть выполнены «условия перехода» — непрерывность тангенциальных компонент \mathfrak{E} и \mathfrak{H} .

Если одна из сред представляет собой идеальный проводник ($\sigma \rightarrow \infty$), то в другой среде на граничной поверхности должны обращаться в нуль тангенциальная компонента \mathfrak{E} и нормальная компонента \mathfrak{H} . На границе имеются периодические поверхностные заряды и токи, препятствующие проникновению поля из одной среды в другую.

Особые случаи.

1) *Плоская волна:* $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_{00} e^{ik(rn)}$, $\mathfrak{F}_{00} = \text{const}$, n — постоянный единичный вектор.

$$\mathfrak{H} = \frac{p}{\mu} [\mathfrak{F}_{00} n] e^{i(\omega t + k(rn))},$$

$$\mathfrak{E} = [n [\mathfrak{F}_{00} n]] e^{i(\omega t + k(rn))}.$$

Отсюда получаем, что $(\mathfrak{E}n) = (\mathfrak{H}n) = (\mathfrak{E}, \mathfrak{H}) = 0$ и, следовательно, имеется *плоская поперечная волна* с n в качестве *волновой нормали*.

$kn = \mathfrak{k}$ является *волновым вектором*, $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{p}$ — *фазовой скоростью*.

Комплексные \mathfrak{H} и \mathfrak{E} означают эллиптическую поляризацию,

комплексное ω означает затухание во времени,

комплексное k означает уменьшение амплитуды по мере распространения волны в пространстве (поглощение),

комплексное n означает поперечное ослабление ($|n|^2 = 1$).

2) *Цилиндрическая волна:* $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_{00} e^{i(n\varphi + mz)} Z_m(\rho \sqrt{k^2 - m^2})$.
Здесь ρ , φ , z — цилиндрические координаты, Z_m — цилиндрическая функция m -го порядка, n и m — числа (большой частью целые); вектор \mathfrak{F}_{00} параллелен оси.

Другим специальным решением является

$$P_\rho = P_{00} \frac{e^{ikz}}{\rho}, \quad P_\vartheta = P_\varphi = 0.$$

3) *Сферическая волна*: $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_{00} \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+1/2}(kr) Y_n(\vartheta, \varphi)$.

r, ϑ, φ — сферические координаты, Y_n — произвольная общая сферическая функция n -го порядка. \mathfrak{F}_{00} имеет направление полярной оси ($\vartheta = 0$).

Встречающиеся цилиндрические функции в большинстве случаев разлагают на две ганкелевы функции: $H_{n+1/2}^{(1)}$ и $H_{n+1/2}^{(2)}$. Их представление на стр. 147 показывает, что решение с $H_{n+1/2}^{(1)}$ означает сферическую волну, *сходящуюся* к точке $r = 0$, в то время как решение с $H_{n+1/2}^{(2)}$ означает волну, *исходящую* из этой точки.

4) *Более общая форма решений* такова:

$$\mathfrak{F}_0 = r^{n+3/2} Z_{n+1/2}(kr) \text{grad } V_n.$$

Здесь $V_n = r^{-(n+1)} Y_n(\vartheta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению $\Delta V_n = 0$ и

$$(\text{r grad } Y_n) = -(n+1) V_n.$$

В сферических координатах это дает систему решений:

$$E_{0r} = \frac{1}{r^{3/2}} Z_{n+1/2}(kr) Y_n(\vartheta, \varphi),$$

$$E_{0\varphi} = \frac{1}{n(n+1)\sqrt{r} \sin \vartheta} \left(\frac{d}{dr} Z_{n+1/2}(kr) + \frac{1}{2r} Z_{n+1/2}(kr) \right) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$E_{0\vartheta} = \frac{1}{n(n+1)\sqrt{r}} \left(\frac{d}{dr} Z_{n+1/2}(kr) + \frac{1}{2r} Z_{n+1/2}(kr) \right) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta},$$

$$H_{0r} = 0,$$

$$H_{0\varphi} = \frac{ip}{\mu} \frac{-k}{n(n+1)\sqrt{r}} Z_{n+1/2}(kr) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta},$$

$$H_{0\vartheta} = \frac{ip}{\mu} \frac{k}{n(n+1)\sqrt{r} \sin \vartheta} Z_{n+1/2}(kr) \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Отсюда получаем вторую систему решений $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ с

$$\mathfrak{E}' = \frac{\mu}{ip} \mathfrak{H}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}' = \frac{ip}{\mu} \mathfrak{E}'.$$

4. Механика заряженных материальных точек

а) Задача одного тела

Пусть дано внешнее поле. Тогда уравнения движения имеют вид

$$m \frac{dv}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} [v\mathcal{H}],$$

или, если воспользоваться потенциалами Φ и \mathcal{A} , —

$$\frac{d}{dt} (mv + \frac{e}{c} \mathcal{A}) = \text{grad} \left(-e\Phi + \frac{e}{c} (\mathcal{A}v) \right).$$

В эти формулы следует подставить значения полей \mathcal{E} , \mathcal{H} , соответственно Φ , \mathcal{A} , в точке, где расположен заряд. При образовании градиента с v следует обращаться как с постоянной, так что будем иметь: $\text{grad} (\mathcal{A}v) = (v \text{ grad } \mathcal{A}) + [v \text{ rot } \mathcal{A}]$. Далее, следует положить $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + (v \text{ grad } \mathcal{A})$. Мы приходим тогда к уравнению, имеющему форму уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{c} (\mathcal{A}v) - e\Phi.$$

Ввиду того, что

$$p = \text{grad}_r L = mv + \frac{e}{c} \mathcal{A}; \quad v = \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c} \mathcal{A} \right); \quad H = (pv) - L,$$

соответствующая функция Гамильтона будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} \mathcal{A} \right)^2 + e\Phi.$$

Канонический импульс p складывается из «кинетического» импульса mv (количество движения) и «потенциального» импульса $\frac{e\mathcal{A}}{c}$.

Если \mathcal{A} представить в виде $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где $\text{div } \mathcal{A}_1 = 0$, $\text{rot } \mathcal{A}_1 = \mathcal{H}$, $\text{div } \mathcal{A}_2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\text{rot } \mathcal{A}_2 = 0$, то будет иметь место соотношение

$$m \frac{dv}{dt} = \underbrace{-\frac{e}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t} + \frac{e}{c} [v \text{ rot } \mathcal{A}_1]}_{\mathcal{K}_1} - \underbrace{\frac{e}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t} - e \text{ grad } \Phi}_{\mathcal{K}_2} =$$

Для \mathcal{K}_2 имеем: $\text{rot } \mathcal{K}_2 = 0$, $\text{div } \mathcal{K}_2 = \frac{e}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - e\Delta\Phi = 4\pi\rho_a = -e\Delta\varphi_{\text{стат}}$, следовательно, $\mathcal{K}_2 = -e \text{ grad } \varphi_{\text{стат}}$, $\mathcal{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t}$.

Этот член \mathcal{K}_2 вычисляется, таким образом, из *незапаздывающего* статического потенциала $\varphi_{\text{стат}}$ плотности зарядов ρ_a , создающей

внешнее поле. Его можно рассматривать как силовое воздействие «продольных волн» (см. стр. 438), распространяющихся «с бесконечной скоростью». Применяя их потенциал φ ; можно функции Гамильтона придать также форму

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_1 \right)^2 + e\varphi, \quad \text{где } p_1 = mv + \frac{e}{c} \mathcal{A}_1.$$

b) Задача многих тел

Пусть дано внешнее поле \mathcal{A}^a, Φ^a , соответственно $\mathcal{A}_1^a, \varphi^a$. К уравнениям движения точек r_n, e_n, m_n присоединяются уравнения для внутреннего поля \mathcal{A}, Φ , соответственно \mathcal{A}_1, φ (см. выше).

Чтобы также и здесь прийти к каноническим уравнениям, представим внутреннее поле в виде разложения Фурье (см. стр. 234)

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} A_{\lambda}(t) a_{\lambda}(r) + \sum_{\tau_1, \tau_2} A_{\tau}(t) a_{\tau}(r), \quad \Phi = \sum_{\lambda} \Phi_{\lambda}(t) \alpha_{\lambda}(r)$$

и примем компоненты $A_{\lambda}, A_{\tau}, \Phi_{\lambda}$ за обобщенные координаты.

Представление принимает особенно простой вид в случае, когда

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{\tau} A_{\tau} a_{\tau} \quad \text{и} \quad \varphi = \sum_n \frac{e_n}{|r - r_n|}.$$

При комплексном способе записи (см. стр. 234) с $a_{\tau} = \frac{e_{\tau}}{\sqrt{V_g}} e^{2\pi i (r \cdot r_{\tau})}$ сумму \sum_{τ} следует распространить на все точки взаимной решетки (и, разумеется, по обоим направлениям поляризации τ_1, τ_2). Так как \mathcal{A}_1 действительно, то $A_{-\tau} = A_{\tau}^*$ при условии, что вектор $-\mathbf{f}_{-\tau}$, обратный по направлению и величине вектору \mathbf{f}_{τ} , будем обозначать через $\mathbf{f}_{-\tau}$. Разложение Фурье уравнений поля дает тогда:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{A}_{\tau} + 4\pi^2 k_{\tau}^2 A_{\tau} = \frac{4\pi}{c} \int_V dV (i a_{\tau}^*) = \frac{4\pi}{c} \sum_n e_n (v_n a_{\tau}^*(r_n)).$$

Если $C_{\tau} = \frac{1}{4\pi c^2} \dot{A}_{\tau}^*$ примем за канонически сопряженные с (комплексными) A_{τ} импульсы (которые также будут комплексными), причем $C_{-\tau} = C_{\tau}^*$, то получим функцию Гамильтона для всей системы:

$$H(r_n, p_n, A_{\tau}, C_{\tau}) = \sum_n H_n + \sum_{\tau} H_{\tau} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n, n' \\ (n \neq n')}} \frac{e_n e_{n'}}{|r_n - r_{n'}|},$$

где

$$H_n = \frac{1}{2m_n} \left(p_n - \frac{e_n}{c} \sum_{\tau} A_{\tau} \alpha_{\tau} (r_n) - \frac{e_n}{c} \vartheta^a (r_n) \right)^2 + e_n \Phi^a (r_n),$$

$$H_{\tau} (A_{\tau}, C_{\tau}) = 2\pi c^2 C_{\tau} C_{\tau}^* + \frac{\pi}{2} k_{\tau}^2 A_{\tau} A_{\tau}^*, \quad \text{где } A_{\tau}^* = A_{-\tau}, \quad C_{\tau}^* = C_{-\tau}.$$

Вместе с тем получаем:

$$\begin{aligned} v_n &= \text{grad}_{p_n} H = \frac{1}{m_n} \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \sum_{\tau} A_{\tau} \alpha_{\tau} (r_n) - \frac{e_n}{c} \vartheta^a (r_n) \right\} = \\ &= \frac{1}{m_n} \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \vartheta_1 (r_n) - \frac{e_n}{c} \vartheta^a (r_n) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial C_{\tau}} &= 4\pi c^2 C_{\tau}^* = \dot{A}_{\tau}, \\ \frac{\partial H}{\partial A_{\tau}} &= \pi k_{\tau}^2 A_{\tau}^* - \frac{1}{c} \sum_n e_n (v_n, \alpha_{\tau} (r_n)) = -\frac{\ddot{A}_{\tau}^*}{4\pi c^2} = -\dot{C}_{\tau} \end{aligned}$$

в качестве (комплексных) канонических уравнений. Здесь следует обратить внимание на то, что каждое из A_{τ} , C_{τ} в $\sum_{\tau} H_{\tau}$ встречается дважды, а именно, как A_{τ} , C_{τ} и как $A_{-\tau}^*$, $C_{-\tau}^*$.

Если поле свободно от зарядов, то A_{τ} становится периодическим с (круговой) частотой $\omega_{\tau} = 2\pi\nu_{\tau} = 2\pi c k_{\tau}$ и, следовательно, в этом случае $C_{\tau} = i \frac{\omega_{\tau}}{4\pi c^2} A_{\tau}^*$. Вводя действительные Q_{τ} , P_{τ} при помощи канонического преобразования

$$\begin{aligned} Q_{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\tau}}{4\pi c^2}} A_{\tau} + i \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}}} C_{\tau} \right), \\ P_{\tau} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\tau}}{4\pi c^2}} A_{\tau} - i \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}}} C_{\tau} \right), \end{aligned}$$

получим $H_{\tau} = \frac{\omega_{\tau}}{2} (P_{\tau}^2 + Q_{\tau}^2)$.

с) Излучение системы конечных размеров

Пусть плотность зарядов и токов внутри области $|r'| < R$ задана соотношениями

$$\rho(r, t) = \sum_k \rho_k(r) e^{i\omega_k t}, \quad i(r, t) = \sum_k i_k(r) e^{i\omega_k t}.$$

Тогда в точке \mathbf{r} , для которой $|\mathbf{r}| \gg R$, будем иметь: $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - (\mathbf{n}\mathbf{r}')$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ и

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_k \frac{e^{i\omega_k(t - \frac{r}{c})}}{r} \int \rho_k(\mathbf{r}') e^{i\omega_k \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r}')}{c}} d\mathbf{v}' = \sum_k \Phi_k(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \frac{e^{i\omega_k(t - \frac{r}{c})}}{cr} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') e^{i\omega_k \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r}')}{c}} d\mathbf{v}' = \sum_k \mathfrak{A}_k(\mathbf{r}, t).$$

Не зависящие от времени и положения интегралы называются *формфакторами*. Они являются функциями направлений \mathbf{n} и частот ω_k .

Если, кроме того, $|\mathbf{r}| \gg \lambda_k = \frac{2\pi c}{\omega_k}$, то условие Лоренца принимает вид $\Phi_k = (\mathbf{n}\mathfrak{A}_k)$, и мы получаем:

$$\mathfrak{E} = \sum_k \frac{i\omega_k}{c} [\mathbf{n} [\mathbf{n}\mathfrak{A}_k]] = [\mathfrak{H}\mathbf{n}],$$

$$\mathfrak{H} = \sum_k \frac{i\omega_k}{c} [\mathfrak{A}_k\mathbf{n}] = [\mathbf{n}\mathfrak{E}],$$

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} (\mathfrak{E}^2) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} (\mathfrak{H}^2).$$

Если формфакторы разложить по степеням $\frac{\omega_k}{c}$, то первый член будет давать *электрическое дипольное излучение*, а дальнейшие члены — так называемые *мультипольные излучения* возрастающего порядка.

Второй член векторного формфактора $\frac{i\omega_k}{c} \int \mathbf{i}_k(\mathbf{n}\mathbf{r}') d\mathbf{v}'$ можно разложить на

$$\frac{i\omega_k}{2c} \int \{ \mathbf{i}_k(\mathbf{n}\mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{n}\mathbf{i}_k) \} d\mathbf{v}'$$

и

$$\frac{i\omega_k}{2c} \int \{ \mathbf{i}_k(\mathbf{n}\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{n}\mathbf{i}_k) \} d\mathbf{v}' = \frac{i\omega_k}{2c} [\mathbf{n} \int [\mathbf{i}_k\mathbf{r}'] d\mathbf{v}'].$$

Соответствующие им вклады в излучение называются соответственно *электрическим квадрупольным излучением* и *магнитным дипольным излучением*. Мультипольные излучения играют тем меньшую роль, чем меньше линейные размеры R системы по сравнению с длинами волн $\lambda_k = \frac{2\pi c}{\omega_k}$.

5. Основы оптики

а) Волновая оптика

Основная задача волновой оптики состоит в том, чтобы из периодических во времени частных решений уравнения Максвелла составить такие, которые удовлетворяли бы определенным краевым условиям и условиям перехода (задачи преломления, отражения и дифракции). Если решения записывать в форме

$$\mathcal{E} = a(x, y, z) e^{i\omega(t + S)},$$

то векторная функция точки $a(x, y, z)$ называется *амплитудой*, а функция

$$\varphi = \omega S(x, y, z)$$

— *фазой* волны. Поверхности постоянной фазы называются *волновыми поверхностями*. *Длиной волны* является

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\text{grad } \varphi|}.$$

б) Геометрическая оптика

Переходя к пределу при $\omega \rightarrow \infty$, т. е. при $\lambda \rightarrow 0$, получаем предельный случай *геометрической* оптики. Тогда будем иметь:

$$(\text{grad } S)^2 = p^2 \quad (\text{уравнение эйконала}).$$

Функция $S(x, y, z)$ называется *эйконалом*.

Уравнение эйконала позволяет определить волновые поверхности задачи. Мы имеем:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 (d\mathfrak{s} \text{ grad } S),$$

где $d\mathfrak{s}$ берется вдоль пути интегрирования. Если, в частности, путь интегрирования всюду пересекает волновые поверхности под прямым углом, то он называется *лучом*. В этом случае будем иметь:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 p ds,$$

т. е. «световой путь» $\int p ds$, измеряемый вдоль луча, тождествен с эйконалом. Лучи могут быть найдены как экстремали вариационного принципа Ферма:

$$\delta S = \delta \int_1^2 p ds = 0.$$

Уравнение Эйлера этой вариационной задачи может быть записано в векторной форме:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \left[\text{grad} \ln n, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] \right] \frac{\mathfrak{R}}{R^2}$$

(см. стр. 209). Из этих основных уравнений вытекают следующие три основных закона геометрической оптики: 1) в однородной среде лучи представляют собой прямые линии (пренебрежение дифракционными явлениями), 2) отдельные лучи независимы друг от друга (пренебрежение интерференционными явлениями), 3) каждый луч может пробегаться светом также и в противоположном направлении.

Вектор \mathfrak{f} , имеющий направление луча и длину p , называется *лучевым вектором*. Имеет место равенство

$$\mathfrak{f} = \text{grad } S.$$

Последнее уравнение выражает тот факт, что из поверхностных элементов, перпендикулярных к системе лучей, можно всегда образовать ортогональные поверхности (волновые поверхности), если это возможно в одном каком-либо месте (*теорема Малю*).

6. Волны в анизотропных средах (кристаллооптика)

Мы полагаем:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{U}\mathfrak{E} \quad \text{или, что то же,} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{D}, \quad \mu = 1.$$

Тензор \mathfrak{U} здесь предполагается симметрическим (\mathfrak{U}^{-1} — соответствующий обратный тензор), который занимает место скаляра ϵ .

Выражение для плоской волны в случае действительного p ($\sigma = 0$, $V = \frac{c}{p}$) берется в форме

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{V} \right)}$$

и т. д. После подстановки в волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2} = -\text{rot rot } \mathfrak{E} = \Delta \mathfrak{E} - \text{grad div } \mathfrak{E}$$

получаем:

$$\frac{V^2}{c^2} \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует $(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0$. Из первого уравнения Максвелла следует:

$$-\frac{V}{c} \mathfrak{D} = [\mathfrak{n}\mathfrak{H}] \quad \text{и} \quad \frac{V}{c} \mathfrak{H} = [\mathfrak{n}\mathfrak{E}]$$

и, таким образом,

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) = 0, \quad (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) = 0 \quad \text{и} \quad H^2 = (\mathfrak{E}\mathfrak{D}).$$

Поэтому \mathfrak{D} , \mathfrak{H} и \mathfrak{n} образуют систему ортогональных осей; \mathfrak{E} лежит в плоскости, натянутой на \mathfrak{D} и \mathfrak{n} . Так как \mathfrak{E} определяется через \mathfrak{D} , то определяются также \mathfrak{n} и \mathfrak{H} , и в силу этого из соотношения

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D^2}$$

определяется также и V .

Далее, имеем:

$$\frac{V^2}{c^2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - E^2 + (\mathfrak{n}\mathfrak{E})^2 = 0, \quad (\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = \sqrt{E^2 - D^2 \frac{V^4}{c^4}}$$

и, значит, согласно (2)

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{D} \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{E^2 - D^2 \frac{V^4}{c^4}}} = \frac{\mathfrak{E}D^2 - \mathfrak{D}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D\sqrt{E^2D^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2}} \quad \text{и} \quad V = \pm \frac{c}{D} \sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}.$$

Волновая нормаль и скорость поэтому полностью определяются направлением колебаний \mathfrak{D} .

Если \mathfrak{n} задано, то (2) представляет собой однородную систему линейных уравнений для трех компонент \mathfrak{D} . Она разрешима лишь в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов, обращается в нуль. Это дает уравнение третьей степени для V^2 (вековое уравнение), которое вследствие равенства нулю его постоянного члена приводится к уравнению второй степени¹⁾. Для данного \mathfrak{n} существуют, таким образом, две скорости V_1 и V_2 и два направления колебаний \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 . Так как для обоих \mathfrak{D} выполнено условие $(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0$, мы находим:

$$\frac{V_1^2}{c^2} (\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) - (\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_2) = 0 = \frac{V_2^2}{c^2} (\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1) - (\mathfrak{E}_2\mathfrak{D}_1).$$

¹⁾ Из (2) можно исключить \mathfrak{E} и \mathfrak{D} , применяя формулу

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - |\mathfrak{A}|(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \{ |\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}| - |\mathfrak{A}^{-1}| |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \}$$

и полагая $\mathfrak{a} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{X}$. Это дает:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = |\mathfrak{A}| \{ (\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{X}^{-1}| (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \}.$$

Если подставить сюда получаемые из (2) выражения $\mathfrak{D} = \frac{c^2}{V^2} (\mathfrak{E} - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}))$ и

$\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \frac{V^2}{c^2} + \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n})$, то будем иметь:

$$\frac{V^4}{c^4} + \frac{V^2}{c^2} \{ (\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{X}^{-1}| \} - \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{n}\mathfrak{n})}{|\mathfrak{A}|} = 0.$$

Из этого уравнения можно вычислить два значения V как функции от \mathfrak{n}

Так как, однако, $(\mathcal{E}_1 \mathcal{D}_2) = (\mathcal{E}_2 \mathcal{D}_1)$ (ввиду того, что $\mathcal{E}_1 \mathcal{A} \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2 \mathcal{A} \mathcal{E}_1$), то мы будем иметь $(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2) (V_1^2 - V_2^2) = 0$.

Двум различным V принадлежат, таким образом, два ортогональных \mathcal{D} ($\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$).

Вековое уравнение для V^2 в случае, когда система координат выбрана так, что \mathcal{A}_{ik}^{-1} при $i \neq k$ обращаются в нуль (преобразование к главным осям), приводит к уравнению Френеля; если положить

$\mathcal{A}_{ii}^{-1} = \frac{c^2}{a_i^2}$, то будет выполнено равенство $\sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2 - V^2} = 0$. При этом n_i представляют собой компоненты Π относительно главных осей (направляющие косинусы).

Откладывая V как радиус-вектор во всевозможных направлениях Π , мы получим некоторую поверхность — *поверхность нормалей*.

Вообще говоря, существуют два направления Π , для которых $V_1 = V_2$; они называются *оптическими осями*.

Геометрически уравнения (2) могут быть решены следующим образом.

Возьмем эллипсоид $(r \mathcal{A}^{-1} r) = 1$, пересечем его плоскостью $(\Pi r) = 0$ (проходящей через $r = 0$ перпендикулярно к Π) и будем искать направления и длины главных осей эллипса, получившегося в сечении. Для них будем иметь $\delta(r^2) = 0$. Мы получаем:

$$(r \delta r) = 0$$

с дополнительными условиями

$$(\mathcal{A}^{-1} r \delta r) = 0, \quad (\Pi \delta r) = 0,$$

следовательно,

$$\mathcal{A}^{-1} r + \sigma_1 r + \sigma_2 \Pi = 0.$$

Умножением на Π и r отсюда получим соответственно:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{r^2}, \quad \sigma_2 = -(\Pi \mathcal{A}^{-1} r),$$

следовательно,

$$\mathcal{A}^{-1} r - \frac{r}{r^2} - \Pi (\mathcal{A}^{-1} r \Pi) = 0.$$

Если в последнем уравнении r отождествить с $\frac{c}{V} \frac{\mathcal{D}}{|\mathcal{D}|}$, то оно перейдет в уравнение (2). В соответствии с этим длины главных полуосей получившегося в сечении эллипса равны $\frac{c}{V_1}$ и $\frac{c}{V_2}$, а их направления совпадают с направлениями \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 .

Перенос энергии происходит перпендикулярно к \mathcal{E} и \mathcal{H} в направлении \mathcal{S} .

Вектор \mathcal{S} мы берем единичным ($s^2 = 1$), $(\mathcal{E} \mathcal{S}) = 0$, $(\mathcal{H} \mathcal{S}) = 0$.

Вектор \mathcal{S} компланарен с \mathcal{D} , \mathcal{E} и Π .

Мы полагаем $\mathfrak{D} + \alpha \mathfrak{E} + \beta \mathfrak{F} = 0$. Умножение на \mathfrak{s} и \mathfrak{n} дает соответственно:

$$\beta = -(\mathfrak{D}\mathfrak{s}), \quad \alpha = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{s})(\mathfrak{n}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})}.$$

Из уравнения (2) следует

$$\frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})} = -(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) \frac{c^2}{V^2}.$$

Мы получаем, таким образом:

$$\frac{c^2}{V^2} (\mathfrak{n}\mathfrak{s})^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0.$$

Но $(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) = \cos \zeta$, где ζ — угол между \mathfrak{n} и \mathfrak{s} . Если мы назовем S скоростью волны в направлении \mathfrak{s} , то получим $\frac{V}{S} = \cos \zeta = (\mathfrak{n}\mathfrak{s})$. Следовательно, будет иметь место равенство

$$\frac{c^2}{S^2} \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0. \quad (3)$$

Это — уравнение того же типа, что и исходное уравнение (2).

Геометрическое решение в данном случае может быть проведено, если применить эллипсоид $(r\mathfrak{A}r) = 1$ и поверхность $(r\mathfrak{s}) = 0$. Полуоси получающегося в сечении эллипса будут тогда равны $r_1 = \frac{S_1}{c}$, $r_2 = \frac{S_2}{c}$, а направления их — те же, что и \mathfrak{E}_1 и \mathfrak{E}_2 .

Поверхность с радиусом-вектором S в направлении \mathfrak{s} называется *лучевой поверхностью*.

Полагая $\mathfrak{E} = S\mathfrak{s}$, из (3) найдем:

$$c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{s} (\mathfrak{D} S) = 0.$$

Ввиду того, что $(\mathfrak{D} \delta \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E} \delta \mathfrak{D})$, мы, умножая на \mathfrak{D} и варьируя, получаем:

$$2\delta \mathfrak{D} (c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{s} (\mathfrak{D} S)) - 2\delta \mathfrak{E} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D} (\mathfrak{D} \mathfrak{E})) = 0.$$

Множитель при $\delta \mathfrak{D}$ равен нулю, множитель при $\delta \mathfrak{E}$ представляет собой вектор, параллельный \mathfrak{n} .

Таким образом, имеет место равенство $(\mathfrak{n} \delta \mathfrak{E}) = 0$, т. е. вектор \mathfrak{n} направлен по перпендикуляру к плоскости, касающейся лучевой поверхности в точке $r = \mathfrak{E}$. Это означает, что перпендикулярная к вектору \mathfrak{n} плоская волновая поверхность, проходящая в момент $t = 0$ через нулевую точку, в момент $t = 1$ касается лучевой поверхности. Последняя служит огибающей всех таких волновых поверхностей при $t = 1$.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Пространственно-временная система отсчета

Все происходящее можно рассматривать как дискретное или плотное множество событий. Каждое событие происходит в определенном месте в определенное время.

Место по отношению к некоторой материальной системе отсчета определяется координатами, измеряемыми при помощи материальных масштабов. При этом предполагается, что масштабы при произвольном перемещении (сдвиге или вращении) остаются неизменными. В качестве системы отсчета мы выбираем вначале произвольную инерциальную систему.

Временной параметр для каждого события измеряется при помощи материальных часов, покоящихся в той же точке системы отсчета, в которой происходит событие. Чтобы прийти к единому понятию времени, необходимо синхронизировать все применяемые часы. Мы требуем в связи с этим, чтобы часы, расположенные в некоторой системе отсчета на покоящейся сферической поверхности, показывали одно и то же время в тот момент, когда их достигает световой сигнал, исходящий из центра сферы. (Здесь, кроме того, молчаливо предполагается, что покоящиеся друг относительно друга одинаковые часы при всех обстоятельствах имеют один и тот же ход, не зависящий от их расположения в пространстве. Что это справедливо для так называемых световых часов, доказывает опыт Майкельсона.) При таком определении одновременности распространение света происходит по определению изотропно с постоянной скоростью c .

Если перейти к другой инерциальной системе в качестве системы отсчета, то мы получим не только другие координаты, но и другое время для каждого события. Переход для описания одних и тех же событий в различных системах отсчета, т. е. вычисление координат и временного параметра для системы отсчета K' при условии, что

эти величины известны для некоторой другой системы отсчета K , дается некоторым преобразованием.

Это преобразование может быть построено из тривиальных преобразований параллельного переноса и вращения и так называемого преобразования Лоренца, которое, объединяя координаты в радиус-вектор \mathbf{r} , можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - v \left\{ \frac{(\mathbf{r}v)}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\},$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\mathbf{r}v)}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c}.$$

Здесь v означает скорость поступательного движения системы K' относительно системы K .

Если пользоваться декартовыми координатами x, y, z и расположить ось x в направлении v , то получится простая форма (специальное преобразование Лоренца):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

При этих преобразованиях величина $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$ остается для двух событий инвариантной.

Специальная теория относительности утверждает, что приведенное выше определение времени является рациональным, ибо в конструируемых таким путем различных пространственно-временных системах отсчета все основные законы физики имеют одну и ту же форму. Это справедливо непосредственно для электродинамики в вакууме, в других же случаях — только после внесения известных поправок в обычные формулировки этих законов. В силу этого определения все такие системы отсчета становятся равноценными, и ни одну из них нельзя выделить как покоящуюся, в которой законы природы принимали бы особенно простую форму.

2. Четырехмерное пространство

Для изложения теории относительности в подходящей математической форме удобно пользоваться четырехмерным пространством с аффинной системой координат x^1, x^2, x^3, x^4 . Систему значений $\{x\}$ можно рассматривать как контравариантные компоненты четырехмерного радиуса-вектора некоторой *мировой точки*. При этом употребительны два способа описания:

- а) величины x^i отождествляются с x, y, z, ct : $x^i = \{\mathbf{r}, ct\}$;
- б) величины x^i отождествляются с $x, y, z, l = ict$: $x^i = \{\mathbf{r}, ict\}$.

При способе описания б) каждому событию соответствует мнимая мировая точка. Хотя это описание обладает преимуществом большей математической симметрии, мы в дальнейшем всюду, кроме 9, будем применять действительное описание а). При переходе к описанию б) во всех формулах каждую векторную компоненту с верхним индексом 4 следует дополнить множителем $-i$, а каждую компоненту с нижним индексом 4 — множителем $+i$, например $ct = -ix^4$.

Пространственно-временные процессы могут быть в этом четырехмерном пространстве описаны геометрически. В частности, в нем зависимость положения точки γ в пространстве от времени t представляется при помощи *мировой линии*. В смысле точечной теории множество процессов отображается на множество мировых линий.

Переход к другой системе отсчета означает тогда преобразование к некоторым другим осям. При таких преобразованиях линейный элемент $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$ остается инвариантным, если в качестве матрицы (g_{ik}) выбирается диагональная матрица с элементами $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1; g_{44} = -1$.

В этом пространстве можно также ввести четырехмерные векторы и тензоры, компонентам которых относительно выбранных осей соответствуют физически измеримые величины. Так как употребляемые системы координат не всегда являются ортогональными, необходимо различать контравариантные и ковариантные компоненты. При этом, однако, имеет место простое правило, согласно которому четвертая компонента меняет только свой знак при опускании или поднятии индекса 4.

3. Специальное преобразование Лоренца векторов и тензоров

Контравариантные компоненты четырехмерных векторов a^i преобразуются, как x^i , т. е.

$$a'^1 = \frac{a^1 - \beta a^4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a'^2 = a^2, \quad a'^3 = a^3, \quad a'^4 = \frac{-\beta a^1 + a^4}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Контравариантные компоненты антисимметрического тензора $F^{ik} = -F^{ki}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} F'^{14} &= F^{14}, & F'^{24} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (F^{24} + \beta F^{12}), & F'^{34} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (F^{34} - \beta F^{31}), \\ F'^{23} &= F^{23}, & F'^{31} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (F^{31} - \beta F^{34}), & F'^{12} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (F^{12} + \beta F^{24}). \end{aligned}$$

Контравариантные компоненты симметрического тензора $T^{ik} = T^{ki}$ пре-

образуются следующим образом:

$$\begin{aligned} T'^{11} &= \frac{1}{1-\beta^2} (T^{11} - 2\beta T^{14} + \beta^2 T^{44}), & T'^{22} &= T^{22}, & T'^{33} &= T^{33}, \\ T'^{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (T^{12} - \beta T^{24}), & T'^{23} &= T^{23}, & T'^{31} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (T^{31} - \beta T^{34}), \\ T'^{14} &= \frac{T^{14}(1+\beta^2) - \beta(T^{11} + T^{44})}{1-\beta^2}, & T'^{24} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (T^{24} - \beta T^{12}), \\ T'^{34} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (T^{34} - \beta T^{13}), & T'^{44} &= \frac{1}{1-\beta^2} (T^{44} - 2\beta T^{14} + \beta^2 T^{11}). \end{aligned}$$

Все эти преобразования могут быть обращены, для чего следует заменить β на $-\beta$ и штрихованные величины поменять местами с нештрихованными. Инвариантами являются:

$$\begin{aligned} a_i a^i &= (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 - (a^4)^2, \\ \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} &= (F^{12})^2 + (F^{23})^2 + (F^{31})^2 - (F^{14})^2 - (F^{24})^2 - (F^{34})^2, \\ T_i^i &= T^{11} + T^{22} + T^{33} - T^{44}, \\ T^{ik} T_{ik} &= (T^{11})^2 + (T^{22})^2 + (T^{33})^2 + (T^{44})^2 + 2(T^{13})^2 + \\ &+ 2(T^{23})^2 + 2(T^{31})^2 - 2(T^{14})^2 - 2(T^{24})^2 - 2(T^{34})^2. \end{aligned}$$

4. Кинематика

Точечный кинематический процесс описывается мировыми линиями вида

$$x^i = x^i(\lambda),$$

где λ служит параметром кривой. В качестве λ удобно брать длину дуги s , определяемую линейным элементом ds . В этой связи величина $\frac{ds}{ic}$ называется дифференциалом *собственного времени* точки.

Если точка в выбранной системе отсчета имеет скорость u , то получим $ds = \sqrt{dr^2 - c^2 dt^2} = ic dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

Образуя единичный вектор в направлении касательной к мировой линии с компонентами $\frac{dx^i}{ds}$ и с его помощью — вектор $u^i = ic \frac{dx^i}{ds}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & u^2 &= \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ u^3 &= \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & u^4 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

что можно записать в форме

$$u^i = \left\{ \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right\}$$

как *четырёхмерную скорость*.

Преобразование $u^i \rightarrow u'^i$ может быть в векторной форме представлено следующим образом:

$$u'^i = \frac{u \sqrt{1 - \beta^2} - v \left\{ \frac{(uv)}{v^2} (\sqrt{1 - \beta^2} - 1) + 1 \right\}}{1 - \frac{(uv)}{c^2}}.$$

Это показывает, что скорость u относительно системы K преобразуется в другую скорость u' относительно системы K' .

Если $u \parallel v$, то

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{(uv)}{c^2}} \quad (\text{теорема сложения скоростей});$$

если $u \perp v$, то $u' = u \sqrt{1 - \beta^2} - v$. Для весьма малых v (т. е. при $\beta^2 \ll 1$) будем иметь $u' \cong u - v$. Для $|u| = c$ будет $|u'| = |u|$, т. е. точка, движущаяся относительно системы K со скоростью света, движется со скоростью света также относительно каждой системы K' , но в ином направлении. Если $u = v$, то получим $u' = 0$ (преобразование к покою).

Две точки, покоящиеся относительно системы K в положениях r_1 и r_2 на расстоянии $a = r_1 - r_2$, мировые линии которых представляют собой, следовательно, прямые, параллельные t -оси, представляются в системе K' находящимися на расстоянии $a' = a - \frac{v(uv)}{v^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$ и движущимися со скоростью $-v$. Если $a \parallel v$, то $a' = a \sqrt{1 - \beta^2}$; если $a \perp v$, то $a' = a$ (*лоренцово сокращение*).

Два события, которые в системе K наблюдаются как происходящие в одном и том же месте и отделенные друг от друга промежутком времени $\Delta t = t_1 - t_2$, представляются в системе K' разделенными промежутком времени $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ и находящимися на пространственном расстоянии $a = -\frac{v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (*растяжение времени*).

5. Электродинамика

Чтобы употребляемые в электродинамике векторы и скаляры представить в четырёхмерном пространстве, мы введем в нем векторы и тензоры, компоненты которых будут отождествляться частично с трёхмерными векторами, частично со скалярами.

В частности, мы применяем следующие сопоставления векторов:

$$s^i = \{i, c\rho\}, \quad i \text{ — плотность тока,} \quad \rho \text{ — плотность заряда,}$$

$$\varphi^i = \{\mathfrak{A}, \Phi\}, \quad \mathfrak{A} \text{ — векторный потенциал,} \quad \Phi \text{ — скалярный потенциал,}$$

$$k^i = \left\{ \mathfrak{f}, \frac{\lambda}{c} \right\}, \quad \mathfrak{f} \text{ — плотность силы,} \quad \lambda \text{ — плотность мощности}$$

(Leistungsdichte),

а также антисимметрических тензоров:

$$F^{ik}: \{F^{14}, F^{24}, F^{34}\} = -\mathfrak{E} \text{ и } \{F^{23}, F^{31}, F^{12}\} = \mathfrak{B},$$

$$H^{ik}: \{H^{14}, H^{24}, H^{34}\} = -\mathfrak{D} \text{ и } \{H^{23}, H^{31}, H^{12}\} = \mathfrak{H}.$$

С помощью этих величин основные уравнения электродинамики записываются в следующей форме [знак суммирования опущен (см. стр. 254)]:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{div} i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} = F_{ik}, \quad \text{т. е. } \mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi s^i}{c}, \quad \text{т. е. } \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho,$$

$$k^i = \frac{F^{ik} s_k}{c}, \quad \text{т. е. } \mathfrak{f} = \rho \mathfrak{E} + \left[i, \frac{\mathfrak{B}}{c} \right], \quad \lambda = (i \mathfrak{E}).$$

При переходе к другой системе отсчета эти уравнения и их трехмерные аналоги сохраняют свою форму, т. е. законы электродинамики имеют одно и то же выражение во всех системах отсчета, которые могут быть построены в соответствии с нашим правилом.

Как четырехмерное обобщение максвеллова тензора натяжений можно образовать симметрический тензор электромагнитной энергии-импульса, который в случае электродинамики в вакууме может быть определен соотношениями

$$S_i^k = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{il} F^{lk} - \frac{1}{4} g_i^k F_{rl} F^{lr} \right\}; \quad S_i^i = 0;$$

для него имеем: $k_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$, т. е.

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} - [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + \frac{1}{c} \left[\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] \right\} =$$

$$= \bar{\rho} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [i \mathfrak{B}],$$

$$\lambda = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{B}] - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2 \}.$$

Для пространства, заполненного веществом, построение соответствующего симметрического тензора представляет трудности.

6. Электродинамика движущихся сред

Материальная система $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, $i = \sigma \mathfrak{E}$ справедлива в системе отсчета, относительно которой поляризуемая и проводящая среда покоится, но не в системе отсчета, относительно которой среда движется. Таким образом, формулировка этих уравнений такова, что они не могут сохранять свой вид во всех системах отсчета. Согласно теории относительности, однако, должны существовать инвариантные формы. Такими формами служат:

$$H^{ik} u_k = \varepsilon F^{ik} u_k,$$

$$\text{т. е. } \mathfrak{D} + \frac{1}{c} [u \mathfrak{H}] = \varepsilon \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [u \mathfrak{B}] \right\},$$

$$F^{ik} u^i + F^{kl} u^l + F^{li} u^k = \mu \{ H^{ik} u^i + H^{kl} u^l + H^{li} u^k \},$$

$$\text{т. е. } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} [u \mathfrak{E}] = \mu \left\{ \mathfrak{H} - \frac{1}{c} [u \mathfrak{D}] \right\}.$$

В этих уравнениях u означает скорость среды, несущей поляризацию, u^i — ее четырехмерную скорость. Эти теоретические соотношения были подтверждены экспериментально.

Третье материальное уравнение мы запишем в форме

$$s^i + \frac{1}{c^2} u^i (s^k u_k) = \frac{\sigma}{c} F^{ik} u_k,$$

$$\text{т. е. ток } i = \rho u + \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [u \mathfrak{B}] - \frac{u (\mathfrak{E} u)}{c^2} \right\}$$

представляется как сумма конвекционного тока и тока проводимости.

При $\sigma = 0$ будем иметь $i = i_K = \rho u$. Тогда $\rho^2 c^2 - i^2 = \rho^2 c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$ является величиной, инвариантной относительно преобразований Лоренца. Величина $\rho \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \rho_0$ называется *плотностью заряда в системе отсчета, относительно которой он покоится*.

7. Основные уравнения механики континуума

Релятивистски-инвариантная форма, совпадающая с обычной формой для скоростей $u \ll c$, такова:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\mu_0 u^i) = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{div} \frac{\mu_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 0.$$

Это уравнение является обычным уравнением непрерывности, если в качестве плотности массы взять величину $\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$. Инва-

риантная величина μ называется *плотностью массы в системе отсчета, относительно которой она покоится*. Величины $\mu_0 u^i = \{\mu, c\mu\}$ образуют четырехмерный вектор.

В том же смысле справедливо следующее уравнение движения:

$$ic\mu_0 \frac{du^i}{ds} = k^i, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\mu_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{u^i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \mathfrak{f}.$$

Ввиду $u_i u^i = -c^2$ будем иметь:

$$u_i k^i = 0, \quad \text{т. е.} \quad (u\mathfrak{f}) = \lambda.$$

Так как $\frac{d}{ds} = \frac{1}{ic} u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, мы можем также написать

$$\mu_0 u^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \mu_0 u^i u^i = k^i.$$

Тензор $\mu_0 u^i u^i = K^{ii}$ называется *тензором кинетической энергии-импульса*.

Если плотность силы \mathfrak{f} получена из тензора напряжений \mathfrak{F} , то будут иметь место соотношения

$$k^i = - \frac{\partial P^{ii}}{\partial x^i}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{f} = - \text{div } \mathfrak{F}.$$

Тензор P^{ii} называется *тензором потенциальной энергии-импульса*.

Имеющее тогда место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \{ K^{ii} + P^{ii} \} = 0$$

выражает одновременно законы сохранения для импульса и энергии.

Компоненты полного тензора $K^{ik} + P^{ik} = T^{ik}$ означают:

- T^{ik} при $i, k = 1, 2, 3$ — пространственный тензор напряжений \mathfrak{T} ,
- $\frac{1}{c} T^{i4}$ при $i = 1, 2, 3$ — плотность импульса,
- $c T^{4i}$ при $i = 1, 2, 3$ — плотность потока энергии,
- T^{44} — плотность энергии.

8. Механика точки

Переход от континуальной теории к точечной теории совершается при помощи интегрирования по пространству. При этом следует учитывать, что трехмерный элемент объема $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ ввиду лоренцова сокращения не является инвариантным; инвариантной величиной будет $dV_0 = \frac{dV}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, которая дает элемент объема в той

системе отсчета, в которой он представляется покоящимся (*объем*

покоя). С его помощью можно образовать инвариантные величины: $m_0 = \mu dV = \mu_0 dV_0$ — массу покоя, заключенную в элементе объема, и $e = \rho V = \rho_0 V_0$ — его инвариантный электрический заряд.

Если, далее, ввести вектор силы

$$\mathfrak{K} = \int dV \quad \text{или} \quad K^i = k^i dV_0 = \left\{ \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{(\mathfrak{K}, \mathbf{u})}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right\},$$

а также вектор импульса

$$\mathfrak{p} = \mu \mathbf{u} dV_0 = m_0 \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{т. е.} \quad p^i = m_0 u^i = \left\{ \mathfrak{p}, \frac{E}{c} \right\},$$

то мы получим инвариантное уравнение движения в виде

$$i m_0 c \frac{du^i}{ds} = i c \frac{dp^i}{ds} = K^i, \quad \text{т. е.} \quad m_0 \frac{d}{dt} \frac{u^i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{d\mathfrak{p}^i}{dt} = \mathfrak{K}^i$$

и

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{(\mathfrak{K}, \mathbf{u})}{c}.$$

Последнее уравнение показывает, что E означает энергию $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Мы имеем:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2,$$

а также, разлагая в ряд:

$$E = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \dots$$

Величина $m_0 c^2$ называется энергией покоя массы m_0 . Второй член разложения представляет собой классическую кинетическую энергию.

Лоренцова сила, действующая на точечный заряд, в инвариантной форме записывается следующим образом:

$$K^i = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{K} = e \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathfrak{B}] \right\}; \quad (\mathfrak{K}, \mathbf{u}) = e (\mathfrak{E}, \mathbf{u}).$$

Релятивистская динамика, точно так же как и классическая, может быть основана и на принципах, отличных от основного уравнения Ньютона

$$\frac{dp_i}{dt} = K_i.$$

Принцип Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

сохраняется в неизменной форме, если в качестве *функции Лагранжа* ввести

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - W.$$

Если W постоянно, то этот принцип приводит к равенству $\delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = 0$ (τ — собственное время материальной точки).

Канонические уравнения сохраняют свою форму, если в качестве *функции Гамильтона* воспользоваться функцией

$$H = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) + W,$$

или, при введении импульсов вместо скоростей, — функцией

$$H(p_i, x^i) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2 + W(x^i).$$

9. Общая теория поля

Релятивистски-инвариантные уравнения поля, имеющие более общий вид, можно построить, исходя из какой-либо инвариантной функции Лагранжа $L(\phi_\mu, \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^k})$, которая является функцией *полевых величин* ϕ_μ и их первых производных $\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^k}$, но не зависит явным образом от x^k , и составляя уравнение Эйлера вариационной задачи

$$\delta \int L dw = 0 \quad (dw = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = dx dy dz dict).$$

Интеграл при этом предполагается распространенным на произвольный четырехмерный объем, на поверхности которого вариации $\delta \phi_\mu$ должны обращаться в нуль.

Мы получаем уравнения поля

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^k} \right)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

ϕ_μ могут быть величинами, преобразующимися как скаляры или же как векторные или тензорные компоненты.

Образуя «канонический» тензор

$$\theta_k^i = -\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^i} \right)} + \delta_{ki} L,$$

будем иметь:

$$\frac{\partial \theta_k^i}{\partial x^i} = 0.$$

Это соотношение можно интерпретировать как выражение закона сохранения импульса и энергии, если $-\frac{i}{c} \theta_4^i$ и $-\theta_4^i$ рассматривать как пространственную плотность соответственно импульса и энергии.

Чтобы получить симметрический тензор энергии-импульса, необходимо симметризовать θ при помощи дополнительных членов. Это может быть достигнуто следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{kl} = \theta^{kl} - \frac{1}{2} t_{kl, \mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\psi_\mu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^r} \right)} \right) + \frac{1}{2} t_{rl, \mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\psi_\nu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \right)} \right) + \\ + \frac{1}{2} t_{rk, \mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\psi_\nu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^l} \right)} \right) = T^{lk}. \end{aligned}$$

Вместе с тем получаем также:

$$\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} = 0 = \frac{\partial T^{lk}}{\partial x^l}.$$

Все $t_{kl, \mu\nu}$ будут равны нулю, если полевые величины представляют собой скаляры. Они будут равны $\delta_{k\mu} \delta_{l\nu} - \delta_{k\nu} \delta_{l\mu}$ для векторов (см. стр. 260).

Если образовать величины $M^{klr} = T^{kl} x^r - T^{kr} x^l$, то будем иметь $\frac{\partial M^{klr}}{\partial x^k} = 0$. M^{klr} может быть интерпретирована как плотность момента

количества движения. Ее пространственный интеграл $\frac{1}{ic} \int dt M^{klr}$ представляет собой полный момент количества движения.

Если ψ_μ являются комплексными величинами и функция L инвариантна относительно преобразований $\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu e^{i\alpha}$, $\psi_\mu^* \rightarrow \psi_\mu^* e^{-i\alpha}$, то для вектора

$$s^k = i \left(\psi_\mu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \right)} - \psi_\mu^* \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu^*}{\partial x^k} \right)} \right)$$

будем иметь $\frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0$. Величины s^k могут быть использованы для представления четырехмерного вектора плотности тока.

Теорию можно привести к канонической форме, вводя *импульсы*

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\mu} = \frac{1}{ic} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \right)}$$

и образуя функцию Гамильтона

$$H \left(\pi_\mu, \psi_\mu, \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \right) = \pi_\mu \dot{\psi}_\mu - L = -\theta_4^2 \quad (k=1, 2, 3)$$

(причем $\dot{\psi}_\mu$ следует выразить через π_μ).

$$\int dt H = \bar{H} \text{ есть энергия.}$$

Тогда справедливы канонические уравнения:

$$\dot{\psi}_\mu = \frac{\partial H}{\partial \pi_\mu}; \quad \dot{\pi}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial \psi_\mu} + \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^k} \right)}.$$

10. Практическое применение теории относительности

Релятивистски-инвариантные формулировки в тех случаях, когда они не совпадают с обычными формулировками, до сих пор всегда подтверждались экспериментально. Поэтому требование релятивистской инвариантности имеет большую эвристическую ценность для установления или уточнения эмпирических законов.

Наряду с этим теория относительности имеет непосредственное практическое значение для решения некоторых специальных задач. Если мы имеем какие-либо решения, основанные на инвариантно сформулированных законах, справедливые в системе K , то они останутся решениями, если все величины — координаты и компоненты векторов и тензоров — заменить соответствующими штрихованными величинами, т. е. если решения рассматривать как сформулированные в системе K' . Если теперь произвести преобразование K' в K , то получим в системе K новые решения. В этом смысле можно преобразование Лоренца рассматривать как правило, которое позволяет, основываясь на одном каком-либо процессе, допускаемом законами природы, делать заключения о другом таком процессе, так как безразлично, является первый процесс математическим следствием законов природы, или же наши знания о нем основаны на непосредственных наблюдениях.

В качестве важных примеров применения этого метода мы укажем следующие:

1) Известны формулы $\mathcal{E} = \frac{e\tau}{r^2}$ и $\mathcal{H} = 0$ для поля точечного заряда e , покоящегося в системе K .

Тогда будут справедливы также формулы $\mathcal{E}' = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3}$ и $\mathcal{H}' = 0$ в системе K' . Это дает:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = e \frac{x - \beta ct}{r'^3 \sqrt{1 - \beta^2}}, & H'_x &= H_x = 0, \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (E_y - \beta H_z) = \frac{ey}{r'^3}, & H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (H_y + \beta E_z) = 0, \\ E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (E_z + \beta H_y) = \frac{ez}{r'^3}, & H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (H_z - \beta E_y) = 0, \end{aligned}$$

где

$$r' = \left(\frac{(x - \beta ct)^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 \right)^{1/2}.$$

Решая эти уравнения относительно \mathcal{E} и \mathcal{H} , получим поле заряда e , движущегося в системе K со скоростью $u = \beta c$ в направлении оси x . (При $t = 0$ эти формулы переходят в формулы стр. 463.)

2) Плоская элементарная волна в среде, покоящейся в системе K , имеет фазовый множитель $e^{i(\omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}))} = e^{-i(\omega' t' - (\mathbf{k}'\mathbf{r}'))}$, где $\omega' = \left\{ \mathbf{k}, \frac{\omega}{c} \right\}$, \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота. То же явление в среде, покоящейся в системе K' , имеет тогда фазу $\omega' t' - (\mathbf{k}'\mathbf{r}')$. Преобразование дает:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \mathbf{k} - v \left\{ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) + \frac{\omega}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \right\}, \\ \omega' &= \frac{\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Эти формулы описывают изменения в волновых процессах, возникающие благодаря движению источника излучения или движению среды, т. е. *абберацию* и *эффект Доплера*.

Если $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$, то имеем:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{v\omega}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{поперечный эффект Доплера}).$$

Вводя фазовую скорость $V = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$, соответственно $\mathbf{k} = \frac{\omega}{V} \mathbf{n}$, получаем:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \frac{vV}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{абберация}).$$

Если $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$, то

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k} - v \frac{\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{V} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{продольный эффект Доплера}),$$

и

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

В случае световой волны полагаем $V = \frac{c}{n}$ (n — показатель преломления) и получаем:

$$V = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \dots$$

Величина $\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ называется *коэффициентом увлечения*.

11. Релятивистские инварианты

Наряду с приведенными выше инвариантами, которые в соответствии с правилами преобразований могут быть образованы из компонент векторов и тензоров, мы имеем также следующие инварианты:

- 1) электрический заряд e ;
- 2) объем покоя $V_0 = \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}$;
- 3) массу покоя $m_0 = m \sqrt{1-\beta^2}$.

Для применений к другим областям физики мы сохраняем следующие инвариантные величины:

- 1) скалярное гидродинамическое давление $p = p_0$;
- 2) энтропию $S = S_0$;
- 3) температуру покоя $T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$;
- 4) количество теплоты $Q_0 = \frac{Q}{\sqrt{1-\beta^2}}$;
- 5) интеграл действия $\int L dt$;
- 6) квант действия h ;
- 7) постоянную Больцмана k ;
- 8) отношение энергии к частоте, $\frac{E}{\nu}$, для пространственно ограниченного цуга волн, движущегося со скоростью c .

В. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Основные положения

Специальная теория относительности выдвигает требование, чтобы все законы природы записывались в форме соотношений между скалярами, векторами и тензорами четырехмерного *евклидова* многообразия, линейный элемент которого, следовательно, всегда может быть приведен к виду

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2.$$

Основные законы физики являются тогда ковариантными по отношению ко всем преобразованиям Лоренца.

Если мы будем исходить из *неевклидова* многообразия, то в качестве основной придется взять общую форму линейного элемента:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Тензорные уравнения принимают тогда форму, которая является ковариантной относительно *произвольных преобразований* координат x^i . В этих уравнениях теперь содержатся также компоненты g_{ik} *метрического фундаментального тензора*, которые представляют собой функции положения. В противоположность специальной теории относительности общая теория относительности рассматривает зависимость фундаментального тензора от положения как существенную часть определения физического поля. В каждой точке линейный элемент может быть еще приведен к указанной выше форме (см. стр. 259), но в *конечных* областях это оказывается уже невозможным.

2. Гравитационное поле

Отклонение мировой метрики от евклидовой согласно теории Эйнштейна проявляется в *гравитационных явлениях*. Движение материальной точки в гравитационном поле представляет собой движение, *свободное от воздействия сил*:

$$K^i = m_0 \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{rs}^i \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} \right) = 0,$$

т. е. вследствие закона инерции мировая линия свободной материальной точки представляет собой *геодезическую линию*. Содержащиеся здесь дополнительные члены интерпретируются как «*фиктивные силы*» по аналогии с центробежной и кориолисовой силами, которые точно таким же образом появляются благодаря тому, что во вращающейся системе отсчета даже в случае евклидовой метрики не все Γ_{rs}^i исчезают. Характерным свойством всех фиктивных сил является то, что они *пропорциональны инертной массе*. Доказанная экспериментально с большой точностью *пропорциональность инертной и гравитирующей масс* показывает, что эта своеобразная особенность присуща также и ньютоновой силе тяготения.

3. Гравитация и материя

Наиболее простая дифференциально-геометрическая характеристика линейного элемента может быть получена при помощи свернутого риманова тензора кривизны (см. стр. 258). В евклидовом многообразии он исчезает тождественно. Согласно теории Эйнштейна R_{ik} исчезает лишь там, где отсутствует материя, в то время как вообще этот тензор определяется общим тензором энергии-импульса материи. Характер зависимости устанавливается законами сохранения импульса

и энергии. Динамика в качестве высшего основного закона выдвигает требование, состоящее в том, чтобы *дивергенция «мирового тензора T^{ik} материи»* (сумма механической и электромагнитной частей) *была равна нулю* (см. стр. 483):

$$\frac{\partial T_i^s}{\partial x^s} + \Gamma_{rs}^r T_i^s - \Gamma_{is}^r T_r^s = 0.$$

Из тензора кривизны можно также образовать тензор, дивергенция которого тождественно равна нулю, именно, тензор

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik},$$

где λ — произвольная постоянная (*космологическая постоянная*).

Теория Эйнштейна теперь полагает:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (\text{уравнения поля}), \quad (1)$$

где κ также представляет собой универсальную постоянную. Закон сохранения энергии-импульса является тогда необходимым следствием этих уравнений поля.

Сравнение с опытом показывает, что λ есть весьма малая величина (во всяком случае, не превосходящая 10^{-53} см^{-2}), и что поэтому для многих задач может быть принято $\lambda = 0$. Далее, в качестве первого приближения получается теория тяготения Ньютона, если принять

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ см}^{-1} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^2,$$

где $G = (6,670 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Между десятью дифференциальными уравнениями (1) в силу их тензорного характера имеются четыре соотношения; они недостаточны поэтому для определения десяти величин g_{ik} , но оставляют как раз достаточную свободу для того, чтобы можно было от координатной системы x^i перейти к другой системе $x'^i = f_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ (Гильберт).

Частными следствиями общей теории относительности, доступными экспериментальной проверке, являются три *эффекта Эйнштейна*:

- 1) вращение перигелия в задаче двух тел;
- 2) отклонение света в поле тяготения;
- 3) красное смещение спектральных линий в случае, когда источник света расположен в области с высоким гравитационным потенциалом.

Проведенные до настоящего времени экспериментальные исследования не являются еще достаточными для того, чтобы теорию можно было считать окончательно подтвержденной.

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Классическая механика и электродинамика имеют ограниченную применимость. Рассмотрение элементарных процессов в отдельном атоме или молекуле показывает, что, во всяком случае, построение наглядных моделей и их истолкование в соответствии с законами классической физики приводит здесь к противоречию с опытом.

А. СТАРАЯ ТЕОРИЯ

1. Механика

Основные законы механики остаются неизменными. Однако среди всех движений системы, рассматриваемых механикой как возможные, в действительности осуществляется лишь ограниченное число их (*квантовые состояния*). Кроме того, должны иметь место происходящие частью под воздействием внешних импульсов, частью же спонтанно, необъясняемые механикой «немеханические» процессы, переводящие систему из одного квантового состояния в другое (*квантовые переходы*). Время, в течение которого происходит переход, должно считаться исчезающе малым. Способ перехода не поддается никакому наглядному описанию.

Если рассматриваемая система подвергается воздействию консервативных внешних сил, которые изменяются медленно, то форма движения также изменяется медленно. *Адиабатическая гипотеза* (Эренфест) утверждает, что при этом квантовые состояния как таковые сохраняются. Изменение называется «медленным» при условии, что оно происходит за время, настолько большое, что в течение этого времени система пробегает все возможные фазы своего движения или, по крайней мере, подходит к ним очень близко.

Это можно легко разъяснить в случае чисто периодического движения. Здесь изменение внешних сил должно происходить за время, которое велико по сравнению с периодом движения. В случае же, когда движение не является периодическим, фазовая точка системы пробегает некоторую определенную область фазового пространства и с течением времени подходит к каждой точке этой области сколь

угодно близко. Таким образом, здесь вместо периода следует взять время, в течение которого фазовая точка зачертит всю область, т. е. подойдет близко к каждой точке области.

Этот принцип позволяет, исходя из орбиты, лежащей целиком в конечной области и называемой *квантовой орбитой*, вычислить новую при помощи варьирования (или введения) внешних сил. Этот принцип, однако, уже неприменим, если за время изменения внешних сил зачерчиваемая область фазового пространства вырождается в область меньшего числа измерений (*вырожденные орбиты*).

Одной из форм, в которых квантовая механика может быть сформулирована математически, является следующая.

Будем исходить из функции Гамильтона $H(p, q)$ (см. стр. 418) данной задачи и введем при помощи канонического преобразования (см. стр. 195) линейно зависящую от времени угловую переменную $w_k = \omega_k t + \delta_k$ с независимыми от времени канонически сопряженными импульсами (переменные действия) J_k . Теория требует тогда, чтобы выполнялось соотношение

$$J_k = \frac{n_k h}{2\pi},$$

где n_k — целые числа («квантовые числа») и $h = 6,623 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек (*квант действия Планка*). Таким образом, в то время как классическая механика требует лишь, чтобы J_k были постоянными, квантовая теория допускает для этих постоянных лишь дискретное множество значений.

Например, для одного линейного гармонического осциллятора (см. Приложение 4, стр. 573) будем иметь:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Отсюда следует:

$$J = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega q^2}{2} = \frac{E}{\omega},$$

$$w = \text{arctg} \left(\frac{p}{m\omega q} t + \delta \right).$$

Квантовая теория требует, чтобы имело место равенство

$$\frac{E}{\omega} = \frac{nh}{2\pi}, \quad \text{или} \quad E = nh\nu.$$

Другой формулировкой является следующая. Будем исходить из дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби и, производя произвольное преобразование, будем искать такие переменные, чтобы уравнение могло быть решено при помощи «разделения переменных», т. е. чтобы решение имело вид

$$S = \sum S_k(q_k, \alpha_1, \dots),$$

где α_j вначале представляют собой произвольные постоянные интегрирования и

$$S_k = \int p_k(q_k, \alpha_1, \dots) dq_k.$$

Распространяя это интегрирование на всю область изменения q_k , мы получим:

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k = \frac{n_k h}{2\pi}.$$

Тем самым определяются также величины α_k .

Вырождение наступает в случае, когда ω_k соизмеримы, или когда некоторые из них равны нулю. Дело в том, что тогда J_k и ω_k не могут быть *однозначно* определены. Следовательно, также и квантовые орбиты не могут более быть однозначно фиксированы. Несмотря на это, энергия остается определенной. Например, рассмотренное в Приложении 5 (стр. 573) движение планет представляет собой вырожденный случай, так как две из ω равны нулю. Определенным является только P_1 (большая ось). Если, однако, существуют хотя бы малые отклонения от закона Кулона (движение электрона вокруг атомного остова) или же если мы учитываем релятивистскую зависимость массы от скорости, то P_2 и, следовательно, также эксцентриситет, не могут более выбираться произвольно. Если, наконец, кроме того, существует направленное внешнее электрическое или магнитное поле, то также P_3 — наклон орбиты — ограничивается определенными углами (*пространственное квантование*).

2. Электродинамика

Как известно, классическая электродинамика приводит к выводу, что периодически движущийся заряд излучает непрерывно; в отличие от этого согласно Бору справедливы следующие утверждения:

1) Электроны на квантовых орбитах не излучают.

2) При переходе с одной квантовой орбиты на другую орбиту с меньшей энергией происходит испускание монохроматического излучения в виде квантов энергии ΔE с частотой

$$\nu = \frac{\Delta E}{h},$$

где ΔE означает разность между энергиями обоих квантовых состояний. Этот процесс является обратимым (поглощение квантов).

Так как квантовая механика определяет квантовые орбиты и их энергию, то тем самым определяются также возможные частоты излучения и поглощения как разности возможных $\frac{E}{h}$ (комбинационный принцип Ритца спектроскопии). Величины $\frac{E}{h}$ называются *спектральными термами*.

Для больших квантовых чисел теория Бора переходит в классическую теорию, если при помощи *правил отбора* подчинить известным требованиям *вероятности перехода*. При помощи *принципа соответствия* они обобщаются также на случай малых квантовых чисел.

При описании движения одного электрона разложением Фурье вида

$$r = \sum_x \alpha_x e^{ix\omega t}$$

соответствующими считают следующие величины:

x и разности Δn квантовых чисел,
 $x\omega$ и частоты $2\pi\nu$.

Основной период ($x=1$) соответствует переходу с $\Delta n=1$; ближайший «обертон» ($x=2$) соответствует переходу с $\Delta n=2$ и т. д.

Векторы α_x ряда Фурье дают тогда интенсивность и поляризацию излучаемой волны, точно так же как это имеет место в случае классического излучения.

Вместе с интенсивностями определяются тогда также соответствующие вероятности перехода.

Эта предварительная формулировка является количественно удовлетворительной лишь в простых случаях; она полностью перестает служить в задаче многих тел (атом гелия) и при вычислении интенсивностей спектральных линий. Ее следует рассматривать как попытку отразить экспериментальные факты при сохранении возможно большего числа законов классической физики. В этом смысле она может еще и в настоящее время с успехом применяться в качестве приближенной теории.

С ее помощью удалось, исходя из рассмотрения спектров, выяснить с качественной стороны строение атома. Теория была существенно дополнена открытием спина электрона (Гаудсмит — Уленбек) и принципа запрета (Паули) (см. стр. 517), который допускает занятие одного и того же квантового уровня не более чем двумя электронами с противоположно направленными спинами.

В. НОВАЯ ТЕОРИЯ (ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА)

Мы не можем с произвольно высокой точностью ни определить положения микрочастиц и их состояния движения, ни понять и отобразить в наглядно интерпретируемых математических формулах законы, управляющие изменениями положений и состояний движения. Это заставляет нас примириться с некоторой неизбежной неопределенностью всех высказываний волновой механики и довольствоваться формулировками статистического характера, которые в «среднем» должны вести к твердо установленным классическим законам.

Дать «неточное» описание фактической ситуации — значит указать конечное или бесконечное, дискретное или плотное множество

равноценных возможностей, не выделяя ни одной из них. Мы приходим тем самым к следующему способу математического описания.

Обозначим каждую возможность точкой в соответствующем конфигурационном пространстве (см. стр. 392). Распределение этих точек дает желаемое описание, которое считается тем более точным, чем теснее точки группируются в одном каком-либо месте.

Средние значения, получающиеся из этого распределения, можно тогда рассматривать как играющие роль параметров точного описания.

I. Нерелятивистская механика точки

1. Средства описания

Квантовая механика N тел представляет собой квазиконтинуальную теорию (см. стр. 410) в $3N$ -мерном конфигурационном пространстве. Характеристическими для нее служат понятия $\rho(\tau, t)$ и $v(\tau, t)$. ρ означает *плотность* представляющих точек, каждая из которых описывает возможное положение системы, v означает их локально усредненную *скорость* в конфигурационном пространстве. Так как ни одна из точек этого пространства не может исчезнуть, должно быть справедливо *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0.$$

Встречающиеся здесь и в дальнейшем векторы τ , v , ρ и т. д. и дифференциальные операторы div , grad , Δ и т. д., так же как и все интегралы, следует понимать как $3N$ -мерные. Под τ мы будем понимать $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$. Если части системы характеризуются различными параметрами m_k или e_k , то мы применяем следующие обозначения:

$$m\tau = \{m_1\tau_1, m_2\tau_2, \dots, m_N\tau_N\}, e\tau = \{e_1\tau_1, e_2\tau_2, \dots, e_N\tau_N\}$$

и т. д.

Величину ρ в общем случае нормируют условием $\int \rho dv = 1$. Интегрирование здесь, а также вообще, если только не оговорено что-либо иное, распространено на все пространство. Встречающиеся в преобразованиях поверхностные интегралы должны на бесконечности обращаться в нуль.

При помощи процесса *образования среднего значения* по пространству с ρ в качестве весовой функции мы образуем, зависящее только от времени среднее значение $\bar{\varphi}(t)$ функции $\varphi(\tau, t)$ в форме $\bar{\varphi} = \int \rho \varphi dv$. Как это принято при статистических методах описания, $\bar{\varphi}$ называется также *математическим ожиданием* φ .

Для произвольных $\varphi(r, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\varphi} &= \frac{d}{dt} \int \rho \varphi dv = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) dv = \int \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = \\ &= \int \left\{ \rho \frac{d\varphi}{dt} - (v \operatorname{grad} \varphi) \rho - \varphi \operatorname{div} \rho v \right\} dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dt} dv = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}. \end{aligned}$$

Частными примерами таких средних значений являются:

$\bar{r} = \int r \tau dv$ — центр тяжести распределения, или, что то же, среднее значение радиуса-вектора отдельной точки,

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \int r \tau dv = \int \rho v dv = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ — скорость центра тяжести, или, что то же, среднее значение скорости отдельной точки,

$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho v dv = \frac{d\bar{v}}{dt} = \int \rho \frac{dv}{dt} dv$ — среднее ускорение и т. д.

Если части системы имеют различные массы m_k или заряды e_k , то под средними значениями импульса и радиуса-вектора центра тяжести заряда понимают соответственно

$$\bar{p} = \sum_k m_k \bar{v}_k, \quad \bar{\mathfrak{P}} = \sum_k e_k \bar{r}_k \text{ и т. д.}$$

При помощи таких усреднений мы приходим к квазиконтинуальной теории (см. стр. 410) в конфигурационном пространстве, которую можно рассматривать как замену соответствующей точечной теории классической механики.

2. Уравнение Шредингера

Для квантовой механики характерно составление однородных линейных дифференциальных уравнений, из решений которых получают величины ρ и v и тем самым средние значения, имеющие наглядный смысл. Мы приходим к ним, например, следующим путем:

1) Линеаризуем уравнение непрерывности при помощи подстановки:

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \beta, \quad v = C \operatorname{grad} \ln \frac{\alpha}{\beta} = C \left(\frac{\operatorname{grad} \alpha}{\alpha} - \frac{\operatorname{grad} \beta}{\beta} \right), \\ \rho v &= C (\beta \operatorname{grad} \alpha - \alpha \operatorname{grad} \beta). \end{aligned}$$

Это дает (если писать $\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ и т. д.):

$$\alpha (\dot{\beta} - C \Delta \beta) + \beta (\dot{\alpha} + C \Delta \alpha) = 0, \text{ или } \frac{\dot{\alpha} + C \Delta \alpha}{\beta - C \Delta \beta} = - \frac{\alpha}{\beta};$$

последнее уравнение распадается на

$$\dot{\alpha} + C \Delta \alpha + \alpha f = 0 \text{ и } \dot{\beta} - C \Delta \beta - \beta f = 0$$

с некоторой функцией $f(x, t)$, смысл которой пока остается неопределенным.

2) Преобразуем (см. стр. 216):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= \frac{d\dot{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho v \, dv = \\ &= C \int (\dot{\beta} \operatorname{grad} \alpha + \beta \operatorname{grad} \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \operatorname{grad} \beta - \alpha \operatorname{grad} \dot{\beta}) \, dv = \\ &= 2C \int (\dot{\beta} \operatorname{grad} \alpha - \dot{\alpha} \operatorname{grad} \beta) \, dv = \\ &= 2C \int \{(\beta f + C\Delta\beta) \operatorname{grad} \alpha + (\alpha f + C\Delta\alpha) \operatorname{grad} \beta\} \, dv = \\ &= 2C \int f \operatorname{grad} (\alpha\beta) \, dv = -2C \int \alpha\beta \operatorname{grad} f \, dv = \\ &= -2C \int \rho \operatorname{grad} f \, dv = -2C \overline{\operatorname{grad} f}. \end{aligned}$$

Мы интерпретируем это соотношение в смысле классической механики как усредненное уравнение для силы: $m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{\mathfrak{K}}$. Если силы получены из некоторого потенциала V , то будем иметь $\bar{\mathfrak{K}} = -\overline{\operatorname{grad} V} = -2mC \overline{\operatorname{grad} f}$. Мы интерпретируем, таким образом, $2mCf = V$ как потенциал действующей силы. За среднее значение потенциальной энергии следует тогда принять:

$$\bar{V} = \int \rho V \, dv = 2mC \int \alpha\beta f \, dv.$$

3) Заменяем α и β через ψ и ψ^* , т. е. введем одну комплексную функцию. Тогда C должно быть мнимым. Положим

$$2mC = \frac{\hbar}{i} \text{ и, следовательно, } f = \frac{i}{\hbar} V,$$

мы получим уравнение Шредингера для случая, когда существует (возможно, зависящий от времени) потенциал сил:

$$\frac{\hbar}{i} \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{\hbar}{i} \dot{\psi}^* - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi^* + V\psi^* = 0$$

с постоянной \hbar , которой еще можно распорядиться. Сравнение с опытом показывает, что $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$, где h есть квант действия Планка.

4) Аналогичным образом можно получить другие соотношения. Произведем, например, следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \beta \dot{\alpha} dv &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (\beta \dot{\alpha} - \alpha \dot{\beta}) dv = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \{C(\beta \Delta \alpha + \alpha \Delta \beta) + 2\alpha \beta f\} dv = \\ &= \frac{d}{dt} \int \{C(\text{grad } \alpha \text{ grad } \beta) - \alpha \beta f\} dv = \\ &= -\int \{C(\dot{\alpha} \Delta \beta + \dot{\beta} \Delta \alpha) + \dot{\alpha} \beta f + \alpha \dot{\beta} f + \alpha \beta \dot{f}\} dv = \\ &= -\int \alpha \beta \dot{f} dv = -\int \rho \dot{f} dv = -\dot{\bar{f}}. \end{aligned}$$

Мы интерпретируем это как усредненное уравнение энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} - (v \text{ grad}) V = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Отсюда для энергии получаем $\bar{E} = -2mC \int \beta \dot{\alpha} dv = 2mC \int \alpha \dot{\beta} dv$ и для кинетической энергии $\bar{T} = \bar{E} - \bar{V} = 2mC^2 \int \beta \Delta \alpha dv = 2mC^2 \int \alpha \Delta \beta dv$.

5) В случае, когда N тел имеют различные массы m_k ($k = 1, 2, \dots, N$), мы будем искать векторы скоростей в N трехмерных подпространствах $3N$ -мерного конфигурационного пространства в виде

$$v_k = C_k \text{grad}_k \ln \frac{\alpha}{\beta}$$

и в качестве линеаризованных уравнений для α и β получим:

$$\dot{\alpha} + \sum_k C_k \Delta_k \alpha + \alpha f = 0, \quad \dot{\beta} - \sum_k C_k \Delta_k \beta - \beta f = 0,$$

где $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$ означает оператор Лапласа в k -м подпространстве.

Требование применимости классической механики в среднем ведет тогда аналогичным образом к равенству $2m_k C_k f = V$. Если снова положим $\alpha = \psi$, $\beta = \psi^*$ и (для всех k) $2m_k C_k = \frac{\hbar}{i}$, то получим уравнение Шредингера для случая потенциала сил при различных массах частей системы:

$$\frac{\hbar}{i} \dot{\psi} - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \psi + V\psi = 0$$

и комплексно-сопряженное уравнение.

6) В случае внешних электромагнитных сил $\mathfrak{R} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathfrak{H}]$, где $\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}$, $\text{div } \mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}$, мы полагаем $\rho = \alpha\beta$, $\mathbf{v}_k = C_k \text{grad}_k \ln \frac{\alpha}{\beta} - \mathbf{a}_k$ и аналогично предыдущему получаем из уравнения непрерывности:

$$\dot{\alpha} + \sum_k C_k \Delta_k \alpha - \sum_k (\mathbf{a}_k, \text{grad}_k \alpha) - \frac{\alpha}{2} \sum_k \text{div}_k \mathbf{a}_k + \alpha f = 0 \text{ и т. д.}$$

Далее, имеем:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = -\text{grad}_k \left(2m_k C_k f - \frac{m_k}{2} (\mathbf{a}_k)^2 \right) - m_k \bar{\mathbf{a}}_k + m_k [\mathbf{v}_k \text{rot}_k \mathbf{a}_k].$$

Чтобы это уравнение соответствовало усредненным классическим уравнениям движения, следует положить:

$$2m_k C_k f = \sum_k e_k \Phi + \frac{e_k^2}{2m_k c^2} \mathfrak{A}^2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_k = \frac{e_k}{m_k c} \mathfrak{A}.$$

При $2m_k C_k = \frac{\hbar}{i}$ и $\alpha = \psi$, $\beta = \psi^*$ мы получаем тогда уравнение Шредингера для случая внешнего электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \dot{\psi} - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \psi - \sum_k \frac{e_k \hbar}{im_k c} (\mathfrak{A}, \text{grad}_k \psi) + \\ + \sum_k \left(e_k \Phi + \frac{e_k^2}{2m_k c^2} \mathfrak{A}^2 + \frac{e_k \hbar}{2im_k c^2} \dot{\Phi} \right) \psi = 0. \end{aligned}$$

Члены с $\dot{\Phi}$ и \mathfrak{A}^2 ввиду их малости по сравнению с $e_k \bar{\Phi}_k$ здесь часто опускаются.

7) Из числа получаемых с помощью найденных α , β или ψ средних значений, соответствующих классическим величинам, наиболее важными являются следующие:

$$\bar{\mathbf{r}} = \int \psi^* \mathbf{r} \psi d\mathbf{v} \quad (\text{радиус-вектор}),$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \int \psi^* \text{grad } \psi d\mathbf{v} \quad (\text{канонический импульс, см. стр. 467}),$$

$$\bar{\mathbf{p}} = m\bar{\mathbf{v}} + \frac{e}{c} \bar{\mathfrak{A}} \quad (\text{полный импульс})$$

$$\bar{\mathfrak{L}} = [\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{p}}] = \frac{\hbar}{i} \int \psi^* [\mathbf{r}, \text{grad } \psi] d\mathbf{v} \quad (\text{момент количества движения}),$$

$$\bar{\mathfrak{R}} = \frac{d\bar{\mathfrak{p}}}{dt} = -\overline{\text{grad } V} = -\int \psi^* \psi \text{grad } V d\mathbf{v} \quad (\text{сила}),$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{D}} &= \frac{d\bar{\mathfrak{L}}}{dt} = [\mathfrak{r}\mathfrak{R}] = -[\mathfrak{r}, \text{grad } V] = -\int \psi^* \psi [\mathfrak{r}, \text{grad } V] dv \text{ (вращающий} \\ &\text{момент, равный нулю для центральной силы),} \\ \overline{\mathfrak{P}} &= e\bar{\mathfrak{r}}, \text{ соответственно} = \sum_k e_k \bar{\mathfrak{r}}_k \text{ (электрический дипольный момент),} \\ \overline{\mathfrak{M}} &= \frac{e}{2mc} \bar{\mathfrak{r}}, \text{ соответственно} = \sum_k \frac{e_k}{2m_k c} \bar{\mathfrak{r}}_k \text{ (магнитный момент),} \\ \bar{E} &= -\frac{\hbar}{i} \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dv \text{ (полная энергия),} \\ \bar{V} &= \int \psi^* V \psi dv \text{ (потенциальная энергия),} \\ \bar{T} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \Delta \psi dv = +\frac{\hbar^2}{2m} \int |\text{grad } \psi|^2 dv \text{ (кинетическая энергия).} \end{aligned}$$

Все эти величины являются функциями одного лишь времени, как в чисто точечной теории.

3. Описание при помощи операторов

Уравнение Шредингера можно записать также в форме

$$-\frac{\hbar}{i} \dot{\psi} = H\psi.$$

Здесь H означает самосопряженный оператор — *оператор Гамильтона*, — который в случае консервативных сил принимает вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V.$$

Средние значения, выражаемые через ψ и ψ^* , все имеют вид $\int \psi^* T \psi dv$, где T означает самосопряженный оператор, который ставится в соответствие усредняемой величине. Оператор T должен быть самосопряженным, если желают получить действительные средние значения. Примерами служат

$$\bar{p} = m\bar{v} = \frac{\hbar}{i} \int \psi^* \text{grad } \psi dv, \quad \bar{E} = -\frac{\hbar}{i} \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dv \text{ и пр.}$$

Принято большей частью обозначать оператор той же буквой, что и поставленную ему в соответствие величину. Более удобный способ обозначений состоит в применении той же прописной буквы (если это возможно); тогда пишут:

$$\bar{a} = \int \psi^* A \psi dv \equiv (\psi^* A \psi),$$

за исключением того случая, когда имеют дело с обычными операторами умножения, такими, как

$$\bar{r} = \int \psi^* r \psi dv, \quad \bar{x}_k = \int \psi^* x_k \psi dv, \quad \bar{V} = \int \psi^* V \psi dv \text{ и т. п. } (1 = \int \psi^* \psi dv).$$

Для операторов \mathfrak{P} , P_k , E и т. д., соответствующих p , p_k , E и т. д., следует, таким образом, положить:

$$\mathfrak{P} \equiv \frac{\hbar}{i} \text{grad}, \quad P_k \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad E \equiv -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Тем самым в смысле алгебры операторов будем иметь:

$$P_k^2 \equiv -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \text{следовательно, } P^2 \equiv \sum_{k=1}^{3N} P_k^2 \equiv -\hbar^2 \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \equiv -\hbar^2 \Delta$$

и т. д.

Определение оператора Гамильтона может быть поэтому записано в явной форме с помощью операторного уравнения

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \frac{P_k^2}{m_k} + V(x_k),$$

что формально совпадает с функцией Гамильтона классической механики.

Если желательно перевести на язык операторных уравнений другие классические уравнения, то необходимо иметь в виду следующее:

1) Произведения непостоянных операторов могут встречаться только в самосопряженной (эрмитовой) форме, например $ab + ba$, $i(ab - ba)$, aba и т. п.

2) Алгебраические преобразования предполагают знание *перестановочных соотношений*. Если для коммутатора a и b применять символ

$$[a, b] = ab - ba,$$

то получим следующие легко проверяемые основные правила:

$$[P_k, x_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}, \quad [E, t] = -\frac{\hbar}{i}.$$

Это можно обобщить, полагая:

$$[a, b] = \pm \frac{\hbar}{i},$$

если a и b — канонически сопряженные величины.

3) Если из операторов P_k и x_k построены алгебраическим путем другие операторы (см. стр. 39), то такие выражения можно, подобно числовым функциям, дифференцировать по операторам, следуя при этом правилам:

$$\frac{\partial A}{\partial P_k} = \frac{i}{\hbar} [A, x_k], \quad \frac{\partial A}{\partial x_k} = -\frac{i}{\hbar} [A, P_k].$$

4) Легко убедиться, что

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \psi^* A \psi dv = \int (\dot{\psi}^* A \psi + \psi^* A \dot{\psi}) dv = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, A] \psi dv,$$

если A не зависит явно от времени. Поэтому оператор $\frac{i}{\hbar} [H, A]$ соответствует производной по времени $\frac{dA}{dt}$. Его можно также обозначить через $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A].$$

Среднее значение \bar{a} не будет зависеть от времени лишь в том случае, когда A и H перестановочны и, следовательно, $[H, A] = 0$ (и $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$).

Вытекающие из 3) и 4) уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial P_k} = \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = \frac{dx_k}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{i}{\hbar} [H, P_k] = -\frac{dP_k}{dt}$$

соответствуют формально сходным с ними каноническим уравнениям классической механики.

Тем самым достигнут переход, в существенном однозначный, от классической механики к квантовой механике для таких задач, в которых силы имеют потенциал. Использование этого операторного формализма в специальных задачах предполагает, что решения ψ , ψ^* уравнения Шредингера известны. Но даже и без знания этих решений оно позволяет получать соотношения между разнообразными средними значениями более простым путем, чем при помощи обычного преобразования соответствующих интегралов.

4. Постановка задач

Решение уравнения Шредингера, необходимое для получения ответов на специальные физические вопросы, требует прежде всего определения функции $V(r, t)$. Эта функция берется из классической механики.

На решение ψ необходимо наложить требование, чтобы оно было *нормируемо*. Оно должно поэтому на бесконечности достаточно быстро обращаться в нуль.

Если решение составляется из частичных решений в частных пространствах, то для того чтобы интегралы, распространенные на поверхности, ограничивающие эти части пространства, взаимно уничтожались, необходимо потребовать, чтобы на этих поверхностях ψ и $\text{grad } \psi$ были непрерывны (*условия сопряжения*).

Непроницаемую стенку мы рассматриваем как часть пространства, в которой $V = \infty$ и, следовательно, $\psi = 0$. Краевым условием на граничных поверхностях является поэтому $\psi = 0$.

В особых точках поля (точечные заряды) применимость известных нам законов находится под вопросом. Определенных краевых условий здесь сформулировать нельзя.

Найденное решение содержит еще постоянные интегрирования, которые фиксируются либо при помощи дальнейших требований, например требования стационарности (квантовые состояния), либо при помощи начальных условий, которые могут быть взяты из наблюдений. В задачах многих тел неразличимые элементы должны удовлетворять определенным требованиям симметрии (принцип Паули и др.).

5. Общие формы решений уравнения Шредингера

Если V не зависит явно от времени (консервативные системы, $\frac{dE}{dt} = 0$), то решение уравнения Шредингера можно искать в виде

$$\psi = \sum_n f_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}).$$

В качестве функций φ_n , по которым ищется разложение, мы выберем нормированные ортогональные собственные решения пока произвольного сопряженного оператора T с теми же краевыми условиями, которые постановкой задачи наложены на ψ :

$$T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Функции $f_n(t)$ определяются тогда системой уравнений

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{df_n}{dt} = \sum_l f_l \int \varphi_n^* H \varphi_l dv = \sum_l f_l H_{nl}$$

и их начальными значениями $f_n(0)$.

Здесь имеем:

$$\bar{E} = \sum_{n,l} f_n^*(t) f_l(t) H_{nl}$$

1) Если, в частности, выберем $T = H$, то матрица H_{nl} станет диагональной: $H_{nl} = \delta_{ln} E_n$. Система уравнений распадается тогда на независимые уравнения

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{df_n}{dt} = f_n E_n, \text{ так что } f_n(t) = C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}, \text{ где } C_n = f_n(0).$$

Если мы обозначим через ψ_n функции, удовлетворяющие «незави-

сящему от времени уравнению Шредингера» $H\psi_n = E_n\psi_n$, то получим решение в виде разложения по этим функциям:

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n(t) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad \text{с постоянными } C_n.$$

Оно представляет собой линейную комбинацию периодических во времени частных решений с частотами $\omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{E_n}{\hbar}$. Эта формула согласуется с соотношением Планка между энергией и частотой: $E = h\nu$. Так как, однако, ψ представляет собой лишь вспомогательную математическую величину, не интерпретируемую непосредственно физически, то полученное здесь соотношение не имеет пока физического содержания.

Условие нормированности требует, чтобы было $\sum_n |C_n|^2 = 1$; мы получаем:

$$\rho = \sum_{n,t} C_n^* C_t \psi_n^* \psi_t e^{i(\omega_n - \omega_t)t},$$

$$\rho v = \frac{\hbar}{2mi} \sum_{n,t} C_n^* C_t (\psi_n^* \text{grad } \psi_t - \psi_t \text{grad } \psi_n^*) e^{i(\omega_n - \omega_t)t},$$

$$\bar{E} = \hbar \sum_{n,t} C_n^* C_t \omega_t \int \psi_n^* \psi_t d^3v e^{i(\omega_n - \omega_t)t} = \hbar \sum_n |C_n|^2 \omega_n = \sum_n |C_n|^2 E_n.$$

Если только одно из C_n отлично от нуля ($|C_n| = 1$), то мы получаем *стационарное* решение с $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ — так называемое *квантовое состояние* с энергией $\bar{E} = \hbar\omega_n$. Состояние с наименьшей энергией называется *основным состоянием*.

Другие стационарные решения мы получим, если собственному значению E_n соответствует несколько собственных решений ψ_{nt} (вырождение). Они имеют вид

$$\psi = \sum_t C_{nt} \psi_{nt} e^{-i\omega_n t}, \quad \text{где } \sum_t |C_{nt}|^2 = 1.$$

Также и здесь будем иметь: $\bar{E} = \sum_t \bar{E}_{nt} = \hbar\omega_n$.

В общем, нестационарном, случае ρ и ρv представляют собой величины, зависящие от времени. Они могут быть представлены в виде суперпозиции колебаний с частотами $\omega_{nt} = \omega_n - \omega_t$ (синтез Фурье), которым должен быть приписан физический смысл (см. стр. 512).

Если $V = V_0 = \text{const}$, то будем иметь $\psi_n = e^{i(\mathbf{k}_n \mathbf{r})}$

$$\text{с } k_n^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\hbar\omega_n + V_0) \quad \text{и} \quad \psi = \sum_n C_n e^{-i(\omega_n t - (\mathbf{k}_n \mathbf{r}))}.$$

В неограниченном пространстве здесь могут встретиться все возможные ω_n . Обычная нормировка функций ψ_n при этом неприменима. В этом случае суммы следует заменить интегралами по C_n , после чего нормировка становится возможной. Это соответствует построению *волновых пакетов* (см. стр. 227).

Если существует только одно $C \neq 0$: $\psi = Ce^{-i(\omega t - \langle r \rangle)}$, то ψ имеет форму плоской волны (см. стр. 225—226). Тогда получим $p \sim C^2 = \text{const}$ и $v = \frac{\hbar}{m} \dot{\mathbf{t}}$. Это значит, что мы имеем однородный стационарный поток. Только комбинация двух ψ -волн с различными ω приводит к физической волне с наблюдаемой периодичностью.

2) Если T и H мало отличаются друг от друга, то мы полагаем:

$$\psi = \sum_n g_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}) e^{-\frac{i\lambda_n t}{\hbar}},$$

и получаем:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{dg_n(t)}{dt} = \sum_l g_l(t) (H_{nl} - T_{nl}) e^{-\frac{i}{\hbar} (\lambda_l - \lambda_n) t}.$$

Так как, по предположению, $H_{nl} - T_{nl}$ мал, то функции $g_n(t)$ изменяются медленно, и поэтому в первом приближении будем иметь:

$$g_n(t) = g_n(0) + \sum_l g_l(0) \frac{(H_{nl} - T_{nl})}{\lambda_l - \lambda_n} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} (\lambda_l - \lambda_n) t} - 1 \right) + \dots$$

$$\rho = \sum_{n,l} g_n^*(t) g_l(t) \varphi_n^* \varphi_l e^{-\frac{i}{\hbar} (\lambda_l - \lambda_n) t},$$

$$\rho v = \frac{\hbar}{2mi} \sum_{n,l} g_n^*(t) g_l(t) (\psi_n^* \text{grad} \psi_l - \psi_l \text{grad} \psi_n^*) e^{-\frac{i}{\hbar} (\lambda_l - \lambda_n) t},$$

$$\bar{E} = -\frac{\hbar}{i} \sum_n g_n^*(t) \left(\frac{dg_n(t)}{dt} - \frac{i}{\hbar} \lambda_n g_n(t) \right) =$$

$$= \sum_{n,l} g_n^*(t) g_l(t) H_{nl} e^{-\frac{i}{\hbar} (\lambda_l - \lambda_n) t},$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = 0, \quad (\varphi_n^* H \varphi_l) = H_{nl}, \quad \sum_n |g_n(t)|^2 = 1.$$

Этот случай имеет особое значение, когда собственные решения для H неизвестны, но известны собственные решения для T , мало отличающегося от H .

6. Классификация собственных решений

Если уравнение Шредингера решать при помощи разделения переменных, то оказывается возможным использование значений постоянных разделения как индексов для обозначения решений. Чтобы удовлетворить требованию непрерывности и однозначности ψ , а также краевым условиям, для постоянных разделения необходимо брать чаще всего дискретные, часто также целочисленные значения. Они называются тогда *квантовыми числами* и приводят к классификации собственных решений.

Более общим является метод, при котором ищут операторы L , перестановочные с H . Тогда собственные решения H , принадлежащие собственным подпространствам этих операторов, образуют классы, характеризуемые собственными значениями операторов L . В случае H , независящего от времени, собственные значения L , рассматриваемые как средние значения, не зависят от времени и служат общим признаком элементов, принадлежащих к одному классу. Часто они могут быть непосредственно интерпретированы.

Важный пример этого дает оператор момента количества движения $\mathfrak{Q} = \frac{\hbar}{i} [\mathfrak{r} \text{ grad}]$. В случае сферической симметрии он перестановочен с H . Каждая из его компонент имеет собственные значения $m\hbar$ с целым m . Классификация проводится, например, по z -компоненте L_z .

Также и $L^2 = -\hbar^2 [\mathfrak{r} \text{ grad}]^2$ является тогда перестановочным с H (и L_z). Его собственными значениями служат $l(l+1)\hbar^2$ с целым положительным l .

7. Матричный метод

Если операторы изображать матрицами (A) в некоторой ортогональной системе φ_k :

$$A_{ik} = \int \varphi_i^* A \varphi_k dv,$$

то получим уравнения в матричной форме, эквивалентные операторным уравнениям (см. стр. 49).

Подобно операторам, матрицы действительных величин должны быть эрмитовыми и удовлетворять перестановочным соотношениям. Такие матрицы можно легко построить многими способами, например,

$$(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$(P) = \frac{\hbar}{ia\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

т. е.

$$(x)_{nl} = \frac{a}{\sqrt{2}} (\delta_{n, l+1} \sqrt{n} + \delta_{l, n+1} \sqrt{l}),$$

$$(P)_{nl} = \frac{i\hbar}{a\sqrt{2}} (\delta_{n, l+1} \sqrt{n} - \delta_{l, n+1} \sqrt{l}),$$

где

$$n, l = 0, 1, 2, \dots$$

С помощью этих специальных матриц можно построить матрицы, соответствующие другим операторам, являющимся функциями от x и P , например, (x_k^2) , (P_k^2) :

$$(x^2) = \frac{a^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 7 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$(P^2) = \frac{\hbar^2}{2a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & 3 & 0 & -\sqrt{6} \dots \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 & 0 \dots \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 7 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

т. е.

$$(x^2)_{n, l} = \frac{a^2}{2} (\delta_{n, l}(n+l+1) + \delta_{n, l+2} \sqrt{n(l+1)} + \delta_{l, n+2} \sqrt{l(n+1)})$$

и

$$(P^2)_{n, l} = \frac{\hbar^2}{2a^2} (\delta_{n, l}(n+l+1) - \delta_{n, l+2} \sqrt{n(l+1)} - \delta_{l, n+2} \sqrt{l(n+1)}),$$

где

$$n, l = 0, 1, 2, \dots$$

При помощи унитарного преобразования $\varphi'_i = S\varphi_i$ можно прийти к другим эквивалентным описаниям.

Если для описания выбрать ортогональную систему решений ϕ_n, ϕ_n^* уравнения Шредингера (не зависящего от времени), то оператор Гамильтона H изобразится диагональной матрицей, а диагональные элементы будут служить его собственными значениями:

$$(H)_{nn} = \hbar\omega_n = E_n.$$

Поэтому можно вместо того, чтобы рассматривать математическую задачу, состоящую в решении уравнения Шредингера, рассмотреть задачу отыскания такой матрицы S , чтобы матрица $(SHS^\dagger)_{nl} = H'_{nl}$ стала диагональной, с последующим аналогичным преобразованием всех остальных операторов. Эта задача, однако, до сих пор оказалась практически разрешимой лишь в небольшом числе простых случаев.

Приведенные выше специальные матрицы принадлежат представлению, в котором $H = \frac{1}{2m}(P_k^2 + m^2\omega^2 x_k^2)$ с $a^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ имеет диагональную форму: $(H)_{nn} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ (теория гармонического осциллятора).

Операторы, соответствующие комплексным величинам и являющиеся поэтому неэрмитовыми, описываются неэрмитовыми матрицами.

Примерами могут служить:

$$(A) = a \begin{pmatrix} \bullet & \sqrt{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & \sqrt{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \sqrt{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \end{pmatrix},$$

$$(C) = \frac{\hbar}{ia} \begin{pmatrix} \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sqrt{1} & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sqrt{2} & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{3} & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\sqrt{4} & \bullet \end{pmatrix},$$

т. е. $(A)_{nl} = a\sqrt{l}\delta_{l, n+1}$, $(C)_{nl} = \frac{i\hbar}{a}\sqrt{n}\delta_{n, l+1}$,

где

$$l, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Эти матрицы удовлетворяют перестановочным соотношениям $CA - AC = \frac{\hbar}{i}L$ и, следовательно, соответствуют канонически

сопряженным величинам. Они возникают из упомянутых выше x , P в результате канонического преобразования

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x + \frac{ia^2}{\hbar} P \right\}, \quad C = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\hbar}{a^2} x - iP \right\}.$$

Операторы, соответствующие комплексно-сопряженным величинам, представляются матрицами:

$$(A^*) = a \begin{pmatrix} \bullet & & & & \\ \sqrt{1} & \bullet & & & \\ & \sqrt{2} & \bullet & & \\ & & \sqrt{3} & \bullet & \\ & & & \sqrt{4} & \bullet \\ & & & & \bullet \end{pmatrix},$$

$$(C^*) = -\frac{\hbar}{ia} \begin{pmatrix} \bullet & -\sqrt{1} & & & \\ & \bullet & -\sqrt{2} & & \\ & & \bullet & -\sqrt{3} & \\ & & & \bullet & -\sqrt{4} \\ & & & & \bullet \end{pmatrix},$$

т. е.

$$(A^*)_{nl} = a\sqrt{n} \delta_{n, l+1}; \quad (C^*)_{nl} = -\frac{i\hbar}{a} \sqrt{l} \delta_{l, n+1},$$

и мы имеем:

$$(A^*) = -\frac{ia^2}{\hbar} (C); \quad (C^*) = -\frac{i\hbar}{a^2} (A).$$

Следующие функции превращаются в диагональные матрицы:

$$\begin{aligned} 1) -i\{AC + CA\} &= i(A^*C^* + C^*A^*) = \frac{a^2}{\hbar} \frac{CC^* + C^*C}{2} + \\ &+ \frac{\hbar}{a^2} \frac{AA^* + A^*A}{2} = \frac{a^2}{\hbar} CC^* + \frac{\hbar}{a^2} AA^* = \frac{a^2}{\hbar} C^*C + \frac{\hbar}{a^2} A^*A = \\ &= \frac{a^2}{\hbar} P^2 + \frac{\hbar}{a^2} x^2 \end{aligned}$$

с элементами $\hbar(n+l+1)\delta_{nl}$, или

$$\begin{aligned} 2) -2iCA &= 2iA^*C^* = -i(CA - A^*C^*) = \frac{2a^2}{\hbar} CC^* = \frac{2\hbar}{a^2} A^*A = \\ &= \frac{a^2}{\hbar} CC^* + \frac{\hbar}{a^2} A^*A \text{ с элементами } \hbar(n+l)\delta_{nl}, \text{ или} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) -2iAC &= 2iC^*A^* = -i(AC - C^*A^*) = \frac{2a^2}{\hbar} C^*C = \frac{2\hbar}{a^2} AA^* = \\ &= \frac{a^2}{\hbar} C^*C + \frac{\hbar}{a^2} AA^* \text{ с элементами } \hbar(n+l+2)\delta_{nl}. \end{aligned}$$

Пары A и $\frac{i\hbar}{a^2} A^*$, соответственно $\frac{ia^2}{\hbar} C^*$ и C , так же как и A и C , описывают операторы, соответствующие *комплексным* канонически сопряженным величинам.

Матрицы

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^*) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{a^2}{\hbar} (C - C^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A - \frac{ia^2}{\hbar} C \right) = x$$

и

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{a^2} (A - A^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (C + C^*) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar}{a^2} A + iC \right) = P$$

являются эрмитовыми и удовлетворяют перестановочным соотношениям, т. е. они описывают самосопряженные операторы x и P , соответствующие действительным канонически сопряженным величинам. (Пример: комплексная форма теории излучения, см. стр. 528.)

8. Физическая интерпретация решений

Из найденных решений мы можем вывести наглядные утверждения статистического характера, допускающие экспериментальную проверку. Изложенный до сих пор метод позволяет вычислять лишь средние значения как функции времени (или же энергию в случае $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$). Можно, однако, ввести следующие более далеко идущие аксиомы, которые представляются, если принять во внимание приводимые ниже примеры, достаточно обоснованными обобщениями.

1) Среднее значение $\bar{a}(\beta)$ наблюдаемой величины a при заданном значении β другой величины b может быть представлено в виде

$$\bar{a}(\beta) = \sum_{\alpha} \alpha |\omega(\alpha, \beta)|^2.$$

Здесь $\omega(\alpha, \beta)$ называется *амплитудой вероятности*, квадрат абсолютной величины которой дает вероятность $W(\alpha|\beta) = |\omega(\alpha, \beta)|^2$ того, что для a будет найдено значение α при условии, что значение β для b (как постоянный параметр, см. стр. 393) известно.

2) Собственные значения определяются из уравнений

$$A\omega(x, a) = a\omega(x, a),$$

где A означает соответствующий величине $a(x, p_x)$ оператор в форме, аналогичной $A\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

3) Имеет место правило комбинирования (теорема разложения):

$$\dot{\omega}(\alpha, \beta) = \sum_{\gamma} \omega(\alpha, \gamma) \omega(\gamma, \beta).$$

4) Имеем:

$$\omega(\alpha, \beta) = \omega^*(\beta, \alpha).$$

Если собственные значения α оператора A дискретны, то лишь эти значения α являются наблюдаемыми, и $w(x, \alpha)$ представляет собой дискретную последовательность функций от x .

Если α расположены плотно, то сумму по α следует заменить интегралом.

Примеры.

1) Если для вычисления среднего значения $\bar{a}(t) = (\psi^* A \psi)$ воспользоваться представлением

$$\psi(x, t) = \sum_n f_n(t) \varphi_n(x), \quad \sum_n |f_n(t)|^2 = 1$$

с

$$A \varphi_n(x) = \alpha_n \varphi_n(x), \quad (\varphi_n^*, \varphi_{n'}) = \delta_{nn'},$$

то будем иметь:

$$\bar{a}(t) = \sum_n \alpha_n |f_n(t)|^2, \quad \text{где } f_n(t) \equiv \int \psi(x, t) \varphi_n^*(x) dx = (\varphi_n^* \psi) = w(\alpha_n, t).$$

Если, в частности, a представляет собой импульс p_x с соответствующим оператором $A = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ и собственными значениями π_n , то будем иметь:

$$\varphi_n(x) = C e^{\frac{ix\pi_n}{\hbar}}.$$

C определяется как нормирующий множитель. Тогда получим:

$$\bar{p}_x(t) = \sum_n \pi_n |f_n(t)|^2, \\ \psi(x, t) = \sum_n C f_n(t) e^{\frac{ix\pi_n}{\hbar}}, \quad f_n(t) = C^* \int \psi(x, t) e^{-\frac{ix\pi_n}{\hbar}} dx = w(\pi_n, t);$$

$f_n(t)$ представляет собой коэффициент разложения Фурье. Квадрат его абсолютной величины дает вероятность $W(\pi_n | t)$ значения π_n для p_x в момент t .

Если A представляет собой оператор Гамильтона H (причем предполагается, что $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) с собственными значениями энергии E_n , то будем иметь:

$$\varphi_n = \psi_n \quad \text{из} \quad H \psi_n = E_n \psi_n, \quad \psi(x, t) = \sum_n C_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}, \\ \bar{E} = \sum_n E_n |C_n|^2, \quad C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = (\psi_n^*(x), \psi(x, t)) = w(E_n, t).$$

Таким образом, $|C_n|^2$ означает вероятность $W(E_n | t)$ того, что для E

в момент t будет найдено значение E_n . Зависимость от времени здесь утрачивается. Поскольку H имеет дискретные собственные значения, для энергии могут быть найдены только дискретные значения E_n .

2) Среднее значение для a в состоянии с энергией E_n равно:

$$\bar{a}_n = (\psi_n^* A \psi_n) = \sum_l \alpha_l |c_{nl}|^2, \quad \text{где} \quad c_{nl} \equiv (\varphi_l^*(x) \psi_n(x)) = w(\alpha_l E_n),$$

$$\varphi_l(x) = \sum_n c_{ln} \psi_n(x), \quad \psi_n(x) = \sum_l c_{nl} \varphi_l(x),$$

$$c_{ln} = (\psi_n^* \varphi_l) = w(E_n \alpha_l) = w^*(\alpha_l E_n).$$

3) Имеем: $\bar{x}(t) = \int x |\psi(x, t)|^2 dx$, так что $\psi(x, t) = w(x, t)$.

Так как собственные значения оператора x расположены плотно, следует писать интеграл.

Аналогично имеем:

$$\bar{x}_n = \int x |\psi_n(x)|^2 dx,$$

так что

$$\psi_n(x) = w(x, E_n).$$

4) Из $\psi(x, t) = \sum_n C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(x)$ мы получаем:

$$C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = (\psi_n^*(x) \psi(x, t)) = \int w^*(x, E_n) w(x, t) dx = w(E_n, t)$$

и аналогично:

$$C_n^* e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} = \int w^*(\pi_n, t) w(x, t) dt = w^*(\pi_n, x).$$

Эта специальная форма амплитуды вероятности справедлива для пар канонически сопряженных величин.

$$5) w(\alpha, \alpha') = \int w^*(x, \alpha) w(x, \alpha') dx = \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Это соотношение ортогональности выражает тот очевидный факт, что если $a = \alpha'$ известно, то $a = \alpha$ возможно лишь при $\alpha = \alpha'$.

Частное решение уравнения Шредингера для замкнутой системы

$\psi = \psi_l e^{-\frac{iE_l t}{\hbar}}$ и образованные с его помощью средние значения описывают *квантовое состояние* с энергией E_l . Общее решение $\psi = \sum C_l \psi_l e^{-\frac{iE_l t}{\hbar}}$, напротив, описывает ситуацию, в которой неизвестно, какое именно квантовое состояние имеет место, а известна лишь вероятность $|C_l|^2$ его осуществления. Оно описывает поэтому не то,

что имеет место в действительности, а лишь наше знание, которое состоит только из вероятностных утверждений.

Если C_i представляют собой функции времени, то это означает, что вероятности изменяются во времени. Это интерпретируется при помощи картины *переходов*, которые переводят систему из одного квантового состояния в другое. Уравнения $-\frac{\hbar}{i} \frac{dC_i}{dt} = \sum_k C_k H_{ik}$ описывают этот процесс в деталях. В этом смысле H_{ik} является мерой *вероятности перехода* из состояния k в состояние i . В частности, если $H_{ik} = 0$, то не происходит никаких прямых переходов $k \rightarrow i$ (*запрещенный переход*), а возможны лишь переходы через *промежуточные состояния* $k \rightarrow r \rightarrow i$.

Случай C_i , изменяющихся во времени, имеет место, когда система не является полностью замкнутой и возмущается *внешним* воздействием H' . В этом случае избирают описание при помощи собственных функций ψ_i и собственных значений E_i невозмущенной (замкнутой) системы H_0 . К такому описанию мы вынуждены прибегать уже потому, что понятия энергии и квантового состояния определены точно лишь для замкнутых систем. Необходимо, однако, подчеркнуть, что всегда остается известный произвол в том, что именно должно рассматриваться как замкнутая система, т. е. какая часть действующих сил будет рассматриваться как возмущение. Решение этого вопроса существенно зависит от принятой точки зрения. Изложенный метод и способы рассмотрения практически возможны лишь при слабых возмущениях H' , т. е. при условии, что функция Гамильтона $H = H_0 + H'$ возмущенной системы незначительно отличается от функции Гамильтона невозмущенной системы (см. стр. 361 и след.).

9. Соотношение неопределенностей

Волномеханическое среднее значение величины a в состоянии, характеризуемом функцией $\psi(x, t)$, вычисляется при помощи соответствующего оператора A из соотношения $\bar{a} = (\psi^* A \psi)$, как и среднее значение квадрата этой величины — из соотношения $\overline{a^2} = (\psi^* A^2 \psi)$. Средний «квадрат отклонения» тогда равен

$$(\Delta a)^2 = \overline{(a - \bar{a})^2} = (\psi^* (A - \bar{a})^2 \psi).$$

Если это Δa принять за меру «неопределенности» a , то из обобщенного неравенства Шварца (см. стр. 40) для двух величин a и b будет следовать:

$$\begin{aligned} (\Delta a)^2 (\Delta b)^2 &\geq \left(\psi^* \left(\frac{(A - \bar{a})(B - \bar{b}) - (B - \bar{b})(A - \bar{a})}{2i} \right) \psi \right)^2 = \\ &= \left(\psi^* \frac{AB - BA}{2i} \psi \right)^2. \end{aligned}$$

Если a и b — канонически сопряженные величины, для которых, следовательно, выполнено условие $AB - BA = \frac{\hbar}{i}$, то ввиду $(\psi^* \psi) = 1$ будем иметь:

$$|\Delta a| |\Delta b| \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Это — соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Оно выражает тот факт, что две канонически сопряженные величины не могут быть определены одновременно со сколь угодно высокой степенью точности; более того, знание одной из них с какой-либо степенью точности связано с известной минимальной степенью неопределенности другой. Это относится как к степени точности возможных наблюдений, так и к степени точности возможных реализаций.

Для линейного гармонического осциллятора в основном состоянии во всякий момент времени имеем $\Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$. Для всех прочих систем при одновременном измерении координат и импульса знак равенства в соотношении неопределенностей имеет место лишь в том случае, когда в момент измерения t_0 будем иметь:

$$\psi(x, t_0) = \text{const} \cdot e^{-\left(\frac{x - \bar{x}}{2\Delta x}\right)^2 - \frac{i\bar{p}_x x}{\hbar}}.$$

Для других моментов времени ($t \neq t_0$) вследствие зависимости $\psi(x, t)$ от времени получим даже в этом оптимальном случае $\Delta p_x \Delta x > \frac{\hbar}{2}$ (так называемое *расплывание* волновых пакетов).

10. Подсистемы и взаимодействие

Замкнутую систему часто можно по причинам методического характера или же по причинам, связанным с существом дела, рассматривать как состоящую из подсистем, между которыми существует взаимодействие. Оператор Гамильтона тогда составляется в виде $H = \sum H_k + W$, где H_k представляет собой оператор Гамильтона подсистемы (мыслимой как изолированная), зависящий только от ее параметров, в то время как W содержит все параметры.

1) Если $W = 0$, то мы имеем решение $\psi = \prod_k \psi^{(k)}(r_k, t)$. Квантовое состояние всей системы дается соотношением

$$\psi_t e^{-\frac{iE_t t}{\hbar}} = \prod_k \left(\psi^{(k)}(r_k) e^{-\frac{iE^{(k)} t}{\hbar}} \right)$$

и, значит,

$$E_t = \sum_k E^{(k)} \text{ (аддитивность энергии).}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию таких частных решений с постоянными коэффициентами C_l .

Если N подсистем *одинаковы*, т. е. если их функции Гамильтона имеют одну и ту же форму, то налицо вырождение. Собственному значению E_t всей системы принадлежат различные решения, получающиеся друг из друга перестановкой координат \mathbf{r}_k подсистем. Из этих решений можно построить попарно ортогональные линейные комбинации, имеющие различного рода симметрию по отношению к перестановкам \mathbf{r}_k . Среди них особенно интересно вполне *антисимметрическое* решение, которое обладает свойством менять свой знак при перестановке любых двух подсистем. Его можно представить в форме определителя

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi^{(1)}(1) & \psi^{(1)}(2) & \psi^{(1)}(3) & \dots \\ \psi^{(2)}(1) & \psi^{(2)}(2) & \psi^{(2)}(3) & \dots \\ \psi^{(3)}(1) & \psi^{(3)}(2) & \psi^{(3)}(3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где сокращенно записано $\psi^{(n)}(k) = \psi^{(n)}(\mathbf{r}_k, t)$.

Выделяется также вполне *симметрическое* решение, которое при перестановке любых двух подсистем остается неизменным:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (P) \psi^{(1)}(1) \psi^{(2)}(2) \dots \psi^{(k)}(k).$$

Здесь следует суммировать по всем перестановкам P аргументов $(k) = (\mathbf{r}_k, t)$ при фиксированной последовательности $\psi^{(n)}$.

2) Если $W \neq 0$, то к задаче подходят как к задаче о возмущениях, причем взаимодействие рассматривается как оператор возмущения. При помощи возмущения имеющееся вырождение может быть полностью или частично снято.

При этом большей частью применяют следующие два способа рассмотрения:

а) Метод возмущений, изложенный на стр. 362 (при этом W не должно содержать время явным образом). Таким путем находят измененные возмущением собственные значения и собственные функции системы. Интерпретация этого решения состоит в следующем: благодаря взаимодействию собственные значения квантовых состояний всей системы, так же как и распределение плотности в ней, претерпевают изменения.

В первом приближении изменение энергии невырожденной системы дается формулой

$$\Delta E_t = W_{tt} = (\psi_t^* W \psi_t),$$

позволяющей вычислить его при помощи собственных функций невозмущенной системы.

б) Метод возмущений, изложенный на стр. 370 (применимый также при W , зависящем от времени). Здесь возмущенная собственная функция представляется в виде линейной комбинации невозмущенных с зависящими от времени коэффициентами: $\psi = \sum_l c_l(t) \psi_l$. Интер-

претация состоит здесь в следующем; взаимодействие обуславливает переходы, переводящие подсистемы из их квантовых состояний в другие. Здесь говорят также об обмене энергией между подсистемами, который вызывается взаимодействием.

Полная энергия тогда будет равна

$$\begin{aligned} E &= \sum_l |c_l|^2 E_l + \sum_{l,n} c_l^* c_n W_{nl} = \\ &= \sum_l |c_l|^2 (E_l + W_{ll}) + \sum_{l,n} c_l^* c_n W_{ln}. \end{aligned}$$

Величины W_{ll} соответствуют классически вычисляемой энергии взаимодействия соответствующих невозмущенных распределений плотности. W_{ln} при $l \neq n$ называются *обменными интегралами*.

Эти два метода ведут, таким образом, к различным картинам, назначение которых состоит в том, чтобы дать наглядное описание одной и той же действительной ситуации.

11. Принцип Паули

Опыт показывает, что большинство элементарных частиц (электрон, протон, нейтрон и т. д.) не характеризуется полностью заданием массы, заряда и координат в трехмерном пространстве; именно, оказывается необходимым допустить еще одну степень свободы, способную принимать два значения, что приводит к понятию *спина*. Соответствующий параметр в первом приближении, которым мы пока ограничимся, не содержится в функции Гамильтона. Мы имеем поэтому вырождение, которое расщепляет ψ -функцию системы, состоящей из N частиц со спином, на 2^N функций, которым соответствуют состояния с одной и той же энергией.

Опыт показывает, далее, что для частиц, обладающих спином, имеет место *принцип Паули*: в природе реализуются лишь такие решения уравнения Шредингера, которые являются антисимметрическими по отношению к перестановке координат и спиновых параметров любых двух элементарных частиц.

Если состояние системы, построенной из подсистем, описывается при помощи их собственных функций, то эти последние принято различать, обозначая их через ψ^+ и ψ^- . Для системы двух одинаковых элементарных частиц возможны в этом смысле следующие

собственные функции:

$$1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^+ (1) & \psi_i^- (2) \\ \psi_n^+ (1) & \psi_n^- (2) \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^- (1) & \psi_i^+ (2) \\ \psi_n^- (1) & \psi_n^+ (2) \end{vmatrix} \right\},$$

симметрические по \mathbf{r}_k , антисимметрические по спину;

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^+ (1) & \psi_i^+ (2) \\ \psi_n^+ (1) & \psi_n^+ (2) \end{vmatrix},$$

$$3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^+ (1) & \psi_i^- (2) \\ \psi_n^+ (1) & \psi_n^- (2) \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^- (1) & \psi_i^+ (2) \\ \psi_n^- (1) & \psi_n^+ (2) \end{vmatrix} \right\},$$

$$4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_i^- (1) & \psi_i^- (2) \\ \psi_n^- (1) & \psi_n^- (2) \end{vmatrix},$$

антисимметрические по \mathbf{r}_k , симметрические по спину.

Эти четыре комбинации являются в случае двух частиц единственными, которые удовлетворяют *принципу Паули*.

12. Система многих одинаковых частиц

Оператор Гамильтона общей задачи в случае, когда все частицы $k=1, 2, \dots, N$ одинаковы, имеет вид

$$H = \sum_k H_k(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} \sum_{kk'} W(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k'}) + \dots$$

Разлагая ψ по собственным решениям $\varphi_n(\mathbf{r})$ оператора H_k :

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} c(n_1, n_2, n_3, \dots, t) \varphi_{n_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{n_2}(\mathbf{r}_2) \dots,$$

мы получаем для коэффициентов c систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка (аналогично стр. 504).

Чтобы справиться с этой, при больших N слишком сложной системой, можно рассмотреть следующие два важных частных случая¹⁾.

1) Предположим, что ψ *симметрична* относительно частиц, т. е. что их перестановка не изменяет ψ . Тогда многие из $c(n_1, n_2, \dots, t)$ будут равны друг другу и могут быть обозначены через $C(N_1, N_2, N_3, \dots, t)$, а именно, все те, для которых n_k с кратностями N_r распределяются по возможным значениям $r=1, 2, \dots$. Число N_r указывает, таким образом, сколько из величин n_k имеют значение r . Имеем $\sum_r N_r = N$.

¹⁾ Ниже автор излагает метод вторичного квантования для систем из одинаковых частиц с симметрическими и антисимметрическими волновыми функциями. (Прим. ред.)

Мы вводим теперь операторы b_r и сопряженные с ними b_r^\dagger , которые действуют на функции целых чисел N_r . Они определяются равенствами

$$b_r^\dagger f(N_1, N_2, N_3, \dots) = \sqrt{N_r + 1} f(N_1, N_2, \dots, N_r + 1, \dots)$$

и

$$b_r f(N_1, N_2, N_3, \dots) = \sqrt{N_r} f(N_1, N_2, \dots, N_r - 1, \dots).$$

Отсюда следует:

$$b_r^\dagger b_r = N_r, \quad b_r b_r^\dagger = N_r + 1 \text{ и, значит, } b_r b_r^\dagger - b_r^\dagger b_r = 1,$$

в то время как все прочие b перестановочны. С помощью этих b -операторов можно теперь составить более простую систему вида

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} C(N_1, N_2, \dots, t) = -H(C(N_1, N_2, \dots, t))$$

с оператором Гамильтона H , определяемым формулой

$$H = \sum_{r,s} b_r^\dagger H_{rs} b_s + \sum_{r,s,t,u} b_r^\dagger b_t^\dagger H_{rt,us} b_u b_s + \dots$$

Можно образовать в τ -пространстве *квантованные волновые функции* с b в качестве коэффициентов:

$$\psi(\tau) = \sum_r b_r \varphi_r(\tau), \quad \psi^\dagger(\tau) = \sum_r b_r^\dagger \varphi_r^*(\tau).$$

Они представляют собой операторы, функционально зависящие от τ . Для них имеем:

$$\begin{aligned} \psi(\tau') \psi^\dagger(\tau) - \psi^\dagger(\tau) \psi(\tau') &= \delta(\tau - \tau'), \\ \psi(\tau') \psi(\tau) - \psi(\tau) \psi(\tau') &= 0. \end{aligned}$$

С помощью этих ψ -операторов H может быть представлен в форме

$$H = \int \psi^\dagger(\tau) H \psi(\tau) dv + \frac{1}{2} \iint \psi^\dagger(\tau) \psi^\dagger(\tau') W \psi(\tau') \psi(\tau) dv dv' \dots$$

2) Предположим, что ψ *антисимметрична* относительно частиц, т. е. что перестановка двух из них вызывает изменение знака. Тогда среди значений s не может быть равных между собой n_k , т. е. N_r равны либо 1, либо 0.

Мы вводим теперь операторы a_r и сопряженные им операторы a_r^\dagger , которые определяются так же, как b_r и b_r^\dagger . При этом, однако, следует иметь в виду, что все $s=0$, если одно из $N_r > 1$. Отсюда вытекает:

$$a_r a_r = N_r, \quad a_r a_r^\dagger = 1 - N_r, \quad a_r a_r = 0, \quad a_r^\dagger a_r^\dagger = 0.$$

Далее, необходимо иметь правило знаков, которое учитывало бы изменение знака ψ при перестановке двух частиц. Оно может быть сформулировано при помощи соотношений $a_r a_s = -a_s a_r$ и $a_r a_s^\dagger = -a_s^\dagger a_r$ при $s \neq r$. При объединении все это дает:

$$a_r^\dagger a_s + a_s^\dagger a_r = \delta_{rs} \quad \text{и} \quad a_r a_s + a_s a_r = 0.$$

Образованные при помощи a_r ψ -операторы

$$\psi(\tau) = \sum_r a_r \varphi_r(\tau) \quad \text{и} \quad \psi^\dagger(\tau) = \sum_r a_r^\dagger \varphi_r^*(\tau)$$

удовлетворяют тогда перестановочным соотношениям

$$\psi(\tau') \psi^\dagger(\tau) + \psi^\dagger(\tau) \psi(\tau') = \delta(\tau - \tau') \quad \text{и} \quad \psi(\tau') \psi(\tau) + \psi(\tau) \psi(\tau') = 0.$$

Оператор Гамильтона и волновое уравнение здесь формально те же, что и в случае 1.

В обоих случаях $|C_n(N_1, N_2, \dots, t)|^2$ дает (при соответствующей нормировке) вероятность того, что в момент времени t имеется по N_r частиц в состояниях, описываемых соответственно функциями $\varphi_r(t)$; через зависимость этой вероятности от времени определяются вероятности переходов под влиянием внешних сил H и взаимодействия W . Получающиеся отсюда статистики называются в случае 1 *статистикой Бозе*, в случае 2 *статистикой Ферми* (см. стр. 566).

13. Операторы Гамильтона со свойствами симметрии

Если физическая система обладает *симметрией*, т. е. если оператор Гамильтона является инвариантным относительно некоторых преобразований A координат конфигурационного пространства $\tau' = A\tau$, то тогда для заданного собственного значения E_l собственной функции, принадлежащей E_l , одновременно с $\psi_l(\tau)$ будет также $\psi_l(A\tau)$. Преобразования A образуют группу симметрии \mathfrak{G} оператора H . Эквивалентной \mathfrak{G} является группа симметризирующих операторов Λ_A , для которых имеем:

$$\Lambda_A \psi(A\tau) = \psi(\tau) \quad \text{и} \quad \Lambda_A H = H \Lambda_A \quad (\text{см. стр. 51}).$$

Группа \mathfrak{G} может состоять из ортогональных преобразований пространственных координат (пространственная симметрия) и перестановок координат частиц (эквивалентность частиц).

Если E_l есть h -кратное собственное значение оператора H и $\psi_\nu^{(l)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, h$) — соответствующие линейно независимые собственные функции, то

$$\Lambda_A \psi_\nu^{(l)}(\tau, t) = \sum_{\nu=1}^h d_{\nu\mu}(A) \psi_\mu^{(l)}(\tau, t).$$

Матрицы $D(A) = (d_{\mu\nu}(A))$ образуют тогда \hbar -мерное представление группы симметрии \mathfrak{G} .

Если будем исходить из какой-либо другой системы \hbar линейно независимых функций:

$$\psi'_\nu{}^{(l)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu=1}^{\hbar} S_{\mu\nu} \psi_\mu^{(l)}(\mathbf{r}, t),$$

то получим:

$$\Lambda_{A'} \psi'_\mu{}^{(l)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu=1}^{\hbar} d'_{\nu\mu}(A) \psi'_\nu{}^{(l)}(\mathbf{r}, t)$$

и

$$(d'_{\mu\nu}(A)) \equiv D'(A) = S^{-1} D(A) S,$$

т. е. каждому \hbar -кратному собственному значению соответствует одно определенное с точностью до преобразования подобия \hbar -мерное представление группы симметрии.

Эти представления удобно приводить, т. е. выбирать S таким образом, чтобы D распадалось на неприводимые части:

$$D(A) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(A) & & & & \\ & D^{(2)}(A) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D^{(s)}(A) \end{pmatrix}.$$

Эти неприводимые $D^{(s)}(A)$ не обязаны быть все различными.) Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Функции ψ_{ν} , соответствующие различным неприводимым частям $D^{(s)}(A)$, ортогональны.

2) При возмущении, обладающем той же симметрией, что и невозмущенный оператор Гамильтона, собственное значение расщепляется так, что собственные функции, принадлежащие одинаковым $D^{(s)}(A)$, остаются вырожденными. Расщепление происходит на такое число собственных значений, которое не превосходит числа неприводимых частей $D^{(s)}(A)$, причем встречающиеся несколько раз $D^{(s)}$ должны считаться столько же раз. Это свойство позволяет еще в нерасщепленном состоянии распределить собственные значения по термам, принадлежащим определенным классам.

3) Если возмущение имеет иную симметрию, чем невозмущенный оператор Гамильтона, то целесообразным является применение представлений $D(B)$ группы симметрии \mathfrak{G} оператора возмущения, которые следует разлагать на возможно большее число неприводимых частей $D^{(s)}(B)$. Соответствующие линейные комбинации невозмущенных собственных функций образуют собственные функции, приспособленные к возмущению настолько хорошо, насколько этого можно достичь с помощью соображений, основанных на одной лишь симметрии.

4) Число неприводимых частей представления $D(A)$ (соответственно $D(B)$) для конечных групп получается из формул (см. стр. 295)

$$q_s = \frac{1}{h} \sum_A \chi(A) \chi^{(s)}(A); \quad \text{соответственно,} \quad q_s = \frac{1}{h} \sum_B \chi(B) \chi^{(s)}(B),$$

где $\chi(A) = \sum_{\nu=1}^h d_{\nu\nu}(A)$ и т. д. означают характеры представлений $D(A)$, $D^{(s)}(A)$ и соответственно $D(B)$, $D^{(s)}(B)$ (см. пример в Приложении 13, стр. 587).

5) Для произвольных (непрерывных) групп симметрии \mathfrak{G} , соответственно \mathfrak{S} , справедливы аналогичные соотношения.

II. Релятивистская механика точки

1. Основные уравнения

Переводя уравнение $\frac{E^2}{c^2} - p^2 - m_0^2 c^2 = 0$ (см. стр. 484) на язык квантовой теории, получим релятивистское обобщение уравнения Шредингера в свободном от поля пространстве в форме *уравнения Клейна — Гордона*

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0,$$

которое с помощью обозначений $x_\alpha = \{t, ict\}$ и $\lambda = \frac{\hbar}{m_0 c}$ (*комптоновская длина волны*) может быть записано также в форме

$$\left(\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \psi = 0. \quad (1)$$

В присутствии полей, имеющих потенциалы $\Phi_\alpha = \{\mathfrak{A}, i\Phi\}$, операторы $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ следует заменить более общими операторами $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{ie}{\hbar c} \Phi_\alpha$.

Теория, которая была построена на основе этого уравнения, для электронов не оправдалась. Здесь более успешной оказалась теория Дирака, где с помощью клиффордовых чисел γ_α (см. стр. 28—29) уравнение (1) сначала приводится к виду

$$\left(\sum_\alpha \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\sum_\alpha \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\lambda} \right) \psi = 0.$$

Оно удовлетворяется, если ψ есть решение уравнения первого порядка:

$$\left(\sum_\alpha \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\lambda} \right) \psi = 0.$$

Так как оператор $\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ не является самосопряженным, а оператор $\gamma_4 \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ является таковым, то более рационально писать:

$$\left(\sum_\alpha \gamma_4 \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\gamma_4}{\lambda} \right) \psi = 0,$$

или, записывая подробнее и умножая на $\hbar c$:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + ic \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_4 \gamma_\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} + \gamma_4 m_0 c^2 \psi = 0 = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \psi.$$

Это можно рассматривать как перевод на язык квантовой теории уравнения:

$$E = (v\mathfrak{p}) + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

в котором, как и выше, следует положить:

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_\alpha = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

и, кроме того,

$$v_\alpha = ic \gamma_4 \gamma_\alpha \quad \text{и} \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma_4.$$

В присутствии полей следует применять указанное выше обобщение. Мы получаем таким образом *основное уравнение Дирака*:

$$L\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^4 \gamma_4 \gamma_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} - \left(\sum_\alpha \gamma_4 \gamma_\alpha \frac{ie}{\hbar c} \Phi_\alpha - \frac{\gamma_4}{\lambda} \right) \psi = 0.$$

Если γ рассматривать как матричные операторы и пользоваться для них четырехмерным представлением (см. стр. 42), то речь будет идти о системе четырех дифференциальных уравнений для четырех функций ψ_s ($s = 1, 2, 3, 4$), зависящих от положения и времени.

Применяя гиперкомплексные векторы (см. стр. 238), мы можем написать:

$$\frac{1}{ic} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \{ \gamma_4 (\mathfrak{h}\mathfrak{p}) + i\Phi \} - \gamma_4 \left\{ (\mathfrak{h} \text{grad}) + \frac{1}{\lambda} \right\} \right\} \psi.$$

Так как оператор L — самосопряженный, то будем иметь $(L\psi)^* = \psi^* L = 0$, и следовательно, ввиду $\psi^* \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \psi^*$:

$$-\psi^* L = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha} \gamma_4 \gamma_\alpha + \psi^* \left(\sum_\alpha \gamma_4 \gamma_\alpha \frac{ie}{\hbar c} \Phi_\alpha - \frac{\gamma_4}{\lambda} \right) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_2 \psi) = 0.$$

(Скобку здесь следует понимать как обозначение суммирования по s . Точно так же суммировать по s следует во всех формулах, в которых ψ встречается дважды, причем индекс s часто не будет выписываться.) Это уравнение можно интерпретировать как уравнение непрерывности:

$$e (\psi^* \psi) = \rho \text{ — плотность заряда,}$$

$$ice (\psi^* \gamma_{\alpha} \psi) = i_{\alpha} \text{ — плотность тока } (\alpha = 1, 2, 3).$$

Дальнейшие интерпретации можно получить из преобразований:

$$\psi = \lambda \sum_{\alpha} \left(-\gamma_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{ie}{\hbar c} \gamma_{\alpha} \psi \Phi_{\alpha} \right),$$

$$\psi^* \gamma_{\alpha} = \lambda \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\alpha}} \gamma_{\alpha} + \frac{ie}{\hbar c} \psi^* \gamma_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right),$$

и отсюда

$$\begin{aligned} (\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \psi) &= \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\alpha}} \gamma_{\alpha} \gamma_2 \psi \right) - \left(\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} \right) \right\} + \\ &+ \frac{ie}{\hbar c} \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} \left\{ (\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \psi) + (\psi^* \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha} \psi) \right\} = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\beta}} \gamma_{\alpha} \psi \right) - \left(\psi^* \gamma_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\beta}} \right) \right\} + \frac{ie}{\hbar c} \lambda \Phi_{\beta} (\psi^* \gamma_{\alpha} \psi) + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \psi), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathbf{i} = \frac{i\hbar e}{2m_0} \{ \text{grad } \psi^* \gamma_{\alpha} \psi \} - (\psi^* \gamma_{\alpha} \text{ grad } \psi) \} - \frac{e^2}{m_0 c} \mathfrak{M} (\psi^* \gamma_{\alpha} \psi) - c \text{ rot } \mathfrak{M} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

$$\rho = -\frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \gamma_{\alpha} \psi \right) - \left(\psi^* \gamma_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} - \frac{e^2}{m_0 c^2} \Phi (\psi^* \gamma_{\alpha} \psi) + \text{div } \mathfrak{F},$$

где

$$\mathfrak{M}_{\beta\gamma} = i \frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi^* \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_{\gamma} \psi) \quad (x = 2, 3; y = 3, 1; z = 1, 2),$$

$$\mathfrak{F}_{\alpha} = -\frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi^* \gamma_{\alpha} \psi) \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Эти формулы можно рассматривать как перевод классических уравнений:

$$\dot{\mathbf{i}} = \bar{\rho} \mathbf{v} - c \operatorname{rot} \mathfrak{M} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \quad \rho = \bar{\rho} + \operatorname{div} \mathfrak{P} \quad (\text{см. стр. 449})$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \mathbf{v} &= \bar{\rho} \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) = \bar{\rho} \frac{1}{m_0} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \rho_0 \frac{1}{m_0} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right), \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho_0}{m_0 c^2} (E - e \Phi) \end{aligned}$$

на язык квантовой теории.

Отсюда

$e(\psi^* \gamma_4 \psi) = \rho_0 = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ — плотность заряда в системе отсчета, относительно которой он представляется покоящимся (см. стр. 482),

$$\begin{aligned} i \frac{\hbar e}{2} \{ (\operatorname{grad} \psi^* \gamma_4 \psi) - (\psi^* \gamma_4 \operatorname{grad} \psi) \} &= \rho \rho_0, \\ i \frac{\hbar e}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \gamma_4 \psi \right) - \left(\psi^* \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} &= E \rho_0. \end{aligned}$$

Здесь следует иметь в виду, что ρ_0 не является положительно определенным и подобно $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ может быть также отрицательным. Поэтому m и E способны принимать оба знака, если величину m_0 рассматривать как положительную.

В то время как в классической теории переход от $+\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ к $-\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ через $v=c$ не представляется возможным, такой переход допускается квантовой теорией.

Разумеется, величины, образованные с помощью ψ^* и ψ , можно рассматривать как статистические средние значения не только для одинаковых частиц, но и для таких частиц, которые имеют различные знаки m (соответственно положительное или отрицательное $\frac{e}{m}$) и ведут себя поэтому как позитроны и электроны.

Особый интерес представляют члены с \mathfrak{M} и \mathfrak{P} , которые интерпретируются соответственно как плотности поляризационного тока и поляризационного заряда. \mathfrak{M} и \mathfrak{P} называются *плотностями спина*.

В замкнутой (покоящейся) системе $\int \mathfrak{M} dv$ называется *магнитным моментом*. \mathfrak{P} определяется через \mathfrak{M} по классической формуле $\mathfrak{P} = \frac{1}{c} [v \mathfrak{M}]$ релятивистски инвариантным образом.

Воспользовавшись специальной формой записи клиффордовых чисел, имеющейся на стр. 43, получим уравнения Дирака:

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - \frac{\partial \psi_4}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \psi_1 &= \\
 &= \frac{e}{\hbar c} \{ -\Phi \psi_1 + A_x \psi_4 - i A_y \psi_4 + A_z \psi_3 \}, \\
 -\frac{i}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + i \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \psi_2 &= \\
 &= \frac{e}{\hbar c} \{ -\Phi \psi_2 + A_x \psi_3 + i A_y \psi_3 - A_z \psi_4 \}, \\
 -\frac{i}{c} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{1}{\lambda} \psi_3 &= \\
 &= \frac{e}{\hbar c} \{ -\Phi \psi_3 + A_x \psi_2 - i A_y \psi_2 + A_z \psi_1 \}, \\
 -\frac{i}{c} \frac{\partial \psi_4}{\partial t} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{1}{\lambda} \psi_4 &= \\
 &= \frac{e}{\hbar c} \{ -\Phi \psi_4 + A_x \psi_1 + i A_y \psi_1 - A_z \psi_2 \},
 \end{aligned}$$

а также величины:

$$\begin{aligned}
 \rho &= e (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4), \\
 i_x &= ce (\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \\
 i_y &= -ice (\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \\
 i_z &= ce (\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2), \\
 \rho_0 &= e (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 - \psi_4^* \psi_4), \\
 M_x &= -\frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 - \psi_4^* \psi_3), \\
 M_y &= i \frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1 - \psi_3^* \psi_4 + \psi_4^* \psi_3), \\
 M_z &= -\frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2 - \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4), \\
 P_x &= i \frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 - \psi_4^* \psi_1), \\
 P_y &= \frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_4 - \psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1), \\
 P_z &= i \frac{\hbar e}{2m_0 c} (\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_4^* \psi_2).
 \end{aligned}$$

2. Применение уравнений Дирака

Из решений уравнений Дирака при заданных потенциальных функциях и краевых условиях можно получить, как и в нерелятивистской теории, средние значения, вероятности переходов и т. п.

Решение легко получить в случае, когда поле отсутствует (Φ и \mathfrak{A} постоянны). Мы ищем четыре функции χ_i , удовлетворяющие уравнению Клейна — Гордона, и объединяем их в матрицу χ , состоящую из одного столбца. Тогда

$$\psi = \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 \gamma_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{\lambda} \right\} \chi$$

представляет собой решение уравнения Дирака. Функции χ_i можно рассматривать как потенциалы или компоненты вектора Герца для ψ . Для получения решения достаточно взять одно из χ_i отличным от нуля. Если взять их все равными между собой с точностью до амплитудного множителя, то получим решения с четырьмя коэффициентами, значениями которых можно распорядиться и выбор которых ведет к различным возможностям для спина и заряда.

В случае сферической симметрии ($\Phi = \Phi(r)$, $\mathfrak{A} = 0$) перестановочным с L будет не $[\tau \text{ grad}]$, а

$$\mathfrak{N} = \frac{\hbar}{i} \left([\tau \text{ grad}] + \frac{i}{2} \mathfrak{s} \right) \quad (s_x = -i\gamma_2\gamma_3, \dots, \text{ см. стр. 43}).$$

Это можно интерпретировать, считая, что \mathfrak{N} представляет оператор полного момента количества движения, составленного из «орбитального момента количества движения» $\frac{\hbar}{i} [\tau \text{ grad}]$ и собственного момента количества движения электрона — его *механического спина* с абсолютной величиной $\frac{\hbar}{2}$. Другими операторами, перестановочными с L , являются

$$K = \frac{\hbar}{i} \{ (\mathfrak{s} [\tau \text{ grad}]) + i \} \gamma_4$$

с собственными значениями $k\hbar$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и

$$N^2 = -\hbar^2 \left\{ [\tau \text{ grad}]^2 + i (\mathfrak{s} [\tau \text{ grad}]) - \frac{3}{4} \right\} = K^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

с собственными значениями

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{1}{4} \right) \hbar^2 &= \left(|k| - \frac{1}{2} \right) \left(|k| + \frac{1}{2} \right) \hbar^2 = j(j+1) \hbar^2 \\ &\left(j = |k| - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

III. Теория излучения

1. Теория излучения на основе принципа соответствия

Если точечные элементы системы несут электрические заряды, то они подвержены воздействию не только тех электрических полей, потенциалы которых входят в уравнение Шредингера, но и обратному воздействию их собственных полей, которое проявляется как запазды-

вающее взаимодействие между элементами и как потеря энергии через излучение.

Во многих случаях достаточно рассматривать поле классически как созданное зарядом плотности ρ и током плотности $\rho\mathbf{v}$, вычисленными по квантовой теории. Тогда может быть непосредственно применен метод запаздывающих потенциалов (см. стр. 462).

Если все плотности построены линейно из членов вида $A_{ik} e^{i \frac{(E_l - E_k) t}{\hbar}}$, возникающее поле излучения может быть построено из частичных полей с частотами $\omega_{ik} = \frac{E_k - E_l}{\hbar}$ (условие частот Бора). Для их интенсивности определяющими являются, согласно классической теории (см. стр. 463), матричные элементы дипольного момента $e\mathbf{r}_{kl} = e \int \psi_l^* \mathbf{r} \psi_k dv$. Потеря энергии через излучение вычисляется классически по формуле

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \sum_{k,l} |\mathbf{r}_{kl}|^2.$$

С помощью квантовой теории та же величина вычисляется по формуле

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \sum_{k,l} |g_k(t)|^2 |g_l(t)|^2 \frac{\lambda_{kl}^4}{\hbar^3} |\mathbf{r}_{kl}|^2.$$

Приравнявая, мы получаем:

$$|\ddot{\mathbf{r}}_{kl}|^2 = \frac{\lambda_{kl}^4}{\hbar^3} |g_k(t)|^2 |g_l(t)|^2 |\mathbf{r}_{kl}|^2.$$

Так как при этом создание полей зарядами рассматривается классически, а воздействие их на заряды рассматривается квантотеоретически с помощью уравнения Шредингера, то эта теория не вполне удовлетворительна.

2. Квантовая теория излучения

Последовательную теорию мы получим, рассматривая электромагнитное поле как немеханическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Это поле само по себе должно рассматриваться в духе квантовой теории как находящееся во взаимодействии с несущей заряд механической системой.

При этом мы исходим из представления поля в канонической форме (см. стр. 468), в которой потенциалы состоят из статической части φ и из части \mathfrak{A}_s , составленной из поперечных волн. Только последнюю можно рассматривать собственно как излучение с координатами A_r и сопряженными с ними импульсами C_r .

а) Поле излучения, свободное от зарядов

Так как функция Гамильтона $\sum_{\tau} H_{\tau}$ имеет ту же форму, что и функция Гамильтона системы независимых линейных осцилляторов (при комплексном способе записи), то к ней проще всего применить аналогичное квантотеоретическое рассмотрение. Особенно хорошо приспособлен для этого матричный метод.

Можно непосредственно применить (комплексное) представление, имеющееся на стр. 235, беря $a^2 = \frac{2\hbar c}{k_{\tau}} = \frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}} \hbar$, причем $A_{\tau} A_{\tau}^*$ в классической функции Гамильтона при квантотеоретическом рассмотрении следует заменить симметричной формой $\frac{A_{\tau} A_{\tau}^* + A_{\tau}^* A_{\tau}}{2}$ (и аналогично для $C_{\tau} C_{\tau}^*$). Матрицы (A_{τ}) , (C_{τ}) соответствуют тогда, с точностью до зависящего от времени экспоненциального множителя, величинам (A) , (C) стр. 468.

Собственными значениями E_{τ} для H_{τ} служат $E_{\tau} = \hbar \omega_{\tau} \left(n_{\tau} + \frac{1}{2} \right)$. Квантовое число n_{τ} называется числом *фотонов*, или *световых квантов* частоты ω_{τ} , содержащихся в соответствующей парциальной волне A_{τ} . Фотоны выступают, таким образом, как величины, которые можно сосчитать, но нельзя ни локализовать, ни индивидуализировать; им приписываются все же энергия $\hbar \omega_{\tau}$ и импульс $2\pi \hbar k_{\tau}$. Они имеют корпускулярную природу лишь постольку, поскольку являются носителями энергии и импульса, которыми они могут обмениваться с другими системами.

В матрицах (A_{τ}) , (C_{τ}) все элементы обращаются в нуль, кроме

$$(A_{\tau})_{n, n+1} = i \frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}} (C_{\tau})_{n, n+1} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}}} \sqrt{\hbar(n+1)} e^{-i\omega_{\tau} t}$$

и

$$(A_{\tau}^*)_{n, n-1} = -i \frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}} (C_{\tau})_{n, n-1} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_{\tau}}} \sqrt{\hbar n} e^{i\omega_{\tau} t}.$$

б) Взаимодействие излучения с веществом (общая часть)

Будем в операторе Гамильтона (см. стр. 468) члены $\sum_n \frac{1}{2m_n} p_n^2 + \sum_{n, n'} \frac{e_n e_{n'}}{[r_n - r_{n'}]}$, соответствующие системе, свободной от излучения и несущей заряд, вместе с членами $\sum_{\tau} H_{\tau}$, соответствующими свободному от зарядов полю излучения, рассматривать как *невозмущенную часть*.

Пока нет никакого взаимодействия, собственные значения энергии для этого невозмущенного состояния даются формулой

$$E = E_a + \sum_{\tau} \hbar \omega_{\tau} \left(n_{\tau} + \frac{1}{2} \right),$$

где E_a означает энергию системы в состоянии a , несущей заряд (с учетом статического взаимодействия и, возможно, внешних полей).

Взаимодействие между излучением и веществом дается тогда остальными членами оператора Гамильтона:

$$W = - \sum_n \frac{e_n}{m_n c} \sum_{\tau} A_{\tau}(\mathbf{p}_n, \mathbf{a}_{\tau}(\mathbf{r}_n))$$

при условии отбрасывания членов, квадратичных относительно \mathfrak{M} .

Рассмотрение можно провести при помощи обычного метода возмущений (см. стр. 370). При этом необходимо иметь в виду следующее:

1) Собственные значения энергии поля излучения при большом объеме V образуют, независимо от его вида, практически плотную последовательность, которая между ω и $\omega + d\omega$ имеет $dZ = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$ членов. Суммы по этим частотам заменяются поэтому интегралами.

2) Задачи, рассматриваемые при помощи этого метода, характеризуются в существенном предположениями относительно начального и конечного состояний несущей заряд системы и поля излучения. Далее, определяющую роль при процессе взаимодействия играет число участвующих в нем световых квантов, что ведет к следующему подразделению.

I. Одноквантовые процессы. Вероятность перехода из начального состояния a , n_{τ} в конечное состояние a' , $n'_{\tau} = n_{\tau} \pm 1$ пропорциональна e^2 . Здесь имеются следующие возможности:

а) Начальное состояние: a есть возбужденное состояние, и поле излучения отсутствует: $n_{\tau} = 0$. Конечное состояние: $a' \neq a$ с $E_{a'} = E_a$, $n'_{\tau} = 1$. Этот процесс представляет собой *спонтанное излучение* изолированной системы. Заметная вероятность перехода получается лишь для $\hbar \omega_{\tau} = E_a - E_{a'}$ (*условие частот Бора*). Этот процесс обуславливает также *естественную ширину линий*.

б) Начальное состояние: a есть возбужденное состояние, и налицо имеется излучение: $n_{\tau} \neq 0$. Конечное состояние: $a' \neq a$ с $E_{a'} < E_a$, $n'_{\tau} = n_{\tau} + 1$. Этот процесс означает *испускание в поле излучения*. Вероятность перехода будет заметной лишь для $\hbar \omega_{\tau} = E_a - E_{a'}$. Она пропорциональна $n_{\tau} + 1$. Часть, пропорциональная n_{τ} , означает *вынужденное испускание*, не зависящая от n_{τ} часть является *спонтанным испусканием в поле излучения*.

с) Начальное состояние: a — произвольное состояние (возбужденное или основное) и присутствует излучение: $n_z \neq 0$. Конечное состояние: $a' \neq a$ с $E_{a'} > E_a$, $n'_z = n_z - 1$. Вероятность перехода будет заметной лишь для $\hbar\omega_z = E_{a'} - E_a$ и $\sim n_z$. Это означает *поглощение* светового кванта, сопровождающееся возбуждением системы. Если при этом система представляет собой связанный электрон и a' принадлежит непрерывному спектру, то этот процесс носит название *фотоэффекта*. При этом имеем: $\hbar\omega_z = \frac{m}{2}v^2 - J_a$, где J_a означает энергию ионизации при начальном состоянии a (*уравнение Эйнштейна для фотоэффекта*). Свободные электроны световых квантов не поглощают.

Если система состоит из многих не зависящих друг от друга подсистем, которые взаимодействуют друг с другом лишь благодаря связи, возникающей вследствие излучения, и если имеется термодинамическое равновесие, то эти процессы ведут к законам *черного излучения*.

II. Двухквантовые процессы. Вероятность перехода при этих процессах пропорциональна e^4 . Имеются следующие возможности.

а) Начальное состояние: a — произвольное состояние и присутствует излучение: $n_z \neq 0$. Конечное состояние: $a' = a$, $n'_z = n_z \pm 1$ и парциальная волна τ' с $\omega_{\tau'} = \omega_z$, отличная от τ , уменьшается или увеличивается на один световой квант.

Это означает *когерентное рассеяние* излучения на системе (*рэлеевское рассеяние*).

б) Начальное состояние: как выше. Конечное состояние: $a' \neq a$, $n'_z = n_z \pm 1$ и парциальная волна τ'' , отличная от τ , уменьшается или увеличивается на один световой квант.

Вероятность перехода становится заметной лишь для $\hbar\omega_{\tau''} = \hbar\omega_z \pm (E_a - E_{a'})$. Это дает *некогерентное (рамановское) рассеяние*. Случаям $E_{a'} > E_a$ и $E_{a'} < E_a$ отвечают соответственно *стоксовы* и *антистоксовы* компоненты рассеянного излучения.

Подобные процессы играют основную роль при *дисперсии* и *резонансной флуоресценции*. На свободных электронах они вызывают *эффект Комптона*. Для двухквантовых процессов необходимо, вообще говоря, принимать во внимание также члены функции Гамильтона, пропорциональные \mathcal{M}^2 .

III. Множественные процессы по сравнению с названными выше процессами не играют практически никакой роли. Процесс, вероятность которого $\sim e^8$ (подобно вероятности трехквантового процесса), имеет место при *тормозном излучении*. В этом случае входящий извне электрон отклоняется в поле, и происходит взаимодействие между испускаемым при этом световым квантом и отклоняющим полем.

При процессах взаимодействия еще более высокого порядка (*множественные процессы*) эта теория не дает достаточно хорошего описания экспериментального материала.

3) Высшие приближения теории возмущений расходятся, в то время как первое приближение описывает экспериментальные факты удовлетворительно. Применимость теории к излучению при этом ограничивается длинами волн $\lambda > \frac{\hbar}{m_0 c}$ (комptonовская длина волны). Для меньших λ даже учет возникновения пар и релятивистских требований не привел пока к устранению трудностей.

с) Простые процессы взаимодействия

Вероятности перехода между состояниями с различными a и n_τ определяются матричными элементами

$$(W)_{a, n_\tau; a', n'_\tau} = \int \psi_{a, n_\tau}^* W \psi_{a', n'_\tau} dv.$$

Они существуют лишь при $n'_\tau = n_\tau + 1$ или $n'_\tau = n_\tau - 1$. В первом случае энергия переходит из системы в поле излучения путем испускания одного фотона частоты ω_τ , во втором случае энергия излучения переходит в систему благодаря поглощению фотона той же частоты. Соответствующими матричными элементами являются:

$$(W)_{a, n_\tau; a', n_\tau + 1} = - \sum_n \frac{e_n}{m_n c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_\tau}} \sqrt{\hbar(n_\tau + 1)} \int \psi_a^*(p_n \alpha_\tau(\tau_n)) \psi_{a'} dv,$$

$$(W)_{a, n_\tau; a', n_\tau - 1} = - \sum_n \frac{e_n}{m_n c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{\omega_\tau}} \sqrt{\hbar n_\tau} \int \psi_a^*(p_n \alpha_\tau^*(\tau_n)) \psi_{a'} dv,$$

причем p_n означает оператор импульса системы, $\frac{\hbar}{i} \text{grad}_n$, а временные множители $e^{\pm i\omega_\tau t}$ опущены.

Для частот ω_τ , длина волны $\lambda_\tau = 1/k_\tau$ которых велика по сравнению с размерами системы, можно принять, что в α_τ множитель $e^{2\pi i(\tau \tau_\tau)} \approx 1$; тогда, полагая $p_n = m_n \dot{\tau}_n$, получим:

$$\int \psi_a^*(p_n \alpha_\tau(\tau_n)) \psi_{a'} dv = \frac{m_n}{V \sqrt{V_g}} \left(e_\tau, \int \psi_a^* \dot{\tau}_n \psi_{a'} dv \right) = \frac{m_n}{V \sqrt{V_g}} (e_\tau, (\dot{\tau}_n)_{aa'})$$

и

$$(W)_{a, n_\tau; a', n_\tau + 1} = - \sum_n e_n \sqrt{\frac{4\pi}{\omega_\tau V_g}} \sqrt{\hbar(n_\tau + 1)} (e_\tau, (\dot{\tau}_n)_{aa'}),$$

$$(W)_{a, n_\tau; a', n_\tau - 1} = - \sum_n e_n \sqrt{\frac{4\pi}{\omega_\tau V_g}} \sqrt{\hbar n_\tau} (e_\tau, (\tau_n)_{aa'}).$$

Теория возмущений (см. стр. 370) для вероятности перехода из начального состояния a, n_z в конечное состояние a', n'_z при прямом переходе ($(W)_{a, n'_z; a', n'_z} \neq 0$) дает:

$$W_{a, n_z; a', n'_z} = |c(t)_{a, n_z; a', n'_z}|^2 = 2 |(W)_{a, n_z; a', n'_z}|^2 \frac{1 - \cos \frac{E_{a, n_z} - E_{a', n'_z}}{\hbar} t}{(E_{a, n_z} - E_{a', n'_z})^2}.$$

Для процесса излучения имеем при этом: $n'_z = n_z + 1$; $E_{a, n_z} - E_{a', n'_z} = E_a - E_{a'} - \hbar\omega_z$; для процесса поглощения: $n'_z = n_z - 1$; $E_{a, n_z} - E_{a', n'_z} = E_a - E_{a'} + \hbar\omega_z$.

Вероятность *испускания* одной отдельной спектральной линии получается суммированием по всем процессам испускания с $\omega_z = \omega$. Так как ω_z расположены плотно, суммирование можно заменить интегрированием по промежутку $\omega \leq \omega_z \leq \omega + d\omega$, так что

$$w_{\text{изл}} = \int_{\omega}^{\omega + d\omega} \sum_{a'} w_{a, n_z; a', n_z + 1} dZ.$$

Для системы, состоящей лишь из одного электрона, размеры которой малы по сравнению с длиной волны, следует тогда, после усреднения по всем направлениям поляризации e_z :

$$w_{\text{изл}} = \frac{8e^2}{3\pi c^3} \sum_{a'} \int \hbar\omega (n_z + 1) |(i)_{aa'}|^2 \frac{1 - \cos(E_a - E_{a'} - \hbar\omega) \frac{t}{\hbar}}{(E_a - E_{a'} - \hbar\omega)^2} d\omega.$$

Мы определяем:

$$U(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \bar{n}_z, \quad u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Тогда будем иметь: $V_g U(\omega) d\omega = \hbar\omega \bar{n}_z dZ$, т. е. $U(\omega)$ представляет собой спектральную «плотность излучения» (в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$).

Если в интеграле заменить n_z его средним значением \bar{n}_z , то получим:

$$w_{\text{изл}} = \frac{8\pi}{3} e^2 \sum_{a'} \int_{\omega}^{\omega + d\omega} \frac{U(\omega) + u(\omega)}{\omega^2} |(i)_{aa'}|^2 \frac{1 - \cos(E_a - E_{a'} - \hbar\omega) \frac{t}{\hbar}}{(E_a - E_{a'} - \hbar\omega)^2} d\omega.$$

Для времен $t \gg \hbar/E_a$ существенный вклад в интеграл дают только частоты, удовлетворяющие резонансному условию

$$E_a - E_{a'} - \hbar\omega = 0$$

(это означает, что происходят только процессы с сохранением энергии), так что

$$w_{\text{изл}} = \frac{8\pi^2 e^2}{3\hbar^2} t \sum_{a'} |(\dot{x})_{aa'}|^2 \frac{U(\omega) + u(\omega)}{\omega^2} = \frac{8\pi^2 e^2}{3\hbar^2} t (U(\omega) + u(\omega)) \sum_{a'} |(x)_{aa'}|^2.$$

Вероятность процесса испускания за единицу времени $B = \frac{w_{\text{изл}}}{t}$ состоит из двух частей: вероятности *вынужденного* испускания (1-й член) и вероятности *спонтанного* испускания (2-й член, не зависящий от интенсивности поля излучения).

Аналогично найдем для *поглощения*:

$$w_{\text{погл}} = \frac{8\pi^2 e}{3\hbar^2} t U(\omega) \sum_{a'} |(x)_{aa'}|^2,$$

откуда определим вероятность процесса поглощения за единицу времени $A = \frac{w_{\text{погл}}}{t}$. Интенсивность, т. е. плотность энергии соответствующей линии поглощения, возбуждаемой полем излучения $U(\omega)$, равна $A\hbar\omega$.

Величины $e(x)_{aa'} = e \int \psi_a^* r \psi_{a'} dv$, определяющие интенсивность линий, являются матричными элементами дипольного момента.

Ширина спектральных линий. Заметный вклад в резонансные интегралы дает только окрестность точки резонанса, т. е. интервал энергии $\Delta E = \hbar\Delta\nu$, для которого $2\pi\Delta\nu \cdot t = 1$. При этом $t = \Delta t$ есть промежуток времени между $t = 0$, когда состояние системы было известно, и $t = t$, когда испускается линия. Линия определяется не вполне точно, в соответствии с соотношением

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2\pi},$$

причем неопределенность ΔE тем больше, чем меньше промежуток времени Δt (*соотношение неопределенностей Гейзенберга*).

Термодинамическое равновесие. Пусть N — число атомов в состоянии n , N' — число атомов в состоянии n' . Тогда будем иметь при равновесии:

$$NA = N'E \quad (\text{уравнение Эйнштейна});$$

кроме того, должно быть

$$\frac{N}{N'} = e^{\hbar\nu/kT} \quad (\text{распределение Больцмана, см. стр. 558}).$$

Отсюда следует для плотности энергии излучения (при наличии «угольной пылинки»!)

$$U(\nu) = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1} \quad (\text{формула Планка}).$$

Производные соотношения:

1) Максимум интенсивности ν_0 лежит при $\frac{h\nu_0}{kT} \approx 5$ или при длине волны $\lambda_0 = \frac{0,2897}{T} \text{ см} = \frac{0,2897 \cdot 10^8}{T} \text{ \AA}$ (закон смещения Вина).

2) Асимптотическая формула для малых частот (длинноволновый свет)

$$U(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 \quad (\text{формула Рэлея — Джинса}).$$

3) Асимптотическая формула для больших частот (коротковолновый свет)

$$U(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT} \quad (\text{формула Вина}).$$

4) Плотность энергии излучения (интеграл по всем частотам)

$$\int_0^{\infty} U(\nu) d\nu = \sigma T^4 = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3} T^4 = 7,562 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг/см}^3$$

(закон Стеффана — Больцмана).

Полное испускание излучающей поверхности

$$\sigma c T^4 = 2,267 \cdot 10^{-4} T^4 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}.$$

РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ ТЕРМОДИНАМИКА

1. Основные понятия

Термодинамика представляет собой системную теорию (см. стр. 410). Это означает, что ту часть вселенной, которую она изучает, она рассматривает как систему, состоящую из некоторого числа гомогенных подсистем; каждая из последних характеризуется определенными параметрами. Предметом теории служат изменения этих параметров, вызываемые внешним воздействием, так же как и взаимодействием подсистем между собой. Параметры, относящиеся к форме, положению и скорости системы, почти не употребляются, т. е. термодинамика ограничивается изучением таких вопросов, для которых эти параметры не являются существенными.

Параметр времени также употребляется лишь для упорядочения последовательности состояний; его метрические свойства при этом несущественны, т. е. при дифференцировании по времени интерес представляет лишь знак. В частности, представляют интерес случаи, когда эти производные обращаются в нуль; соответствующие состояния называются состояниями *равновесия*.

Нами используются два вида параметров:

1. *Экстенсивные параметры*, которые обозначают величину систем или их содержание, например объем, массу, энергию и т. п.
2. *Интенсивные параметры*, являющиеся сами по себе функциями положения и поддающиеся изменению, которые, однако, внутри подсистемы не должны зависеть от положения. Они определяют *состояние гомогенных* подсистем.

Физико-химическая природа системы лишь с трудом может быть описана числовыми параметрами и изменяется, вообще говоря, не непрерывно. Поэтому она указывается особо в качестве одной из характеристик состояния. Однако, например, концентрацию растворов можно все же назвать интенсивным параметром.

Опыт показывает, что между интенсивными параметрами существуют различные соотношения (*уравнения состояний*). Многие из этих параметров являются в существенном определенными, если известны лишь два таких уравнения и физико-химическая природа. Для многих

целей поэтому достаточно описывать систему только при помощи ее объема V или массы M , ее природы и двух произвольных так называемых *интенсивных переменных*, например при помощи *удельного объема* $v = \frac{V}{M}$ и *внутреннего давления* p . Вместо этих величин можно, конечно, воспользоваться произвольными функциями от v и p .

В большинстве случаев гомогенные системы рассматриваются как расположенные рядом и не имеющие общих частей. Их взаимодействие осуществляется при соприкосновении через общие граничные поверхности, которые называются «стенками» и либо препятствуют взаимодействию, либо делают его возможным.

Принимается, далее, что можно произвольным образом изменять свойства таких стенок. В этом смысле схематизируются такие операции, как создание и устранение преград, открывание и закрывание вентилях, осуществление контактов и т. п., которые для своего выполнения не требуют заметной работы.

2. Процессы и равновесия

Изменения состояний, или так называемые *процессы*, происходят:

- а) *вынужденно*, благодаря (положительной или отрицательной) работе механических или электродинамических сил;
- б) *спонтанно*, благодаря процессам выравнивания между взаимодействующими подсистемами. Эти процессы протекают в определенном направлении, зависящем от состояния, и ведут в конце концов к равновесию.

Стенки, в зависимости от их свойств, делают возможными или предотвращают (или замедляют) названные выше процессы. Стенки могут быть (или не быть):

- а) *жесткими*, противостоящими действующим механическим поверхностным силам,
- б) *экранирующими* по отношению ко всем или некоторым полям,
- с) *непроницаемыми* для всех или некоторых веществ.

Эти свойства в совокупности все же, вообще говоря, еще недостаточны, чтобы сделать систему независимой от ее окружения. Стенка, которая выполняет это и тем самым делает систему «независимой», должна, кроме того, быть:

- д) *адиатермической*, т. е. теплонепроницаемой. В противном случае она называется *диатермической*.

Система, ограниченная адиатермическими непроницаемыми экранирующими стенками, называется *адиобатически* замкнутой.

Через диатермическую стенку, разделяющую две системы (1) и (2), осуществляется процесс выравнивания, который в конце концов приводит к *тепловому равновесию*. Последнее, в соответствии с опытом, характеризуется тем, что определяемая физико-химической природой гомогенной системы (1) функция $\mathcal{F}_1(p_1, v_1)$ ее интенсивных переменных

становится равной аналогичной функции $\vartheta_2(p_2, v_2)$ системы (2): $\vartheta_1 = \vartheta_2$. Эта величина ϑ (или какая-либо ее функция $F(\vartheta)$) может быть в гомогенной системе выбрана в качестве второй интенсивной переменной наряду с p или v . Она называется *эмпирической температурой* (с произвольной шкалой). Две диатермически соприкасающиеся системы имеют, таким образом, в *тепловом* равновесии по определению одинаковую температуру.

При нежесткой стенке происходит выравнивание давления, приводящее к равновесию, $p_1 = p_2$. Если стенка служит точкой приложения внешних сил, то они уравниваются разностью давлений $p_1 - p_2$.

При проницаемой стенке происходит выравнивание концентрации вещества (диффузия), однако оно не должно обязательно приводить к гомогенности.

Термодинамика изучает не скорости подобных процессов выравнивания, но лишь достигнутые равновесия или последовательности состояний равновесия, наступающие после каких-либо воздействий, движения стенок или изменения их свойств. В случае, когда какой-либо процесс представляется квазиплотной последовательностью равновесий, говорят о *квазистатическом* процессе.

3. Энергия

Если над гомогенной адиабатически замкнутой системой в состоянии (1) произвести работу A , то конечное состояние (2) этим еще не будет определено однозначно. Существует, однако, функция u интенсивных переменных, определяемая природой системы, такая, что всегда, независимо от исходного состояния и от вида и природы действующих сил, имеет место равенство

$$A = M \{u(2) - u(1)\} = U_{(2)} - U_{(1)} \quad (\text{первое начало}).$$

$U = Mu$ называется *внутренней энергией*, u — *удельной энергией*. Затраченная работа «сохраняется» как приращение внутренней энергии.

Для адиабатически замкнутой гетерогенной системы, т. е. состоящей из нескольких гомогенных систем, справедливо то же утверждение с энергией $U = \sum_i U_i = \sum_i M_i u_i$, т. е. внутренняя энергия является *аддитивной* и *локализуется* в подсистемах.

В случае системы, адиабатически незамкнутой, подобная теорема сохранения для одной лишь работы не имеет места.

$Q = U_{(2)} - U_{(1)} - A$ называется *количеством теплоты*, сообщенным системе. При выравнивании температуры (без внешней работы) внутри адиабатически замкнутой гетерогенной системы U остается постоянной. Поэтому будем иметь $\sum_i Q_i = 0$, т. е. количество теплоты, содержащееся в системе, остается здесь неизменным.

Аналогично *внешняя энергия* определяется как работа, которую система может выполнить без изменения состояния. Внешняя энергия, вообще говоря, не может быть однозначно локализована в подсистемах.

Для суммы внутренней и внешней энергии справедлива общая теорема о сохранении энергии вполне замкнутой системы.

4. Температура и энтропия

Если принимаемые во внимание виды производимой работы мы ограничим лишь работой сжатия, выполняемой бесконечно малыми шагами (квазистатический процесс): $dA = -p dV$, то мы должны будем положить:

$$dQ = dU + p dV = \sum_i M_i (du_i + p_i dv_i) = \sum_i dQ_i.$$

dQ и dQ_i не являются полными дифференциалами функций интенсивных переменных. В гомогенной системе (i), однако, ввиду наличия здесь всего двух переменных заведомо существует интегрирующий делитель λ_i такой, что $\frac{dQ_i}{\lambda_i} = M_i d\varphi_i$ становится полным дифференциалом. φ_i тогда можно выбрать в качестве одной из интенсивных переменных i -й системы. λ_i определяется с точностью до множителя, являющегося функцией от φ_i .

Мы будем описывать теперь гетерогенную систему при равновесии ее n частей с помощью $n+1$ переменных φ_i и ϑ . Тогда имеем:

$$dQ = \sum_i M_i \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial \vartheta} + p_i \frac{\partial v_i}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta + \left(\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_i} + p_i \frac{\partial v_i}{\partial \varphi_i} \right) d\varphi_i \right\}.$$

Если система адиабатически замкнута, то $dQ=0$. Это приводит к уравнению Пфаффа (см. стр. 335). Оно интегрируемо, т. е. dQ имеет интегрирующий делитель Λ также при $n > 1$. Чтобы в этом удостовериться, достаточно знать из опыта, что, вообще говоря, невозможно при помощи только внешней работы перейти от данного состояния к *любому* близкому (часть формулировки 2-го начала по Каратеодори). Таким путем возникает полный дифференциал

$$\frac{dQ}{\Lambda} = d\Phi = \sum_i M_i \frac{\lambda_i}{\Lambda} d\varphi_i.$$

Отсюда следует, что ни Φ , ни $\frac{\lambda_i}{\Lambda}$ не зависят от ϑ ; поэтому справедливы следующие представления:

$$\lambda_i = T(\vartheta) f_i(\varphi_i), \quad \Lambda = T(\vartheta) F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots),$$

и, тем самым, $\frac{dQ}{T} = F d\Phi = \sum_i M_i f_i d\varphi_i$. Правая часть представляет собой полный дифференциал, и, следовательно, то же можно сказать и о левой части. Таким образом, F есть функция от Φ : $\Lambda = T(\vartheta) F(\Phi)$.

Так как вместе с λ_i и Λ интегрирующими делителями должны быть также $\frac{\lambda_i}{f_i(\varphi_i)}$ и $\frac{\Lambda}{F(\Phi)}$, то интегрирующим делителем как для dQ_i , так и для $dQ = \sum_i dQ_i$, будет и $T(\vartheta)$.

$T(\vartheta) = T$ называется *термодинамической температурой*.

Эти функции от ϑ с точностью до масштабного множителя однозначно определяются из уравнений

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\vartheta} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}, \quad \text{или} \quad T = e^{\int \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \vartheta} d\vartheta} = e^{\int \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \vartheta} d\vartheta}.$$

Мы определяем теперь функции s_i через их полные дифференциалы

$$ds_i = f_i d\varphi_i = \frac{dQ_i}{M_i T}, \quad \text{а также} \quad S_i = M_i s_i \quad \text{и} \quad S = \sum_i S_i,$$

где $dS = F d\Phi = \frac{dQ}{T}$.

S называется тогда *энтропией* всей системы, S_i — энтропией гомогенной подсистемы (i) и s_i — ее *удельной энтропией*.

S_i представляют собой аддитивные локализованные величины.

s и T могут применяться в качестве интенсивных переменных, но надо иметь в виду, что s пока определено лишь с точностью до аддитивной постоянной (см. стр. 549).

5. Первичные и вторичные интенсивные переменные

Первичными интенсивными переменными мы называем величины p , v , T , s . Величины p и v представляют собой механические, T и s — термические параметры. v и s являются *удельными величинами*, которым соответствуют *экстенсивные величины* $V = Mv$ и $S = Ms$. Напротив, p и T представляют собой *интенсивные величины*.

Из этих первичных интенсивных переменных могут быть выведены вторичные, или «потенциалы», с помощью формул (преобразование Лежандра):

$$\begin{aligned} du &= T ds - p dv, \quad u \text{ — удельная энергия,} \\ df &= -s dT - p dv, \quad f = u - Ts \text{ — удельная свободная энергия,} \\ d\phi &= -s dT + v dp, \quad \phi = f + pv = \\ &= u - Ts + pv \text{ — удельный термодинамический потенциал,} \end{aligned}$$

$$d\omega = T ds + v dp, \quad \omega = u + pv \text{ — удельная энтальпия.}$$

Они представляют собой удельные величины, которым соответствуют экстенсивные величины $U = Mu$, $F = Mf$, $\Psi = M\phi$, $W = M\omega^1$). Все

¹⁾ В новой физико-химической литературе часто пишут G вместо Ψ и I вместо W .

вторичные интенсивные переменные определены лишь с точностью до аддитивной постоянной. До тех пор, пока то же справедливо для s , величины f и ψ определены с точностью даже до линейной функции от T .

Масса M химически единой субстанции с молекулярным весом m содержит $n = \frac{M}{m}$ молей. Мы можем поэтому ввести экстенсивные величины, рассчитанные на один моль, например,

$$[U] = \frac{U}{n} = \mu \quad \text{и т. д.}$$

6. Коэффициенты и производные

Следующие частные производные имеют простой физический смысл и играют поэтому особую роль; они носят следующие наименования:

$$(dq = du + p dv)$$

$$c_v = \left. \frac{du}{dT} \right|_v = \left. \frac{dq}{dT} \right|_v \quad \text{— удельная теплоемкость при постоянном объеме,}$$

$$c_p = \left. \frac{du}{dT} \right|_p + p \left. \frac{dv}{dT} \right|_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_p \quad \text{— удельная теплоемкость при постоянном давлении,}$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \left. \frac{dv}{dT} \right|_p \quad \text{— коэффициент объемного расширения,}$$

$$\varepsilon = -v_0 \left. \frac{dp}{dv} \right|_T \quad \text{— коэффициент упругости} \left(\frac{1}{\varepsilon} \text{ — сжимаемость} \right),$$

$$\sigma = \frac{1}{p_0} \left. \frac{dp}{dT} \right|_v \quad \text{— термический коэффициент давления.}$$

Величины v_0 и p_0 представляют собой произвольно выбираемые стандартные величины.

Между этими коэффициентами существуют следующие тождественные соотношения:

$$\sigma p_0 = \varepsilon \alpha,$$

$$c_p - c_v = T \cdot p_0 \sigma \cdot v_0 \alpha = T \varepsilon \alpha^2 v_0.$$

Тождественные соотношения между производными первичных интенсивных переменных имеют вид (см. также стр. 47):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_s = - \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_v; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T = - \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_s = \left. \frac{\partial v}{\partial s} \right|_p;$$

$$\frac{\partial(s, T)}{\partial(v, p)} = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v - \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_v \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial v} \right|_p = 1;$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_v = -1.$$

Все они могут быть выражены через приведенные выше коэффициенты и удельные величины согласно следующей таблице:

	p	v	T	s
$ _v$	1	0	$\frac{1}{\varepsilon\alpha}$	$\frac{c_v}{\varepsilon\alpha T}$
$\left. \frac{\partial}{\partial p} \right _T$	1	$-\frac{v_0}{\varepsilon}$	0	$-\alpha v_0$
$ _s$	1	$-\frac{c_v v_0}{c_p \varepsilon}$	$\frac{\alpha T v_0}{c_p}$	0
$ _p$	0	1	$\frac{1}{\alpha v_0}$	$\frac{c_p}{\alpha T v_0}$
$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right _T$	$-\frac{\varepsilon}{v_0}$	1	0	$\varepsilon\alpha$
$ _s$	$-\frac{c_p \varepsilon}{c_v v_0}$	1	$-\frac{\varepsilon\alpha T}{c_v}$	0
$ _p$	0	αv_0	1	$\frac{c_p}{T}$
$\left. \frac{\partial}{\partial T} \right _v$	$\varepsilon\alpha$	0	1	$\frac{c_v}{T}$
$ _s$	$\frac{c_p}{\alpha T v_0}$	$-\frac{c_v}{\varepsilon\alpha T}$	1	0
$ _p$	0	$\frac{\alpha T v_0}{c_p}$	$\frac{T}{c_p}$	1
$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right _v$	$\frac{\varepsilon\alpha T}{c_v}$	0	$\frac{T}{c_v}$	1
$ _T$	$-\frac{1}{\alpha v_0}$	$\frac{1}{\varepsilon\alpha}$	0	1

Можно рассматривать первые производные вторичных переменных по первичным; они находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right|_{\beta} &= T \left. \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right|_{\beta} - p \left. \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right|_{\beta}, & \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\beta} &= -s \left. \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right|_{\beta} - p \left. \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right|_{\beta}, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right|_{\beta} &= -s \left. \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right|_{\beta} + v \left. \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|_{\beta}, & \left. \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right|_{\beta} &= T \left. \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right|_{\beta} + v \left. \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|_{\beta}, \end{aligned}$$

если в них α и β заменить двумя из переменных p, v, T, s .

7. Уравнения состояния и идеальные газы

Всякое уравнение, которое одну из первичных интенсивных переменных представляет как функцию (по крайней мере) двух других таких переменных, называется *уравнением состояния*. Уравнение $T = T(p, v)$ представляет собой пример уравнения состояния. Оно, однако, недостаточно еще для того, чтобы полностью характеризовать вещество, природа которого известна, так как из него нельзя получить, например, значений удельных теплоемкостей c_p и c_v . Для этого требуется еще второе уравнение, например $u = u(p, v)$.

Напротив, знание *одного* из четырех соотношений

$$u = u(s, v); \quad f = f(T, v); \quad \psi = \psi(T, p); \quad w = w(s, p)$$

является достаточным. Из каждого из них можно получить по два уравнения состояния при помощи дифференцирований, например в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_v = T(s, v); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_s = -p(s, v)$$

и аналогично для других соотношений.

Особенно простую форму имеет уравнение состояния так называемого *идеального газа*, которое может применяться для приближенного описания поведения газообразного вещества. Оно имеет вид $pv = rT$ и может быть дополнено равенствами $u = u_0 + apv = u_0 + arT$. Здесь мы можем два уравнения объединить в одно:

$$u = u_0 + Cv^{-\frac{1}{a}} e^{\frac{s}{ar}},$$

так как тогда получаем:

$$T = \frac{1}{ar}(u - u_0), \quad p = \frac{u - u_0}{av} = \frac{rT}{v},$$

и далее

$$\begin{aligned} s &= ar \ln((u - u_0) v^{\frac{1}{a}}) = s_0 + r \ln v + ar \ln T = \\ &= s_0' + ar \ln p + r(a + 1) \ln v = s_0'' + r(a + 1) \ln T - r \ln p, \end{aligned}$$

$$c_p = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p = (a + 1)r, \quad c_v = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_v = ar, \quad c_p - c_v = r,$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p = \frac{r}{v_0 p} = \frac{v}{v_0} \frac{1}{T},$$

$$\epsilon = -v_0 \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T = \frac{v_0 p}{v},$$

$$\sigma = \frac{1}{p_0} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \frac{r}{p_0 v}.$$

Идеальный газ, таким образом, характеризуется константами a и r ; а также константой энтропии s_0 .

В применении к реальным газам следует положить $r = \frac{R}{m}$, где m — молекулярный вес, а R означает универсальную константу — газовую постоянную: $R = 1,98 \text{ кал/моль} \cdot \text{град} = 8,315 \text{ эрг/моль} \cdot \text{град}$.

Для одноатомных газов статистическая теория газов дает $a = \frac{3}{2}$,
для двухатомных газов: $a = \frac{5}{2}$,

для трехатомных и многоатомных газов: $a = 3$.

Молекулы при этом рассматриваются как жесткие образования. Если им присписать еще f внутренних квазиупругих степеней свободы, то a следует увеличить на f .

Константа энтропии вводится в форме $i = m(c_p - s_0'')$ в качестве так называемой *химической постоянной*.

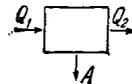
8. Процессы в гомогенных системах

Состояния гомогенной системы могут быть графически изображены при помощи точек на *диаграмме состояний*, т. е. в декартовой системе координат, где в качестве координат выбраны две интенсивные переменные. Значения других интенсивных переменных могут быть внесены в диаграмму в виде семейств кривых. Процессы описываются при помощи кусков кривых.

Процесс называется *изотермическим*, *адиабатическим* (изэнтропическим), *изохорическим*, *изобарическим*, если он протекает соответственно при постоянном T , s , v или p .

О *циклическом процессе* говорят в случае, когда процесс возвращает систему к исходному состоянию. При протекании подобного процесса системой совершается работа A и ею затрачивается равное количество тепла $Q = A$. Величина работы $A = M \oint p dv = M \oint T ds = Q$ представляется на диаграмме p, v или на диаграмме T, s площадью, ограниченной пробегаемыми кривыми.

Особенно важным является так называемый *циклический процесс Карно*. Он описывается четырьмя кривыми — двумя изотермами T_1 и T_2 и двумя адиабатами s_1 и s_2 (прямоугольник на диаграмме T, s). Вдоль изотерм принимаются и отдаются количества тепла, равные соответственно $Q_1 = T_1 \Delta S$ и $Q_2 = T_2 \Delta S$, где $\Delta S = M(s_1 - s_2)$ в соответствии со схемой



Поэтому имеем:

Величина $\eta = \frac{A}{Q_1}$ называется *коэффициентом полезного действия* системы.

Идея процесса Карно технически приближенно реализуется в двигателе с горячими газами. В *паровой машине* дело обстоит несколько иначе. Здесь некоторое количество вещества M с p_1, T_1 берется из резервуара R_1 и приводится адиабатически к p_2 , где p_2 — давление в резервуаре R_2 , куда оно затем поступает. Тогда s_1 определяется через p_1, T_1 . Ввиду $s_2 = s_1, T_2$ получим из s_2 и p_2 . При этом из резервуара R_1 заимствуется энергия $p_1 M v_1$ в виде работы, идущей на изменение объема, и $M u(p_1, s_1)$ в виде внутренней энергии количества вещества M , всего $M(p_1 v_1 + u_1) = M w(p_1, s_1)$ (энтальпия). Соответствующая энергия $M w(p_2, s_1)$ отдается резервуару R_2 . Полученная работа, таким образом, равна:

$$A = M(w(p_1, s_1) - w(p_2, s_2)); \quad s_1 = s_2.$$

Для графического изображения при этом особенно удобна диаграмма w, s с кривыми p и T (Молье).

Доказано, что невозможно построить тепловую машину с более высоким коэффициентом полезного действия, чем коэффициент полезного действия машины Карно. В противном случае можно было бы создать перпетуум мобиле.

Наибольшая работа, которую можно получить, переводя количество M вещества из состояния p_1, T_1 в состояние p_2, T_2 , называется «технической работоспособностью» этого количества вещества:

$$L = M(w_1 - w_2 - T_2(s_1 - s_2)).$$

9. Процессы в замкнутых системах

В замкнутых системах $M = \sum M_i$ и $U = \sum U_i$ являются постоянными. В случае внешних сил также $V = \sum V_i$ должно при помощи жесткой оболочки сохраняться постоянным.

В подобных замкнутых гомогенных системах невозможны никакие процессы; в гетерогенных же системах они возможны. Такими процессами можно в широких пределах управлять, заставляя отдельные системы произвольным образом действовать через стенки друг на друга. Такие управляемые процессы называются *обратимыми*, если возможно вернуть систему в исходное состояние; в противном случае они называются *необратимыми*.

Теоретическая возможность обратимого течения процесса доказывалась следующим специальным примером.

Между двумя отдельными системами, играющими роль так называемых резервуаров тепла, включается машина Карно, передающая свою работу какой-либо третьей отдельной системе как *накопителью*

энергии, например в виде работы адиабатического сжатия. Этот процесс может быть в любой момент остановлен или обращен. Здесь можно также принять, что энергия запасается каким-либо иным способом, например как чисто механическая, упругая, химическая и т. п.

Справедлива следующая основная теорема (*второе начало*): при обратимом процессе в замкнутой системе общая энтропия $S = \sum S_i = \sum M_i s_i$ остается постоянной; при необратимом процессе она возрастает.

Если бы энтропия замкнутой системы могла убывать, то было бы возможным создать перпетуум мобиле. В то же время существует большое число процессов, приводящих к увеличению энтропии. Важнейшими среди них являются следующие:

1. Переход работы A в теплоту вследствие *трения*:

$$\Delta S = \frac{A}{T} > 0.$$

2. Перенос тепла Q от системы (1) к системе (2) вследствие *теплопроводности*:

$$\Delta S = Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0; \quad T_1 > T_2.$$

3. Уменьшение давления массы M на dp *без выполнения работы*:

$$dS = M \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_u dp = -M \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_s}{\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_p} dp = \frac{M p \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_s}{T - p \left. \frac{\partial v}{\partial s} \right|_p} dp.$$

Для идеального газа будем иметь:

$$dS = -M \frac{R}{m} \frac{dp}{p} > 0; \quad dp < 0.$$

4. *Диффузия* массы M при малой концентрации c :

$$dS = -\frac{MR}{m} \frac{dc}{c} > 0; \quad dc < 0.$$

10. Равновесие в замкнутых системах

Так как обратимость является идеальной ситуацией, практически нереализуемой, то общая энтропия замкнутой системы возрастает до тех пор, пока не достигнет максимума, совместного с заданными M , U и V , при котором невозможны более никакие процессы.

Вопрос относительно достигаемого таким путем равновесия может быть, следовательно, сформулирован в виде вариационной задачи с дополнительными условиями:

$$\delta \sum (S_i + \lambda U_i + \mu V_i + \nu M_i) = 0, \quad \sum U_i = U, \quad \sum V_i = V, \quad \sum M_i = M,$$

и потому:

$$\sum M_i \{ \delta s_i (1 + \lambda T_i) + \delta v_i (\mu - \lambda p_i) \} + \delta M_i (s_i + \lambda u_i + \mu v_i + \nu) = 0.$$

Это дает следующий результат: пока течению процессов выравнивания не препятствуют адиатермические, жесткие или непроницаемые стенки, в состоянии равновесия должно быть $\phi_i = u_i + p_i v_i - T_i s_i = -\frac{\nu}{\lambda}$, т. е. величины T_i , p_i и ϕ_i должны быть равны во всех подсистемах:

$$T_i = -\frac{1}{\lambda}, \quad p_i = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \phi_i = -\frac{\nu}{\lambda}.$$

Примером применения этого предложения служит равновесие $\phi_1 = \phi_2$ жидкости v_1, s_1 и ее пара v_2, s_2 при $p_1 = p_2 = p$ и $T_1 = T_2 = T$.

При изменении T от T к $T + dT$ должно быть:

$$d(\phi_1 - \phi_2) = -(s_1 - s_2) dT + (v_1 - v_2) dp = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2} = f(p, T); \quad p = p(T) \text{ (кривая давления пара).}$$

Если количество M жидкости превращается в пар, то $M(s_2 - s_1)T = Q$ представляет собой необходимую *теплоту перехода* Mr . Это дает: $r = T(v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}$ (уравнение Клаузиуса — Клапейрона). Эта же теорема справедлива и для других превращений.

11. Равновесие в незамкнутых системах

Чтобы сделать возможными общие высказывания относительно незамкнутой гетерогенной системы, мы будем рассматривать ее как часть некоторой большей замкнутой системы вместе с ее гомогенным «окружением». Эта новая система должна быть столь велика, чтобы ее интенсивные переменные v', p', T' и т. д. при процессах не изменялись сколько-нибудь заметно. Кроме того, в окружении не должно происходить ничего такого, что могло бы повести к необратимости. Тогда имеем:

$$dS + dS' \geq 0, \quad dQ = -dQ' = -T'dS' = dU - dA,$$

следовательно,

$$dA \geq dU - T'dS.$$

dA представляет собой работу, совершаемую окружением над системой. Работа, выполняемая самой системой, равна $dA' = -dA$,

$$dA' \leq -dU + T'dS.$$

Правая часть, таким образом, представляет собой максимальную работу, которую система может выполнить в идеальном случае.

Если все стенки являются диатермическими, то в системе всюду будет $T = T' = \text{const}$ (изотермические процессы) и $dA' \leq -d(U - TS) = -dF$ (уменьшение свободной энергии). Равновесие наступает, когда свободная энергия F принимает наименьшее возможное при данных условиях значение.

Если, кроме того, стенки не оказывают сопротивления деформации, то всюду будет $p = p' = \text{const}$ (изотермически-изобарические процессы); тогда будем иметь:

$$dA' = d(pV) \quad \text{и} \quad d(U - TS + pV) = d\Psi \leq 0.$$

Потенциал Ψ может только убывать. Равновесие наступает, когда потенциал Ψ достигает своего минимума.

12. Теория фаз

Если все стенки диатермические, проницаемые для вещества, и могут свободно перемещаться, то заданные количества M_k имеющихся α веществ (k компонент, $k = 1, 2, 3, \dots, \alpha$) могут распределяться в количествах M_{ik} по β гомогенным отдельным системам (i фазам, $i = 1, 2, 3, \dots, \beta$) в виде растворов, смесей и т. п.: $M_i = \sum_{k=1}^{\alpha} M_{ik}$.

Состояния отдельных систем определяются значениями p и T , которые при равновесии для всех отдельных систем совпадают, а также концентрациями $c_{ik} = \frac{M_{ik}}{M_i}$, для которых имеют место β уравнений $\sum_k c_{ik} = 1$.

Всего, таким образом, мы имеем $2 + \alpha\beta - \beta$ произвольных параметров, характеризующих равновесие.

Условие равновесия $\Psi = \text{min}$ требует, чтобы при варьировании величин M_{ik} , например при виртуальном перемещении количества вещества δM_{ik} из одной отдельной системы (i) в другую (i'), величина $\Psi = \sum_i \Psi_i = \sum_i M_i \phi_i(p, T, c_{ik})$ оставалась неизменной. Это дает

$\frac{\partial \Psi_i}{\partial M_{ik}} = \frac{\partial \Psi_{i'}}{\partial M_{i'k}}$, т. е. всего $\alpha(\beta - 1)$ уравнений. Эти производные представляют собой функции только от p , T и c_{ik} , что вытекает из соотношений

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial M_{ik}} = \phi_i + M_i \frac{\partial \phi_i}{\partial c_{ik}} \frac{\partial c_{ik}}{\partial M_{ik}} = \phi_i + (1 - c_{ik}) \frac{\partial \phi_i}{\partial c_{ik}}.$$

Мы имеем, таким образом, $\alpha(\beta - 1)$ уравнений для $2 + \beta(\alpha - 1)$ параметров p , T , c_{ik} . Чтобы существовало решение, должно быть $\beta \leq \alpha + 2$. Это есть *правило фаз* Гиббса для возможности сосуществования β фаз из α компонент. Если значения p или T (или они оба) задаются заранее, т. е. определяются окружением, то возможное число β уменьшается на 1 (соответственно на 2).

13. Третье начало

Полное знание функции $s(p, T)$ существенно для многих целей. Так как s не может быть непосредственно измерена, то приходится прибегать к интегрированию, пользуясь формулой $ds = -\alpha v_0 dp + \frac{c_p}{T} dT$, после того, как α и c_p будут найдены из эксперимента как функции давления и температуры. При этом, однако, в выражении для s остается еще неопределенной постоянная интегрирования.

Опыт (и квантовая теория) приводят к заключению, что вообще α , c_p и c_v при $T=0$ исчезают, т. е. что при $T=0$ энтропия не зависит от p и v . Поэтому можно написать:

$$s(p, T) = s_0 + \int_0^T \frac{c_p(p, T)}{T} dT; \quad s(p, T) \Big|_{T=0} = s_0,$$

причем в случае постоянного p подлежащий вычислению интеграл сходится.

Это значение s_0 существенно для вычисления f и ϕ и, тем самым, для химического равновесия. Опыт позволяет предположить, что следует вообще принять $s_0 = 0$.

Возводя это предположение в ранг аксиомы, мы получаем так называемое *третье начало*, или *тепловую теорему Нернста*, в формулировке Планка:

$$s(p, T) \Big|_{T=0} = 0.$$

Отсюда следует, что абсолютный нуль температуры недостижим ни в каком конечном процессе.

Эта теорема неприменима к идеальным газам. Поэтому необходимо принять, что при достаточно низкой температуре никакой газ не может вести себя как «идеальный», а должен перейти в жидкое или твердое состояние.

14. Смесии идеальных газов

Поведение смеси реальных газов можно приближенно описать с помощью поведения смеси идеальных газов. Для нее требуют:

$$M = \sum M_i; \quad M_i = n_i m_i; \quad m_i \text{ — молекулярный вес, } n_i \text{ — число молей,}$$

$$p = \sum p_i; \quad p_i = \frac{RT}{V} n_i; \quad p_i \text{ — парциальное давление (закон Дальтона),}$$

$$p = \frac{RT}{V} \sum n_i; \quad p_i = p \frac{n_i}{\sum n_i} = pc_i; \quad c_i = \frac{n_i}{\sum n_i} \text{ — молярная концентрация,}$$

$$\sum c_i = 1,$$

$$U = \sum U_i = \sum n_i m_i u_i(T),$$

$$S = \sum S_i = \sum n_i m_i s_i(T, p_i) \quad (\text{«парадокс Гиббса»),}$$

$$\Psi = \sum \Psi_i = \sum (U_i - TS_i + Vp) = \sum n_i m_i \left(u_i - Ts_i + \frac{RT}{m_i} \right),$$

$$s_i(T, p_i) = s_{i0} + c_{pi} \ln T - \frac{R}{m_i} \ln pc_i = s_i(T, p) - \frac{R}{m_i} \ln c_i.$$

Если смешать несколько различных газов с одинаковым давлением p , то энтропия S возрастет при этом на $\Delta S = -R \sum n_i \ln c_i > 0$.

Химическое равновесие при постоянных p и T в газовых смесях, которые могут изменять свое число молей или концентрацию, определяется условием $\Psi = \min$, при варьировании величин n_i (или, что то же, c_i): $\sum \delta c_i = 0$;

$$\delta \Psi = \sum \delta n_i m_i \left(u_i - Ts_i + \frac{RT}{m_i} \right) - \sum n_i m_i T \delta s_i = 0,$$

$$\text{где } \delta s_i = -\frac{R}{m_i} \delta \ln c_i;$$

$$\sum n_i m_i \delta s_i = -R \sum n_i \delta \ln c_i = -R \sum \frac{n_i}{c_i} \delta c_i = -R \sum n_i \sum \delta c_i = 0.$$

Отсюда будем иметь:

$$\sum \delta n_i \left\{ m_i \left(u_i - Ts_i(T, p) + \frac{RT}{m_i} \right) - RT \ln c_i \right\} = 0.$$

Если для следующих функций, зависящих только от T и p , введем обозначение

$$\frac{m_i u_i}{T} - m_i s_i(T, p) + \frac{R}{m_i} = \varphi_i(T, p),$$

то условие равновесия примет вид

$$\sum \delta n_i (\varphi_i - R \ln c_i) = 0,$$

или, в другой форме записи,

$$c_1^{\delta n_1} c_2^{\delta n_2} \dots = e^{\sum \frac{\varphi_i \delta n_i}{R}}.$$

При химических реакциях величины δn_i находятся в рациональных отношениях, так называемых «кратных отношениях»:

$$\delta n_i = \nu_i z, \quad \nu_i \text{ — целые числа.}$$

Соотношение

$$c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \dots = e^{\sum \frac{\nu_i \mu_i}{R}} = K(T, p) \approx a e^{-\frac{b}{T}} \left(\frac{T}{p}\right)^{\sum \nu_i}$$

с постоянными a и b называется *законом действующих масс*.

15. Реальные газы

Уравнение состояния идеального газа представляет собой первое приближение к реальным газам. Оно справедливо асимптотически при высоких температурах и малых плотностях (при больших v). Существенно лучшим приближением является *уравнение ван-дер-Ваальса*

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \frac{RT}{m}$$

с характеристическими параметрами a и b для каждого газа. Вводя *приведенные величины*

$$\nu = \frac{v}{3b}, \quad \pi = \frac{p}{a} 27b^2, \quad \tau = T \frac{27}{8} \frac{b}{a} \frac{R}{m},$$

мы получаем в качестве универсальной формы *приведенное уравнение состояния*

$$\left(\pi + \frac{3}{\nu^2}\right)(3\nu - 1) = 8\tau.$$

При заданных p и T это — уравнение третьей степени относительно v , соответственно ν , дающее три возможных состояния. Какое из них реализуется при равновесии, выясняется из условия $\Psi = \min$. При $\tau \geq 1$ и при $\pi \geq 1$ существует только одно состояние.

Критической точкой называется состояние, в котором $\left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T = 0$ и $\left.\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right|_T = 0$. В нем будет $\nu = 1$, $\pi = 1$, $\tau = 1$ (критическое давление и критическая температура).

Точкой инверсии называется температура T_I , при которой $T \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p = v$. Отсюда $T_I \approx \frac{2am}{Rb}$. Если $T > T_I$, то расширение без выполнения работы ведет к нагреванию, если $T < T_I$, — то к охлаждению.

Точкой Бойля называется температура T_B , при которой $\left.\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right|_{T_B, p=0} = 0$. Приближенно: $T_B \approx \frac{1}{2} T_I$.

16. Обобщения

Формализм термодинамики и ее применения могут быть распространены на системы,

1) которые хотя и являются гомогенными, но все же требуют для описания своего состояния более чем двух независимых интенсивных

переменных, например магнитно или диэлектрически поляризованные вещества;

2) которые не содержат вещества, например пространство, заполненное статическим полем или полем излучения;

3) состоящие из бесконечно большого числа однородных систем бесконечно малого объема, например атмосферу, которая состоит из слоев бесконечно малой толщины;

4) которые не примыкают друг к другу, но пронизывают друг друга, например поля излучения различных частот. Понятие стенок должно быть здесь заменено другими способами взаимодействия.

Во всех случаях параметры, в частности температура и энергия подсистем, должны быть точно определяемы. Разделение энергии на внутреннюю и внешнюю иногда может быть произвольным.

17. Излучение в полости

Одним из примеров к 16,2) является излучение, находящееся в тепловом равновесии с заключающей его полостью объема V . Здесь в качестве удельных величин вводятся пространственные плотности: $u = \frac{U}{V}$, $s = \frac{S}{V}$ и т. д.

Теория Максвелла налагает требование: $p = \frac{u}{3}$. Тогда из соотношения

$$dU = T dS - p dV$$

получим для произвольных V и dV :

$$(u - Ts + p) dV + (du - T ds) V = 0,$$

следовательно,

$$du = T ds, \quad \frac{4}{3} u = Ts$$

и тем самым

$$u = \sigma T^4 \quad (\text{закон Стефана — Больцмана}),$$

где $\sigma = 7,562 \cdot 10^{-15} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{град}^4$,

$$U = \sigma T^4 V,$$

$$S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V,$$

$$F = -\frac{1}{3} \sigma T^4 V,$$

$$\Psi = 0,$$

$$W = \frac{4}{3} \sigma T^4 V.$$

18. Релятивистская термодинамика

Наряду с прочими понятиями термодинамика пользуется также понятиями механики и должна поэтому, подобно механике, быть приспособлена к требованиям теории относительности. Обычные термодинамические параметры, вообще говоря, не инвариантны относительно преобразований Лоренца, например $M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, и поэтому введенные удельные величин не создают преимуществ. Напротив, число частиц в системе, состоящей из частиц, или, например, масса покоя M_0 могут служить в качестве инвариантных количественных параметров.

Формулировки начал при учете трансформационных свойств параметров сохраняются:

$$dQ = dU - dA, \quad dS = \frac{dQ}{T}.$$

Трансформационные свойства термодинамических параметров даются:

а) для *первичных интенсивных переменных* формулами:

$$p = p_0, \quad V = V_0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad T = T_0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad S = S_0;$$

б) для *вторичных интенсивных переменных* формулами:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \{U_0 + \beta^2 p_0 V_0\}, \\ F &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \{F_0 + \beta^2 (T_0 S_0 + p_0 V_0)\}, \\ \Psi &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \{\Psi_0 + \beta^2 T_0 S_0\}, \\ W &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} W_0 \quad (w = w_0); \end{aligned}$$

с) для *количества теплоты* формулой $Q = Q_0 \sqrt{1-\beta^2}$ и для *работы* формулой $dA = -p dV + (v \mathcal{G})$, где \mathcal{G} означает импульс системы, $\mathcal{G} = \frac{v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \{U_0 + p_0 V_0\}$. \mathcal{G} и $\frac{1}{c} \{U + pV\}$ образуют четырехмерный вектор энергии-импульса, инвариантная длина которого равна $\frac{i}{c} \{U_0 + p_0 V_0\}$.

Соотношения между первичными переменными состояния, имеющие вид $f\left(p, \frac{V}{T}, S\right) = 0$, остаются инвариантными; таково, например, уравнение состояния идеальных газов.

РАЗДЕЛ ШЕСТОЙ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В отличие от механики, электродинамики и т. д. статистика характеризуется не столько предметом, сколько *методом* своих рассуждений. Она может применяться во всех случаях, когда имеется *большое число однотипных* физических систем, подчиняющихся известным законам, и когда требуется выяснить поведение в среднем совокупности этих систем.

А. ДИСКРЕТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

1. Общие сведения

а) Отдельное состояние

Всякое состояние r квантовомеханической системы (например, осциллятора, атома) описывается его энергией E_r и его собственной функцией ψ_r (решением уравнения Шредингера). Если одному и тому же собственному значению принадлежат различные собственные функции (различные квантовые числа), то кратность собственного значения E_r называется его *статистическим весом*. Простые собственные значения поэтому всегда имеют статистический вес, равный 1.

Энергия зависит от ряда параметров, которые частью изменяются непрерывно, частью же могут принимать лишь дискретные значения.

б) Вероятность перехода

Между двумя состояниями r и s может иметь место переход. Вероятность того, что система за единицу времени перейдет из состояния r в состояние s , называется *элементарной вероятностью перехода*. Имеем:

$$\omega_{sr} = \omega_{rs}.$$

в) Теорема Лиувилля

Пусть в момент t_0 система имеет состояние r_0 . Обозначим тогда состояния, которых можно достичь прямым или непрямым путем при исходном состоянии r_0 , через s , а те, которых нельзя достичь, — через σ .

Мы имеем, следовательно, $w_{ss} = 0$. Для более позднего момента времени t существует тогда, каково бы ни было состояние s , определенная вероятность $w(s, t)$, и в пределе для весьма больших промежутков времени получаем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(s, t) = \frac{1}{n},$$

если n — число достижимых состояний при исходном состоянии r_0 . Эта теорема может быть высказана также в следующей форме: средняя продолжительность пребывания системы в одном состоянии для весьма больших промежутков времени одинакова для всех состояний.

д) Эргодическая система

Энергия квантовомеханической системы может быть определена лишь с некоторой неопределенностью ΔE , причем $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Для «замкнутой» системы закон сохранения энергии справедлив, таким образом, лишь с указанной степенью неопределенности; все достижимые состояния должны лежать внутри ΔE . Система называется *эргодической*, если в ΔE лежат *только* достижимые состояния.

е) Фазовый объем J

$J = J(E; a_1, a_2, \dots)$ есть число собственных значений энергии $E_r \leq E$, каждое из которых умножено на его статистический вес. Оно, так же как энергия, зависит от ряда внешних параметров a_k .

ф) Адиабатическому изменению

параметра a_k противодействует сила

$$A_k^{(r)} = - \frac{\partial E_r}{\partial a_k}.$$

Если производить изменение столь медленно, что даже за время бесконечно малого изменения параметра a_k система все еще совершает весьма большое число квантовых переходов и, следовательно, успевает побывать в каждом достижимом состоянии, то будем иметь:

$$\bar{A}_k = \frac{1}{n} \sum_s A_k^{(s)} \quad \text{и} \quad dE = - \sum_k \bar{A}_k da_k.$$

J при таком процессе остается инвариантным; процесс называется *адиабатически обратимым*.

g) Величины, характеризующие состояние

В течение процесса фазовый объем изменяется на

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial E} (dE + \sum_k \bar{A}_k da_k) = \frac{\partial J}{\partial E} dQ.$$

dQ есть приток энергии, который, вообще говоря, не является полным дифференциалом; $\frac{\partial J}{\partial E}$ представляет собой, следовательно, интегрирующий множитель. Мы называем

$$S \equiv k \ln J \quad (k = 1,380 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град})$$

энтропией системы, а

$$T = \frac{J}{k} \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial \ln J}$$

ее абсолютной температурой.

2. Термодинамическое равновесие

Мы рассмотрим совокупность $N \gg 1$ систем. Через N_r обозначим число систем в состоянии r .

Переход системы в состояние с другой энергией возможен лишь при одновременном изменении состояния еще *по крайней мере одной* второй системы. Число процессов $r \rightarrow r'$ и одновременно процессов $s \rightarrow s'$, происходящих за единицу времени, будет равно

$$w_{rs}^{r's'} N_r N_s.$$

Число обратных процессов $r' \rightarrow r$ и $s' \rightarrow s$ равно

$$w_{r's'}^{rs} N_{r'} N_{s'}$$

при условии, что выполняется закон сохранения энергии

$$E_r + E_s = E_{r'} + E_{s'}.$$

Эти формулы справедливы с

$$w_{rs}^{r's'} = w_{r's'}^{rs}$$

лишь в том случае, когда вероятность перехода не зависит от степени заполнения конечных состояний (см., напротив, С, стр. 566). Мы имеем:

$$\frac{dN_r}{dt} = \sum_{r'ss'} w_{rs}^{r's'} (N_{r'} N_{s'} - N_r N_s).$$

Стационарное состояние имеет место в том и только в том случае, когда скобка в правой части обращается в нуль (*термодинамическое равновесие*):

$$N_r N_s = N_{r'} N_{s'}$$

Это происходит в том случае, когда $\ln N_r$ является линейной функцией от E_r :

$$N_r = e^{\alpha - \beta E_r} \quad (\text{каноническое распределение}).$$

Постоянное общее число имеющихся систем равно

$$N = \sum_r N_r = e^{\alpha} Z,$$

где

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$$

называется *суммой состояний*¹⁾. Имеем, таким образом,

$$N_r = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_r}.$$

Из выражения для Z следует, что энергия совокупности состояний дается формулой

$$\frac{d \ln Z}{d\beta} = -\frac{1}{N} \sum_r E_r N_r = -\frac{E}{N}.$$

Энтропия. Мы определяем энтропию формулой

$$S = k \ln W,$$

причем величина

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} = \prod_r \frac{N!}{N_r!}$$

называется *статистической вероятностью* состояния, описываемого совокупностью всех N_r . Так как все $N_r \gg 1$, то согласно формуле Стирлинга можно написать:

$$S = kN \ln N - k \sum_r N_r \ln N_r,$$

или

$$S = kN \ln Z + k\beta E.$$

¹⁾ Или *статистической суммой*. (Прим. ред)

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -k \sum_r \frac{dN_r}{dt} (\ln N_r + 1) = \\ &= \frac{k}{4} \sum_{rr'} \sum_{ss'} \omega_{s'r'}^{sr} (N_r N_{s'} - N_r N_s) \ln \frac{N_r N_{s'}}{N_r N_s} \geq 0 \end{aligned}$$

в соответствии с термодинамическим определением энтропии (см. стр. 546).

Температура. Чтобы, исходя из S и E , определить температуру, мы воспользуемся термодинамическим соотношением

$$\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_V = \frac{1}{T}.$$

При постоянном N получаем:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{\partial S}{\partial E} + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{d\beta}{dE} = k\beta + \left(kE + k \frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{d\beta}{dE}.$$

Ввиду $\frac{d \ln Z}{d\beta} = -\frac{E}{N}$ скобка обращается в нуль, и мы получаем:

$$k\beta = \frac{1}{T}, \text{ или } \beta = \frac{1}{kT}.$$

Соответствующий закон распределения

$$N_r = \frac{N}{Z} e^{-\frac{E_r}{kT}}$$

называется *законом распределения Больцмана*.

Знание суммы состояний является достаточным для вычисления всех основных термодинамических функций:

$$\begin{aligned} \text{свободной энергии } F &= -kT \ln Z, \\ \text{внутренней энергии } U &= -\frac{d \ln Z}{d\beta} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Классическая механика

$6N$ координат x^i и импульсов p_i определяют состояние системы, состоящей из N материальных точек. Если принять эти величины за декартовы координаты, то они позволят положение и состояние движения системы в момент времени t наглядно изобразить точкой (*фазовой точкой*) в некотором $6N$ -мерном пространстве (*фазовом пространстве*). Системе сопоставляется определенная функция

Гамильтона $H(x^i, p_i)$, удовлетворяющая каноническим уравнениям

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Совокупность таких систем называется *микрoканоническим ансамблем*. Временное изменение системы описывается тогда при помощи некоторой кривой в фазовом пространстве. Кривая проходит через каждую точку фазового пространства, имея в ней *определенное* направление, и, следовательно, не может сама себя пересекать.

В статистической механике рассматривают большое число систем, описываемых одной и той же функцией H . Совокупность рассматриваемых систем изображается в фазовом пространстве некоторым (весьма большим) числом фазовых точек. Их можно поэтому считать принадлежащими потоку (текущему континууму), для $6N$ -мерной скорости v которого с компонентами (\dot{x}^i, \dot{p}_i) справедливо равенство $\text{div } v = 0$. Таким образом, если некоторое число точек в момент $t = 0$ заполняет некоторый объем фазового пространства, то в любой другой момент t эти точки заполняют объем такой же величины (теорема Лиувилля классической статистики).

Если плотность распределения ρ фазовых точек является функцией только от H , то $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и направление потока всюду лежит в гиперповерхности $H = \text{const}$ ($= E$) (*статистическое равновесие*). Аналогично тому, как это было сделано в А2, можно показать, что тогда

$$\rho = Ne^{\frac{F-E}{kT}},$$

где $N = \int \rho d\omega dV$ означает число систем, образующих рассматриваемую совокупность ($d\omega dV$ — элемент объема фазового пространства), T — общую температуру, $k = 1,380 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянную Больцмана и F — свободную энергию. Если, по аналогии со сказанным выше, определим

$$Z = \int e^{-\frac{E}{kT}} d\omega dV$$

как *интеграл состояний*, то точно так же получим:

$$F = -kT \ln Z \quad \text{и т. д.}$$

Если, в частности, совокупность состоит из *замкнутых систем*, то движение фазовых точек происходит в гиперповерхности $H(x^i, p_i) = E = \text{const}$. Тогда можно наряду с постоянной «пространственной» плотностью ρ определить «поверхностную» плотность

$$\sigma = \frac{\text{const}}{|\text{grad } H|_{H=E}}.$$

Замкнутая система называется *эргодической*, если за достаточно

долгое время фазовая точка подойдет сколь угодно близко к любой точке гиперповерхности. В этом случае теорема Лиувилля требует, чтобы средняя продолжительность пребывания фазовой точки за большой промежуток времени в равных по величине частях поверхности была пропорциональна поверхностной плотности.

2. Разбиение фазового пространства на ячейки

а) Состояние

Мы называем систему *находящейся в состоянии* (p_i, x^i) , если ее координаты заключены между значениями x^i и $x^i + dx^i$, а ее импульсы заключены между p_i и $p_i + dp_i$, т. е. если система попадает в элемент объема $dV d\omega = dx^1 dx^2 \dots dp_1 dp_2 \dots$ фазового пространства. Относительно величины элемента объема мы пока не делаем никаких предположений.

б) Статистический вес

состояния пропорционален соответствующему элементу объема фазового пространства

$$g_r = \frac{1}{h^{3N}} dx^1 dp_1 dx^2 dp_2 \dots dx^{3N} dp_{3N}.$$

При этом h означает пока произвольную постоянную с размерностью действия (*эрг·сек*).

в) Вероятность перехода

из ячейки фазового пространства $d\omega dV$ в ячейку $d\omega' dV'$ пропорциональна объему последней:

$$\omega = W(x^i, p_i; x'^i, p'_i) d\omega' dV'.$$

Для обратного процесса имеем:

$$\omega = W(x'^i, p'_i, x^i, p_i) d\omega dV.$$

г) Квантовая теория

требует, чтобы введенные здесь элементы объема имели *определенную конечную величину*. Они все должны иметь объем h^{3N} и в силу этого обладать одинаковым статистическим весом. h при этом имеет значение $h = 6,623 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*. Форма ячеек является произвольной. В таком случае мы снова получаем теорию, изложенную в **A**, из которой теория, изложенная в **B1**, следует как предельный случай при $h = 0$. Состояние системы в квантовой теории уже не может быть описано точно, но лишь с известной степенью ненадежности

$$\Delta p_i \Delta x^i \geq \frac{h}{4\pi} \text{ (соотношение неопределенностей Гейзенберга).}$$

3. Кинетическая модель идеального газа

а) Модель

Газ состоит из большого числа систем (*молекул*). Эта совокупность не является микроканонической, так как молекулы оказывают влияние друг на друга при достаточном их сближении (*столкновения*). Если пренебречь теми весьма редкими столкновениями, в которых одновременно участвуют более чем две молекулы, то газ можно рассматривать как состоящий из двух совокупностей систем, которые находятся в термодинамическом равновесии друг с другом. Мы заменяем весьма сложные силы, действующие между молекулами, простой *моделью сталкивающихся упругих шаров* диаметра σ . Мы получим эквивалентную теорию, приписывая элементам одной системы радиус σ , а элементы другой рассматривая как материальные точки.

б) Основное уравнение

Пусть $F(x^i, p_i, t) dV d\omega$ — число частиц, присутствующих в момент времени t в элементе объема $dV d\omega$. Число частиц, переходящих от $d\omega$ ко всем $d\omega'$ за элемент времени dt в элементе объема dV , т. е. число всех частиц, покидающих $d\omega$, будет тогда равно

$$b d\omega dt dV = dt dV \int_{\omega'} W(p, p') F d\omega d\omega',$$

в то время как число частиц в dV , переходящих за dt из всех $d\omega'$ в $d\omega$, равно

$$a d\omega dt dV = dt dV \int_{\omega'} W(p', p) F' d\omega' d\omega,$$

где F' — сокращенное обозначение для $F(x'^i, p'_i)$. Для F справедливо тогда уравнение

$$\frac{dF}{dt} = a - b. \quad (1)$$

с) Процесс столкновения

Сталкиваются две частицы равной массы. Первую из них с компонентами импульсов ξ, η, ζ до и ξ', η', ζ' после столкновения будем считать имеющей форму шара радиуса σ , вторую с ξ_1, η_1, ζ_1 до и $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ после столкновения будем считать точкой. Если мы введем систему координат так, чтобы x -ось была направлена по линии центров при столкновении, то получим:

$$\eta = \eta', \quad \zeta = \zeta', \quad \eta_1 = \eta'_1, \quad \zeta_1 = \zeta'_1.$$

При упругом столкновении из теорем о сохранении импульса и энергии вытекает:

$$\xi = \xi'_1, \quad \xi_1 = \xi'.$$

В частности, имеем, таким образом:

$$\frac{d\omega_1}{d\omega'_1} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{d\omega'}{d\omega}.$$

д) Вероятности переходов

Если переход из состояния $d\omega$ в состояние $d\omega'$ происходит вследствие аналогичного описанному выше упругого столкновения, то, очевидно, $W(p, p') d\omega'$ представляет собой число точечных частиц, которые все сталкиваются с частицами, имеющими импульс ξ, η, ζ , таким образом, что эти последние после столкновения имеют импульс ξ', η', ζ' . Пусть v — относительная скорость двух сталкивающихся частиц до столкновения, а их линия центров образует угол ϑ с направлением относительной скорости; предположим, что направление линии центров лежит внутри элемента телесного угла $d\Omega$. Мы будем представлять себе тогда, что точечные частицы покоятся относительно системы координат и плотность их распределения равна $F_1 d\omega_1$, в то время как шар σ движется в пространстве. При этом поверхностный элемент $\sigma^2 d\Omega$ за время dt заметает цилиндрический объем

$$dt d\tau = \sigma^2 d\Omega v \cos \vartheta dt;$$

общее число столкновений, происходящих в элементе объема $d\omega_1$ импульсного пространства, в которых участвуют частицы, равно, таким образом,

$$dt \int_{\tau} d\tau F_1 d\omega_1 = \sigma^2 \int_{\Omega} d\Omega v \cos \vartheta dt F_1 d\omega_1,$$

где интеграл по $d\Omega$ должен быть распространен лишь на ту половину сферы, которая обращена к партнеру по столкновению; если распространить интегрирование на всю сферу, то полученный интеграл следует умножить на $1/2$. Мы имеем:

$$W(p, p') d\omega' = \int_{\tau} d\tau F_1 d\omega_1.$$

Таким же образом находим для обратного процесса:

$$W(p', p) d\omega = \int_{\tau} d\tau F'_1 d\omega'_1.$$

е) Кинетическое уравнение

Уравнение (1) теперь переходит в

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int \dot{W}(p', p) F d\omega - \int W(p, p') F d\omega' = \\ &= \int_{\tau} d\tau \int_{\omega'} \left(F' F' \frac{d\omega' d\omega'_i}{d\omega} - F F_1 \frac{d\omega' d\omega_1}{d\omega'} \right) = \int_{\tau} d\tau \int_{\omega_1} (F' F'_1 - F F_1) d\omega_1. \end{aligned}$$

Это есть *кинетическое уравнение* Максвелла — Больцмана. Левая часть его может быть переписана в форме

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

г) Инварианты столкновения

Если φ представляет собой произвольную функцию импульсов, то после некоторых преобразований мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\tau} d\tau \iint_{\omega, \omega_1} d\omega d\omega_1 (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) (F' F'_1 - F F_1) = \\ = \int \varphi \frac{dF}{dt} d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Если φ — величина, остающаяся при столкновении инвариантной, то левая часть обращается в нуль, т. е. $\varphi + \varphi_1 = \varphi' + \varphi'_1$. Тогда, следовательно, будем иметь:

$$\int_{\omega} \varphi \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \right] d\omega = 0. \quad (3)$$

г) Макроскопические величины

Определим *среднее значение* величины ϕ выражением

$$\bar{\phi} = \frac{\int F \phi d\omega}{\int F d\omega} = \frac{1}{N} \int F \phi d\omega,$$

где, следовательно, $N = \frac{\rho}{m}$ дает число частиц в $см^3$ (ρ — плотность,

m — масса молекулы). Тогда

$$\begin{aligned} u_i &= \overline{x^i} && \text{становятся компонентами скорости потока } \Pi, \\ \frac{N}{m} \overline{\xi^2} &= P_{xx}, \quad \frac{N}{m} \overline{\xi \eta} &= P_{xy} \text{ и т. д. — компонентами тензора напряжений } \mathfrak{P}, \\ k_x &= N \overline{\xi} && \text{и т. д. — компонентами плотности силы } \mathfrak{f}, \\ E &= \frac{N}{2m} \overline{p^2} && \text{— плотностью энергии,} \\ \mathfrak{E} &= \frac{N}{2m^2} \overline{p p^3} && \text{— плотностью потока энергии,} \end{aligned}$$

и мы получаем из (3) уравнения:

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi = m: \operatorname{div}(\rho \Pi) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 && \text{(уравнение непрерывности),} \\ \text{при } \varphi = p: \operatorname{div} \mathfrak{P} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Pi) &= \mathfrak{f} && \text{(уравнения движения),} \\ \text{при } \varphi = \frac{p^2}{2m}: (\mathfrak{f} \Pi) &= \operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{\partial E}{\partial t} && \text{(работа внешних сил равна} \\ &&& \text{приращению энергии).} \end{aligned}$$

h) H-теорема

При $\varphi = \ln F$ уравнение (2) имеет вид

$$\int d\omega \ln F \frac{dF}{dt} = \frac{1}{4} \int d\tau \iint d\omega d\omega_1 \ln \frac{FF_1}{F'F'_1} (F'F'_1 - FF_1) \leq 0.$$

Отсюда легко получим, что

$$\frac{d}{dt} \int dV \int d\omega F \ln F \leq 0.$$

Мы называем $s = -k \int d\omega F \ln F$ плотностью энтропии, $S = \int s dV$ — полной энтропией. Таким образом, имеем:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (\text{H-теорема Больцмана, теорема энтропии}).$$

i) Закон распределения

В стационарном случае должны выполняться равенства

$$F'F'_1 = FF_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Из этих уравнений получаем для распределения молекул под действием внешнего силового поля

$$\mathfrak{R} = -\operatorname{grad} V$$

выражение

$$F(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = Ae^{-\beta E}, \quad \text{где } E = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z).$$

Сравнение с каноническим распределением показывает, что $\beta = \frac{1}{kT}$.

Если внешнее поле отсутствует, то получается *распределение Максвелла*

$$F(p_x, p_y, p_z) = Ae^{\frac{-p^2}{2mkT}}.$$

Нормирующий множитель A может быть определен требованием:

$$N = \int F d\omega = 4\pi \int_0^\infty F(p) p^2 dp = A (2\pi mkT)^{3/2}.$$

Ввиду $N = \frac{\rho}{m}$ можно писать

$$F(p) = \frac{\rho}{m} (2\pi mkT)^{-3/2} e^{\frac{-p^2}{2mkT}}.$$

к) Средние значения

Вероятный импульс равен

$$p_0 = \sqrt{2mkT};$$

ему соответствует энергия $E_0 = kT$. *Средний импульс* равен

$$\bar{p} = \int_0^\infty p \cdot 4\pi p^2 F(p) dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p_0.$$

Далее,

$$\overline{p^2} = \int_0^\infty p^2 \cdot 4\pi p^2 F(p) dp = \frac{3}{2} p_0^2$$

представляет собой среднее значение квадрата импульса, соответствующее *средней энергии*

$$\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m} = \frac{3}{2} kT.$$

Имеем:

$$\overline{p^2} = \frac{3\pi}{8} \bar{p}^2 = \frac{3}{2} p_0^2.$$

Относительное среднее *квадратическое отклонение* импульса равно поэтому

$$\frac{\overline{p^2} - \bar{p}^2}{\bar{p}^2} = \frac{3\pi}{8} - 1 = 0,1781.$$

С. СТАТИСТИКИ ФЕРМИ И БОЗЕ

Сделанное на стр. 556 (A2) допущение относительно числа одновременных переходов $r \rightarrow r'$ и $s \rightarrow s'$ может быть обобщено. Число переходов может зависеть также от чисел заполнения конечных состояний, т. е. число процессов равно

$$\omega_{rs}^{r's'} N_r N_s f_{r'}(N_{r'}) f_{s'}(N_{s'});$$

число процессов в обратном направлении равно

$$\omega_{r's'}^{rs} N_{r'} N_{s'} f_r(N_r) f_s(N_s),$$

причем f_r представляют собой некоторые функции, выбор которых соответствует принятию специальной модели. В частности, имеем:

$$f_r(N_r) = g_r - N_r \quad (g_r \text{ — число ячеек с энергией } E_r),$$

если системы подчиняются *принципу Паули* (см. стр. 517). Каждая ячейка может принять не более чем одну систему. Говорят: системы подчиняются *статистике Ферми*.

$f_r(N_r) = g_r + N_r$ для световых квантов и всех квантовомеханических систем с симметрическими собственными функциями (см. стр. 518). Системы проявляют тогда «стремление» накапливаться в одной и той же ячейке. Тогда говорят о *статистике Бозе*.

$f_r(N_r) = 1$ в уже рассматривавшемся выше частном случае, который называется *статистикой Больцмана*.

Другие статистики, по-видимому, в природе не встречаются.

Функция распределения. Мы имеем здесь, как на стр. 556 (A2):

$$\frac{dN_r}{dt} = \sum_{r'ss'} \omega_{rs}^{r's'} (N_{r'} N_{s'} f_r f_s - N_r N_s f_{r'} f_{s'})$$

и, следовательно, стационарность при

$$\frac{N_r N_s}{f_r f_s} = \frac{N_{r'} N_{s'}}{f_{r'} f_{s'}},$$

т. е. $\ln \left(\frac{N_r}{f_r} \right)$ является линейной функцией энергии E_r :

$$N_r = f_r(N_r) e^{-\alpha - \beta E_r}.$$

Для определения постоянных α и β мы имеем, во-первых, дополнительное условие $\sum_r N_r = N$ и, во-вторых, связь с термодинамикой через статистическое определение энтропии. Это снова дает $\beta = \frac{1}{kT}$ для каждой статистики. Мы получаем отсюда, в частности, в качестве

равновесных распределений для

$$\text{статистики Ферми: } N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} + 1},$$

$$\text{статистики Бозе: } N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} - 1}.$$

При этом будет, в частности, $\alpha = 0$, если не имеет места закон сохранения числа частиц (закон распределения Планка, световые кванты).

Энтропия. Мы находим, аналогично тому, как это было сделано на стр. 557 (A2):

$$S = k \sum_r \int \ln \frac{f_r}{N_r} dN_r + \text{const}$$

и

$$\frac{dS}{dt} \geq 0.$$

С точностью до аддитивной постоянной получаем, в частности, для статистики Ферми:

$$S - S_0 = -k \sum_r (N_r \ln N_r + (g_r - N_r) \ln (g_r - N_r)),$$

для статистики Бозе:

$$S - S_0 = -k \sum_r (N_r \ln N_r - (g_r + N_r) \ln (g_r + N_r)).$$

Статистическая вероятность. Указанные выражения для энтропии будут находиться в согласии с соотношением

$$S = k \ln W,$$

если вероятность определить формулами:

$$W = \prod_r \frac{g_r!}{N_r! (g_r - N_r)!} = \prod_r \binom{g_r}{N_r} \quad \text{для статистики Ферми,}$$

$$W = \prod_r \frac{(g_r + N_r - 1)!}{N_r! (g_r - 1)!} \quad \text{для статистики Бозе.}$$

Первая формула дает число различных способов заполнения g_r ячеек при условии, что соблюден принцип Паули (см. стр. 517).

Вторая формула означает в точности ту модификацию больцмановской модели, к которой мы придем, если одинаковые (атомные) системы будем считать *неразличимыми*. Все состояния, которые могут быть получены друг из друга перегановкой частиц, рассматриваются как одно-единственное состояние, которому приписывается вес 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Специальные интегралы Фурье (к стр. 94)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{2\pi ixs} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-2\pi ist} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{ixs} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-ist}.$$

$$a) e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{2\pi ixs} e^{-\frac{\pi^2 s^2}{a^2}}; \quad \frac{1}{1+x^2} = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{2\pi ixs} e^{-2\pi |s|}$$

— «колоколообразные функции».

b) Функции, разрывные при $x=0$. (Интегралы следует понимать в смысле главного значения Коши.)

	$x < 0$	$x > 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x s} \delta_-(s) ds$ (см. стр. 37) (α — любое положительное) =	0	1
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x s} \delta_+(s) ds$ (α — любое положительное) =	1	0
$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x s} \frac{ds}{s} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x s}{s} ds$ (α — любое положительное) =	-1	1
$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xs \frac{ds}{s \pm a} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xs \frac{s ds}{s^2 - a^2} =$		
$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs \frac{s ds}{s^2 - a^2} =$	-cos ax	cos ax

Продолжение

	$x < 0$	$x > 0$
$\mp \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xs \frac{ds}{s \pm a} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xs \frac{a ds}{s^2 - a^2} =$		
$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \frac{a ds}{s^2 - a^2} =$	$\sin ax$	$-\sin ax$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \delta_-(s-a) ds =$	0	e^{iax}
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \delta_+(s-a) ds =$	e^{iax}	0
$- \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{ds}{s-a} =$	$-e^{iax}$	e^{iax}
$2i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xs \delta_-(s-a) ds =$		
$= 4i \int_0^{\infty} \sin xs \delta_-(s-a) \frac{s}{s+a} ds \quad (a > 0) =$	$-e^{-iax}$	e^{iax}
$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xs \delta_-(s-a) ds =$		
$= 4i \int_0^{\infty} \cos xs \delta_-(s-a) \frac{a}{s+a} ds \quad (a > 0) =$	e^{-iax}	e^{iax}

Большую таблицу интегралов Фурье можно найти в книге: G. A. Campbell, R. M. Foster, *Fourier integrals for practical applications*. Bell Telephone Monograph B-584, 1931.

2. Разложение в степенные ряды (к стр. 103)

Рис. 27 изображает функцию $\frac{1}{1-z}$, представленную кривыми $u=a$, $v=b$. На рис. 28 та же функция представлена разложением по возрастающим степеням до z^9 . Легко видеть, что вне круга сходимости радиуса 1 вообще не происходит никакого приближения к функции $\frac{1}{1-z}$.

На рис. 29 та же функция изображена разложением по убывающим степеням до $\frac{1}{z^6}$. В этом случае приближение не имеет места *внутри* круга сходимости.

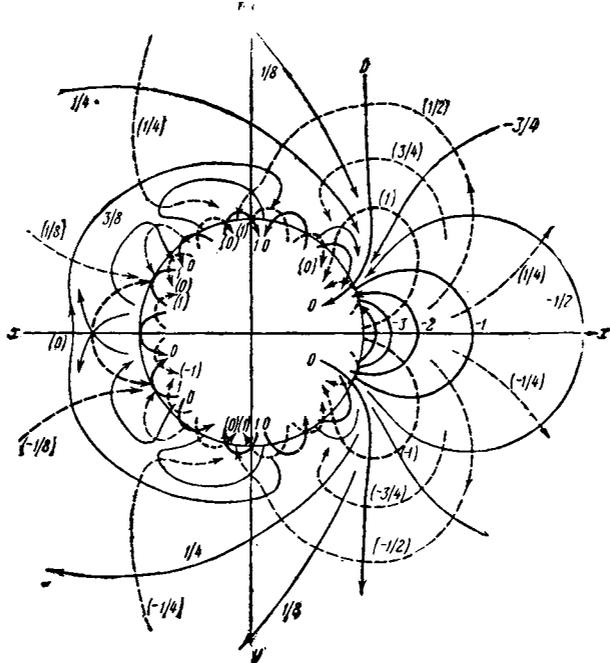


Рис. 29. $w = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}$.

3. Преобразование Фурье (к стр. 192)

Корни из единицы

$$\alpha_l = e^{\frac{2\pi i l}{N}} \quad (\alpha_l^N = 1)$$

образуют периодическую функцию дискретного целочисленного параметра l ($\alpha_l = \alpha_{l+N}$). Справедливы равенства

$$\frac{1}{N} \sum_n \alpha_l^n = \begin{cases} 1 & \text{при } l=0, \\ 0 & \text{при } l \neq 0 \end{cases}$$

(\sum_n — циклическая сумма от $n = n_0 + 1$ до $n = n_0 + N$),

и, следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum_n e^{\frac{2\pi i n (l-k)}{N}} = \delta_{lk}.$$

Пусть y_k — периодическая функция от k ; тогда

$$y_l = \sum_k \delta_{lk} y_k = \frac{1}{N} \sum_{kn} y_k e^{\frac{2\pi i n (l-k)}{N}},$$

или, если воспользоваться разложением,

$$y_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \eta_n e^{\frac{2\pi i n l}{N}}, \quad \text{где} \quad \eta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k y_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}.$$

Это можно рассматривать как линейное преобразование $y_l \rightarrow \eta_n$. Отсюда следует:

$$\sum_l |y_l|^2 = \frac{1}{N} \sum_{lnn'} \eta_n \eta_{n'}^* e^{\frac{2\pi i l (n-n')}{N}} = \sum_{nn'} \eta_n \eta_{n'}^* \delta_{nn'} = \sum_n |\eta_n|^2,$$

т. е. преобразование унитарно. Далее, получаем:

$$S_r = \sum_l |y_l - y_{l-r}|^2 = 4 \sum_n |\eta_n|^2 \sin^2 \frac{\pi r n}{N}.$$

S_1 может рассматриваться как мера изменения последовательности y_l . В случае «гладкой» последовательности все η_n , для которых $\sin^2 \frac{\pi n}{N}$ не мало, должны обращаться в нуль. Остаются только η_n в окрестности $n=0$ или $n=N$. Это делает возможным приближенное представление гладкой последовательности y_l также и в случае большого N при помощи малого числа величин η и последующее выполнение предельного перехода при $N \rightarrow \infty$.

1) Плотная последовательность y_l : $\frac{l}{N} = \frac{x}{L}$, $0 < x < L$, $dx = \frac{L}{N}$, $y_l = y(x)$.

Дискретная последовательность: $\frac{\eta_n}{\sqrt{N}} = C_n$, $-\infty < n < \infty$.

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \\ C_n &= \frac{1}{L} \int_0^L y(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \end{aligned} \right\} \text{представление в виде ряда Фурье.}$$

2) Плотная последовательность y_l : $\frac{l}{\sqrt{N}} = x$, $L \rightarrow \infty$, $-\infty < x < +\infty$, $dx = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Плотная последовательность $\eta_n: \frac{n}{\sqrt{N}} = s, \quad -\infty < s < \infty,$
 $ds = \frac{1}{\sqrt{N}}.$

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ds \eta(s) e^{2\pi i s x}, \\ \eta(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx y(x) e^{-2\pi i s x} \end{aligned} \right\} \text{представление в виде} \\ \text{интеграла Фурье.}$$

4. Гармонический осциллятор в канонических переменных (к стр. 197)

Пусть

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = K(Q, P) = \omega P;$$

требуется найти $Q = Q(q, p).$

Имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial q} = p = \omega \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2}, \text{ следовательно, } X = \omega \int \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2} dq + f(P),$$

откуда

$$Q = \frac{\partial X}{\partial P} = \arcsin \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2P}} \right) + f'(P).$$

Положив, например, $f(P) = -\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\cos Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 q^2}}},$$

или

$$\operatorname{tg} Q = -\frac{p}{\omega q}, \quad P = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega q^2}{2},$$

соответственно

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos Q, \quad p = -\sqrt{2P\omega} \sin Q.$$

5. Движение планет в канонических переменных (к стр. 197)

Приведем следующий пример преобразования прикосновения в трех измерениях, которое (в смысле преобразования, приведенного на стр. 197) позволяет придать H более простую форму.

Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{n_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{GmM}{r}.$$

При помощи преобразования прикосновения

$$X_1 = p_1 r + p_3 \varphi + \int_{\pi, 2}^{\vartheta} d\theta \sqrt{p_2^2 - \frac{p_3^2}{\sin^2 \theta}}, \quad q_i = \frac{\partial X_1}{\partial p_i}, \quad p_r = \frac{\partial X_1}{\partial r} \text{ и т. д.}$$

мы приводим ее к виду

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - \frac{GmM}{q_1}.$$

Еще одно преобразование:

$$X_2 = \int_{q_0}^{q_1} dq_1 \sqrt{-\frac{G^2 m^3 M^2}{P_1^2} + \frac{2Gm^2 M}{q_1} - \frac{P_2^2}{q_1^2}} + P_2 q_2 + P_3 q_3,$$

$$p_i = \frac{\partial X_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial X_2}{\partial P_i}$$

приводит к

$$H = K(P, Q) = -\frac{G^2 m^3 M^2}{2P_1^2}.$$

Смысл новых переменных таков:

$q_1 = r$ — радиус-вектор,

q_2 — долгота планеты, отсчитываемая от восходящего узла в плоскости орбиты,

q_3 — долгота восходящего узла, отсчитываемая по экватору $\vartheta = \frac{\pi}{2}$,

$p_1 = m\dot{r}$,

p_2 — полный момент количества движения,

p_3 — компонента момента количества движения в направлении $\varphi = \varphi_{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi}$,

а также:

Q_1 — средняя аномалия,

Q_2 — долгота перигелия $q = q_0$, отсчитываемая от восходящего узла (см. выше),

$Q_3 = q_3$,

$F_1 = \sqrt{Gm^2 Ma}$, где a — большая полуось орбиты,

$P_2 = p_2 = \sqrt{Gm^2 Ma} (1 - \varepsilon^2)$, где ε — эксцентриситет орбиты,

$P_3 = p_3 = P_2 \cos i$, где i — наклон орбиты к экватору.

(Малая полуось b равна $\frac{P_1 P_2}{Gm^2 M}$.)

Здесь Q_1 представляет собой угловую переменную. (Это было достигнуто специальным выбором формы члена с P_1 в выражении для X_1 .) Остальные Q и P становятся постоянными. Величины $q_2 = Q_2$, Q_1 , Q_3 , P_1 , P_2 , P_3 полностью описывают орбиту планеты («элементы орбиты»).

6. Вынужденные колебания (к стр. 322)

Разыскивается решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Мы пользуемся *функцией Грина*, записывая решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$$

($f(t)$ — произвольная заданная функция ¹⁾) в форме

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

с функцией $\varphi(t)$, которая будет определена впоследствии. Отсюда находим:

$$\dot{x} = f(t) \varphi(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \dot{\varphi}(t - \tau) d\tau,$$

$$\ddot{x} = \dot{f}(t) \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \ddot{\varphi}(t - \tau) d\tau.$$

После подстановки в дифференциальное уравнение это дает:

$$f(t) = [\dot{f}(t) + af(t)] \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) (\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b\varphi) d\tau.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях t , то проще всего положить:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 1, \quad \ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b\varphi = 0,$$

т. е.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left(e^{t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} - e^{-t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} \right) & \text{для положительных} \\ 0 & \text{значений аргумента,} \\ & \text{для отрицательных} \\ & \text{значений аргумента.} \end{cases}$$

Особые случаи. I. $a^2 < 4b$ (слабое затухание). Положим для краткости:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = i\omega_0, \quad \frac{a}{2} = \delta, \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

¹⁾ Обозначения здесь приспособлены к физическим задачам: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и т. д.

ω_0 в качестве «собственной частоты». Решение принимает тогда вид

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \frac{e^{-\delta(t-\tau)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau.$$

II. $a^2 = 4b$ (апериодический предельный случай)

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau) d\tau.$$

III. $a^2 > 4b$ (сильное затухание). Положив для краткости

$$\delta_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \delta_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

получим:

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \frac{e^{-\delta_1(t-\tau)} - e^{-\delta_2(t-\tau)}}{\delta_2 - \delta_1} d\tau.$$

Примеры для различных $f(t)$:

A. $f(t) = \frac{p}{\epsilon}$ в интервале между T и $T + \epsilon$; для прочих значений аргумента $f(t) = 0$ (кратковременный импульс):

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } a^2 < 4b: \quad x = p \frac{e^{-\delta(t-T)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-T), \\ \text{II. } a^2 = 4b: \quad x = p e^{-\delta(t-T)}(t-T), \\ \text{III. } a^2 > 4b: \quad x = \frac{p}{\delta_2 - \delta_1} (e^{-\delta_1(t-T)} - e^{-\delta_2(t-T)}) \end{array} \right\} \text{ при } t > T.$$

B. $f(t) = A \sin \omega t$ (периодическая сила):

$$x = B \cos(\omega t - \beta),$$

где для

$$\begin{array}{l} \text{I. } a^2 < 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}, \\ \text{II. } a^2 = 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta^2 - \omega^2}{2\delta\omega}, \\ \text{III. } a^2 > 4b: \quad B = \frac{A}{\sqrt{(\delta_1\delta_2 - \omega^2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_1\delta_2 - \omega^2}{(\delta_1 + \delta_2)\omega}. \end{array}$$

7. Пример к теории групп (к стр. 288 и след.)

Пусть группа определена формальными равенствами¹⁾:

$$A^4 = E, \quad B^2 = E, \quad BAB = A^3.$$

¹⁾ Этот пример известен как «задание группы кватернионов определяющими соотношениями». (Прим. ред.)

Она содержит тогда всего восемь элементов:

$$E, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B.$$

Любая иная комбинация может быть сведена к этим элементам, например:

$$BA = A^3B, BA^2 = A^2B, BA^3 = AB, ABA = B \text{ и т. д.};$$

далее, $A^{-1} = A^3, B^{-1} = B$ и т. д.

а) Группа имеет порядок $g = 8$.

б) Она содержит следующие подгруппы:

- 1) E, A, A^2, A^3 порядка $h = 4$, индекса $j = 2$ (инвариантная),
- 2) E, A^2, B, A^2B порядка $h = 4$, индекса $j = 2$ (инвариантная),
- 3) E, A^2, AB, A^3B порядка $h = 4$, индекса $j = 2$ (инвариантная),
- 4) E, A^2 порядка $h = 2$, индекса $j = 4$ (инвариантная),
- 5) E, B порядка $h = 2$, индекса $j = 4$ (неинвариантная),
- 6) E, AB порядка $h = 2$, индекса $j = 4$ (неинвариантная),
- 7) E, A^2B порядка $h = 2$, индекса $j = 4$ (неинвариантная),
- 8) E, A^3B порядка $h = 2$, индекса $j = 4$ (неинвариантная).

в) Она содержит следующие пять классов:

- 1) E , так как, например, A^2B сопряжено с B ввиду $A(A^2B)A^{-1} = B, A^3(A^2B)A^{-3} = B$ и т. д.,

2) A, A^3

3) $B, A^2B,$

4) $AB, A^3B,$

5) A^2 .

д) Факторгруппу образуют: $E^I = (E, A^2), A^I = (A, A^3), B^I = (B, A^2B), (AB)^I = (AB, A^3B)$, так как $E^I, A^I, B^I, (AB)^I$ образуют группу, если не делать различия между элементами, заключенными в скобки.

То же имеет место для:

$$E^{II} = (E, A^2, B, A^2B), \quad A^{II} = (A, A^3, AB, A^3B),$$

$$E^{III} = (E, A, A^2, A^3), \quad A^{III} = (B, AB, A^2B, A^3B),$$

$$E^{IV} = (E, A^2, AB, A^3B), \quad A^{IV} = (A, A^3, B, A^2B).$$

е) Группа допускает следующие неприводимые представления:

- 1) В одном измерении ($h = 1$) существуют следующие четыре неэквивалентные формы:

	$\mathfrak{M}^{(1)}$	$\mathfrak{M}^{(2)}$	$\mathfrak{M}^{(3)}$	$\mathfrak{M}^{(4)}$		$\mathfrak{M}^{(1)}$	$\mathfrak{M}^{(2)}$	$\mathfrak{M}^{(3)}$	$\mathfrak{M}^{(4)}$
$E =$	1	1	1	1	$B =$	1	-1	1	-1
$A =$	1	1	-1	-1	$AB =$	1	-1	-1	1
$A^2 =$	1	1	1	1	$A^2B =$	1	-1	1	-1
$A^3 =$	1	1	-1	-1	$A^3B =$	1	-1	-1	1

так как значения, стоящие в каждом из четырех столбцов, удовлетворяют определяющим соотношениям. Каждое из этих представлений является точным представлением факторгруппы порядка 2.

2) В двух измерениях ($h=2$) $\mathfrak{M}^{(5)}$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление является точным.

f) Характеристики классов в силу этого таковы:

	$k \backslash l$	$\mathfrak{M}^{(1)}$	$\mathfrak{M}^{(2)}$	$\mathfrak{M}^{(3)}$	$\mathfrak{M}^{(4)}$	$\mathfrak{M}^{(5)}$	h_k
E	1	1	1	1	1	2	1
A, A^3	2	1	1	-1	-1	0	2
B, A^2B	3	1	-1	1	-1	0	2
AB, A^3B	4	1	-1	-1	1	0	2
A^2	5	1	1	1	1	-2	1

В каждом из этих представлений имеем $\sum_r |\chi|^2 = 8$. Далее, $\sum_l h_l^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 8$.

g) Компоненты векторов v и w (стр. 295):

$r \backslash l_{ik}$	$v^{(1)}$	$v^{(2)}$	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$	$v_{11}^{(5)}$	$v_{12}^{(5)}$	$v_{21}^{(5)}$	$v_{22}^{(5)}$
E	1	1	1	1	1	0	0	1
A	1	1	-1	-1	0	-1	1	0
A^2	1	1	1	1	-1	0	0	-1
A^3	1	1	-1	-1	0	1	-1	0
B	1	-1	1	-1	1	0	0	-1
AB	1	-1	-1	1	0	1	1	0
A^2B	1	-1	1	-1	-1	0	0	1
A^3B	1	-1	-1	1	0	-1	-1	0
$\times \frac{1}{2}$					$\times \sqrt{\frac{1}{8}}$			

$k \backslash l$	$w^{(1)}$	$w^{(2)}$	$w^{(3)}$	$w^{(4)}$	$w^{(5)}$
1	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$
2	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0
3	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0
4	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0
5	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$\sqrt{1/8}$	$-\sqrt{1/8}$

h) Группа изоморфна группе вращений D_4 , которая двойную пирамиду с квадратным основанием (диэдр) переводит в себя.

Она изоморфна также подгруппе группы перестановок из четырех элементов; например, можно положить:

$$\begin{aligned}
 E &= (1 \ 2 \ 3 \ 4), & B &= (2 \ 1 \ 4 \ 3), \\
 A &= (2 \ 3 \ 4 \ 1), & AB &= (1 \ 4 \ 3 \ 2), \\
 A^2 &= (3 \ 4 \ 1 \ 2), & A^2 B &= (4 \ 3 \ 2 \ 1), \\
 A^3 &= (4 \ 1 \ 2 \ 3), & A^3 B &= (3 \ 2 \ 1 \ 4).
 \end{aligned}$$

8. Пример к методу Ритца (к стр. 389)

Рассмотрим задачу о собственных значениях:

$$\ddot{x} + \lambda x = 0, \text{ причем } x(0) = 0 \text{ и } x(1) = 0.$$

Решениями, как известно, являются $\lambda_k = k^2 \pi^2$ и $x^{(k)} = A \sin(k\pi t)$. Собственные значения и собственные функции можно аппроксимировать, заменяя предложенную задачу вариационной задачей

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt = \text{extremum} \quad (1a)$$

с дополнительным условием

$$\int_0^1 x^2 dt = C \quad (1b)$$

и теми же краевыми условиями.

Мы полагаем теперь $x_n(t) = \sum_{p=1}^n c_p f_p(t)$ и подставляем это выражение в (1a) и (1b). Пользуясь сокращенными обозначениями

$$\int_0^1 f_p^2 f_q^2 dt = A_{pq}, \quad \int_0^1 f_p f_q dt = B_{pq},$$

получаем:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_p c_q A_{pq} = \text{extremum}, \quad \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_p c_q B_{pq} = C.$$

После дифференцирования по всем c_q отсюда получается следующая система уравнений:

$$\sum_{p=1}^n c_p (A_{pq} - \lambda B_{pq}) = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где λ есть подлежащий определению множитель Лагранжа.

Чтобы можно было определить коэффициенты A_{pq} , B_{pq} , мы должны теперь дать более точные указания относительно системы функций $\{f_p\}$. Мы требуем, чтобы функция f_p для всех p представляла собой полином степени $(p-1)$, который должен обращаться в нуль при $t=0$ и $t=1$. Ясно, что эти функции целесообразно принять ортогональными и нормированными:

$$\int_0^1 f_p f_q dt = B_{pq} = \delta_{pq} \text{ при } f_p \text{ и } f_q, \text{ отличных от } 0.$$

Основываясь на этих условиях, мы находим:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \sqrt{30} t(1-t), \quad f_4 = \sqrt{210} t(1-t)(1-2t).$$

Если мы ограничимся *тремя* членами ($n=3$), то от системы (2) остается только одно уравнение

$$c_{33} (\lambda - A_{33}) = 0, \text{ т. е. } \lambda = A_{33}.$$

$$\lambda = \int_0^1 \dot{f}_3^2 dt = 30 \int_0^1 (1-4t+4t^2) dt = 10.$$

Из дополнительного условия (1b) следует далее

$$C = \int_0^1 x^2 dt = c_3^2 \int_0^1 f_3^2(t) dt = c_3^2 \cdot 1,$$

следовательно, $c_3 = \pm \sqrt{C}$ и, наконец,

$$x_3(t) = \pm \sqrt{2C} t(1-t) \sqrt{15} \text{ и } \lambda = 10,$$

в то время, как точное решение имеет вид

$$x^{(1)}(t) = \sqrt{2C} \sin \pi t \text{ и } \lambda_1 = \pi^2 = 9,86.$$

Продвигая приближение на один шаг дальше, для чего необходимо взять функцию $f_4(t)$, получаем:

$$A_{3,4} = A_{4,3} = 0, \quad A_{4,4} = 42.$$

Система уравнений (2) состоит теперь из двух уравнений

$$c_3(10 - \lambda) = 0 \text{ и } c_4(42 - \lambda) = 0.$$

Мы получаем, таким образом, два собственных решения:

I. $\lambda_1 = 10$ (как и выше), $c_3 = \pm \sqrt{C}$ (ввиду (1b)), $c_4 = 0$,

$$x_4^{(1)}(t) = \pm \sqrt{2C} t (1-t) \sqrt{15} \text{ (как и выше);}$$

II. $\lambda_2 = 42$, $c_3 = 0$, $c_4 = \pm \sqrt{C}$ (ввиду (1b)),

$$x_4^{(2)}(t) = \pm \sqrt{2C} t (1-t) (1-2t) \sqrt{105},$$

в то время как точное решение имеет вид

$$\lambda_2 = 4\pi^2 = 39,4 \text{ и } x^{(2)}(t) = \pm \sqrt{2C} \sin(2\pi t).$$

9. Движение Кеплера (к стр. 414—415)

Из трех законов Кеплера для движения планет вокруг Солнца можно следующим образом вывести объединяющий их основной закон Ньютона.

1-й закон: эллиптичность орбиты

$$r + (ar) = p.$$

r — вектор Солнце — планета; $2p$ — параметр.

a — вектор Солнце — направление перигелия; a — эксцентриситет.

Большая ось $A = \frac{p}{1-a^2}$, малая ось $B = \frac{p}{\sqrt{1-a^2}}$; $a = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}$.

Площадь эллипса, который служит орбитой, $F = \pi AB = \frac{\pi p^2}{(\sqrt{1-a^2})^3} = \pi A^{3/2} p^{1/2}$.

2-й закон: теорема площадей (см. стр. 414)

$$[\dot{r}\dot{r}] = \dot{f}; \quad dF = \frac{1}{2} k dt, \quad F = \frac{1}{2} kT; \quad T — \text{период обращения.}$$

3-й закон: $A^3 = \frac{C}{4\pi^2} T^2$ (независимо от p , a и f); следовательно

$$F^2 = \pi^2 A^3 p = \frac{k^2 T^2}{4}, \quad \frac{k^2}{p} = C, \text{ т. е. одно и то же для всех планет.}$$

Из 1-го закона следует (ввиду $\dot{r} = \frac{r\dot{r}}{r}$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r} \right) = \frac{[r \dot{r}]}{r^2} = \frac{[\dot{r}]}{r}$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r} + a, \dot{r} \right) &= 0, \\ \left(\frac{r}{r} + a, \ddot{r} \right) &= -\frac{(\dot{r} [\dot{r}])}{r^3} = -\frac{k^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Из 2-го закона следует:

$$[r\ddot{r}] = 0, \quad \ddot{r} = r\varphi(r),$$

откуда

$$\frac{k^2}{r^3} = -(r + ar)\varphi = -p\varphi; \quad \varphi = -\frac{k^2}{\rho r^3}.$$

Из 3-го закона следует тогда:

$$\ddot{r} = -\frac{Cr}{r^3},$$

т. е. закон тяготения Ньютона, где $C = MG$, M — масса Солнца, G — гравитационная постоянная.

Мы находим, далее,

$$a = -\frac{r}{r} + \frac{[\dot{r}\dot{r}]}{C},$$

$$\dot{r} = \frac{1}{\rho} \left[\dot{r}, \frac{r}{r} + a \right] \quad \text{и} \quad (\dot{r})^2 = v^2 = \frac{k^2}{\rho^2} \left(1 + a^2 + \frac{2(ar)}{r} \right) = C \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{A} \right),$$

т. е. \dot{r} представляется в виде суммы постоянного вектора $\frac{[\dot{r}]}{\rho}$ и вектора с постоянной длиной $\frac{k}{\rho}$, перпендикулярного к r .

Энергия планеты массы m находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} - \frac{mC}{r} = -\frac{mC}{2A}.$$

При $a < 1$, $C > 0$ орбита представляет собой эллипс,

При $a = 1$, $C > 0$ орбита представляет собой параболу.

При $a > 1$ орбита представляет собой гиперболу.

При $C < 0$ (отталкивание) возможен лишь случай $a > 1$.

Направление асимптот гиперболы определяется из условия $r + (ar) = 0$. Для угла θ между асимптотами получаем отсюда:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Параметр удара h , т. е. расстояние фокуса от асимптот, имеет значение

$$h = \frac{k}{v_\infty}, \quad v_\infty = \frac{k}{p} \sqrt{a^2 - 1};$$

следовательно, имеем также:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{C}{v_\infty^2 h}.$$

При координатном описании движения под действием центральной силы, $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma}{r^2} f(r)$, применяя плоские полярные координаты r, φ , получим дифференциальные уравнения

$$\ddot{r} = -f(r) + r\dot{\varphi}^2, \quad r^2\dot{\varphi} = k$$

и, полагая $u = \frac{1}{r}$, $u' = \frac{du}{d\varphi}$:

$$u'' = -u + \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2 k^2}.$$

Для гравитации $f(r) = \frac{C}{r^2}$ это дает уравнение

$$u'' = -u + \frac{C}{k^2}$$

с решением:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{k^2}{C(1 + a \cos \varphi)} = \frac{A(1 - a^2)}{1 + a \cos \varphi} \quad (\text{уравнение орбиты}).$$

Чтобы найти также зависимость от времени, введем вспомогательный угол ε с помощью равенства $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Тогда будем иметь:

$$\varepsilon - a \sin \varepsilon = \frac{2\pi(t - t_0)}{T} = M; \quad r = A(1 - a \cos \varepsilon).$$

ε называется *эксцентрической аномалией*, M называется *средней аномалией*.

Отсюда следует решение в явной форме:

$$\varepsilon = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(na) \frac{\sin(nM)}{n} \quad (\text{Бессель}).$$

10. Магнитное кольцо (к стр. 450)

В веществах, обладающих очень высокой магнитной проницаемостью (железо), ход линий индукции (\mathfrak{B}) является примерно таким же, как ход линий тока в проводниках.

Если мы имеем дело с замкнутым железным кольцом, то справедливы формулы, аналогичные тем, которые имеют место в случае кругового электрического тока. Формуле $i = \sigma \mathfrak{E}$ соответствует тогда формула $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$. Здесь, однако, $M = \oint (\mathfrak{H} d\mathfrak{s})$ будет равно не нулю, а $\frac{4\pi}{c} \int_F i_n df$, где интеграл следует брать по поверхности, ограничиваемой кольцом. Если по проходящим через эту поверхность n виткам провода идет ток силы I , то будем иметь:

$$M = \oint (\mathfrak{H} d\mathfrak{s}) = \frac{4\pi n I}{c}.$$

Эта величина может быть названа *намагничивающей* силой. Тогда $I_m = \int_q B_n df$ представляет собой полный поток индукции, или

$$I_m = \frac{M}{W_m},$$

где

$$W_m = \oint \frac{ds}{q\mu}$$

по аналогии с $I = \frac{E}{W}$.

11. Строение атома (к стр. 515)

Собственные функции атома, состоящего из Z электронов и Z -кратно положительно заряженного ядра, могут быть в случае снятия вырождения представлены в первом приближении в виде произведений Z собственных функций атома водорода (см. стр. 343—344), каждая из которых определяется четырьмя квантовыми числами n, l, m, s , $n > 0$, $n - 1 \geq l \geq 0$, $s = \pm \frac{1}{2}$, $|m| \leq l$. Согласно принципу Паули, ни для каких двух из этих функций не могут совпасть все четыре квантовых числа.

Согласно принципу построения, выдвинутому Бором, атом с Z электронами, как правило, возникает из атома с $Z - 1$ электронами при присоединении еще одного электрона (и повышении заряда ядра на 1) без изменения квантовых чисел имевшихся ранее электронов. Поэтому можно составить таблицу (см. стр. 585), позволяющую находить основное состояние соответствующего атома.

Z	I		II		IV		III		$-\sum m$	$2\sum s+1$		Z	I		II		IV		III		$-\sum m$	$2\sum s+1$	
	$n+l$	n	l	m	s	$n+l$	n	l					m	s	$n+l$	n	l	m	s				
1	H	1	1	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	2	2	2S	52	Te	6	5	1	+1	$-\frac{1}{2}$	1	3	2P			
2	He	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	53	J	6	5	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	2P			
3	Li	2	2	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	0	2	2S	54	Xe	6	5	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
4	Be	2	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	55	Cs	6	6	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	0	1S			
5	B	3	2	1	-1	$+\frac{1}{2}$	0	1	2	2P	56	Ba	6	6	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
6	C	3	2	1	0	$+\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	57	La	7	4	3	-3	$+\frac{1}{2}$	3	2	2F			
7	N	3	2	1	+1	$+\frac{1}{2}$	0	4	4	1S	58	Ce	7	4	3	-2	$+\frac{1}{2}$	5	3	2H			
8	O	3	2	1	+1	$-\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	59	Pr	7	4	3	-1	$+\frac{1}{2}$	6	4	1H			
9	F	3	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	60	Nd	7	4	3	0	$+\frac{1}{2}$	6	5	1H			
10	Ne	3	2	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	61	Pm	7	4	3	+1	$+\frac{1}{2}$	5	6	2H			
11	Na	3	3	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	2	2	2S	62	Sm	7	4	3	+2	$+\frac{1}{2}$	3	7	2F			
12	Mg	3	3	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	63	Eu	7	4	3	+3	$+\frac{1}{2}$	0	8	2S			
13	Al	4	3	1	-1	$+\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	64	Gd	7	4	3	+3	$-\frac{1}{2}$	3	7	2F			
14	Si	4	3	1	0	$+\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	65	Tb	7	4	3	+2	$-\frac{1}{2}$	5	6	2H			
15	P	4	3	1	+1	$+\frac{1}{2}$	0	4	4	1S	66	Dy	7	4	3	+1	$-\frac{1}{2}$	6	5	1H			
16	S	4	3	1	+1	$-\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	67	Ho	7	4	3	0	$-\frac{1}{2}$	6	4	1H			
17	Cl	4	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	68	Er	7	4	3	-1	$-\frac{1}{2}$	5	3	2H			
18	Ar	4	3	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	69	Tm	7	4	3	-2	$-\frac{1}{2}$	3	2	2F			
19	K	4	4	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	2	2	2S	70	Yb	7	4	3	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
20	Ca	4	4	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1S	71	Lu	7	5	2	-2	$+\frac{1}{2}$	2	2	2D			
21	Sc	5	3	2	-2	$+\frac{1}{2}$	2	2	2	2D	72	Hf	7	5	2	-1	$+\frac{1}{2}$	3	3	2F			
22	Ti	5	3	2	-1	$+\frac{1}{2}$	3	3	3	2F	73	Ta	7	5	2	0	$+\frac{1}{2}$	3	4	2F			
23	V	5	3	2	0	$+\frac{1}{2}$	3	4	4	2F	74	W	7	5	2	+1	$+\frac{1}{2}$	2	5	2D			
24	Cr	5	3	2	+1	$+\frac{1}{2}$	2	5	5	2D	75	Re	7	5	2	+2	$+\frac{1}{2}$	0	6	2S			
25	Mn	5	3	2	+2	$-\frac{1}{2}$	0	6	6	2S	76	Os	7	5	2	+2	$-\frac{1}{2}$	2	5	2D			
26	Fe	5	3	2	+2	$-\frac{1}{2}$	2	5	5	2D	77	Ir	7	5	2	+1	$-\frac{1}{2}$	3	4	2F			
27	Co	5	3	2	+1	$-\frac{1}{2}$	3	4	4	2F	78	Pt	7	5	2	0	$-\frac{1}{2}$	3	3	2F			
28	Ni	5	3	2	0	$-\frac{1}{2}$	3	3	3	2F	79	Au	7	5	2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	2	2D			
29	Cu	5	3	2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	2	2	2D	80	Hg	7	5	2	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
30	Zn	5	3	2	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	1S	81	Tl	7	6	1	-1	$+\frac{1}{2}$	1	2	2P			
31	Ga	5	4	1	-1	$+\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	82	Pb	7	6	1	0	$+\frac{1}{2}$	1	3	2P			
32	Ge	5	4	1	0	$+\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	83	Bi	7	6	1	+1	$-\frac{1}{2}$	0	4	2S			
33	As	5	4	1	+1	$+\frac{1}{2}$	0	4	4	1S	84	Po	7	6	1	+1	$-\frac{1}{2}$	1	3	2P			
34	Se	5	4	1	+1	$-\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	85	At	7	6	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	2P			
35	Br	5	4	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	86	Rn	7	6	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
36	Kr	5	4	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	1S	87	Fr	7	7	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	2	2S			
37	Rb	5	5	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	2	2	2S	88	Ra	7	7	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			
38	Sr	5	5	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	1S	89	Ac	8	5	3	-3	$+\frac{1}{2}$	3	2	2F			
39	Y	6	4	2	-2	$+\frac{1}{2}$	2	2	2	2D	90	Th	8	5	3	-2	$+\frac{1}{2}$	5	3	2H			
40	Zr	6	4	2	-1	$+\frac{1}{2}$	3	3	3	2F	91	Pa	8	5	3	-1	$+\frac{1}{2}$	6	4	1H			
41	Nb	6	4	2	0	$+\frac{1}{2}$	3	4	4	2F	92	U	8	5	3	0	$+\frac{1}{2}$	6	5	1H			
42	Mo	6	4	2	+1	$+\frac{1}{2}$	2	5	5	2D	93	Np	8	5	3	+1	$+\frac{1}{2}$	5	6	2H			
43	Tc	6	4	2	+2	$+\frac{1}{2}$	0	6	6	2S	94	Pu	8	5	3	+2	$+\frac{1}{2}$	3	7	2F			
44	Ru	6	4	2	+2	$-\frac{1}{2}$	2	5	5	2D	95	Am	8	5	3	+3	$+\frac{1}{2}$	0	8	2S			
45	Rh	6	4	2	+1	$-\frac{1}{2}$	3	4	4	2F	96	Cm	8	5	3	+3	$-\frac{1}{2}$	3	7	2F			
46	Pd	6	4	2	0	$-\frac{1}{2}$	3	3	3	2F	97	Bk	8	5	3	+2	$-\frac{1}{2}$	5	6	2H			
47	Ag	6	4	2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	2	2	2D	98	Cf	8	5	3	+1	$-\frac{1}{2}$	6	5	1H			
48	Cd	6	4	2	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	1S	99	Fm	8	5	3	0	$-\frac{1}{2}$	6	4	1H			
49	In	6	5	1	-1	$+\frac{1}{2}$	1	2	2	2P	100	Es	8	5	3	-1	$-\frac{1}{2}$	5	3	2H			
50	Sn	6	5	1	0	$+\frac{1}{2}$	1	3	3	2P	101	Mv	8	5	3	-2	$-\frac{1}{2}$	3	2	2F			
51	Sb	6	5	1	+1	$+\frac{1}{2}$	0	4	4	1S	102	No	8	5	3	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	1S			

Принцип, положенный в основу при составлении этой таблицы, состоит в лексикографическом упорядочении по значениям $n+l$, n , $-s$, sm . Теоретического обоснования этого способа упорядочения таблицы до сих пор не имеется. С помощью таблицы могут быть установлены:

1) *Периодическая система* элементов. Гомологическими являются два атома, для «последних электронов» которых совпадают l , m , s .

2) *Спектроскопический характер* основного термина, указанный в десятом столбце. Именно, значения $|\sum m| = 0, 1, 2, 3, \dots$ соответствуют термам $S, P, D, F, G, H, I, \dots$; $(2|\sum s| + 1)$ дает мультиплетность термина.

3) Возможные *возбужденные состояния* (возможные термы), в которых не все Z электронов находятся в первых Z позициях таблицы.

Эта таблица является выражением *эмпирического* правила. Она идеализирует опыт, так как в некоторых случаях наблюдаются отклонения.

12. Электронный газ (к стр. 566)

Электроны подчиняются статистике Ферми; поэтому при равновесии имеет место закон распределения:

$$N_r = \frac{g_r}{e^{\alpha + \beta E_r} + 1}, \text{ где } \beta = \frac{1}{kT}.$$

Если объем равен V , то число ячеек, соответствующих энергии $E_r = \frac{p^2}{2m}$ (p — абсолютная величина импульса), выразится формулой

$$g_r = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp.$$

Мы имеем, таким образом,

$$N_r = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{p^2 dp}{e^{\alpha + \frac{p^2}{2mkT}} + 1} = dN.$$

Для определения α служит соотношение

$$\int dN = N.$$

Ввиду того, что точное вычисление этого интеграла затруднительно (см. стр. 69), α можно вычислить приближенно следующим способом.

Условию $\frac{p^2}{2mkT} \gg 1$ удовлетворяет лишь очень малое число электронов; вследствие этого ячейки в этой области почти не заняты и

принцип Паули утрачивает свою силу. Мы должны поэтому получить *асимптотически* распределение Больцмана:

$$N_p \rightarrow \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp e^{-\alpha} e^{-\frac{p^2}{2mkT}},$$

$$N_{\text{Больцман}} = \frac{N}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha}{2mkT}} \cdot 4\pi p^2 dp.$$

Сравнение дает:

$$e^{\alpha} = \frac{V}{h^3 N} (2\pi mkT)^{3/2}$$

(N — число электронов в объеме V и, следовательно, $\frac{V}{N} = \frac{m}{\rho}$).

13. Пример к расщеплению собственных значений (к стр. 522)

Будем предполагать, что функция Гамильтона обладает сферической симметрией. Возникает вопрос, как может расщепиться $2l + 1$ -кратное собственное значение при возмущении, обладающем симметрией D_4 (двойная пирамида с квадратным основанием, группа симметрии соответствует примеру в Приложении 7).

Для ответа на этот вопрос необходимо найти элементы группы вращений сферы, изоморфной группе симметрии \mathfrak{S} оператора возмущения:

Класс	Элементы группы \mathfrak{S}	Соответствующие неприводимые части группы вращений	Угол поворота φ	Характер $\chi(\dots)$ $2l+1$ -мерного представления группы вращений при						
				$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	\dots	l
1	E	Тождественное преобразование	0	1	3	5	7	9	\dots	$2l+1$
2	A, A^3	Вращение вокруг тетрагональной оси	$\pm \frac{\pi}{2}$	1	1	-1	-1	1	\dots	$(-1)^{l/2}$
3	B, A^2B	Вращение вокруг перпендикулярной к ней двукратной оси	π	1	-1	1	-1	1	\dots	$(-1)^l$
4	AB, A^2B	Вращение вокруг биссектрисы угла между предыдущими осями	π	1	-1	1	-1	1	\dots	$(-1)^l$
5	A^2	Вращение вокруг тетрагональной оси	π	1	-1	-1	-1	1	\dots	$(-1)^l$

(Характеры неприводимых частей $2l+1$ -мерного представления группы вращений, согласно стр. 298, имеют вид

$$\chi = \frac{\sin\left(l + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

откуда при углах поворота, указанных в четвертом столбце, получаем значения, стоящие в пятом столбце.)

Характеры классов пяти неприводимых представлений группы \mathfrak{S} для восьми указанных выше элементов группы \mathfrak{S} , согласно таблице f) Приложения 7, будут следующими:

Элементы	$\chi^{(1)}(\dots)$	$\chi^{(2)}(\dots)$	$\chi^{(3)}(\dots)$	$\chi^{(4)}(\dots)$	$\chi^{(5)}(\dots)$
E	1	1	1	1	2
A, A^3	1	1	-1	-1	0
B, A^2B	1	-1	1	-1	0
AB, A^3B	1	-1	-1	1	0
A^2	1	1	1	1	-2

В одном измерении
В двух измерениях

Тогда для числа q_s неприводимых частей $(2l+1)$ -мерного представления группы вращений получим согласно формуле на стр. 522:

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$
$q_1 =$	1	0	1	0	2	1	2 } Одномерное 1 } представление 2 } 2 }
$q_2 =$	0	1	0	1	1	2	
$q_3 =$	0	0	1	1	1	1	
$q_4 =$	0	0	1	1	1	1	
$q_5 =$	0	1	1	2	2	3	3 } Двумерное 3 } представление
Максимальное число термов	1	2	4	5	7	8	10

Существуют поэтому лишь следующие возможности для расщепления собственного значения:

$$\begin{aligned} l=0 \text{ (s-терм): } & 1 \text{ простое, } 0 \text{ двойных,} \\ l=1 \text{ (p-терм): } & 1 \text{ простое, } 1 \text{ двойное,} \\ l=2 \text{ (d-терм): } & 3 \text{ простых, } 1 \text{ двойное,} \\ l=3 \text{ (f-терм): } & 3 \text{ простых, } 2 \text{ двойных,} \\ l=4 \text{ (g-терм): } & 5 \text{ простых, } 2 \text{ двойных,} \\ l=5 \text{ (h-терм): } & 5 \text{ простых, } 3 \text{ двойных,} \\ l=6 \text{ (i-терм): } & 7 \text{ простых, } 3 \text{ двойных} \end{aligned}$$

и т. д.

14. Броуновское движение (к стр. 397)

Частицы, взвешенные в газе или жидкости, вследствие столкновений с молекулами совершают зигзагообразные движения, которые тем заметнее, чем меньше размеры частиц. Эти беспорядочные движения подчиняются вероятностным законам. Если мы наблюдаем n частиц, которые видны в области v поля зрения микроскопа, причем два последовательных наблюдения отделены друг от друга промежутком времени τ , то при этом должны быть справедливы законы, соответствующие предположениям, сделанным в главе 13, В1 и 3 (стр. 396 и 399). Для вероятности наблюдения n частиц справедлива формула Пуассона

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!}, \quad \bar{n} = \frac{v}{V} N.$$

Среднее отклонение равно $\sqrt{\bar{n}}$.

Два последовательных наблюдения зависят друг от друга благодаря наличию последействия.

Среднее уклонение двух последовательных наблюдений равно

$$\overline{(n_i - n_{i+1})} = P(n - \bar{n})$$

и среднее квадратичное уклонение равно

$$\sqrt{\overline{(n_i - n_{i+1})^2}} = \sqrt{2P\bar{n}}.$$

Вероятность того, что частица за время t пройдет в заданном направлении путь, конец которого будет заключен между ξ и $\xi + d\xi$, получается из кинетических соображений в виде

$$W(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi.$$

D представляет собой коэффициент диффузии.

D (или $W(\xi)$) и P тесно связаны друг с другом; P здесь означает вероятность того, что частица при следующем наблюдении не окажется в области v .

Если принять во внимание, что путь, пройденный частицей за время t , будет в среднем равен нулю, так как, разумеется, никакое направление не является преимущественным по сравнению с противоположным, и что, следовательно, величины ξ также могут рассматриваться как уклонения от среднего положения, то можно тотчас же увидеть совпадение с *гауссовым законом ошибок*. Вместе с тем средний путь за время t будет равен

$$\sqrt{\overline{\xi^2}} = \sqrt{2Dt},$$

откуда становится ясным смысл коэффициента диффузии D .

15. Флуктуации макроскопических величин (к стр. 397)

Если ω является какой-либо (макроскопической) физической величиной, зависящей от объема V и температуры T , то флуктуации $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}$ в части v полного объема V подчиняются следующему закону (Г. А. Лоренц):

$$\overline{(\Delta\omega)^2} = k \frac{V}{v} \left[-T \left. \frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}} \right|_T + T^2 \left. \frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial E}{\partial T}} \right|_v \right].$$

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v = c_v \text{ — удельная теплоемкость} \right].$$

1-й пример. Плотность: $\omega = \rho$ (масса в единице объема)

$$(\Delta\rho)^2 = \frac{k}{v} \frac{T\rho}{\frac{\partial\rho}{\partial p}}.$$

В случае идеального газа с N молекулами в единице объема, $\bar{n} = Nv$ молекулами в v , причем $p = kNT = \frac{k\rho}{m} T$, будем иметь:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N}{v}, \quad \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}.$$

2-й пример. Энергия в единице объема: $\omega = E$. Для несжимаемого вещества $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} = \infty\right)$ имеем:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \frac{kT^2}{\rho v} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v.$$

16. Биномиальные коэффициенты $\binom{m}{n}$

n здесь во всех случаях означает целое положительное число.

m может иметь произвольные положительные или отрицательные значения.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m = 1$	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$m = -1$	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
-2	-2	+3	-4	+5	-6	+7	-8
-3	-3	+6	-10	+15	-21	+28	-36
-4	-4	+10	-20	+35	-56	+84	-120
-5	-5	+15	-35	+70	-126	+210	-330

$n =$	1	2	3	4	5	6
$m = -\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{63}{8}$	$-\frac{231}{16}$	$\frac{3003}{128}$	$-\frac{9009}{255}$	$\frac{51051}{1024}$
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{35}{8}$	$-\frac{105}{16}$	$\frac{1155}{128}$	$-\frac{3003}{255}$	$\frac{15015}{1024}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{35}{16}$	$\frac{315}{128}$	$-\frac{693}{255}$	$\frac{3003}{1024}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{63}{255}$	$\frac{231}{1024}$

$n =$	1	2	3	4	5	6
$m = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{7}{256}$	$-\frac{21}{1024}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{3}{128}$	$-\frac{3}{256}$	$+\frac{7}{1024}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\frac{15}{8}$	$+\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{3}{256}$	$-\frac{5}{1024}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$+\frac{35}{8}$	$+\frac{35}{16}$	$+\frac{35}{128}$	$-\frac{7}{256}$	$+\frac{7}{1024}$
$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$	$-\frac{140}{81}$	$\frac{455}{243}$	$-\frac{1456}{729}$	$\frac{13\ 832}{6561}$
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{40}{81}$	$\frac{110}{243}$	$-\frac{308}{729}$	$\frac{5236}{6561}$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$\frac{35}{243}$	$-\frac{91}{729}$	$\frac{728}{6561}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{5}{81}$	$-\frac{10}{243}$	$+\frac{22}{729}$	$-\frac{154}{6561}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$+\frac{4}{81}$	$-\frac{7}{243}$	$+\frac{14}{729}$	$-\frac{91}{6561}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$+\frac{5}{243}$	$-\frac{8}{729}$	$+\frac{44}{6561}$
$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{195}{128}$	$\frac{3315}{2048}$	$-\frac{13\ 923}{8192}$	$\frac{348\ 075}{32\ 768}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{21}{32}$	$-\frac{77}{128}$	$\frac{1155}{2048}$	$-\frac{4389}{8192}$	$\frac{100\ 947}{32\ 768}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{195}{2048}$	$-\frac{663}{8192}$	$\frac{13\ 923}{32\ 768}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{7}{128}$	$-\frac{77}{2048}$	$+\frac{231}{8192}$	$-\frac{4389}{32\ 768}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{5}{128}$	$-\frac{45}{2048}$	$+\frac{117}{8192}$	$-\frac{1989}{32\ 768}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{32}$	$-\frac{5}{128}$	$+\frac{35}{2048}$	$-\frac{77}{8192}$	$+\frac{1155}{32\ 768}$

17. Коэффициенты рядов

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$	$n!$	$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$	$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$
1	1,00000	1,00000	1	1	2
2	0,50000	1,50000	2	3	8
3	0,33333	1,83333	6	15	48
4	0,25000	2,08333	24	105	384
5	0,20000	2,28333	120	945	3840
6	0,16667	2,45000	720	10395	46080
7	0,14286	2,59286	5040	135135	645120
8	0,12500	2,71786	40320	2027025	10321920
9	0,11111	2,82897	362880	34459425	185794560
10	0,10000	2,92897	3628800	654729075	3715891200
..
∞	0	$\ln n + C$ (см. стр. 153)	$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$	$2^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n$	$2^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

n	$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$	
1	1,00000	0,50000	0,66667	Пояснение: в последней строке в каждом случае указано асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$. Числа, заключенные в скобки, представляют собой приближения, вычисленные с помощью этих асимптотических формул при $n = 10$.
2	0,66667	0,37500	0,53333	
3	0,40000	0,31250	0,45714	
4	0,22857	0,27344	0,40635	
5	0,12698	0,24609	0,36941	
6	0,06926	0,22559	0,34099	
7	0,03730	0,20947	0,31826	
8	0,01989	0,19638	0,29954	
9	0,01053	0,18547	0,28377	
10	0,00554 (0,00547)	0,17620 (0,1776)	0,27026 (0,280 или 0,267)	
..	
∞	$\sqrt{\pi n} \cdot 2^{-n}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ $\frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1}$	

18. Единицы количества электричества

	CGSE	CGSM	α -секк (=кулон)	z -экс	Заряд электрона	1 z Ag	1 см^3 грему- чего газа
CGSE	1	$0,33 \cdot 10^{-10}$	$0,33 \cdot 10^{-9}$	$3,456 \cdot 10^{-15}$	$2,083 \cdot 10^9$	$0,369 \cdot 10^{-12}$	$0,057 \cdot 10^{-9}$
CGSM	$3 \cdot 10^{10}$	1	10	$1,036 \cdot 10^{-4}$	$6,242 \cdot 10^{19}$	$1,118 \cdot 10^{-2}$	1,74
α -секк (=кулон)	$3 \cdot 10^9$	0,1	1	$1,036 \cdot 10^{-5}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$1,118 \cdot 10^{-3}$	0,174
z -e	$2,893 \cdot 10^{11}$	$9,652 \cdot 10^3$	$9,652 \cdot 10^4$	1	$6,025 \cdot 10^{23}$	1,068 · 10 ²	$0,164 \cdot 10^5$
Заряд электрона	$4,802 \cdot 10^{-10}$	$1,602 \cdot 10^{-20}$	$1,602 \cdot 10^{-16}$	$1,660 \cdot 10^{-23}$	1	$1,772 \cdot 10^{-22}$	$0,273 \cdot 10^{-19}$
1 z Ag	$2,71 \cdot 10^{12}$	$0,894 \cdot 10^2$	$0,894 \cdot 10^3$	$9,37 \cdot 10^{-3}$	$5,64 \cdot 10^{21}$	1	$0,154 \cdot 10^2$
1 см^3 гремучего газа	$1,76 \cdot 10^{10}$	0,581	5,81	$6,08 \cdot 10^{-5}$	$3,67 \cdot 10^{19}$	$0,694 \cdot 10^{-2}$	1

19. Единицы энергии

	эрг	кГм	вт·сек	квт·ч	л·атм	z -кал	эв	Световой квант $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ для $\lambda = 1 \text{ см}$	Энергия, приходящая на каждую степень свободы, $\frac{1}{2}kT$, при $T = 1^\circ \text{K}$
эрг	1	$1,02 \cdot 10^{-8}$	10^{-7}	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$9,86 \cdot 10^{-10}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$6,243 \cdot 10^{11}$	$5,036 \cdot 10^{15}$	$1,449 \cdot 10^{18}$
кГм	$9,81 \cdot 10^7$	1	9,81	$2,72 \cdot 10^{-6}$	$9,67 \cdot 10^{-2}$	2,344	$6,13 \cdot 10^{19}$	$4,94 \cdot 10^{23}$	$1,422 \cdot 10^{21}$
вт·сек	10^7	0,102	1	$2,78 \cdot 10^{-7}$	$9,86 \cdot 10^{-9}$	0,2389	$6,243 \cdot 10^{18}$	$5,036 \cdot 10^{22}$	$1,449 \cdot 10^{20}$
квт·ч	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,67 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^6$	1	$3,55 \cdot 10^4$	$8,602 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^{25}$	$1,81 \cdot 10^{29}$	$5,22 \cdot 10^{27}$
л·атм	$1,0133 \cdot 10^9$	$1,03 \cdot 10^1$	$1,0133 \cdot 10^2$	$2,81 \cdot 10^{-5}$	1	24,21	$6,33 \cdot 10^{20}$	$5,10 \cdot 10^{24}$	$1,469 \cdot 10^{25}$
z -кал	$4,185 \cdot 10^7$	0,4266	4,185	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$4,130 \cdot 10^{-2}$	1	$2,61 \cdot 10^{12}$	$2,11 \cdot 10^{23}$	$6,065 \cdot 10^{23}$
эв	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,63 \cdot 10^{-20}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$4,45 \cdot 10^{-28}$	$1,58 \cdot 10^{-21}$	$3,83 \cdot 10^{-20}$	1	$8,067 \cdot 10^2$	$2,321 \cdot 10^4$
$h\nu$ ($\lambda = 1 \text{ см}$)	$1,986 \cdot 10^{-16}$	$2,02 \cdot 10^{-24}$	$1,986 \cdot 10^{-23}$	$5,52 \cdot 10^{-30}$	$1,96 \cdot 10^{-25}$	$4,74 \cdot 10^{-26}$	$1,240 \cdot 10^{-4}$	1	2,878
$\frac{1}{2} kT$ ($T = 1^\circ \text{K}$)	$6,90 \cdot 10^{-17}$	$7,03 \cdot 10^{-25}$	$6,90 \cdot 10^{-24}$	$1,917 \cdot 10^{-30}$	$6,809 \cdot 10^{-26}$	$1,649 \cdot 10^{-23}$	$4,308 \cdot 10^{-5}$	$3,475 \cdot 10^{-1}$	1

1 л. с.·секк = 75 кГм = 736 вт·сек (джоулей).

20. Единицы длины (в см)

$$\begin{aligned} \mu &= 10^{-4} \\ \text{Å} &= 10^{-8} \text{ (ангстрем)} \\ X \text{ (икс-единица)} &= 10^{-11} \\ \text{боровский радиус} &= 0,529 \cdot 10^{-8} = \frac{\hbar^2}{me^2} \\ \text{классический радиус электрона} &= 2,82 \cdot 10^{-13} = \frac{e^2}{mc^2} \\ \text{комптоновская длина волны электрона} &= 2,426 \cdot 10^{-10} = \frac{h}{mc} \\ \text{» » » протона} &= 1,321 \cdot 10^{-13} = \frac{h}{Mc} \\ \text{световой год} &= 0,95 \cdot 10^{18} \\ \text{парсек} &= 3,08 \cdot 10^{18} \\ \text{радиус земной орбиты} &= 8,495 \cdot 10^{18} \\ \text{радиус земного шара} &= 6,37 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

21. Универсальные постоянные

Квант действия	$h = 6,623 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$
Заряд электрона	$e = 4,802 \cdot 10^{-10} \text{ э}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{сек}^{-1}$ (т. е. единиц CGSE) $= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ кулона}$ $c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$
Скорость света	$a = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,0}$
Постоянная тонкой структуры	$M = 1,672 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ $m = 9,106 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ ($mc^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ эв}$)
Масса протона	$\frac{M}{m} = 1836,6$
Масса электрона	$R = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} = 109737,3 \text{ см}^{-1}$ $Rc = 3,290 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$
Их отношение	$a = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ $k = 1,380 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{град}^{-1}$
Постоянная Ридберга	$L = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ $\sigma = 7,562 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-4}$
«Радиус электрона»	$G = 6,670 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$
Постоянная Больцмана	
Число Лошмидта (постоянная Авогадро)	
Постоянная Стефана	
Гравитационная постоянная	

Подробное обсуждение вопроса о наиболее вероятных значениях универсальных постоянных можно найти в статьях U. Stille, Z. Phys. 121, 133 (1943) и J. W. M. Du Mond, E. R. Cohen, Rev. of Modern Physics, 20, 82 (1948).

ЛИТЕРАТУРА

Далее указан ряд книг, из которых можно почерпнуть информацию относительно таких деталей, изложение которых вышло бы за рамки, принятые для этой книги. Настоящая библиография никоим образом не преследует цели дать полные литературные указания. [Звездочкой отмечена литература, добавленная редактором перевода.]

Часть первая

МАТЕМАТИКА

Из книг общего характера, охватывающих большую часть излагаемого материала, назовем следующие:

Courant R. u. D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 2 Aufl., Bd. 1, Berlin, Springer, 1931; Bd. 2, 1937 (имеется русский перевод: Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1—2, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1951).

Frank Ph. u. Mises R. V., Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (одновременно 8-е издание книги Riemann—Weber, Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik), Bd. 1: Mathematischer Teil. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1930.

Magnus W. u. Oberhettinger F., Formeln und Sätze der mathematischen Physik, 2 Aufl. Berlin, Springer, 1948.

Pascal E., Repertorium der höheren Mathematik, Bd. 1: Analysis (во втором издании три отдельных тома), Berlin, B. G. Teubner, 1910—1929.

Whittaker E. T. a. Watson G. N., A Course of Modern Analysis, Fourth Edition, Cambridge University Press, 1927 (имеется русский перевод: Уиттекер Э. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, 1933; т. 2, М.—Л., 1934).

* Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, М., 1958; т. 2, М., 1959.

* Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 1—4, Гостехиздат, М., 1957; т. 5, М., 1959.

К отдельным разделам укажем следующие произведения:

Раздел 2-й. Дифференциальное и интегральное исчисление

Bieberbach L., Differential- und Integralrechnung, 3 Aufl., 2 Bde, Berlin, B. G. Teubner, 1928 (имеется русский перевод 1-го издания: Бибербах Л., Дифференциальное и интегральное исчисление, ч. 1—2, ГИЗ, М., 1923).

Courant R., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2 Aufl., 2 Bde, Berlin, Springer, 1930/31 (имеется русский перевод: Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—2, ГИТИ, М.—Л., 1931).

Mangoldt H. v. u. Knopp K., Einführung in die höhere Mathematik, 3 Bde, 7 Aufl., Leipzig, S. Hirzel, 1942.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 6 u. 7 Aufl., 3 Bde, Leipzig, B. G. Teubner, 1914—1921.

* Бермант А. Ф., Курс математического анализа, Гостехиздат, М., т. 1, 1956, т. 2, 1957.

* Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. 1—2, Физматгиз, М., 1959.

Раздел 3-й. Ряды и разложения

Кнопф К., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4 Aufl., Berlin, Springer, 1947.

* Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, ИЛ, М., 1948.

* Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, М., 1948.

* Привалов П. И., Ряды Фурье, ГТТИ, М.—Л., 1934.

* Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 3-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Раздел 4-й. Функции

Burkhardt H., Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 5 Aufl., Berlin, 1921.

Hurwitz A. u. Courant R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3 Aufl., Berlin, Springer, 1929 (имеется русский перевод: Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, М.—Л., 1933; Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, ГТТИ, М.—Л., 1934).

Кнопф К., Funktionentheorie, Sammlung Götschen, Nr. 668, 703.

* Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1958.

* Лебедев Н. Н., Специальные функции и их применения, Гостехиздат, М., 1953.

* Луц Г. Л. и Эльсгольц Л. Э., Функции комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.

* Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, Гостехиздат, М., 1957.

* Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 9-е, Гостехиздат, М.—Л., 1954.

* Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

* Фукс Б. А. и Левин В. И., Функции комплексного переменного (специальная часть), Гостехиздат, М.—Л., 1949.

* Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1959.

Литература по сферическим функциям

Heine E., Handbuch der Kugelfunktionen, 2 Aufl., 2 Bde, Berlin, Reimer, 1878—1881.

Hobson E. W., Theory of Spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge University Press, 1931 (имеется русский перевод: Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952).

Литература по цилиндрическим функциям

Nielsen N., Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig, B. G. Teubner, 1904.

Schafheitlin P., Die Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1922 (имеется русский перевод: Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. 1—2, ИЛ, М., 1949).

Weyrich R., Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, B. G. Teubner, 1937.

* Грей Э., Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, М., 1949.

* Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, М.—Л., 1935.

Литература по эллиптическим функциям

Fricke R., Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, 2 Bde, Leipzig, B. G. Teubner, 1916—1922.

Krause M. u. Naetsch E., Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

* Ахизер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Литература по прочим специальным функциям

Strutt M. J. O., Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 1, H. 3, Berlin, Springer, 1932 (имеется русский перевод: Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИУ, Харьков—Киев, 1935).

* Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.

Таблицы функций

Nayashi K., Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, sowie der Funktionen e^{-x} und e^x mit den natürlichen Zahlen als Argument, Berlin u. Leipzig, de Gruyter & Co, 1921.

Jahnke E. u. Emde F., Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 4 Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1948 (имеется русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М.—Л., 1959).

* Милн-Томсон Л. М. и Комри Э., Четырехзначные математические таблицы, Физматгиз, М., 1960.

* Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, М., 1959.

Раздел 5-й. Алгебра

Born M. u. Jordan P., Elementare Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1930. 2-я глава: Matrizenrechnung.

Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, de Gruyter & Co, 1909.

Muir, Theory of Determinants.

Netto E., Die Determinanten, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1910 (имеется русский перевод: Нетто Е., Начала теории определителей. Одесса, 1912).

Weber H., Algebra, Braunschweig, F. Vieweg, 1895.

Wintner A., Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig, S. Hirzel, 1929.

* Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, М., 1954.

* Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1951.

* Каган В. Ф., Основания теории определителей, ГИЗ, 1922.

* Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

* Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1956.

Раздел 7-й. Векторный анализ

Abraham M. u. Becker R., Theorie der Elektrizität, 9 Aufl., Bd. 1, Leipzig, B. G. Teubner, 1932 (имеется русский перевод: Абрагам М. и Беккер Р., Теория электричества, изд. 2-е, М.—Л., 1939).

Gans K., Vektoranalysis (mit Anwendungen), 6 Aufl., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Lagally M., Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig, AVG, 1928; 5 Aufl., 1956 (имеется русский перевод: Лагалли М., Векторное исчисление, ОНТИ, М.—Л., 1936).

Levi-Civita T., Der absolute Differentialkalkül, Berlin, Springer, 1923.

Runge C., Vektoranalysis, Leipzig, S. Hirzel, 1921.

Schouten J. A., Der Ricci-Kalkül., Berlin, Springer, 1924.

Все учебники по общей теории относительности см. ниже.

* Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, Гостехиздат; ч. 1, М.—Л., 1939; ч. 2, М., 1952.

* Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. 6-е, Гостехиздат, М.—Л., 1938.

* Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, М., 1953.

Раздел 8-й. Специальные системы координат

* Бермант А. Ф., Отображения, криволинейные координаты, преобразования, формулы Грина, Физматгиз, М., 1958.

Раздел 9-й. Теория групп

Speiser A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, Springer, 1937.

Waerden B. L. van der, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1932 (имеется русский перевод: Ван-дер-Ваerden Б., Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938).

Weil H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2 Aufl., Leipzig, S. Hirzel, 1931.

Wigner E., Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1931.

Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig, B. G. Teubner, 1937.

* Багавантам С. и Венкатарайуду Т., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, М., 1959.

* Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М., 1950.

* Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.

* Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.

* Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, М., 1947.

* Курош А. Г., Теория групп, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1953.

* Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, М., 1957.

* Мурнаган Ф., Теория представлений групп, ИЛ, М., 1950.

* Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.

* Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, изд. 2-е, М., 1954.

Раздел 10-й. Дифференциальные уравнения

Bateman H., Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge University Press, 1932.

Horn J., Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung Schubert, Bd. 50) und partielle Differentialgleichungen (Sammlung Schubert, Bd. 60), Leipzig, de Gruyter & Co.

Jordan C., Cours d'analyse. Paris, Gauthier-Villars.

Kamke E., Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig, Akad. Verl.-Ges., 1943 (имеется русский перевод: Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1950).

Valée-Poussin de la, Cours d'analyse, B. 2, Paris, Gauthier-Villars (имеется русский перевод: Валле-Пуассен, Ш. Ж. де ла, Курс анализа бесконечно малых, т. 2, ГТТИ, М.—Л., 1933).

Webster A. G. u. Szegő, G. Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1930 (имеется русский перевод: Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1—2, ОНТИ, М.—Л., 1934).

* В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

* Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 4-е, Гостехиздат, М., 1952.

* Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

* Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3-е, Гостехиздат, М., 1954.

* Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 4-е, Гостехиздат, М.—Л., 1945.

* Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1953.

* Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, М., 1957.

* Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ГТТИ, М.—Л., 1937.

Раздел 11-й. Интегральные уравнения

Hellinger E. u. Toeplitz O., Статья в Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen (6 статей), Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner.

Wiarda G., Integralgleichungen, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner (имеется русский перевод: Виарда Г., Интегральные уравнения, Гостехиздат, М., 1933).

* Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1957.

* Михлин С. Г., Интегральные уравнения, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

* Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Раздел 12-й. Вариационное исчисление

Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig u. Berlin, Köhler, 1909.

Kneser A., Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1925.

- * Ахнезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, М., 1955.
- * Блисс Д., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.
- * Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- * Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

Раздел 13-й. Исчисление вероятностей

- Czuber W. R., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, B. G. Teubner.
- Ehrenfest P., Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1916 (имеется русский перевод: Г. А. Лоренц, Статистические теории в термодинамике, ГТТИ, М.—Л., 1935).
- Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, B. G. Teubner (имеется русское издание: Марков А. А., Исчисление вероятностей, изд. 4-е, ГИЗ, 1924).
- Mises R. V., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig u. Wien, Franz Deuticke, 1931.
- Poincaré H., Calcul de probabilité, Paris, Gauthier-Villars.
- * Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, изд. 4-е, Гостехиздат, М., 1946.
- * Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, М., 1958.
- * Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1954.
- * Гончаров В. Л., Теория вероятностей, Оборонгиз, 1939.
- * Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
- * Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1952.

Часть вторая

ФИЗИКА

Из книг общего характера назовем следующие:

- Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 4 (механика) и Bd. 5 (физика), Leipzig, B. G. Teubner, 1931—1926.
 - Fürth R., Einführung in die theoretische Physik, Wien, Springer, 1936.
 - Gans R. u. Weber H., Repertorium der mathematischen Physik, Bd. 1 Mechanik und Wärme, 2 части, Leipzig, B. G. Teubner, 1915—1916.
 - Geiger H. u. Scheel K., Handbuch der Physik, 25 Bde, частично во втором издании, Berlin, Springer, начиная с 1926.
 - Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, 10 Aufl., Leipzig, AVG, 1959.
 - Planck M., Einführung in die theoretische Physik, 5 Bde, Leipzig, S. Hirzel, 1922—1930 (имеется русский перевод: Планк М., Введение в теоретическую физику, ГТТИ, ч. 1, Общая механика, изд. 2-е, М.—Л., 1932; ч. 2, Механика деформируемых тел, изд. 2-е, М.—Л., 1932; ч. 3, Теория электричества и магнетизма, изд. 2-е, М.—Л., 1934; ч. 4, Оптика, М.—Л., 1934; ч. 5, Теория теплоты, М.—Л., 1935).
 - Sommerfeld A., Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 1—5, Leipzig u. Wiesbaden, 1947—1949 (имеется русский перевод: Зоммерфельд А., Механика, ИЛ, М., 1947; Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950; Зоммерфельд А., Оптика, ИЛ, М., 1953; Зоммерфельд А., Механика деформируемых сред, ИЛ, М., 1954; Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, М., 1955; Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, М., 1958).
- К отдельным разделам укажем следующие произведения.

Раздел 1-й. Механика

Klein F. u. Sommerfeld A., Über die Theorie des Kreisels, 4 выпуска, Leipzig, B. G. Teubner, 1910—1923.

Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, Leipzig, B. G. Teubner.

Lamb H., Lehrbuch der Hydrodynamik, 2 Aufl., Leipzig, B. G. Teubner, 1931 (имеется русский перевод: Л а м б Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947).

Love A. E. H., Lehrbuch der Elastizität, Leipzig, B. G. Teubner, 1907 (более новое английское издание: 1927).

Prandtl L. u. Tietjens O., Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl, 2 Bde, Berlin, Springer, 1929—1931 (имеется русский перевод: Т и т ь е н с О., Гидро-и аэродинамика, по лекциям Л. Прандтля, ГТТИ, М.—Л., т. 1, изд. 2-е, 1933; т. 2, 1935).

Whittaker E. T., Analytische Dynamik der Punkte und starrer Körper, Berlin, Springer, 1924 (имеется русский перевод: У и т т е к е р Е. Т., Аналитическая динамика, Гостехиздат, М.—Л., 1937).

* Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

* Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, М., 1958.

* Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1954.

* Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Раздел 2-й. Электродинамика (с включением оптики)

Abraham M. u. Becker R. Theorie der Elektrizität, Bd. 1, Einführung in die Maxwellsche Theorie, 9. Aufl., 1932 (имеется русский перевод А б р а г а м М., Беккер Р., Теория электричества, ОНТИ, М.—Л., 1939). Bd. 2, Elektronentheorie, 6 Aufl., Leipzig, B. G. Teubner, 1933.

Born M., Optik, Berlin, Springer, 1933.

Freinkel J., Lehrbuch der Elektrodynamik, 2 Bde, Berlin, Springer, 1926—1928 (имеется русское издание: Френкель Я. И., Электродинамика, ГТТИ, М.—Л., т. 1, 1934; т. 2, 1935).

Schaefer C., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, Leipzig, B. G. Teubner, 1929.

* Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

* Ландау Л. и Лифшиц Е., Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М.—Л., 1959.

* Ландсберг Г. С., Оптика, изд. 3-е, Гостехиздат, М., 1954.

* Тамм И. Е., Основы теории электричества, изд. 5-е, Гостехиздат, М., 1954.

Раздел 3-й. Теория относительности

Eddington, Sir A., Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung Berlin, Springer, 1925 (имеется русский перевод: Эддингтон А. С., Теория относительности, ГТТИ, М.—Л., 1934).

Einstein A., Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie, 2 Aufl., Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1923 (имеется русский перевод принстонского издания 1953 г. (дополненного): Альберт Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955).

Laue M. V., Die Relativitätstheorie, 2 Bde, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1921—1923.

Lorentz H. A., Einstein A. u. Minkowsky H., Das Relativitätsprinzip, Сборник статей, 4. Aufl, Leipzig, B. G. Teubner, 1922 (см. сборник:

Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский, Принцип относительности, ГТТИ, М.—Л., 1935).

Pauli W., Jr., Relativitätstheorie, Статья в Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 5, Leipzig, B. G. Teubner, 1922 (имеется русский перевод: Паули В., Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947).

Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., Berlin, Springer, 1923.

* Борн М., Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы, Гостехиздат, М.—Л., 1938.

* Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947.

* Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.

* Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

* Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, М., 1955.

Раздел 4-й. Квантовая теория

Литература по старой теории

Born M., Vorlesungen über Atommechanik, Bd. 1, Berlin, Springer, 1925 (имеется русский перевод: Борн М., Лекции по атомной механике).

Sommerfeld A., Atombau und Spektrallinien, 5 Aufl., Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1933 (имеется русский перевод изд. 1951 г.: А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. I, Гостехиздат, М., 1956).

Литература по новой теории

Подробные сборники: Handbuch der Physik, Bd. 24, 1 u. 2 Aufl., Berlin Springer, 1933—1934 (имеется русский перевод: Паули В., Основные принципы волновой механики, ИЛ, М., 1947).

Born M. u. Jordan P., Elementare Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1930.

Dirac P. A. M., Die Prinzipien der Quantenmechanik, Leipzig, S. Hirzel, 1930 (имеется русский перевод англ. изд. 1935 г.: Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, изд. 2-е, ОНТИ, М.—Л., 1937).

Flügge S., Rechenmethoden der Quantentheorie, 1 Teil, Berlin u. Göttingen, Springer, 1947.

Heisenberg W., Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Leipzig, S. Hirzel, 1930 (имеется русский перевод: Гейзенберг В., Физические принципы квантовой теории, ГТТИ, М.—Л., 1932).

Heitler W., Quantum theory of radiation, 2 Aufl., Oxford, Clarendon Press, 1942 (имеется русский перевод изд. 1954 г.: Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956).

Kramers H. A., Die Grundlagen der Quantentheorie, Handbuch der chemischen Physik, Bd. 1, Leipzig, AVG, 1938.

Schrödinger E., Abhandlungen zur Wellenmechanik, 2 Aufl., Leipzig, Johann Ambrosius Barth., 1928.

Sommerfeld A., Atombau und Spektrallinien, Bd. 2, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1939 (имеется русский перевод изд. 1951 г.: А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. 2, Гостехиздат, М., 1956).

Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien, Franz Deuticke, 1943 (имеется русский перевод: Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, М.—Л., 1947).

Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2 Aufl., Leipzig, S. Hirzel, 1931.

* Ахнезер А. И. и Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1959.

- * Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
- * Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, М., 1957.
- * Ландау Л. и Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- * Соколов А. А., Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, М., 1958.
- * Умэдзава Х., Квантовая теория поля, ИЛ, М., 1958.
- * Швингер Ю., Теория квантованных полей, ИЛ, М., 1956.
- * Шифф Л., Квантовая механика, изд. 2-е, ИЛ, М., 1959.

Раздел 5-й. Термодинамика

- Gibbs J. W., The Collected Works, Vol. 1, London, 1928.
- Planck M., Thermodynamik, 9 Aufl., Berlin, 1930.
- Sackur O., Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik, 2 Aufl., Berlin, Springer, 1928.
- * Лоренц Г. А., Лекции по термодинамике, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
- * Леонтович М. А., Введение в термодинамику, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
- * Млодзеевский А. Б., Молекулярная физика, изд. 5-е, Гостехиздат, М.—Л., 1941.

Раздел 6-й. Статистические методы

- Brillouin L., Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektrophysik der Metalle, Berlin, Springer, 1931.
- Gibbs J. W., The Collected Works, Vol. 2, London, 1928.
- Jordan P., Statistik auf quantentheoretischer Grundlage, Braunschweig, F. Vieweg & Sohn, 1933.
- Lorenz H. A., Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig u. Berlin, V. G. Teubner, 1916 (имеется русский перевод: Лоренц Г. А., Статистические теории в термодинамике, ГТТИ, М.—Л., 1935).
- Tolman R., Principles of statistical mechanics, Oxford, Clarendon Press, 1938.
- * Ландау Л. и Лифшиц Е., Статистическая физика, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- * Левич В. Г., Введение в статистическую физику, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1954.
- * Леонтович М. А., Статистическая физика, Гостехиздат, М.—Л., 1944.
- * Майер Д. и Гепперт-Майер М., Статистическая механика, ИЛ, М., 1952.
- * Шредингер Э., Статистическая термодинамика, М., 1948.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация 488
 Алгебра, определение 26
 Амплитуда вероятности 511, 513
 Аномалия орбиты средняя 583
 — — эксцентрическая 269, 583
 Ансамбль микроканонический 559
 Атом, строение 584, 586

 Бета-функция, см. Функция В

 Вариация 373
 Вектор возмущения 222
 — волновой 465
 — Герца 462, 527
 — единичный 202
 — лучевой 472
 —, определение 30, 201
 —, перенос 201
 — Пойнтинга 456
 — поля 201
 — свободный 201
 — тока 222
 — четырехмерный 479
 Вектор-функция точки 242
 Векторы аксиальные 263
 — взаимные 223, 224, 225
 — гиперкомплексные 43, 238—239
 —, дифференциальные операции 206—
 207
 —, —, преобразование 207—208
 — дуальные 239—241
 —, интегралы векторные 205, 214, 216
 —, — скалярные 212—214
 —, — — линейные 205
 —, — — несобственные 213
 —, — — поверхностные 205
 —, — — собственные 213
 —, — —, теорема Гаусса 212
 —, — —, — Грина 212
 —, — —, — Пуассона 213
 —, — —, — Стокса 212
 —, комплексные 236—237
 —, компоненты ковариантные 254

 Векторы, компоненты контравариант-
 ные 254
 — — полевые 485
 — — полярные 263
 —, произведение векторное 203
 —, — скалярное 202
 —, системы в многомерных простран-
 ствах 252—254
 —, совокупности 221—222
 —, сумма 202
 Вероятность испускания 533
 — — вынужденного 534
 — — спонтанного 534
 — многопараметрическая 400
 —, определение 395
 — — перехода 495, 514
 — — в идеальном газе 562
 — — квантовая 500
 — — статистическая 560
 — — элементарная 554
 — поглощения 534
 — состояния статистическая 557
 —, теорема разложения 511
 Вес статистический 560
 Волна, амплитуда 226, 471
 —, анизотропия 226
 — векторная, направление поляризации
 229
 — —, плоскость поляризации 229
 — — поперечная 229
 — — продольная 229
 — —, эллиптически поляризованная
 229
 —, волновая нормаль 226
 —, — поверхность 471
 —, волновое число 226
 —, волновой вектор 226
 —, — луч 223
 —, — пакет 227
 —, группы волн 227
 —, — — диффузные 228
 —, дисперсия 226
 —, длина 226, 471

- Волна затухающая 228
 — интенсивность 226
 — модулированная 227
 — плоская 225, 465
 — —, нормальная форма 226
 — —, поперечная 465
 —, скорость групповая 227
 —, — фазовая 227
 — стоячая 227
 — сферическая 228, 466
 — упругая поперечная 438
 — — —, скорость распространения 438
 — — —, продольная 438
 — — —, скорость распространения 438
 —, фаза 226, 471
 —, фазовая постоянная 226
 —, фронт 226
 — цилиндрическая 229, 465—466
 Волчок свободный 429
 — симметрический 429
 — —, нутация 430
 — —, прецессия 430
 Время, растяжение 480
 — релаксации 439
 — собственное 479
 —, сокращение 480
 Выравнивание 402—403
 — посредственных наблюдений 403
 Вычеты 107
 Вязкость 439

 Газ идеальный, модель 561—566
 — —, уравнение состояния 563
 — реальный 551
 — электронный 566, 586
 Гамма-функция, см. Функция Г
 Гауссова числовая плоскость 27
 Гемиздрии 302, 304
 Геодезическая линия 256
 Геометрия, определение 26
 Герполодия 429
 Голоэдриа 302, 304
 Гидродинамика 440—442
 Гидростатика 442
 Гипотеза адиабатическая 492
 Градиент 206, 249
 — векторный 206
 Группа абелева 288
 — вращений 297—298, 579, 588
 —, закон композиции 288
 —, изоморфизм 289
 —, классы смежности 290
 — непрерывная 291
 — — бесконечная 292
 — — конечная 292

 Группа непрерывная связная 292
 — — смешанная 292, 297
 —, нормальный делитель 291
 — перестановок 288, 298—300
 —, подгруппы 289—290
 — —, см. Подгруппы
 —, — сопряженные 291
 — полная ортогональная 297
 —, порядок 288
 —, представления 293, 577—579
 —, — степень 293
 —, — характер 293
 — симметрии 520, 522
 — симметрическая 298
 —, среднее значение функции на ней 289

 Давление 434
 — внутреннее 537
 — гидродинамическое 441
 — критическое 551
 Движение броуновское 589
 — винтовое 190
 — планет 197, 494, 573—574
 Делитель интегрирующий 539, 540
 Дельта-функция, см. Функция δ
 Деформация 432
 —, закон Гука 434
 — изгиба 438
 — растяжения 432, 437
 — сдвига 433, 437
 —, тензор 432
 —, энергия 435
 Дивергенция 207, 251
 — поверхностная 219
 Диполь 219, 445
 — магнитный 450
 —, моменты 219, 445
 —, плотность 445
 Дисперсия света 531
 — статистическая нормальная 399
 — — субнормальная 399
 — — супернормальная 399
 Дифференциал полный 56
 Дифференцирование, введение новых переменных 47
 — векторов в n -мерных пространствах 256—257
 — интегралов 58—59
 — произведений и частных 54—55
 — функций n переменных 57—58
 — — неявных 56
 — — обратных 55
 — — от функций 55
 — — с параметрическим заданием 56
 — численное 76
 Диффузия 538, 546

- Диффузия, коэффициент 589, 590
 Длина волны комптоновская 522, 532
 — —, см. Волна
 Дополнения алгебраические 177, 178

 Единица длины 595
 — количества электричества 594
 — энергии 594

 Емкость электрическая 457
 Задача возмущений в квантовой механике 516
 — —, решение несимметрическое 361, —373
 — —, — симметрическое 367, 373
 — невозмущенная 361, 362
 — Штурма-Лиувилля 352
 Задачи вариационные, аппроксимация ломаными 391
 — — изопериметрические 390
 — —, метод Ритца 389
 — —, приведение к дифференциальным уравнениям 384—389
 — —, прямые методы решения 384, 389—391
 — —, сведение к задаче с бесконечным числом переменных 389—390
 — —, униформизация 387
 — —, условия трансверсальности 387
 — — краевые 357
 Закон Био — Савара 450, 458
 — Гаука 434
 — Дальтона 549
 — действующих масс 550
 — индукции Фарадея 451
 — Кулона 444, 458
 — Ома 450
 — ошибок Гаусса 398, 590
 — смещения Вина 535
 — сохранения заряда 444
 — — энергии-импульса 483, 486
 — Стефана — Больцмана 535, 552
 — тяготения Ньютона 491, 528
 Законы Кеплера 581—583
 Заряд магнитный 447
 — — свободный 448
 — —, размерность 452
 — — электрический, закон сохранения 444
 — — индуцированный 447
 — — — поверхностный 445
 — — — поляризационный 445
 — — — пространственный 444
 — — — точечный 444
 Значения собственные кратные 366—368
 — — непрерывные 368—370
 — — оператора 47
 Значения собственные определение 313
 — — — простые 362—365
 — — —, возмущения 363—364
 — — —, —, метод Шредингера 364, 500
 — — —, расщепление 522, 587
 Значения средние 563, 565
 — — в квантовой механике 496, 511, 513

 Излучение, взаимодействие с веществом 528—532
 — — — —, простые процессы 532—535
 — — в полости 552
 — — вынужденное 530, 534
 — — дипольное 463
 — — — магнитное 470
 — — — электрическое 470
 — — квадрупольное электрическое 470
 — — мультипольное 470
 — —, поле 528
 — — спонтанное 530, 534
 — — в поле излучения 534
 — — тормозное 531
 Импульс 414
 — вероятный 565
 — канонический 467, 600
 — обобщенный 419
 — полный 467, 500
 — средний 565
 Инвариантность градиентная 462
 Инварианты релятивистские 489
 Инверсия 190
 Индексы Миллера 224
 Индукция магнитная 448
 — —, размерность 452
 — — электрическая 446
 Интеграл ошибок 142, 389, 399
 — — состояний 559
 Интегралы криволинейные 102—103
 — —, интегральная теорема Коши 102—103
 — —, методы вычисления 107—110
 — —, — —, метод перевала 108
 — —, теорема о среднем 103
 — —, формула Коши 103
 — — неопределенные 53
 — —, таблица 59—61
 — — обменные 517
 — —, определение 31
 — — определенные 53
 — —, методы вычисления 64—65
 — —, некоторые формулы 67—70
 — —, оценки 66
 — —, приближение суммами 66

- Интегралы Френеля 59
 — Фурье 94, 568—569
 — эллиптические 70—74, 155—156
 — —, нормальная форма Вейерштрасса 155
 — —, — — Лежандра 155
 Интегрирование, методы 61—64
 —, определение 31
 —, специальные подстановки 63
 — численные 76
 Интенсивности линий 495
 Интерполяция 77—78
 Итерация 39

 Квант действия 493, 498
 Квантование пространственное 494
 Кватернионы 27—28, 192
 — в векторной символике 237—238
 —, связь с операторами 27, 42
 Кинематика теории относительности 479—480
 Класс смежный 290
 — сопряженных элементов 290
 Классы кристаллографические 301, 302—305
 Ковариантность 408
 Колебания вынужденные 322, 375—376
 — около положений равновесия 225, 425—427
 Количество теплоты 538—553
 — электричества 444
 Кольцо магнитное 584
 Конормаль 351
 Контур колебательный 461
 Координаты двумерные биполярные 269—270
 — — декартовы 264—265
 — — общие неортогональные 265—266
 — — ортогональные 266—267
 — — параболические 268
 — — полярные 267
 — — эллиптические 268—269
 — n -мерные полярные 285—287
 — обобщенные 419
 — трехмерные биполярные 280—281
 — — вращательно-симметричные 273—281
 — — декартовы 270—271
 — — конические 281—282
 — — — эллиптические 282
 — — общие цилиндрические 271—273
 — — — эллипсоидальные 282—285
 — — —, вырождение 284
 — — параболические 275—276
 — — сферические 274—275

 Координаты трехмерные: тороидальные 279—280
 — — эллипсоида вытянутого 276—277
 — — — сплющенного 277—278
 — циклические 418
 Корреляция 400—401
 —, коэффициент 400
 Коэффициент взаимной индукции 457
 — всестороннего сжатия 436
 — полезного действия 545
 — поперечного сжатия 435
 — самоиндукции 457—458
 — трения 439
 — увлечения 489
 — электростатической индукции 457
 Коэффициенты биномиальные 182—183, 591—592
 — рядов 593
 — термодинамические 541—542

 Линия вихревая 219
 — —, момент 220
 — геодезическая 490
 —, естественная ширина 530, 534
 — мировая 478, 479
 Луч 471

 Магнитостатика 447—448
 Масса инертная, пропорциональность тяготеющей массе 490
 Матрица альтернирующая 172
 — — антисимметрическая 172
 — — двумерная 30
 — — диагональная 49, 170—171
 — — единичная 35, 165, 170
 — — каноническая 170
 — — клеточная 167, 294
 — — клеточно-диагональная 171
 — — комплексно-сопряженная 171
 — — нулевая 169—170
 — — обратная 170
 — — одномерная 30
 — —, определитель 169, 173
 — — ортогональная 172
 — — представления группы 294, 295, 296
 — — симметрическая 171
 — — сопряженная 171
 — — транспонированная 171
 — — унитарная 172, 294
 — — усеченная 175
 — — фазовая 171
 — — эрмитова 171
 Матрицы бесконечные 175
 — — взаимно переставочные 163
 — —, дифференцирование 168
 — —, инварианты 173
 — — квадратные 166

- Матрицы квадратные вырожденные** 169
 — — невырожденные 169
 — —, произведение 167
 —, коммутатор 39, 168
 —, нормальная форма 174
 — обратимые 170, 172
 — ограниченные 175
 —, определение 166
 — подобные 172—173
 —, порядок 167
 —, произведение прямое 168—169
 —, равенство 167
 —, ранг 169
 —, резольвента 170, 176
 —, след 169, 173
 —, степени и полиномы 170
 —, сумма 167
 — транспонированные 166
 —, умножение на скаляр 167
 —, унитарное преобразование 174—175
Минор 177
Метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна 331—332
 — возмущений 370, 516, 517, 533
 — наименьших квадратов 402, 403
 — Рунга 389, 579—581
Механика волновая 495—535
 — заряженных материальных точек 467—471
 — квантовая 492—494
 — континуума 430—442
 —, основные понятия 411—413
 —, постановка задач 413
 — системы точек 423—430
 — твердого тела 427—430
 — точки 413—422
 — — в теории относительности 483
Множители Лагранжа 388, 580
Множитель амплитудный 331
 — интегрирующий 319
 — —, существование 337
 — фазовый 331
Модуль кручения 436
 — упругости 435
Момент вращающий 501
 — дипольный магнитный 501, 525
 — —, матричные элементы 463, 528
 — — электрический 501
 — инерции 429
 — — главный 429
 — количества движения 500
 — — — орбитальный 527
 — — — спиновый 527
 — магнитный спиновый 525
Мощность 414
 — источника поля 218
Намагниченность 448
Напряженность магнитного поля 447
 — — —, потенциал векторный 442, 450
 — — —, размерность 452
 — электрического поля 444
 — — —, граничные условия 446
 — — —, размерность 452
Неравенство Бесселя 92
 — Шварца 32, 40, 66, 514
Объем покая 483—484
 — удельный 537
 — фазовый 555
Ожидание математическое 396, 496
Оператор Гамильтона 501, 502, 509, 512, 515, 520, 528, 530
 — — со свойствами симметрии 520—522
 — дифференциальный 320, 361
 — — самосопряженный 32, 324
 — дифференцирования 44, 46, 51, 54
 — единичный 35, 44, 51
 — — и дельта-функция 35—38
 — идемпотентный 40
 — интегральный 35, 47
 — интегрирования 44, 54
 — инфинитезимальный 45
 — комплексно-сопряженный 38
 — Лапласа 286
 — «набла» 208
 — обратный 39
 — перестановки 39, 45
 — проекционный 44
 — самосопряженный 39
 — сдвига 44, 46
 — симметризующий 51—52, 520
 — симметрический 39
 —, собственные значения 47
 — сопряженный 38
 — транспонированный 38
 — умножения 44
 — унитарный 39, 45
 — фильтрующий 37
 — Фурье 45
 — эрмитов 371, 374
Операторы 34—52
 —, алгебра 39
 —, алгебраическое построение 40
 — антикоммутирующие 40
 — векторные 208
 —, коммутатор 39
 — матричные конечного порядка 35, 41
 — многопараметрические 50—51
 —, понятие 34—35
 —, представление матрицы 49
 —, связанные с данными 38—39

- Операторы специальные линейные 41—45
 — спина 41
 — спинорные 42
 —, уравнения 48
 Определитель бесконечный сходящийся 180
 — — Хилла 154
 — — Вандермонда 179
 — — Вронского 180, 321
 — Грама 162, 179
 —, дифференцирование 178
 —, окаймление 179
 —, оценка 178
 — n -го порядка 177
 —, практическое вычисление 65, 180
 — преобразования 184, 185
 — тензора 173, 245
 — — метрического 261
 —, теорема о разложении 177
 —, теоремы 178
 —, умножение 178
 — циклический 179
 Оптика анизотропных сред 472—475
 — волновая 471
 — геометрическая 471—472
 Орбита квантовая 493
 — — вырожденная 493, 494
 — планеты 581—583
 Осциллятор гармонический 493, 509, 515, 573
 Ось вращения мгновенная 427
 — оптическая 248, 474
 Отклонение 373
 — абсолютное 397
 — — квадратическое 398, 514
 — — среднее 397
 — — относительное 397
 — — квадратическое 398, 565
 — — среднее 398
 Отражение 189, 190
 — в прямой 189
 — скользящее 190
 Ошибка истинная 401
 — средняя абсолютная 401
 — — квадратическая 401
 Пакет волновой 227, 506
 — —, расплывание 515
 Парадокс Гиббса 550
 Параметр возмущения 361, 371, 373
 — удара 583
 Параметры интенсивные 536
 — приведенные 551
 — статистические истинные 393
 — — независимые 394
 — — постоянные 393
 Параметры статистические свободные 393
 — экстенсивные 536, 540
 Переменная угловая 197
 Переменные действия 493
 — интенсивные 537, 547
 — — первичные и вторичные 540—541, 553
 Перестановки с повторениями 182
 —, четность 181
 Переходы квантовые 492
 — —, вероятность 495, 514
 — — эррорные 514
 — —, правила отбора 495
 Перпетуум мобиле 545, 546
 Плотность диполей 445
 — зарядов истинных 445
 — — действительная 446
 — — поверхностных 445
 — — поляризационных 446
 — —, размерность 452
 — — свободных 445
 — излучения спектральная 533
 — массы 431, 483
 — потока энергии 456, 483, 564
 — силы 453—455, 564
 — спина 525
 — тока 448
 — — действительная 449
 — —, размерность 452
 — электромагнитного импульса 455, 483
 — энергии 483, 564
 Поверхность волновая 471
 — лучевая 475
 — нормалей 474
 Поворот 188, 189, 297
 — зеркальный 190, 297, 301
 Поглощение фотонов 531, 534
 Подгруппа единичная 289
 — инвариантная 291
 — несобственная 289
 —, произведение прямое 290
 —, разложение по ней 290
 —, см. Группа
 — собственная 289
 — сопряженная 291
 — циклическая 290
 Подсистемы гомогенные 536
 — квантовые 515—517
 Показатель преломления 422
 — — комплексный 465
 Поле векторное 201, 248
 — — безвихревое 217
 — — соленоидальное 217
 — — волновое 225—230
 — — векторное 229—230

- Поле волновое, представление Фурье 230—236
 — — скалярное 225—229
 — — силовое 415
 — — скалярное 415
 — скалярное 201
 — тензорное 201, 248, 249—251
 — —, деформация 251
 — электрическое, напряженность 444
 — —, потенциал 444
 — —, разность потенциалов 450
 Полиномы Лагерра 90—91, 354, 355
 — — обобщенные 90—91
 — Лежандра 90—91
 — Чебышева 90—91, 142, 354
 — Эрмита 90—91, 144, 355
 — Якоби 90—91, 354
 Полудня 429
 Поляризация электростатическая 445
 — эллиптическая 229, 465
 Последовательность, ортогональность 32
 — сумм чисел 31
 —, частичные средние значения 31
 — числовая 20
 — — дискретная 35, 572
 — — плотная 22, 35, 572
 Постоянная Авогадро 595
 — Больцмана 556, 558, 559, 595
 — газовая 544
 — гравитационная 491, 582, 595
 — космологическая 491
 — Планка 498, 560, 595
 — Ридберга 595
 — Стефана 535, 595
 — химическая 544
 — Эйлера 69, 87, 153
 Постоянные разделения 507
 — — см. Уравнения дифференциальные
 — универсальные 595
 — фазовые 425
 Потенциал векторный 217
 — конвекционный 463
 — логарифмический 359
 — ньютонов 359
 — силы 415
 — скалярный 217
 — скоростей 441
 — термодинамический 540, 548
 — электрического поля 444
 Потенциалы запаздывающие 528
 Правила отбора 495
 Правило фаз Гиббса 549
 Представления группы 293
 — — вращений 297—298
 — — — чистых 297
 Представления группы неприводимые 294, 522, 587
 — — перестановок 298—300
 — — — неприводимые 299
 — — полной ортогональной 298
 — —, приводимость 294
 — —, размерность 293
 — —, теоремы 295—297
 — — точные 293
 — — унитарные 294, 295
 — —, характеры 293, 294, 522, 587
 — —, эквивалентность 293
 Преобразование векторных дифференциальных операторов 207—209
 — векторов и тензоров в многомерных пространствах 255—256
 — каноническое 195—198, 469, 493, 510
 — — бесконечно малое 196—197
 — —, обобщение 198
 — — общее 199
 — —, специальные случаи 200
 — квадратных и эрмитовых форм 192—193
 — к главным осям 165, 236—237
 — — движущейся системе координат 241—242
 — контактное 193—194, 573
 — координат 26, 185
 — Лежандра 194, 316, 540
 — — общее 199
 — Лоренца 238, 477—479
 — — векторов и тензоров 478—479
 — — —, инварианты 479
 — — специальное 478—479
 — —, инварианты 477, 479, 482
 — масштабное 408
 — ортогональное в 4-мерном пространстве 238
 — θ Эвальда 233
 Преобразование унитарное 46, 508, 509
 — Фурье 192, 570—572
 Преобразования, инварианты 185
 —, —, система полная 185—186
 — как отображения многообразий 185
 — координат, инварианты 186
 — линейные 46
 — —, нормальная форма 187
 — — однородные 187
 — — — бесконечно малые 189
 — — — в 4-х измерениях 192
 — — — действительные 188—189
 — обратимые 184
 — —, группа 184
 — обратные 184
 — ортогональные 46, 188, 193

- Преобразования проективные 187
 — унитарные 187
 — унитарные 188, 192, 193
 Прецессия регулярная 430
 Принцип вариационный в задаче возмущений 374
 — виртуальных перемещений динамики 421
 — — — статика 421
 — Галилея 412
 — Гамильтона 421—422, 485
 — Гюйгенса 229
 — наименьшего действия 422
 — принуждения 421
 — Гаули 495, 504, 517, 566, 584
 — построения периодической системы 584
 — равенства действия и противодействия 423
 — Ритца комбинационный 494
 — соответствия 495, 527—528
 — Ферма 422, 471
 — Якоби 422
 Произведение скалярное 32
 —, неравенство Шварца 32
 — — см. также Векторы
 Производная локальная 431
 —, определение 31, 53
 — субстанциальная 431
 — функциональная 386
 Производные и разностные отношения 76
 —, таблица 59—61
 Проницаемость диэлектрическая 446
 — магнитная 448, 584
 Пространство аффинное 186
 — гильбертово 187
 — конфигурационное 392, 424, 496
 — неевклидово 259, 478
 — унитарное 186
 — фазовое 425, 559
 — четырехмерное 477—478
 —, линейный элемент 478
 —, мировая линия 478
 —, — точка 477
 — числовое 25
 —, метрика 26
 Процессы термодинамические адиабатические 544
 — —, адиабатически обратимые 555
 — — в гомогенных системах 545
 — — в замкнутых системах 545
 — — вынужденные 537
 — — изобарические 544
 — — изотермические 544
 — — изохорические 544
 Процессы термодинамические квазистатические 538, 539
 — — необратимые 545
 — — обратимые 545
 — — спонтанные 537
 — — циклические 544
 Псевдоскаляры 264
 Работа 414
 Равновесие неустойчивое 426
 — статистическое 559
 — тепловое 537
 — термодинамическое 548, 557
 — — излучения и вещества 534—535
 — устойчивое 426
 Радиус-вектор 202, 207—212
 — —, дифференциальные операции 210—211
 Разложение в степенные ряды 103
 569—570; см. также Ряды
 — оператора билинейное 47
 Размещения 182
 — с повторениями 182
 Разности конечные 74—78
 Распределение Бозе 567
 — Больцмана 534, 587, 588
 — каноническое 557
 — Максвелла 565
 — микроканоническое 559
 — статистическое дискретное 392
 — — непрерывное 392
 — Ферми 561, 586
 Рассеяние когерентное 531
 — некогерентное 531
 Решетка точечная Браве 222, 300, 306—307
 — — —, ячейка 223
 — — взаимная 223—225, 468
 Ротор 207, 251
 — поверхностный 220
 Ряд бесконечный 82
 — билинейный интегрального ядра 379
 — геометрический 81
 — гипергеометрический 354
 — Лорана 105—106
 — Неймана 48, 380
 —, определение 79
 —, остаток 79
 — расходящийся 79
 — степенной в векторной форме 211—212
 —, сумма 79
 — сходящийся 79
 — —, признаки сходимости 80
 — — условно 79
 — функциональный 79

- Ряд функциональный равномерно сходящийся 79—80
 — Фурье 94, 147, 468
 Свертывание тензора 258
 Связи 415
 — голономные 415
 — неголономные 415
 Сила инерции 416
 — консервативная 415, 424
 — лоренцова 456, 484
 — намагничивающая 584
 —, определение 412
 — полная 412, 500
 — реакции 415
 — тока 448
 — —, размерность 452
 — фиктивная 416
 — центральная 414—415
 — центробежная 414, 416
 — электродвижущая 450
 — —, размерность 452
 Силы внешние 423, 433
 — внутренние 423, 433
 — массовые 433
 — объемные 433
 — поверхностные 433
 — пондеромоторные 453
 — электрические 444
 Символ Кронекера 35
 Символы Кристоффеля 256—257, 262
 Система единиц 408
 — — гауссова 457—458
 — — Джорджи (МКСА) 459—460
 — отсчета вращающаяся 416
 — — инерциальная 412
 — — пространственно-временная 466—467
 — — —, преобразование Лоренца 477
 — — ускоренная 416
 — понятий математики 19
 — точек замкнутая 423, 514
 — —, колебания вынужденные 426
 — —, — —, резонанс 427
 — —, — —, затухающие 426
 — —, — около положения равновесия 425—427
 — —, полная масса 423
 — —, — сила 423
 — —, сведение к точке 424—425
 — —, симметрия 520
 — —, центр тяжести 423
 — элементов периодическая 586
 — эргодическая 555, 560
 Системы векторов 251—253
 — — основных 253
 Системы единиц электрических 458 — 460
 — — координат 253—254
 — — движущиеся 259—260
 — — двумерные 264—270
 — —, линейный элемент 26, 253
 — — n -мерные 285—287
 — — ортогональные 260—263
 — — трехмерные 270—285
 — — кристаллографические 307—308
 Скаляр, определение 186, 201
 — свободный 201
 Скобка Лагранжа 200
 Скорость 414
 — групповая 465
 — света 450, 452
 — течения 431
 — фазовая 465
 — четырехмерная 480, 482
 — —, теорема сложения 480
 След тензора 245, 249, 293
 Слой двойной 219, 357
 — —, момент 219
 — — электрический 450
 — простой 358
 События 392, 395
 —, относительные частоты 393
 — равноценные 392
 — —, коллектив 392
 —, распределение 392
 — сравнимые 392
 Сокращение лоренцово 480
 Соотношение неопределеннос ей Гейзенберга 514—515, 534, 555, 561
 — Планка 493, 505
 Соотношения перестановочные 502, 503, 507, 509, 511, 520
 Сопротивление омическое 450
 — —, размерность 452
 Состояния возбужденные атома 585
 —, диаграммы 544
 — квантовые 492, 504, 505, 513, 515
 — равновесия 536, 556—557
 — — в замкнутых системах 546—547
 — — — незамкнутых системах 547—548
 Сочетания 182
 — с повторениями 182
 Спектр дискретный 352
 — непрерывный 352
 Спин 495, 517
 — механический 527
 —, плотность 525
 Среда изотропная 435
 — —, уравнения движения 438
 — несжимаемая 432
 Статистика Бозе 520, 566—567

- Статистика Больцмана 566
 — Ферми 520, 566—567, 587
 Стенки адиабатические 537
 — адиатермические 537, 547
 — диатермические 537, 548
 — жесткие 537
 — непроницаемые 537
 — экранирующие 537
 Столкновения частиц 561—562
 — —, инварианты 563
 Сумма состояний 557
- Тело твердое** 427
 — —, импульс полный 427
 — —, масса полная 427
 — —, момент вращающий относительный 428
 — —, — — полный 428
 — —, — — количества движения относительный 427
 — —, — — — — полный 427
 — —, сила полная 428
 — —, центр тяжести 427
 — —, — —, скорость движения 427
 Температура абсолютная 556, 558
 — и энтропия 539—540
 — критическая 551
 — термодинамическая 540
 — эмпирическая 538
- Тензор антисимметрический** 244
 —, геометрическая интерпретация 247
 — деформации 432
 — единичный 245, 249, 255
 — инерции 428
 —, итерация 244, 246
 — канонический 486
 —, компоненты ковариантные 255
 —, — контравариантные 255
 —, — смешанные 255
 — кривизны Римана 258, 480
 — метрический фундаментальный 255, 258, 261, 490
 — натяжений максвеллов 434, 454, 483
 —, операторное произведение 244
 —, определение 30, 201
 —, определитель 245
 — ортогональный 245, 248
 —, понятие 243—244
 — свободный 201
 — симметрический 243, 247
 — сингулярный 244
 —, скалярное произведение 246
 —, скалярный квадрат 246, 250
 —, след 245, 249, 293
 —, собственные векторы 246, 247—248
 —, — значения 246, 247
- Тензор сопряженный** 244, 255
 — характеристический полином 245
 — четырехмерный 478
 — энергии-импульса 483
Теорема Больцмана 564
 — Лиувилля 554—555, 560
 — Малю 472
 — площадей 414, 581
 — — обобщенная 423
 — Стокса гидродинамики 451
Теория вероятностей 392—404
 — возмущений 362—375
 — —, задачи о собственных значениях 362—370
 — —, метод вариации постоянных 370—371
 — —, — вариаций 373—375
 — —, — обобщенный 371—373
 — выравнивания 401—404
 — излучения Бора 527—528
 — — квантовая 528—535
 — относительности общая 489—495
 — — специальная 456, 476—489
 — ошибок 401—402
 — поля 485—487
 — упругости 434—438
 — фаз 548—549
Теории физические, подразделение 409—410
- Теплоемкость** 541
Теплопроводность 546
Термодинамика, второе начало 546
 —, первое начало 538
 — релятивистская 552—553
 —, третье начало 549
Термы спектральные 494, 521, 586
Тета-преобразование; см. Преобразование Эвальда
Тетартэдриа 302, 304
Ток замкнутый 450
 —, конвекционный 449
 —, плотность 448
 —, —, размерность 452
 — полный 449, 451
 — проводимости 449, 456
 —, сила 448
 — смещения 449
 — стационарный 449
Точка Бойля 551
 — ветвления 102, 106
 — инверсии 551
 — критическая 551
 — мировая 577
 — седловая 108, 112
 — фазовая 492, 493, 558
Точки определенности 328, 329
Трансляции 190, 300

- Углы Эйлера 191, 298
 Уравнение Ван-дер-Ваальса 551
 — вековое 164, 335, 336, 368, 372, 473, 474
 — — для матриц 173
 — — волновое 226
 — — двумерное 343, 346
 — — трехмерное 343, 346
 — Гамильтона — Кэли 246
 — Гамильтона — Якоби 419—420, 493
 — движения твердого тела 428
 — — точки 413, 423
 — — в произвольных координатах 417—420
 — — Эйлера 441
 — Дирака 523—526
 — —, применения 526—527
 — дифференциальное Бесселя 328
 — — Гаусса 120—131
 — — гипергеометрическое 328
 — — колебаний 328
 — — Лагерра 328
 — — Лежандра
 — — Риккати общее 313—315, 330
 — — — специальное 316—317
 — — Римана 131—132
 — — Чебышева 328
 — — Эйлера 310
 — кинетическое 563
 — Клаузюса — Клапейрона 547
 — Клейна — Гордона 344, 522, 527
 — Лагранжа 388
 — Лапласа 341, 358, 444, 447
 — Навье — Стокса 440
 — непрерывности 431, 440, 449, 496, 524, 564
 — орбиты 583
 — Пуассона 445
 — Пфаффа 335—337, 539
 — состояния 440
 — — приведенное 551
 — теплопроводности 342, 346
 — — трехмерное 342, 364
 — Френеля 474
 — Шредингера 497—501
 — — в случае внешнего поля 500
 — — — потенциальных сил 498
 — — для атома водорода 343—344
 — —, решение антисимметрическое 516, 519
 — —, — общее 504, 506
 — —, — симметрическое 516, 519
 — —, — стационарное 505
 — —, решения, классификация 507
 — —, —, физическая интерпретация 511—514
 — эйконала 471
 Уравнение Эйлера 388—391 428, 485,
 — — для принципа Ферма 472
 — — Эйнштейна для излучения 534
 — — — фотоэффекта 531
 Уравнения алгебраические векторные 204
 — — — линейные 161—166
 — — —, дефект 162
 — — —, линейная зависимость 162
 — — — неоднородные 163—164
 — — — —, отыскание одного решения 164
 — — — —, практическое решение 163
 — — — —, нормальная форма 164—165
 — — — —, общая форма 161
 — — — —, общее решение 162
 — — — —, однородные 162—163
 — — — —, ранг 162
 — — — — с бесконечным числом неизвестных 165—166
 — — — —, транспонированная система 163
 — движения газа 564
 — дифференциальные в полных дифференциалах 336
 — —, задачи краевые 356—359
 — —, — линейные 313, 349—361
 — —, — — неоднородные 313, 349
 — —, — — однородные 313, 349
 — —, — — — второго порядка 351—356
 — —, — —, формула Грина 350—351
 — —, — — начальные 359—361
 — —, — —, интеграл, определение 310
 — —, — — промежуточный 310
 — — канонические 386—387
 — — — Ламэ 283—284
 — — — обыкновенные линейные второго порядка 313—317, 324—332
 — — — — —, метод преобразования 325—327
 — — — — —, решение разложением в ряды 327—329
 — — — — —, — с помощью определенных интегралов 332—333
 — — — — —, — — — — — понижения порядка 330—332
 — — — — —, общие сведения 320—322
 — — — — —, определение 309
 — — — — — первого порядка 313—317
 — — — — —, решение, геометрическая интерпретация 311
 — — — — —, — общее 311
 — — — — —, — особое 311
 — — — — —, — частное 311
 — — — — — с постоянными коэффициентами 323—324

- Формула Планка 534
 — Пуассона статистики 397, 398, 589
 — суммирования 95
 — Рэля — Джинса 535
 — Симпсона 66
 — Стирлинга 109, 154, 183
 — Тейлора 84
 — Томсона 461
 — трапеций 66
 — Шмидта 380
 — Эвальда 233, 234
 — Эйлера 76, 81
 Формфакторы 470
 Фотоны 528
 —, поглощение 531
 Фотоэффект 531
 Функции алгебраические 115—119
 — аналитические, аналитическое продолжение 105
 — — комплексные 99 — 101
 — — многозначные, ветви 101
 — —, риманова поверхность 102, 111
 — — однозначные, разложения в окрестности особой точки 106
 — — —, — в ряд Лорана 105—106
 — гармонические 101
 — гиперболические 120—121
 — — обратные 122—126
 — гипергеометрические 91, 129
 — — конфлюэнтные 139—151, 343
 — — Бесселя 96, 146—151
 — — Гаукеля 147
 — — Лагерра 142—143
 — — — — обобщенные 143—144, 343
 — — —, общие сведения 139—142
 — — — Эрмита 144—145
 — гипергеометрического типа 129—139
 — — общие 129—132
 — — сферические зональные 135—136
 — — — Лежандра 91, 95, 132—135, 341, 354
 — — — общие 137—138
 — — — присоединенные 136—137, 341, 354
 — — — Чебышева 97, 138
 —, классификация 114—115
 — комплексные 99—100
 — — аналитические 99, 100—102
 — —, наглядное изображение 111—114
 — —, отображение конформное 110
 — Матье 154—155
 —, определения 98—99, 114
 —, ортогональные полиномы 90—91
 — — системы, зависимость линейная 89
 — — —, определение 88—89
 Функции, ортогональные системы, специальные 90—91
 — — показательные 119—120
 — —, полная система 33
 — — поля линейные 242—243
 — —, применения 126—129
 — —, разложения 33—34
 — —, —, аналогия с векторами 33
 — —, — в ряды 82—89
 — — — —, общие сведения 83—84
 — — — —, — — — — степенные 84—88
 — — — — по бесселевым функциям 96
 — — — — полиномам Лагерра 97
 — — — — Чебышева 97
 — — — — Эрмита 97
 — — — — Якоби 97
 — — — — сферическим функциям 97
 — — — — Фурье 94—95
 — суммирующие 76
 — тригонометрические 121—122
 — — обратные 122—126
 — цилиндрические 341
 — Хилла 154—155
 — шаровые Лапласа 136
 — элементарные трансцендентные 119—129
 — — —, разложение в ряды 86—88
 — — — эллиптические 157—160
 Функция В 68—69
 — Вейерштрасса \wp 158—160
 — весовая 89, 221, 292, 297, 327, 345, 496
 — возмущающая 198
 — Γ 63
 — — и факториал 151—154
 — Гамильтона 195, 196, 198, 199, 386, 418, 467, 468, 493, 528, 559, 573, 587
 — Грина 48, 322, 323, 357, 360, 369, 575
 — δ 35—38, 70, 231
 — —, обобщение 213
 — действия 197, 419
 — Дирихле 70
 — —, связь с функцией δ 70
 — ζ Римана 82, 88
 — Лагерра обобщенная 343
 — Лагранжа 197, 199, 418, 467, 485
 — — обобщенная 420
 — — на группе 289
 — — —, среднее значение 289
 — — —, — — — на непрерывной группе 292
 — Неймана 146
 — неясная 24
 —, определение 24
 — — перехода 222
 — — предел 24
 — — производящая 91, 104

- Функция производящая контактного преобразования 195
 — распределения 221
 — сглаживающая 431, 444
 — силовая 415
 — спектральная 34
 — Ψ 153
 — целочисленного параметра 30
 — явная 24
- Центр тяжести 412
 — — распределения 497
 — — системы 423
 — — твердого тела 427
- Цикл 298
 — Карно 544
- Частоты собственные системы 497
- Числа 20—25
 —, алгебраические операции 23
 —, арифметические операции 21, 22
 — Бернулли 81, 82, 88
 — гиперкомплексные 28, 238
 — иррациональные 22—23
 — кардинальные 21
 — квантовые 493, 507, 584
 — клиффордовы 28, 522, 526
 — комплексные 26—27
 — —, действительная часть 27
 — —, мнимая часть 27
 — —, модуль 27
 — — сопряженные 27
 — многомерные 25—29
 — натуральные 20—21
 — порядковые 21
 — рациональные 22
 —, системы счисления 22
- Число волновое комплексное 465
 — дуальное 239
 — фотонов 528
- Эйконал 471
 —, уравнение 471
- Экстремаль 384, 389, 471
- Электродинамика 451—452
 — квазистационарных токов 460—461
 — квантовая 494—496
 — однородной среды 461—464
 — — с периодическими полями 464—466
 —, силы 455
 — теории относительности 480—483
 —, уравнения материальные 451
- Электродинамика, уравнения материальные модифицированные 458
 —, — основные 452, 461
 —, — —, условие Лоренца 461, 470
- Электростатика 444—447
 —, основные уравнения 446
 —, силы 453—454
- Элемент группы единичный 288, 292
 — — обратный 288
 — —, порядок 290
 — — сопряженный с данным 290
 — — линейный системы координат 253
 — — четырехмерного пространства 478, 479
 — симметрии 301
- Эллипсоид инерции 428, 429
 — тензорный 247
 — Френеля 474
 — Хевисайда 463
- Энергия 538—539
 — внешняя 539
 — внутренняя 538, 556
 — ионизации 531
 — кинетическая 414
 — покоя 484
 — полная 415
 — —, закон сохранения 415
 — потенциальная 414
 — — деформации 435
 — средняя 565
 — удельная 538, 540
 — — свободная 540, 548, 556, 559
 — электромагнитная 456—458
- Энтальпия 545
 — удельная 540
- Энтропия, H -теорема 564
 —, плотность 564
 — полная 540, 546, 556, 557—558, 564
- Эффект Доплера 488
 — Комптона 531
- Эффекты Эйнштейна 491
- Явления гравитационные 490
- Ядро интегрального уравнения вырожденное 379, 381
 — — —, дефект 377, 379
 — — — единичное 35
 — — — итерированное 380—381
 — — — несимметрическое 358, 382, 383
 — — —, определение 376
 — — — определенное 379
 — — — разрешающее 377
 — — — симметрическое 382