

Герман Вейль

Математическое мышление

Перевод с английского и немецкого
Составитель *Ю.А. ДАНИЛОВ*

Под редакцией
Б.В. БИРЮКОВА и А.Н. ПАРШИНА



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1г
В26
УДК 51 (091)

Вейль Г. **Математическое мышление**: Пер. с англ. и нем. / Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 400 с. — ISBN 5-02-013910-6.

В сборник включены произведения выдающегося математика современности Германа Вейля (1885–1955), посвященные теоретико-познавательным проблемам математики, ее взаимодействиям с науками о природе, роли в исследовании внешнего мира и творчеству замечательных ученых Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Нётер, А. Пуанкаре, Э. Картана и В. Паули.

Для математиков, физиков, историков науки и философов.

Рецензент
доктор философских наук *Ю.Б. Молчанов*

Научное издание

Вейль Герман

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ

Заведующий редакцией *С.И. Зеленский*

Редактор *В.В. Донченко*

Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*

Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*

Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32762

Сдано в набор 17.07.89. Подписано к печати 25.10.89
Формат 60 X 88/16. Бумага книжно-журнальная офсетная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 24,623. Усл.кр.-отт. 24,56. Уч.-изд.л. 29,89
Тираж 28000 экз. Тип. зак. 266 Цена 2 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография №4

ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградского объединения „Техническая книга“

им. Евгении Соколовой

Государственного комитета СССР по печати
191126 Ленинград, Социалистическая ул., 14

1602010000-143
В _____ 9-89
053 (02)-89

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы;
Перевод на русский язык.
Предисловие.
Послесловие.
Комментарии, 1989

ISBN 5-02-013910-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Двадцать лет назад издательство "Наука" выпустило перевод последней книги одного из самых выдающихся математиков XX века Германа Вейля — его "Симметрии". Вейль был не только математиком, но и крупным философом, он охотно обживал ничейную землю между столь удалившимися теперь друг от друга частями человеческого познания. На русском языке имеется много книг Вейля (см. библиографию в кн.: Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984, вышедшей в серии "Классики науки"), но они в основном посвящены математике. Его философские сочинения выходили у нас с трудом. Помимо упомянутой выше "Симметрии", которая впрочем и не является чисто философским сочинением, к ним относится еще небольшая книга "О философии математики", вышедшая в 1934 г. и содержащая отрывки из основного философского сочинения Вейля "Философия математики и естествознания". Этому труду Вейля все еще предстоит прийти к отечественному читателю.

А пока перед ним сборник статей Вейля по философским вопросам науки, никогда ранее не публиковавшихся вместе. Инициатива этого издания принадлежит Ю.А. Данилову и была поддержана О.А. Ладыженской и Ю.Б. Молчановым. Составительская работа выполнена Ю.А. Даниловым. Книга состоит из трех частей. В первую входят работы Вейля, посвященные общим вопросам научного познания. К ним естественно примыкают сочинения по основаниям математики и логике, и прежде всего книга "Континуум", в которой Вейль подробно развил свои взгляды на проблему обоснования анализа. Чисто философские вопросы затрагиваются в статье "Познание и осмысление", которая наверняка станет крепким орешком для многих читателей, а работа "О символизме в математике и математической физике" содержит большое количество тонких лингвистических наблюдений. Вторая часть книги отдана физике, в основном теории относительности, в которую Вейль внес существенный вклад. И наконец последняя часть, историко-научная по теме, дает нам портреты выдающихся современников Вейля, его учителей и коллег, а заодно представляет весьма живую картину развития науки в Германии в конце прошлого и начале нашего веков.

Большинство статей сборника никогда не появлялись на русском языке. Почти все они переведены Ю.А. Даниловым. Работа "О символизме в мате-

матике и математической физике” переведена А.В. Ахутиным, а очерк “Университеты и наука в Германии” А.П. Василевичем. Книга содержит также краткий очерк жизни и творчества Вейля (А.Н. Паршин), статью о его философских взглядах (Б.В. Бирюков), и комментарии ко всем работам.

Следует отметить, что перевод, редактирование и комментирование текстов Вейля доставило подчас значительные трудности, обусловленные как широтой рассматриваемых в них вопросов, так и вейлевским языком — богатым, сложным, иногда поэтическим; это особенно заметно, когда Вейль говорит о методологических и мировоззренческих проблемах логики и философской науки. При передаче по-русски мыслей Вейля переводчики и редакторы стремились сохранить максимальную близость к оригиналу. Это, в частности, касается “Континуума”. При переводе этой работы — так же как и ряда других, особенно помещенных в первой части книги, — пришлось в ряде случаев пойти на сознательное отклонение от принятой ныне математической и логической терминологии, чтобы по возможности сохранить своеобразие рассуждений автора. Стараясь донести до читателя тонкости переводимых текстов, мы во многих случаях приводим (в угловых скобках) термины на языке работ Вейля.

Комментарии к книге составлены Г.Е. Гореликом, Г.Е. Минцем, А.П. Огурцовым и А.Н. Паршиным. При этом не ставилась задача реализации единства их стиля и какой-либо полноты. Однако в проведенном комментировании была сделана попытка введения идей Вейля в современный научный и философский контекст, а также реконструкции хода его мысли.

Редакторы книги отказались от унификации ссылок на литературу. Библиографический аппарат в каждой из помещенных в книгу работ Вейля дан в том виде, в каком он фигурирует в соответствующих оригинальных текстах.

В заключение выражаем глубокую признательность профессорам Р.Реммерту (Мюнстер) и С.Паттерсону (Гёттинген) за любезную помощь при подготовке данного издания.

*Б.В. Бирюков
А.Н. Паршин*

Ч А С Т Ь I

ПОЗНАНИЕ
И ОСМЫСЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ*)

Под математическим способом мышления я понимаю, во-первых, особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире — в физику, химию, биологию, экономику и т.д. и даже в наши размышления о повседневных делах и заботах, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе. В процессе мышления мы пытаемся постичь разумом истину; наш разум стремится просветить себя, исходя из своего опыта. Поэтому, подобно самой истине и опыту, мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое. Мы, математики, не ку-клукс-клан с неким тайным ритуалом мышления. Правда, существуют — скорее внешне — некоторые специфические особенности и различия; так, например, процедуры установления фактов в зале суда и в физической лаборатории заметно различаются. Тем не менее, вряд ли можно ожидать от меня, что математический способ мышления я опишу более ясно, чем, скажем, можно описать демократический образ жизни.

Движение за реформу преподавания математики, совершившее несколько десятилетий назад подлинный переворот в Германии¹, где во главе него стоял великий математик Феликс Клейн, выдвинуло в качестве своего лозунга "функциональное мышление". Как провозгласили реформаторы, самое важное из того, чему должен научиться средний образованный человек, пройдя обучение математике, — это умение мыслить в терминах *переменных* и *функций*. Функция описывает зависимость одной переменной y от другой переменной x или, говоря более общо, отображает одно множество — область значений переменного элемента x — на другое (или то же самое) множество. Понятие функции, или отображения, — несомненно

*) Выступление на конференции, посвященной двухсотлетию Пенсильванского университета (17 сентября 1940 г.).

одно из самых фундаментальных понятий, и оно встречается в математике на каждом шагу как в теории, так и в приложениях.

Федеральный закон США о подоходном налоге устанавливает налог u в зависимости от дохода x ; делает он это довольно неуклюже, "склеивая" одну за другой несколько линейных функций, каждая из которых действует в пределах своего интервала изменений дохода — группы налогоплательщиков по доходу. Археолог, который через пять тысяч лет обнаружит в раскопе наши декларации о доходах вместе с руинами инженерных сооружений и математическими книгами, вероятно, датировет их двумя столетиями раньше, наверняка отнеся ко временам до Галилея и Виета. Виет способствовал введению адекватной алгебраической символики, Галилей открыл квадратичный закон свободного падения тел, гласящий, что расстояние s , проходимое в пустоте свободно падающим телом, пропорционально квадрату времени t , истекшего с начала падения:

$$s = \frac{1}{2} g t^2, \quad (1)$$

где g — константа, имеющая одно и то же значение для любого тела в данном месте. Установив формулу (1), Галилей превратил закон природы, присущий реальному движению тел, в некоторую математическую функцию, построенную *a priori*, и это то, что физика стремится проделать с каждым явлением. Закон свободного падения тел "спроектирован" гораздо лучше, чем наши законы о налогах. Его "проект" создан самой Природой, которая составляет свои планы, тонко ощущая математическую простоту и гармонию. К тому же Природа, в отличие от законов о налогах на доходы и сверхприбыли, не ограничена требованием быть понятной юристам и членам торговой палаты.

С самого начала мы сталкиваемся со следующими характерными чертами любой математической процедуры: 1) наличием переменных, подобных t и s в формуле (1), допустимые значения которых принадлежат некоторой области (в случае свободного падения — области действительных чисел), вполне обозримой, поскольку своим происхождением она обязана нашему же построению; 2) представлением этих переменных с помощью знаков; 3) наличием функций или *a priori* построенных отображений области значений одной переменной t на область значений другой переменной s . Время есть независимая переменная "*kat exochen*"².

При изучении функции необходимо следить за тем, чтобы независимая переменная пробегала всю область своих допустимых значений. Прежде чем подвергать проверке правильность любого предложения относительно зависимости между теми или иными величинами в природе, мы можем мысленно, еще до его сравнения с экспериментальными данными, проверить, покрывает ли оно всю область допустимых значений независимых переменных. Иногда неприемлемость предполагаемой зависимости сразу проявляется в некоторых простых *предельных случаях*. Лейбниц, сформулировав свой *принцип непрерывности*, учил нас рассматривать покой не как противоположность движения, а как его предельный случай. Исходя из

непрерывности, Лейбниц сумел *a priori* опровергнуть предложенные Декартом законы соударения тел³. Мах дает следующую рекомендацию: "Составив определенное заключение на основании одного конкретного случая, надлежит постепенно и как можно шире модифицировать сопутствующие ему обстоятельства, стремясь, насколько это возможно, остаться при первоначальном заключении. Не существует иного способа, который с большей надежностью и меньшими умственными усилиями приводил бы к простейшему объяснению всех явлений природы"⁴. Большинство переменных, с которыми нам приходится иметь дело при анализе явлений природы, — непрерывные переменные, такие, как время, но хотя непрерывность интуитивно и подразумевается в слове "переменная", математическое понятие переменной отнюдь не ограничено непрерывным случаем. Наиболее важный пример дискретной переменной дает нам последовательность натуральных, или целых положительных, чисел 1, 2, 3, ... Так, число делителей любого целого числа n есть функция аргумента n .

В логике Аристотеля переход от единичного к общему совершается путем выявления у данного объекта определенных абстрактных свойств и отбрасывания остальных, так что два объекта подпадают под одно и то же понятие или принадлежат к одному и тому же роду, если оба они обладают выделенными свойствами (features). Такого рода описательная классификация, например, описание растений в ботанике и животных в зоологии, ориентирована на реально существующие объекты. Можно сказать, что Аристотель мыслит в терминах субстанции и акциденции, в то время как идея функции господствует при формировании математических понятий (concepts). Возьмем, например, понятие (notion) эллипса. Любой эллипс на плоскости xy есть множество E точек (x, y) , заданное квадратным уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

коэффициенты a , b и c которого удовлетворяют условиям

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac^2 - b^2 > 0.$$

Множество E зависит от коэффициентов a , b , c ; мы получаем некоторую функцию $E(a, b, c)$, порождающую конкретный эллипс, если переменным коэффициентам a , b , c придадим определенные значения. Переход от конкретного эллипса к соответствующему общему понятию не требует отбрасывания каких-либо специфических различий, он совершается благодаря тому, что некоторые характеристики (в нашем примере они представлены коэффициентами) превращаются в переменные, область значений которых *a priori* обозрима (у нас она задана приведенными выше неравенствами). Таким образом общее понятие распространяется скорее на все возможные, чем на все *актуально существующие* характеристики*⁵.

* Ср. в этой связи статью: Cassirer Ernst. Substanzbegriff und Funktionsbegriff. — 1910 и мою критическую заметку: Weil H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. — 1923. — S. 111.

После этих предварительных замечаний относительно функционального мышления я перехожу теперь к более систематической аргументации. Математика снискала дурную славу из-за разреженного воздуха абстракций, в котором она живет. Скверная репутация заслужена математикой лишь наполовину. В самом деле, первая трудность, с которой сталкивается человек с улицы, когда его пытаются научить мыслить математически, состоит в том, что ему необходимо усвоить более прямой взгляд на вещи; его вера в слова должна быть поколеблена; ему необходимо научиться мыслить более конкретно и направленно. "Высота" — слово, имеющее вполне ясное значение, когда я спрашиваю, как высок потолок в этой комнате, — каково расстояние от пола до потолка. Значение этого слова становится все менее определенным, если мы станем применять его к относительной высоте горных вершин, расположенных на все более обширной территории. Его значение станет совсем зыбким и растворится в воздухе, если мы распространим его на весь земной шар, не подкрепив динамическим понятием потенциала. Потенциал более конкретен, чем высота, поскольку порожден распределением масс в земном шаре и зависит от этого распределения.

Слова — орудия опасные. Созданные для нашей повседневной жизни, они обладают привычным значением лишь при известных ограниченных обстоятельствах, но Пит и человек с улицы склонны распространять их на более широкие сферы, нисколько не заботясь о том, сохраняют ли те при этом твердую опору в реальности или нет. Мы все не раз были свидетелями того, к каким тяжким последствиям приводит магия слов в сфере политики, где все слова имеют гораздо более расплывчатое значение и человеческие страсти нередко заглушают голос разума. Ученый обязан пробиваться сквозь туман абстрактных слов и достигать незыблемого скального основания реальности. Такого рода работа особенно тяжела, как мне кажется, в экономических науках, где и поныне требуется затрачивать большие усилия, чтобы жить в соответствии с этим принципом. Так обстоит или должно обстоять дело во всех науках, но физикам и математикам пришлось применять этот принцип к самым фундаментальным понятиям, где догматическое сопротивление особенно сильно, и поэтому следование этому принципу стало их второй натурой. Например, первый шаг в объяснении смысла теории относительности всегда сопряжен с необходимостью пошатнуть догматическую веру в незыблемость временных разграничений — прошлого, настоящего и будущего. Невозможно применять математику, пока слова затемняют реальность.

Я вновь обращаюсь к теории относительности как к иллюстрации первого важного шага, предшествующего математическому анализу, шага, совершаемому под девизом "мыслить конкретно". Первооснову таких слов, как *прошлое*, *настоящее* и *будущее*, относящихся к времени, мы усматриваем в том, что более осязаемо, чем время, а именно, в причинной структуре Универсума. События локализованы в пространстве и во времени; событие малой протяженности происходит в точке пространства-времени, или в мировой точке "здесь-теперь". Если ограничиться событиями на некоторой плоскости E (рис. 1), то их развитие во вре-

мени — своего рода расписание — можно изобразить в виде трехмерной диаграммы с горизонтальной плоскостью E и вертикальной осью t , по которой отложено время. Каждая мировая точка представлена на диаграмме точкой, движение тела небольших размеров — мировой линией, распространение света со скоростью c , испускаемого источником из мировой точки O , — прямым круговым конусом с вертикальной осью и вершиной в точке O (световым конусом). *Активное будущее* для данной мировой точки O (здесь-теперь) содержит все те события, на которые еще может повлиять то, что происходит в точке O ,

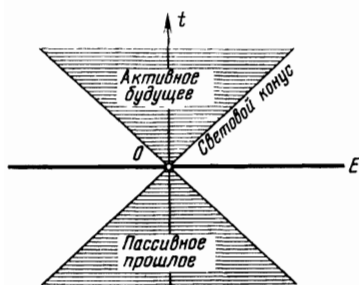


Рис. 1

а ее *пассивное прошлое* содержит все те мировые точки, из которых можно воздействовать на точку O , пошлав ей сигнал. Лишь после этого можно сделать второй шаг — шаг абстракции, когда интуитивные представления заменяются чисто знаковой конструкцией.

Около месяца назад я и мальчик лет двенадцати по имени Пит отправились побродить в окрестностях горы Лонгз Пик в Национальном парке Роки Маунтин. Взглянув на вершину, Пит сообщил

мне, что высоту ее недавно уточнили и она составляет 14255 футов вместо 14254 по прошлогодним измерениям. Я на миг приостановился, пытаюсь понять, какой смысл вкладывает в эти слова Пит, а затем попытался просветить его с помощью чего-то вроде сократовского диалога. Но я не стал мучить своего юного друга, и те объяснения, от которых воздержался тогда, изложу вам сейчас. Когда говорят о высоте горной вершины, имеют в виду ее высоту над уровнем моря. Но у подножия горы Лонгз Пик никакого моря нет. Поэтому мы мысленно продолжаем уровень моря под сушей континентов. Но как построить идеальную замкнутую поверхность — геоид, — совпадающую на части земного шара с поверхностью океанов? Если бы океаническая поверхность имела строго сферическую форму, то ответ был бы прост. В действительности, однако, ничего этого нет. И здесь нам на помощь приходит динамика. С точки зрения динамики поверхность моря — это поверхность постоянного потенциала $\varphi = \varphi_0$; говоря более точно, φ означает гравитационный потенциал Земли, и, следовательно, разность значений φ в двух точках P и P' равна работе, которую необходимо совершить над телом единичной массы, чтобы переместить его из точки P в точку P' . Именно поэтому геоид разумнее всего задать динамическим уравнением $\varphi = \varphi_0$. Если это постоянное значение потенциала φ соответствует нулевой высоте над уровнем моря, то любую другую высоту естественно определить, указав соответствующее ей значение гравитационного потенциала φ . Тогда вершину P естественно назвать более высокой, чем вершина P' , если при перемещении из P в P' достигается выигрыш в энергии. Геометрическое понятие высоты заменяется динамическим понятием потенциала или энергии. Даже для такого опытного альпиниста,

как Пит, этот аспект, наверное, наиболее важен: чем выше вершина, тем больше — *ceteris paribus*⁶ — механических усилий требует восхождение на нее. Как показывает более тщательное рассмотрение, потенциал почти во всех отношениях более точно отвечает существу дела. Например, барометрический метод измерения высоты основан на том, что при заданной постоянной температуре потенциал пропорционален логарифму атмосферного давления, какова бы ни была природа гравитационного поля. Следовательно, атмосферное давление, вообще говоря, позволяет измерять потенциал, а не высоту. Ни у кого из тех, кто знает, что Земля круглая и вертикальное направление не является внутренним геометрическим свойством пространства, а определяется направлением силы тяжести, не вызовет удивления необходимость отказа от геометрического понятия высоты в пользу более конкретного динамического понятия потенциала. Разумеется, связь с геометрией существует: если область пространства настолько мала, что силу тяжести в ней везде можно считать постоянной, то направление вертикали фиксировано и разности потенциалов, пропорциональные разностям высот, измеренным в этом "здесь-теперь", не могут изменить что-либо, лежащее вне активного будущего; все события, о которых я "здесь-теперь" могу узнать либо из прямых наблюдений, либо из любых других сообщений, с необходимостью принадлежат пассивному прошлому. Слова "проштое" и "будущее" получают при этом причинную интерпретацию и выражают нечто весьма реальное и важное — причинную структуру мира.

Новое открытие, положенное в основу теории относительности, состоит в том, что ни один эффект не может распространяться быстрее света. Следовательно, если мы раньше считали, что граница между активным будущим и пассивным прошлым представляет собой сечение, которое определяется *настоящим*, — горизонтальную плоскость $t = 0$, проходящую через мировую точку O , то Эйнштейн научил нас, что активное будущее ограничено световым конусом, обращенным раструбом вперед, а пассивное прошлое — его продолжением назад. Активное будущее отделено от пассивного прошлого частью мира, заключенной между этими конусами, и с этой частью мира я, находясь "здесь-теперь", не имею никакой причинной связи. В этом новом понимании причинной структуры Вселенной заключено важное положительное содержание теории относительности. Обсуждая различные интерпретации простого вопроса, являются ли два человека, скажем, Билл на Земле и Боб на Сириусе, современниками и означает ли это, что Билл может послать сигнал Бобу, или что Боб — послать сигнал Биллу, или же что Билл может установить связь с Бобом, пошлав ему сигнал, и получить ответ и т.д., мне нередко удавалось приучить своего слушателя мыслить в терминах причинной, а не более привычной временной структуры. Тем не менее, как только я начинал говорить о том, что причинная структура не означает разбиение на горизонтальные слои $t = \text{const}$, но что активное будущее и пассивное прошлое имеют вид конусов, разделенных зазором, так часть аудитории лишь с трудом могла уловить, к чему я клоню. Однако каждый добросовестный слушатель мог бы задать мне вопрос: "Вот Вы чертите на доске некоторую фигуру и используете наглядные

образы; как далеко простирается используемая Вами аналогия и какая голая истина стоит за ней?”. Авторы научно-популярных книг и журналисты, когда им приходится иметь дело с физикой, позволяют себе прибегать к различным сравнениям; беда, однако, состоит в том, что они оставляют читателя в неведении относительно того, насколько точно их остроумные аналогии передают суть дела; поэтому они чаще сбивают читателя с толку, чем проясняют вопрос. В нашем случае нельзя не признать, что наш чертеж — не более, чем наглядный образ, “картинка”. Впрочем, контуры реальности проступят на ней, как только мы заменим интуитивное пространство, в котором построены наши чертежи, конструкцией, состоящей из одних знаков. Тогда слова о том, что наш мир представляет собой четырехмерный континуум, из фигурального оборота речи превращаются в утверждение, которое в буквальном смысле является истинным. Делая второй шаг, математик обращается к абстракции, и это именно тот пункт, где неспециалист чаще всего перестает понимать его: интуитивная картина должна уступить место знаковой конструкции. “Своими геометрическими, а позднее чисто символическими конструкциями, — говорит Андреас Шпайзер, — математика стряхивает оковы языка, и тот, кто знает, какой гигантский труд вкладывается в этот процесс, и знаком с его неизменно повторяющимися поразительными успехами, не может не ощутить, что математика наших дней в своей сфере интеллектуального мира более эффективна, чем современные языки в их жалком состоянии и даже музыка в своих областях”⁷. Большую часть времени, отведенного для моего выступления сегодня, я хочу затратить на то, чтобы попытаться дать вам представление о том, что такое магия знаковой конструкции.

Для этого мне придется начать с самого простого и в то же время в известном смысле наиболее глубокого примера: с *натуральных*, или *целых положительных, чисел*, при помощи которых мы *пересчитываем* предметы. Знаками, которые мы будем здесь использовать, служат штрихи, наносимые один за другим. Пересчитываемые предметы могут исчезнуть — “испариться, растаять, обратиться в росу”⁸, но запись об их числе мы сохраним. Более того, с помощью вполне конструктивной процедуры мы можем определить, какое из двух чисел, изображенных с помощью этих знаков, больше; для этого каждому знаку из одного набора ставится в соответствие партнер из другого набора, и так штрих за штрихом. Такое сравнение позволяет обнаружить различия, которые мы не в состоянии установить прямым наблюдением, в большинстве случаев не позволяющим отличить друг от друга даже такие небольшие числа, как 21 и 22. Мы настолько привыкли к чудесам, творимым числовой символикой, что перестали удивляться. Но все это — не более чем прелюдия к собственно математическому шагу. Решая вопрос о том, какие числа могут встретиться нам при подсчете реальных предметов, мы не полагаемся на случай, а порождаем открытую последовательность *всех возможных чисел*; ее первый член равен 1 (или 0), а каждый последующий получается прибавлением к любому уже построенному символу числа *n* еще одного штриха, что и позволяет совершить переход к следующему числу *n*’. Как я неодно-

кратно говорил, существующее при этом проектируется на фундамент возможного, точнее, на многообразие возможного, развертывающееся путем итерации и простирающееся в бесконечность. Какое бы число n ни было задано, мы всегда можем перейти от него к следующему числу n' . "Последнего числа не существует" (Numbers go on). Эта интуиция возможности "всегда увеличить на единицу" — открытой счетной бесконечности — лежит в основе всей математики. Именно она дает нам простейший пример того, что я назвал априорной обозримостью области изменения. В соответствии с процессом порождения целых чисел функции аргумента, пробегающего все целые числа n , должны быть определены с помощью так называемой полной индукции, и аналогичным образом следует доказывать утверждения, справедливые при всех n . Принцип умозаключения с помощью полной индукции состоит в следующем. Для доказательства того, что каждое число n обладает некоторым свойством V , достаточно удостовериться в правильности двух вещей — того, что:

- 1) 0 обладает этим свойством;
- 2) если n — любое число, обладающее свойством V , то следующее за ним число n' также обладает свойством V .

Практически невозможно – и было бы бесполезно – выписывать в виде набора штрихов символ числа 10^{12} , которое европейцы называют биллионом, а американцы – тысячей биллионов. Тем не менее мы говорим о расходах на нашу военную программу, превышающих 10^{12} центов, а астрономы имеют дело с еще большими числами, чем финансисты. В июльском номере журнала "Нью-Йоркер" была опубликована следующая карикатура. Муж и жена за завтраком просматривают газету. "Эндрью, сколько это будет – семьсот биллионов долларов?" Вопрос действительно глубокий и серьезный, милостливая государыня! Замечу, что, лишь проходя через *бесконечность*, мы можем придать некий смысл столь большим числам. 12 есть сокращенное обозначение для

[illegible]

и его невозможно понять, не определив предварительно функцию $10 \cdot n$ для всех n , и для этого необходимо воспользоваться следующим определением с помощью полной индукции:

$$10 \cdot 0 = 0,$$

$$10 \cdot n' = (10 \cdot n)''''''''''.$$

Штрихи образуют явно выписанный символ числа 10, и, как и прежде, каждый штрих означает переход к следующему числу. Излюбленная тема индийской и, в частности буддийской, литературы — представление гигантских чисел в изобретенной индийцами десятичной системе счисления, т.е. запись их путем комбинации сумм, степеней и произведений. Упомяну также сочинение Архимеда "Псаммит" ("Исчисление песчинок")⁹ и число "тугошплекс", упоминаемое в последней популярной книге профессора Казнера "Математика и воображение"¹⁰.

Наша концепция *пространства*, в известной мере аналогичная нашим представлениям о натуральных числах, основана на конструктивном задании всех возможных местоположений (*places*). Рассмотрим металлический диск, лежащий на плоскости E . Различные местоположения на диске можно маркировать *in concreto*, например, выцарапывая на поверхности диска крестики. Но если на плоскости E проведены две оси координат и задана единица длины, то идеальная маркировка оказывается — возможной на плоскости и вне диска путем указания численных значений двух координат рассматриваемого местоположения. Каждая координата принимает значения из построенной *a priori* области действительных чисел. Именно так поступают астрономы, использующие твердь земную как базу для измерения глубин мирового пространства. Какая замечательная сила воображения понадобилась грекам, чтобы впервые построить тени, которые отбрасывают освещаемые Солнцем Земля и Луна в космическое пространство, и тем самым объяснить солнечные и лунные затмения! Анализируя континуум, каковым является пространство, мы применим несколько более общий подход, чем измерение координат, и примем *топологическую* точку зрения, согласно которой два континуума, получающиеся один из другого путем непрерывной деформации, совпадают. Последующую часть моего рассказа можно рассматривать поэтому и как краткое введение в такой важный раздел математики, как топология.

Знаками, позволяющими локализовать точки на одномерном континууме прямой, служат *действительные числа*. Я предпочитаю рассматривать *замкнутый* одномерный континуум — окружность. Наиболее важное утверждение относительно континуума состоит в том, что он всегда допускает разбиение на части. Все точки континуума можно уловить, накинув на него сеть разбиения и измельчая ее ячейки путем повторения *ad infinitum* определенного процесса разбиения. Пусть S — какое-то разбиение окружности на некоторое число (например, на l) дуг. От разбиения S перейдем к разбиению S' , произведя так называемое *нормальное подразбиение*: разделим каждую из дуг на две части. Тогда число дуг в разбиении S' будет равно $2l$. Обходя окружность в определенном направлении (задав ориентацию), мы можем различать части дуг по тому порядку, в котором они нам встречаются, маркируя их с помощью 0 и 1; более подробно: если дуга обозначена символом α , то две ее части обозначаются через $\alpha 0$ и $\alpha 1$. Начнем с разбиения S_0 окружности на две дуги $+$ и $-$; с точки зрения топологии каждая из них представляет собой клетку, т.е. эквивалентна отрезку. Повторяя процесс нормального подразбиения, мы приходим к разбиениям $S_0', S_0'', \dots$, следя за тем, чтобы измельчение дуг все время происходило по всей окружности. Если бы мы не отказались от использования метрических свойств, то можно было бы сказать, что при нормальном подразбиении каждая дуга делится на две *равные* части. Поскольку мы не вводим такого ограничения, данный процесс на самом деле содержит изрядную долю произвола. Тем не менее *комбинаторная схема* примыкания дуг, возникающих при очередном разбиении, и нескончаемого измельчения дуг вполне определена и един-

ственна. Только об этой символьной схеме и заботятся математики. В наших обозначениях дуги, возникающие при последовательных разбиениях, удастся свести в *единый каталог*, присваивая им символы вида

$$+, 011010001.$$

Перед запятой ставится знак плюс или минус, а на каждом месте после запятой — знаки 0 или 1. Нетрудно видеть, что мы получаем хорошо известные двоичные (или десятичные) дроби. Точку на окружности ухватывает бесконечная последовательность дуг, возникающих при продолжающихся разбиениях, причем каждая дуга получается из предыдущей путем выбора одной из двух частей, на которые эта дуга была разделена при очередном нормальном разбиении; таким образом, точка окружности однозначно определяется бесконечной двоичной дробью.

Попытаемся теперь проделать нечто аналогичное с двумерными континуумами, например, с поверхностью сферы или тора. На рис. 2, 3 показано, как накинуть очень грубые сети на сферу и тор; одна из этих сетей состоит из двух, другая — из четырех ячеек: сфера разделена на верхнее и нижнее полушарие экватором, тор склеен из четырех прямоугольных лоскутов. Ячейки представляют собой двумерные клетки, или, кратко, 2-клетки, топологически эквивалентные круглому диску. Комбинаторное описание упрощается, если ввести вершины и ребра разбиения — 0-клетки и 1-клетки. Обозначим вершины и ребра произвольными знаками и на их языке для каждой 2-клетки составим перечень ограничивающих ее 1-клеток, а для каждой 1-клетки — перечень ограничивающих ее 0-клеток. Мы получим *топологическую схему* S_0 . В наших двух примерах эта схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Сфера } A &\rightarrow \alpha, \alpha'. & A' &\rightarrow \alpha, \alpha'. & \alpha &\rightarrow a, a'. \\ & & \alpha' &\rightarrow a, a'. \end{aligned}$$

(Стрелка означает "ограничена".)

$$\begin{aligned} \text{Тор } A &\rightarrow \alpha, \bar{\alpha}, \gamma, \delta. & A' &\rightarrow \alpha, \bar{\alpha}, \gamma', \delta'. \\ B &\rightarrow \beta, \bar{\beta}, \gamma, \delta. & B' &\rightarrow \beta, \bar{\beta}, \gamma', \delta'. \\ \alpha &\rightarrow c, d. & \bar{\alpha} &\rightarrow \bar{c}, \bar{d}. & \beta &\rightarrow c, d. \\ \bar{\beta} &\rightarrow \bar{c}, \bar{d}. \\ \gamma &\rightarrow c, \bar{c}. & \gamma' &\rightarrow c, \bar{c}. & \delta &\rightarrow d, \bar{d}. \\ \delta' &\rightarrow d, \bar{d}. \end{aligned}$$

Исходя из этого разбиения, рассматриваемого как первоначальное, станем уменьшать ячейки при помощи итерации универсального процесса нормального подразбиения: в каждой 1-клетке $\alpha = ab$ выберем точку, которая служит новой вершиной α и делит 1-клетку на два сегмента αa и αb ; в каждой 2-клетке A выберем точку A и разрежем клетку на треугольники, соединив только что созданную вершину A со старыми и новыми вершинами на 1-клетках (эти клетки образуют границу 2-клетки)

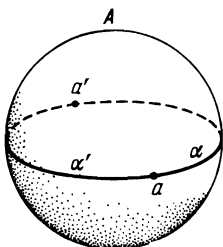


Рис. 2

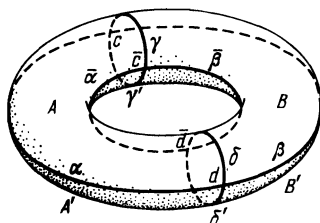


Рис. 3

линиями, которые проходят внутри 2-клетки. По аналогии с элементарной геометрией обозначим треугольники и их стороны соответствующими вершинами. На рис. 4 изображен пятиугольник до и после разбиения. Треугольник $A\beta c$ ограничен 1-клетками βc , $A\beta$, Ac ; 1-клетка Ac ограничена вершинами A и c . В результате мы приходим к следующему чисто символическому описанию процесса, посредством которого из заданной топологической схемы S получается подвергнутая разбиению схема S' . Любой символ $e_2 e_1 e_0$, составленный из символа 2-клетки e_2 , символа 1-клетки e_1 и символа 0-клетки e_0 из S (2-клетка e_2 ограничена 1-клеткой e_1 , 1-клетка e_1 ограничена 0-клеткой e_0), соответствует некоторой 2-клетке e'_2 разбиения S' . Эта 2-клетка $e'_2 = e_2 e_1 e_0$ разбиения S' составляет часть 2-клетки e_2 разбиения S . Символы клеток разбиения S' , образующих границу любой клетки, получаются из ее символа при отбрасывании любой из входящих в нее букв. При итерации этого комбинаторного процесса, производимого над знаками, исходная схема S_0 порождает последовательность вторичных схем $S'_0, S''_0, S'''_0, \dots$ Нам остается лишь

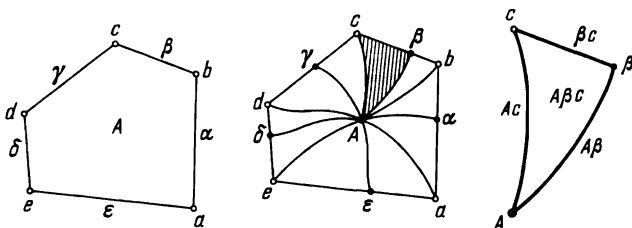


Рис. 4

придумать, как составить систематический каталог частей, возникающих при последовательных разбиениях. Любую точку нашего континуума ухватывает последовательность

$$ee'e'' \dots; \quad (2)$$

начинается она с 2-клетки e схемы S_0 , а за клеткой $e^{(n)}$ схемы $S^{(n)}$ следует одна из 2-клеток $e^{(n+1)}$ схемы $S^{(n+1)}$, на которую 2-клетка $e^{(n)}$ распадается при $(n+1)$ -м разбиении. (Строго говоря, наше описание следовало

бы немного изменить, чтобы по достоинству отразить непрерывность континуума, но для нас сейчас достаточно и упрощенного описания, которое приведено выше.) Мы твердо знаем, что не только каждую точку можно ухватить такого рода последовательностью (Евдокс), но и что произвольно построенная последовательность этого типа всегда ухватывает некоторую точку (Дедекинд, Кантор). Такие фундаментальные понятия, как *предел*, *сходимость* и *непрерывность*, возникли в русле этой математической конструкции.

Теперь мы подошли к решающему шагу математической абстракции: забудем о том, что означают наши символы. Математики имеют дело только с каталогом знаков; они ведут себя как человек в справочном отделе библиотеки, которого не интересует, какие книги или фрагменты интуитивно постигаемого многообразия запечатлены с помощью знаков каталога. Такой человек не обязательно ленив: есть немало операций, которые можно выполнить, работая только с символами и не обращаясь непосредственно к вещам, которые они обозначают. Так, заменяя точки их знаками (2), математик превращает исходное многообразие в *знаковую конструкцию*, которую мы будем называть *топологическим пространством* $\{S_0\}$, потому что в ее основе лежит только схема S_0 .

Детали несущественны; важно лишь то, что коль скоро задана исходная конечная символьная схема S_0 , мы, следуя абсолютно жестким правилам знакового конструирования, переходим от S_0 к S'_0 , от S'_0 к S''_0 и т.д. Идея итерации, впервые встретившаяся нам при построении натуральных чисел, и на этот раз играет решающую роль. Реализация знаковой схемы для заданного многообразия, например, для сферы или тора, как схемы последовательных разбиений может произвольно варьировать в широких пределах, будучи ограничена лишь требованием: ячейки сети должны в конце концов всюду становиться бесконечно малыми. В этом пункте и тесно связанном с ним требовании, чтобы каждая 2-клетка была наделена топологической структурой круглого диска, я вынужден довольствоваться не вполне четкими формулировками. Но математиков интересует не применение схемы или каталога к тому или иному заданному многообразию, а только схема сама по себе, лишенная каких бы то ни было неясностей. Более того, как мы сейчас убедимся, даже для физики такого рода применение не представляет особого интереса. Прделанный нами путь от многообразия через разбиение к чистой символической продиктован исключительно эвристическими соображениями.

Тот же подход, оперирующий только со знаками, позволяет строить не только 1-, 2-, но и 3-, 4-, 5-, ... мерные многообразия. В общем случае n -мерная схема S_0 состоит из символов, называемых 0-, 1-, 2-, ..., n -клетками, и каждой i -клетке e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ставит в соответствие некоторые $(i-1)$ -клетки, образующие, как принято говорить, границу клетки e_i . Ясно, каким образом этот процесс нормального разбиения переносится на общий случай. Для локализации событий (всех возможных "здесь-теперь") допустимо воспользоваться некоторой 4-мерной схемой; физические величины, изменяющиеся в пространстве и времени, суть функции точки, пробегающей соответствующее знаково-сконструирован-

ное 4-мерное топологическое пространство¹¹. В этом смысле наш мир *есть не что иное*, как 4-мерный континуум. Причинную структуру, о которой говорилось выше, необходимо построить в среде этого 4-мерного мира, т.е. из символов, образующих наше топологическое пространство. Мы умышленно избрали топологический подход, поскольку только он позволяет достичь широты, достаточной для того, чтобы мы могли охватить одновременно специальную и общую теорию относительности. Специальная теория относительности рассматривает причинную структуру как нечто геометрическое, жесткое, заданное раз и навсегда, в общей же теории относительности эта структура обретает гибкость и зависимость от вещества — так же, как, например, электромагнитное поле.

Анализируя природу, мы расчлняем явления на простые элементы, каждый из которых изменяется в определенном диапазоне возможностей, диапазоне, который обозрим для нас *a priori* потому, что эти возможности мы строим *a priori* чисто комбинаторным образом из некоего чисто знакового материала. Многообразие точек пространства-времени является одним из конструктивных элементов природы, по-видимому, наиболее важным. Мы разлагаем свет на пучки плоскополяризованного монохроматического света, обладающие несколькими переменными характеристиками; значения одной из таких характеристик — длины волны — принадлежат знаково-сконструированному континууму действительных чисел. В силу априорности этой конструкции мы говорим о *количественном* анализе природы; я убежден, что слово "количественный", если ему вообще можно придать какой-нибудь смысл, надлежит понимать в этом широком смысле. Мощь науки, как свидетельствует развитие современной техники, опирается на комбинацию априорных знаковых конструкций и систематического опыта в форме планируемых и воспроизводимых экспериментов (*reactions*) и соответствующих измерений. В качестве материала для своих построений *a priori* Галилей и Ньютон использовали такие свойства реального мира, как пространство и время, которые они считали объективными в противоположность субъективным чувственным качествам, отвергаемым ими. Этим и объясняется важная роль, которая отводилась геометрическим фигурам в их физике. Должно быть, вы помните следующие строки из сочинения Галилея "Пробирных дел мастер"¹², где он говорит, что величественную книгу природы может читать лишь тот, "кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова". Впоследствии мы узнали, что ни один из элементов (*features*) нашего непосредственного восприятия (*observation*), даже пространство и время, не может быть сохранен в мире, претендующем на подлинную объективность, и в конце концов пришли к необходимости принять чисто знаковую комбинаторную конструкцию.

В то время как задание множества предметов однозначно определяет их число, мы видели, что схему разбиения S_0 с последовательными этапами $S'_0, S''_0, \dots$ можно ввести на заданном многообразии многими способами,

допускающими произвольное варьирование в довольно широких пределах. Однако вопрос о пригодности двух схем

$$S_0, S'_0, S''_0, \dots \quad \text{и} \quad T_0, T'_0, T''_0, \dots$$

для описания одного и того же многообразия может быть решен математически: для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали непрерывные взаимнооднозначные преобразования, отображающие друг на друга два топологических пространства $\{S_0\}$ и $\{T_0\}$, — условие, из которого в конечном счете выкристаллизовывается определенное соотношение между двумя схемами S_0 и T_0 , называемое изоморфизмом. (Замечу кстати, что проблема установления в конечной комбинаторной форме критерия изоморфизма двух конечных схем принадлежит к числу знаменитых нерешенных математических проблем¹³.) Связь между данным континуумом и его знаковой схемой неизбежно несет в себе понятие *изоморфизма*; без этого понятия и без понимания того, что изоморфные схемы следует рассматривать как отличающиеся лишь второстепенными деталями — не более, чем конгруэнтные фигуры в геометрии, — математическое понятие топологического пространства было бы неполным. Кроме того, необходимо точно сформулировать условия, которым должна удовлетворять каждая топологическая схема. Например, одно из таких условий требует, чтобы каждая 1-клетка была ограничена ровно двумя 0-клетками.

Теперь я уже могу более ясно сказать о том, почему для физика — почти так же, как для математика, — безразличен конкретный способ применения определенной комбинаторной схемы последовательных разбиений к тому континууму событий "здесь-теперь", который мы называем миром. Разумеется, теоретические конструкции необходимо тем или иным способом сопоставить с наблюдаемыми фактами. Историческое развитие наших теорий, происходящее благодаря эвристическим рассуждениям, — это извилистый и многоступенчатый путь, ведущий от опыта к конструкции. Однако систематическое изложение следует строить иначе: сначала разработать теоретическую схему, не делая попыток отождествить с помощью отдельных измерений входящие в ее знаки с пространственно-временными координатами, напряжениями электромагнитного поля и т.д., а затем как бы на одном дыхании дать описание того, каким образом вся эта система соотносится с наблюдаемыми фактами. Простейшим примером, который мне удалось подыскать, служит наблюдаемое угловое расстояние между двумя звездами. Знаковая конструкция в среде 4-мерного мира, по которой теория определяет и предсказывает значение этого угла, включает в себя следующее: 1) мировые линии двух звезд, 2) причинную структуру универсума, 3) мировую точку наблюдателя и направление его мировой линии в момент наблюдения. Непрерывная же деформация — взаимно однозначное непрерывное преобразование — всей этой картины никак не сказывается на величине угла¹⁴. *Изоморфные картины приводят к одним и тем же результатам во всем, что касается наблюдаемых фактов.* Это не что иное, как *принцип относительности* в его наиболее общей форме. Произвол, возникающий при восхождении от данного многообразия к его конструкции, выражен в этом принципе относительности для

противоположной процедуры спуска, которой надлежит придерживаться при систематическом изложении теории.

До сих пор мы стремились описать, каким образом результат математического конструирования *(construct)* возникает в дистиллированном виде из данного нам сырого материала. Взглянем теперь на продукты этой дистилляции глазами чистого математика. Один из продуктов — последовательность натуральных чисел, другой — общее понятие топологического пространства $\{S_0\}$, в которое превращается топологическая схема S_0 при последовательных разбиениях $S_0, S'_0, S''_0, \dots$. Наиболее важной отличительной особенностью в обоих случаях является *итерация*. Следовательно, все наши умозаключения должны основываться на свидетельствах относительно совершенно ясного и понятного процесса, посредством которого порождаются натуральные числа, а не на каких-то принципах формальной логики, подобных силлогизму и др. Извлечение следствий *не есть* дело конструктивно мыслящего математика. В самом деле, его логические выводы *(arguments)* и суждения *(propositions)* — не более чем аккомпанемент к его деятельности, к созданию конструкций. Например, мы перебираем последовательно, одно за другим, целые числа $0, 1, 2, \dots$, произнося поочередно "четно", "нечетно", "четно", "нечетно" и т.д., и, принимая во внимание возможность продолжения этой индуктивной конструкции сколь угодно далеко, формулируем общее суждение теории чисел: "Каждое целое число либо четно, либо нечетно". Помимо идеи итерации (или последовательности целых чисел) мы постоянно используем идею отображения, или функции. Например, в только что рассмотренном примере мы определили по индукции функцию $\pi(n)$, называемую четностью, где n принимает любые целочисленные значения, а π может принимать только два значения — 0 (четно) и 1 (нечетно):

$$\pi(0) = 0,$$

$$\pi(n') = 1, \text{ если } \pi(n) = 0,$$

$$\pi(n') = 0, \text{ если } \pi(n) = 1.$$

Такие структуры, рассматриваемые как топологические схемы, следует изучать в свете идеи *изоморфизма*. Например, если требуется ввести оператор τ , переводящий топологическую схему S в топологическую схему $\tau(S)$, то рассматривать следует лишь такие операторы, или функции, τ , для которых изоморфизм S и R влечет изоморфизм $\tau(S)$ и $\tau(R)$.

До сих пор я всячески подчеркивал конструктивный характер математики. В нашей фактически существующей математике с ним соперничает неконструктивный *аксиоматический метод*. Его классическим прототипом являются аксиомы геометрии Евклида. Аксиоматический метод был весьма остроумно использован Архимедом, а впоследствии Галилеем и Гюйгенсом при создании науки механики. При аксиоматическом методе все понятия определяются через несколько неопределяемых основных утверждений — аксиом, относящихся к основным понятиям. В прежние времена создатели теорий были склонны утверждать априорную очевидность своих аксиом, но это эпистемологический аспект проблемы, не пред-

ставляющий интереса для математика. Дедукция происходит в соответствии с принципами формальной логики, в частности, следует схеме силлогистического вывода. Подобное аксиоматическое изложение *поге geometrico*¹⁵ на протяжении долгого времени считалось идеалом любой науки. Спиноза предпринял попытку применить его к этике. Для математика безразличен смысл слов, выражающих основные понятия; любая их подходящая интерпретация, т.е. такая, при которой аксиомы становятся истинами, одинаково пригодна, и все суждения аксиоматизируемой дисциплины при такой интерпретации сохраняют свою силу, поскольку все они являются логическими следствиями из аксиом. Так, *n*-мерная евклидова геометрия допускает еще одну интерпретацию, в которой точкам соответствуют распределения электрических токов в цепи из ветвей, соединенных в определенных узлах. Например, найти распределение токов, возникающее при заданных электродвижущих силах, приложенных к тем или иным ветвям цепи, означает решить геометрическую задачу о построении ортогональной проекции точки на некоторое линейное подпространство. В этом смысле математика рассматривает отношения в гипотетически-дедуктивном плане, не связывая себя никакой конкретной материальной интерпретацией. Ее интересует не *истинность* аксиом, а лишь их *непротиворечивость*; в самом деле, противоречивость *a priori* лишила бы нас надежды когда-нибудь найти подходящую интерпретацию. "Математика — это наука, извлекающая необходимые следствия", — сказал Б.Пирс в 1870 г., и это определение оставалось в моде на протяжении нескольких десятилетий. Мне кажется, что оно содержит весьма скудную информацию относительно подлинной природы математики, и сейчас вы присутствуете при попытке охарактеризовать ее более полно. Специалисты по философии математики в прошлом неоднократно обсуждали аксиоматический метод, поэтому я не считаю необходимым излагать его более подробно, хотя и сознаю, что от этого мое изложение становится несколько односторонним.

Все же я считаю своим долгом заметить, что с тех пор, как аксиоматический подход перестал быть излюбленной темой специалистов по методологии, его влияние распространилось с корней на все ветви математического древа. Как мы уже успели убедиться, в основе топологии должен лежать полный перечень аксиом, определяющих *топологическую схему*. Одним из простейших и наиболее фундаментальных понятий, задаваемых аксиоматически, может служить понятие *группы*, проникшее во все разделы математики. Алгебра с ее *полями*, *кольцами* и т.п. от вершины до основания пронизана аксиоматическим духом. Черты рисуемого мной портрета математики стали бы гораздо более четкими, если бы я не был так ограничен временем и мог хотя бы кратко объяснить, что, собственно, означает каждое из произнесенных мной всемогущих слов "группа", "поле" и "кольцо". Я не буду пытаться сделать это, как не пытался приводить аксиомы, характерные для топологической схемы. Но такого рода понятия — как и родственные им — привели к тому, что современное математическое исследование часто представляет собой искусно составленную смесь конструктивной и аксиоматической процедур.

Взаимопроникновение этих процедур, возможно, и должно вызывать чувство удовлетворения. Однако велико искушение принять один из двух подходов в качестве подлинно, исконно математического образа мышления, а другому отвести вспомогательную роль; и если такой выбор — в пользу конструкции или в пользу аксиомы — произведен, то принятую точку зрения действительно удается развить последовательно и до конца.

Рассмотрим сначала первую альтернативу. Приняв ее, мы должны считать, что математика есть прежде всего конструкция. Используемые в математике системы аксиом лишь *устанавливают границы области значений тех переменных, которые участвуют в конструкции*. Поясню это утверждение несколько подробнее на наших примерах причинной структуры и топологии. Согласно специальной теории относительности причинная структура задана раз и навсегда и поэтому может быть построена явно. Более того, эту структуру разумно строить вместе с соответствующей топологической средой, подобно тому, как, например, окружность вместе со своей метрической структурой получается путем выполнения нормального разбиения — деления каждой дуги на две *равные* части. Однако в общей теории относительности причинная структура представляет собой нечто гибкое: она должна лишь удовлетворять некоторым аксиомам, выведенным из опыта и оставляющим достаточную свободу. Но по мере развития теории устанавливаются законы природы, связывающие гибкую причинную структуру с другими гибкими физическими сущностями — распределением масс, электромагнитным полем и т.д., и эти законы, в которых гибкие явления выступают как переменные, в свою очередь оказываются результатом явных априорных теоретических *построений*. Релятивистская космология изучает топологическую структуру Вселенной в целом: открыта Вселенная или замкнута и т.д. Разумеется, топологическая структура не может быть столь же гибкой, что и причинная структура, но прежде чем, опираясь на свидетельство опыта, решить, какая из топологических возможностей воплощается в нашем реальном мире, необходимо без помех обзреть все эти возможности, а для этого необходимо обратиться к топологии. В ее рамках топологическая схема ограничена лишь некоторыми аксиомами; но тополог, однако, извлекает из произвольных топологических схем численные характеристики или устанавливает между ними соотношения общего рода; и делает он это опять-таки с помощью явной конструкции, в которую произвольные схемы входят в качестве переменных. Аксиомы, коль скоро они встречаются, служат в конечном счете для указания границ области значений переменных в явно построенных функциональных соотношениях.

Но довольно о первой альтернативе. Если принять противоположную точку зрения, то конструкция оказывается подчиненной аксиомам и дедукции, математика же предстает в виде системы аксиом, выбор которых зависит от соглашения, и выводимых из них заключений. В полностью аксиоматизированной математике *конструкции отводятся второстепенная роль: к ней прибегают при построении примеров, образующих мост*

между чистой теорией и ее приложениями. Иногда существует лишь *один* пример, потому что аксиомы определяют некий объект однозначно или по крайней мере с точностью до изоморфизмов; в этом случае необходимость перехода от аксиоматической структуры к некоторой явной конструкции становится особенно настоятельной. Еще более существенно отметить, что хотя аксиоматическая система и не предполагает построения математических *объектов*, она, комбинируя и неоднократно используя логические правила, строит математические *суждения*. Действительно, извлечение следствий из заданных посылок происходит по определенным логическим правилам, которые со времен Аристотеля неоднократно пытались свести в единый полный перечень. Таким образом, на уровне суждений аксиоматический метод есть чистейшей воды конструктивизм. В наши дни Давид Гильберт довел аксиоматический метод до горького конца, когда суждения математики, включая аксиомы, превратились в формулы и игра в дедукцию свелась к выводу из аксиом тех или иных формул по правилам, не учитывающим смысла формул. Игра в математику происходит в полном безмолвии, без единого слова, как игра в шахматы. Слова нужны лишь для того, чтобы объяснить и сообщить "игрокам" правила; и, разумеется, все рассуждения о возможностях игры, например выяснение вопроса о ее непротиворечивости, также происходит в среде слов и апеллирует к данным опыта.

На этом этапе, коль скоро он достигнут, расхождение между явной конструкцией и неявным аксиоматическим определением затрагивает самые основы математики. Конструктивный опыт перестает подкреплять принципы аристотелевской логики, когда эти принципы применяются к экзистенциальным или общим суждениям, относящимся к бесконечным областям, таким, как последовательность целых чисел или континуум точек. Если же мы примем во внимание логику бесконечного, то нам вряд ли удастся адекватно аксиоматизировать даже самые примитивные процессы, например, переход $n \rightarrow n'$, т.е. от целого числа n к следующему числу n' . Как показал К. Гёдель, всегда найдутся конструктивно очевидные арифметические суждения, не выводимые из аксиом, как бы вы их ни формулировали, и в то же время аксиомы, безраздельно правящие всеми тонкостями конструктивной бесконечности, выходят далеко за пределы того, что может быть подтверждено опытом. Нас не удивляет, что фрагмент природы, взятый в своем феноменальном изолированном бытии, бросает вызов нашему анализу с его незавершенностью и неполнотой; именно ради полноты, как мы видели, физика проецирует то, что дано, на то, что могло бы быть. Но удивительно другое: конструкция, порожденная разумом, — последовательность целых чисел, эта простейшая и самая прозрачная для конструктивного ума вещь, — обретает аналогичную неясность и ущербность, если подходить к ней с позиций аксиоматики. Но тем не менее это факт, отбрасывающий зыбкий отблеск на взаимосвязь опыта и математики. Несмотря на пронизательность критической мысли — а может быть, благодаря ей — мы теперь гораздо меньше, чем наши предшественники, уверены в тех глубинных устоях, на которых покоится математика.

Цель моей лекции состояла не в том, чтобы показать работу изобретательного математического интеллекта во всех его многообразных проявлениях — в математическом анализе, геометрии, алгебре, физике и т.д., хотя, нарисовав такую картину, я вызвал бы большой интерес: моя задача состояла в том, чтобы продемонстрировать источники, порождающие эти проявления. Я понимаю, что за отведенный час мне удалось лишь в малой степени приблизиться к этой цели. В других областях знания даже краткие намеки встречают полное понимание, но в сфере математических идей такое, к сожалению, происходит редко. Я считал бы, что потерпел полную неудачу, если бы до вас не дошла по крайней мере следующая мысль: несмотря на почтенный возраст, математика отнюдь не страдает прогрессирующим склерозом, вызванным все возрастающей сложностью; напротив, она продолжает активно жить, питаясь теми живительными соками, которые извлекают ее глубокие корни из разума и природы.

ТОПОЛОГИЯ И АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА КАК ДВА СПОСОБА ПОНИМАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ*)

Вряд ли кто-нибудь из нас сочтет удовлетворительным такой способ передачи математической истины, при котором она предстает в виде сложной цепочки формальных умозаключений и вычислений, когда мы вынуждены, так сказать, вслепую, наощупь переходить от одного звена к другому. Мы хотели бы заранее видеть конечную цель и ведущий к ней путь, хотели бы понять внутреннее основание, определяющее ход мыслей, идею доказательства, более глубокие взаимосвязи. С современным математическим доказательством дело обстоит так же, как с современной машиной или экспериментальной физической схемой: простые основные принципы лежат глубоко и едва различимы под оболочкой технических деталей. Феликс Клейн, рассматривая в своих "Лекциях о развитии математики в XIX столетии" творчество Римана, говорит: "Неопровержимые доказательства всех утверждений, несомненно, являются краеугольным камнем любой математической теории. Разумеется, математика сама судит, в каких случаях стоит поступиться строгостью доказательств. Извечный секрет необычайной продуктивности гения — в его умении находить новые постановки задач, интуитивно предугадывать теоремы, приводящие к новым значительным результатам и к установлению важных зависимостей. Не будь новых концепций, новых целей, математика с присущей ей строгостью логических выводов вскоре исчерпала бы себя и пришла в упадок, ибо весь материал оказался бы израсходованным. В этом смысле можно сказать, что математику движут вперед в основном те, кто отмечен даром интуиции, а не строгого доказательства". В методике самого Клейна главным было именно это интуитивное постижение тех внутренних взаимосвязей и отношений, основания которых различны, но там, где требовалось напрячь всю мощь изощрений логики, он в известной мере был вынужден отступать.

*) Доклад на Летней школе (Ferienkurs), организованной швейцарским Обществом преподавателей гимназий в Берне (октябрь 1931 г.).

В речи, посвященной памяти Лежёна Дирихле, Минковский противопоставил принципу минимума, который в немецкой литературе принято связывать с именем Дирихле, но который на самом деле был всесторонне разработан Уильямом Томсоном, другой, подлинный принцип Дирихле: одолевать проблему при минимуме слепых вычислений и максимуме наглядных идей; с этого принципа, говорит Минковский, началось новое время в истории математики.

Но в чем же секрет такого понимания математических фактов, в чем он состоит? В философии науки ныне вновь предпринимаются попытки противопоставить *понимание*, герменевтику как основу наук о духе, естественно-научному *объяснению*, и вокруг слов "интуиция", "понимание" возникает некий мистический ореол как свидетельство их особенной глубины и непосредственности. В математике мы предпочитаем несколько более трезво смотреть на вещи. Я не могу пускаться здесь — да это, мне кажется, было бы очень трудно сделать — в подробный анализ тех мыслительных актов, о которых пойдет речь. Но одну решающую, хотя саму по себе и не достаточную, характеристику процесса понимания я хотел бы подчеркнуть: различные стороны предмета математического исследования мы подвергаем естественному разделению, каждую сторону в отдельности осваиваем, исходя из особого, сравнительно узкого и легко обозримого набора предположений и затем возвращаемся к целому, подходящим образом объединяя частные результаты в сложное единство. Последняя, синтетическая, часть процедуры носит чисто механический характер. Все мастерство заключено в первой, аналитической части — разделении и обобщении. На протяжении последних десятилетий математика прямо-таки упивалась всякого рода обобщениями и формализациями. Однако считать, будто она стремится к общему ради общего, значит неверно понимать заключенную здесь здоровую тенденцию. Дело обстоит иначе: любое естественное обобщение *упрощает*, сокращая допущения, и тем самым позволяет понять определенные стороны некоторого необозримого целого. Разумеется, вполне может случиться, что обобщения в различных направлениях принесут понимание конкретного положения вещей в различных аспектах. В этом случае разговор об *истинной* основе, *истинном* источнике этого положения вещей отягчен субъективным и догматическим произволом. Для установления того, насколько *естественно* некоторое вычленение вместе с соответствующим обобщением, не может быть никакого другого критерия, кроме их *плодотворности*. Если отдельный исследователь должным образом систематизирует этот критерий, применяя процедуру, разработанную им с большей или меньшей изобретательностью и чутьем, и использует все аналогии, почерпнутые им из своего опыта, то получится не что иное, как *аксиоматика*. Стало быть, последняя в наши дни уже не является только методом прояснения и углубления *оснований* — она стала инструментом конкретного математического исследования.

Поскольку в недавние времена взоры математиков были столь сильно прикованы к общему и формализованному, по-человечески понятно, почему встречалось так много дешевых и невыразительных обобщений

ради обобщений; обобщение путем разрежения, как его назвал г-н Пойа, не увеличивает математическое содержание, а лишь разбавляет добрую похлебку жидкой водицей. Но это — признак вырождения, суть дела не в этом. Клейну принадлежит следующее высказывание, сделанное им в последние годы жизни: "Математика напоминает мне огромный оружейный магазин в мирное время. Витрины ломятся от великолепнейших образцов оружия, поражающих знатока остроумной конструкцией и искусной, радующей глаз отделкой. Первоначальное назначение всех этих предметов, созданных для достижения победы над противником, отходит столь далеко на задний план, что почти полностью изглаживается из памяти". Хотя в высказывании Клейна имеется изрядная доля истины, все же в целом наше поколение считает такую оценку своих устремлений несправедливой.

Два разных способа понимания стали в наши дни особенно всепроникающими и плодотворными — это *топология* и *абстрактная алгебра*. Оба образа мысли ныне накладывают свой отпечаток на значительную часть математики. Центральное понятие *действительного числа* позволяет сразу объяснить, чем это вызвано. Система действительных чисел подобна двуполому Янусу: с одной стороны — это совокупность *(das Feld)* алгебраических операций $+$ и $-$ и им обратных, с другой — континуальное многообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел алгебраический, второй топологический. Современная аксиоматика, при всей своей простоте, не терпит (в отличие от новейшей политики) подобного двусмысленного смещения войны и мира; она тщательно отделяет одну сторону от другой. Наконец, количественный характер *(Größencharakter)* чисел, выражающийся в отношениях $<$ и $>$, занимает некое промежуточное положение между алгеброй и топологией.

Мы подвергаем континуумы чисто топологическому исследованию тогда, когда сосредоточиваем внимание только на таких их свойствах и различиях, которые сохраняются при произвольной непрерывной деформации, произвольном непрерывном отображении. От отображения требуется лишь, чтобы оно не приводило к совпадению того, что раздельно. Так, топологическим свойством поверхности является ее *замкнутость*, как у сферы, или *открытость*, как у обычной плоскости. Часть плоскости, например внутренность круга, *односвязна*, если любой поперечный разрез делит ее на части, в то время как круговое кольцо *двусвязно*, так как допускает поперечный разрез, не приводящий к распадению его на отдельные части, но такой, что после того, как он проведен, любой новый поперечный разрез приводит к распадению кольца. Любую замкнутую кривую на сфере непрерывной деформацией можно стянуть в точку, чего нельзя сделать на торе. Две замкнутые кривые в пространстве либо *сцеплены* (*verschlingen*), либо не сцеплены. Все это примеры топологических свойств и взаимных расположений. В них зафиксированы простейшие различия, лежащие в основе любой другой более тонкой дифференциации геометрических образов; эти различия опираются лишь на идею *непрерывной связи*; они не предполагают никаких ссылок на особую структуру непрерывного многообразия, например, на его метрику. Такие понятия, как предел,

сходимость точечной последовательности к точке, окрестность, непрерывная линия, принадлежат к тому же кругу идей.

Сделав эти предварительные замечания о топологии, или *analysis situs*, я хотел бы далее кратко объяснить те причины, которые привели к развитию *абстрактной алгебры*, и на совсем простом примере показать, как один и тот же факт может рассматриваться как с топологической, так и с абстрактно-алгебраической точки зрения.

Чистый алгебраист может производить над числами лишь *четыре арифметических действия* (*vier Spezies*): сложение, вычитание, умножение и деление. Поэтому для него область чисел замкнута, он не имеет средств для выхода за ее рамки: применяя эти операции к любым двум числам, он всегда получает число из той же области. Такая область называется *полем*, или *областью рациональности*. Простейшее поле — это совокупность рациональных чисел. Другой пример — совокупность чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа. Известное понятие *неприводимости многочлена* зависит от области рациональности: многочлен $f(x)$ над K , т.е. с коэффициентами из поля K , неприводим над K , если его нельзя представить в виде произведения $f_1(x) \cdot f_2(x)$ двух многочленов над K , каждый из которых не вырождается в константу. Решение линейных уравнений, нахождение наибольшего общего делителя двух многочленов с помощью алгоритма Евклида происходит над определенной областью рациональности, которой принадлежат коэффициенты соответственно уравнений и многочленов. Классической задачей алгебры является решение алгебраического уравнения $f(x) = 0$ с коэффициентами из поля K , например, из поля рациональных чисел. Если корень θ этого уравнения нам известен, то известны и все числа, которые с помощью четырех действий можно получить из θ (и чисел, образующих поле K , которые предполагаются известными): все эти числа образуют поле $K(\theta)$, являющееся расширением поля K . Внутри числового поля $K(\theta)$ корень θ играет роль *определяющего* числа, позволяющего получить все остальные рациональные числа. Но в роли θ могут выступать и многие другие, почти все числа из $K(\theta)$. Поэтому вместо уравнения $f(x) = 0$ мы можем изучать поле $K(\theta)$, и этот переход означает большой шаг вперед ибо совершая его, мы снимаем несущественное и одинаково охватываем все уравнения, которые можно получить из уравнения $f(x) = 0$ с помощью преобразования Чирнгаузена. Алгебраическая и прежде всего арифметическая теория числовых полей — одно из величайших творений математики; по богатству и глубине результатов его можно, пожалуй, назвать наиболее совершенным творением.

Но в алгебре встречаются и такие области рациональности, элементы которых не являются числами. *Многочлены* одной переменной, или неизвестной, x образуют область величин, в которой можно производить сложение, вычитание и умножение, но, конечно, не деление. В этом отношении многочлены подобны тем рациональным числам, которые являются целыми. Совокупность величин с такими свойствами называется *областью целостности*, или *кольцом*. Алгебре чуждо представление о том, что аргумент x есть *переменная*, непрерывно пробегающая свои значения; он есть для

нее лишь *неопределенная величина*, пустой знак¹, служащий для того, чтобы коэффициенты многочлена можно было охватить единым выражением, с которым легко связать правила сложения и умножения многочленов. Нуль — это такой многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю (а не многочлен, принимающий нулевое значение при всех значениях переменной x). Здесь справедлива теорема о том, что произведение двух отличных от нуля многочленов всегда отлично от нуля. Алгебраический взгляд не исключает подстановку вместо x числа a , принадлежащего тому же полю, над которым мы производим операции; однако вместо x может быть представлен также многочлен от некоторой другой или нескольких других неопределенных величин $y, z, \dots$ Такая подстановка есть некоторый формальный процесс, посредством которого кольцо $K[x]$ многочленов от x над полем K точно проецируется на само кольцо K или на кольцо многочленов $K[y, z, \dots]$; "точно" ("getreu") означает сохранение отношений, установленных операциями сложения и умножения. Это как раз те формально выполняемые операции над многочленами, навыки которых мы должны привить учащимся средней школы в курсе алгебры. Если ввести операцию получения частного и от многочленов перейти к *рациональным функциям*, подлежащим столь же формальному рассмотрению, то мы получим кольцо, элементами которого оказываются не числа, а именно функции. Аналогичным образом многочлены и рациональные функции от *двух* переменных x, y или *трех* переменных x, y, z с коэффициентами из поля K образуют соответственно кольцо или поле.

Сравним-ка следующие три кольца: обычные целые числа, многочлены от одной переменной x и многочлены от двух переменных x, y с рациональными коэффициентами. Для первых двух колец имеется алгоритм Евклида, и поэтому справедлива теорема: *если a и b — два элемента, не имеющие общих делителей, то, выбрав подходящим образом элементы p, q кольца, из них можно построить единицу:*

$$1 = p \cdot a + q \cdot b. \quad (*)$$

Отсюда следует фундаментальная теорема об однозначном разложении на простые элементы. Для многочленов от двух переменных теорема (*) уже не верна. Например, хотя многочлены $x-y$ и $x+y$ не имеют общих делителей, из них заведомо нельзя построить единицу, поскольку в любом многочлене вида $p(x, y)(x-y) + q(x, y)(x+y)$ свободный член очевидно равен нулю. Тем не менее фундаментальная теорема об однозначном разложении на простые многочлены верна и для многочленов от двух переменных. Так обнаруживаются интересные различия и совпадения.

Однако в алгебре поля из обычных чисел и функций могут быть построены и другим способом. Пусть p — простое число, например число 5. Возьмем обычные целые числа и условимся считать *равными* числа, *сравнимые по модулю p* , т.е. такие числа, которые при делении на p дают один и тот же остаток. Наглядно это можно представить себе так: мы как бы наматываем числовую ось на окружность длиной p . В результате возникает своеобразное поле, состоящее всего лишь из p различных элементов.

Такой подход оказывается весьма плодотворным для всей теории чисел. Возьмем, например, следующую широко применяемую теорему Гаусса: если $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена с целочисленными коэффициентами и все коэффициенты произведения $f(x) \cdot g(x)$ делятся на простое число p , то все коэффициенты либо многочлена $f(x)$, либо многочлена $g(x)$ делятся на p . Это не что иное, как тривиальная теорема о том, что произведение двух многочленов может оказаться нулем только тогда, когда один из сомножителей есть нуль, — утверждение, применимое к только что описанному полю, из которого берутся коэффициенты многочленов. В этой области существуют многочлены, отличные от нуля, которые тем не менее обращаются в нуль при всех значениях аргументов, например $x^p - x$. Ибо по малой теореме Ферма для любого целого числа a справедливо сравнение

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Аналогичный прием образования понятий использовал Коши при введении мнимых величин. Он рассматривает мнимую единицу i как неизвестное и изучает многочлены от этого неизвестного над полем действительных чисел, сравнимые по модулю $i^2 + 1$; иными словами, он считает два многочлена равными, если их разность делится на $i^2 + 1$. Тем самым не разрешимое на самом деле уравнение $i^2 + 1 = 0$ становится некоторым образом разрешимым. Но $i^2 + 1$ — простой² многочлен над полем действительных чисел. Кронекер обобщил конструкцию Коши следующим образом. Пусть K — область рациональности, $p(x)$ — простой многочлен над K . Многочлены $f(x)$ с коэффициентами из K образуют поле (а не просто кольцо), если рассматривать их по модулю $p(x)$. Этот процесс алгебраический полностью эквивалентен описанному выше: к полю K необходимо присоединить корень θ уравнения $p(\theta) = 0$ и тем самым получить в качестве его расширения поле $K(\theta)$. Но он обладает тем преимуществом, что все происходит в рамках чистой алгебры и не требует решения уравнения, которое на самом деле неразрешимо над полем K .

Описанное развитие естественным образом привело к *чисто аксиоматическому построению алгебры*³. Поле — это область, состоящая из элементов, называемых числами; на ней определены две операции $+$ и $-$, удовлетворяющие обычным аксиомам: законам ассоциативности и коммутативности сложения и умножения; закону дистрибутивности, устанавливающему связь между сложением и умножением; далее — требованию однозначной обратимости сложения, приводящему к вычитанию, и требованию однозначной обратимости умножения, которое приводит к делению. Отбросив последний постулат, мы вместо поля получаем *кольцо*. Теперь поле оказывается уже не фрагментом некоего универсального числового мира — континуума действительных или комплексных чисел, как это представляли себе раньше: каждое *кольцо* есть, так сказать, *некоторый мир сам по себе*. Операции позволяют сочленять друг с другом элементы одного и того же кольца, но не элементы различных колец. При таком подходе нам не приходится искусственно абстрагироваться от несущественных для

алгебры отношений $<$ и $>$ между величинами, так как элементы абстрактного числового поля вообще под них не подпадают. Вместо единого числового континуума анализа мы получаем бесконечное многообразие структурно различных полей. Введенные выше процессы, — во-первых, присоединение неопределенных величин и, во-вторых, отождествление элементов, сравнимых по модулю некоторого заданного простого элемента, — выступают теперь в качестве всеобщих способов конструирования, позволяющих из одних колец или полей порождать другие кольца или поля.

Элементарное аксиоматическое обоснование геометрии также приводит к такого рода абстрактному понятию числа. Например, если речь идет о проективной плоскости, то одни лишь *аксиомы инцидентности* приводят к соответствующему "числовому полю"; его элементы — "числа" — представляют собой сущности, определенные чисто геометрически: проективные координаты точки или преобразования растяжения. Каждая точка и каждая прямая выражается в виде отношения трех "чисел" этого поля $x_1 : x_2 : x_3$, соответственно $u_1 : u_2 : u_3$, таких, что отношение инцидентности представляется уравнением

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0.$$

Наоборот, если применить это алгебраическое выражение для *определения* геометрических терминов, то каждое абстрактное поле приводит к соответствующей проективной плоскости, удовлетворяющей аксиоме инцидентности. Из аксиом инцидентности нельзя извлечь каких-либо ограничений на числовое поле, соответствующее проективной плоскости. Здесь в грандиозной форме проявляется *предустановленная гармония между геометрией и алгеброй*. Лишь аксиомы совершенно иного рода — аксиомы порядка и непрерывности — приводят к такой конкретизации, что геометрическая система чисел, соответствующая проективной плоскости, может быть отождествлена с континуумом обычных действительных чисел. Тем самым мы как бы обращаем подход, который в течение столетий господствовал над нашей математической наукой, зародившись, по-видимому в Индии и благодаря арабам проникнув на Запад. А именно, если раньше понятие числа предпосылалось геометрии как логически предшествующее, и мы поэтому, располагая систематически разработанным универсальным понятием числа, не зависящим от применений, могли подходить с ним к величинам самого различного рода, то теперь мы возвращаемся к точке зрения древних греков, согласно которой *каждая область вещей влечет свою, на собственной основе определяемую числовую систему*. И это происходит не только в геометрии, но и в новой, *квантовой физике*: физические величины, относящиеся к некоторой данной физической структуре сами по себе (а не те числовые значения, которые они могут принимать при различных ее состояниях), допускают, согласно квантовой физике, сложение и некоммутативное умножение, тем самым образуя некоторый мир алгебраических величин, соответствующий этой структуре, мир, который нельзя рассматривать как фрагмент системы действительных чисел.

А теперь позвольте мне, как я и обещал, привести простой пример взаимодополняющего отношения топологического и абстрактно-алгебраи-

ческого подходов. Рассмотрим теорию алгебраических функций одной переменной x . Пусть $K(x)$ — поле рациональных функций аргумента x с произвольными комплексными числовыми коэффициентами; пусть $f(z)$, или, точнее, $f(z; x)$, — многочлен n -й степени от переменной z над $K(x)$. Мы уже говорили о том, в каком случае такой многочлен называется *неприводимым* над полем $K(x)$. Неприводимость — понятие чисто алгебраическое. Но построим для n -значной алгебраической функции $z(x)$, определяемой уравнением $f(z, x) = 0$, *риманову поверхность*, образующую n -листное накрытие x -плоскости. Поскольку x -плоскость необходимо пополнить бесконечно удаленной точкой, ее удобнее перевести с помощью стереографической поверхности в x -сферу; поэтому наша риманова поверхность сама станет замкнутой подобно сфере. Но неприводимость многочлена отражается опять-таки в весьма простом топологическом свойстве этой поверхности — в ее *связности*; если сделать из бумаги модель такой поверхности и хорошенько ее встряхнуть, то она не распадется на отдельные части. Здесь вы видите совпадение чисто алгебраического понятия с топологическим, хотя их обобщения следует искать в совершенно различных направлениях. *Алгебраическое* понятие неприводимости связано лишь с тем, что коэффициенты многочлена содержатся в поле K ; в частности, $K(x)$ можно заменить полем рациональных функций переменной x с числовыми коэффициентами из некоторого заданного числового поля k , причем k заменяет континуум всех комплексных чисел. В то же время для *топологии* безразлично то, что рассматриваемая поверхность является римановой, наделенной конформной структурой и образующей конечное накрытие x -плоскости. Каждый из двух антагонистов — топология и абстрактная алгебра — вправе упрекнуть другого, что тот не отбрасывает второстепенные и вместе с тем пренебрегает существенными чертами. Кто же прав, кто неправ? Вопросы такого рода — вопросы, которые касаются не фактов, а нашего взгляда на факты, если они затрагивают сферу человеческих страстей, — становятся причиной ненависти и кровопролития. В математике последствия их не столь серьезны. Тем не менее противоположность между топологической теорией алгебраических функций Римана и более алгебраической направленностью школы Вейерштрасса привели к расколу среди математиков на протяжении жизни почти целого поколения.

В письме к своему верному ученику Г.А. Шварцу сам Вейерштрасс писал: "Чем больше я раздумываю над принципами теории функций, — а делаю я это непрестанно — тем тверже становится мое убеждение в том, что их следует возводить на незыблемой основе алгебраических истин, и поэтому неверен противоположный путь, когда для обоснования более простых и фундаментальных алгебраических теорем используется то, что я для краткости назову "трансцендентными", — каким бы подкупающим ни казался на первый взгляд, например, подход, при помощи которого Риман открыл так много важнейших свойств алгебраических функций". Сейчас мы воспринимаем такой взгляд как односторонний: ни один из двух способов понимания — ни топологический, ни алгебраический — не имеет безусловного преимущества перед другим. И мы не можем

не бросить Вейерштрассу упрека в том, что он остановился на полпути. Ибо тогда, когда он строит *функции* в явном виде как алгебраические, он кладет в основу рассмотрения их коэффициентов континуум комплексных чисел, алгебраически не анализируемый и для алгебраиста в известном смысле необъяснимый. В проложенном Вейерштрассом направлении статус главенствующего учения обрела *теория абстрактного числового поля и его расширений с помощью алгебраических уравнений*. Теория алгебраических функций вместе с теорией алгебраических чисел опирается на общую аксиоматическую основу. В самом деле, Гильберт в своих работах по теории числовых полей руководствовался аналогиями, которые черпал из фактов, относящихся к царству алгебраических функций, — фактов, открытых Риманом с помощью его топологического подхода (разумеется, аналогия не помогает при доказательствах).

Наш пример соответствия "неприводимый — связный" типичен еще в одном отношении. Сколь нагляден, прост и легок для понимания топологический критерий (потряси бумажную модель и посмотри, распадется ли она на части) по сравнению с алгебраическим! Наглядная первичность континуума (по моему убеждению, континуум в этом отношении предшествует даже единице и целым числам) ⁴ делает топологический подход пригодным как для *открытий*, так и для *общего обзора* положения дел в соответствующей области математики. Но тем труднее *строгое обоснование*. Ибо в той же мере, в какой континуум доступен для наглядного представления, он чужд логике и сопротивляется ей. Именно эта причина побудила Вейерштрасса, М. Нётера и др. отдать предпочтение не трансцендентно-топологическому обоснованию Римана, а трудоемкому, но представлявшемуся им более надежным методу прямого алгебраического построения. Но теперь абстрактная алгебра постепенно разделяется с громоздким вычислительным аппаратом. Общность исходных предположений и аксиоматизация побудили покинуть путь вычислений, производимых вслепую, и разложить сложные комплексы фактов на простые части, охватываемые несложными умозаключениями. Алгебра оказалась подлинным Эльдорáдо аксиоматики.

Чтобы нарисованная мной картина обрела несколько большую определенность, я хотел бы добавить несколько слов о методе топологии. Если требуется подвергнуть математическому исследованию какой-нибудь континуум, например, двумерное замкнутое многообразие — поверхность, то его надо мысленно разделить на конечное число "элементарных кусков" (Elementarstücke), обладающих топологическими свойствами круга. Эти куски в свою очередь подвергаются разбиению на более мелкие элементарные части, и этот процесс разбиения по жесткой схеме повторяется снова и снова, так что отдельный элемент (Stelle) континуума со все возрастающей точностью "ловится" бесконечной последовательностью возникающих при этих разбиениях кусков, вложенных один в другой ⁵. В одномерном случае неограниченно повторяющееся "нормальное разбиение" элементарного отрезка сводится к разделению его на *две части*; в двумерном случае на две части делится сначала каждое ребро, а затем каждый кусок поверхности разбивается на треугольники линиями, соединяющими произ-

вольно выбранный внутри куска центр с вершинами (старыми и новыми). Элементарность куска и означает, что, неограниченно повторяя процесс разбиения, этот кусок можно разложить на сколь угодно малые куски. Схему первоначального разбиения на элементарные куски, называемую в дальнейшем просто *остовом*, удобнее всего описывать, обозначая возникшие при разбиении куски поверхности, ребра и вершины *символами* и указывая с их помощью, каким образом эти элементы примыкают друг к другу. Посредством дальнейших разбиений многообразие оказывается как бы затянутым все более плотной сетью координат, что позволяет мыслить отдельную его точку обозначенной бесконечной последовательностью символов, наподобие цифровой записи чисел. Обычные *действительные числа* возникают здесь как частный случай в виде двоичных дробей при описании разбиения *открытого одномерного континуума*. Но тогда каждый континуум, так сказать, приносит свою собственную арифметическую схему; введение числовых координат на ее основе относится к определенной схеме разбиения открытого одномерного континуума и представляет собой акт насилия, не связанный с существом дела; единственным практическим его оправданием служат особые, чисто вычислительные удобства обращения с числовым континуумом и его четырьмя арифметическими действиями. Разумеется, разбиения любого *реального* (*wirklichen*) *континуума* каждый раз можно производить лишь с известной *неточностью* (*Unschärfe*); надо представить себе, что границы, установленные при первом разбиении, становятся по мере перехода от одной ступени процесса к следующей все более четкими, виртуально бесконечный процесс разбиения реального континуума всегда неизбежно обрывается на некоторой ступени. Но в отличие от конкретной реализации — локализации в реальном континууме — *комбинаторная схема*, арифметическая пустая форма, а priori определена до бесконечности, а только с ней и имеет дело математика. Поскольку продолжающееся разбиение первоначального топологического остова производится по раз и навсегда установленной жесткой схеме, все топологические свойства возникающего таким образом многообразия должны быть запечатлены уже в остове; поэтому должно быть принципиально возможным развить топологию как конечную комбинаторику⁶. Неделимыми элементами, или атомами, такой комбинаторики служат в некотором смысле элементарные куски остова, а отнюдь не точки непрерывного многообразия. В частности, для двух остовов необходимо иметь возможность определять, приводят ли они к совпадающим многообразиям или, иначе говоря, допустимо ли рассматривать их как разбиения одного и того же многообразия⁷.

Алгебраической антитезой перехода от уравнения $f(z, x) = 0$ к римановой поверхности служит переход от того же уравнения к полю, задаваемому алгебраической функцией $z(x)$, ибо на риманову поверхность однозначно распространяется не только функция $z(x)$, но и все алгебраические функции этого поля. Для теории функций Римана характерна обратная постановка вопроса: *по заданной римановой поверхности требуется построить поле алгебраических функций*. Эта задача всегда имеет одно, и только одно, решение. Риманова поверхность в том виде, как мы ее до сих

пор рассматривали, вложена⁸ в x -плоскость, так как каждая точка p этой поверхности лежит над вполне определенной точкой x -плоскости. Следующий шаг состоит в абстрагировании от отношения вложения $p \rightarrow x$; риманова поверхность тем самым превращается, так сказать, *в свободно парящую поверхность, наделенную конформной структурой и угловой мерой*. В обычной теории поверхностей мы также должны привыкнуть к тому, чтобы поверхность сначала рассматривать как некое сплошное образование, состоящее из элементов особого рода — *точек поверхности*, и ограничивать от него такое *вложение* в трехмерное пространство, при котором каждой точке p поверхности непрерывным образом ставится в соответствие точка P пространства как то место, где находится p . Случай римановой поверхности отличается лишь тем, что риманова поверхность вкладывается⁹ в плоское пространство *не большего*, а *того же* числа измерений, что и она сама. Абстрагирование от вложения соответствует алгебраической стороне инвариантности относительно произвольных бирациональных преобразований. К топологии же мы придем лишь после отвлечения и от конформной структуры свободно парящей римановой поверхности. Эта конформная структура, если продолжить сравнение, стоит в одном ряду с *метрической структурой*, которой наделена обычная поверхность и которая в теории поверхности задается первой основной формой, или с аффинной и проективной структурой, которыми наделены поверхности в аффинной и соответственно проективной геометрии "в малом". В *континууме действительных чисел* структурным моментом являются алгебраические операции $+$ и $\times$, в непрерывной *группе* эту роль выполняет закон композиции, согласно которому по любым двум элементам группы строится некий элемент той же группы.

Может быть, теперь мы немного лучше понимаем отношение между двумя методами. Какой из них взять в качестве исходного, это просто вопрос о порядке рассмотрения. В топологии начинают с *непрерывной связи* как самого изначального и лишь постепенно, в ходе спецификации, вводят те или иные *структурные моменты*; в алгебре же, наоборот, исходным пунктом математического мышления выступают *операции*, а *непрерывность* (или некий ее алгебраический суррогат) вводится лишь на заключительном этапе спецификации. Два эти метода противоположны по направлению мысли, и поэтому неудивительно, что они плохо совместимы¹⁰. То, что легче легкого достигается при одном подходе, требует величайших усилий при другом. Особенно отчетливо я ощутил, как трудно быть слугой этих двух господ, в последние годы, когда занялся теорией представлений непрерывных групп линейными подстановками. Классические теории, такие, как теория алгебраических функций, могут рассматриваться с обеих позиций, но при этом получают совершенно различный вид.

После всех этих общих замечаний я попытаюсь показать вам на одном простом примере отличительные особенности формирования понятий в топологии и в абстрактной алгебре. Классическим примером плодотворности топологического метода служит *риманова теория алгебраических функций* и их интегралов. Если риманову поверхность рассмат-

ривать только как топологическую, то она обладает лишь одной характеристикой — *коэффициентом связности*, или *родом*, p . Например, для сферы $p = 0$, а для тора $p = 1$. О том, сколь разумно предпосылать теории функций топологические понятия, можно судить хотя бы по тому, что топологическая характеристика — род поверхности p — играет решающую роль в теории функций на римановых поверхностях. Назову лишь несколько замечательных теорем. Число линейно независимых всюду регулярных дифференциалов на поверхности равно p . Общий порядок (т.е. разность между числом нулей и числом полюсов) для дифференциала на поверхности равен $2p - 2$. Если на поверхности произвольным образом заданы более чем p точек, то на ней всегда существует отличная от константы однозначная функция, которая самое большее имеет в этих точках полюсы первого порядка, а в остальном регулярна. Если же число полюсов равно p , то такое, вообще говоря, не имеет места. Точный ответ на этот вопрос дает теорема Римана — Роха, в которой в качестве характеристики римановой поверхности используется не что иное, как число p . Если мы рассмотрим все функции на поверхности, регулярные всюду за исключением одной точки p , где они имеют полюс, то порядок полюса может быть любым числом за исключением некоторых p показателей (теорема Вейерштрасса о пробелах) ¹¹.

Число примеров можно было бы без труда умножить. На понятии рода поверхности как на закваске поднялась вся теория функций на римановых поверхностях. Род поверхности p встречается в этой теории буквально на каждом шагу, и роль его становится понятной сразу, без сложных вычислений, если принять во внимание, что такое p с точки зрения топологии (и раз и навсегда принять в качестве основополагающего теоретико-функционального принципа принцип Томсона — Дирихле).

Первым поводом для введения топологии в теорию функций послужила *интегральная теорема Коши*. Утверждение о том, что интеграл от аналитической функции по любому замкнутому пути равен нулю, справедливо лишь при условии, что область, в которой функция определена и проходит путь интегрирования, *односвязна*. На этом примере я хочу проиллюстрировать, как происходит "топологизация" теоретико-функциональных фактов. При заданной аналитической функции $f(z)$ интеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ ставит в соответствие каждой кривой γ число $F(\gamma)$, причем

$$F(\gamma_1 + \gamma_2) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2), \quad (**)$$

где сумма $\gamma_1 + \gamma_2$ означает кривую, получающуюся при присоединении γ_2 к γ_1 ; для этого требуется, чтобы конечная точка кривой γ_1 совпала с начальной точкой кривой γ_2 . Функциональное уравнение (**) задает интеграл $F(\gamma)$ как аддитивную функцию пути интегрирования. Кроме того, у каждой точки имеется окрестность, такая, что для любой замкнутой кривой γ , целиком лежащей в этой окрестности, всегда $F(\gamma) = 0$. Функцию пути, обладающую такими свойствами, я буду называть *топологическим интегралом* или, для краткости, просто *интегралом*. На самом деле это понятие предполагает лишь, что задано непрерывное много-

образе, на котором кривые можно стягивать в точку; в этом топологическая сущность аналитического понятия интеграла. Интегралы можно *складывать и умножать на числа*. Топологическая часть интегральной теоремы Коши утверждает, что на любом *односвязном* многообразии всякий интеграл (не только в малом, но и в большом) гомологичен нулю, т.е. равенство $F(\gamma) = 0$ выполняется для любой замкнутой кривой γ на таком многообразии. В этом нетрудно усмотреть прямо-таки *определение* "односвязности". Теоретико-функциональная часть интегральной теоремы Коши утверждает, что интеграл от аналитической функции является "топологическим интегралом" в нашем определении. Здесь мы с необходимостью приходим к *определению порядка связности*. Интегралы $F_1, F_2, \dots, F_n$ по кривым на замкнутой поверхности называются линейно независимыми, если любая их линейная комбинация

$$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_n F_n$$

с постоянными коэффициентами c_i не гомологична нулю, кроме тривиальной линейной комбинации с коэффициентами c_i . Максимальное число линейно независимых интегралов называется порядком связности поверхности. Для замкнутой двусторонней поверхности порядок связности h всегда есть четное число $2p$, где p — род поверхности. От гомологии между интегралами можно перейти к гомологиям между замкнутыми путями. Гомологичность нулю пути

$$n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2 + \dots + n_r \gamma_r$$

означает, что для любого интеграла F выполняется равенство

$$n_1 F(\gamma_1) + n_2 F(\gamma_2) + \dots + n_r F(\gamma_r) = 0.$$

Если вернуться к топологическому остову, разбивающему поверхность на элементарные куски, и заменить непрерывные точечные цепочки путей дискретными цепями, образованными из элементарных кусков, то мы получим порядок связности h , выраженный через число кусков s , ребер k и вершин e остова с помощью хорошо известной формулы Эйлера для многогранников: $h = k - (e + s) + 2$. Наоборот, если начать с топологического остова, то ход рассуждений приведет нас к выводу, что эта комбинация h числа элементарных кусков s , ребер k и вершин e является *топологическим инвариантом*, т.е. принимает одно и то же значение на всех "эквивалентных" остовах, которые представляют собой различные разбиения одного и того же многообразия.

В приложениях к теории функций *принцип Томсона — Дирихле позволяет "реализовать" топологический интеграл в виде "настоящего" интеграла* от всюду регулярных аналитических дифференциалов на римановой поверхности. Ситуацию можно представить себе следующим образом. Вся конструктивная работа выполняется топологией, после чего с помощью универсальной процедуры переноса, а именно принципа Дирихле, топологические результаты обретают теоретико-функциональное воплощение — все происходит почти так же, как в аналитической геометрии, где вся конструктивная работа происходит в числовой области, а

затем с помощью переноса, принцип которого заложен в понятии координат, полученные результаты "реализуются" геометрически.

Еще большее совершенство обнаруживает подобный метод в теории *униформизации*, играющей главную роль во всей теории функций. Однако я хотел бы указать здесь на другое его применение, которое, на верное, более близко многим из вас. Я имею в виду *исчислительную геометрию*, занимающуюся определением числа точек пересечения, особых точек и других замечательных алгебраических объектов (*Gebilde*); Шуберт и Цейтен превратили ее в общую, но недостаточно обоснованную систему. Топология в руках Лефшеца и ван дер Вардена одержала решающую победу, установив применимые во всех случаях определения кратности и законы, также не имеющие исключений^{1 2}.

В точке пересечения двух кривых на двусторонней поверхности одна кривая пересекает другую либо слева направо, либо справа налево. В зависимости от этого точке пересечения надлежит приписать либо вес $+1$, либо вес -1 ; тогда полное число пересечений (которое может быть как положительным, так и отрицательным) инвариантно относительно любых непрерывных деформаций кривых; не изменяется оно и при замене кривых гомологичными им кривыми. Поэтому полное число пересечений может быть найдено конечными комбинаторными средствами топологии, и мы получаем легко обозримые и общие формулы. Две алгебраические кривые на комплексной плоскости — это на самом деле две замкнутые римановы поверхности, вкладываемые с помощью некоторого аналитического отображения в некоторое четырехмерное действительное пространство. Но в алгебраической геометрии каждая точка пересечения имеет *положительную* кратность, в то время как в топологии учитывается, что кривые могут пересекаться в различных направлениях. Удивительно, что задача о подсчете числа точек пересечения, алгебраическая по своей постановке, решается описанными средствами топологии. Объясняется это тем, что на аналитических многообразиях кривые всегда пересекаются только в одном направлении^{1 3}. Если две кривые на x_1, x_2 -плоскости представлены в окрестности точки пересечения уравнениями $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$ и соответственно $x_1 = x_1^*(t)$, $x_2 = x_2^*(t)$, то направление, в котором первая кривая пересекает вторую ("вес" точки пересечения равен ± 1), определяется знаком функционального определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_1^*}{dt} & \frac{dx_2^*}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, t)}$$

в точке пересечения. Но для комплексных алгебраических "кривых" этот критерий всегда приводит к весу $+1$. В самом деле, пусть z_1, z_2 — комплексные координаты на плоскости, а s и t — комплексные

параметры на двух "кривых". Действительными координатами на "плоскости" служат действительные и мнимые части координат z_1, z_2 , или, вместо них, $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$. Поэтому определитель, знак которого задает направление пересечения кривых, всегда положителен:

$$\frac{\partial(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\partial(s, \bar{s}, t, \bar{t})} = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s, t)} \cdot \frac{\partial(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\partial(\bar{s}, \bar{t})} = \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(s, t)} \right|^2.$$

Принадлежащую Гурвицу теорию соответствий между алгебраическими кривыми также без особого труда удастся свести к чисто топологическому подходу.

Рассматривая вопрос со стороны абстрактной алгебры, я ограничусь тем, что обращаю внимание на одно фундаментальное понятие — идеал. При алгебраическом подходе алгебраическое многообразие в трехмерном пространстве с комплексными декартовыми координатами x, y, z задается системой многих уравнений

$$f_1(x, y, z) = 0, \dots, f_n(x, y, z) = 0.$$

Функции f — многочлены. Если речь идет об одной кривой, то отнюдь не утверждается, будто достаточно двух уравнений. Но в точках многообразия обращаются в нуль не только многочлены f_i , но и любой многочлен f вида

$$f = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \dots + A_n f_n \quad (A_i \text{ — многочлены}). \quad (***)$$

Все многочлены f данного вида образуют в кольце многочленов некоторый "идеал". В общем случае, следуя Дедекинду, под идеалом в данном кольце понимают какую-то систему элементов кольца, за которую нельзя выйти 1) ни путем операций сложения и вычитания, производимых над двумя элементами идеала, 2) ни путем умножения какого-нибудь элемента идеала на произвольный элемент кольца. Это понятие близко к тому, что мы хотим получить. По теореме Гильберта о базисе каждый идеал в кольце многочленов обладает конечным базисом: среди многочленов, образующих идеал, можно выбрать конечное число многочленов $f_1, f_2, \dots, f_n$, таких, что любой многочлен из идеала можно представить в виде (***). По этой причине изучение алгебраических многообразий может быть заменено изучением идеалов¹⁴. Если речь идет об алгебраической поверхности, то на ней имеются точки и алгебраические кривые. Им соответствуют идеалы, являющиеся делителями данного идеала. В фундаментальной теореме М. Нётера речь идет о таких идеалах, многообразие нулей которых состоит лишь из конечного числа точек; теорема ставит принадлежность произвольного многочлена данному идеалу в зависимости от его поведения в данных точках. Это непосредственно следует из разложения идеала на простые идеалы. Понятие идеала, впервые введенное Дедекиндом в теории алгебраических числовых полей, как стало ясно из исследований Э. Нётер, проходит красной нитью через всю алгебру и арифметику. Ван дер Варден также сумел обосновать

исчислительную геометрию с помощью вспомогательных алгебраических средств теории идеалов.

Если оперировать не с континуумом комплексных чисел, а с произвольным абстрактным числовым полем, то в общем случае перестает выполняться так называемая *основная теорема алгебры*, согласно которой каждый многочлен от одной переменной может быть разложен на линейные множители. Если она выполняется, то соответствующее поле называется *алгебраически замкнутым*. Поэтому правило, которого надлежит придерживаться, работая в области алгебры, гласит: постоянно следи за тем, используется ли при доказательстве основная теорема алгебры или нет. В каждой алгебраической теории имеется более элементарная часть, которая не зависит от этого предположения и имеет силу для любого поля, и более высокая часть, для которой основная теорема алгебры необходима и которая поэтому требует алгебраической замкнутости данного поля. Основная теорема алгебры по большей части знаменует собой наиболее важный шаг; от него надлежит воздерживаться как можно дольше! Для получения теорем о произвольном поле существует часто используемый прием вложения его в некое объемлющее поле. В частности, для каждого поля можно построить содержащее его алгебраически замкнутое расширение. Хорошо известным примером может служить доказательство того, что любой многочлен над полем действительных чисел всегда допускает разложение на линейные и квадратичные множители. К этому мы приходим, присоединяя к полю действительных чисел мнимую единицу i и вкладывая его тем самым в алгебраически замкнутое поле комплексных чисел. Эта процедура имеет свой аналог в топологии, где при изучении и характеристизации многообразий, например какой-нибудь поверхности, привлекают к рассмотрению накрывающие ее поверхности.

В центре современных интересов находится *некоммутативная алгебра*, в которой отвергается закон коммутативности умножения. К этому вынуждают совершенно конкретные потребности математики. В самом деле, композиция $\langle \text{Zusammensetzung} \rangle$ операций есть своего рода умножение, но для нее не действует закон коммутативности. Приведу лишь один пример. Посмотрите на функции многих аргументов $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с точки зрения их свойств симметрии. Аргументы функции можно подвергать произвольной *перестановке* s . Некоторое свойство симметрии выражается одним или несколькими равенствами вида

$$\sum_s a(s) \cdot sf = 0,$$

где $a(s)$ — числовые коэффициенты, соответствующие перестановкам и принадлежащие заданному числовому полю K . Здесь $\sum a(s) \cdot s$ — некоторый "оператор симметрии". Такого рода операторы можно складывать и умножать на числа; их можно перемножать, т.е. выполнять один за другим; однако результат такого перемножения зависит от порядка "сомножителей". Поскольку для сложения и умножения выполняются все формальные законы вычисления, кроме закона коммутативности умножения,

ножения, операторы симметрии образуют "некоммутативное кольцо" (гиперкомплексную систему). Оказывается, что и в некоммутативной области понятие идеала занимает господствующее положение. Не столь давно теория некоммутативных колец почти полностью поглотила *теорию групп и их представлений линейными подстановками*. Наш пример показывает, каким образом группу из $n!$ перестановок s , в которой возможна только операция умножения элементов, можно расширить до соответствующего кольца величин $\Sigma a(s) \cdot s$, которые можно не только перемножать, но и складывать, а также умножать на числа. Мощным стимулом развития некоммутативной алгебры стала *квантовая физика*.

К сожалению, искусство построения абстрактно-алгебраической теории невозможно продемонстрировать на наглядных примерах. Оно состоит 1) в разработке общих понятий, таких, как поле, идеал и т.д., 2) в разложении доказываемого утверждения "Из A следует B ", $A \rightarrow B$, на отдельные шаги, $A \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow B$ и т.д., и в правильном обобщении этих частных утверждений с помощью общих понятий. После того как это разделение целого на части и отгораживание от несущественного сделано, доказательство правильности отдельных шагов, как правило, не представляет каких-либо серьезных трудностей.

Там, где удалось применить топологические методы, они и поныне сохраняют решающее значение. Таких успехов, какие принесли топологические методы в руках Римана, абстрактная алгебра до сих пор не показала. Вершины униформизации, покоренные Клейном, Пуанкаре и Кёбе топологическими средствами, до сих пор остаются недостижимыми для алгебраических методов¹⁵. Решение этих вопросов — дело будущего. Тем не менее я не могу умолчать о том, что ныне среди математиков все шире распространяется ощущение того, что плодотворность методов, основанных на абстрагировании, близка к исчерпанию. В самом деле, все эти прекрасные общие понятия не падают с неба. Все начинается с определенных конкретных проблем во всей их неприступной сложности, которые решаются отдельными исследователями, так сказать, путем применения грубой силы. Только потом приходят специалисты по аксиоматике и констатируют: вместо того чтобы, напрягая все силы и сбивая руки в кровь, ломиться в дверь, можно изготовить так-то и так-то искусно устроенный ключик, который позволит открыть ее без особого труда и лишнего шума. Но изготовить такой ключик можно лишь потому, что после удачного взлома замок можно изучить вдоль и поперек. Обобщение, формализация и аксиоматизация требуют существования некоторого математического содержания (Substanz). И я думаю, что математическое содержание, формализацией которого мы занимались в последние десятилетия, постепенно близится к исчерпанию. Поэтому я предвижу, что грядущему поколению математиков придется довольствоваться туго¹⁶.

Цель моего доклада состояла лишь в том, чтобы передать ту атмосферу мыслительной деятельности, в которой ныне протекает значительная часть исследовательской работы в области математики. Для тех же, кто хотел бы глубже проникнуть в существо дела, будет уместно привести

несколько ссылок на литературу¹⁷. Инициаторами создания абстрактной аксиоматизированной алгебры являются Дедекин и Кронекер. В наши дни это направление получило существенное развитие в работах Штейница, Э. Нётер и ее кружка, а также Э. Артина. В топологии после того, как в середине XIX столетия риманова теория функций послужила мощным стимулом к ее развитию, последние достижения связаны прежде всего с некоторыми работами А. Пуанкаре (1895–1904 гг.). Из книг я назову следующие.

1. По алгебре: *Steinitz. Algebraische Theorie der Körper*, первоначально вышедшая в журнале Крелля за 1910 г., а затем изданная Р. Басром и Г. Хассе в издательстве В. де Грюйтера (1930 г.).

Hasse H. Höhere Algebra I, II. — Sammlung Götschen, 1926/27.

Van der Waerden B. Moderne Algebra I, II. — Springer 1930/31¹⁸.

2. По топологии: *Weyl H. Die Idee der Riemannschen Fläche. — 2. Aufl. — Teubner, 1923.*

Veblen O. Analysis situs. — 2. Aufl. — N.Y.: American Mathematical Society, 1931.

Lefschetz S. Topologie. — N.Y.: American Mathematical Society, 1930.

Готовится к выходу книга по топологии на немецком языке Хопфа и Александрова¹⁹.

3. Из "Лекций о развитии математики в XIX столетии" Клейна, которая цитировалась выше, укажу только первый том (*Springer, 1926*)¹⁹.

ПОЗНАНИЕ И ОСМЫСЛЕНИЕ (ВОСПОМИНАНИЕ О ПЕРЕЖИТОМ)*)

Лозаннский университет оказал мне высокую честь, удостоив премии имени Арнольда Реймона, учрежденной фондом Шарля-Эжена Ги, за что я хотел бы выразить свою глубокую признательность университету и его ректору профессору Бриделю, а также всем коллегам, участвовавшим в принятии решения о присуждении мне премии. Обязанности, которые удерживали меня в первые четыре месяца этого года в Америке — в самом прекрасном для проведения математических исследований месте в мире, в Принстонском институте высших исследований (штат Нью-Джерси) — не позволили мне предстать перед вами.

Поскольку речь идет о признании моих трудов в области философии науки, я хотел бы воспользоваться представившимся случаем, чтобы, оглядываясь на свою жизнь, обрисовать ту роль, которую сыграли в ней — наряду с научно-познавательной деятельностью — философское осмысление (*Besinnung*). Хотя в центре моих интересов, если не считать отдельных экскурсов в теоретическую физику, находились математические исследования, я всегда стремился осознать их смысл и цель. Однажды, выступая с докладом "Ступени бесконечного", я в ходе дискуссии о конструктивной математике и рефлектирующей (*reflektive*) метаматематике охарактеризовал взаимоотношение между ними следующим образом: "В духовной жизни человека отчетливо различаются, с одной стороны, сфера действия (*Hand-*

*) Доклад, прочитанный в Лозаннском университете в мае 1954 г.

deln), созидания форм, конструирования, — это сфера, которой посвятили себя активно работающие художники, ученые, инженеры, государственные деятели и которая подчинена императиву объективности, — и сфера *осмысления* (*Besinnung*), с другой стороны; эта сфера реализуется в понимании (*in Einsichten*) и на нее следует смотреть как на борьбу за *смысл* (*Sinn*) наших действий как собственную сферу философа. Творческому деянию, не контролируемому осмыслением, грозит опасность утраты смысла — она может сбиться с пути и, окостенев, превратиться в рутину, но и осмысление подстерегает опасность — выродиться в подрывающие творческие силы человека "рассуждения по поводу", которые никого ни к чему не обязывают.

Поскольку я вознамерился рассказать вам о том месте, которую в моей жизни занимали философские побуждения, я должен прежде всего принести свои извинения за то, что не могу говорить на языке, которым большинство из вас свободно владеет. За 20 лет, в течение которых мне по воле судьбы приходится наряду с родным немецким говорить по-английски, я настолько отвык от французского, что вынужден был отказаться от мысли говорить здесь на этом языке. Поскольку я буду следовать хронологической последовательности своего философского развития, я поневоле вынужден затронуть по порядку такие важные темы, как "пространство и время", "вещный мир", "Я и человек", "Бог".

Я никогда не забуду, как еще в бытность гимназистом предпоследнего класса мне удалось раскопать в родительском доме потрепанный экземпляр изданных в 1790 г. кратких комментариев к "Критике чистого разума" Канта. По ним я познакомился с кантовским учением об *идеальности пространства и времени*, и оно произвело на меня неизгладимое впечатление: одним толчком я был пробужден от "догматического сна", в моем юношеском сознании мир был решительно поставлен под сомнение. Стоит ли воспроизводить здесь квинтэссенцию учения Канта? Кант понял, что пространство и время не есть нечто присущее миру, существующее в "вещах самих по себе", независимо от сознания, — это *формы сознания*, коренящиеся в нашем духе. Как таковые, Кант противопоставил их основному гилетическому¹ слою восприятия, ощущениям. Цитирую: "Так как то, единственно в чем ощущения могут быть упорядочены и приведены в известную форму, само в свою очередь не может быть ощущением, то, хотя материя дана нам только а posteriori, форма их целиком должна для них находиться готовой в нашей душе а priori и потому может рассматриваться отдельно от всякого ощущения"². Или, как говорит на своем энергичном, всегда несколько приподнятом языке Фихте, "зримое, осязаемое и всепроникающее пространство, чистейший образ моего знания, надлежит не рассматривать, а созерцать, и в нем мое видение — само созерцание. Свет не вне меня, а во мне". Это учение, как мне кажется, единым ударом объясняет один почти общепринятый факт: то, что основные данные геометрии для нас непосредственно очевидны и не требуют проверки на опыте. Кант проводит различие между *аналитическими* суждениями, которые выражают лишь то, что содержится в понятиях (например, "Круглая вещь кругла", "Если Сократ есть человек и все люди смерт-

ны, то Сократ смертен”), и *синтетическими* суждениями, примером которых является закон всемирного тяготения Ньютона. В том, что аналитические суждения *a priori*, независимо от опыта, верны (*gewiss sind*), нет ничего удивительного. Однако, в соответствии с только что сказанным, предложения геометрии служат примером синтетических суждений, которые, несмотря на их синтетический характер, верны *a priori*, не основаны на опыте и обладают необходимостью, которую невозможно поколебать никаким опытом. Центральный вопрос, который поставил Кант, гласил: “Как возможны априорные синтетические суждения?”, и ответ на него, коль скоро дело шло о предложениях геометрии, давали взгляды Канта на природу пространства.

Эту часть учения Канта я усвоил без особого труда, но даже в 1904 г., когда я был уже в Геттингенском университете, одолеть “Схематизм чистых рассудочных понятий” стоило мне немалых усилий. В Гёттингене преподавал Давид Гильберт, который незадолго до того опубликовал свой эпохальный труд “Основания геометрии”. Со страниц этого труда на меня повеяло духом современной аксиоматики. Аксиомы геометрии были представлены здесь Гильбертом с такой полнотой, которая далеко превосходила Евклида. С целью исследования логической взаимозависимости аксиом была не только рассмотрена так называемая неевклидова геометрия, которой к тому времени исполнилось почти сто лет, но и построено — главным образом на арифметической основе — множество геометрий совершенно иного рода. Ориентация Канта на евклидову геометрию теперь выглядела наивно. Это был сокрушительный удар, и здание кантовской философии, на которую я уповал всей душой, в моих глазах было разрушено.

Здесь я прерву свой рассказ, чтобы кратко обрисовать тот взгляд на проблему пространства, который мне теперь представляется убедительным. Во-первых, специальная теория относительности сплавила пространство и время во Вселенной в единый четырехмерный континуум. Во-вторых, выяснилось, что весьма важно проводить различие между аморфным континуумом, изучением которого в наши дни занимается специальный раздел математики — топология, и структурой континуума, в частности метрической. На физическую геометрию, опирающуюся на физически проверяемое понятие конгруэнтности, еще Ньютон смотрел как на часть механики, основанной на опыте. Он говорит: “Геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения”³. Гельмгольц показал: две части учения Канта, что (1) пространство есть чистая форма созерцания и что (2) наука о пространстве (евклидова геометрия) справедлива *a priori* — связаны между собой не столь тесно, чтобы вторая часть следовала из первой. Гельмгольц был готов принять первую часть как правильно отражающую положение вещей, но, считал он, отсюда нельзя извлечь ничего *сверх* того, что все вещи внешнего мира с необходимостью должны обладать пространственной протяженностью. Следуя Ньютону и Риману, он затем показывает эмпирико-физический смысл геометрии. Замечание Римана о том, что “эмпирические понятия, на которых основыв-

вается установление пространственных метрических соотношений, — понятия твердого тела и светового луча, — по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом”⁴, впоследствии заставило призадуматься физиков, занимавшихся разработкой квантовой теории. С другой стороны, дифференциальная геометрия многообразий произвольного числа измерений, начало которой было положено Риманом, в общей теории относительности Эйнштейна гораздо убедительнее, чем у Римана, показала, что метроопределение, господствующее в реальном четырехмерном мире, не есть некая заранее данная, неизменная сущность — оно подвержено действию физических процессов и само оказывает на них влияние: текучесть метрического поля находит отражение в явлениях гравитации.

Если наряду с физическим пространством принять некое пространство созерцания, утверждая, что его метрическая структура по самой своей сути удовлетворяет евклидовым законам, то это не приводит с необходимостью к противоречию с нашими физическими знаниями, поскольку эта структура связана с евклидовыми свойствами — грубо говоря, с тем, что выполняется теорема Пифагора, — в бесконечно малой окрестности точки O (в которой в данный момент нахожусь я). Но в таком случае надо признать, что связь между пространством созерцания и физическим пространством становится все более зыбкой по мере удаления от "я-центра" (*Ich-Zentrum*) O . Пространство созерцания можно сравнить с плоскостью, касательной в точке O к физическому пространству как искривленной поверхности: в непосредственной окрестности точки O оба пространства совпадают, но чем больше мы от нее удаляемся, тем произвольнее становится продолжение этого отношения накрытия до взаимно однозначного соответствия между плоскостью и поверхностью.

В физическом мире, как я уже говорил, пространство и время, если можно так выразиться, сплавлены в единый четырехмерный континуум. В подтверждение тезиса Лейбница о том, что разделение прошлого и будущего основано на каузальной структуре четырехмерного мира, теория относительности привела к отличному от традиционного описанию этой структуры, согласно которому одновременность — подобно "одноместности" событий — утратила объективный смысл. В четырехмерном мире мое тело, если рассматривать его как точку, описывает одномерную мировую линию, вдоль которой можно ввести физическое собственное время. На этой линии существует естественное упорядочение, задаваемое словами "прошлое", "настоящее", "будущее". Феноменальное время, присущее актам сознания моего "Я" в качестве их всеобщей формы, нельзя сопоставлять с временной координатой четырехмерного континуума мира; его физическим аналогом служит это самое упомянутое собственное время, присущее мировой линии моего тела.

В рамках общей теории относительности реальное пространство также допускает имеющее некоторый объективный смысл противопоставление априорных и апостериорных моментов — противопоставление, не связанное с кантовским различием источников и видов познания. Одной заданной абсолютно евклидово-пифагорейской *природе* метрики, не имеющей отношения к неустранимой неопределенности того, что занимает перемен-

ное место на некоторой непрерывной шкале, противостоит взаимная *ориентация* метрик в различных точках — случайное, зависящее от материи, переменное количественное распределение метрического поля, которое может быть дано лишь приближенно и с помощью непосредственных указаний на действительность. Однажды я предпринял попытку объяснить специфически пифагорейскую природу метрики во всем ее математическом своеобразии, как раз исходя из этого разделения. С аналогичной задачей мы сталкиваемся, когда пытаемся понять, почему мир именно *четырёхмерен*, а не обладает каким-нибудь другим числом измерений. А именно, следует иметь в виду, что все известные до сих пор физические законы (и отвечающие им законы геометрии) полностью и с необходимостью переносятся на любое число измерений: в них не заложено ничего такого, что как-то выделяло бы четыре измерения. Но математика — особенно это касается теории групп — знакомит нас с такими образованиями, структура которых совершенно различна и зависит от числа измерений. Ясно, что физика с ее известными нам законами еще не достигла такой глубины, чтобы возникла необходимость в такого рода математике. Поэтому пока мы не располагаем по-настоящему убедительным ответом на вопрос, почему наш мир *четырёхмерен*; я также вынужден оставить нерешенным вопрос о том, верна ли моя попытка объяснить пифагорейскую природу метрического поля.

Но довольно о пространстве и времени. Продолжу свой рассказ. После того, как соприкосновение с современной математикой обратило в прах мою веру в Канта, я с особым рвением принялся изучать математiku. Мой неугасший интерес к проблемам теории познания удовлетворяли такие работы, как "Наука и гипотезы" Анри Пуанкаре, труды Эрнста Маха и известная "История материализма" Фридриха Альберта Ланге⁵.

Следующим поворотным событием в моей жизни стало совершенное мной значительное математическое открытие. Оно относится к закону распределения собственных частот колебаний непрерывно протяженной среды — мембраны, упругого тела или электромагнитного эфира. Идея была из числа тех, которые приходят в голову всякому, кто в юности занимался наукой; однако идея эта в отличие от большинства других не лопнула, подобно мыльному пузырю, а, как показала короткая проверка, вела к цели. Я сам был крайне удивлен, так как не ожидал от себя ничего подобного. К тому же, хотя этот результат был давно предугадан физиками, большинство математиков считало его доказательство делом далекого будущего. Пока я лихорадочно проводил доказательство, моя керосиновая лампа начала коптить, и к тому моменту, когда мне удалось благополучно довести все до конца, бумага, руки и лицо покрылись хлопьями сажи.

Готфриду Келшеру достало чистосердечия признать, что его вера в бессмертие была поколеблена любовью к женщине — Иоганне Капп. Ее отец был близок к философу-материалисту Людвигу Фейербаху, и она выросла под влиянием его мировоззрения. Нечто аналогичное приключилось и со мной: моя приверженность позитивизму была потрясена, когда я влюбился в юную певицу, считавшую религиозные убеждения основой жизни

и принадлежавшую к кругу, в котором властителем дум был некий известный гегельянец. Отчасти из-за моей человеческой незрелости, отчасти из-за трудно преодолимой противоположности взглядов из наших отношений ничего не вышло, но испытанное мной потрясение продолжало действовать. Вскоре после этого я женился на студентке философского факультета, которая была ученицей основателя феноменологии Эдмунда Гуссерля⁶, преподававшего в ту пору в Гёттингене. Поэтому именно Гуссерль освободил меня от позитивизма и возвратил к более широкому взгляду на мир. Одновременно я претерпел мутацию, превратившись из приват-доцента Гёттингенского университета в профессора геометрии Федерального высшего технического училища в Цюрихе. Там, в Цюрихе, моя жена и я при посредстве Медикуса⁷, руководителя семинара, который посещала моя жена, познакомились с учением о науке Фихте. В этом учении метафизический идеализм, к которому начала в то время робко нащупывать путь феноменология Гуссерля, нашел самое яркое и сильное выражение. Фихте захватил меня, хотя я и должен был согласиться с женой — ей строгая методика Гуссерля была больше по душе, чем прямолинейный фихтевский подход, — что Фихте, не считающийся ни с природой, ни с фактами и упорно следующий одной идее, вынужден прибегать ко все более запутанным и сложным построениям.

Гуссерль первоначально исходил из математики. Создавая свои "Логические исследования", он — отчасти под влиянием философа Франца Brentano⁸ — стал противником господствовавшего на рубеже веков психологизма и развил методы феноменологии, поставившей своей целью путем усмотрения сущности (*Wesensschau*) постичь феномены, с которыми сталкивается сознание, в той их чистоте, с какой они даются сами по себе, независимо от всех генетических и прочих теорий. В усмотрении сущности Гуссерлю открылось несравненно более широкое поле очевидного априорного знания, чем те двенадцать принципов, которые Кант считал конституирующими мир опыта. Приведу лишь несколько положений из труда Гуссерля "Идеи, относящиеся к чистой феноменологии и феноменологической философии" (1922), который содержит систематическое изложение его взглядов: "Чуждость (*das Was*) вещей, полагаемая в идее (*in Idee gesetzt*), есть сущность (*Wesen*). Постигание чистой сущности в сущностном созерцании (*Wesensschauung*) ни в малейшей мере не влечет полагания какого-то индивидуального тут-бытия (*Dasein*). Чистые сущностные истины не содержат ни малейшего утверждения о фактах, поэтому *только* из них нельзя извлечь даже самой ничтожной фактической истины". Однако на другой странице он говорит и так: "Всякое описание сущности, относящееся к видам переживаний, выражает безусловно значимую норму возможного эмпирического тут-бытия". Для феноменологического метода типичным является следующее утверждение: "Непосредственное "видение" (*Sehen*), не просто чувственное опытно-испытывающее (*erfahrende*) видение, а видение вообще как исконно (*originär*) данное сознание, какого бы рода оно ни было, есть последний источник оправдания (*Rechtsquelle*) всех утверждений разума. То, что изначально предстает перед нами в "интуиции", следует просто принимать как то, что существует, но лишь в тех рамках, в которых оно тут-

существует (da gibt)". Поясняя противоположность между случайным фактическим законом природы и необходимым сущностным законом, Гуссерль приводит два утверждения: "Все тела тяжелы" и "Все тела протяженны". Возможно, он прав, но уже в первом из этих примеров явственно ощущается, сколь неопределенной оказывается всеобщность установленного теоретико-познавательного различия, коль скоро мы от общего нисходим к конкретным частным приложениям. В своих лекциях по общей теории относительности, вышедших впервые в 1918 году под названием "Пространство, время, материя", а заметил по этому поводу следующее: "Представляемые ниже исследования проблемы пространства кажутся мне хорошим примером сущностного анализа, к которому стремится феноменологическая философия, примером, типичным для тех случаев, когда речь идет о неимманентных сущностях. Ведь прослеживая историческое развитие проблемы пространства, мы видим, как трудно нам, людям, скованным узами действительности, постичь нечто решающе важное. Чтобы оторваться от случайных, несущественных признаков, от которых мы поначалу находимся в зависимости, понадобилось длительное развитие математики, широкий размах геометрических исследований — от Евклида до Римана, проникновение физиков в тайны природы и ее законы, начавшееся со времен Галилея и подкрепляемое все новыми эмпирическими стимулами, наконец, гений отдельных великих умов — Ньютона, Гаусса, Римана, Эйнштейна. Конечно, когда удастся придти к новой, более широкой точке зрения, разум преисполняется света, и для него становится само собой понятным то, что он познает и признает; тем не менее (хотя разум естественным образом "присутствовал" на протяжении всей эволюции проблемы) у него не хватило сил разгадать ее сразу. Это должно быть противопоставлено нетерпению тех философов, которые полагают, будто из одного единственного примера на основе акта ясного представления можно адекватно описать сущность⁹. Пример пространства весьма поучителен и для той проблемы феноменологии, которая представляется мне имеющей собственно решающее значение: в какой мере граница, очерчивающая открывающиеся сознанию отдельные сущности (Wesenheiten), выражает структуру, свойственную царству самих данностей, и в какой мере она является лишь результатом соглашения".

Такого же взгляда на соотношение познания и осмысления я придерживаюсь, по сути дела, и теперь. Одним из наиболее убедительных и величественных подтверждений его правильности является создание Эйнштейном — с помощью метода, сочетающего опыт, основанный на эксперименте, сущностный анализ и математическую конструкцию, — общей теории относительности и выведение справедливого в ее рамках закона тяготения. Осознание смысла понятия движения было важно для Эйнштейна, но только в такого рода сочетании оказалось плодотворным.

Однако в обширной работе Гуссерля 1922 г. основным предметом рассмотрения стало отношение *имманентного сознания* и чистого Я¹⁰, источника его актов, к реальному психофизическому миру, на предметы которого эти акты интенционально направлены. Термин "интенционально", "интенциональный" воспринят Францем Brentano у схоластики, и его усво-

ил Гуссерль. Сами переживания сознания при рефлексии могут становиться интенциональным предметом направленных на них имманентных восприятий. Интенциональный объект некоторого внешнего восприятия, например вот это дерево, есть вещь, как она существует в самом восприятии, так что не возникает вопроса, соответствует ли — и в каком смысле — этой вещи некое *действительное дерево*, имеющее такие же или сходные свойства. Гуссерль подробно описывает феноменологическое *epoché*¹¹, посредством которого относящийся к сущности естественного отношения к миру универсальный тезис о его реальном тут-бытии выключается из актов сознания, "заключается в скобки". "Сознание, — утверждает Гуссерль, — обладает самобытием (Eigensein) в самом себе, и подобное выключение никак не затрагивает его абсолютной внутренней сущности (Eigenwesen); в качестве некоторого феноменологического остатка оно, таким образом, остается "чистым сознанием"». О пространственной протяженности вещи Гуссерль говорит, что при всей своей трансцендентности она является *тем, что воспринимается* (Wahrgenommenes), той данностью, которая в своем воплощении соответствует сознанию, в то время как данные ощущений в конкретном единстве восприятия получают разнообразные "оттенки", а "понимание" (Auffassungen) одушевляет их, и в этой одушевленности они выполняют свою представляющую "функцию", иными словами, в единстве с ней составляют они то, что мы называем "явлениями" цвета, образа и т.д. Я нахожу, что с этим нелегко согласиться. Во всяком случае нельзя отрицать, что тот определенный способ (Art), каким реальная (leibhaftes) вещь предстает передо мной благодаря этой одушевляющей функции, формируется громадным предшествующим опытом, — как бы ни возражали против того, что Гельмгольц назвал "бессознательными умозаключениями". Теоретико-символическая конструкция, при помощи которой физика пытается постичь трансцендентное, лежащее по ту сторону воспринимаемого, далеко от того, чтобы остановиться на этом воплощении. Поэтому я бы сказал, что Гуссерль изображает просто одну из ступеней, через которую проходит конструирование внешнего мира. В сознании он различает гилетический и нозтический слой, чувственную *ύλη* и интенциональную *μορφή*¹², и говорит о том способе, каким (например, в отношении природы) нозы, одушевляя вещественное и сплетаясь в многообразно-единные континуумы и синтезы, порождают осознание чего-то таким образом, что в нем может "проявиться", "раскрыться" и быть "разумно" определено объективное единство предметности. "Сознание, — подчеркивает далее Гуссерль, — есть именно сознание "чего-то", сущность, "смысл" сознания, так сказать, квинтэссенция души, дух разума состоит в том, чтобы таить в себе. Сознание не есть название для "психофизических комплексов", для сплавов "содержаний", для "комков" или потоков ощущений, которые, будучи сами по себе бессмысленны, таковы, что сколько бы их ни было, они все равно не передают никакого "смысла", — сознание есть насквозь "сознание": источник всякого разума и неразумия, всякой правды и неправды, всякой реальности и фикции, всякой ценности и отсутствия ценности, всякого деяния и злодеяния".

Что касается противоположности переживания и вещи, то Гуссерль утверждает чисто феноменальное, лишь в оттенках открывающееся бытие

трансцендентного и, напротив, *абсолютное бытие имманентного*, несомненность имманентного и ненадежность трансцендентного восприятия. Тезису о мире в его случайности противостоит тезис о моем чистом Я и жизни моего Я — тезис, который носит необходимый характер и совершенно несомненен. "Между сознанием и реальностью, — говорит Гуссерль, — поистине зияет смысловая пропасть". "Имманентное бытие есть абсолютное бытие в том смысле, что оно принципиально *nulla "re" indiget ad existendum**"; с другой стороны, мир трансцендентных "res" целиком зависит от сознания, причем от такого сознания, которое не логически вымышлено, а актуально".

Здесь со всей серьезностью перед нами возникает метафизический вопрос об отношении некоторого чистого Я имманентного сознания к тому единичному человеку, каким я нахожу себя — затерянного среди множества себе подобных — в этом мире (например, стоящим вечером в час пик на Пятой авеню в Нью-Йорке). Гуссерль ограничивается лаконичным замечанием о том, что "сознание становится реально-психическим сознанием человека или животного лишь благодаря своему опытному отношению к телу". Но он тотчас же опять начинает кичиться суверенной природой чистого сознания: в апперцептивном переплетении или, иначе, в психофизическом отношении к телесному (*Körperliches*) сознание ничего не утрачивает из своей собственной сущности. "Все реальные единства (*Einheiten*) суть единства смысла. Смысловые единства предполагают смыслопорождающее сознание, само же сознание абсолютно и существует не потому, что ему придается смысл". Поэтому должно быть ясно, что, "несмотря на все разговоры о реальном бытии в этом мире человеческого Я и переживаний его сознания — эти разговоры по своему смыслу вполне оправданы, — сознание, рассматриваемое в его чистоте, следует считать некоторой замкнутой в себе связью бытия, связью абсолютного бытия, в которое ничто не может войти и из которого ничто не может вырваться, которое не может ни испытать на себе каузального воздействия, ни оказать его на какую-либо вещь. С другой стороны, весь пространственно-временной мир, которому в качестве подчиненных единичных реальностей принадлежит человек и человеческое Я, по своему смыслу есть чисто интенциональное бытие, стало быть, такое, которое имеет только вторичный, относительный смысл некоторого бытия для сознания. Это бытие, которое сознание полагает в своем опыте, которое принципиально может стать доступным созерцанию и определению лишь как нечто тождественное в единообразно (*einstimmig*) мотивированном многообразии явлений; *помимо же этого оно ничто*".

Фихте в своем учении о науке выразил позицию теоретико-познавательного идеализма еще более радикально, чем Гуссерль. Фихте совсем не феноменолог, он чистейшей воды конструктивист, неуклонно и упрямо идущий по пути своей конструкции. Во многих отношениях Фихте напоминает мне апостола Павла. Та же, если можно так выразиться, неотесанность мысли, привлекающая, однако, своей твердой определенностью. То же полное безразличие к опыту — у Павла, в частности, по отношению к свидетельст-

*) Ни одна "вещь" не требует существования (*лат.*). — *Примеч. пер.*

вам о фактах из жизни Христа. Та же истовая, не терпящая никаких возражений, вера в возвышенную конструкцию — вера, которая у Фихте находит выражение в таких оборотах, как: "Так должно быть, и иначе быть не может; поэтому так оно и есть", или в названии одного из его сочинений — "Ясное, как солнце, сообщение широкой публике о подлинной сущности новейшей философии. Попытка принудить читателя к полному пониманию". Общим у обоих является их фанатизм, подчас безмерное поношение инакомыслящих. Противопоставляя догматизм и идеализм как два единственно возможных способа философствования, Фихте высказывает утверждение, звучащее как предвосхищение экзистенциализма: "... Какую философию ты выбираешь, зависит от того, что ты за человек"; и тотчас же следует комментарий, пронизанный духом фанатизма: "От природы вялый или склонный к духовному рабству, развращенный духовной роскошью и тщеславием, ослабленный и искаленный характер никогда не возвысится до идеализма"¹³.

За недостатком времени я не стану подробно излагать фихтевское учение о науке. Свой метод Фихте описывает следующим образом: "Предположим, что возникает потребность обдумать некое понятие или некую ситуацию. *Необходимый* способ, которым надлежит совершать этот акт, заложен в природе интеллекта и не зависит ни от какого произвола. Он есть нечто *необходимое*, совершающееся однако только в свободном действии и при свободном действии, нечно найденное, нахождение чего-то, однако, обусловлено свободой.

Идеализм поэтому вскрывает в непосредственном сознании то, что он утверждает. Он предполагает при этом, что то необходимое есть основной закон всего разума, что из него выводима вся система наших необходимых представлений, не только представлений о мире, поскольку объекты его определяются субсуммирующей и рефлектирующей способностью суждения, но и таких представлений о нас самих как свободных и практических существах, действующих согласно законам. Допущение этого есть простая предпосылка. Идеализм должен оправдать ее действительным введением и в этом состоит его подлинная задача (...) Он показывает, что установленное сначала как основоположение и обнаруженное непосредственно в сознании невозможно без того, чтобы вместе с тем не происходило нечто третье и т.д."¹⁴. Выведенная таким образом система необходимых представлений приравнивается совокупному опыту; представления находят в опыте свое подтверждение; а priori поэтому в конце концов совпадает с a posteriori. Это выглядит так, будто мир можно вывести не только из возможностей, заложенных в его структуре, — мир можно вывести в его неповторимой фактичности. То, каким образом Фихте приводит в исполнение свой замысел, я не могу назвать иначе, как топорной работой. В противостоянии конструктивизма и феноменологии мои симпатии лежат, в общем, на стороне первого. Но то, как в действительности можно провести конструктивный подход, влекущий в конечном счете представление мира в символах, но не a priori, а в постоянном соотношении с опытом, — это нам показывает физика, прежде всего два ее самых передовых рубежа: теория относительности и квантовая теория.

Относительно Я у Фихте говорится следующее: "Я требует, чтобы в нем содержалась вся реальность и оно заполняло собой бесконечность. В основе этого требования с необходимостью лежит идея бесконечного, только само себя полагающего бесконечного Я; это *абсолютное Я* (которое не есть Я, данное в действительном сознании). Однако Я должно рефлексировать себя; это также входит в понятие Я". Отсюда, из одного только Я, которое становится здесь *практическим*, возникает, по Фихте, ряд, состоящий из того, что *должно* быть, — ряд *идеального*. Ограничение этого бесконечного стремления противоположным принципом, не-Я, приводит к ряду *действительного*; здесь Я становится познающим интеллектом. Но об этой противоположной силе не-Я говорится, что конечное существо не познает ее, а лишь воспринимает своими чувствами. "Все возможные определения этой силы не-Я, которые до бесконечности могут возникать в нашем сознании, наукоучение берется вывести из этой определяющей способности Я".

Мне кажется, что одна аналогия, заимствованная из геометрии, помогает уяснить проблему, которую пытались одолеть Фихте и Гуссерль: как перебросить мост, который связал бы имманентное сознание, которое по выражению Хайдеггера, есть всякий-раз-мое, с тем конкретным человеком, которым я являюсь, который рожден матерью и который умрет. Я проведу параллель между объектами, субъектами (или множественным Я) и явлением некоторого объекта некоторому субъекту, с одной стороны, и точками, системами координат и координатами некоторой точки относительно системы координат в геометрии, с другой стороны. В системе координат S , состоящей из трех не лежащих на одной прямой точек плоскости, каждой точке p этой плоскости соответствуют три числа x_1, x_2, x_3 , сумма которых равна 1 (барицентрические координаты точки p). Объекты (точки) и субъекты (системы координат — тройки чисел) при этом принадлежат одной сфере реальности, а явления — другой, царству чисел. Наивный реализм (или догматизм, как называл эту философскую точку зрения Фихте) считает точки чем-то существующим само по себе. Но возможно и алгебраическое построение геометрии, при котором используются только числа-явления (переживания некоторого чистого сознания). Точка, как ее в этом случае определяют, есть не что иное, как некоторая тройка чисел x , сумма которых равна 1; система координат состоит из трех таких троек; алгебраически определяется, каким образом такая точка p и такая система координат S задают три числа ξ — координаты точки p относительно S . Тройка чисел ξ совпадает с тройкой чисел x , задающей точку p , если система координат S *абсолютна*, т. е. состоит из трех троек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Стало быть, это соответствует абсолютному Я, для которого вещь и явление совпадают. Здесь мы совершенно не выходим из сферы чисел, или — по аналогии — имманентного сознания. Равноправия всех Я, требуемого во имя объективности, можно теперь добиться, если объявить, что нас интересуют неизменные при переходе от абсолютной к любой другой системе координат или, что то же, те, которые инвариантны относительно произвольных линейных преобразования трех координат. Проведенная мной аналогия позволяет понять, каким образом при объективной установке, т. е. с точки зрения инвариантности, одно смыслопорождающее Я может

появиться в качестве отдельного субъекта — одного из многих одинаковых. (Между прочим, некоторые из тезисов Гуссерля, если применить их к этой аналогии, становятся заведомо ложными, что, как мне кажется, заставляет серьезно в них сомневаться).

Однако признание мною другого Я, т. е. Ты, требует от меня не только подчинения моего мышления неким абстрактным нормам инвариантности или объективности, но и того, чтобы это подчинение было *абсолютным*: Ты для себя есть повторение того, чем Я являюсь для себя, т. е. не *просто существующий*, но и *сознающий* носитель мира явлений. Этот шаг в нашей геометрической аналогии мы можем совершить лишь тогда, когда от числовой модели геометрии точек перейдем к ее аксиоматическому описанию. При таком подходе точки не рассматриваются как наличные реальности и не отождествляются с тройками чисел в заранее выделенной абсолютной системе координат. Вместо этого точка и основные геометрические соотношения, посредством которых точка p и система координат — тройка чисел S определяют тройку чисел ξ , вводятся как основные, неопределяемые понятия, удовлетворяющие определенным аксиомам. И оказывается, что помимо наивного реализма и идеализма возможна третья точка зрения — *трансцендентализм*; полагая трансцендентное бытие, трансцендентализм довольствуется его отображением в символах; трансцендентализму соответствует аксиоматическое построение геометрии.

Я отнюдь не утверждаю, будто загадка Я тем самым раскрыта. Лейбниц надеялся разрешить контрверзу между человеческой свободой и божественным предопределением, возложив на Бога выбор (*erwählen lässt*) из бесконечно многих возможностей (на достаточном основании) для тугбытия некоторых существ, например, Иуды и Петра, субстанциональная природа которых определяет всю их дальнейшую судьбу. Объективно такое решение, возможно, и приемлемо, но его вдребезги разбивает исполненный отчаяния крик Иуды: "Почему именно я должен быть Иудой?!". Ясно, что объективная формулировка этого вопроса невозможна, а поэтому на него нельзя получить и ответ в форме положительного знания. Знание не способно совместить свет-Я (*Licht-Ich*) с темным, заблуждающимся человеком, вытолкнутым навстречу своей индивидуальной судьбе. Вот тут-то, быть может, и выясняется, что до сих пор вся проблема рассматривалась (прежде всего Гуссерлем) в односторонне теоретическом плане. Чтобы обрести себя как интеллект, Я, согласно Декарту, должно все подвергать радикальному *сомнению*; чтобы обрести себя в качестве экзистенции, оно, согласно Кьеркегору¹⁵, должно пройти через радикальное *отчаяние*. Подвергая все сомнению, мы продвигаемся к знанию о реальном мире, трансцендентном имманентному сознанию; но в противоположном направлении — в направлении первопричины, а не ее результата — расположена трансценденция Бога, от которой происходит свет сознания; сама первопричина для сознания остается сокрытой, но себя оно охватывает, в себя проникает, находится в состоянии напряженного расщепления на субъект и объект, *смысл и бытие*.

В более поздний период своего философского развития Фихте перешел от идеализма к некоему теологическому трансцендентализму, разработан-

ному им, например, в сочинении "Наставление к блаженной жизни". Место абсолютного Я занимает теперь Бог. Цитирую его слова: "*Бытие* предельно просто, оно не многообразно, равно самому себе, не подвержено превращениям и неизменно; в нем нет ни возникновения, ни гибели, ни пребывания и игры форм, но лишь всегда одно и то же спокойное бытие и бытие". Тут-бытие, откровение и изъяснение замкнутого в себе бытия есть необходимо *сознание*, или *представление бытия* (*Vorstellung des Seins*). Об этом говорится так: "Бог, таким образом, есть не только внутреннее, он не только сокрыт в самом себе, но он и наличествует тут *(da)*, он изъясняет себя. Его тут-бытие, однако, непосредственно и необходимо есть *знание*, и в самом знании можно усмотреть его последнюю необходимость... Он наличествует тут так же, как он просто есть в себе, несколько не изменяясь при переходе от бытия к тут-бытию, без разъединения и раскола... А поскольку знание, т. е. *Мы*, и есть само это божественное наличие, то и в *Нас* не может быть никакого разъединения, различения или раскола. Так должно быть, и иначе быть не может; поэтому так оно и есть"¹⁶. Однако для того чтобы, исходя из этого единства божественного бытия, которое соответствует также божественному тут-бытию (*Dasein*), добраться до мира и многообразного содержания сознания, Фихте вынужден прибегать к софизмам и весьма рискованным построениям.

Я говорил здесь о философах и философских раздумьях, которые владели моими помыслами примерно с 1913 по 1922 г. В связи с изучением Фихте я сам в те далекие времена месяцами предавался метафизическим размышлениям о Боге, Я и Мире, в которых, казалось, мне открывается последняя истина. Должен признаться, что от тех размышлений в моей памяти не сохранилось никаких следов. Наряду с этим, конечно, продолжались математические исследования, занимающие главное место в моей жизни. Их я обойду молчанием, хотя это несколько искажает общее представление о той роли, которую играли в моей жизни проблемы познания и осмысления. Упомяну лишь о том, что в 1918 г. я выдвинул первую единую теорию гравитационного и электромагнитного поля. Хотя основной принцип моей теории — "калибровочная инвариантность" — ныне в несколько измененной форме используется в квантовой теории, современная физика, поставившая в один ряд с электромагнитным полем волновые поля электронов и других элементарных частиц, ушла от самой моей теории далеко вперед. Занимался я также основаниями математики, столь тесно связанными с проблемой бесконечного.

От позднего Фихте я перешел к Майстеру Экхарту, наиболее глубокому из западных мистиков. Несмотря на близость к Плотину и на имевшийся в его распоряжении понятийный аппарат христианско-томистской философии, не приходится сомневаться в самобытности его основного религиозного переживания: используя образ рождения "Сына" или "Слова" от Бога-отца, он описывает, как Божество вливается в глубины души. Покидая многообразие тут-бытия, душа, однако, должна не только вновь обрести свой первообраз, но и пробиться через этот первообраз к единому Божеству, обитающему в непроницаемом молчании. Сколь независим Экхарт в обращении с библейским словом, видно хотя бы из начала одной

его рождественской проповеди на стих 2 из главы 2 Евангелия от Матфея: "Где родившийся Царь Иудейский?" "Заметьте сперва, — говорит он, — где совершается это рождение. Я утверждаю, как часто уже утверждал, что это вечное рождение совершается в душе точно так же, как в вечности, и никак не иначе, ибо это одно и то же рождение. А именно, оно совершается в существе и основе души". Завершается проповедь следующими словами: "В этом рождении до поможет нам Бог, ныне вновь родившийся как человек, дабы мы, бедные дети Земли, родились в Нем как в Боге, да поможет Он нам в этом. Аминь!"¹⁷. По тону проповеди отчетливо ощущается, что произносит ее человек, преисполненный высокого чувства долга и несравненно более возвышенный по духу, чем Фихте.

Из всех событий моей духовной жизни счастливейшими для меня были: изучение в бытность мою еще юным студентом (в 1905 г.) великолепной работы Гильберта "Zahlbericht" и чтение Майстера Экхарта, захватившее меня в чудесные дни пребывания в Энгадине зимой 1922 г. Отныне для меня открылся доступ в религиозный мир, а десятью годами раньше недостаток религиозности разрушил наметившийся было в моей жизни союз.

Я так и не довел до конца те религиозно-метафизические размышления, на которые меня натолкнули Фихте и Экхарт; здесь, впрочем, сказала, наверное, и природа самого предмета. В последующие годы я, среди прочего, занимался критическим пересмотром методологии науки на основе накопленного мной научного и философского опыта. Здесь особое значение имело размежевание с Лейбницем. На смену метафизическому восприятию пришло отрезвление. То, что отстоялось в процессе изучения философов, и то, до чего я сам додумался, нашло отражение в опубликованной в 1926 г. книге "Философия математики и естествознания". Я написал ее за несколько свободных недель, выдавшихся во время каникул, но работе над книгой предшествовал целый год напряженного штудирования философской литературы. Как мотылек, перелетал я с одного цветка на другой, стремясь из каждого извлечь хоть немного нектара. Работа в области точных наук, обостряя интеллектуальную совесть, делает для нашего брата нелегкой задачей найти в себе мужество для высказываний на философские темы. Здесь не обходится без компромиссов, о которых мне хотелось бы умолчать. Плод этой внутренней борьбы издан и доступен всем, кто им заинтересуется. Я же хотел лишь показать ту философскую почву, на которой он произрос.

Примерно в то же время мне удалось достичь кульминационной точки и в моих математических исследованиях — в работах по теории полупростых непрерывных групп. На этом мое развитие по существу завершилось. Не знаю, как у других, но оглядываясь на свою жизнь, я отчетливо вижу, что в юности до 35—40 лет, когда меня непрестанно привлекало все новое, еще непрочувствованное и непродуманное, мое развитие было несравненно полнее, чем в последующий период зрелости и старения. Разумеется, в более поздние годы я не прошел ни мимо того переворота, который произвела квантовая механика в наших представлениях о природе, ни мимо экзистенциалистской философии, детища удручающей разобщенности

нашего времени. Первая пролила новый свет на отношение познающего субъекта к объекту, в центре второй стоит не чистое Я и не Бог, а человек в его исторической экзистенции, который принимает решения, исходя из своего собственного существования.

В 1930 г. я возвратился из Цюриха в Гёттинген как преемник Давида Гильберта. Когда в 1933 г. в Германии утвердился нацизм, я, глубоко возмущенный позором, которым этот режим покрыл имя немца, покинул Германию и переселился в США. Когда передо мной возникла задача подготовить к печати английское издание моей старой книги по философии науки, у меня уже не хватило мужества написать ее заново с учетом тех изменений в научном знании и в философии, которые произошли за эти годы. Я ограничился тем, что выправил старый текст, переработал некоторые разделы и написал заново несколько приложений, которые потребовали от меня больше усилий, чем некогда вся книга. Как часто я с трудом удерживался от того, чтобы оставить работу или, когда приложения были написаны, швырнуть их в огонь! Откуда взялись все эти муки и сомнения, неверное, объясняют следующие строки из "Четырех квартетов" Т.С. Эллиота, которые я избрал в качестве эпиграфа к предисловию английского издания:

"Дом — то, откуда выходят в дорогу. Мы старимся,
И мир становится все незнакомее, усложняются ритмы
Жизни и умирания".

Тем большую признательность я испытываю сейчас, когда английское издание "Философии математики и естествознания" и вышедшая несколько позднее только на английском языке небольшая книга о симметрии послужили основанием для присуждения мне премии Арнольда Реймона. Мне доставило радость чтение лекций о симметрии в Принстонском университете. При этом я испытывал чувство, подобное переживанию человека, закончившего напряженный дневной труд, в противоборстве идей и человеческих страстей исполнившего свой долг, насколько это было в его силах, и теперь, на исходе дня, когда солнце клонится к закату и близится умиротворяющая ночная пора, тихо наигрывающего себе на флейте вечернюю мелодию.

На этом я хочу закончить свою исповедь.

О СИМВОЛИЗМЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Самая знакомая, но, пожалуй, также и самая коренная форма, в которой наша духовная жизнь обнаруживает свою символическую функцию, представление в знаках, — это язык. По этому поводу Г. Ноак говорит: "Способность к пониманию символов, возникающую вместе с формированием языка, можно считать решающим шагом, который вывел человека из животной жизни" [1, с. 97]*). Здесь, как в фокусе, сосредоточиваются великие философские проблемы: проблема отношения между предмет-

*Цифры в квадратных скобках указывают номер соответствующей ссылки в списке литературы, приведенном в конце статьи. — *Примеч. пер.*

ным содержанием, мыслью и высказыванием — проблема, которая обрекает на неудачу любую попытку успокоиться на реализме голого бытия; кроме того, проблема отношения между Я имманентного сознания, пребывающим в потоке одних только своих переживаний, и индивидуальным человеком, живущим в мире, подверженном смерти и общающимся с подобными себе существами. "Многие другие чувственные образы, применяемые с целью обозначения, изображения, сообщения и т. д., обязаны своим "семантическим" или "символическим" значением в первую очередь языку, поскольку они образуются по аналогии с ним или же поскольку об их значении условливаются при помощи языка" [11, с. 19]. Часто выдвигается точка зрения, что понятийное мышление связано с языком; животное (которое, конечно, прекрасно может ориентироваться в своем мире) обходится поэтому как без языка, так и без понятий. Об этом говорит Вильгельм фон Гумбольдт в своем труде о Кави (Kawi) [т. I, Берлин, 1836, с. 68—69]: "Благодаря тому, что в нем (в языке) духовное стремление прокладывает себе путь через уста, рожденное им возвращается назад, к ушам. В результате представление обретает подлинную объективность, не лишаясь вместе с тем субъективности. На это способен только язык, и без такого перевоплощения в объективность, вновь возвращающуюся к субъекту, — превращения, которому всегда уже молчаливо предшествует и содействует язык, невозможно образование понятий и тем самым никакое настоящее мышление". Нечто подобное мы услышим и в более спокойных выражениях в "Логико-философском трактате" Л. Витгенштейна [15, 5.6. и 5.62]: "Границы моего языка означают границы моего мира. . . Тот факт, что мир есть мой мир, проявляется в том, что границы языка (единственного языка, который понимаю я) означают границы моего мира"¹. Удивительно, до какой степени солипсистски понимается здесь язык. А между тем экзистенциальным истоком и целью языка в первую очередь конечно же является коммуникация*). В этом согласны столь далеко отстоящие друг от друга в духовном плане мыслители, как Ясперс и Гильберт. (Я имею в виду роль языка в передаче способа, каким следует оперировать с теми знаками и формулами гильбертовской формализованной математики, которые сами по себе лишены значений.) Об искусственном научном языке в противоположность языку обыденной жизни, на котором человек изъясняется в общении с миром и другими людьми, Карл Фосслер говорит [12, с. 225]: "По отношению к математическим и естественно-научным понятиям все языки равно считаются чем-то внешним. Эти понятия способны прижиться в любом языке, так как они обитают только во внешней форме языка, а внутреннюю выедают и опустошают".

*) Я знаю, что это не относится ко всей гумбольдтовской философии языка. В приведенном месте, подчеркнув еще раз, "что речение (Sprechen) — необходимое условие мышления индивида, взятого в полном одиночестве", Гумбольдт продолжает: "По внешней же видимости язык развивается только в обществе, и человек понимает самого себя лишь потому, что он испытал на деле понятность своих слов другим". Прочтем весь абзац вплоть до мощного финала: "Всякое речение, начиная с простейшего, есть связь, устанавливаемая между индивидуально испытанным и общей природой человека".

Не все *символы* имеют языковую природу. В своей теории символических форм Э. Кассирер последовательно рассматривает язык, миф и конструкции научного познания. Если перечислить некоторые особые формы, как, например, слово, иероглифическое и буквенное письмо, знаки отличия, знамена, аллегорические атрибуты, символику сновидений, произведения искусства, магические и религиозно-церковные символы, а также числа и другие понятийные символы точных наук, станет ясно, насколько многообразен смысл, в котором знак может указывать на обозначаемое. Всегда остается проблема *толкования*, которое может быть даже многоплановым. Скажем, пещерный знак каменного века, на котором изображены буйвол, лодка и дерево, метит, быть может, посредством этих обыденных вещей в духов и демонов. Лейбниц понимает знаки как "известные вещи, при помощи которых выражаются взаимоотношения других вещей и которые легче поддаются исследованию, чем эти последние". Это свойство делает их, стало быть, инструментом открытия новых связей, коренящихся в представленных отношениях. Яркий пример дает оперирование с числовыми знаками. На обширной шкале типов значения, о которой мы только что упоминали, имеются крайние случаи: на одной стороне знак, который являет собой (или стремится к этому) ближайшую репродукцию изображаемого; на другой — чисто конвенциональные или даже "пустые" знаки, которые, как говорит Гильберт, вообще ни на что вне себя не указывают. Гельмгольц говорит о качестве нашего ощущения: "Поскольку оно извещает нас о специфике внешнего воздействия, которым оно возбуждено, его можно было бы считать *знаком* последнего, а не *отображением*", так как ощущение равным образом весьма существенно зависит от природы сенсорного аппарата, подвергающегося внешнему воздействию. Э. Кассирер [6, с. 34—41] видит в том способе, каким для нашего созерцания из систематически связанных и отнесенных друг к другу восприятий строится *пространство*, "действие изначальной, представляющей функции". Мне не совсем понятно, что он имеет в виду, когда заявляет далее, что следовало бы вернуться к этой "естественной символической", если хотят понять "ту искусственную символику, которую сознание создает себе в языке, искусстве и мифе".

В своем толковании данного нам в ощущениях и восприятиях, которые (согласно Гельмгольцу) суть "знаки" действительности, наука должна стремиться к преодолению присущей им субъективности. Фундаментальные понятия, образуемые с этой целью наукой, в конечном счете, оказываются *символами*, которые свободное творчество духа противопоставляет непосредственно данному. И именно такое теоретическое познание, целиком ставшее символической конструкцией, а отнюдь не простая феноменология природы, позволяет нам *предсказывать* события. Вот пример: "абстрактная химическая формула, используемая для обозначения определенного вещества, не содержит ничего сверх того, что нам известно об этом веществе из прямого наблюдения и чувственного восприятия, — вместо этого, однако, формула вводит указанное тело в чрезвычайно богатый и до тонкости расчлененный комплекс отношений, о котором восприятие вообще ничего не знает². Подлинную силу знака составляет здесь именно

то, что по мере того, как непосредственные содержательные определения отодвигаются на задний план, все более отчетливо и чисто отчеканиваются моменты всеобщих форм и отношений" [6, с. 44–45].

Символы, которыми чаще всего пользуются математики, суть *письменные знаки*; например, такие "естественные" знаки для натуральных чисел, которые состоят из нескольких поставленных друг за другом черточек: ||| для числа три и |||| для числа пять. Так, наряду с языком, служащим для общения, появляется письмо, фиксирующее подобные знаки. Важность этого письма, если я не ошибаюсь, состоит в том, что при помощи него становится возможной *документация*. Звуки речи умолкают, письменные знаки удерживаются. Например, когда я слушаю бой башенных часов, я сосчитаю удары, если отмечу их карандашом на листе бумаги. Объекты могут и рассеяться, как здесь, например, удары башенных часов, "melt, thaw and resolve themselves into a dew"³, но их число может быть отмечено подобным знаком и сохраниться. Если я сделаю так для двух последовательностей ударов, то смогу воспользоваться знаками для того, чтобы сделать дополнительную констатацию: "во второй раз ударов было больше, чем в первый", — а при прямом вслушивании это, быть может, осталось бы сомнительным. В качестве знаков служат видимые образы известной устойчивости (не звуки, скажем, или клубы дыма; они должны удерживаться по меньшей мере на столько, сколько необходимо, чтобы исполнить ту операцию, для которой они предназначены). Они должны быть легко и неоднократно восстанавливаемы; их образ должен быть таков, чтобы, как говорит Гильберт, "все мы могли их надежно распознавать, независимо от места, времени, особых условий получения знаков и незначительных различий в их начертании" [9, с. 163]. Описание такого рода отнюдь не безразлично, если для некоторых (как, например, для Гильберта) "предметом теории чисел являются сами знаки". В противоположность идеалистической установке, для которой числа являются идеальными объектами или возможностями, исходящими из акта чистого сознания, здесь выступает "антропоморфная" установка, которая обращает внимание на конкретное действие человека. Способ, каким математик обращается со своими формулами, построенными из знаков, немногим отличается в этом случае от того, как столяр в своей мастерской обращается с деревом и рубанком, пилой и клеем. Интуиционист Брауэр говорил с оттенком иронии по этому поводу: "Op de vraag, waar de wiskundige exactheid dan wel bestaat, antwoorden beide partijen verschillend; de intuïtionits zegt: in het menselijk intellect, de formalist: op het papier" [4, с. 7]⁴.

Когда Ньютон хотел объяснить переживаемый в восприятиях мир посредством движения твердых частиц в пространстве, он использовал пространство, которое так же точно дано ему в созерцании и объективно, для конструирования действительного мира, скрытого за явлениями. Подобно тому, как поступил уже Демокрит, он отбросил чувственные качества как неподходящие для построения действительного мира вследствие их субъективности, но сохранил пространство. Когда же Лейбниц признал феноменальность пространства и времени, были вынуждены элиминировать также и их. К счастью, для этого было уже подготовлено средство в ана-

литической геометрии Декарта. Именно, она показывает, каким образом (посредством отнесения к определенной системе координат) можно представить любую точку пространства через три ее координаты набором трех вещественных чисел. Не нечто данное в природе, подобно пространству (в котором Ньютон видел *sensorium Dei* — чувствилище Бога), а нечто свободно созданное, подобно числу, становится теперь материалом для конструирования объективного мира. Эта противоположность между действительным пространством и свободно созданным числом появилась в нашем изложении по моей вине. Выше я подчеркивал конкретный чувственный образ числового знака, теперь я подчеркиваю свободу духа, обнаруживающуюся в создании этих символов ("которым, по сути дела, не присуще чувственное содержание") и в интерпретации мира с их помощью. Для символического представления мира фактов дух не заимствует больше ничего, включая пространство и время. Существенно, что символ понимается как *символ*, а не как составная часть действительности, подлежащей представлению. Гюйгенс мог еще с чистой совестью говорить, что монохроматический луч света *в действительности* представляет собой колебание светового эфира, состоящего из особых частиц. Мы представляем луч формулой, в которой некий символ F , названный напряженностью электромагнитного поля, выражается в виде чисто арифметически сконструированной функции четырех других символов x, y, z, t , названных пространственно-временными координатами⁵. Никто не может более всерьез требовать, чтобы символический *конструкт*, который, таким образом, остается у нас в руках, считался действительностью, лежащей в основе явлений. При этом, конечно, нет нужды пререкать связь между символом тем, что дано в восприятии. Физик понимает, что "подразумевается" в символической, когда он проверяет на опыте записанные (*niedergelegt*) в ней физические законы (ср. [13]). Намеченное здесь вкратце развитие физики в чисто символическую конструкцию достигло вершины в нашем столетии в теории относительности и в квантовой теории. Способ, каким квантовая физика представляет наблюдаемые величины эрмитовыми формами в бесконечномерном гильбертовом пространстве, являет собой чрезвычайно характерный пример символического представления.

После этой общей ориентировки пора несколько конкретнее остановиться на математических конструкциях и математической символической (ср. [1]). Здесь мы прежде всего находим *знаки для отдельных чисел*, например, 2 или π , и знаки для отдельных определенных операций или отношений, например, + (плюс), = (равно), < (меньше, чем). При помощи этого можно уже выражать в формулах некоторые высказывания, например, $2 < 3$, $2 + 2 = 4$. Ясно, что на этой ступени математическая символика не выдвигает еще никаких особых проблем, помимо общих проблем языка и письма. Если мы знаем, что в общем случае мы разумеем под числом, и если мы понимаем идею "меньше, чем", выраженную символом <, мы можем перейти к таким *суждениям гипотетической общности*, как, например, следующее: если тебе *in concreto* даны числа a, b, c и ты находишь, что $a < b$ и $b < c$, то ты можешь быть уверен также и в том, что $a < c$. Здесь буквы a, b, c выступают в качестве знаков *каких-*

то чисел. В этом я также не вижу ничего специфически математического. Закон о правовом действии, в котором участвуют разные лица, одинаково относится к "любому" лицу, и если в формулировке закона то или иное лицо должно именоваться чаще, было бы целесообразно различить их при помощи букв. Обычные для английского права формулы "the first party, the second party"⁶ отличаются от буквенных обозначений только своей тяжеловесностью. Они становятся невыносимыми, когда, например в математическом доказательстве, это произвольное число встречается не четыре, а двести раз. Применение букв для обозначения точек геометрической фигуры — причем некий данный треугольник АВГ понимается как какой угодно треугольник (переменные точки) — было известно греческим математикам. То обстоятельство, что они всегда обозначали буквами только геометрические, а не неопределенные числа, связано с геометризацией алгебры, которую они были вынуждены провести после открытия несоизмеримого отношения отрезков. Диофант же постоянно пользуется буквой ζ для обозначения неизвестной. Свободное буквенное обозначение чисел довольно неожиданно появляется в эпоху европейского средневековья около 1200 г. Однако последовательно буквенная алгебра, в которой формулы можно записывать без слов, как например $a + b = b + a$, впервые была развита Виетом (1591). Хотя благодаря этому стало возможным оперировать формулами, не пользуясь для связи между ними словами, было бы ошибкой утверждать, что на достигнутой стадии формулировка математических положений больше не нуждается в словах. Если полностью выразить словами приведенную выше формулу $a + b = b + a$, то она будет означать следующее: если a, b — какие-нибудь два числа, то существует отношение $u + b = b + a$. Перед молодыми студентами-математиками мы каждый раз заново испытываем потребность настоятельно внушить им, чтобы они не забывали слов, сопровождающих формулы и впервые наделяющих их смыслом. Например, в следующем определении непрерывности веские слова "существуют" и "все" по меньшей мере столь же важны, как и сами формулы: "Функция $y = f(x)$, которая каждому действительному числу x ставит в соответствие действительное число y , непрерывна при значении аргумента $x = a$, если для каждого положительного числа ϵ существует такое положительное число δ , что $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ для каждого числа x , для которого $|x - a| < \delta$ ". В этом примере буква f означает произвольную функцию (если точки и числа, обозначаются буквами, почему бы нельзя то же самое сделать с функциями?), тогда как две скобки в $f(x)$ образуют особые знаки и означают универсальную операцию, которая порождает из функции f и значения аргумента x соответствующее значение y функции. Обратимся теперь опять к обыкновенным числам, которыми мы пользуемся при счете. Мы остановились на стадии, когда с гипотетической общностью можно говорить о каком-нибудь данном числе. Нечто радикально новое совершается тогда — и это есть рождение математики, — когда не просто принимают в качестве данных случайно встречающиеся в действительности числа, а располагают в ряд $I, II, III, \dots$ все возможные числа. Это осуществляется посредством производящего процесса, в котором постоянно повторяется одна и та же операция — переход от числа n к бли-

жайшему числу n' . Как знаковая операция она выполняется посредством нового штриха. Дело не в том, что можно действительно произвести весь числовой ряд, — но мы уверены в самой *возможности* продолжать процесс дальше после каждого достигнутого пункта. *Действительное проецируется здесь на фон возможного — открытого в бесконечность многообразия, свободно создаваемого умом при помощи надежной установленного способа.* С помощью понятия координат мы конструируем *пространство* как континуум возможных местоположений из многообразия всех возможных действительных чисел, не менее свободно созданного нами. Только так удастся расставить "пространственные метки" также и в пустом пространстве, окружающем Землю, что в особенности необходимо для астрономии. Именно в этом, в этой проекции случайно *встречающегося действительного* (*Wirkliches*) на фон *a priori* *возможного*, полученного нами в некотором конструктивном процессе, я вижу решающую отличительную черту теоретической науки.

Ряд натуральных чисел — простейший пример такой созданной нами самими и потому *a priori* обозримой области переменных сущностей, которая может служить для построения символических конструкций. Все более сложные случаи в принципе сводимы к этому. Мне кажется поэтому вполне правильным говорить вместе с Брауэром об идее *всегда еще одного*, из которой возникает числовой ряд, как проявлению *математической интуиции*. Таково основание, на котором Брауэр построил свою математику, состоящую из интуитивно усматриваемых положений [4, 5]. На то же самое основание опирается Гильберт, когда он описывает, что представляет собой формула в его "формализованной математике", или когда он пытается посредством "метаматематических" рассуждений обеспечить непротиворечивость своей системы [9, 10]. В свете той же идеи мы впервые понимаем, что мы имеем в виду, когда говорим о *любом* числе, — независимо от того, являются ли числа идеальными сущностями *suī generis*⁷ или существуют лишь в форме числовых знаков. Ничего удивительного, что также и в символике здесь выступает столь характерный для математики *систематический способ обозначения*, в силу которого каждое отдельное число может быть обозначено черточками, поставленными друг за другом (или может найти себе место в цифровом ряду нашей десятичной системы счисления). Если мы будем держаться естественного обозначения при помощи последовательного ряда черточек, то увидим, что этот способ дает нам возможность решить относительно каких-нибудь двух представленных в знаках чисел, какое из них больше. А именно, мы станем вычеркивать черточки друг за другом, причем, вычеркивая черточку в первом ряду, будем вычеркивать черточку также и во втором ряду. Это поразительное достижение, ибо мы находим трудным различить с первого взгляда даже столь малые числа, как 20 и 21. Дело, стало быть, не только в том, что оперирование со знаками обеспечивает много большую надежность, чем наглядно-содержательное мышление, но и в том, что оно позволяет вполне законным образом проникать далеко за пределы области, доступной этому мышлению. Проверка высказываний о числах неотъемлема от числовых знаков. Знак представляет число *полностью*,

ибо о числах нельзя сказать ничего, что нельзя было бы проверить на числовых знаках.

Производство чисел в процессе постоянно повторяемого перехода от числа n к ближайшему числу n' находит себе методическое выражение *в определении и в умозаключении через совершенную индукцию*, которые Паскаль и Якоб Бернулли впервые со своей ясностью довели до сознания математиков. Здесь, следовательно, происходит подлинный жизненный нерв математического доказательства. Пример определения через совершенную индукцию дает различение четного и нечетного посредством расчета на первый-второй. Суть его можно изложить в двух предложениях: 1) первое число 1 нечетно; 2) число n' , следующее за числом n , четно или нечетно в зависимости от того, нечетно или четно число n . После того как посредством совершенной индукции значение числа $2 \cdot n$ установлено, что с помощью заключения через совершенную индукцию приходят к выводу, что число $2 \cdot n$ четно для любого n . А так как при отсчитывании оказывается, что число 13 нечетно, можно быть уверенным в том, что сколь далеко мы ни пошли бы в ряду натуральных чисел, мы никогда не встретим такое число n , для которого после удвоения выполнялось бы равенство $2 \cdot n = 13$. Таким образом, приходят к высказыванию, которое справедливо "для всех чисел", хотя их существует бесконечно много и нельзя было бы испытать каждое по отдельности.

Научившись на примере с натуральными числами, можно примерно следующим образом резюмировать основные черты конструктивно-символического познания, господствующего во всей науке (ср. [13]).

α) Если считать, что некоторые операции с данными объектами (Gegebenen) (например, пересчитывание данных множеств) выполнимы над всеми объектами данного рода, и если результат применения этих операций к некоторому данному объекту однозначно определен этим объектом (например, получаемое при пересчитывании некоторого множества число не зависит от того, в какой последовательности брались его элементы), то этот результат полагается признаком, свойственным данным объектам самим по себе (даже если сами операции, обосновывающие смысл этого признака, в действительности не выполняются).

β) Введение знаков расщепляет суждение (например, высказывание "только что услышанная последовательность звуков состоит из большего количества звуков, чем предыдущая", расщепляется на следующие высказывания: "первый раз было 7 звуков; теперь 12; $12 > 7$ "), часть операций, преобразуясь в знаки, делается независимой от данных объектов и их дальнейшего существования (например, $12 > 7$).

γ) Знаки производятся не поодиночке для каждого актуально существующего объекта, они черпаются из потенциального запаса некоего упорядоченного, открытого в бесконечность и развертываемого надежно установленным способом знакового многообразия.

Лейбниц в своем наброске "Mathesis universalis"⁸, который он также называл всеобщей характеристикой, или *ars combinatoria*⁹, следовал своему замыслу распространить алгебраический символизм на все области познания. Однако все, что он сделал в этом направлении, остается на уровне

весьма примитивных попыток¹⁰. Но когда сама математика взламывает старые рамки "учения о числе и пространстве" и порождает такие дисциплины, как *теория множеств, комбинаторная топология, теория групп, абстрактная алгебра*, она благодаря постепенно обогащающемуся и обретающему все большую гибкость символизму реализует в своем историческом развитии добрую часть лейбницевской программы. Приспосабливаясь к обычаям, выработанным в этих более широких рамках, будет разумно обозначить операцию перехода от одного числа к ближайшему к нему, скажем, буквой σ , стоящей перед знаком числа (и, кроме того, ряд натуральных чисел начинать с нуля). Тогда числовой символ *трех* будет выглядеть так: $\sigma\sigma\sigma 0$. Принципиально важнейший шаг в этом направлении — вовлечение в символизм логики. При этом буквы служат для того, чтобы именовать (произвольные) высказывания, и на них распространяется действие основных логических операций: связок "и" ($\cap$), "или" ($\cup$), отрицания ($\sim$) и импликации ($\rightarrow$) (так что, например, знак $a \rightarrow b$ для высказываний означает, что высказывание a влечет высказывание b). И вот оказывается, что с этими логическими формулами можно манипулировать, не нуждаясь в обращении к смыслу логических понятий, что даже само доказательство сводится к действиям над формулами, правила которых могут быть легко и полностью записаны формально, минуя вопрос о смысле полученных формул. Здесь достигается стадия, на которой благодаря *систематическому* символизму содержание математики действительно может быть целиком изложено без слов, в одних только формулах. Математическое мышление обретает тем самым наивысшую надежность и размах. Заметим мимоходом, что отныне более нет нужды использовать как операции, так и отношения. Знак отношения $<$ в формуле $a < b$ (число a меньше числа b) можно теперь интерпретировать как операцию, которая порождает из двух чисел a, b высказывание " a меньше b ". Особую роль в логике играют кванторы*) "существуют" и "все". Например, если $A(x, y)$ — высказывание о любых двух числах x, y , скажем $x = y^2$, то я могу получить высказывание об одном x , не только придавая y некоторое численное значение, например, $A(x, 2)$, " x равно 2^2 ", но также и образуя формулу $\epsilon_x A(x, y)$: существует такое число x , что высказывание $A(x, y)$, " x — квадрат", справедливо. Индекс y при индивидуальном символе ϵ_x квантора указывает на то, что имеется переменная y , которая действием квантора устраняется (элиминируется) из $A(x, y)$.

В этом символизме можно описать, как производятся формулы, каким образом входящие в них переменные могут быть заменены на формулы, как получают аксиомы, можно, наконец, дать правила силлогизма, последовательным применением которых, начиная с аксиом, получают из одних "правильных" формул другие "правильные" формулы. При этом описание строения некоторой формулы неизбежно имеет характер совершенной индукции: новая формула возникает путем присоединения символа операции (или квантора) к одной или нескольким, смотря по обстоятельствам, уже готовым формулам. Именно в этом и выражается *специфическая система-*

*) Здесь и далее в этой статье Вейля "квантор" — "quantifikator". — *Примеч. ред.*

тика математической символики, благодаря которой и не следует пугаться столь высокой сложности математических формул. Рассматривая готовую комбинацию знаков, можно увидеть, является ли она формулой. Но остается непредсказуемым, какая формула окажется правильной в "игре доказательства": мы не обладаем истиной, она должна получаться от случая к случаю в результате наших действий. Дело в том, что в силлогизме из двух формул выводится третья, более краткая, чем формулы посылок, в результате в процессе доказательства расширение и сжатие формул чередуются. Это можно добавить в качестве еще одного решающего факта δ) к трем другим характерным чертам конструктивного познания, которые были проанализированы в пунктах α), β), γ). Противоречие возникло бы в том случае, если бы одно доказательство привело бы в конечном счете к формуле a , а другое — к ее отрицанию $\sim a$.

Хотя в период разработки формализма господствовало убеждение, что формулы суть отображения более абстрактных и, главное, более истинных математических высказываний, они и манипуляции с ними не были самоцелью; формулы служили для того, чтобы выразить и передать математические факты. Тогда, в самом начале двадцатого столетия, еще до того, как формализм принял до некоторой степени окончательный облик, произошли два события: во-первых, обнаружилось, что неограниченное применение кванторов фактически приводит к противоречиям, и, во-вторых, Брауэр (еще в своей диссертации "Over de grondslagen der wiskunde"¹¹, Амстердам и Лейпциг, 1907) выяснил, что принцип tertium non datur¹² не может апеллировать к очевидности, если он применяется к высказываниям, в которых кванторы "существуют" и "все" относятся не к множеству отдельно указанных объектов, а к бесконечным множествам, таким, как, например, множество натуральных чисел или даже множество всех возможных бесконечных последовательностей таких чисел. В результате открылись два пути: брауэровский интуиционизм, который ограничивается наглядно очевидными высказываниями (основанными на математической праинтуиции) и не превращает открытый в бесконечность ряд натуральных чисел в замкнутую область существующих самих по себе элементов, и гильбертовский формализм, в котором высказывания заменены лишенными смысла формулами, и поэтому применение кванторов ограничивается лишь заботой о том, чтобы не возникало никаких противоречий. В результате такого переосмысления, в котором истинность отдельного математического положения не принимается во внимание, а значение придается только непротиворечивости системы, Гильберт предложил проект спасения классической математики во всем ее объеме [9, 10]¹³.

Ясно, что для одного и для другого направления символы играют совершенно различную роль: для Брауэра они, принадлежа, подобно словам, языку, являются всего лишь вспомогательными средствами для представления и передачи математических положений и мыслей. Для Гильберта символы, хотя они и ничего не значат — или даже именно поэтому, — являются субстанцией математики. Говоря возвышенно, вначале был знак. Впрочем, и Гильберту известны знаки-посредники, которые появляются в структуре языкового описания способа обращаться с формулами. Они,

однако, не имеют ничего общего с символами, из которых построены сами формулы, и правильный путь состоит в том, чтобы уже посредством внешнего облика предохранить от смешения эти два сорта знаков. Непротиворечивость следует доказывать путем содержательно-наглядных рассуждений, предметом которых являются математические формулы. Здесь уже не играют, а мыслят, и в этих метаматематических" рассуждениях вполне уважаются границы, положенные Брауэром содержательному мышлению.

Замысел доказать таким образом непротиворечивость классической математики вызвал серьезные сомнения благодаря глубокому открытию К. Гёделя. Доказательство возможно только для ограниченной части математики, да и здесь еще закрадывается сомнение. Как ни крути, а *очевидность* (*Evidenz*) остается последним источником истины и познания. Брауэр основывал на ней математику, Гильберт — уверенность в (ожидаемой) непротиворечивости математики. Но очевидность никогда не может привести к установлению окончательных правил и уберечь от заблуждения. Поэтому границы, до которых простирается брауэровская математика, остаются смутными; и нельзя быть также уверенным в том, что, строя математические рассуждения в соответствии с гильбертовской программой, разные авторы порой не перегнут палку в отношении очевидности.

Однако факт остается фактом: мы обладаем простым формализмом, который охватывает всю математику, какую мы имеем по сей день, и который *до сих пор не приводил к противоречиям*. Он обеспечивает несравненную надежность математическим операциям. Можем ли мы удовольствоваться этим? Должна ли, в самом деле, непротиворечивость быть гарантирована *на веки вечные* или же мы можем не предпринимать без надобности никакой ревизии формализма до тех пор, пока в нем фактически не появится противоречие? Математику такое отречение дается с трудом. Физик работает с физическими законами, которые подтверждаются тем, что находятся в согласии со всеми известными явлениями. Для него само собой разумеется, что он должен быть всегда готов к тому, что однажды, в силу каких-либо новооткрытых фактов, эти законы будут отброшены.

Предчувствие всего описанного здесь развития математики есть у Николая Кузанского, и определеннее — у Лейбница. Они видят в символике представление божественного мира идей, непосредственно не доступного человеческому мышлению. Интуитивное познание, ограниченное у человека, всеведуще у Бога. Конечно, как Кузанец, так и Лейбниц еще очень далеки от строгой формулировки Гильберта. Отсутствует расслоение на свободную, чисто символическую "формальную математику" и лежащую над ней "интуитионистскую" математику, содержательные рассуждения которой направлены только к тому, чтобы доставить свидетельства в пользу непротиворечивости нижнего слоя, — хотя мысль Кузанского была, кажется, недалеко от того, чтобы доказать посредством непротиворечивости конечного символизма по меньшей мере *возможность* закрытого от нас, трансцендентного божественного мира¹⁴.

С точки зрения современных исследователей в области обоснования математики не лишено интереса вернуться к старому спору о том, яв-

ляются ли числа самостоятельными идеальными объектами, источник которых находится в наглядно исполнимых актах сознания, как думали Дедекин, Фреге и Брауэр, или же, как утверждали Гельмгольц и Гильберт, теория чисел имеет дело только с конкретными числовыми знаками. Положим, сущность числа дана нам в чистом созерцании; трудно поверить, однако, чтобы таким образом могло бы быть дано число 10^{11} (приблизительно таким числом долларов исчисляется годовой бюджет США). Было бы бесполезно выписывать это число в виде ряда черточек, да это и практически невозможно. Чтобы узнать, что здесь имеется в виду, нужно (согласно Дедекинду, а также и Брауэру) пройти через *бесконечное*, а именно, сначала методом совершенной индукции определяют для любого числа n число $10 \cdot n$, а затем, начиная с 1, одиннадцать раз подряд проводят умножение на 10. Впрочем, и здесь остается некая неясность — по меньшей мере для того, кто не способен верить в числа как в некую готовую систему наличных сущностей. Ведь совершенная индукция указывает на безгранично простирающуюся возможность, которая тем не менее не осуществлена в том объеме, который требуется числом 10^{11} . Простейший ответ на это сомнение находят у Гильберта: 10^{11} является для него сокращением символа, который легко может быть эксплицирован в формализме. Как бы дело ни решалось, но коль скоро найден надежный способ обращаться со знаками, "знают, как быть", и спор о мнениях и словах теряет смысл.

Если формальная математика больше не претендует на установление истинных утверждений, следует задать вопрос, какую же тогда цель она вообще ставит перед собой. Ответ Кузанского и Лейбница, что математика будто бы отражает в конечных символах идеи, которыми Бог обладает в непосредственной интуиции бесконечного, в наше время находит мало сочувствия, и он во всяком случае слишком односторонне теологичен. Убедительней звучит указание на *естественно-научное* применение математики, на роль, которую она играет при конструктивном построении теории реального мира в физике. В этом случае мы можем обратиться к проверке теоретической конструкции посредством опыта и предсказаний. Ситуация, которую мы застаем в *теоретической физике*, никоим образом не соответствует идеалу, который выдвинул и осуществил в своей математике Брауэр, а именно, чтобы каждое суждение имело бы свой собственный, наглядно реализуемый смысл. Законы физики, взятые по отдельности, вовсе не обладают проверяемым в опыте содержанием. Только теоретическая система в целом может быть сопоставлена с опытом. Может быть, и верно, что физическое измерение должно, как часто утверждается, иметь дело лишь с установлением неких совпадений, тем не менее надо признать, что наш интерес в первую очередь состоит не в том, чтобы фиксировать то деление шкалы, на которое указывает стрелка, а в идеальных положениях, которые, согласно теории, проявляются в этих совпадениях, но смысл которых не реализуется ни в каком данном созерцании, — как, например, положение о том, что электрон есть универсальный элементарный квант электричества. Движимые метафизической верой в реальность внешнего мира, мы исследуем символические формы

трансцендентного и испытываем удовлетворение от того, что они подтверждаются в опыте. В результате я прихожу к следующей точке зрения [13, с. 420]: если брать математику саму по себе, надо вместе с Брауэром ограничиться благоразумными истинами, в которые бесконечное входит только как открытое поле возможностей. Нельзя выдумать ничего, что вывело бы за эти рамки. В естествознании, однако, мы касаемся сфер, вовсе недоступных наглядному созерцанию. Познание в этом случае необходимо становится символическим, и если математика вовлекается физикой в процесс теоретического конструирования мира, то при этом нет необходимости в том, чтобы математическое могло быть изолировано в этой конструкции в качестве особой области наглядно достоверного. На этой более высокой вершине, с которой вся наука видна как нечто единое, я склонен в принципиальном отношении воздать должное Гильберту.

При этом, однако, мне хотелось бы обсудить следующее: "математический экзистенциализм", выражающийся в символике кванторов, хорош и верен до тех пор, пока речь идет о развитии *общей теории*. Когда же в каком-нибудь *конкретном случае* должно быть сделано определенное численное предсказание (хотя и не точное, а всегда приближенное), нужно попытаться реализовать символически удостоверенное существование путем его явной реализации, согласно принципиальному требованию брауэровской математики. Это можно пояснить на примере чисто математической теоремы, скажем, теоремы о существовании корней алгебраического уравнения. Известное и вполне приемлемое для формальной математики доказательство этой "основной теоремы алгебры" оказывается недостаточным, если речь идет о действительном вычислении корней, исходя из коэффициентов, или, точнее говоря, если необходимо найти способ все более и более точного определения корней, когда точность, с которой определяются коэффициенты, безгранично растет. Поэтому я нахожу уместным обратиться к современному математику с таким призывом: если ты умеешь решать проблему явно конструктивным путем, не ограничивайся чисто экзистенциальными доказательствами!

Числа и математические символы составляют не только строительный материал, из которого подлинная теоретическая наука о природе стремится воздвигнуть свое здание; наряду с этим на протяжении всей истории человеческого духа существовала *магия чисел*, которая делает число символом земной и божественной действительности в совершенно ином смысле. Простое выражение и причудливое смешение обеих форм мы находим уже у Пифагора, этой таинственной личности в духовной истории Греции. Нечетные и четные числа, по Пифагору, представляют мужской и женский принципы. Число 4 — квадрат — становится символом справедливости (не является ли следом подобных представлений английское выражение "square deal"?). Для каждого числа от 2 до 7 у народов всех эпох и регионов можно указать множество магических значений; 3 и 7 играют особо выдающуюся роль, но во многих местах излюбленным является также и 9, "число ангелов"⁵. В своей "Vita Nuova" (XXX, 26—27) Данте говорит о Беатриче, что число 9 было числом ее подлинной сущности. Но и при самой рафиниро-

ванной разработке *теоретико-числовые* свойства, которые приписываются числам в качестве источников их магической силы, всегда остаются *простыми* (математик сказал бы — слишком простыми). "Совершенные числа" Пифагора (отыскание которых, заметим мимоходом, составляет нетривиальную, хотя и бесплодную, математическую проблему*) — это самое сложное, что мы здесь находим. Платон перенял большую часть пифагорейской числовой мудрости, но число жителей идеального города¹⁶, которое он положил равным $5040 = 7!$, а также очень нежно описанное число, выражающее возраст зрелости в "Государстве", является, как кажется, его собственным нумерологическим изобретением. Августин и Филон много содействовали "теоретико-числовой экзегезе"**) Священного писания. Средние века страстно предавались числовой магии. В народных суевериях до сих пор кое-что из этого сохранилось вживе, например, ужас перед числом тринадцать¹⁷. Я причисляю сюда и астрологию — даже в том случае, когда ею прельщался такой просвещенный и глубоко проникший в истину ум, как Кеплер. Может быть, стоит проследить все это в исторической взаимосвязи, но от меня не надо ждать здесь более подробного обсуждения этой стороны математического символизма. Я хотел бы только указать на одну черту, которая кажется характерной для этого способа мышления: то, что имеет значение в магии чисел, — это их *теоретико-числовые* свойства; то, что имеет значение в естествознании, — их свойства в качестве *величин*. С точки зрения величины нет особой разницы, будет ли число жителей города 5040 или 5039; с точки зрения теории чисел между ними расстояние, как от земли до неба; например, число $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ имеет много частей, тогда как 5039 — простое число. Если в идеальном платоновском городе ночью умрет один житель и число жителей уменьшится до 5039, то весь город сразу придет в полный упадок. Пожалуй, одно из наиболее фундаментальных обстоятельств, которому Лейбниц пытался найти выражение в своем принципе непрерывности, состоит в том, что числа входят в объяснение природы благодаря тому, что они имеют характер величин, а не благодаря своим теоретико-числовым свойствам. Современный алгебраист сказал бы, что ситуация определяется не конечными, а бесконечными точками рациональных числовых полей. Было бы, может быть, очень забавно, если бы дела обстояли иначе, но они именно таковы¹⁸.

В занимательной книге Э.Т. Белла "Магия чисел" звучит неприкрытый страх, что в априоризме Эддингтона, в его попытках вывести путем теоретико-познавательных рассуждений постоянную тонкой структуры — $1/137$ или количество элементарных частиц, находящихся в мире, равно как и в современной квантовой физике, нумерология снова, как уже однажды у Пифагора, стремится затемнить количественное естествознание. Относительно принципа нумерологического толкования мира Белл признает:

* Число n совершенно, если сумма его делителей, включая 1, равна n . Наименьшее совершенное число $6 = 1 + 2 + 3$.

**) Экзегеза (экзегетика) — от греч. *ἐξήγησις* — объяснение. Богословская дисциплина, занимающаяся толкованием Священного писания. — *Примеч. пер.*

"Это была великая мечта, столь же простая и столь же детская, сколь и великая". Но это была только "мечта", и нумерология остается для него псевдонаукой. Его беспокоит только, что "с двадцатых годов ее популярность выросла, как ни в какую другую эпоху, начиная с шестнадцатого столетия". Иначе оценивает дело О. Беккер. В конце одной ранее уже цитировавшейся статьи он делает следующее замечание по поводу высказываний Гильберта, фон Неймана и Нордхайма об основаниях квантовой механики: "Таким образом, в "толкование" природы как бы вторгаются с законченным, онтологически непонятым "математическим аппаратом" в руках: подобно магическому ключу, аппарат раскрывает физические проблемы — но раскрывает их лишь в смысле символического представления, а не в смысле интерпретации, действительно "открывающей" феномены в их взаимосвязи". И он заканчивает словами: "Главное направление этих символических путей древне, архаично и даже "предисторично": новейшая "точная" наука снова становится магией, из которой она когда-то родилась". Кто прав, Беккер или Белл? Что одним — сова, другим — соловей!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Becker Oskar*. Das Symbolische in der Mathematik // *Blätter für deutsche Philosophie*. — 1927/28. — Bd 1. — S. 329 — 348 (выпуск, посвященный символизму).
2. *Bell Eric Tempel*. The magic of numbers. — N.Y.: McGraw-Hill, 1946.
3. *Bernays P.* Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie // *Blätter für deutsche Philosophie*. — 1930. — Bd 4. — S. 326—367 (двойной выпуск посвященный философским основам математики).
4. *Brouwer L.E.J.* Intuitionisme en Formalisme. — Groningen, 1912. (Английский перевод: *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1913/14. — V. 20.)
5. *Brouwer L.E.J.* Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. — *Math. Ann.* — 1924. — Bd 93. — 1926. — Bd 95. — 1927. — Bd 96.
6. *Cassirer E.* Philosophie der symbolischen Formen, Teil I: Die Sprache. — Berlin, 1923.
7. *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // *Monatsh. Math. Phys.* — 1931. — Bd 38. — S. 173—198.
8. *Helmholtz H.* von. Zählen und Messen // *Wissenschaftliche Abhandlungen*. — Bd 3. — S. 356.
9. *Hilbert David*. Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung // *Gesammelte Abhandlungen*. — Bd 3. — Berlin, 1935. — S. 157 — 177¹⁹.
10. *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. — Bd 1. — Berlin, 1934. — Bd 2. — Berlin, 1939²⁰.
11. *Noack Hermann*. Symbol und Existenz der Wissenschaft. — Halle: Saale, 1936.
12. *Vossler Karl*. Sprache und Wissenschaft // *Geist und Kultur in der Sprache*. — Heidelberg, 1925.
13. *Weyl H.* Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen // *Eranos-Jahrbuch*, 1948. — Zürich: Rhein-Verlag, 1949. — S. 375—431.
14. *Weyl H.* Philosophy of Mathematics and Natural Science. — Princeton (N.J.): Princeton University Press, 1950.
15. *Wittgenstein L.* Tractatus logico-philosophicus. — N.Y.: 1922²¹. (Немецкое издание — Berlin, 1922.)

ЕДИНСТВО ЗНАНИЯ

Доклад на Конференции,
посвященной двухсотлетию Колумбийского университета

Нынешнее торжество, на котором мне предоставлена честь выступить перед вами с докладом на нашу общую тему "Единство знания", напоминает мне, и вы сейчас поймете почему, о другом двухсотлетнем юбилее, состоявшемся четырнадцать лет назад в соседнем университете города Братской Любви¹. Слова, которыми я начал тогда свой рассказ о "Математическом способе мышления", звучат как предвосхищение темы моего сегодняшнего выступления; я повторю их:

"В процессе мышления мы пытаемся постичь разумом истину; наш разум стремится просветить себя, исходя из своего опыта. Поэтому, подобно самой истине и опыту, мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое... Правда, существуют — скорее внешне — некоторые специфические особенности и различия; так, например, процедуры установления фактов в зале суда и в физической лаборатории заметно различаются". То же убеждение с еще большей силой выразил отец нашей западной философии Декарт, который сказал: "Все знания в целом являются не чем иным, как человеческой мудростью, остающейся всегда одинаковой, как бы ни были разнообразны те предметы, к которым она применяется, и это разнообразие имеет для нее не более значения, нежели для Солнца разнообразие освещаемых им тел".

Но сформулировать этот тезис в его общем виде легче, нежели отстаивать его в деталях, если начать обозревать различные области человеческого знания. Эрнст Кассирер, столь тесно связанный в последние годы жизни с этим университетом, поставил своей целью докопаться до корня единства человеческого "я" с помощью своего собственного метода, впервые развитого в его великом труде "Философия символических форм"². Его яркий "Очерк о человеке", написанный впоследствии в этой стране и опубликованный издательством Йельского университета в 1944 г., представляет собой пересмотренный и сжатый вариант этого труда. В нем Кассирер пытается ответить на вопрос "Что есть человек?" с помощью всепроникающего анализа разновидностей культурной деятельности человека и его творений: языка, мифа, религии, искусства, истории, науки. Кассирер находит, что общей особенностью, присущей им всем, является символ, символическое представление. Кассирер усматривает в них "нити, которые образуют символическую сеть, сплетенную сеть человеческого опыта". "Человек, — говорит Кассирер, — давно не живет только в физическом мире, он живет в некоем символическом мире". Так как "разум — весьма адекватный термин, долженствующий охватить все формы культурной жизни человека во всем их богатстве и разнообразии", определение человека как *animal rationale*³ лучше было бы заменить определением *animal symbolicum*⁴. Изучение этих символических форм на основе подходящих

структурных категорий должно в конечном счете стремиться к тому, чтобы продемонстрировать их как "органичное целое, связанное не с помощью *vinculum substantiale*, а с помощью *vinculum functionale*"⁵". Кассирер приглашает нас взглянуть на них как на "многообразные вариации на общую тему" и полагает задачу философа в том, чтобы "сделать эту тему слышимой и доступной пониманию". Тем не менее многое из того, что восхищает меня в проводимом Кассирером анализе, свидетельствующем об уме редкой универсальности, культуры и интеллектуального опыта, ход его рассуждений в том виде, как их можно проследить в его книге, напоминает скорее сюиту из бурре, сарабанд, менуэтов и жиг, чем вариации на одну тему. В заключительном разделе он сам подчеркивает, что "напряженности и трения, сильные контрасты и глубокие конфликты между различными способностями человека не могут быть сведены к общему знаменателю". Он находит утешение в мысли о том, что "эта множественность и разнообразие не означают несогласие или дисгармонию" и приводит к заключению слова Гераклита: "Гармония противоположностей, как у лука и лиры". Не исключено, что человек не может надеяться на большее, но разве я заблуждаюсь, когда чувствую, что Кассирер заканчивает, так и не выполнив обещанное?

В этой дилемме позвольте мне теперь сначала снять завесу, покрывающую ту специальную область знания, в которой я накопил опыт благодаря моим собственным исследованиям — естественные науки, включая математику. Даже здесь возникали сомнения относительно их методологического единства. Однако мне подобные сомнения кажутся необоснованными. Следуя Галилею, метод естественных наук (*science*) в общих чертах можно описать как комбинацию пассивного наблюдения, уточненного с помощью активного эксперимента, с той символической конструкцией, к которой в конечном счете сводятся естественнонаучные теории. Воплощением сказанного является физика. Ганс Дриш и холистическая школа провозгласили для биологии методологический подход, отличный от подхода физики и выходящий за рамки последнего. Никто не сомневается, однако, что законы физики выполняются для тела любого животного или моего собственного так же, как и для камня. Попытки Дриша доказать, что органические процессы не допускают механического объяснения, основаны на слишком узком понимании механического, или физического, объяснения природы. Квантовая физика открыла здесь новые возможности. С другой стороны, целостность не является отличительной чертой только органического мира. Каждый атом уже представляет собой вполне определенную структуру; ее организация служит основой возможных организаций и структур самой высокой сложности. Я отнюдь не хочу сказать этим, будто мы гарантированы от сюрпризов в будущем развитии науки. Недавно мы были свидетелями поразительнейшей неожиданности — перехода от классической физики к квантовой. Аналогичные резкие переходы в будущем могут оказать сильное воздействие на эпистемологическую интерпретацию подобно тому, как это произошло с понятием причинности; однако нет никаких признаков того, что сам основной метод — символическая конструкция плюс опыт — претерпит изменения.

Нельзя не признать, что по пути к своей цели — символической конструкции — естественно-научные (scientific) теории проходят предварительные стадии, в частности, стадию классификации, или морфологии. Классификация растений по Линнею, сравнительная анатомия Кювье — первые тому примеры; сравнительное языкознание или юриспруденция — их аналоги в области гуманитарных (historical) наук. Те свойства, которые в естествознании определяются с помощью экспериментов, воспроизводимых в любом месте и в любое время, *универсальны*; они обладают эмпирической необходимостью, вытекающей из законов природы. Но наряду с этой областью необходимого остается некоторая область *контингентного*. Единый космос — звезды и диффузная материя, Солнце и Земля, растения и животных, обитающих на Земле — все это мир случайных или единичных явлений. Нас интересует их эволюция. Примитивное мышление даже ставит вопрос "Как это произошло?" раньше вопроса "Каким образом это существует?". Вся история в собственном смысле занимается изучением развития одного единичного явления: человеческой цивилизации на Земле. Однако если опыт, накопленный естествознанием за его собственную историю, чему-нибудь и учит, так это тому, что в этой области знание законов и внутреннего строения вещей должно достичь достаточно высокого уровня, прежде чем можно надеяться понять или гипотетически реконструировать их генезис. Из-за недостатка того знания, которое сейчас медленно собирает генетика, все рассуждения о наследственности и филогенезе, толчок которым в последние десятилетия XIX столетия был дан дарвинизмом, оказались большей частью преждевременными. У Канта и Лапласа было прочное основание — закон тяготения Ньютона, когда они выдвинули свои гипотезы о происхождении нашей планетной системы⁶.

После того, как мы бросили беглый взгляд на методы естествознания, одинаковые во всех его областях, своевременно указать теперь границы науки. Загадка, которую ставит двоякая природа эго, заведомо лежит вне этих границ. С одной стороны, Я — реальный индивидуальный человек, рожденный матерью и обреченный на смерть, совершающий реальные физические и психические акты, один из многих (слишком многих, как кажется, когда случается ехать в переполненном вагоне подземки в часы пик). С другой стороны, Я — "видение", открытое разуму, самопроникающий свет, имманентное осмысляющее сознание, или как там еще вы бы ни называли это, и в качестве такового я уникален. Поэтому я могу сказать себе как то, что "Я мыслю, я реален и ограничен в своих возможностях (conditioned)", так и то, что "Я мыслю, и в своем мышлении я свободен". С еще большей отчетливостью, чем в актах волеизъявления, решающий момент в проблеме свободы проявляется, как заметил Декарт, в теоретических актах. Рассмотрим, например, предложение " $2 + 2 = 4$ "; не вследствие слепой естественной причинности, а потому, что я вижу, что $2 + 2 = 4$, это суждение как реальный психический акт формируется во мне, и мои губы произносят такие слова: "Два плюс два равно четырем". Реальность, или царство Бытия, не замкнуто, а открыто навстречу Смыслу (Meaning) в данном эго, где Смысл и Бытие сливаются в нерасторжимый союз, хотя

наука никогда не скажет нам, как это происходит. Реальный источник свободы сокрыт от нас.

И все же ничто не известно и не открыто мне более, чем этот таинственный "брачный союз света и тьмы", самопроникающего сознания и реального бытия, каковым являюсь я сам. Доступное мне есть мое внутреннее знание самого себя, знание, посредством которого я постигаю свои собственные акты восприятия, мышления, воли, переживания и действия с помощью способа, полностью отличного от теоретического знания, представляющего в символах "параллельные" процессы, происходящие в головном мозге. Это внутреннее постижение мною самого себя является основой более или менее тонкого понимания моих сотоварищей — людей, которых я воспринимаю как однотипных себе существ. Разумеется, их сознание я не могу постигнуть таким же способом, как свое собственное, тем не менее это мое "интерпретационное" понимание есть признание бесспорной адекватности их сознания моему. Герменевтическая интерпретация характерна для исторических наук так же, как символическая конструкция — для наук естественных. Ее проясняющий свет падает не только на моих сотоварищей — людей; он проникает, становясь все более слабым и расплывчатым, глубоко в животное царство. Узкое мнение Канта о том, что мы можем ощущать сострадание к другим живым существам, но не можем разделять с ними радость, справедливо высмеял Альберт Швейцер, вопрошавший: "Разве ему не случалось видеть истомленного жаждой быка, возвращающегося домой, чтобы напиться?" Бесплезно клеймить такое следование природе "изнутри" как антропоморфное и превозносить объективность теоретического построения, хотя нельзя не признать, что пониманию по той самой причине, что оно *конкретно* и *полно*, недостает свободы "полого символа". Оба пути идут как бы в противоположных направлениях: то, что является наиболее темным для теории, для человека представляется наиболее ясным для понимания изнутри; что же касается элементарных неорганических процессов, наиболее легко достигаемых для теории, то истолкование (interpretation) не находит к ним вообще никакого подхода. В биологии оно может служить путеводной нитью, подводящей к важным проблемам, хотя и не приводит к объективной теории как их разрешению. Такие телеологические высказывания, как "рука — для того, чтобы хватать, глаз — для того, чтобы видеть", вынуждают нас к установлению того, что внутренняя материальная организация позволяет руке и глазу решать эти задачи в соответствии с физическими законами (которым они подчиняются как и любой неодушевленный объект).

Я не поддаюсь искушению и не стану вводить здесь идею дополнительности, предложенную профессором Бором, применительно к двум противоположным подходам, которые мы здесь обсуждаем⁷. Но прежде чем мы пойдем дальше, я считаю необходимым сказать еще кое-что о конструктивных процессах математики и физики.

Демокрит, сознавая, что чувственные свойства — не более чем результат воздействия внешних раздражителей на наши органы чувств и, следовательно, не более чем кажимости, утверждал: "Сладкое и горькое, холодное и теплое, равно как и цвета, — все это существует лишь в мнении,

но не в реальности ($\nu\delta\mu\omega$, $\text{o}\acute{\upsilon}$ $\phi\acute{\upsilon}\sigma\epsilon\iota$)⁸; что действительно существует, так это неизменяемые частицы — атомы, которые движутся в пустом пространстве”. Следуя его призыву, основатели современного естествознания Кеплер, Галилей, Ньютон с одобрения философов Декарта, Гоббса, Локка отвергли чувственные свойства — ввиду их субъективности — как строительный материал объективного мира, который отражают наши чувственные восприятия. Вместе с тем они были приверженцами объективности пространства, времени, материи и, следовательно, движения и соответствующих геометрических и кинематических понятий. Так, например, Гюйгенс, создавший волновую теорию света, вполне осознанно утверждал, что пучки света различной окраски являются *в действительности* колебаниями эфира, состоящего из крохотных частиц. Но вскоре возникли сомнения в объективности пространства и времени. Сегодня мы с трудом понимаем, почему интуитивные представления о пространстве и времени считались столь заслуживающими внимания. К счастью, аналитическая геометрия Декарта явилась средством, позволившим избавиться от этих интуитивных представлений и заменить их числами, т.е. одними лишь символами. В то же время она научила, как вводить такие скрытые характеристики, как, например, инертная масса тела, не определяя их явно, а постулируя простые законы, которым подчиняются наблюдения за взаимодействующими телами. Кульминация всего этого — чисто символическая конструкция, не использующая в качестве материала ничего, кроме свободных творений разума: символов. Монохроматический пучок света, который для Гюйгенса был в действительности волной эфира, теперь стал формулой, выражающей некоторый неопределенный символ F , называемый электромагнитным полем, как определяемую математически функцию четырех других символов x , y , z , t , называемых пространственно-временными координатами. Ясно, что теперь слова “в действительности” следует взять в кавычки; кто мог бы всерьез претендовать теперь на то, что символический конструкт и *есть* истинный реальный мир? Объективное Бытие — реальность — становится трудно уловимым, и наука не претендует более не воздвижение сублимированного, истинно объективного мира над той юдолью печали, в которой протекает наша повседневная жизнь. Разумеется, каким-то образом необходимо установить связь между символами и данными нашего чувственного опыта. Фундаментальную роль здесь играют, с одной стороны, законы природы, представленные с помощью символов (а отнюдь не какие-то явные “интуитивные” определения значения символов); с другой же стороны, — конкретно описанные процедуры наблюдения и измерения.

Так возникает теория природы, которая только как единое целое может быть противопоставлена опыту, в то время как отдельные законы, из которых она состоит, взятые сами по себе, лишены содержания, доступного проверке. Это расходится с традиционным представлением об истине, рассматривающим отношение между Бытием и Знанием с позиций Бытия, которое может, пожалуй, быть, сформулировано следующим образом: “Любое утверждение указывает на какой-то факт, и оно истинно, если

факт, на который оно указывает, таков, как о нем утверждается". Истина физической теории — иного рода.

Квантовая теория пошла дальше еще на один шаг. Она показала, что наблюдение всегда сопряжено с неконтролируемым вмешательством, так как измерение одной величины неизбежно отражается на вероятности измерения некоторой другой величины. Тем самым объективное Бытие, которое мы надеемся построить как один большой кусок ткани, всякий раз разрывается, и у нас в руках остаются лохмотья.

Пресловутый человек с улицы с его здравым смыслом несомненно почувствует легкое головокружение при виде того, во что превращается таким образом та реальность, которая, казалось, окружает его в его повседневной жизни в столь твердой, надежной, не вызывающей ни малейших сомнений форме. Но мы должны обратить его внимание на то, что конструкции физики — всего лишь естественное продолжение тех операций, которые совершает (хотя в основном и несознательно) его собственный разум при восприятии, например, когда объемная форма тела сама служит общим источником различных перспективных видов этого тела. Эти виды мыслятся субъектом — с его континуумом возможных положений — как проявления некоторой сущности, находящейся на следующем, более высоком уровне объективности — трехмерного тела. Выполните этот "конститутивный" процесс, в котором происходит подъем с одного уровня на другой, и вы придете к символическим конструктам физики. Кроме того, все здание покоится на основании, которое делает его обязательным для всякого рационального мышления: весь наш опыт использует только то, что безошибочно "aufweisbar"⁹.

Прошу извинить меня за то, что я прибег здесь к немецкому слову. Поясно его ссылкой на основания математики. Мы пришли к осознанию того, что отдельные предложения классической математики в большинстве случаев имеют так же мало смысла, как и утверждения физики. Тем самым возникла необходимость изменить математику, превратив ее из системы предложений, имеющих смысл, в игру формул, проводимую по некоторым правилам. Формулы состоят из определенных четко различимых символов, столь же конкретных, что и фигуры на шахматной доске. Интуитивное рассуждение требуется и используется только для установления непротиворечивости игры — задачи, решенной к настоящему времени лишь частично; в полном ее решении мы можем не преуспеть никогда. Видимые фигуры, используемые в качестве символов, должны быть, по словам Гильберта, "распознаваемы с достоверностью, независимо от времени и места и независимо от небольших различий и материальных условий их выполнения (например, от того, написаны ли они карандашом на бумаге или мелом на доске)". Существенно также, что символы должны быть воспроизводимы, где бы и когда бы это ни потребовалось. Теперь здесь — прототип того, что мы понимаем под aufweisbar: нечто такое, на что мы можем указать in concreto. Неточность, неотделимая от непрерывности и поэтому неизбежно присущая любым пространственным конфигурациям, преодолевается здесь в принципе, так как используются только отчетливо различимые знаки, а небольшими модификациями считается допустимым

пренебрегать как "не влияющими на их одинаковость". (Разумеется, даже это не исключает ошибок.) Подставляя такие символы один за другим в формулу, как буквы слова, когда оно печатается, мы, как нетрудно видеть, используем пространственную и временную интуицию способом, который значительно отличается от процедуры, образующей пространство в смысле евклидовой геометрии с ее точными прямыми и т.д., — одного из оснований, на которых покоится знание, как учит Кант. То Aufweisbar, с которого мы начинаем, не является столь чистым дистиллятом; оно гораздо более конкретно.

Производимые физиком измерения, например считывание показаний стрелки прибора, также являются операциями, производимыми в сфере Aufweisbaren, — хотя в этом случае необходимо принимать во внимание приближенный характер всех измерений. Физическая теория связывает математические формулы, состоящие из символов, с результатами конкретных измерений.

В этой связи я хочу упомянуть статьи математика и философа Курта Райдемайстера, опубликованные издательством Шпрингера в сборниках 1953 г. и 1954 г. под названиями "Geist und Wirklichkeit" и "Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie". Наиболее важной является работа "Prolegomena einer kritischen Philosophie" в первой книге. Райдемайстер позитивист, поскольку он разделяет мнение о непрерываемой природе фактуального, устанавливаемого наукой; он высмеивает (и, думаю, справедливо) такие глубокомысленные и высокопарные, но пустые заклинания, какие позволяет себе Хайдеггер, особенно в последних своих публикациях. С другой стороны, подчеркивая, что наука не использует наш полный опыт, а отбирает из него то, что является aufweisbar, Райдемайстер оставляет простор для тех иных типов опыта, о которых глубокомысленные пустословы вещают как о своей собственной территории: опыт недоступного нам значимого, противопоставляемого доступному — фактуальному. К такого рода опыту относится интуиция, посредством которой и в которой проявляется и становится зримым прекрасное, воплощено ли оно в вазе, музыкальном произведении или поэме, и рациональный опыт, управляющий нашими действиями и общением с другими людьми; в качестве примера отметим ту легкость, с которой мы сознаем улыбку и отвечаем на нее. Разумеется, физические и эстетические свойства/скульптуры взаимосвязаны; скульптор не даром столь точно соблюдает геометрические пропорции в своей работе, ибо от них зависит тот эстетический эффект, на достижение которого он рассчитывает. Та же взаимосвязь, возможно, еще более очевидная, существует и в области акустики. Однако Райдемайстер вынуждает нас принять наше Nicht-Wissen — наше незнание того, как с помощью теории сочетать эти два аспекта в одном едином царстве Бытия, незнание, сравнимое с тем, что нам не дано проникнуть в единство Я, ограниченного в своих возможностях индивида, и Я, мыслящего себя свободным. Это Nicht-Wissen — защитная стена, за которой Райдемайстер хочет сохранить недоступное для нас значимое от тисков пустопорожнего глубокомыслия и восстановить нашу внутреннюю свободу для подлинного постижения идей. Возможно, я переоцениваю попытку Райдемайстера, которая, несомненно, все еще

носит эскизный характер, когда говорю, что, подобно тому, как философия Канта была основана на ньютоновской физике и создана в соответствии с последней, попытка Райдемайстера исходит из современного состояния оснований математики. И подобно тому, как Кант дополняет свою критику чистого разума критикой практического разума и эстетического суждения, анализ Райдемайстера оставляет простор для иного опыта, нежели того который использует наука, в частности, для герменевтики — процессов понимания и истолкования, на которых базируется история.

А теперь я хотел бы сделать несколько замечаний, касающихся применения кратких терминов "наука" и "история" для обозначения естественных и исторических наук (Natur- und Geistes-Wissenschaften). Первым философом, который полностью осознал значение герменевтики как основного метода истории был Вильгельм Дильтей. Он проследил истоки этого метода вплоть до экзегезы Священного писания. Глава по истории в "Очерке о человеке" Кассирера — одна из наиболее удачных. Кассирер отвергает предположение о какой-то особой исторической логике или особых способах рассуждения, которое было выдвинуто Виндельбаном, а в последнее время в гораздо более впечатляющей форме — Ортегой-и-Гассетом. По его мнению, существенное различие между историей и такими ветвями науки, как, например, палеонтология, занимающаяся изучением отдельных явлений, заключается в необходимости для историка интерпретировать свои "факты-окаменелости", свои памятники и документы как имеющие символическое содержание.

Подводя итог сказанному, я прихожу к такому заключению. В основе всего знания лежит следующее: (1) *интуиция*, обычный для разума акт "видения" того, что ему дано; ограниченная в науке рамками Aufweisbare, интуиция в действительности простирается далеко за эти пределы. Как далеко надлежало бы входить здесь в Wesensschau¹⁰ феноменологии Гуссерля, я предпочитаю оставить во тьме. (2) *Понимание и выражение*. Даже в формализованной математике Гильберта мне необходимо понимать указания, которые даются мне в ходе общения с помощью слов относительно того, как обращаться с символами и формулами. Выражение есть активный аналог пассивного понимания. (3) *Мышление о возможном*. В науке весьма ограниченная форма такого мышлений используется в тех случаях, когда, обдумывая возможности математической игры, пытаются удостовериться в том, что эта игра никогда не приводит к противоречию; гораздо более свободной формой является воображение, с помощью которого придумываются теории. Разумеется, именно здесь лежит источник субъективности относительно того направления, в котором развивается наука. Как некогда признал Эйнштейн, не существует логического пути, ведущего от опыта к теории, и тем не менее решения о том, до какой степени приемлемы теории, в конце концов оказываются однозначными. Мысленное представление возможного имеет такое же значение и для историка, пытающегося оживить прошлое. (4) *Основа, которой является интуиция, понимание и мышление о возможном* позволяет науке совершать некоторые практические действия, а именно, конструировать символы и формулы — в математической области, строить измерительные устройства —

в эмпирической области. Аналога этому в истории не существует. Ее место занимает *герменевтическое истолкование*, которое в конце концов берет начало из внутреннего осознания и познания самого себя. Следовательно, работа великого историка зависит от богатства и глубины его собственного внутреннего опыта. Кассирер находит чудесные слова, характеризующие универсальность интеллектуального и образного, но лишенного сентиментальности проникновения Ранке, позволившего ему воссоздать историю папства и Реформации, Оттоманской империи и испанской монархии.

Бытие и Знание — где следует нам искать их единство? Я пытался ясно показать, что щит Бытия невозвратно разрушен. Нам не следует проливать по этому поводу слишком много слез. Даже мир нашей повседневной жизни далеко *не тот*, каким его склонны считать люди; показать некоторые из тех искажений, с какими его обычно видят, было бы нетрудно. К единству можно прийти только со стороны Знания. В самом деле, разум во всей полноте своего опыта обладает единством. Тот, кто говорит "Я", уже указывает на это. Но именно потому, что перед нами единство, я не могу описать его иначе, чем с помощью таких характерных, опирающихся одно на другое действий разума, как те, которые я только что кончил перечислять. Здесь, как мне кажется, я нахожусь ближе к единству светоносного центра, нежели там, где Кассирер надеялся схватить его, — в сложных символических конструкциях, воздвигнутых этим светом в памяти человеческого рода. Ибо они, и в частности, миф, религия, и — увы! — философия, это весьма мутные фильтры для света истины вследствие того человеческого дара (или, лучше сказать, слабости), благодаря которому он способен неограниченно предаваться самообману.

Чего еще кроме недоговоренностей могли ожидать вы от философского разговора, подобного моему? Если он показался вам чересчур бесцельным, то, простите меня. Однако позвольте мне сделать одно признание. Чтение Райдемайстера заставило меня задуматься над старыми эпистемологическими проблемами, которые в прошлом рассматривались и в моих собственных работах; но мне так и не удалось достичь чего-то нового в их уяснении. Нерешительность разума не слишком способствует согласованности в изложении его идей. Но разве не перестал бы быть философом тот, кто перестал жить в состоянии удивления и умственного беспокойства?

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Краткий обзор, служащий в качестве предисловия к рецензии на книгу "Философия Бертрана Рассела"

I. Сведёние математики к теории типов: логический аппарат. Редукция математики к теории множеств была достижением эпохи Дедекинда, Фреге и Кантора — примерно с 1870 по 1895 гг. Что касается основного понятия теории множеств (которому, по существу, эквивалентно понятие функции), то здесь существуют две противоположных точки зрения: множество понимается либо как совокупность вещей (Кантор), либо как синоним некоторого свойства (атрибута, предиката) вещей. В последнем случае

" x есть элемент множества γ " или — на языке формул — $x \in \gamma$, означает не что иное, как то, что x обладает свойством γ . Свойство быть красным или быть нечетным заведомо первично по отношению к множеству всех красных тел и всех нечетных чисел. С другой стороны, если применительно к какому-нибудь мешку картошки или к какой-нибудь кривой, проведенной карандашом на бумаге, вводится свойство картофелины быть в мешке или точки принадлежать кривой, то данное множество (или более конкретная структура, представляющая множество) первично по отношению к данному свойству. Каково бы ни было эпистемологическое значение этого различия, оно не волнует математика, так как при любом свойстве γ мы можем говорить о множестве γ всех элементов, обладающих данным свойством, и относительно любого данного множества γ мы можем говорить о свойстве быть элементом множества γ . Отдавая термину *множество* предпочтение перед *свойством*, математик свидетельствует о своем намерении рассматривать коэкстенсивные свойства как тождественные: два свойства α и β коэкстенсивны, или равнообъемны, если каждый элемент, обладающий свойством α , обладает и свойством β , и *vice versa*¹ (множество = "Begriffsumfang"² у Фреге). Таким образом, математик отождествит красное и круглое, несмотря на их различные "значения", если любое красное тело в мире окажется круглым и *vice versa*.

Свойство π "быть простым" представлено пропозициональной функцией $P(x)$ (читается " x — простое число") с аргументом x , область допустимых значений которого охватывается понятием "числа". (Натуральные числа 1, 2, 3, ... мы будем называть просто числами; говоря о других числах, мы будем уточнять, о каких именно числах идет речь: рациональных, действительных и т.д.) В самом деле, понимание (ложного) предложения "6 — простое число" требует понимания того, что означает для *любого* числа x быть простым. Таким образом, предложение $P(6)$ возникает из пропозициональной функции $P(x)$ при подстановке $x = 6$. Помимо свойств нам необходимо также рассматривать бинарные, тернарные, ... отношения, представимые пропозициональными функциями от 2, 3, ... аргументов.

Хотя математику не нужно особенно заботиться о том, какой язык — свойств или множеств — используется, он не может позволить себе пренебречь другим различием, иногда ошибочно смешиваемым с различием между двумя языками: различие между тем, что считается *данным*, и тем, что он строит для данного с помощью итерируемой комбинации некоторых явно описанных конструктивных процессов. Например, при аксиоматическом построении элементарной геометрии мы рассматриваем как данные три категории объектов — точки, линии (= прямые) и плоскости — и несколько отношений между этими объектами (такие, как "точка *лежит на* плоскости"). Более сложные отношения должны быть "определены", т.е. построены логически из этих первообразных отношений. В такой интуитивной теории натуральных чисел (арифметике), которая является подлинным основанием всей математики, даже объекты не считаются данными, а строятся из первого числа 1 с помощью итерации одного и того же процесса — прибавления числа 1, в то время как арифметические соотношения строятся логически из одного основного соотношения,

установленного выше: $y = x + 1$ ("за x следует y "). С другой стороны, в феноменологии природы следовало бы иметь дело не только с категориями объектов, такими, как "тела" или "события", но также и с категориями свойств, первичных по отношению ко всей конструкции, например, с континуумом цветовых свойств.

Логическое построение пропозициональных функций из других пропозициональных функций состоит в комбинированном итеративном применении нескольких элементарных операций. Среди них — примитивные логические операторы $\sim$ (не), $\cap$ (и), $\cup$ (или) и два квантора: $\exists x$ "существует x , такой, что" и $\forall x$ "для всех x ". Например, из двух пропозициональных функций $S(x)$, $T(x)$ мы образуем

$$\sim S(x), S(x) \cap T(x), S(x) \cup T(x), \\ (\exists x) S(x), (\forall x) S(x).$$

Кванторы несут аргумент x в качестве индекса и "убивают" этот аргумент в пропозициональной функции, следующей за квантором, так же, как это делает подстановка любого конкретного числа, например, $x = 6$. Арифметические операции $+$ и $\times$ первоначально применимы к числам и переносятся с чисел на функции, в то время как процесс интегрирования по переменной x по самой своей природе относится к функции $f(x)$. Точно так же логические операции $\sim$, $\cap$, $\cup$ первоначально оперируют предложениями, в то время как $(\exists x)$, $(\forall x)$ относятся к пропозициональным функциям, содержащим переменную x . Оператор $\cup$ примитивен в том смысле, что значение истинности (истина или ложь) $a \cup b$ зависит только от значений истинности a и b . То же относится к $\sim$ и $\cap$. Удобно добавить первичный оператор импликации, для которого я использую символ $\rightarrow$, предложенный Гильбертом: $a \rightarrow b$ ложно, если a истинно и b ложно, но истинно для трех других комбинаций: a истинно, b истинно; a ложно, b истинно; a ложно, b — ложно. Предложения без аргументов возникают, когда все переменные исключены с помощью подстановки явно заданных конкретных чисел или с помощью кванторов. Конструкция арифметических предложений и пропозициональных функций составляет их "смысл".

При введении свойств чисел мы считаем известным, что понимается под "любым числом"; мы говорим, что должна быть задана категория элементов, которой принадлежит аргумент в рассматриваемой пропозициональной функции. Мы предполагаем, что эта категория есть замкнутое царство вещей, существующих в себе, или, как мы будем кратко говорить, *экзистенциальна*, если спрашивая относительно данного свойства γ ее элементов, существует ли какой-нибудь элемент, обладающий свойством γ , мы ожидаем, что, каково бы ни было свойство γ , этот вопрос имеет четкий смысл и что либо такой элемент существует, либо каждый из элементов обладает противоположным свойством $\sim \gamma$. В теории чисел или в элементарной геометрии мы предполагаем, что числа или точки, прямые, плоскости образуют экзистенциальные категории в этом смысле. Однако мы рассматриваем только отдельные индивидуальные свойства и отношения и никогда не рассматриваем ничего подобного категории

"всех возможных свойств чисел". В случае теоретико-множественного подхода эта ситуация в корне меняется.

Мы вынуждены рассматривать там свойства чисел x как объекты ξ нового типа, с которыми числа находятся в отношении $x \in \xi$. Предложение "6 есть простое число" рассматривается теперь как возникающее из бинарного отношения $x \in \xi$ при помощи подстановки 6 вместо x и свойства π "быть простым" вместо аргумента ξ . "Связка" $\in$ соответствует слову "есть" в разговорной фразе "6 есть простое число". Любая пропозициональная функция $P(x)$, аналогичная " x есть простое число", порождает соответствующее свойство $\pi = [x]P(x)$ (свойство быть простым числом), такое, что $P(x)$ эквивалентна $x \in \pi$. Оператор $[x]$, осуществляющий переход от пропозициональной функции к соответствующему свойству или множеству, убивает аргумент x . Для однородности обозначений мы будем писать в дальнейшем $\in(x; \xi)$ вместо $x \in \xi$. Точно так же бинарная пропозициональная функция $P(x, y)$ определяет отношение $\pi = [x, y]P(x, y)$, а $\in(x, y; \pi)$ выражает то же, что и $P(x, y)$, а именно — что x и y находятся в этом отношении π .

II. Два примера. В наших последующих рассуждениях мы будем руководствоваться двумя типичными примерами, взятыми из проведенного Дедекиндом теоретико-множественного анализа двух решающих шагов в построении математики: его анализа последовательности чисел (в работе "Was sind und was sollen die Zahlen"³, 1887) и континуума действительных чисел (в работе "Stetigkeit und Irrationalzahlen"⁴, 1872). Предложенная Фреге терминология свойств, а не множеств позволит нам дольше сохранить критическое внимание не притупившимся.

1. Свойство α чисел называется наследственным, если для любого числа x , обладающего свойством α , следующее число $x + 1$ также обладает им. Дедекинд определяет: число b меньше a , если *существует* наследственное свойство, которым обладает a , но не обладает b .

Здесь предполагается, что мы не только знаем, что именно понимается под *любым* свойством, но и свободно используем совокупность всех возможных свойств. Применяя кванторы к свойствам чисел и к самим числам, совершенно необходимо смотреть на свойства как на вторичные объекты, связанные с нашими первичными объектами — числами — отношением-связкой $\in$. Наследственность есть свойство свойств. Чтобы быть последовательными, мы должны мысленно представить себе объекты типа 1 (числа), типа 2 (свойства чисел), типа 3, . . . и фундаментальное отношение $\in(x_n; x_{n+1})$, связывающее переменную x_n типа n с переменной x_{n+1} типа $n + 1$. Пусть $I(\xi)$ означает предложение о том, что ξ наследственно. Эта пропозициональная функция, аргумент которой, обозначенный греческой буквой, относится к категории "свойства (или множества) чисел", имеет следующее определение:

$$I(\xi) = (\forall x) \{ \in(x; \xi) \rightarrow \in(x + 1; \xi) \},$$

а $x < y$ Дедекинд определяет как

$$(x < y) = (\exists \xi) \{ I(\xi) \cap \in(y; \xi) \cap \sim \in(x; \xi) \}.$$

2. Дедекинд, как и Евдокс более чем за 2000 лет до него, характеризует неотрицательное действительно число α множеством всех положительных рациональных чисел (дробей) $x > \alpha$. Для него любое произвольно построенное (непустое) множество α дробей (удовлетворяющее определенному условию, а именно — что оно наряду с любой дробью b содержит любую дробь $> b$) порождает соответствующее действительно число α . Действительно число α — всего лишь *façon de parler*⁵ для этого множества α . Множество α состоит из всех дробей x , удовлетворяющих некоторой пропозициональной функции $A(x)$: $\alpha = [x] A(x)$. Пусть $I(\xi)$ — пропозициональная функция, аргумент ξ которой пробегает свойства дробей. Следовательно, (наибольшая) нижняя грань $\gamma = [x] C(x)$ множества неотрицательных действительных чисел ξ может быть получена как *пересечение* всех множеств ξ , для которых выполняется $I(\xi)$:

$$C(x) = (\exists \xi) \{ I(\xi) \cap (x \in \xi) \}. \quad (1)$$

Так Дедекинд *доказывает*, что любое множество неотрицательных действительных чисел имеет нижнюю грань. В этом случае квантор $(\exists \xi)$ применим ко "всем возможным свойствам дробей".

III. С уровнями или без уровней? Конструктивная и аксиоматическая точки зрения. Остановимся теперь, чтобы поразмыслить над тем, что мы делали. Свойства дробей конструируются с помощью комбинированного итеративного применения некоторого числа элементарных логических операций $O_1, O_2, \dots, O_h$. Назовем любое свойство α , получаемое таким образом, *конструктивным* (*constructable*) свойством или свойством уровня 1. Тогда мы можем интерпретировать $(\exists \xi)$ в определении (1) как "Существует *конструктивное* свойство ξ ", и такое применение квантора законно, если мы уже допустили, что он применим к натуральным числам. Действительно, различные способы, которыми с помощью итерации из h символов $O_1, O_2, \dots, O_h$ можно образовать конечные последовательности, по существу не более сложны, чем возможные конечные последовательности из одного символа 1. Но свойство $\gamma = [x] C(x)$, задаваемое определением (1), заведомо не тождественно по своему смыслу любому из свойств уровня 1, так как оно определено в *терминах совокупности всех свойств уровня 1*. Следовательно, это свойство более высокого уровня — уровня 2. Тем не менее оно может быть коэкстенсивным со свойством уровня 1, и "аксиома сводимости" Рассела утверждает, что это всегда так. Но если свойства конструируются, то здесь нет места аксиоме; перед нами вопрос, решаемый на основе построения; в нашем случае это безнадежное занятие. С другой стороны, здание нашего классического анализа рухнет, если мы будем вынуждены ввести различные уровни действительных чисел, такие, что действительно число принадлежит уровню $l + 1$, если оно определено в терминах совокупности действительных чисел уровня l . Если мы хотим "спасти" доказательство Дедекинда, то нам необходимо отвергнуть конструктивную точку зрения и предположить, что существует *данная* — независимо от всей конструкции — экзистенциальная категория "свойств" или "объектов второго типа" (лишь малую долю которых составляют конструктив-

ные свойства), такая, что выполняется следующая аксиома, заменяющая определение (1): для каждого данного объекта i третьего типа существует объект γ второго типа, такой, что

$$x \in \gamma \cdot \equiv \cdot (\exists \xi) \{ (x \in \xi) \cap (\xi \in i) \}.$$

Здесь аргументы x и ξ относятся соответственно к объектам первого и второго типов, а $\cdot \equiv \cdot$ означает "коэкстенсивны". Это дерзкая, почти фантастическая аксиома: в реальном мире, в котором мы живем, для нее существует мало оснований, и ничто вообще не подтверждает ее среди тех фактов, на которых наш разум основывает свои построения. Предположив, что свойства образуют экзистенциальную категорию данных объектов, мы возвращаемся от Дедекинда, который хотел *построить* действительные числа из рациональных, к Евдоксу, для которого действительные числа были заданы точками на прямой, и вместо того чтобы доказывать существование нижней грани на основе определения действительных чисел, мы принимаем их существование в качестве аксиомы.

Размышляя над источником антиномий, появившихся на горизонте канторовской общей теории множеств, Рассел осознал необходимость различения нескольких уровней [1]*). Нет сомнения в том, что, постигнув эту фундаментальную идею, которую он несколько вольно выразил с помощью своего принципа порочного круга — "ни одно множество не может содержать элементы, определяемые в терминах самого множества", — Рассел излечил болезнь, но, как показал пример Дедекинда, вместе с тем поставил под угрозу саму жизнь пациента. В классическом анализе — математике действительных переменных, каким мы его знаем и каким он применяется в геометрии и физике, континуум действительных чисел различных уровней просто не нужен. Приняв свою аксиому сводимости, Рассел оставил путь логического анализа и от конструктивной позиции перешел к позиции экзистенциально-аксиоматической, совершив тем самым крутой поворот в другую сторону**). После того, как он упразднил таким образом несколько уровней свойств, у него все еще остается иерархия типов: первичные объекты, их свойства, свойства их свойств и т.д. И он находит, что одного этого достаточно, чтобы избежать от известных антиномий. Но в получающейся системе математика основана не на логике, а на своего рода логическом рае, вселенной, снабженной "необходимой обстановкой" весьма сложной структуры и подчиняющейся небольшому числу емких аксиом замыкания. Мотивы ясны, но убеждение в существовании этого

*) Цифры в квадратных скобках означают номер ссылки в списке литературы, помещенном в конце статьи. — *Примеч. пер.*

**) Я очень хорошо знаю, что сказанное расходится с собственной интерпретацией Рассела: со временем он все более и более склонялся к рассмотрению множеств как "логических фикций". "Впрочем, — добавляет Гёдель, — слово "фикция" не обязательно должно означать те вещи, которые не существуют; оно может указывать лишь, что мы не воспринимаем их непосредственно". Во втором издании первого тома "Principia Mathematica" предпринимается попытка доказать независимость от аксиомы сводимости, что по крайней мере все уровни *натуральных чисел* могут быть сведены к пяти нижним уровням. Но, как замечает Гёдель [2], это доказательство не вполне убедительно.

трансцендентного мира подвергает испытанию нашу веру ничуть не в меньшей степени, чем учения отцов церкви или средневековых философов-схоластов.

IV. Мир Рассела. Опишем эту структуру немного подробнее. Даны несколько первичных категорий элементов; они являются областями допустимых значений для низших типов аргументов. В любом отношении каждый из n ($= 1$ или 2 или 3 или $\dots$) аргументов $x_1, \dots, x_n$ относится к некоторому типу $k_1, \dots, k_n$, само отношение — типа $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$, определяемого $k_1, \dots, k_n$; тип k^* выше, чем любая из его компонент. Построим диаграмму, на которой тип k^* изображен точкой, а $k_1, \dots, k_n$ — точками, расположенными в ряд под k^* , и соединим их с k^* прямыми так, как вы изобразили бы некоторого человека k^* и его потомков на генеалогическом древе. При спуске от k^* к его компонентам, а от тех — к их компонентам и т.д. получается "топологическое дерево", в котором каждая *конечная вершина* соответствует одной из первичных категорий: эта диаграмма описывает тип k^* . Фундаментальным является отношение $\in(x_1, \dots, x_n; x^*)$, где $x_1, \dots, x_n$ относятся к данным типам $k_1, \dots, k_n$, а x^* — к $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$. Экзистенциальные категории элементов предполагаются заданными — по одной для каждого возможного типа (включая низшие — первичные — типы). Вначале мы упоминали о том, с какими данными оперирует аксиоматическая элементарная геометрия; рассматриваемый нами теперь "Мир Рассела" U , как видно, должен быть несравненно богаче.

Приведем некоторые из более очевидных аксиом, на которых должна быть воздвигнута ее теория. Универсальная нормальная форма для пропозициональных функций, содержащих n переменных $x_1, \dots, x_n$ данных типов $k_1, \dots, k_n$, есть $\in(x_1, \dots, x_n; a^*)$. Действительно, такое отношение само является элементом a^* типа $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$. Отношение тождества $x = y$ между элементами типа k само есть элемент типа $\{k, k\}$; обозначим его $I = I_k$. Аналогично, пусть $E = E_{k_1 \dots k_n}$ — отношение $\in$ с его $n + 1$ аргументами типов $k_1, \dots, k_n, k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$. Существование этих специальных элементов должно быть явно оговорено.

А к с и о м а 1. Существует элемент $I = I_k$ типа (k, k) такой, что $\in(x, y; I)$ выполняется в том и только в том случае, когда элементы x, y типа k тождественны. Существует элемент $E = E_{k_1 \dots k_n}$ типа $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n; k^*\}$ такой, что $\in(x_1, \dots, x_n, x^*; E)$ коэкстенсивно с $\in(x_1, \dots, x_n; x^*)$; переменные $x_1, \dots, x_n$ и x^* принимают значения из соответствующих категорий $k_1, \dots, k_n$ и $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$.

Составное свойство "красный или круглый" не строится более из описательных свойств "красный", "круглый", а вместе с ними принадлежит категории свойств, задаваемых прежде всей конструкции. Существование его должно быть гарантировано одной из более простых аксиом замыкания.

А к с и о м а 2. Даны элемент a^* и элемент b^* типа $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$. Тогда существует элемент c^* того же типа, такой, что $\in(x_1, \dots, x_n; c^*)$ коэкстенсивно с

$$\in(x_1, \dots, x_n; a^*) \cup \in(x_1, \dots, x_n; b^*).$$

(каждая переменная x_i принимает значения из своей категории k_i).

Подстановка определенного элемента b вместо переменной обеспечивает следующей аксиомой.

А к с и о м а 3. Даны элемент a^* типа $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$ и элемент b_n типа k_n . Тогда существует элемент c типа $k = \{k_1, \dots, k_{n-1}\}$, такой, что $\in(x_1, \dots, x_{n-1}; c)$ коэкстенсивно с $\in(x_1, \dots, x_{n-1}b_n; a^*)$ (если $x_1, \dots, x_{n-1}$ принимают значения из категорий $k_1, \dots, k_{n-1}$).

Исключение переменной x_n с помощью квантора $(\exists x_n)$ преобразует соотношение a^* типа k^* в соотношение a типа k :

А к с и о м а 4. Дан элемент a^* типа $k^* = \{k_1, \dots, k_n\}$. Тогда существует элемент a типа $k = \{k_1, \dots, k_{n-1}\}$, такой, что $\in(x_1, \dots, x_{n-1}; a)$ коэкстенсивно с $(\exists x_n) \in(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; a^*)$.

Это лишь немногие типичные аксиомы, указывающие общее направление. Читателю не следует искать их в "Principia mathematica", выдержанных в другом стиле. Но наша система U воплощает те же идеи в форме, представляющейся мне естественной самой по себе и удобной для сравнения с другими системами W, Z , которые мы сейчас обсудим.

Наши аксиомы служат в качестве основы для дедукции так же, как, например, аксиомы геометрии; дедукция осуществляется с помощью логики того же сорта, на которую мы обычно полагаемся в геометрии или анализе, включая свободное использование кванторов "существует" и "все" для каждого фиксированного типа в иерархии типов и для элементов соответствующих категорий. В то время как эти категории, а также основное отношение $\in$ считаются неопределяемыми, логические термины, такие, как "не" $\sim$, "если $\dots$, то $\dots$ " $\rightarrow$, "существует" $(\exists x)$ и т.д., должны пониматься содержательно и не образуют составную часть аксиоматической системы: формализм символической логики используется только в целях строгости изложения.

Если "Principia Mathematica" призваны были свести основы математики к чистой логике, то результат, как мы теперь видим, оказался совершенно иным: место логики заняла аксиоматическая система мира. Сама ее структура — иерархия типов — не может быть описана без обращения к интуитивному понятию итерации. Поэтому построение — на манер Дедекинда и Фреге — теории натуральных чисел на основе этой системы представляется нам занятием сомнительной ценности.

V. Конструктивный компромисс. Принимая во внимание чрезвычайно трансцендентный характер того аксиоматического мира, из которого исходит эта система при выведении математики, естественно спросить, нельзя ли вопреки всему занять конструктивную точку зрения, которая представляется математику более естественной. Мы принимаем иерархию типов, но предполагаем, что существует только одна категория первичных объектов — числа и только одно основное бинарное отношение между числами, а именно: "за x следует y ". Все остальные отношения различных типов строятся в явном виде, причем кванторы $(\exists x)$ и $(\forall x)$ применяются только к числам, а не к аргументам более высокого типа. Никакие аксиомы не постулируются. То, что мы при этом получаем, составляет основной уровень, или уровень 1. Над ним можно было бы построить второй уровень, содержащий отношения, которые строятся с помощью применения

кванторов к совокупности отношений того или иного типа, конструируемых на первом уровне, и совершить таким же образом переход с второго уровня на третий и т.д. Получилась бы "разветвленная иерархия" типов и уровней. Но, как мы уже упоминали, ничего похожего на наш классический анализ при этом бы не возникло. Искушению превзойти первый уровень следует противиться; вместо этого нужно попытаться по возможности расширить диапазон конструируемых отношений, *расширяя запас основных операций*. А priori ясно, что *итерация* в некоторой форме должна найти место среди таких не сводимых к другим принципам построения — вопреки программе Дедекинда — Фреге.

Начнем еще раз с начала. Пусть $R(x, \xi)$ — бинарная пропозициональная функция двух аргументов x, ξ типов k, κ соответственно, например, отношение " x меньше ξ " между числами. Мы можем тогда говорить о свойстве некоторого числа " $\text{быть меньше } \xi$ " (или о множестве всех чисел, которые меньше ξ). Ясно, что это свойство зависит от ξ . В общем случае мы можем составить $[x]R(x, \xi) = r^*(\xi)$, это элемент типа $\{k\}$, зависящий от ξ и такой, что $R(x, \xi)$ коэкстенсивна с $\in(x; r^*(\xi))$. Если помимо $R(x, \xi)$ мы имеем пропозициональную функцию $S(x^*)$ с аргументом типа $k^* = \{k\}$, то можно построить $T(\xi) = S(r^*(\xi))$ или, в более явном виде,

$$T(\xi) = S([x] R(x, \xi)).$$

Это — *процесс подстановки*, порождающий $T(\xi)$ из $R(x, \xi)$ и $S(x^*)$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $k = \{k\}$. Аргумент и значение функции $r^*(\xi) = [x]R(x, \xi)$ при этом — одного и того же типа k , а всякий раз, когда такое происходит, становится возможной *итерация*. Итак, с помощью полной индукции мы определяем отношение $T(n, \xi)$, в котором аргумент n принадлежит к первичной категории, следующим образом:

$$T(1, \xi) = S(\xi);$$

$$T(n+1, \xi) = T(n, r^*(\xi)), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Добавляя операции подстановки и итерации, как показано в рассмотренных нами примерах, к другим элементарным логическим операциям, но не применяя кванторы ни к чему, кроме чисел, автору удалось — (в работе "Das Kontinuum", 1918*) — построить чисто конструктивным путем и без аксиом значительную часть классического анализа, включая, например, критерий Коши сходимости бесконечных последовательностей действительных чисел **). В этой системе итерация играет такую же роль, какую в теории множеств играет неограниченное применение кванторов. Наша конструкция честно вводит следствия логической идеи, постигнутой Расселом, в башню уровней, которую неукоснительно отвергал Дедекинд, а сам Рассел из опасения вытекающих из нее следствий снес до основания своей аксиомой сводимости. Если принять во внимание их общее происхождение, то аксиоматическая система U в том виде, как она изложена в разделе IV,

*) См. наст. кн. с. 91 — 177. — *Примеч. пер.*

**) Но, разумеется, сохранить теорему о нижней грани произвольного множества неотрицательных действительных чисел было невозможно.

и этот конструктивный подход на удивление различны. Но даже и в этом случае мы придерживались убеждения, что "существует" и "все" имеют смысл, если их применять к натуральным числам: в дополнение к логике мы полагаемся на экзистенциальный символ веры и идею итерации.

VI. Интуиционистская математика Брауэра. Существенно более радикальным шагом вперед к чистому конструктивизму является интуиционистская математика Брауэра [3]. Брауэр отчетливо показал, не оставив, как я думаю, ни малейших сомнений, что не существует никаких фактов, которые подкрепляли бы убеждение в экзистенциальном характере совокупности всех натуральных чисел, и, следовательно, что принцип исключенного третьего в форме "либо существует некоторое число с данным свойством γ , либо все числа обладают свойством $\sim \gamma$ " лишен основания. Первая часть этого предложения есть *абстрагирование* от некоторой констатации факта в форме "построенное так-то и так-то число обладает свойством γ ". Вторая часть имеет гипотетическую общность, утверждая нечто только в том случае, если . . . ; например, если вам действительно дано некоторое число, то вы можете быть уверены в том, что оно обладает свойством $\sim \gamma$. Последовательность чисел, которая вырастает за рамки любой уже достигнутой стадии путем перехода к следующему числу, есть многообразие возможностей, открытое в бесконечность; она навсегда остается в состоянии сотворения, а не в замкнутом мире вещей, существующих в себе. То, что мы слепо превратили одно в другое, является истинным источником наших трудностей, включая антиномии, — источник более фундаментальной природы, чем упомянутый расселовский принцип порочного круга. Брауэр открыл нам глаза и показал, как далеко классическая математика, питаемая верой в "абсолютное", превосходящее все возможности человеческого понимания, выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истину, основанную на опыте. Согласно его точке зрения и историческим изысканиям, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств. (Слово "конечный" здесь надлежит понимать в его точном значении: элементы такого множества предьявляются явно, один за другим.) Тот, кто забывает об это ограниченном происхождении, принимает затем логику за нечто, стоящее над всей математикой и первичное по отношению к ней, и, наконец, без всякого основания применяет ее к математике бесконечных множеств. В этом — падение и первородный грех теории множеств, за который она справедливо наказана антиномиями. Удивительно не то, что такие противоречия возникли, а то, что они проявились на столь поздней стадии игры!

Благодаря понятию "Wahlfolge"⁶, т.е. последовательности *in statu nascendi*⁷, в которой один член за другим *свободно выбирается*, а не определяется по определенному закону, брауэровская трактовка действительных переменных находится в самой тесной гармонии с интуитивной природой континуума; это одна из наиболее привлекательных черт его теории. Но в целом математика Брауэра менее проста и гораздо более ограничена по силе, чем знакомая нам "экзистенциальная" математика. Имен-

но по этой причине огромное большинство математиков колеблются, не решаясь принять его радикальную реформу.

VII. Аксиоматика по Цермело; множества и классы. Совершив этот экскурс на левое крыло "конструктивистов", вернемся к миру U с его иерархией типов. Коль скоро экзистенциальная или аксиоматическая точка зрения выбрана, нельзя ли двигаться в том же направлении и далее и даже стереть все различия между типами, соблюдая только такие предосторожности, которые абсолютно необходимы, чтобы избежать известных противоречий? Именно это сделал Цермело в своих "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" ⁸ (1908) [4]. Его аксиомы оперируют только с одной (экзистенциальной) категории объектов, называемых элементами или множествами, и одним основным отношением $x \in y$ — " x есть элемент множества y ". Но он вынужден поступиться принципом, согласно которому любое вполне определенное свойство γ задает элемент c , такой, что $x \in c$, коль скоро элемент x обладает свойством γ и *vice versa*. Свойства используются им только для того, чтобы выделить подмножества *из данного множества*. Такова его аксиома выделения: "Дано вполне определенное свойство γ и элемент a . Тогда существует элемент a' , такой, что $x \in a'$ в том и только в том случае, когда x есть член a и в то же время обладает свойством γ ". Входящее в аксиому понятие вполне определенного свойства несколько расплывчато. Но мы знаем, что его можно сделать точным, конструируя свойства с помощью итерированного применения комбинаций некоторых элементарных конструктивных процессов. Вместо того чтобы говорить " x обладает свойством γ ", будем говорить, что x есть элемент класса γ : $x \in \gamma$. Тем самым мы проводим различие между элементами или множествами, с одной стороны, и классами — с другой и формулируем аксиомы в терминах двух неопределенных категорий объектов, элементов и классов. Так как мы постулируем, что два элемента a, b тождественны, если $x \in a$ и $x \in b$ коэкстенсивны, и так как каждому элементу a соответствует класс α всех элементов x , удовлетворяющих условию $x \in a$, мы с полным основанием отождествляем a с классом α . Тогда *каждый элемент есть класс*, и аксиомы оперируют с одним неопределяемым фундаментальным отношением $x \in \xi$ — " x есть член класса ξ ", которое поглощает отношение $x \in y$ между элементами, введенное Цермело. Принципы построения свойств заменяются соответствующими аксиомами для классов; например, если даны два класса α и β , то существует класс γ , такой, что утверждение $(x \in \alpha) \cup (x \in \beta)$ о произвольном элементе x коэкстенсивно с $x \in \gamma$.

Так как аксиома выделения может порождать из данного множества только меньшие множества, нам необходим какой-нибудь экипаж, на котором мы могли бы передвигаться в противоположном направлении. Поэтому добавляются две аксиомы, гарантирующие существование множества всех подмножеств данного множества и объединения данного множества множеств. Существенно, что они ограничены множествами-элементами и неприменимы к классам.

С введением классов, которым мы обязаны Френкелю, фон Нейману, Бернаису и другим, аксиомы обретают такой же самостоятельный ха-

ракт, как, например, аксиомы геометрии; такие общие понятия, как "любое корректно определенное свойство", не проникают более в аксиоматическую систему извне. Полный перечень аксиом для этой системы, которую мы обозначим Z , можно найти на первых страницах монографии: Gödel K. Consistency of the Continuum Hypothesis⁹. — Princeton, 1940 (Annals of Mathematical Studies. — N. 3.) [5]. Но еще до начала столетия сам Кантор двигался в том же направлении, различая "непротиворечивые классы" = множества и противоречивые классы [6]. Не иерархия типов, а недопущение в круг хороших "множеств" таких классов, которые слишком "велики", предотвращает катастрофу известных антиномий.

Против такой системы, как Z , можно было бы возразить на том основании, что она не опирается на реальное проникновение в причины антиномий, а латает на скорую руку прорехи в первоначальной концепции Кантора с помощью минимума оговорок, необходимых для того, чтобы избежать противоречий. В самом деле, у нас нет гарантий непротиворечивости Z за исключением того эмпирического факта, что до сих пор из нее не проистекли никакие противоречия. Но и по отношению к миру U Рассела мы находимся не в лучшем положении. Система Z имеет по сравнению с U огромное преимущество: она имеет существенно более простую структуру и, по-видимому, является наиболее адекватным базисом для всего, что действительно сделано в современной математике. В частности, "экзистенциальная" теория чисел Дедекинда—Фреге может быть выведена из нее (Цермело), а Гёделю (в работе, о которой уже говорилось выше) удалось показать, что далеко идущая аксиома выбора Цермело в весьма острой форме согласуется с остальными аксиомами Z .

VIII. Полная формализация и проблема непротиворечивости. Пессимистические выводы. Новый поворот в аксиоматизации математики, имеющий непреходящее значение, берет свое начало с "Beweistheorie" Гильберта (с 1922 г.) [7]. Гильберт ставит перед собой задачу доказать (не истинность, а) *непротиворечивость математики*. Он сознает, что для этого необходимо прежде всего полностью формализовать математику и логику: заменить все предложения формулами, в которые на сей раз логические операторы $\sim$, $\cap$, $(\exists x)$ и т.д. также должны входить как неопределяемые символы. Таким образом, формализованная логика оказывается поглощенной формализованной математикой*). Формулы не имеют смысла. Математическое доказательство есть конкретная последовательность формул, в которой одна формула выводится из предыдущей по некоторым правилам, понятным без обращения к какому бы то ни было смыслу формул, — так же, как в шахматах каждая позиция возникает из предыдущей после хода, сделанного по определенным правилам. *Непротиворечивость* — тот факт, что такая дедуктивная игра не может завершиться формулой $\sim (1 = 1)$, — должна быть доказана с по-

*) В этом отношении почва для Гильберта была подготовлена "Principia Mathematica". Для сравнения я упомяну еще одну полностью формализованную систему, отличную от гильбертовской, — систему Куайна [8].

мощью интуитивных умозаключений относительно формул — рассуждений, которые опираются на опыт, а не на аксиомы, и согласованы с теми ограничениями, которые ставил Брауэр. Но в таких умозаключениях о доказательствах, в прослеживании гипотетической последовательности формул, приводящей к заключительной формуле $\sim (1 = 1)$, наш разум не может не использовать тот тип опыта, на котором основана возможность итерации. В аксиоматизации математики Гильберт был скован большими ограничениями, чем Цермело: будь он столь же либерален со своими аксиомами, всякий шанс доказать их непротиворечивость был бы потерян; проводя такое доказательство, Гильберт руководствуется некоторым как бы неясно предположаемым планом такого доказательства. Именно по этой причине он находит желательным, например, различать несколько уровней переменных.

Формулы Гильберта — это конкретные структуры, состоящие из конкретных символов; порядок, в котором символы следуют один за другим в формуле, а также их совпадение в одной и той же формуле — или в различных формулах — должны быть распознаваемы независимо от небольших вариаций в начертаниях символов. Имея дело с такими символами, мы находимся в том же уровне понимания, который руководит нашей повседневной жизнью в отношении к таким орудиям, как молоток, стол или стул. Гильберт усматривает в этом самое важное дологическое основание математики, в действительности — всех естественных наук. Но в дополнение к этому его аксиомы математики и интуитивное представление об итерации, используемое в математических неаксиоматических умозаключениях о математике, являются составляющими его системы, лежащими за пределами логики.

Наш краткий обзор можно резюмировать с помощью небольшой диаграммы, на которой конструктивная тенденция возрастает справа налево,

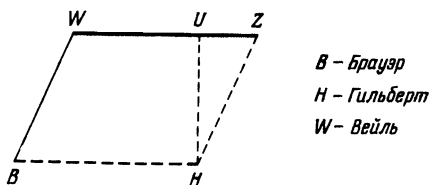


Рис. 6

аксиоматическая тенденция — слева направо и, кроме того, дается представление об относительной "глубине" оснований. Фреге, и за ним Рассел надеялись (1) развить теорию натуральных чисел на твердой основе без обращения к интуитивной идее бесконечной итерации и (2) сделать математику частью логики. Мы убедились теперь, что ни одна из рассмотренных выше систем не позволяет надеяться на осуществление (2) — на поглощение математики логикой. В U и Z базис образуют сложные системы аксиом, в W , B и в меньшей степени в U существенную роль играет интуитивная идея итерации. Основания теории Гильберта, лежащие за

пределами логики, мы только что описали. Единственная система, которая в некотором смысле может претендовать на достижение цели (1), является Z . Но даже в ней теория чисел покоится не только на логике, но на существенно трансцендентной системе аксиом (убеждение в непротиворечивости которой подкрепляется эмпирическими фактами, а не умозрительными доводами). Пуанкаре оказался прав, отстаивая математическую индукцию как необходимое средство математических умозаключений, не сводимое к чему-либо другому.

Вполне возможно, что все математики в конце концов восприняли бы подход Гильберта, если бы Гильберту удалось успешно осуществить свой замысел. Первые шаги были вдохновляющими и многообещающими. Но затем Гёдель нанес этому подходу смертельный удар (1931), от которого тот так и не оправился. Гёдель определенным образом перенумеровал символы, формулы и последовательности формул в формализме Гильберта и тем самым превратил утверждение о непротиворечивости в арифметическое предложение. Ему удалось показать, что это предложение не может быть ни доказано, ни опровергнуто в рамках гильбертовского формализма [9]. Это может означать только две вещи: либо умозаключения, с помощью которых проводится доказательство непротиворечивости, должны содержать какой-то довод, не имеющий формального аналога внутри системы, т.е. нам не удалось полностью формализовать процедуру математической индукции; либо надежду на строго "финитистское" доказательство непротиворечивости необходимо оставить навсегда. Когда Г. Генцену, наконец, удалось доказать непротиворечивость арифметики [10], он действительно вышел за пределы гильбертовской системы, провозгласив очевидным некоторый тип умозаключения, который проникает во "второй класс ординальных чисел" Кантора.

Из этой истории одно должно быть ясно: мы менее чем когда-либо уверены в незыблемости наиболее глубоких оснований (логики и) математики. Как у всех и всего в мире сегодня, у нас есть свой "кризис". Он существует почти пятьдесят лет. Внешне может показаться, что он не мешает нашей повседневной работе, и все же, что касается меня, я должен признаться, что этот кризис оказал значительное практическое влияние на мою математическую жизнь: он направил мои интересы в области, которые я считал относительно "безопасными", и постоянно подтачивал энтузиазм и решимость, с которой я занимался своими исследованиями. Этот опыт, вероятно, разделяют и другие математики, не безразличные к тому, что их научные усилия означают в контексте всего человеческого существования в мире — существования, неотделимого от любви и познания, страдания и творческого начала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Russell B.* Mathematical logic as based on the theory of type // *Amer. J. Math.* — 1908. — V. 30. — P. 222–262. *Russell B., Whitehead A.N.* Principia Mathematica. — V. 1–3. — Cambridge, 1910 — 13; V. 1. — 2 ed. — Cambridge, 1935.
2. *Gödel K.* Russell's Mathematical Logic // *The Philosophy of Bertrand Russell.* — P. 127, 145, 146.
3. Диссертация Брауэра "Over de grondslagen der wiskunde" появилась в 1907 году. Полный перечень его работ по основаниям математики см. в работе: *Church A.* Bibliography of Symbolic Logic // *J. Symbolic Logic.* — 1936. — V. 1. — P. 121–218.
4. *Math. Ann.* — 1908. — Bd 65. — S. 261–281.
5. См. также *Bernays P.* // *J. Symbolic Logic.* — 1937. — V. 2. — P. 65–77 и приведенную там библиографию.
6. См. переписку Кантора и Дедекинда в издании: *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen / Ed. E. Zermelo. — 1932. — S. 443–451.
7. *Hilbert D.* Collected Papers. — 1937; *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. — V. 1. — Berlin, 1934. — V. 2. — Berlin, 1939.
8. *Amer. Math. Monthly.* — 1937. — V. 44. — P. 70–80.
9. *Monatsh. Math. Phys.* — 1931. Bd 38. — S. 173–198.
10. *Math. Ann.* — 1936. — Bd 112. — S. 493–565¹⁰.

КОНТИНУУМ

Критические исследования по основаниям анализа

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой работе не ставится задача прикрыть "несокрушимую скалу", на которой возведено здание анализа, деревянной декорацией в духе формализма, чтобы убедить читателя — и в конечном счете самого себя — в том, будто это и есть подлинный его фундамент. Напротив, я придерживаюсь здесь того взгляда, что здание анализа в значительной мере возведено на песке. Думаю, что это зыбкое основание может быть заменено надежными, прочными опорами; но понесут они не все из того, что ныне принято считать покоящимся на прочной основе; все остальное я вынужден оставить на произвол судьбы, так как не вижу иной возможности.

В центре моего внимания находится глубокая проблема, возникающая в связи с понятием континуума, — она заслуживает того, чтобы носить имя Пифагора, — которую я пытаюсь решить с помощью арифметической теории иррациональных чисел. Основные идеи вводятся в главе I, причем я умышленно облакаю их в такую форму, чтобы эта часть книги представляла собой некое единое целое. В этой главе выдвигаются те начала, с помощью которых затем в главе II начинается и доводится до своих первых принципов систематическое построение анализа. В главе II неизбежно приходится повторять (хотя в несколько ином словесном облачении) некоторые положения, высказанные в предыдущем изложении; их я старался формулировать настолько кратко, насколько это возможно без ущерба для целостности рисуемой мной картины. Вместе с тем я стремился, чтобы мое изложение было понятно не только тем, кто учит с кафедр, но и всем, кто учится сам и знаком с преподаваемыми ныне "строгими" основаниями анализа.

В исследованиях, проводимых в области оснований, еще не настал тот час, когда один автор может развивать свои построения, опираясь на результаты другого. Поэтому я решил не прерывать систематическое изложение моих собственных идей критическим рассмотрением позиций, занимаемых по тем же вопросам другими авторами я предпочел ограничиться кратким обзором иных точек зрения в заключительных замечаниях в главе I.

Хотя настоящая работа преследует в первую очередь математические цели, я не обходил стороной *философских вопросов* и не пытался покон-

чить с ними с помощью грубого поверхностного соединения сенсуализма и формализма [против чего с отрадной ясностью боролся Фреге в своих "Основных законах арифметики" (Иена, 1893)], которое все еще пользуется авторитетом среди математиков. Что же касается теоретико-познавательной стороны логики, то я разделяю взгляды, изложенные в "Логических исследованиях" Гуссерля (2-е издание, Галле, 1913); я отсылаю читателя и к более подробному изложению, указывающему место логического в рамках общей философии Гуссерля, которое дано в его сочинении "Идеи, относящиеся к чистой феноменологии и феноменологической философии" (Философия и феноменологические исследования. Ежегодник, 1913, т. 1). Наше рассмотрение проблемы континуума вносит определенный вклад в теоретико-познавательные вопросы, касающиеся отношений между непосредственно (наглядно) данным и формальными понятиями (в сфере математики), с помощью которых мы пытаемся конструировать это данное в геометрии и физике.

Цюрих, ноябрь 1917 г.

Герман Вейль

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I

Множество и функция (Анализ образования математических понятий)

Логическая часть

§ 1. Свойство, отношение, существование.	96
§ 2. Принципы образования сложных суждений	99
§ 3. Логическое следование. Аксиоматический метод	102

Математическая часть

§ 4. Множества	106
§ 5. Натуральные числа. Антиномия Рихара	110
§ 6. Итерация математического процесса. <i>Circulus vitiosus</i> ² в анализе	112
§ 7. Принцип подстановки и принцип итерации.	117
§ 8. Окончательная формулировка оснований. Введение идеальных элементов.	121
Заключительные замечания.	125

Глава II

Понятие числа и континуум (Основания исчисления бесконечно малых)

§ 1. Числа натуральные и числа количественные	128
§ 2. Дроби и рациональные числа	133
§ 3. Действительные числа	139
§ 4. Числовые последовательности. Принцип сходимости	145
§ 5. Непрерывные функции.	148
§ 6. Наглядно представляемый и математический континуум	153
§ 7. Величины. Меры	160
§ 8. Кривые и поверхности	163

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВО И ФУНКЦИЯ

(Анализ образования математических понятий)

ЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Свойство, отношение, существование

Суждение есть утверждение о некотором положении вещей (*Sachverhalt*); если это положение вещей имеет место, то суждение *истинно*, в противном случае оно *ложно*. Особенно важную категорию положений вещей (зачастую только и рассматриваемую логиками, хотя она отнюдь не является всеобъемлющей) составляют *положения вещей — свойства*: суждение-свойство обладает определенным свойством. Примером может служить суждение "Этот (данный мне происходящим в настоящий момент актом восприятия) лист дерева имеет определенный (также данный мне этим актом восприятия), а именно зеленый цвет". Любое свойство всегда относится к определенной категории предметов, такой, что *предложение* (*Satz*) "*a* обладает таким-то свойством" имеет *смысл*, т.е. выражает некоторое суждение и тем самым утверждает некоторое положение вещей, только тогда, когда *a* принадлежит соответствующей категории. Так, свойство "зеленый" относится к категории "видимой вещи" (*Seh-Ding*); предложение, например, о том, что некая этическая ценность является зеленой, не истинно и не ложно, а бессмысленно. Только *осмысленному* предложению соответствует некоторое суждение, только *истинному* суждению — некоторое положение вещей, положение же вещей *существует*, и все тут. Предложения, лишенные смысла, по-видимому, могут встречаться только в вербальном, но не в вещном мышлении; как бы то ни было, язык таит в себе немалую опасность, состоящую в том, что он допускает в качестве составных частей суждения лишенные смысла комбинации слов-символов, причем с точки зрения *формальной грамматики* эти комбинации выглядят точно так же, как и словесные формулировки настоящих суждений. Предложение, бессмысленность которого не явствует из его грамматической структуры (например, предложение вида "Предмет *a* обладает свойством *E*"), отнюдь не обязательно должно быть осмысленным. Тем более суждение, которое не является логически *абсурдным* (*widersinnig*) (таким, что неистинность суждения устанавливается независимо от его материального содержания, на основании одной лишь его логической структуры, ср. § 3), не должно быть *истинным* только поэтому. Но если предложение "*a* обладает свойст-

вом E ” выражает некоторое суждение, то его отрицание — “ a не обладает свойством E ” — также выражает некоторое суждение, и тогда формальная логика с полным основанием утверждает, что из этих двух суждений всегда одно должно быть истинным, а другое ложным.

Предложения, выражающие суждение-свойство (впрочем, только такие предложения), обладают хорошо известной структурой: *субъект — связка — предикат*. До какого абсурда можно дойти, если не учитывать того, что предложение, обладающее субъектно-предикатной структурой, может оказаться лишенным смысла, свидетельствуют знаменитые “парадоксы”, в значительной мере восходящие к Расселу. Условимся называть прилагательное автологическим, если оно обладает тем свойством, которое составляет его значение; если же оно не обладает этим свойством, то будем называть его гетерологическим. Например, в немецком языке прилагательное “kurz” (короткий) коротко (слова, состоящие лишь из четырех букв, в немецком языке несомненно могут считаться короткими*), поэтому оно автологично. Что же касается немецкого прилагательного “lang” (длинный), то оно, напротив, не длинно, и поэтому гетерологично. Ну а как обстоит дело с прилагательным “гетерологический”? Если оно автологично, то обладает тем свойством, которое выражает, и, стало быть, гетерологично; наоборот, если оно гетерологично, то не обладает этим свойством и, стало быть, автологично. Формализм усматривает в этом неразрешимое противоречие, но в действительности речь идет о схоластике наихудшего сорта: как показывает даже поверхностное размышление, вопросу о том, является ли прилагательное “гетерологический” авто- или гетерологическим, вообще нельзя придать какого-либо смысла.

Мы не будем выяснять здесь до конца сущность таких понятий, как положение вещей, суждение, предмет, свойство, ибо это завело бы нас в глубины метафизики; относительно этих вещей надлежит справляться у людей, имена которых нельзя произносить среди математиков без того, чтобы не вызвать снисходительную усмешку, например у Фихте.

Наряду с суждениями-свойствами для нас важны *суждения-отношения*. Примеры: Тот человек — мой дядя; Точка A лежит между точками B и C ; Число 5 следует за числом 4. По поводу суждений-отношений необходимо сделать замечание, аналогичное тому, которое было сделано по поводу предложений-свойств. Отношению, о котором шла речь в последнем примере, можно поставить в соответствие *схему суждений*, содержащую “неизвестные” x, y : “число x следует за числом y ”. Если вместо неизвестных подставить какие-либо два числа, то возникает некоторое определенное суждение; так, например, мы утверждаем, что это суждение будет истинным “для” $x = 5, y = 4$. Каждая неизвестная, каждое “пустое место” в схеме суждений связана с определенной категорией предметов (в нашем примере — с категорией “число”): схема порождает осмысленное

*) Формальный логик охотно игнорирует также и то, что подавляющее большинство понятий нечетки (причем нечетки по самой своей сути, и эту нечеткость отнюдь не следует считать их недостатком), их объем расплывчат. Ср. “Идеи...” Гуссерля (с. 136 и далее). В математике же мы имеем дело лишь с четкими сущностями.

предложение, относительно которого затем возникает вопрос, истинно оно или нет, только в том случае, если она восполнена предметом этой категории. Для простоты я говорю здесь лишь о таких отношениях, у которых все пустые места в соответствующей им схеме суждений восполнены предметами *одной и той же* категории. Следует особо подчеркнуть, что в отличие от математической традиции предложения "Число 5 следует за числом 4" и "Число 4 предшествует числу 5" выражают *одно и то же* отношение между числами 4 и 5 и что в данном случае не может быть речи о двух различных отношениях, каждое из которых "обратно" другому. Соответствующая схема суждений содержит два (разумеется, "неравноправных") пустых места; упорядочив их в той или иной *последовательности* — использование языковой символики вынуждает меня ввести такое упорядочение, — я получаю две приведенных выше формулировки; разумеется, в самом положении дел — отношении никакое такое упорядочение не заложено*).

Предположим, что определенная категория предметов [например "точка пространства"] "непосредственно задана" (наглядно предъявлена) и что на предметах этой категории (в дальнейшем речь будет идти только о них) определены некоторые отдельные свойства и отношения (R), принадлежащие к предметам данной категории (со всеми пустыми местами соответствующих схем суждений) [в нашем примере таким отношением может быть, например, отношение "лежит между"]. Наряду с суждениями-свойствами и отношениями, которые возникают при восполнении соответствующих схем суждений (R) какими-либо непосредственно заданными предметами рассматриваемой категории, — эти суждения могут быть как истинными, так и ложными — в математике первостепенную роль играют *суждения существования*.

Понятие существования изобилует метафизическими загадками. Здесь достаточно сказать следующее. Если $E(x)$, $E'(x)$, $R(x, y)$ являются, например, какими-то схемами суждений (R) (x, y означают пустые места**), a — один из непосредственно заданных предметов, то такие предложения, как "Существует предмет (рассматриваемой категории), для которого верно как $E(x)$, так и $E'(x)$ " (т.е. предмет, обладающий как свойством E , так и свойством E')" или "Существуют предметы x , которые находятся с предметом a в отношении $R(xa)$ ", имеют осмысленный характер, т.е. утверждают нечто об определенных (экзистенциальных) положениях дел, после чего сразу возникает вопрос, имеют место эти положения

*) При использовании символов установление подобного упорядочения пустых мест может быть и не нужным. Представьте себе, например, схему суждений для некоторого отношения в виде деревянной дощечки с колышками, соответствующими пустым местам, а предметы — в виде маленьких шариков с высверленными в них отверстиями, так что их можно насаживать на колышки ("заполняя" пустые места). Это была бы символика, "сама по себе" ничем не уступающая словам.

Свойства мы можем причислить к *отношениям* (а именно к таким отношениям, схема суждений которых содержит лишь одно пустое место) в том же смысле, в каком мы (в отличие от греков) относим 1 к количествам (*Anzahlen*).

**) В тексте "Континуума" схему суждений $R(x, y)$ Вейль записывает в виде $R(xy)$. То же касается вейлевской записи свойств, отношений и функций. — *Примеч. ред.*

дел или нет*). Именно в этом смысле мы понимаем то предположение, что *индивидуальные спецификации* *(Besonderungen)* рассматриваемых нами категориальных сущностей должны составлять замкнутую систему определенных, самих по себе существующих предметов.

Приведенные выше рассуждения нетрудно распространить на более сложные случаи, в которых с самого начала в основе рассмотрения лежат не одна, а несколько определенных категорий предметов (как, например, в евклидовой геометрии: точка, прямая, плоскость).

§ 2. Принципы образования сложных суждений

Будем называть *простыми*, или *первичными*, такие схемы суждения (или, кратко, "простыми суждениями", где слово "суждение" мы на время понимаем в некотором более широком смысле, чем до сих пор), которые соответствуют отдельным непосредственно заданным свойствам и отношениям. К ним мы присоединяем еще и тождество $J(x, y)$ (x совпадает с y , $x = y$). Из этих простых схем *сложные* схемы суждений можно получать, руководствуясь следующими принципами**).

1. Из схемы суждения U можно образовать ее отрицание $\bar{U}$. Например, если $U(x, y)$ означает " x следует за y ", то $\bar{U}(x, y)$ означает " x не следует за y ".

2. В схеме суждений с несколькими пустыми местами можно *совместить* (*zur Deckung bringen*), отождествить некоторые из пустых мест и получить тем самым новые схемы суждений; например, из схемы суждений-отношений $N(x, y)$: " x есть племянник y " можно получить $N(x, x)$: " x есть племянник самого себя".

3. Два суждения можно соединить связкой " и ". Вот примеры. $E(x)$: " x красный", $E'(x)$: " x круглый"; составное суждение " x красный и круглый" мы обозначим как $E(x) \cdot E'(x)$. Другой пример: $V(x, y)$: " x есть отец y ", $N(x, y)$: " x есть племянник y "; сложное суждение: " x есть отец y и y есть племянник z " обозначим как $V(x, y) \cdot N(y, z)$. Так, из двух суждений V и N путем частичного отождествления пустых мест и введения связки " и " возникает новое сложное суждение. Способ отождествления пустых мест в исходных суждениях можно выразить в символической форме, обозначив, как в рассмотренном нами примере, отождествляемые пустые места одинаковыми буквами. С помощью связки " и " из двух заданных суждений можно составить в общем случае не одно, а несколько новых суждений в зависимости от того, отождествляем ли мы пустые места исходных суждений частично, полностью или совсем не отождествляем. Разумеется, связка " и " может соединять суждение и с самим собой, как, например, в сложном суждении $N(x, y) \cdot N(y, x)$ (" x есть племянник y , и в то же время y есть племянник x ").

*) Разумеется, речь не идет о том, располагаем ли мы определенными вспомогательными средствами для того, чтобы решить этот вопрос.

**) В дальнейшем мы будем ссылаться на эти принципы, указывая их номера, набранные полужирным шрифтом.

4. Наряду со связкой "и" имеется связка "или", которую мы будем обозначать символом $+$. Примеры: $E(x) + E'(x)$ ("х красный или круглый"), $V(x, y) + N(y, z)$ ("х есть отец у или у есть племянник z"), $N(x, y) + N(y, x)$ ("х есть племянник у или у есть племянник х", "х есть племянник или дядя у").

При использовании связки "или" необходимо также указывать, каким образом надлежит отождествлять отдельные пустые места одного суждения с пустыми местами другого.

5. Если, например, $U(x, y, z)$ есть суждение с тремя пустыми местами, а a — некоторый заданный предмет рассматриваемой категории, то суждение $U(x, y, a)$, возникающее в результате *восполнения*, содержит лишь два пустых места. В частности, путем восполнения всех пустых мест в схеме суждений некоторыми данными предметами рассматриваемой категории мы получаем полностью восполненное суждение без каких-либо пустых мест — суждение в собственном смысле, утверждающее нечто о каком-то положении вещей.

6. Рассмотрим снова, в качестве примера, суждение $U(x, y, z)$ с тремя пустыми местами: образуем из него $U(x, y, *) = V(x, y)$, что означает: "Существует объект z (рассматриваемой нами категории), такой, что для него выполняется отношение $U(x, y, z)$ "; или другой пример: $U(*, y, *)$ ("Существуют предметы x и z , такие, что для них выполняется отношение $U(x, y, z)$ ").

Применение этого принципа также приводит к уменьшению числа пустых мест в схеме суждений; если не остается вообще ни одного пустого места, то и в этом случае возникает суждение в собственном смысле, относительно которого можно поставить вопрос, истинно оно или нет. Пример: $V(x, y)$, что означает "х есть отец у"; $V(y, y)$, что означает "я довожусь отцом у"; $V(y, *)$, что означает "Существует человек, для которого я отец", т.е. "я отец".

Относительно принципов 5 и 6 следует заметить, что, например, из $U(x, y) \cdot V(x, y) = W(x, y)$, если a означает некоторый данный предмет, следует $U(x, a) \cdot V(x, a) = W(x, a)$, но отнюдь не $U(x, *) \cdot V(x, *) = W(x, *)$; напротив, если ввести $U(x, y) \cdot V(x, z) = T(x, y, z)$, то $U(x, *) \cdot V(x, *) = T(x, *, *)$.

Принципы 3 и 4 можно свести один к другому с помощью отрицания 1 (см. § 3).

Применение принципов 1–6 к простым схемам суждений позволяет получать из них новые суждения. Повторное применение тех же принципов к новым и к исходным схемам суждений позволяет получать все новые сложные схемы суждений. Число таких повторений и комбинаций может быть сколь угодно велико. Те из бесконечного множества возникающих таким путем суждений, которые содержат одно пустое место, представляют собой схемы суждений о *производных свойствах*; те же, которые содержат два или более пустых места, суть схемы суждений о *производных отношениях*. Но суждения, не содержащие пустых мест и, следовательно, являющиеся суждениями в собственном смысле и тем самым утверж-

дающие нечто о некотором положении вещей*), мы будем называть *собственными* (einschlägigen) *суждениями рассматриваемой предметной области*. Если бы о каждом из этих собственных суждений нам было известно, истинно оно или нет, то мы располагали бы всей полнотой знаний о предметах рассматриваемой категории относительно тех непосредственно определенных на них свойств и отношений, из которых мы исходим. Наши принципы точно устанавливают логическую функцию понятий "не", "и", "или", а также понятия "существует". Суждения собственные нельзя ни в коем случае подразделить на суждения о свойствах, отношениях и существовании, равно как и на утвердительные и отрицательные; не укладываются они в рамки и других традиционных подразделений. Собственные суждения, вообще говоря, обладают весьма сложной *логической структурой*, описать которую полностью можно, лишь указав способ возникновения каждого такого рода суждения из принятых в качестве исходных простых схем суждений на основе наших шести принципов, последовательность применяемых при этом действий и их комбинацию. От старого учения о том, будто предложение всегда состоит из субъекта, предиката и связки, мы в данном случае отходим бесконечно далеко.

Рассмотрим несколько примеров комбинированного применения сформулированных нами принципов. Прежде всего заметим, что слово "все", выражающее общность, мы должны заменить комбинацией принципов 1 и 6 (отрицанием и "существует"). "Каждый предмет обладает таким-то и таким-то свойством" означает: "Не существует предмета, который не обладал бы соответствующим свойством". В математике часто встречаются суждения следующего вида (пусть $U(x, y)$ означает схему суждений-отношений с двумя пустыми местами x и y): "Для любого x существует некоторый y , такой, что выполняется $U(x, y)$ ". Из $U(x, y)$ мы образуем $U(x, *) = A(x)$, а из $A(x)$ — отрицание $\bar{A}(x) = B(x)$, после этого из $B(x)$ образуем $B(*)$ и его отрицание $\overline{B(*)}$ [не путать с $\bar{B}(*)$, т.е. с $A(*)$!]; это есть некоторое предложение (разумеется, не содержащее ни одного пустого места).

Пример А. Предметная область: точки в геометрии на плоскости. $E(x, y, z)$ означает: x и y равноудалены от z . Определение (Erklärung): x, y, z лежат на одной прямой**) — или, что то же самое, выполняется отношение $G(x, y, z)$, — если существуют две различные точки p и q , такие, что p и q равноудалены от x , а также равноудалены от y и от z .

Воспользовавшись принципами 3 и 1 и привлекая тождественность J , мы можем образовать

$$E(p, q, x) \cdot E(p, q, y) \cdot E(p, q, z) \cdot \bar{J}(p, q) = F(x, y, z, p, q);$$

тогда $F(x, y, z, *, *) = G(x, y, z)$.

*) Такие полностью восполненные схемы суждений сами по себе являются лишь предложениями; то, что все они имеют смысл, выражают некоторое суждение, можно рассматривать как уточненную формулировку упомянутого в конце § 1 предположения о "замкнутой системе предметов, существующих сами по себе".

**) Вейль выписывает буквы x, y, z , не разделяя их запятыми. — *Примеч. ред.*

Пример В. Предметная область: действительные числа. Пусть $f(x)$ есть функция действительного аргумента x . Требуется проанализировать суждение "Функция f равномерно непрерывна". Согласно обычным определениям это означает: для любого положительного числа ϵ существует некоторое положительное число δ , такое, что для любых двух чисел x и y , удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \delta$, всегда выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Пусть

$A(x, y, \delta)$ означает отношение $|x - y| < \delta$,

$F(x, y, \epsilon)$ означает отношение $|f(x) - f(y)| < \epsilon$,

$P(\epsilon)$ означает: число ϵ положительно.

Воспользуемся сначала принципами 1 и 3 и образуем

$$A(x, y, \delta) \cdot \bar{F}(x, y, \epsilon) = B(x, y, \epsilon, \delta),$$

из которого получим $B(*, *, \epsilon, \delta) = C(\epsilon, \delta)$ и его отрицание $\bar{C}(\epsilon, \delta)$; затем получим $\bar{C}(\epsilon, \delta) \bar{P}(\delta) = Q(\epsilon, \delta)$ и $Q(\epsilon, *) = R(\epsilon)$; из отрицания последнего получается $\bar{R}(\epsilon) P(\epsilon) = S(\epsilon)$, а из него — восполненное суждение $U = S(*)$. Итак, сказать "Функция f равномерно непрерывна" означает: "Отрицание $\bar{U}$ суждения U истинно".

Пример С. Приведем предложение "Функция f непрерывна при всех значениях своего аргумента".

Пусть $B(x, *, \epsilon, \delta) = C(x, \epsilon, \delta)$, а отрицание суждения $C(x, \epsilon, \delta)$ есть $\bar{C}(x, \epsilon, \delta)$; образуем $\bar{C}(x, \epsilon, \delta) \cdot P(\delta) = Q(x, \epsilon, \delta)$; $Q(x, \epsilon, *) = R(x, \epsilon)$; из $\bar{R}(x, \epsilon) P(\epsilon) = S(x, \epsilon)$ получаем $S(*, *) = V$. Отрицание $\bar{V}$ суждения V есть наше предложение.

Как показывают наши примеры, используемая нами символика довольно громоздка, но это не важно. Напротив, формулировка самих шести дефиниционных принципов (если мы не ошибаемся в том, что они *полны*) имеет существенное значение для логики.

§ 3. Логическое следование. Аксиоматический метод

Будем называть *общим* суждение $*$), если при его образовании не использовался принцип 5, т.е. если восполнение пустых мест производилось только с помощью знака $*$ — "существует". В математике речь идет только о таких суждениях; их с достаточным основанием можно назвать также суждениями существования. Но если применяется принцип 5 и в суждение поэтому входят отдельные непосредственно заданные предметы рассматриваемой категории, то мы говорим о *частном* суждении $**$). Если $E(x)$

*) Здесь и далее мы будем применять термин "суждение" исключительно в собственном смысле и не будем использовать его для обозначения содержащих пустые места схем суждений.

**) Под частными суждениями можно было бы понимать также исключительно такие, при образовании которых вообще не используется принцип 6; тогда наряду с "частными" и "общими" суждениями возникают еще суждения смешанного типа — "общечастные".

есть схема суждения с одним пустым местом, возникающая из первичных свойств и отношений в результате применения наших принципов, *за исключением принципа 5*, и существует один и только один предмет $x = a$, для которого имеет место $E(x)$, то он называется индивидом (который можно охарактеризовать его свойствами). Исключение принципа 5, конечно, очень важно, так как в противном случае, если под J , как и прежде, понимать тождественность, схема суждений $J(x, a)$ с пустым местом x означала бы свойство "быть a ", присущее только предмету a , и понятие индивида стало бы бессодержательным.

Рассмотрим в качестве примера арифметику натуральных чисел. В основе ее лежит единственное исходное отношение $\mathfrak{F}(n, n')$, которое имеет место тогда, когда n' есть число, непосредственно следующее за числом n . Число 1 характеризуется тогда свойством I: не существует числа, за которым следует число 1 (с единицы начинается числовой ряд), т.е.

$$\mathfrak{F}(*, x) = I(x).$$

Факт состоит в том, что существует одно и только одно число, обладающее свойством I; мы называем его единицей (числом 1). Теперь число 2 можно охарактеризовать с помощью свойства II: оно должно следовать непосредственно за только что определенным числом 1:

$$I(y) \cdot \mathfrak{F}(y, x) = \mathfrak{F}_2(y, x); \quad \mathfrak{F}_2(*, x) = II(x).$$

Аналогичным образом определяются числа 3, 4 и т.д. Итак, каждое натуральное число есть некоторый индивид. Предложение $1 + 2 = 3$ содержит некоторое частное суждение, если 1, 2, 3 являются непосредственно заданными числами. В действительности, однако, невозможно задать число иначе, чем указав его положение в числовом ряду*), т.е. указав его характеристическое свойство. Поэтому предложение $1 + 2 = 3$ мы интерпретируем следующим образом: существуют три числа x, y, z , для которых выполняются $I(x), II(x), III(x)$ и $x + y = z$, так что оно содержит "общее" суждение.

Случаю, с которым мы сталкиваемся в арифметике, когда все предметы рассматриваемой категории суть "индивиды" (в указанном выше точном значении), диаметрально противоположен случай, когда любая содержащая единственное пустое место схема суждений $E(x)$, которая возникает из первичных свойств и отношений без использования принципа 5, либо истинна для всех предметов, либо не истинна ни для одного предмета. В этом случае мы можем называть нашу категорию *однородной* (homogen) (относительно первичных свойств и отношений). С подобной ситуацией мы встречаемся, например, в случае *точек пространства* евклидовой геометрии, и именно по этой причине мы называем пространство в геометрии *однородным***).

*) По крайней мере, мне так кажется; однако здесь возможны и иные точки зрения.

**) Я оставляю в стороне вопрос об отношении этой *концептуальной* (begrifflichen) однородности к *наглядной* однородности пространства.

Среди собственных суждений имеются такие, которые мы считаем истинными только на основании их логической структуры, совершенно независимо от того, о какой категории предметов идет речь, что означают первичные свойства и отношения и какие предметы используются при обращении к принципу 5 для "заполнения" пустых мест. Такие суждения, истинные вследствие их чисто формального (логического) строения (и лишённые по этой причине всякого "материального содержания"), мы будем называть (логически) *очевидными* (*selbstverständlichen*). Суждение, отрицание которого очевидно, будем называть *абсурдным* (*sinnwidrig*). Если суждение $U \cdot \bar{V}$ абсурдно, то суждение V есть "*логическое следствие*" суждения U ; если U истинно, то мы можем быть уверенными, что и V истинно. Если V есть логическое следствие из U и, наоборот, U есть логическое следствие из V , то суждения U и V называются *равносильными* (*sinnesgleich*). Основная задача логики (учения об умозаключениях (*Schlüsse*)) состоит в полном описании тех структур суждений, которые гарантируют (логическую) очевидность суждения. Логика устанавливает некоторые "элементарные" структуры такого рода, из них все подобные структуры получаются с помощью "композиции", которая еще будет описана более подробно. Вопрос о том, удалось ли традиционной или так называемой математической логике найти удовлетворительное решение этой проблемы, мы оставляем в стороне; вспомним лишь несколько примеров.

Какое бы суждение мы ни понимали под U , суждение $U + \bar{U}$ очевидно, а $U \cdot \bar{U}$ абсурдно. Суждения U и $\bar{U}$ равносильны. Для двух суждений U и V суждение $U \cdot V$ равносильно суждению $\overline{U + \bar{V}}$. Если $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ — какие-то три схемы суждений с одним пустым местом, то формула силлогизма гласит:

$$\overline{U \cdot \bar{V}(*)} \cdot \overline{V \cdot \bar{W}(*)} \cdot (U \cdot \bar{W}(*)) \text{ абсурдно.}$$

Суждение $U \cdot \bar{V}(x)$ означает то же, что суждение: "Не существует объекта x , для которого $U(x)$ истинно, а $V(x)$ неистинно", т.е. что все предметы, обладающие свойством U , наделены также свойством V .

Теоретико-познавательное значение логического следования совершенно ясно и привычно для каждого человека. Известно также, какую роль дедуктивные методы играют в математике. Математические ситуации (*Sachverhalte*), за исключением наиболее элементарных, настолько сложны, что практически невозможно воспроизвести их в сознании во всей их данности и таким образом сделать достоянием самостоятельного усмотрения. Более того, дело обстоит следующим образом: в математике идет речь о *собственных, общих, истинных суждениях*; среди них имеется очень немного таких, которые доступны для непосредственного усмотрения в качестве истинных; это *аксиомы*, например U_1 , U_2 , U_3 , U_4 . Демонстрация того, что суждение U есть следствие из аксиом, согласно сделанному выше замечанию относительно особенностей логических законов; может и должна происходить посредством, в общем случае, весьма развет-

вленной структуры "элементарных умозаключений" (Schlüsse), которую для удобства изложения приходится искусственно преобразовывать в последовательно строящуюся многозвенную цепь. Так возникает математическое доказательство: все, что нам надлежит понимать, сосредоточено в логических умозаключениях и более не относится к положениям вещей и фактам, о которых судят*). (Не стоит, пожалуй, особо оговаривать то, что при отыскании математических истин и последующем их осмыслении мы действуем более "содержательно" (sachlicher) и менее "формально"; речь идет о систематическом изложении.) Тем не менее необходимо подчеркнуть, что убеждение, будто все собственные, общие, истинные суждения, например, о точках, прямых и плоскостях, могут быть выведены из геометрических аксиом с помощью логических умозаключений, есть научная вера; мы не в состоянии усмотреть, что это действительно так, или "доказать" это на чисто логическом пути, исходя из логических законов. Если бы в один прекрасный день нам это удалось, то в таком озарении перед нами открылся бы путь, следуя которому мы могли бы с помощью определенного метода вывода ("за конечное число шагов") получить решение относительно каждого геометрического (т.е. собственного, общего) суждения, истинно оно или нет: математика стала бы в принципе тривиальна.

В настоящее время многие считают, что аксиомы будто бы являются постулатами (Festsetzungen), что, например, теорема Ферма (не существует целых $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $n > 2$, таких, что $x^n + y^n = z^n$) утверждает лишь, будто суждение, составляющее ее содержание, есть следствие аксиом арифметики. При таком подходе аксиомы в известной степени определяют смысл понятия "существует" (существует то, существование чего может быть логически выведено из аксиом). Однако, не говоря уже о том, что такая "гипотетико-дедуктивная игра" не имеет никакой ценности (коль скоро не существует такого имеющего значение для познания смысла, который удовлетворяет аксиомам), подобная точка зрения несостоятельна и логически. Приведу пример. Если определить иррациональные числа по Дедекинду, то из того же определения непосредственно следует, когда рациональное число меньше ($<$), чем некоторое действительное. Пусть α и β — какие-то два действительных числа (каждое из них мы должны мыслить как индивид, определяемый ему и только ему прису-

*) Знаменитая брошюра Дедекинда "Чем являются и чем должны быть числа?" (предисловие к первому изданию) начинается словами "То, что может быть доказано, не должно принимать в науке на веру". Это высказывание, конечно, характерно для образа мышления большинства математиков, и тем не менее оно как принцип несостоятельно. Вряд ли та цепочка опосредованных рассуждений, которую мы называем доказательством, способна порождать какую бы то ни было "веру" без того, чтобы мы не удостоверились путем непосредственного усмотрения в правильности каждого отдельного шага! Именно здесь (а не в доказательстве) кроется последний достоверный источник познания, именно это является "переживанием истины". Тот же, кто подходит к другим наукам, например к философии, как математик, требуя дефиниций и дедукций в математическом стиле, поступает ничуть не умнее зоолога, который стал бы отвергать числа на том основании, что они не являются живыми существами.

щим свойством); тогда если существует такое рациональное число r , что $\alpha < r$ и $r < \beta$, то $\alpha < \beta$. Если выражение "существует" интерпретировать в указанном выше смысле, то неравенство $\beta \leq \alpha$ справедливо лишь тогда, когда из аксиом следует, что не существует рационального числа r , удовлетворяющего неравенствам $\alpha < r$, $r < \beta$. Но при этом суждения $\alpha < \beta$, $\beta \leq \alpha$ не образуют полной альтернативы, так как вполне может случиться, что ни существование, ни несуществование такого рационального числа r не вытекает из аксиом арифметики. Подход, о котором идет речь, оказывается выполнимым лишь в том случае, если известно: аксиомы *непротиворечивы* и *полны* в том смысле, что из двух "противоположных" собственных суждений U и V обязательно одно и только одно является логическим следствием из аксиом. Этого мы, однако, не знаем, даже если в это и верим. Но если эта вера когда-нибудь превратится в убеждение (*Einsicht*), то можно, пожалуй, быть уверенным, что этого нам удастся достичь лишь на основе наглядного представления итерации элементарных логических умозаключений, поскольку логический вывод и есть такая итерация, бесконечно повторяющаяся в некоей последовательности. Из этого наглядного представления мы и черпаем основополагающие арифметические идеи (*Einsichten*), касающиеся натуральных чисел, и на этом логически строится вся *Mathesis pura*².

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 4. Множества

Конечные множества можно описывать двумя способами: либо *индивидуализированно*, путем перечисления всех их элементов в отдельности, либо *обобщенно*, в соответствии с некоторым законом, посредством указания свойств, присущих элементам множества и не присущих никаким другим предметам. В случае бесконечных множеств (именно в них заключена сущность бесконечного) первый путь невозможен. Для их обобщенного описания привлекаются — в качестве "характеристических свойств" элементов — первичные и построенные из первичных согласно принципам, изложенным в § 2, свойства и отношения: они образуют совокупность "задаваемых" свойств. Итак: *Каждому первичному или производному свойству E соответствует некоторое множество (E). Выражения "предмет a обладает свойством E " ("соответствующая схема суждений $E(x)$, которая содержит пустое место, истинна при $x = a$ ") и " a есть элемент множества (E)" равнозначны. Двум такого рода свойствам E и E' тогда и только тогда соответствует одно и то же множество, когда любой предмет (рассматриваемой категории), обладающий свойством E , обладает и свойством E' , и наоборот.*

Для тождества двух множеств (в отличие от свойств) не имеет решающего значения, каким образом они определены [на основе первичных свойств и отношений или путем указания отдельных предметов с помощью принципов, изложенных в § 2], важно лишь не выводимое из определения

чисто логическим путем объективное *<sachhaltig>* обстоятельство: является ли каждый элемент одного множества также и элементом другого множества и наоборот.

Мы видим, впрочем, что индивидуализированное описание конечного множества с формальной точки зрения является лишь частным случаем описания с помощью закона. Если, например, a , b , c — три предмета рассматриваемой категории, то

$$E(x) = J(x, a) + J(x, b) + J(x, c)$$

есть схема суждений производного свойства "быть a или b или c ": ей соответствует множество, состоящее из трех предметов как его элементов.

С той же самой точки зрения, согласно которой для тождества существен не способ, каким оно определено (его *смысл*), а реальная *<sachlich>* область его значимости, мы можем подойти также к отношениям и к соответствующим им схемам суждений. Подобно тому как каждому свойству соответствует некоторое *множество*, каждому отношению соответствует некоторая *функциональная зависимость*. Это выражение (для которого я не нахожу более краткой и подходящей замены) непосредственно заставляет вспомнить о том, что именно здесь коренятся математические понятия "функция, соответствие, отображение". Вместо этого можно говорить — смотря по числу пустых мест — о двух-, трех-, четырех-, . . . *-мерных множествах*; тогда то, что мы прежде называли множеством, более точно следует называть "одномерным множеством". В зависимости от того или иного выражения строится и вся остальная терминология. Например, если a и b находятся друг к другу в бинарном отношении R , мы можем сказать: a и b образуют систему элементов соответствующего двумерного множества (R), либо a и b удовлетворяют функциональной зависимости (R).

В случае многомерных множеств следует, однако, иметь в виду одно более важное обстоятельство. Пусть, например, $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — две бинарные схемы суждений. Если не существует таких предметов $x = a$, $y = b$ рассматриваемой категории, что $U(a, b)$ имеет место, а $V(a, b)$, напротив, не имеет места или $V(a, b)$ имеет место, $U(a, b)$ же не имеет места, то этим двум отношениям соответствует одна и та же функциональная зависимость. Но требование, налагаемое нами на схемы суждений U и V , не выражает какой-либо связи, которая сама по себе имеет место между ними, а, как очевидно, предполагает, что их пустые места определенным образом полностью отождествлены. Если отдельной схеме суждений $U(x, y)$ поставлена в соответствие некоторая функциональная связь, так, что при этом оказывается выполненным только что сформулированное требование, то мы должны предположить, что пустые места в схеме суждений $U(x, y)$ уже упорядочены в определенной последовательности; тогда такую схему мы будем называть *субъектно упорядоченной*. При записи мы указываем такое упорядочение буквами, расположенными в той же последовательности, что и пустые места (слева направо, в соответствии с привычным для нас направлением письма). Наше требование имеет ясный смысл лишь для *субъектно упорядоченных* бинарных отношений:

предметы a и b следует подставлять на упорядоченные пустые места обеих схем суждений в одной и той же последовательности.

Каждой субъектно упорядоченной схеме суждения некоторого первичного или производного отношения соответствует некоторая функциональная зависимость — некоторое одномерное множество; двум таким схемам суждения (с равным количеством пустых мест) одна и та же функциональная зависимость соответствует тогда и только тогда, когда любые предметы рассматриваемой категории, для которых имеет место одно отношение, будучи взяты в той же последовательности, удовлетворяют другому отношению, и наоборот.

Установленные в § 2 принципы превращаются теперь в принципы, управляющие "порождением" одно- и многомерных множеств. Отрицанию (принцип 1) соответствует в области множеств образование *дополнения*. Принципы 3 и 4 приводят к построению *пересечения* (Durchschnitt) и *суммы* двух множеств. Если в некоторое тернарное отношение $U(x, y, z)$ подставить, например, вместо z данный предмет a , то из соответствующего трехмерного множества возникает "сечение" (Querschnitt) $z = a$, которое является двумерным множеством. Принцип 6 по аналогии с аналитической геометрией можно назвать принципом *проекции*.

Одно- и многомерные множества образуют из первоначально заданной предметной области некоторую новую производную систему идеальных предметов; она возникает из первоначальной в результате того, что я бы назвал *математическим процессом*. Я действительно думаю, что в таком способе образования понятий проявляется наиболее характерная особенность математического способа мышления. Само собой разумеется, что эти новые предметы — множества — совершенно отличны от исходных; они принадлежат абсолютно иной сфере бытия.

Никто не может описать бесконечное множество иначе, чем указав свойства, характерные для элементов данного множества; никто не может установить соответствие между бесконечно многими предметами (Dingen) иначе, чем задав *закон*, т.е. отношение, связывающее соотносимые друг с другом предметы. Представление о бесконечном множестве как о какой-то совокупности, составленной с помощью бесконечно большого числа отдельных произвольных актов выбора и затем обзриваемый нашим сознанием как некое целое, лишено смысла; "неисчерпаемость" заложена в самой сущности бесконечного. Наша позиция сводится к следующему. Переход от "свойства" к "множеству" (тех объектов, которые обладают данным свойством) означает лишь, что чисто логическому подходу противопоставляется в качестве значимой *реально-вещная* (sachlicher) точка зрения; иначе говоря, основное значение придается *вещному* — устанавливаемому только на основе знания о вещах — совпадению (по "объему", как говорят логики), а не логическому смысловому равенству (logische Sinnesgleichheit). Поэтому сформулированным здесь точным понятиям множества и функции я противопоставляю совершенно смутное понятие функции, которое со времен Дирихле стало каноническим в анализе, и в одном ряду с этим понятием ныне выступает общепринятое понятие множества.

Элементарная геометрия, арифметика, алгебра многочленов и рациональных функций — эти основные части здания математики — находятся в хорошем состоянии, чего нельзя сказать об анализе и теории множеств (более подробно об этом см. в § 6). Широко известная критика, которой подверглись в XIX в. основания классического анализа, была справедливой, что никто не станет оспаривать, и, конечно, именно она способствовала гигантскому прогрессу в строгости мышления. Однако то положительное, что пришло на место старого, оказывается, *если обратиться к последним принципам*, более неясным и уязвимым, чем это старое, так что можно не сомневаться: большая часть сделанного в рамках современных критически направленных исследований при окончательном уяснении основ анализа должна быть использована в качестве строительного материала по-новому. Великая задача, поставленная со времен открытия пифагорейцами иррациональных чисел, — а именно, чтобы данное нам непосредственно, наглядно (в текущем времени и в движении) *непрерывное* представить математически, в том его содержании, которое формулируемо в "точном" знании, как совокупность дискретных "стадий", — эта задача, несмотря на усилия Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса и сегодня, как и в прежние времена, остается нерешенной. Системы более или менее произвольных постулатов не могут более помочь нам (хотя они и позволяют "экономить мышление", и оказываются "плодотворными"); мы вынуждены предпринимать попытки нащупать решение, основанное на проникновении в самую суть дела. Сейчас нам придется проследить на несколько шагов дальше те следствия для оснований анализа и учения о множествах, к которым приводят наши взгляды на понятия множества и функции.

Но довольно общих предварительных замечаний. Поскольку мы должны исходить из некоторой вполне определенной области операций, существующие множества и соответствия определены посредством содержательных, выражаемых через фундаментальные первичные свойства и отношения зависимостей, которые имеют место между предметами рассматриваемых категорий; но не может существовать — не затрагивая возможности общего учения о множествах — никакой универсальной, пригодной для всех областей операций *шкалы бесконечных кардинальных и ординальных чисел*, как ее разработал Кантор. Пропась между конечным и бесконечным, будто бы заполненная учением о множествах, ныне вновь разверзается зияющей бездной. Тот теоретико-множественный подход к натуральным числам, который развил Дедекинд в своей работе "Чем являются и чем должны быть числа?", может иметь ценность для систематизации математики *); однако он не должен вводить нас в заблуждение относительно того, что уже в основных понятиях учения о множествах мы должны опираться на наглядное представление итерации и натурального числового ряда.

*) Разумеется, я далек от мысли поставить под сомнение огромное историческое значение этой работы Дедекинда для развития математического мышления.

§ 5. Натуральные числа. Антиномия Ришара

Наши рассуждения применимы в частности, к той категории идеальных предметов, которые мы называем *натуральными числами*. В основе их лежит единственное, непосредственно данное нам по смыслу отношение $\mathfrak{F}(x, y)$, существующее между двумя натуральными числами x и y , из которых y — *ближайшее следующее за x число*. Тогда имеют место простые факты: для каждого числа x существует одно и только одно число y , для которого выполняется $\mathfrak{F}(x, y)$; существует единственное число 1, такое, что для него нельзя найти числа, за которым оно непосредственно следует; но для любого числа, отличного от 1, существует одно и только одно такое число. Наконец, на том, что, исходя из 1 и переходя от каждого числа к непосредственно следующему, можно в конце концов достичь любого числа, основано важное *умозаключение путем совершенной индукции*.

Каждая математическая дисциплина характеризуется тем, что 1) в основе ее лежит область операций такого рода, которую мы предполагали с самого начала; что 2) этой области всегда соответствуют натуральные числа вместе со связывающими их отношениями $\mathfrak{F}$ и что 3) над этой областью комбинируемых операций с помощью повторяемого, — возможно, неограниченно повторяемого — математического процесса строится некоторый мир новых идеальных предметов: множеств и функциональных зависимостей. Старое определение математики как науки о числе и пространстве стало чрезмерно узким в результате ее новейшего развития, однако нет никакого сомнения в том, что даже в таких дисциплинах, как чистая геометрия, *analysis situs*³, теория групп и т.д. с рассматриваемым предметом начали связывать натуральные числа. Мы будем поэтому предполагать, что в основе нашего исследования лежат предметы одной или нескольких категорий, одной из которых заведомо является категория натуральных чисел. В связи с такими смешанными областями уместно напомнить сделанное в § 1 замечание о том, что каждое пустое место в схеме суждений первичного или производного отношения всегда связано с присущей ему определенной категорией объектов.

Если исходная область операций есть описанная в начале этого параграфа область натуральных чисел и ничто другое, то мы приходим к *чистой теории чисел*, составляющей центральное ядро всей математики; очевидно, что ее понятия и факты сохраняют свое значение для *каждой* математической дисциплины.

Если натуральные числа принадлежат области операций, то к перечисленным в § 2 дефинициональным принципам присоединяется новый, весьма важный, специфически математический принцип *итерации* (определение путем совершенной индукции), с помощью которого устанавливается связь натуральных чисел с предметами других категорий (если таковые имеются) исходной области операций. Например, в чистой теории чисел требуется, чтобы из отношения $\mathfrak{F}$ можно было образовать основные арифметические отношения

$$m < n \mid m + n = p \mid m \cdot n = p$$

(см. главу II, § 1). В основаниях геометрии этот принцип привлекается для обоснования *измерения*. Речь при этом идет о том, чтобы из отношения $a + b = c$ между тремя векторами a , b и c вывести отношение $n a = b$, где n есть произвольное натуральное число. Обозначим первое отношение через $\sigma(a, b, c)$, второе — через $M(a, b, n)$. Второе отношение рекурсивно сводится к первому, если ввести следующие требования:

$M(a, b, 1)$ означает $a = b$ { или $J(a, b)$ };

$M(a, b, n + 1)$ означает: существует вектор z , такой, что

$M(a, z, n) \cdot \sigma(a, z, b)$.

Общую формулировку принципа итерации, входящего здесь в функцию, нам придется отложить до § 7.

С рядом натуральных чисел связано канторово понятие *счетности*, которое, как известно, привело к *антиномии Ришара*. Обычно эту антиномию принято формулировать следующим образом. Всевозможные комбинации конечного числа букв образуют счетное множество, а так как любое определенное действительное число должно быть определимо с помощью конечного *«endliche»* набора слов, то может существовать лишь счетная совокупность *«nur abzählbar viele»* действительных чисел, что противоречит классической теореме Кантора и ее доказательству. Для рассмотрения этой антиномии заменим понятие "действительное число" понятием "множество натуральных чисел". В качестве исходной области операций выберем натуральные числа с заданным на них единственным первичным отношением $\mathfrak{F}$. Все без исключения натуральные числа при этом являются индивидами, и поэтому при образовании производных свойств и отношений мы можем полностью исключить принцип 5 из § 2. В то же время давайте присоединительно. "Процесс порождения" схем суждений для производных свойств и отношений можно, очевидно, устроить так, что, упорядочивая их, мы получим "перечислимую" *«"abgezählte"»* последовательность схем суждений. При этом получаемым таким путем свойствам будут, как показано в § 4, соответствовать одномерные числовые множества. А тогда с помощью указанного процесса и все возможные множества натуральных чисел в том же смысле окажутся упорядоченными в некоторую перечислимую последовательность. Именно в этом состоит, как мне кажется, подлинная суть антиномии Ришара, насколько мы можем раскрыть ее здесь на основе нашего содержательного *«sachlich»* уточнения понятия "финитного определения", осуществляемого с помощью рассмотренных нами принципов порождения *«Erzeugungsprinzipie»*. Что же касается счетности всех числовых множеств, то канторовское доказательство на деле опровергает это утверждение совсем в ином смысле, который, как я думаю, только и может быть ему придан в математике. В рассматриваемой нами области операций не существует бинарного отношения чисел $R(x, y)$ следующего рода: для каждого (соответствующего некоторому производному свойству одномерного) числового множества существует число a , такое, что данное множество совпадает с множеством, соответствующим свойству $R(x, a)$ (т.е. с множеством всех чисел x , находящихся с числом a в отношении $R(x, a)$).

Канторовское доказательство этой теоремы сводится просто к рассмотрению числового множества, соответствующего свойству $\bar{R}(x, x)$: ясно, что для этого множества нельзя найти число a , которое было бы связано с ним указанным выше способом.

Если понятие счетности трактовать в духе рассмотренного нами примера, то, разумеется, *нет никаких оснований предполагать, что каждое бесконечное множество должно содержать счетное подмножество*. Должен признаться, что подобный вывод меня совсем не пугает.

§ 6. Итерация математического процесса.

Circulus vitiosus в анализе

Мы исходили из некоторой области операций, т.е. из одной или нескольких категорий предметов — "основных категорий" и определенных, непосредственно заданных на предметах этих категорий, "первичных" свойств и отношений. Каждое из отдельных пустых мест некоторого отношения (как первичного, так и производного) относится к определенной категории предметов так, что для восполнения соответствующего пустого места осмысленным образом может использоваться лишь один предмет данной категории. Категорию "натуральное число" вместе с заданным на ней первичным отношением $\mathfrak{F}$ мы называем *абсолютной* областью операций. Мы предполагаем, что область операций, выбранная нами в качестве основной (*zugrunde liegende*), содержит эту абсолютную область (в некотором непосредственно понятном смысле). Из первичных свойств и отношений получаются производные, и каждому первичному или производному субъектно упорядоченному отношению в силу описанного $\langle \text{den} \rangle$ математического процесса соответствует одномерное или многомерное множество. Категория, которой принадлежит такое множество, определяется числом пустых мест в том отношении, из которого оно возникло, и категориями предметов, которым соответствуют пустые места в установленной последовательности.

Все эти свойства и отношения, а также соответствующие множества и функциональные зависимости мы условимся здесь называть точнее свойствами, отношениями и т.д. *1-й ступени*.

То, что $a, b, \dots$ образуют систему элементов множества M , есть отношение между предметами $a, b, \dots$ и множеством M ; это отношение мы обозначим как ϵ . Из пустых мест отношения ϵ одно, таким образом, относится к некоторой определенной категории множеств 1-й ступени, а следующее по порядку пустое место — к тем основным категориям, с которыми связаны пустые места множеств данной категории (т.е. пустые места отношений, соответствующих этим множествам). Дополним теперь основные категории различными одно- и многомерными множествами различных категорий, а заданные на основных категориях первичные свойства и отношения — отношением ϵ , связывающим предметы основных категорий с множествами. В результате возникает некоторая расширенная область операций, к которой мы можем снова применить наш "математический процесс"; так мы получаем (одномерные и многомерные) "множества

2-й ступени", в которых пустые места относятся, вообще говоря, частично к категориям множеств 1-й ступени. Таким способом рассматриваемый $\langle \text{der} \rangle$ математический процесс может быть повторен неограниченно много раз.

Следует иметь в виду, что на 2-й ступени могут появиться новые множества, все пустые места которых относятся к основным категориям. Это происходит, в частности, тогда, когда при построении принадлежащего "расширенной" области операций отношения R путем использования принципов из § 2 некоторые пустые места, относящиеся к категориям множеств 1-й ступени, восполнены знаком $*$ ("существует"), а в самом отношении R не осталось более пустых мест такого типа. Наличие такого отношения R ("2-й ступени") тогда связано с тем, что существует некоторое множество, т.е. *некоторое отношение 1-й степени, устроенное так, что...* Ясно, что отношение R как таковое противостоит отношениям 1-й ступени как отношению совершенно иного рода. Мы были бы обречены без конца ходить по замкнутому кругу, если бы не обращали внимания на различие ступеней, пожелали бы говорить об отношении, наличие которого связано с тем, что существует отношение, устроенное так, что ..., и т.д. — кругу, по бессмысленности и противоречию полностью аналогичному известному расселовскому противоречию, в котором говорится о множестве всех множеств, не содержащих самих себя в качестве элемента. (Я утверждаю и постараюсь более подробно показать, что современный анализ на каждом шагу впадает в подобный круг.) При образовании отношения R понятие существования применяется одинаково как к отношениям (1-й ступени), так и к предметам основных категорий, поскольку принцип 6 (восполнение с помощью "существует") применим как к пустым местам, относящимся к некоторой основной категории, так и к пустым местам, относящимся к некоторой категории множеств 1-й ступени. Представляется естественным ограничить это применение понятия существования предметами основных категорий и тем самым при итерации математического процесса *всегда использовать оба принципа восполнения 5 и 6 лишь применительно к пустым местам*, относящимся к некоторой основной категории*). Ясно, что при таком "суженном методе" ("engeren Verfahren") множествами и функциональными зависимостями 1-й ступени исчерпываются те множества и функциональные зависимости, которые существуют между объектами основных категорий, так что на 2-й и более высоких ступенях новые множества и функциональные зависимости такого рода более не возникают. Следовательно, при использовании суженного подхода отпадает необходи-

*Принципиальное значение этого суженного метода становится вполне ясным из следующего замечания. Только при его использовании предметы основных категорий всегда остаются собственным объектом нашего исследования; в противном случае все богатство $\langle \text{Fülle} \rangle$ производных свойств и отношений в той же мере становится объектом изучения, что и область исходных предметов. Финитные суждения, т.е. суждения, образованные при ограничениях, содержащихся в суженном методе, предполагают для своего разрешения $\langle \text{Entscheidung} \rangle$ лишь обозрение совокупностей этих основных предметов, "трансфинитные" же суждения требуют, кроме того, полного обозрения всех производных свойств и отношений.

мость различать разные ступени, поскольку ступень, на которой находится множество, уже определена той категорией, которой оно принадлежит. Например, трехмерное множество, у которого первые два пустых места относятся к основным категориям, а последнее — к одномерным множествам предметов определенной основной категории, должно принадлежать ко 2-й ступени.

Перейдем теперь к применению развитых выше соображений к основаниям *анализа*. Чтобы не задерживаться на несущественном, примем за исходные *рациональные числа* и не будем начинать *ab ovo*⁴ — с натуральных чисел*). Подлежащую рассмотрению основную область операций я опишу следующим образом. Имеется 1) категория "натуральное число" и связанное с ней бинарное отношение $\{$ и 2) категория "рациональное число"**, тернарные отношения

$$\sigma(x, y, z): x + y = z, \quad \pi(x, y, z): x \cdot y = z$$

и свойство $P(x)$: "число x положительно"; их пустые места относятся к этой категории.

Следуя Дедекинду, охарактеризуем действительное число α с помощью множества тех рациональных чисел, которые меньше, чем число α . В соответствии с этим определением под действительным числом понимается (одномерное) множество α рациональных чисел, обладающих следующими свойствами:

а) если r — элемент множества α , то множеству α принадлежит также любое рациональное число r' , для которого разность $r - r'$ положительна;

б) для каждого элемента r множества α существует, однако, принадлежащее множеству α в качестве элемента рациональное число r^* , для которого разность $r^* - r$ положительна;

с) элементы множества α существуют, но не каждое рациональное число есть элемент множества α .

То, что r есть элемент множества α , мы будем словесно выражать как " r меньше α " и обозначать как $r < \alpha$.

Как же в этом случае надлежит понимать понятие "множество"? Для того чтобы построить анализ, заведомо недостаточно применить этот математический процесс лишь *один раз*, ибо анализ занимается изучением не только действительных чисел, но и множеств действительных чисел, а также функциональных зависимостей между ними. Так вот, следует ли нам при итерации воспользоваться "суженным методом" или нет? Если мы откажемся от "суженного метода", то придем к "ступенчатому" (*mit Stufenbildung*), в котором существуют действительные числа 1-, 2-, 3-й, ... ступеней и функции различных ступеней, такие, что, например, некоторая функция 2-й ступени имеет смысл лишь для значений аргументов 1-й и 2-й ступеней. Правда, такой анализ мог бы внушать нам доверие, если бы всюду, где речь заходит о множествах и функциональных связях (особен-

*) Подробное и систематическое построение понятия числа осуществлено в главе II.

**) Натуральные числа я рассматриваю здесь как самостоятельную категорию, не содержащуюся в категории рациональных чисел.

но, когда появляется словечко "существует"), мы могли бы снять добавление "1-й (или 2-й ...) ступени", если бы мы действовали так, будто свойства 2-й ступени (которые, однако, могут быть определены лишь на основе *совокупности* свойств 1-й ступени) принадлежат к исходному кругу свойств 1-й ступени. Но тогда все определения и доказательства приняли бы форму *circulus vitiosus*. Пусть, например, M есть некоторое ограниченное множество действительных чисел 1-й ступени. Чтобы построить его *верхнюю грань*, необходимо образовать множество γ рациональных чисел, содержащее в качестве своего элемента рациональное число r тогда и только тогда, когда существует принадлежащее множеству M действительное число 1-й ступени, которое больше r . Это множество γ обладает свойствами а), б) и в) и, следовательно, содержит некоторое действительное число, но действительное число 2-й ступени, так как в его определение "существует" входит с дополнением "некоторое действительное число 1-й ступени" (т.е. "некоторое множество 1-й ступени рациональных чисел" или "некоторое первичное или производное свойство 1-й ступени").

Показанный нами *circulus vitiosus*, скрывающийся за туманной природой обычных понятий множества и функции, — не столь легко устранимая формальная ошибка при построении анализа. Осознание ее фундаментального значения есть нечто такое, что даже многими словами трудно довести до сознания читателя. Однако чем отчетливее выступает на поверхность логическая ткань анализа, чем глубже и полнее проникает в нее наш умственный взор, тем яснее становится, что при современном способе обоснования анализа яд противоречия проник, так сказать, в каждую клетку этого мощного организма, и чтобы помочь ему, необходим радикальный пересмотр дела.

"Ступенчатый" анализ носит искусственный характер, им невозможно пользоваться. В нем упускается из виду его собственный объект познания — число (см. примечание на с. 111). Ясно, что мы должны вступить на иной путь, а именно использовать понятие существования лишь применительно к основным категориям (в данном случае — к натуральным и рациональным числам), а не к системе свойств и отношений (или соответствующим им множествам, действительным числам и т.п.); иначе говоря, перед нами открывается единственная возможность: *воспользоваться суженным методом итерации*. Только этот метод гарантирует нам также то, что все понятия и факты, величины и операции такого "прецизионного анализа" могут рассматриваться как идеализации своих аналогов в математике приближений, оперирующей с "безопасными числами" (что для *приложений* имеет решающее значение). Правда, от таких утверждений, как упомянутое выше утверждение о том, что каждое ограниченное множество действительных чисел имеет верхнюю грань, нам придется отказаться. Ценой этой жертвы на избранном пути мы избавляемся от заблуждений *).

*) В науке существуют только "законы", но не "запреты". В данном случае речь также идет не о том, чтобы "запретить" употребление термина "существует" применительно к предметам, не принадлежащим к основным категориям. Разумеется, вполне возможно (и допустимо) использовать не суженный, а более широкий метод. Но тот, кто решит поступить так, пусть делает это способом, не приводящим к порочному кругу!

Далее возникает вопрос, как нам надлежит понимать *понятие функции*. Пусть, например, речь идет о функциях $x(t)$, в которых независимая переменная t пробегает некоторую категорию предметов $\mathfrak{t}$ (например, натуральные числа) и значениями которых являются действительные числа. Пусть $R(x, t)$ есть некоторое бинарное отношение, в котором пустое место x относится к одномерным множествам рациональных чисел, а пустое место t принадлежит категории $\mathfrak{t}$. Если каждому предмету t этой категории — или каждому элементу t некоторого одномерного множества этой категории — соответствует $\langle \text{gehört} \rangle$ одно и только одно множество x рациональных чисел, обладающее свойствами а), б) и в), так что для x и t существует упомянутое отношение R , то это "действительное число" x есть функция от t ; таково было бы одно из возможных пониманий понятия функций. Более естественным представляется следующее понимание. Действительное число x задается как множество рациональных чисел, охарактеризованных некоторым общим свойством; число x зависит от t , если под это свойство подпадает произвольный предмет t категории $\mathfrak{t}$, т.е. если это *свойство* возникает из бинарного отношения $S(\circ, \circ)$ (первое пустое место относится к категории рациональных чисел, второе — к категории $\mathfrak{t}$) путем восполнения второго пустого места предметом t : множество x рациональных чисел, соответствующее свойству $S(\circ, t)$, *зависит* от t или есть *функция* от t . В частности, может случиться так, что для каждого предмета t категории $\mathfrak{t}$ или даже лишь для каждого предмета t некоторого множества, состоящего из предметов этой категории, это рассматриваемое множество x обладает свойствами а), б) и в) некоторого действительного числа.

При первом понимании понятия функции не должно быть верным даже предложение $\langle \text{Satz} \rangle$, согласно которому сумма двух функций есть тоже функция. Действительно, если $R(x, t)$, $R'(x, t)$ — два отношения, определяющие соответствующие функции, и $\Sigma(x, y, z)$ обозначает отношение $x + y = z$ для действительных чисел, то сумма данных функций определяется отношением, которое можно было бы построить следующим образом:

$$R(x, t) \cdot R'(y, t) \Sigma(x, y, z) = RR' \Sigma(x, y, z);$$

$$RR' \Sigma(*, *, x, t).$$

В соответствии с этим при образовании данной суммы необходимо использовать $*$ ("существует") для восполнения какого-то такого пустого места, которое не связано с основными категориями; это, однако, недопустимо, если следовать суженному методу, которого мы взяли за правило придерживаться. Наоборот, при втором понимании понятия функции сумма двух функций очевидным образом снова есть функция. Кроме того, как показано в предыдущем параграфе, в канторовском доказательстве теоремы о несчетности континуума — т.е. того, что не существует функции $T(n)$, таковой, которая каждому натуральному числу n ставила бы в соответствие некоторое множество T натуральных чисел, причем так, чтобы каждое множество натуральных чисел встречалось бы среди значений этой функции, — предполагается, что понятие "функция" берется во втором смысле. Для

этого второго понимания остается также в силе *принцип сходимости Коши* (ср. главу II), что имеет, естественно, исключительно важное значение для построения анализа.

Все это вынуждает нас остановиться на следующем понятии функции (важность его становится непосредственно ясной, как только мы внимательно в него всмотримся). Пусть пустые места некоторого отношения, например $R(u, v | x, y, z)$, разделены на две упорядоченные группы *зависимых* u, v и *независимых* x, y, z пустых мест. Восполняя каждое из независимых пустых мест произвольными предметами соответствующих категорий, мы получаем из R некоторое отношение $R(\circ, \circ | x, y, z)$, обладающее уже только (упорядоченными) "зависимыми" пустыми местами; ему соответствует некоторое двумерное множество $\Phi(x, y, z)$, которое *зависит* от x, y, z или является *функцией* "значений" независимых переменных x, y, z . (Но в то время как это множество — "значение функции", возникающее в результате восполнения надлежащими предметами — значениями независимых переменных, — является зависимым, та категория, к которой оно принадлежит, сама по себе определена, а именно является категорией тех двумерных множеств, пустые места которых относятся к тем же категориям объектов, что и u и v в R). В силу нашего определения отношения

$$R(u, v | x, y, z) \text{ и } \epsilon(u, v; \Phi(x, y, z))$$

равнозначны $\langle \text{gleichbedeutend} \rangle$.

Пример. Возьмем в качестве R отрицание отношения $\epsilon : \bar{e}(x, X)$, где пустое место x относится к определенной категории предметов, а пустое место X — к той категории одномерных множеств, элементы которых принадлежат той же категории, что и x . Если мы возьмем в качестве независимой переменной x , а в качестве зависимой переменной X , то получим функцию $\Phi(X)$, значение которой для любого множества X есть *дополнительное* к нему множество $\bar{X}$. Здесь мы имеем простейшую функцию одной переменной, у которой независимый "аргумент" и значение функции принадлежат одной и той же категории.

§ 7. Принцип подстановки и принцип итерации

То естественное понятие функции, на которое теперь направлен наш взор, позволяет дать окончательную и общую формулировку принципа итерации, введенного нами еще в § 5. Поэтому обратимся снова к нашим общим соображениям, предполагающим произвольную область операций. Принципу итерации необходимо предпослать принцип *подстановки*.

7. Пусть $R(u, v | x, y, z)$ и $S(x, w, U)$ — два отношения: пустое место U (в S) пусть относится к той категории двумерных множеств, пустые места которых соответствуют категориям, принадлежащим пустым местам u и v в R ; пустые места в R и S обозначают одну и ту же категорию предметов. Если пустые места u и v в отношении R я истолкую как зависимые, то из R возникает функция $\Phi(x, y, z)$, значение которой относится

к категории множеств, соответствующей пустому месту U^*). Образует отношение $S(x, w, \Phi(x, y, z))$ (с четырьмя пустыми местами x, y, z, w).

Ради простоты мы сформулировали этот принцип на примере, однако и без дальнейших разъяснений видно, как применять его в общем случае. В качестве предельного мы допускаем также и случай, когда отношение R вообще *не содержит* независимых пустых мест. В этом случае пустое место U в S занимает некоторое множество M , определяемое заданным субъектно-упорядоченным отношением R . При восполнении пробелов, относящихся к категории множеств, принцип подстановки играет, стало быть, такую же роль, что и принцип 5 из § 2, относящийся к восполнению пустых мест, которые относятся к какой-то основной категории. Однако этот принцип заключает в себе то обобщение, что подставляться может не только определенное множество, но и функция.

8. *Принцип итерации.* Пусть $R(x, x' | X)$ есть отношение, пустые места которого разделены на две упорядоченные группы — зависимых (x, x') и независимых (X); независимое пустое место X относится к той категории двумерных множеств, пустые места которых, в свою очередь, соотносятся с теми же самыми категориями предметов, что и зависимые пустые места x, x' в отношении R . Функцию, возникающую таким способом из R , я обозначу как $\Phi(X)$; ее значение есть некоторое множество той же категории, что и значение аргумента X (ср. пример, приведенный в конце § 6). В соответствии с принципом подстановки мы можем образовать

$$R_2(x, x' | X) = R(x, x' | \Phi(X))$$

[функция, возникающая из R_2 , есть итерированная функция $\Phi(\Phi(x))$]. Отношение R я обозначу как R_1 . Из R_2 , в свою очередь, можно образовать

$$R_3(x, x' | X) = R_2(x, x' | \Phi(X))$$

и т.д., так что при любом натуральном n

$$R_{n+1}(x, x' | X) = R_n(x, x' | \Phi(X)),$$

и R_1 совпадает с R . Отношения $R_1, R_2, R_3, \dots$ мы рассматриваем как *такие отношения, которые возникают из одного-единственного отношения*

$$R(n; x, x' | X)$$

путем восполнения пустого места n , относящегося к категории "натуральное число", последовательно, одно за другим, предметами 1, 2, 3, ...

Этот принцип подчеркивает значение натуральных чисел: их ряд представляет собой общую абстрактную схему процесса, состоящего из итерации (повторяющегося снова и снова выполнения) одного и того же элементарного процесса. Для того чтобы получить этот принцип в наиболее общей форме, его необходимо расширить в трех направлениях. *Во-первых*, в отношении R наряду с независимым пустым местом X могут встречаться и другие пустые места, не затрагиваемые итерацией. *Во-вторых*, вместо

*) Следует остерегаться вводить отношение между x, y, z и U , выражаемое равенством $U = \Phi(x, y, z)$! Это снова привело бы нас к порочному кругу, которого нам едва удалось избежать. Ср. § 8.

единственного пустого места X итерации могут подвергаться сразу несколько пустых мест. Пусть, например,

$$R(x, x' | X, Y), \quad S(y | X, Y)$$

два отношения, пустые места которых принятым нами способом разделяются на зависимые и независимые; результатом тогда являются две функции $\Xi(X, Y)$ и $H(X, Y)$. Пусть пустое место X относится к той же категории двумерных множеств, к которой принадлежит значение функции Ξ , а пустое место Y — к той же категории двумерных множеств, к которой принадлежит значение функции H . Тем самым заданы условия для построения итерированных отношений:

$$R(1; x, x' | X, Y) = R(x, x' | X, Y);$$

$$R(n+1; x, x' | X, Y) = R(n; x, x' | \Xi(X, Y), H(X, Y));$$

$$S(1; y | X, Y) = S(y | X, Y);$$

$$S(n+1; y | X, Y) = S(n; y | \Xi(X, Y), H(X, Y)).$$

Наконец, *в-третьих*, функция, возникающая на n -м шаге подстановки, может зависеть от n . Пусть, например, $R(x, x' | X, n)$ — отношение, в котором последнее пустое место n относится к категории "натуральное число"; относительно остальных пробелов пусть остаются в силе прежние предположения. Соответствующую функцию я обозначу $\Phi(x, n)$. Итерация, приводящая к образованию отношения R^* , описывается формулами

$$R^*(x, x' | X, 1) = R(x, x' | X, 1);$$

$$R^*(x, x' | X, n+1) = R^*(x, x' | \Phi(X, n+1), n).$$

Принцип итерации, намного превосходящий по сложности все остальные принципы, является в специфическом смысле *математическим*. В качестве примера его применения рассмотрим упоминавшуюся в § 5 операцию построения кратного вектора (Vektor-Vervielfältung). Обозначим строчными готическими буквами пустые места, относящиеся к категории "вектор", а прописными готическими буквами — пустые места, относящиеся к категории "двумерные множества векторов". Пусть $\mathfrak{X}_0$ означает то из таких множеств, которое соответствует отношению $\sigma(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, \mathfrak{X})$. Образует отношение

$$\epsilon(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, \mathfrak{X}) \cdot \sigma(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}, \mathfrak{X})|_{\mathfrak{z}=\ast} = R(\mathfrak{z}, \mathfrak{y} | \mathfrak{X}).$$

Итерируя его, получаем $R(n; \mathfrak{z}, \mathfrak{y} | \mathfrak{X})$. Тогда $R(n; \mathfrak{z}, \mathfrak{y} | \mathfrak{X}_0)$ есть отношение $\mathfrak{y} = n \mathfrak{z}$.

Другой пример. Покажем, что *количественное число* некоторого множества (Anzahl einer Menge), состоящего из элементов определенной основной категории, есть функция этого множества, и построим эту функцию. Обозначим строчными латинскими буквами эту основную категорию, прописными латинскими буквами — одномерные множества предметов этой категории и прописными греческими буквами — одномерные множества, состоящие из такого рода множеств; в частности, Ω означает "универсальное множество" ("Allmenge") последней категории

(в каждой категории множеств существуют пустое и универсальное множества). Пустое место y в отношении

$$\epsilon(y, X) \cdot \bar{J}(x, y)$$

[то есть " y — элемент множества X , отличный от x "] будем считать зависимой переменной; из выписанного нами отношения получается функция $F(x, X)$ ["множество всех элементов множества X , отличных от x "]. Подставив ее в $\epsilon(U, \Xi)$ вместо U , получим $\epsilon(F(x, X), \Xi)$ и образуем отношение

$$\epsilon(F(x, X), \Xi) \cdot \epsilon(x, X)|_{x=*} = \partial(X, \Xi)$$

{ "существует элемент x множества X такой, что все элементы множества X , отличные от x , образуют в свою очередь множество, являющееся элементом множества Ξ " }. Итерируя выписанное отношение, получаем $\partial(n; X | \Xi)$. Тогда $\partial(n; X | \Omega) = \alpha(n, X)$ означает: X состоит по крайней мере из n элементов ("возможно следующее: из X можно вычеркнуть один за другим n элементов"). Назовем пустое множество в категории одномерных натуральных чисел "количественным числом 0" (*Anzahl 0*), универсальное множество — "количественным числом ∞ ", множество натуральных чисел $\leq n$ — "количественным числом n " (это — нормальное множество из n элементов, к которому сводится путем нумерации любое другое множество). Если пустое место n в отношении $\alpha(n, X)$ считать зависимым, а X — независимым, то из $\alpha(n, X)$ получается функция $\mathfrak{N}(X)$, равная количеству элементов множества X (*Anzahl der Elemente von X*). Она есть 0 только для пустого множества, для всех бесконечных множеств *) она есть ∞ . Итак, мы вполне строго показали, каким образом роль, которую играют натуральные числа — как "кардинальные числа" (*Kardinalzahlen*) — при определении количества элементов (*Anzahlbestimmung*) множества, может быть сведена к их первоначальной роли — к представлению об итерации в ее абстрактной чистоте **).

С расширением перечня наших дефиниционных принципов естественным образом — как это и следует из приведенных в § 5 соображений относительно логики — связано и расширение *формы умозаключений*. В частности, принцип итерации влечет бернуллиевское "умозаключение от n к $n + 1$ " (или "умозаключение путем совершенной индукции").

*) Ясно, что о предложенном Дедекиндом определении бесконечного множества ("множество, эквивалентное своему собственному подмножеству") с моей точки зрения не может быть и речи.

**) По крайней мере с чисто *логической* точки зрения такой подход может быть проведен до конца. Вопрос о том, является ли в теоретико-познавательном плане понятие количественного числа (*Anzahlbegriff*) чем-то первичным и от понятия ординального числа независимыми, я здесь не обсуждаю.

§ 8. Окончательная формулировка оснований.

Введение идеальных элементов

Поскольку от традиционных представлений я перешел к новым, мы вынуждены продираться сквозь непролазную чащу, прежде чем перед нами откроется широкая перспектива, и путь наш далек от кратчайшего. Теперь, после введения принципов подстановки и итерации, мы видим, что идея порождения отношений и соответствующих множеств по *ступеням* (причем на 1-й ступени появляются все множества, элементы которых принадлежат основным категориям, на 2-й — все такие множества, пустые места в которых частично соотносятся с основными категориями, частично с категориями множеств 1-й ступени и т.д.) не может быть сохранена. Ибо принцип подстановки очевидным образом позволяет производить "сброс" на нижележащие ступени. Однако здесь мы гарантированы от появления определений, лишенных смысла из-за содержащихся в них порочных кругов, так как применение принципа существования 6 ограничено основными категориями. Представим себе — подобное представление целесообразно из-за его наглядности, — что отношения и соответствующие множества "порождаются" генетически. Такое порождение происходит не по ступеням с помощью итерации на основе рассмотренного в § 4 математического процесса, а разворачивается, так сказать, в серии отдельных, параллельно происходящих актов. Речь идет о совокупности всех отношений, которые можно вывести из исходных отношений, заданных на основных категориях, и из ϵ , опираясь на установленные нами дефиниционные принципы. При этом каждому субъектно упорядоченному отношению предварительно следует чисто формально поставить в соответствие некоторое "множество"*) в предметном мире. Между отношениями, имеющими одинаковый смысл, и соответствующими им множествами можно не проводить различия, но тогда поначалу остается полностью не решенным вопрос о том, равны или не равны множества, соответствующие отношениям с различным смыслом. Поэтому при определении отношений никоим образом нельзя использовать отношение равенства между *множествами*. Если R — какое-то отношение, построенное с учетом этих требований, и все пустые места в нем соотнесены с основными категориями, то утверждение о том, что для каких-то определенных предметов этой категории выполняется отношение R , осмысленно и, взятое само по себе, является истинным или ложным. Но тем самым истинно или ложно само по себе и то, что *все* системы элементов, для которых выполняется отношение R , таковы, что для них выполняется и некое отношение R' того же типа (*ebensolche*), и наоборот, если это утверждение истинно, то два множества, соответствующие отношениям R и R' , следует отождествить. *После того* как произведено подобное отождествление множеств "1-го поколения" (я снова использую генетическую терминологию), можно переходить к отношениям, пустые места которых частично соотнесены с основными

*) Отношения между предметами в свою очередь являются предметами, между которыми могут иметь место новые отношения. Множества на этом этапе служат лишь для того, чтобы учесть это обстоятельство.

категориями, частично с категориями множеств 1-й ступени, и теперь относительно любых двух таких отношений разумно поставить вопрос, все ли системы элементов, удовлетворяющих одному отношению, удовлетворяют и другому. Затем производится отождествление множеств на 2-й ступени и т.д. *Существенно, что при определении отношений никак не используются понятия равенства и существования множеств.* Этим и только этим мы избегаем той бессмыслицы, которая содержится в определениях, чреватых порочным кругом.

Сняв все предварительные рассмотрения, т.е. отказавшись от содержания всего § 4, сведем теперь воедино принципы построения отношений в их окончательной формулировке.

I. И с х о д н ы й п у н к т

1) Имеются одна или несколько индивидуальных (*einzelne*) категорий предметов — "*основные категории*"; заданные непосредственно на предметах основных категорий индивидуальные свойства и отношения — *первичные отношения*. [Каждое пустое место в некотором отношении (или в соответствующей ему схеме суждений) связано с определенной категорией предметов, и поэтому схема суждений порождает осмысленное предположение только тогда, когда каждое пустое место восполнено каким-то предметом надлежащей категории.] Пустые места первичных отношений всегда соотносятся с предметами определенных основных категорий. К первичным отношениям мы присоединим также *тождество* $J(x, y)$, оба пустых места x и y которого соотносятся с одной и той же основной категорией (ограничение основными категориями в данном случае весьма существенно).

2) Каждому субъектно-упорядоченному отношению (*Relation*) (с одним или несколькими пустыми местами) соответствует в предметном мире некоторое *множество*. Например, если предметы a , b и c удовлетворяют субъектно-упорядоченному отношению R , то мы говорим, что a , b и c образуют некоторую систему элементов соответствующего множества P . Категория, которой принадлежит это множество, определена с помощью категорий, с которыми соотносятся соответственно первое, второе и третье пустые места в отношении R . В качестве еще одного основного отношения (*Grundbeziehung*) мы вводим *отношение* ϵ , которое имеет место, например, между a , b , c и P , если a , b и c образуют систему элементов множества P .

II. О б щ и е п р и н ц и п ы

Это принципы 1—4 из § 2. Относительно принципов 2—4 следует еще заметить, что, разумеется, те пустые места, которые "совмещаются", должны соотноситься с *одной и той же* категорией предметов.

III. П р и н ц и п ы в о с п о л н е н и я

Это принципы 5 и 6 с тем ограничением, что пустые места, которые восполняются непосредственно предъявляемыми предметами и выражением "существует", должны соотноситься с некоторой основной категорией.

IV. П р и н ц и п п о д с т а н о в к и и п р и н ц и п и т е р а ц и и

Это принцип 7 (из § 7). Если область операций, из которой мы исходим, содержит, как мы теперь будем предполагать, *абсолютную* область опе-

раций (ср. начало параграфа 6), то сюда же относится принцип итерации 8, наиболее общей формы.

V. О тождествовании. Множества. Функции

Рассмотрим (свойства и) отношения, являющиеся в силу I основными, и все отношения, получающиеся из них с помощью применения принципов, изложенных в II–IV. Там, где потребуются краткость, я буду называть такие отношения "финитными". Если для двух таких субъектно-упорядоченных отношений, пустые места которых, взятые в определенном порядке, соотносятся с одними и теми же категориями предметов, справедлива теорема (Satz) о том, что каждая система элементов, которая удовлетворяет одному отношению, удовлетворяет также и другому, и наоборот, то два связанных таким образом ("финитные") множества тождественны; в противном случае они различны.

Каждому отношению R описанного рода, пустые места которого разделены на две упорядоченные группы — "зависимых" и "независимых", соответствует некоторая функция F . Если каждое из "независимых" пустых мест восполняется каким-либо предметом надлежащей категории, то множество, которое соответствует возникающему из R отношению, есть значение функции F для "системы аргументов", использованной для восполнения пустых мест.

Две (по-разному определенные) функции тождественны тогда и только тогда, когда их значения совпадают при любой системе значений аргументов.

Итак, "математически расширенная" область операций установлена. К предметам основных категорий причисляются *множества* и *функции* как предметы новых идеальных категорий. К первичным свойствам и отношениям добавляются отношения ϵ и те отношения, которые существуют между некоторой функцией F (например, двух аргументов), предметами a, b и значением функции F для системы аргументов a, b . Такая расширенная область операций охватывает (в смысле § 1) некоторую замкнутую систему определенных, существующих сами по себе предметов. Если мы избираем эту систему в качестве объекта нашего исследования, то дело заключается в том, чтобы, стремясь достигнуть всей полноты знаний о ней, мы могли относительно каждого принадлежащего этой системе *собственно суждения* решать, истинно оно или ложно. Что при этом следует понимать под "собственно суждением", ясно из § 2: это суждение (в собственном смысле, без пустых мест), которое возникает из перечисленных выше основных отношений расширенной области операций в результате *неограниченного применения* принципов 1–6 из § 2; при этом основные отношения, в соответствии с § 2, должны быть дополнены тождеством (два пустых места которого теперь могут относиться к *любой* категории предметов расширенной области). Относительно принципа 5 необходимо при этом сделать еще одно замечание: из природы множеств и функций вытекает, каким образом они могут быть "непосредственно предъявлены"; именно, это происходит посредством того, что соответствующие им отношения задаются, т.е. строятся, исходя из основоположений, указанных в I, по принципам, приведенным в II, III и IV. Вполне уместны, напри-

мер, вопросы о том, является ли одно из двух данных множеств подмножеством другого, непрерывна ли данная функция одной действительной переменной, и т.п.; однако "множество всех подмножеств данного множества"*) или "множество всех непрерывных функций одной действительной переменной" в нашей области операций не существует: эти множества не "финитны", а "трансфинитны". Благодаря уже сформулированному нами — под номером V — критерию равенства двух по-разному определенных множеств или функций мы вторгаемся в область суждений и схем суждений — возможно, трансфинитных, — которые возникают при неограниченном применении принципов, приведенных в § 2.

Сказанное означает, как я думаю, что получены простые, разумные, достаточные и непротиворечивые основания для построения анализа — в отличие от обычного до сих пор обоснования, которое в силу используемых в нем смутных понятий множества и функции, а также благодаря тому способу, каким там применяются (особенно к действительным числам) понятия существования и равенства, приводит к *circulus vitiosus*. Установленные нами принципы образования производных отношений можно сформулировать в качестве аксиом, касающихся множеств и функций; в математике и на самом деле действуют так, когда из этих аксиом извлекают логические следствия.

В заключение еще несколько слов о введении в математику идеальных элементов. Рассмотрим в качестве примера идеалы в теории алгебраических числовых полей. Определяются они следующим образом. Каждая конечная система $\mathfrak{f}$ целых алгебраических чисел определяет некоторый идеал ($\mathfrak{f}$). Теорема (Satz) *U*: "алгебраическое число α делится на идеал ($\mathfrak{f}$)" — должна означать, что между α и $\mathfrak{f}$ существует определенное отношение $R(\alpha, \mathfrak{f})$, определять которое здесь более подробно нет необходимости. Идеалы обретают значение в своем свойстве быть делителями чисел, т.е. в применении к высказываниям типа приведенной выше теоремы *U*. Соответственно два идеала ($\mathfrak{f}$) и ($\mathfrak{f}'$) рассматриваются как тождественные тогда и только тогда, когда каждое число, делящееся на ($\mathfrak{f}$), делится и на ($\mathfrak{f}'$), и наоборот. Свойству произвольного алгебраического числа находиться к системе $\mathfrak{f}$ в отношении R , обозначаемое как $R(\alpha, \mathfrak{f})$, соответствует, стало быть, идеал ($\mathfrak{f}$) — так, что два свойства такого рода соответствуют одному и тому же идеалу тогда и только тогда, когда, будучи даже различны по смыслу, реально (*materiell*) обладают одним и тем же объемом — одинаковой областью значимости (*Geltungsumfang*). Но ведь именно это мы сформулировали как единственно существенное для понятия множества, что составляет полную противоположность обычному представлению о множестве как о некоем представленном в сознании "собрании" всех его элементов. В соответствии с этим мы можем рассматривать идеал как множество $M(\mathfrak{f})$, соответствующее свойству $R(\alpha, \mathfrak{f})$, как это и делал Дедекинд. Поскольку введение идеальных элементов в математике всегда происходит по одной и той же схеме — особенно тогда, когда оно осуществляется посредством так называемого "определения через абстракт-

*) Если последнее не состоит из элементов основной категории.

цию**), — понятий *множества и функции* вполне достаточно для оправдания всех "новообразований" такого рода; разумеется, иногда пользуются иной терминологией, более выразительной, чем соответствующая теоретико-множественная, как об этом со всей ясностью свидетельствует приведенный выше пример.

Заключительные замечания

Исторически понятие функции имеет два источника. К этому понятию приводят, во-первых, царящие в материальном мире "зависимости, данные самой природой"; с одной стороны, они заключаются в том, что состояния и качества реальных вещей изменяются *во времени*, этой независимой переменной *кат' ἐξοχήν*⁵, с другой же стороны — в *причинной* зависимости между причиной и действием. Второй, совершенно независимый от первого источник кроется в арифметико-алгебраических операциях. Поэтому в старом анализе функцию представляли себе как выражение, образованное из независимых переменных с помощью конечного числа применений четырех арифметических действий и некоторых менее элементарных трансцендентных операций (Transzendenten). Правда, эти элементарные операции никогда не были ясно и полно описаны, и историческое развитие всякий раз сводилось как бы к протискиванию сквозь щель между слишком узко установленными границами, хотя носители этого развития каждый раз и не осознавали, что они делают.

Пункт, где два поначалу совершенно чуждых источника понятия функции вступают в взаимодействие, — это понятие *закона природы*; сущность этого понятия состоит именно в том, что данная природой в соответствующем законе зависимость представима в виде функции, построенной чисто концептуально, — арифметическим способом. Первый значительный пример такого рода закона природы — открытый Галилеем закон свободного падения тел. Современное развитие математики привело к точке зрения, состоящей в том, что специальные алгебраические принципы конструирования, из которых исходил старый анализ, чрезмерно узки как для логически-естественного и общего построения анализа, так и для учета той роли, которая должна быть возложена на понятие функции при познании законов, определяющих события в материальном мире. Место старых *алгебраических* принципов построения должны занять общие *логические* принципы. Однако полный отказ от старых конструкций, предлагаемый современным анализом, если принципиально следовать смыслу его определений (к счастью, и в данном случае говорится одно, а делается другое), означал бы, что мы обречены блуждать в непроглядном тумане; к тому же общая идея закона природы повисла бы в воздухе.

Независимо от того, удалось ли мне или нет найти здесь в полном объеме требующиеся логические принципы построения — принципы эти опираются,

*) Насколько мне известно, этот принцип определения впервые был сформулирован Фреге (Основания арифметики, § 63–68), причем с большей ясностью, чем у кого-либо из последующих авторов, и с полным пониманием большего значения этого способа определения для всей математики.

с одной стороны, на понятия "и", "или", "не", "существует", а с другой стороны, на специфически математические понятия множества, функции, натурального числа (итерации)), а их установление, во всяком случае, является вопросом не соглашения, а логического познания, — совершенно ясно одно: негативная часть моих рассуждений имеет значение уже благодаря содержащейся в ней критике существовавших до сих пор оснований анализа, так как указывает на содержащийся в них порочный круг, и чтобы найти выход, надо действовать так, как действовал я.

Опутанный традицией, приводящей к комплексу идей, ныне безраздельно господствующему в математике и связанному прежде всего с именами Дедекинда и Кантора, я тем не менее нашел путь, ведущий к выходу из этого замкнутого круга, и определил обрисованные выше вехи этого пути. Уже после окончания этой работы мне стали известны идеи Фреге и Рассела, указывавшие выход в том самом направлении. Как и в своем основополагающем, небольшом по объему сочинении "Основания арифметики" (Бреслау, 1884), так и в обширном труде "Основные законы арифметики" (Иена, 1893) Фреге со всей определенностью подчеркивает, что под "множеством" надлежит понимать только объем некоторого понятия, а под "соответствием" — только объем, или, как он говорит, "пробег значений" (Wertverlauf), некоторого отношения. Теория логических типов Рассела*) соответствует тому образованию ступеней, о котором шла речь в § 6. Рассел формулирует "vicious circle principle" следующим образом: No totality can contain members defined in terms of itself⁶. Сюда же относятся и некоторые, — правда, весьма сомнительные — высказывания Пуанкаре о непредикативных определениях**). Однако пункт, имеющий для меня решающее значение, — необходимость использования дефиниционных принципов для точного указания границ, выделяющих сферу свойств и отношений, которым сопоставлены множества и соответствия, — этот пункт у них полностью отсутствует. Расселовское определение натуральных чисел с помощью понятия эквивалентности (Äquivalenzdefinition), заимствованное им у Фреге, и его "аксиома сводимости" (Axiom of Reducibility) отчетливо показывает, какая пропасть — несмотря ни на что — все еще отделяет меня от Рассела; ясно поэтому, что о "суженном методе" и о том особом понятии функции, которое я ввел в конце § 6, у Рассела нет и речи.

Первоначально я исходил из предложенных Цермело***) аксиом теории множеств, в которых основания теории Дедекинда — Кантора получили некоторую точную и полную формулировку. Затем у меня возникла мысль придать понятию "дефинитного высказывания о классах" (definiten Klasse-

*) См., например: Russell B. Mathematical Logic as based on the Theory of Types // Amer. J. Meth. — V. 30; Whitehead A.N., Russell B. Principia Mathematica. V.I.

**) Les mathématiques et la logique // Revue de Métaphysique et de Morale. — T. 13, 14; Reflexions sur les deux notes précédentes // Acta Math. — Bd 32. — S. 198–200.

**) Zermelo E. Untersuchungen über die Grudlagen der Mengenlehre // Math. Ann. — Bd. 65.

laussagen), используемого Цермело в имеющей решающее значение III аксиоме о "подмножествах" *), большую точность, чем в казавшемся мне неудовлетворительном цермеловском определении. Так я пришел к принципам определения, изложенного в § 2**). Попытка сформулировать эти принципы в виде аксиом образования множеств и выразить в явном виде требование, запрещающее существование всех множеств, кроме тех, которые допускают построение с помощью содержащихся в этих аксиомах конструктивных принципов, применяемых конечное число раз, *не предполагая при этом известным понятие натурального числа*, привела меня к далеко идущей и все более усложняющейся формализации, так и не доведенной до окончательного результата. Лишь в связи с общепризнанными философскими идеями, к которым я в конце концов пришел после отхода от конвенционализма, мне удалось достичь ясного понимания того, что я столкнулся здесь со схоластической псевдопроблемой, и укрепиться в твердом убеждении (в согласии с Пуанкаре, сколь ни мало я разделяю его философскую установку в остальных вопросах): *представление об итерации — ряде натуральных чисел — составляет самую основу математического мышления*; и это вопреки "теории цепей" Дедекинда, нацеленной на то, чтобы обосновать определение и умозаключение путем совершенной индукции силлогистически, без обращения к упомянутому выше наглядному представлению. А именно, если бы оказалось верным, что основные понятия учения о множествах можно постичь, привлекая лишь подобное "чистое" наглядное созерцание, то стало бы излишним и вводящим в заблуждение еще и обоснование понятия натурального числа с помощью теоретико-множественных соображений; кроме того, я со своей точки зрения должен выдвинуть против теории цепей упрек в том, что она содержит *circulus vitiosus* ***). Для того чтобы с помощью наших принципов можно было построить некоторую математическую теорию, необходим фундамент: какая-то основная категория и какое-то первичное отношение. Величине математики я усматриваю именно в том, что почти во всех ее теоремах в силу самой ее сущности всякий вопрос о *бесконечном* решается на уровне конечного; эта "бесконечность" математической проблемы базируется, однако, на том, что *последний фундамент математики образуют бесконечный ряд натуральных чисел и связанное с ним понятие существования*. Например, "великая теорема Ферма" сама по себе имеет смысл и либо истинна, либо ложна. Однако если я воспользуюсь каким-либо систематическим методом и начну подставлять по порядку все числа в обе части уравнения Ферма, то получить ответ на вопрос, истинна или ложна эта теорема, мне не удастся. Несмотря на то, что в соответствии со сказанным эта задача является, собственно говоря, бесконечной, с ней посредством мате-

*) Loc. cit., S. 263.

**) Ср. печатный текст моего доклада "Об определении основных математических понятий", прочитанного по случаю вступления в должность доцента (Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter, Jahrgang 7).

***). Аналогичный упрек я должен высказать в адрес теории конечных множеств, изложенный Цермело в Acta Mathematica. — Bd. 32. — S. 185 ff.

матического доказательства (которое, однако, в данном случае отсутствует) обращаются как с конечной.

Если мы рассматриваем понятие множества в строгом смысле — позиция, которую я отстаивал выше, — то утверждение о том, что каждой точке прямой (после того, как на ней выбрано начало и задан единичный отрезок) соответствует в качестве числовой меры некоторое действительное число [= множество рациональных чисел, обладающих свойствами а), б) и с) (см. § 6)], и наоборот, приобретает весьма серьезное содержание. Это утверждение устанавливает замечательную связь между тем, что дано в созерцании пространства, и тем, что конструируется концептуально-логическим способом. Очевидно, что подобное высказывание полностью выпадает из рамок того, чему нас учит или может научить относительно континуума наглядное созерцание, — ведь речь не идет более о некотором морфологическом описании того, что доступно созерцанию (прежде всего, это не множество дискретных элементов, а некое текучее целое); наоборот, непосредственно данная, по своей природе неточная реальность заменяется (substituirt) точными сущностями — путем имеющей фундаментальное значение для всякого точного (физического) познания действительности, на котором только и зиждется значение математики для естествознания. Более подробна эта проблема континуума будет рассмотрена в главе II.

В последнее время все чаще стали находить трудности в отграничении математики от формальной логики. При нашем подходе вполне очевидно, что математика как наука, сколь бы родственной логике она ни была, отличается от последней своим неповторимым своеобразием.

Г Л А В А II

ПОНЯТИЕ ЧИСЛА И КОНТИНУУМ

(Основания исчисления бесконечно малых)

§ 1. Числа натуральные и числа количественные

Из основного отношения $\mathfrak{U}$ в области натуральных чисел фундаментальные операции сложения и умножения возникают следующим образом*).

Число, которое получается из m в результате n -кратного, начиная с m , перехода от одного числа к непосредственно следующему, есть $m + n$. Более аккуратно, если $\mathfrak{X}$ — произвольное множество двоек (Doppelmenge) (= двумерное множество) натуральных чисел, то пусть $\epsilon^*(p, m | \mathfrak{X})$ означает, что число p , непосредственно предшествующее числу q , и m образуют пару, являющуюся элементом множества $\mathfrak{X}$:

$$\epsilon^*(p, m | \mathfrak{X}) = \epsilon(q, m | \mathfrak{X}) \cdot F(p, q) |_{q=0}.$$

*) D e d e k i n d R. Was sind und was sollen die Zahlen? — 10. Auflage. — Berlin: Deutsche Verlag der Wissenschaften, 1965. (Имеется перевод: Д е д е к и н д Р. Что такое числа и для чего они служат? — Казань, 1905. — Примеч. пер.)

Итерируем это отношение: $\epsilon^*(p, m | \mathfrak{X}, n)$ и вместо $\mathfrak{X}$ подставляем множество двоек, соответствующее в области натуральных чисел тождеству $x = y$. Тем самым возникает отношение $\sigma(p, m, n)$, представляющее не что иное, как отношение, выражаемое равенством $p = m + n$. Можно показать (с помощью совершенной индукции), что любым двум числам m и n всегда соответствует одно и только одно число p , такое, что оно находится с числами m и n в отношении σ . Определение сложения гласит (штрих обозначает переход к непосредственно последующему числу):

$$m + 1 = m', \quad m + n' = (m + n)'.$$

С помощью умозаключения путем совершенной индукции, примененного к n , выводится ассоциативный закон

$$(l + m) + n = l + (m + n):$$

приняв в числовом ряду в качестве исходного числа l и сделав сначала m , а затем n шагов, я достигну того же числа, до которого дойду, если приму за исходное число l и сделаю $m + n$ шагов. Доказательство коммутативного закона

$$m + n = n + m$$

необходимо проводить в два этапа: показать, что он выполняется при $n = 1$, — это вытекает из применения к m умозаключения по индукции; тем самым достигается исходный пункт, обеспечивающий всеобщность применения к любому n умозаключения путем совершенной индукции.

Число, которое я получу, совершив переход от любого числа, начиная с m , к непосредственно последующему, называется числом, *большим, чем* m (что обозначается как $> m$). Наглядное представление свидетельствует, что три возможности

$$n > m \quad | \quad n = m \quad | \quad m > n \quad (1)$$

образуют полную систему альтернатив (vollständige Disjunktion) и что в первом случае существует *одно и только одно* число s , такое, что $m + s = n$. Это можно доказать и с помощью индукции, необходимо лишь воспользоваться тем основным фактом, что для каждого числа существует единственное число, непосредственно следующее за ним, и для каждого числа, кроме 1, существует единственное число, непосредственно ему предшествующее. Следует исходить из определения: $n > m$ означает, что существует некоторое число s , для которого $m + s = n$. Докажем сначала, что всегда $m + s \neq m$ (т.е. ряд натуральных чисел не содержит возвратов, или никакое число не больше самого себя). Это верно при $m = 1$, так как

$$1 + s = s + 1 = s' \neq 1$$

(поскольку для числа s' , но не для 1 существует некоторое непосредственно предшествующее ему число). Если это утверждение верно для m , то оно верно и для m' ; ибо если бы $m' + s = m'$, то получилось бы, что $m' = s + m' = (s + m)'$, откуда $m = s + m = m + s$.

Далее. Если n есть некоторое натуральное число, то не существует такого числа x , для которого не было бы верно либо $x \geq n$, либо $n > x$. Это верно для $x = 1$, так как любое число $x \geq 1$. И если это верно для n , то верно и для n' . Действительно, если $n > x$ или $n = x$, то $n' > x$; если же $x > n$, т.е. $x = n + s$, то либо $s = 1$, и тогда $x = n'$, либо $s > 1$, т.е. $s = t + 1$, и тогда

$$x = n + s = n + (1 + t) = n' + t > n'.$$

На основании ассоциативного закона сложения заключаем: если $p > n$ и $n > m$, то $p > m$. Отсюда далее получается, что никакие две из возможностей (1) не могут одновременно иметь место и что из $s < s^*$ следует неравенство $m + s < m + s^*$ (однозначность вычитания).

Смысл умножения вытекает из формул

$$1 \cdot m = m, \quad n' \cdot m = (n \cdot m) + m.$$

Отношение (Relation) $p = n \cdot m$ можно образовать из σ с помощью наших принципов совершенно аналогично тому, как в главе I (§ 7) это было сделано для умножения векторов. Умозаключение по индукции, применимой к n , сразу же дает *дистрибутивный закон*

$$(n_1 + n) \cdot m = (n_1 \cdot m) + (n \cdot m),$$

из которого тем же методом получается *ассоциативный закон*

$$(n \cdot p) \cdot q = n \cdot (p \cdot q).$$

Несколько более сложно выглядит доказательство *коммутативного закона*. Оно основано на том, что

$$n \cdot 1 = n \quad \text{и} \quad n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n.$$

Оба факта доказываются с помощью применения к n совершенной индукции. Из них получается, что $n \cdot x$ при $x = 1$ имеет такое же значение, как и $x \cdot n$, и оба произведения изменяются одинаковым образом (а именно, увеличиваются на n), если от числа x перейти к непосредственно последующему числу x' ; поэтому произведения $n \cdot x$ и $x \cdot n$ совпадают при всех x .

Из $s < s^*$ следует, что $s \cdot n < s^* \cdot n$.

Назовем *отрезком* числового ряда числовое множество (одномерное множество натуральных чисел), для которого не существует двух чисел m и n , таких, что $m < n$ и n является, а m не является элементом этого множества. В этом смысле пустое и универсальное множества в области натуральных чисел — отрезки. Если A есть отрезок, отличный как от пустого, так и от универсального множества, то существует число n , такое, что A совпадает с множеством всех чисел $\leq n$. Доказательство. Число 1 есть элемент множества A . (Действительно, если m — любой элемент множества A , то или $m = 1$, или $m > 1$; если бы в последнем случае число 1 не было элементом множества A , то это противоречило бы определению отрезка.) Существует некоторое число n , являющееся элементом множества A и тако, что непосредственно последующее за ним число n' этим свойством не обладает. Ибо если бы такого числа не существовало, то с помощью совер-

шенной индукции получилось бы, что любое число является элементом множества A . Это число n обладает требуемыми свойствами: любое число $\leq n$ есть элемент множества A , в то время как любое число, которое $> n$, таковым не является. Таким образом, мы видим, что понятие отрезка числового ряда в точности совпадает с введенным в § 7 понятием *количественного числа*. В дальнейшем "количественное число n " будет обозначаться $\bar{n}$.

Если отрезок A есть подмножество отрезка B , причем A не совпадает с B , то мы будем говорить, что A *меньше* B и B *больше* A , и будем использовать для обозначения этого те же знаки $<$ и $>$, что и прежде. Из двух различных отрезков всегда один больший и другой меньший. Пустое множество 0 всегда меньше, а универсальное множество ∞ всегда больше любого другого отрезка. Если натуральные числа m и n таковы, что $m < n$, то это же справедливо и для соответствующих количественных чисел: $\bar{m} < \bar{n}$.

Числа можно использовать (в любой области операций) для определения количественных чисел множество предметов какой-нибудь основной категории. Предметы рассматриваемой категории мы будем обозначать строчными греческими буквами, одномерные множества таких предметов — прописными греческими буквами, натуральные числа, как и прежде, — строчными латинскими буквами. В главе I (§ 7) было определено отношение $\alpha(n, \Xi)$, которое мы выражали словами: "Ξ состоит по крайней мере из n элементов".

Если Ξ состоит по крайней мере из n' элементов, то оно состоит также по крайней мере из n элементов.

Это утверждение верно для $n = 1$. Если оно верно для некоторого n , то оно верно и для n' . Действительно, если Ξ состоит по крайней мере из $n' + 1$ элементов, то в Ξ существует элемент ξ, такой, что множество всех элементов из Ξ, не совпадающих с ξ, состоит по крайней мере из n' элементов и, стало быть, по крайней мере из n элементов. Но в соответствии с определением это означает, что Ξ состоит по крайней мере из n' элементов.

Если Ξ не состоит по крайней мере из m элементов, то оно не состоит также по крайней мере из $m + n$ элементов.

Как показано выше, при $n = 1$ это утверждение верно. Применяя к n умозаключение путем совершенной индукции, получаем, что оно верно и в общем случае.

Это предложение (Satz) можно сформулировать и в положительном виде следующим образом: если $m < p$ и Ξ состоит по крайней мере из p элементов, то Ξ состоит также и по крайней мере из m элементов. Или: те натуральные числа n , для которых при заданном множестве Ξ имеет место отношение $\alpha(n, \Xi)$, образуют некоторый отрезок. Этот отрезок как раз и есть *количество элементов* (Anzahl von) множества Ξ. Если оно $= \bar{n}$, то это означает: выполняется отношение $\alpha(n, \Xi)$, но не отношение $\alpha(n', \Xi)$.

С помощью совершенной индукции доказывается теорема (Satz): *если Ξ — некоторое подмножество множества N и Ξ состоит по крайней мере*

из n элементов, то N также состоит по крайней мере из n элементов. Отсюда вытекает, что количество элементов части меньше или самое большее равно количеству элементов целого. Множество, содержащее некоторое бесконечное подмножество, само бесконечно.

Из этого определения непосредственно следует, что если к множеству Ξ , состоящему по крайней мере из n элементов, добавить новый элемент, то получившееся расширенное множество Ξ' будет состоять по крайней мере из n' элементов. Это, в частности, имеет место в том случае, когда Ξ состоит ровно из n элементов, т.е. когда количественное число множества Ξ равно n . Не столь очевидно обратное:

U. Если из некоторого множества Ξ' , состоящего по крайней мере из n' элементов, изъять любой элемент ξ , то останется некоторое множество Ξ , состоящее по крайней мере из n элементов.

В данном определении заложено лишь существование элемента ξ_0 , такого, что множество Ξ_0 , которое получается путем удаления ξ_0 из Ξ' , состоит по крайней мере из n элементов. Тем не менее U верно в общем случае (*allgemein richtig*). Докажем это с помощью теоремы о замене элементов. Если в множестве Ξ , состоящем по крайней мере из n элементов, заменить какой-то из его элементов некоторым новым предметом (рассматриваемой категории, причем категории прочих элементов остаются теми же), то получающееся при этом множество Ξ^* также содержит по крайней мере n элементов. При $n = 1$ эта теорема верна. Предположим, что она верна и для данного натурального числа n . Пусть N — множество, состоящее по крайней мере из n' элементов. В N существует элемент η , такой, что множество Ξ всех элементов множества N , отличных от η , состоит по крайней мере из n элементов. Заменяя теперь в N элемент η_0 предметом η_0^* , отличным от остальных элементов множества N , мы превратим множество N в множество N^* . Следует различать два случая: либо $\eta_0 = \eta$, либо $\eta_0 \neq \eta$. В первом случае множество N^* получается из Ξ в результате присоединения к Ξ некоторого нового элемента η_0^* ; поэтому N^* состоит по крайней мере из n' элементов. Во втором случае множество Ξ мы превращаем в некоторое множество Ξ^* , заменяя элемент η_0 множества Ξ элементом η_0^* ; по предположению, Ξ^* состоит по крайней мере из n элементов. Множество N^* , кроме всех элементов множества Ξ^* , содержит элемент η , не встречающийся в Ξ^* ; поэтому и во втором случае множество N^* состоит по крайней мере из n' элементов.

Отсюда уже непосредственно следует, что теорема U верна. Действительно, множество Ξ порождается из множества Ξ_0 путем замены ξ_0 на ξ ; вследствие этого множество Ξ , как и Ξ_0 , состоит по крайней мере из n элементов.

Далее следует: если к некоторому множеству, состоящему ровно из n элементов, добавить еще один, то получается множество, состоящее ровно из n' элементов. Если из множества Ξ' , состоящему ровно из n' элементов, удалить один элемент, то останется множество Ξ , состоящее ровно из n элементов. (Если из некоторого бесконечного множества удалить один элемент, то останется некоторое бесконечное множество.) На этой теоре-

ме, остающейся в силе независимо от того, *какой именно* элемент множества Ξ удаляется, как очевидно, основан известный *метод пересчета* (Zählenverfahren) и тот факт, что пересчет приводит к одному и тому же результату независимо от того, в каком порядке он производился. Одновременно доказано и следующее: если в множестве, состоящем ровно из n элементов, заменить один из его элементов предметом, отличным от остальных элементов, то и новое множество будет состоять ровно из n элементов. Это можно сформулировать также в следующей форме: количество элементов некоторого множества не зависит от природы его элементов. Наконец, с помощью совершенной индукции получаем (так как из предыдущего следует, что доказываемое утверждение верно для $n = 1$): если к некоторому множеству, состоящему в точности из m элементов, добавить множество, состоящее в точности из n элементов, полностью отличных от элементов первого множества, то получится множество, количественное число которого $= m + n$.

Если основную категорию, о которой идет речь, считать совпадающей с категорией натуральных чисел, то мы можем пересчитывать и *множества натуральных чисел*. Для них справедлива теорема о том, что отрезок $\bar{n}$ ряда натуральных чисел состоит ровно из n элементов (доказательство проводится по индукции, на основе полученных нами результатов). При таком применении понятия количества элементов можно убедиться, например, в том, что количество элементов для $\varphi(n)$ взаимно простых с n натуральных чисел, меньших n , есть в нашем точном смысле *функция* от n ; и аналогичное справедливо относительно всех остальных "теоретико-числовых функций".

Описанным выше способом и в указанной последовательности при постоянном использовании умозаключения путем совершенной индукции все элементарные истины о числах можно логически вывести из двух "аксиом": для каждого числа существует единственное число, непосредственно следующее за ним; для каждого числа, кроме 1, существует единственное число, непосредственно ему предшествующее.

§ 2. Дроби и рациональные числа

В повседневной жизни и всюду, где они служат для измерения аддитивных величин, дроби выступают в качестве *множителей*. Например, если мы рассматриваем векторы на прямой, то при повторяющемся сложении некоторого вектора с самим собой (см. главу II, § 7) происходит его *умножение* (Vervielfältigung); для каждого натурального числа m величина ma означает m -кратно повторенный вектор a , т.е. снова некоторый определенный вектор. Эта операция допускает однозначное обращение — *деление*. Если a — некоторый вектор, n — некоторое натуральное число, то существует один и только один вектор $x = a/n$, такой, что $nx = a$. Эта операция умножения может комбинироваться с операцией деления; так получается вектор ma/n , т.е. вектор a , "растянутый в m/n раз". Здесь обозначение дроби m/n служит знаком составной операции в том смысле, что две дроби считаются равными, если обозначенные ими операции, выпол-

ненные каждая над любым вектором a , приводят к одному и тому же результату. Вместо операции, которая из произвольного вектора x порождает вектор

$$y = \frac{mx}{n}, \quad (2)$$

нам удобнее говорить о субъектно упорядоченном "отношении" между векторами x и y , выражаемом равенством (2) или равенством

$$ny = mx. \quad (3)$$

Отношениям подобной формы соответствуют $\langle \text{gehören} \rangle$ дроби таким образом, что два отношения, имеющие одинаковый объем $\langle \text{Geltungsumfang} \rangle$, отвечают одной и той же дроби. Следовательно, дробь m/n есть не что иное, как множество *двоек векторов*, соответствующее отношению (3).

Умножение $\langle \text{Multiplikation} \rangle$ дробей означает последовательное выполнение соответствующих им операций над векторами; законы умножения вытекают из того фундаментального факта, что операции построения кратного вектора $\langle \text{Vervielfältigung} \rangle$ и деления на части $\langle \text{Teilung} \rangle$ для векторов перестановочны. То, что дроби допускают сложение, основано на представлении операции (над вектором a), выраженной в виде

$$\frac{ma}{n} + \frac{m^*a}{n^*},$$

одной-единственной дробью, обозначаемой как сумма $m/n + m^*/n^*$. Именно так, как показано выше, мы и смотрим на сложение и умножение дробей в тех конкретных приложениях, где мы пользуемся дробями.

Незачем вводить свои особые дроби для каждой области величин; наоборот, поскольку правила действия $\langle \text{Gesetze} \rangle$ над дробями не зависят от природы рассматриваемой области величин, более целесообразно определять дроби чисто арифметически — так, чтобы они стали пригодны для символического представления бесконечно многих возможных реализаций комбинаторного процесса умножения и деления векторов в любой области величин. Сделать это можно, просто применив изложенные выше соображения, в частности, к *системе натуральных чисел*, поскольку она представляет собой область аддитивных величин. Для развития нашей теории несущественно, что в этой области отношение (3) не всегда разрешимо относительно y . Тем самым возникает следующая конструкция $\langle \text{Aufbau} \rangle$.

Пусть $\pi(a, b, c)$ обозначает отношение $a \cdot b = c$ между натуральными числами. Образует отношение

$$\pi(m, x, z) \cdot \pi(n, y, z) \big|_{z=*},$$

т.е. $mx = ny$. Если в него вместо m и n подставить два вполне определенных натуральных числа, то возникшему в результате этого бинарному отношению между x и y будет соответствовать некоторое множество *двоек натуральных чисел*; назовем его дробью m/n . Знак m/n обозначает вместе с тем

некоторую определенную функцию ("дробную функцию") двух независимых аргументов m и n . В дальнейшем мы будем обозначать дроби начальными строчными буквами греческого алфавита. Если x и y — два элемента, образующие дробь (множество двоек) α , то мы выражаем это словами: y находится к x в отношении α . В частности, если $\alpha = m/n$, то m находится к n в отношении α . Законы умножения натуральных чисел позволяют доказать, что две дроби m/n и m^*/n^* совпадают друг с другом (*miteinander identisch*) тогда и только тогда, когда

$$mn^* = m^*n.$$

Отношение $\alpha \cdot \beta = \gamma$ означает: всякий раз, когда x находится к y в отношении α , а y находится к z в отношении β , оказывается, что x находится к z в отношении γ . Можно доказать, что для любых дробей α и β всегда существует одна и только одна дробь γ , такая, что между этими тремя дробями существует указанное отношение. Эта дробь называется произведением дробей α и β и обозначается $\alpha \cdot \beta$. (Если $\alpha = m/n$, $\beta = m^*/n^*$, то $\alpha \cdot \beta = \frac{m \cdot m^*}{n \cdot n^*}$.)

Отношение $\alpha + \beta = \gamma$ означает: всякий раз, когда x находится к z в отношении α , а y находится к z в отношении β , оказывается, что $x + y$ находится к z в отношении γ . Для этого отношения можно, далее, доказать предложение, аналогичное доказанному для $\alpha \cdot \beta = \gamma$ (и правило вычисления

$$\alpha + \beta = \frac{(m \cdot n^*) + (m^* \cdot n)}{n \cdot n^*}.$$

Из этих определений легко получаются фундаментальные законы сложения и умножения.

Сложение позволяет определить — подобно тому, как это было сделано для векторов, — умножение (*Vervielfältigung*) и деление (*Teilung*) дробей; в области дробей деление оказывается всегда однозначно выполнимой операцией. Можно доказать, что дроби

$$\frac{m\beta}{n} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} \cdot \beta$$

совпадают.

Если α и β — какие-то две дроби и существует некоторая дробь γ (т.е. существуют два натуральных числа m и n), такая, что $\beta + \gamma = \alpha$ (т.е. $\beta + \frac{m}{n} = \alpha$), то мы говорим, что α больше, чем β , и обозначаем это $\alpha > \beta$, а β меньше, чем α (т.е. $\beta < \alpha$). В этом случае существует только одна такая дробь γ . Возможности

$$\alpha > \beta \mid \alpha = \beta \mid \alpha < \beta$$

образуют полную систему альтернатив.

Между натуральными числами m и соответствующими им дробями $m/1$ со знаменателем, равным единице, существует полный изоморфизм; отно-

шения суммы, произведения и больше—меньше между натуральными числами точно отражаются в таких же (и носящих те же названия) отношениях между соответствующими дробями. Тем не менее их не следует отождествлять с дробями: мы не должны "делать" одним и тем же то, что не одинаково. Все же следует заметить, что при использовании чисел для измерения натуральное число m и дробь $m/1$ обозначают один и тот же процесс, а именно, образование m -кратного (*Ver- m -fachung*).

Далее мы можем действовать так же, как было описано в главе I (§ 6): поднявшись на ступень дробей, так сказать, отбросить лестницу, которая привела нас наверх, и на достигнутой высоте заново заложить фундамент более просторного здания, рассматривая впредь натуральные числа и дроби как основные категории. Правда, при этом категория "двумерных множеств натуральных чисел" охватывала бы вторую основную категорию, и такого рода покрытие (*Überdeckung*) основной категории производной категорией нельзя, конечно, устранить никаким искусственным приемом (мы не можем сделать различным то, что не является таковым); однако мы можем это "игнорировать", так как при решении всех интересующих нас вопросов никогда не потребуется установление тождества или различия предметов, принадлежащих этим различным категориям. Все же в результате получается как бы сложная двойная игра; и дело даже не столько в ней, т.е. не в том, что прямое продолжение начатого нами построения на базе единственной основной категории "натуральное число" приводит к удвоению терминологии. То удобство выражения, которое несет с собой двойная терминология, мы сможем обеспечить себе, не покидая фундамента "чистой теории чисел", более простым путем.

Всюду, где встречается оборот "существует дробь с таким-то и таким-то свойством", он имеет следующий смысл (и не может иметь никакого другого смысла): существуют два натуральных числа m и n , такие, что дробь $\alpha = m/n$ обладает рассматриваемым свойством. Пусть множество двоек*) M натуральных чисел составлено следующим образом: если m, n составляют пару, являющуюся его элементом, и $m^*/n^* = m/n$, то пара чисел m^*, n^* также принадлежит множеству M . Пусть множество M называется тогда некоторой областью дробей; и то, что m, n образуют пару, являющуюся элементом множества M , мы выражаем, говоря: дробь $\alpha = m/n$ принадлежит области M . (Область дробей, которой принадлежит дробь α и только α , тождественна α .) Аналогичную терминологию мы употребляем и в случае, когда множество M кроме двух пустых мест, относящихся к категории "натуральное число", содержит и другие пустые места, относящиеся к каким-то категориям. Ясно также, что мы имеем в виду под "областью двоек" ("Doppelmenge") дробей: это множество четверок натуральных чисел. Всякий раз, когда $m, n; p, q$ образуют систему, являющуюся элементом такого множества, и

$$\frac{m^*}{n^*} = \frac{m}{n}, \quad \frac{p^*}{q^*} = \frac{p}{q},$$

*) Значение слова "множество" здесь и далее ограничено исключительно конечными множествами. См. главу I, § 8.

тогда то же самое справедливо и для четверки $m^*, n^*; p^*, q^*$. В этом случае дроби $\alpha = m/n$ и $\beta = p/q$ (в указанной последовательности) образуют пару дробей *(Bruchpaar)*, принадлежащую рассматриваемой области пар.

Если в некоторой области величин (например, в области векторов на некоторой прямой) существует особая *(singuläre)* величина 0 , удовлетворяющая закону

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

а для каждой величины a существует противоположная величина $-a$:

$$a + (-a) = 0,$$

то к процессам умножения и деления добавляется операция "перехода к противоположной величине" (*"Umklaппung"*), переводящая a в $-a$, и процесс аннулирования (*"Nullprozess"*), переводящий любую величину в 0 . Для того чтобы эти новые процессы и их комбинации можно было представить с помощью операций умножения и деления на "числа", область дробей необходимо расширить путем присоединения нуля и отрицательных чисел к миру *(das Reich)* рациональных чисел*). Чисто арифметически рациональные числа получаются из дробей совершенно так же, как дроби получаются из натуральных чисел; надо только заменить умножение сложением.

Если α, β — две дроби, то четырехмерное множество, соответствующее отношению

$$\alpha + \frac{u}{v} = \beta + \frac{x}{y}$$

между натуральными числами $x, u; y, v$, есть область двоек дробей. Назовем ее *рациональным числом* $\alpha \div \beta$. Пара дробей ξ, η принадлежит рациональному числу $\alpha \div \beta$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha + \eta = \beta + \xi$$

(мы говорим тогда, что ξ и η "отличаются" на рациональное число $\alpha \div \beta$). В дальнейшем мы будем обозначать рациональные числа буквами $\lambda, \mu, \nu, \dots$. Нетрудно доказать, что

$$\alpha \div \beta = \alpha' \div \beta'$$

тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$.

В частности, четырехмерное множество натуральных чисел, определяемое как $x/y = u/v$, есть некоторое рациональное число; будем обозначать его символом 0 (не следует опасаться, что рациональное число 0 можно спутать с количественным числом 0); $\alpha \div \alpha = 0$. Если α — какая-то дробь, то та область двоек дробей, которой пара дробей ξ, η принадлежит тогда и только

*) То обстоятельство, что дроби появились раньше отрицательных чисел, я не считаю простой исторической случайностью. Наши систематические рассмотрения соответствуют ходу исторического развития: путь к рациональным числам пролегает через дроби (а не через целые числа).

тогда, когда

$$\alpha + \eta = \xi,$$

есть некоторое рациональное число; его мы обозначим как $+\alpha$; аналогично, область двоек дробей, определяемая как

$$\alpha + \xi = \eta,$$

также есть некоторое рациональное число; его мы обозначим как $-\alpha$. Из соотношения "больше—меньше" между дробями следует, что каждому отличному от 0 рациональному числу принадлежит одна и только одна дробь α (его "абсолютная величина"), такая, что это рациональное число равно либо $+\alpha$, либо $-\alpha$. Тем самым мы различаем *положительные* и *отрицательные* рациональные числа.

Равенство $\lambda + \mu = \nu$ между рациональными числами означает, что всякий раз, когда дроби ξ, η отличаются на λ , а дроби η, ζ — на μ , дроби ξ, ζ отличаются на ν . Для любых двух рациональных чисел λ, μ всегда существует одно и только одно ν , находящееся с ними в отношении $\lambda + \mu = \nu$. Такого рода сложение удовлетворяет ассоциативному и коммутативному законам. Оно допускает однозначное обращение — вычитание. Справедливо соотношение $\lambda + 0 = \lambda$.

Если положить в основу это определение рациональных чисел, то они образуют область аддитивных величин, в которой всегда однозначно выполняемы операции умножения, деления и "перехода к противоположной величине". Если m — некоторое натуральное число, $\alpha = m/n$ — некоторая дробь, μ — некоторое рациональное число, то из этого определения вытекает смысл обозначений

$$m\mu \text{ и } \frac{m\mu}{n} = \alpha\mu; \quad (4)$$

все пары дробей области двоек $m\mu$ (соответственно области $\alpha\mu$), и только их, мы получаем из всех пар дробей ξ, η , принадлежащих μ , образуя

$$m\xi, m\eta \quad (\text{соответственно } \alpha \cdot \xi, \alpha \cdot \eta).$$

Если λ, μ и ν — рациональные числа, то $\lambda \cdot \mu = \nu$ означает: *либо* $\lambda = 0, \nu = 0$, *либо* существует дробь α , такая, что

$$\lambda = +\alpha, \quad \nu = \alpha\mu,$$

либо же существует дробь α , такая, что для нее

$$\lambda = -\alpha, \quad \nu = -(\alpha\mu).$$

Тем самым умножение рациональных чисел определено на основе сложения. Законы вычислений для рациональных чисел получаются из перестановочности (*Vertauschbarkeit*) трех элементарных операций: умножения, деления и перехода к противоположной величине. В мире рациональных

чисел однозначно выполнимы четыре арифметических действия за исключением деления на 0.

Мы говорим, что λ больше, чем μ , если разность $\lambda - \mu$ положительна.

Всякий раз, когда встречается выражение "существует некоторое рациональное число с таким-то и таким-то свойством", оно означает: существуют четыре натуральных числа m, n, p, q , такие, что рациональное число

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q}$$

обладает указанным свойством. По аналогии со словоупотреблением, введенным для дробей, мы в дальнейшем будем понимать под некоторой областью рациональных чисел область дробей, обладающую следующим свойством: всякий раз, когда пара дробей α, β принадлежит этой области и

$$\alpha \div \beta = \alpha' \div \beta',$$

пара дробей α', β' также принадлежит этой области. Стало быть, область рациональных чисел есть некоторое четырехмерное множество натуральных чисел.

§ 3. Действительные числа

Если в качестве дробей и рациональных чисел выступают только такие множества, которые возникают как значения двух вполне определенных функций

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{m}{n} \div \frac{p}{q}$$

при значениях аргументов, являющихся натуральными числами, то для того, чтобы придать понятию действительного числа полную логическую определенность, необходимо отдавать отчет в том, что следует понимать под "всеми возможными" множествами определенной категории. Мы ответили на этот вопрос, установив наши дефиниционные принципы, и лишь проблемы действительных чисел требует более глубокого проникновения в этот фундамент, в принципы образования сложных суждений; анализ действительных чисел, ведущий к их логическим корням, носит совсем иной характер, нежели арифметика рациональных чисел. Мы намереваемся развить здесь на заложенной нами основе начала некоторой теории действительных чисел и вещественных функций и тем самым подвергнуть проверке отношение этой теории к учению о величинах и к наглядному представлению о континууме.

Итак, продолжим начатое нами построение чистой теории чисел! Назовем (по аналогии с тем, как это было сделано для области натуральных чисел) *отрезком* область рациональных чисел, которая вместе с любым рациональным числом λ всегда содержит также и все рациональные числа $< \lambda$. Такой отрезок *открыт*, если не существует наибольшего принадлежащего ему рационального числа. Открытый отрезок рациональных чисел, отличный от

пустого и универсального множеств, называется *действительным числом*. Таким образом, действительные числа — это особые четырехмерные множества натуральных чисел, поэтому категорию таких множеств мы будем называть "категорией RZ ", а предметы, принадлежащие этой категории, обозначать строчными готическими буквами. "Быть действительным числом" есть некоторое финитное свойство такого рода предмета ξ ; следовательно, в нашей области операций существует "множество всех действительных чисел".

Пусть f — *функция* (в том смысле, какой мы придали этому понятию в главе I), аргумент t которой пробегает произвольную категорию предметов K и значение которой всегда принадлежит категории RZ ; пусть, далее, T — некоторое одномерное множество предметов категории K и для каждого элемента t из T значение функции $f(t)$ есть действительное число; тогда f есть некоторая *вещественнозначная функция "на" ("in")* множестве T . Необходимо иметь в виду, что такая функция, как f , всякий раз задается для *всех* предметов определенной категории (ибо это получается из наших дефиниционных принципов); вполне возможно, однако, что значение функции, которое всегда есть некоторое четырехмерное множество натуральных чисел, не всегда является действительным числом; те значения аргументов, при которых это имеет место, образуют некое множество. В частности, если категория K есть категория натуральных чисел и $f(t)$ вещественнозначная для всех натуральных чисел, то такая функция называется *последовательностью действительных чисел* (или, короче, *числовой последовательностью*). Если K — категория RZ , а упомянутое выше множество T таково, что все его элементы без исключения — действительные числа, то f — *существующая (existierende) на T вещественная функция* одной действительной переменной. То же самое справедливо и относительно функций многих переменных.

Сумма двух действительных чисел ξ и η есть *функция* от ξ и η . Ее определение таково (пустые места ξ и η относятся к категории RZ ; пустые места m_1, n_1, m_2, n_2 — к категории "натуральное число"). Отношение

$$\Sigma(m_1, n_1; m_2, n_2 | \xi, \eta)$$

означает: существует некоторая система элементов $p_1, q_1; p_2, q_2$ из ξ и некоторая система элементов $r_1, s_1; r_2, s_2$ из η , такие, что

$$\left(\frac{m_1}{n_1} \div \frac{m_2}{n_2} \right) = \left(\frac{p_1}{q_1} \div \frac{p_2}{q_2} \right) + \left(\frac{r_1}{s_1} \div \frac{r_2}{s_2} \right).$$

Разделяя пустые места в Σ на группу зависимых и группу независимых пустых мест так, как это указано с помощью вертикальной черты, мы получаем *функцию $\xi + \eta$* , значение которой всегда является каким-то четырехмерным множеством натуральных чисел, точнее, всегда есть какая-то область рациональных чисел. В частности, для значений аргументов ξ и η , которые сами являются действительными числами, эта числовая область всегда представляет собой открытый отрезок, отличный от пустого и универсального множества, т.е. в свою очередь является *действительным*

числом. Выполняются коммутативный и ассоциативный законы. Кроме того, сложение допускает однозначное обращение — вычитание.

Запись a, b означает: a есть подмножество множества b , отличное от b . Снова три возможности

$$a < b \mid a = b \mid b < a \quad (\text{т.е. } a > b)$$

образуют в области действительных чисел (но не в более широкой совокупности областей рациональных чисел) полную систему альтернатив. Каждая из этих возможностей выражает некоторое финитное отношение между a и b , так как a и b суть четырехмерные множества элементов *основной категории* "натуральное число".

Если λ есть некоторое рациональное число, то рациональные числа $< \lambda$ образуют открытый отрезок, отличный от пустого и универсального множеств; обозначим это действительное число как $*\lambda$ и назовем его саморациональным (*selber rational*); оно есть функция от λ . Различным рациональным числам соответствуют тогда различные действительные числа. В общем случае

$$a + *0 = a$$

для любого действительного числа a . Действительное число, которое $> *0$, называется положительным; действительное число, которое $< *0$, называется отрицательным.

Понятие открытого отрезка переходит в понятие *открытого остатка*, если в приведенном выше определении знак $<$ всюду заменить знаком $>$. У каждого открытого отрезка a имеется в качестве "дополнения" открытый остаток; это та область, которой какое-то рациональное число принадлежит тогда и только тогда, когда оно больше некоторого рационального числа, не принадлежащего отрезку a . Наоборот, каждому открытому остатку соответствует в качестве дополнения некоторый открытый отрезок; отношение дополнения взаимно.

Действительные числа образуют область аддитивных величин, в которой однозначно выполнимы умножение на рациональное число (*Vervielfältigung*) и деление, а также "переход к противоположной величине". Отрезки (действительных чисел) $m(\xi)$ и α/ξ получаются из открытого отрезка ξ , если каждое рациональное число, принадлежащее ξ , умножить на натуральное число m или соответственно на дробь α . Пусть λ — произвольное рациональное число; тогда $\eta = \lambda\xi$ если *либо* $\lambda = 0, \eta = 0$, *либо* существует дробь α , такая, что $\lambda = +\alpha, \eta = \alpha\xi$ *либо* же существует дробь α , такая, что $\lambda = -\alpha, \eta = -(\alpha\xi)$. Произведение $\lambda\xi$ есть некоторое действительное число, однозначно определяемое λ и ξ . Наконец, если a и ξ — действительные числа и ξ положительно, то $a \cdot \xi$ есть такая область, которой рациональное число μ принадлежит тогда и только тогда, когда существует принадлежащее a рациональное число λ , такое, что μ принадлежит области $\lambda\xi$. Если ξ отрицательно, то отрезок a следует заменить дополнительным к нему открытым остатком; тогда $a \cdot \xi$ тоже есть всегда действительное число. Произведение $a* \cdot 0$ означает действительное число $*0$. Из этого определения легко вывести существенные свойства умножения (*Multiplikation*). Нетрудно, далее, убедиться

в том, что произведение двух действительных чисел, равно как и их сумма, есть функции этих чисел: достаточно учесть, что все наши определения могут быть шаг за шагом построены на основе принципов главы I (я опускаю такие построения ради ясности и краткости изложения, считая излишним чрезмерный педантизм). Разность и частное двух действительных чисел также суть функции двух своих аргументов; правда, частное является действительным числом лишь тогда, когда знаменатель отличен от *0. Функцию "частное" ("Quotient") можно определить, например, следующим образом. Она соответствует отношению

$$Q(m_1, n_1; m_2, n_2 \mid \xi, \eta),$$

означающему, что ξ, η и рациональное число

$$\lambda = \frac{m_1}{n_1} \div \frac{m_2}{n_2}$$

удовлетворяют условию: либо η положительно и $\lambda \eta < \xi$, либо η отрицательно и $\lambda \eta > \xi$.

Из принципа подстановки (глава I, § 7) теперь следует: если f и g — две вещественнозначные функции, существующие на одном и том же множестве, то их сумма, разность, произведение и частное — функции такого же рода; на функцию "частное" накладывается ограничение, состоящее в том, что функция g во всей области существования должна быть отлична от *0. Здесь мы имеем простейший пример того, каким образом наши логические принципы конструирования приводят в конкретных приложениях к алгебраическим принципам, которые виделись старому анализу в понятии функции. Два других часто применяемых принципа такого же рода вытекают непосредственно из принципов 2 и 7: 1) из функции нескольких аргументов, относящихся к одной и той же категории, можно получить новую функцию, "совместив" аргументы (так, из функции $f(s, t)$ получается функция $f(t, t)$); 2) в вещественнозначную функцию, существующую при всех действительных значениях аргументов, можно подставить в качестве аргумента, например, другую вещественнозначную функцию.

Наши определения дробей, рациональных и действительных чисел, разумеется, в определенной мере произвольны. Их подлинное значение заключается в той роли, которую они играют при измерении величин в той или иной области, в том способе, каким они используются для абстрактного представления известных отношений, существующих между величинами. Однако для этой цели безусловно необходимо предварительно чисто абстрактно-арифметически определить понятие числа. Все же любое определение правильно, если оно позволяет создать картину, на основе которой можно однозначно описывать упомянутые выше "взаимоотношения" между величинами. Тем не менее можно утверждать, что выбранные нами определения являются наиболее простыми и естественными среди всех определений, ведущих к той же самой цели. Поговорим более подробно о вопросах, касающихся их отношения к теории величин.

В дальнейшем нам понадобится функция ξ^n действительного числа ξ и натурального числа n . Ее можно определить рекурсивно, если воспользоваться тем, что $\xi^{n+1} \eta$ получается из $\xi^n \eta$ путем подстановки $\xi \eta$ на место η . Итак, пусть $\pi(\lambda | \xi, \eta)$ есть такое отношение, которое означает, что ξ и η — действительные числа, а

$$\lambda \left(= \frac{m_1}{n_1} \div \frac{m_2}{n_2} \right)$$

— элемент отрезка $\xi \cdot \eta$; на самом деле λ замещает четыре пустые места $m_1, n_1; m_2, n_2$, относящихся к категории "натуральное число". Из отношения π после указанного вертикальной чертой разделения пустых мест на зависимые и независимые возникает функция $\xi \cdot \eta$. Прoitерируем это отношение, подставляя каждый раз вместо пустого места η функцию $\xi \cdot \eta$:

$$\pi(\lambda | \xi \eta; n),$$

и в заключение подставим в нее вместо η действительное число *1. Отношение, которое таким образом возникает, соответствует функции ξ^n .

Добавим к сказанному рассмотрение понятия *алгебраического числа*. Как известно, действительное число α называется "алгебраическим степени не выше n ", если существует n рациональных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, таких, что

$$\alpha^n = \lambda_1 \alpha^{n-1} + \lambda_2 \alpha^{n-2} + \dots + \lambda_n.$$

В соответствии с этим свойство действительных чисел должно быть "алгебраическим числом степени не выше 3", является наверняка финитным; и это так не только для числа 3, но и для любого другого вполне конкретного натурального числа. Однако на первый взгляд кажется неверным, что предложение " α есть алгебраическое число степени не выше n " является схемой суждений некоторого финитного отношения между α и n и что свойство "быть алгебраическим числом" (без ограничения степени) также финитно. Наоборот, дело представляется так, будто добиться этого можно, лишь вводя отношения с "неопределенным" количеством пустых мест (шаг, приводящий с точки зрения логики к роковым последствиям) и весьма сложным образом распространяя наши принципы, особенно принцип итерации, на подобные отношения. Однако это совсем не так. Я воспользуюсь понятием алгебраического числа и покажу на его примере, что в таких случаях наших дефиниционных принципов оказывается вполне достаточно.

Так же как степень α^n мы можем определить на основе функции — произведения $\alpha \cdot b$, представим себе, что α есть полином n -й степени с рациональными коэффициентами, аналогичным образом полученный путем итерации из функции $\alpha \cdot b - * \lambda$ от α, b, λ , где λ означает любое рациональное число. Эта функция возникает из отношения

$$\Gamma(\mu | \lambda; \alpha, b),$$

означающего, что сумма рациональных чисел μ, λ есть элемент отрезка

$\alpha \cdot b$ (каждое из чисел μ и λ , как и прежде, заменяют четверку пустых мест, относящихся к категории натуральных чисел). Пустое место, обозначаемое в дальнейшем буквой L , относится к двумерным множествам предметов категории RZ . Образует отношение

$$\epsilon(\alpha, (\alpha \cdot b) - * \lambda; L) |_{\lambda = *} = \Delta(\alpha, b | L),$$

означающее: существует рациональное число λ , такое, что α и $(\alpha b) - * \lambda$ составляют пару элементов из L . Так как пустые места в Δ разделены на зависимые и независимые, как это указано вертикальной чертой, этим заданы условия для итерации; после итерации получается отношение $\Delta(\alpha, b | L; n)$; оно означает: существует n рациональных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, таких, что α и

$$\alpha^n b - (\lambda_1 \alpha^{n-1} + \lambda_2 \alpha^{n-2} + \dots + \lambda_n) \quad (5)$$

образуют пару элементов в L . Выражение (5) следует представлять себе записанным в виде

$$\alpha \cdot (\dots (\alpha \cdot (\alpha \cdot (\alpha \cdot b - * \lambda_1) - * \lambda_2) - * \lambda_3) \dots) - * \lambda_n.$$

Теперь остается лишь подставить вместо b действительное число $*1$, а вместо $L = L(\alpha, b)$ — то конкретное двумерное множество L_0 , которое соответствует отношению

$$\alpha \text{ есть действительное число и } b = *0.$$

Возникающее после такой подстановки отношение

$$\Delta(\alpha, *1 | L_0; n) = \Delta(\alpha, n)$$

означает: α есть алгебраическое число степени не выше n ; $\Delta(\alpha, *)$ есть схема суждений для свойства числа α быть алгебраическим.

Комплексные числа мы вводим, как обычно, т.е. как пары действительных чисел. При этом подобразованием пары в совершенно общем случае мы понимаем следующее. Пусть, например, A — двумерное множество, а B — трехмерное множество (какой-либо категории, однако ни A , ни B не могут быть в своих категориях пустыми множествами); тогда существует пятимерное множество $A \cdot B$, такое, что $\rho, \sigma, \tau; \xi, \eta$ тогда и только тогда образуют некоторую систему элементов, когда ρ, σ, τ образуют систему элементов для множества A , а ξ, η — для множества B (принцип 3 без отождествления пустых мест); множество $A \cdot B$ мы называем в этом случае парой, образованной из A и B . Пусть множества A и B в своих категориях являются неопределенными, тогда пара $A \cdot B$ есть функция аргументов A и B . Если A и B — множества предметов основных категорий, то верно и обратное: "члены" A и B суть функции пары $A \cdot B$. Пусть Γ есть произвольное множество той категории, которой принадлежит $A \cdot B$. Рассмотрим отношение $R(\rho, \sigma, \tau | \Gamma)$, означающее: существуют два предмета ξ и η , таких, что $\rho, \sigma, \tau; \xi, \eta$ образуют некоторую систему элементов из Γ . Возникающая из этого функция от Γ при подстановке вместо Γ пары $A \cdot B$ дает первый член этой пары. При описанных условиях, в силу принципа подстановки, понятия "функция от A и B ", с одной стороны, и "функция

пары $A \cdot B$ ", с другой стороны, по существу, совпадают. При таком подходе комплексные числа представляют собой восьмимерные множества натуральных чисел, или, точнее, области пар рациональных чисел.

§ 4. Числовые последовательности. Принцип сходимости

Пусть $f(n)$ — последовательность действительных чисел, $R(\lambda | n)$ — то отношение между рациональным числом λ и натуральным числом n , которое порождает функцию $f(n)$; таким образом, $f(n)$ при любом n есть область тех рациональных чисел, которые находятся к n в отношении R ($\lambda = p_1/q_1 \div p_2/q_2$, как и прежде, представляет четыре пустых места $p_1, q_1; p_2, q_2$, относящихся к категории "натуральное число"). Построим известным способом *limes inferior*⁷ этой числовой последовательности; это некоторая область рациональных чисел, к которой λ принадлежит тогда и только тогда, когда существует рациональное число $\lambda' > \lambda$ следующего рода: существует натуральное число n , такое, что при всех $m > n$ имеет место отношение $R(\lambda' | m)$. Ясно, что область α — открытый отрезок, стало быть, она либо действительное число, либо пустая область (которую в этой связи принято обозначать $-\infty$), либо универсальная область $+\infty$. Мы пишем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f(n) = \alpha.$$

Если буквой R обозначить еще и "область" (множество пятерок натуральных чисел), соответствующую отношению $R(\lambda | n)$, то, как нетрудно видеть, этот $\lim \inf$ есть функция от R^* .

Из существования $\lim \inf$ вытекает справедливость *принципа сходимости Коши*. Как известно, наша последовательность действительных чисел называется *сходящейся*, если для каждой дроби α существует некоторое натуральное число n , такое, что для всех p и q , которые больше n , рациональное число $-\alpha$ принадлежит области $f(p) - f(q)$, а число $+\alpha$ не принадлежит. Говорят, далее, что последовательность *сходится к действительному числу ϵ* , если для каждой дроби α существует натуральное число n , такое, что для всех $p > n$ рациональное число $-\alpha$ принадлежит области $f(p) - \epsilon$, а число $+\alpha -$ нет. Во все эти определения логические термины "существует" и "все" или "каждый" входят только в связи с натуральными числами. Принцип сходимости гласит: *действительное число ϵ , к которому сходится числовая последовательность $f(n)$, существует тогда и только тогда, когда эта последовательность является сходящейся*. Если последовательность $f(n)$ сходится к действительному числу ϵ , то оно совпадает с $\lim \inf$ этой последовательности и называется в этом случае просто пределом, или граничным значением.

Все сказанное естественным образом переносится и на *последовательности функций*, т.е. на случай, когда определяющее эту последовательность отношение $R(\lambda | n)$, кроме явно указанных, содержит еще и другие пустые

^{*}) Только в этом весьма переносном смысле и можно здесь говорить, как это принято в настоящее время, о функции бесконечно многих переменных.

места. Например, если в нем содержится еще пустое место ξ , относящееся к категории RZ , то из этого отношения возникает последовательность функций $f(\xi; n)$; в этом случае также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf. f(\xi, n) = g(\xi)$$

есть функция действительной переменной ξ . Перед нами *аналитический принцип построения предельного перехода*. Аргумент n в большинстве случаев принято записывать в виде индекса. Но, разумеется, не следует забывать о том, что само построение предельного перехода не может быть выполнено, если речь идет о произвольной, неизвестно откуда взявшейся бесконечной последовательности функций

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

— оно осуществимо лишь для некоторой функции $f_n(\xi)$ аргументов ξ и n , построенной по определенным законам (*gesetzmässig*) в том смысле, который установлен в главе I.

Вместо принципа сходимости Коши в качестве основы анализа выбирали различные другие принципы, которые кажутся эквивалентными принципу Коши. Приведу некоторые из них.

I. Последовательность вложенных интервалов, длина которых неограниченно убывает, задает (*abfängt*) определенное число. (Этот принцип находит применение, например, при разложении в десятичные дроби.)

II. Для всякой монотонно возрастающей последовательности действительных чисел, все члены которой не превосходят определенной границы, существует число, к которому она сходится.

III. *Принцип сечения Дедекинда*. Пусть A и B — два множества действительных чисел, таких, что любое число, являющееся элементом множества A , меньше любого числа, являющегося элементом множества B , и, кроме того, для каждой дроби α существует число ξ , являющееся элементом множества A , и число η , являющееся элементом множества B , такие, что $+\alpha$ не принадлежит области $\eta - \xi$; тогда существует одно и только одно действительное число c , такое, что ни один элемент множества A не больше c и не один элемент множества B не меньше c .

IV. Ограниченное множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань.

V. Каждое ограниченное бесконечное множество действительных чисел имеет точку сгущения.

В анализе, построенном здесь нами на надежном фундаменте, из приведенных выше принципов верны I и II. Под "последовательностью вложенных интервалов" при этом имеются в виду две числовые последовательности $f(n)$, $g(n)$, обладающие свойствами

$$f(n) < f(n'), \quad g(n) > g(n');$$

$$f(n) < g(n)$$

(здесь n' есть натуральное число, непосредственно следующее за числом n). Все же остальные принципы (III–V) неверны, однако их можно

сделать верными, заменив множества *действительных* чисел, о которых в них говорится, областями *рациональных* чисел.

Так называемой *теореме Гейне — Бореля* мы придаем следующую формулировку.

VI. Пусть имеется последовательность интервалов Δ_n ; каждое действительное число "единичного интервала" $*0 \leq \xi \leq *1$ лежит внутри одного из интервалов этой последовательности. Тогда существует такое натуральное число n , что каждое из такого рода действительных чисел обязательно лежит внутри одного из интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, составляющих конечную совокупность (endlichviele).

Эта теорема у нас также оказывается верной, если правильно интерпретировать понятие "последовательность интервалов". Ибо тогда предположение "Действительное число λ , соответствующее числу $*\lambda$, отрицательно или лежит внутри одного из интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, и то же самое справедливо относительно каждого рационального числа $< \lambda$ " выражает некоторое финитное отношение $R(\lambda | n)$ между λ и n . Если бы это утверждение было ложно, то множество, соответствующее свойству $R(\lambda, *)$, было бы некоторым открытым интервалом, которому принадлежали бы все отрицательные рациональные числа, но заведомо не принадлежало бы рациональное число 1; следовательно, число 1 было бы действительным числом, принадлежащим единичному интервалу. Но если рассмотреть тот из интервалов Δ_m , который, по предположению, содержит внутри себя это действительное число, то возникает противоречие.

Наоборот, теорема Гейне — Бореля *ложна*, если заданную в ней *последовательность* интервалов заменить произвольным *множеством* интервалов или если входящий в Δ_n аргумент, обозначенный индексом n , не отнести к основной категории "натуральное число". В частности, нельзя утверждать следующее: если $f(\xi), g(\xi)$ — две вещественнозначные функции, существующие на единичном интервале и удовлетворяющие при всех значениях аргумента неравенству

$$f(\xi) < \xi < g(\xi),$$

то в единичном интервале существует конечная совокупность действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, таких, что для каждого числа ξ из этого интервала среди α_i найдется такое число, для которого справедливо неравенство

$$f(\alpha_i) < \xi < g(\alpha_i).$$

То, что некоторые из принципов, до сих пор широко использовавшиеся при выводе всех этих утверждений анализа, неверны, естественно влечет за собой необходимость внесения надлежащих изменений в одни из ныне общепризнанных доказательств и способов образования понятий и полного отказа от других. Особенно серьезные последствия вызывает несостоятельность принципа IV: не может быть сохранен способ умозаключения, называемый "*принципом Дирихле*", даже в его ослабленной (bescheidenere) формулировке, учитывающей критику со стороны Вейерштрасса, когда утверждается существование не "минимума", а только

какой-то "нижней грани". Кроме того, если исходить из традиционного круга понятий современного анализа, необходимо постоянно иметь в виду, что когда налицо некоторое бесконечное множество действительных чисел, это еще отнюдь не гарантирует существования некоей последовательности $\{f(n)\}$, состоящей только из чисел этого множества.

Теория *бесконечных рядов* (сумм) сводится к теории числовых последовательностей с помощью частичных сумм. Пусть $f(n)$ — некоторая последовательность действительных чисел, а $U(\lambda | b, n)$ означает отношение: b есть некоторое действительное число, и рациональное число λ принадлежит отрезку $\{f(n) + b\}$ (т.е. отношение U порождает функцию $\{f(n) + b\}$). Исходя из этого и пользуясь принципом итерации (в его третьем расширенном варианте, ср. с. 117) образуем отношение $V(\lambda | b, n)$:

$$\begin{aligned} V(\lambda | b, 1) &= U(\lambda | b, 1); \quad V(\lambda | b, n') = \\ &= V(\lambda | f(n') + b, n). \end{aligned}$$

Возникающая из $V(\lambda | *0, n)$ последовательность действительных чисел $\mathfrak{S}(n)$ тогда связана с заданной последовательностью формулами рекурсии:

$$\mathfrak{S}(1) = f(1); \quad \mathfrak{S}(n+1) = \mathfrak{S}(n) + f(n+1).$$

Связь между рядом и последовательностью допускает разумный перенос на ряды, члены которых суть функции одной или нескольких действительных переменных. Если учесть, например, что степень ξ^n , как было установлено в предыдущих параграфах, есть функция от ξ и n , то окажется, что частичные суммы *степенного ряда*

$$\sum f(n) \xi^n$$

образуют некоторую последовательность функций в случае, когда $f(n)$ означает некоторую последовательность действительных чисел; поэтому их предел — там, где он существует, — есть некоторая вещественнозначная функция ξ . Аналогичное замечание справедливо и относительно бесконечного произведения.

Элементарные функции, прежде всего показательную функцию, можно определить с помощью каких-либо, обычно используемых для этого бесконечных процессов; логарифм определяется как функция, обратная (непрерывной и монотонной) показательной (более подробно об обращении функции см. в следующем параграфе).

§ 5. Непрерывные функции

Мы рассматриваем некоторую вещественнозначную функцию $f(\xi)$, существующую при действительных значениях аргумента ξ из единичного интервала; она возникает из отношения $R(\lambda | \xi)$. Уравнение

$$\eta = f(\xi)$$

выражает некоторое финитное отношение между ξ и η ; ибо оно означает, что к области η принадлежат все те и только те рациональные числа λ , которые находятся к ξ в отношении $R(\lambda | \xi)$ (и здесь поня-

тие "все" используется только в связи с понятием "рациональное число"). По этой причине при заданном η те числа ξ из единичного интервала, для которых $f(\xi) = \eta$, и те, для которых

$$f(\xi) > \eta \quad (\text{или } f(\xi) < \eta),$$

образуют некоторое множество чисел, которое является функцией от η . Напротив *запас значений* (Wertvorrat) функции f , вообще говоря, не есть финитное множество чисел, и в общем случае, даже если f есть ограниченная функция, для нее *не существует* ни точной верхней, ни точной нижней грани.

Нас будут специально интересовать *непрерывные* функции. Введем обозначение $| \xi | \leq \alpha$, понимаемое в следующем смысле: ξ есть некоторое действительное число, и соответствующее дроби α рациональное число $+\alpha$ не принадлежит области ξ , хотя каждое рациональное число, которое меньше чем $-\alpha$, принадлежит области ξ . Известное определение непрерывности гласит*): функция $f(\xi)$ непрерывна при значении аргумента α (лежащем в единичном интервале), если для любой дроби α существует дробь β , такая, что

$$|f(\xi) - f(\alpha)| \leq \alpha$$

при всех действительных числах ξ из единичного интервала, удовлетворяющих неравенству

$$|\xi - \alpha| \leq \beta.$$

Мы видим, что свойство функции быть непрерывной при значении α *трансфинитно* (и поэтому не зависит от точного определения объема понятия "действительное число"). Большое значение, которое это обстоятельство имеет для анализа и его приложений, мы сможем по достоинству оценить лишь в следующем параграфе.

Функция $f(\xi)$ непрерывна на единичном интервале, если она непрерывна при каждом значении α из этого интервала. Функция $f(\xi)$ равномерно непрерывна на единичном интервале, если каждой дроби α соответствует некоторая дробь β , такая, что

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \alpha$$

для всех действительных чисел ξ, η из единичного интервала, удовлетворяющих неравенству $|\xi - \eta| \leq \beta$.

Докажем следующие основные теоремы о непрерывных функциях.

A. Непрерывная функция принимает все промежуточные значения, т.е. если f — непрерывная функция и

$$f(a) < b < f(b),$$

*) Мы повторяем здесь смысл обозначений, введенных нами в главе I (§ 2) и поясненных на примерах, лишь по одной причине: на этот раз нам необходимо предполагать, что правые части α и β характеристических неравенств с самого начала представляют собой дроби, а не положительные действительные числа.

то существует некоторое действительное число ϵ , заключенное между a и b (т.е. $a < \epsilon < b$), такое, что $f(\epsilon) = d$.

В. *Непрерывная функция на единичном интервале достигает на нем максимума и минимума*, т.е. существуют два значения аргумента a и b , такие, что на всем единичном интервале выполняется неравенство

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a).$$

С. *Функция, непрерывная на единичном интервале, равномерно непрерывна на нем*.

Обычные доказательства этих теорем необходимо модифицировать, прежде всего потому, что рассмотрению подлежат только значения существующей на единичном интервале вещественнозначной непрерывной функции $f(x)$ при рациональных значениях аргумента.

Итак, образуем

$$f^*(\lambda) = f^*(\lambda)$$

(при этом следует иметь в виду, что действительное число λ есть функция рационального числа λ); $f^*(\lambda)$ на самом деле заменяет здесь функцию четырех аргументов, относящихся к категории "натуральное число").

Доказательство теоремы А. Предположим, что значение $f^*(0)$ отрицательно, а $f^*(1)$ положительно; тогда достаточно доказать существование на единичном интервале некоторого числа ϵ , такого, что $f(\epsilon)$ обращается в нуль. Образует такую область рациональных чисел, которая содержит λ тогда и только тогда, когда в единичном интервале существует рациональное число $\lambda' > \lambda$, для которого $f^*(\lambda')$ отрицательно. Эта область есть некоторое действительное число ϵ . Исходя из непрерывности функции f при значении аргумента ϵ , хорошо известным способом можно показать, что значение $f(\epsilon)$ не может быть ни положительным, ни отрицательным, и поэтому $= 0$. (Метод доказательства состоит в построении *наибольшего* нуля (Nullstelle) функции f .)

Доказательство теоремы В. Верхняя грань m значений функции $f^*(\lambda)$ на единичном интервале есть такая область рациональных чисел, которая содержит μ в случае, когда на единичном интервале существует некоторое рациональное число λ , такое, что $\mu < f^*(\lambda)$. Верхняя грань m есть либо действительное число, либо универсальная область $(+\infty)$. Функция $f(x)$ по предположению непрерывна, из чего немедленно следует, что неравенство $f(x) \leq m$ выполняется при всех действительных (а не только рациональных) значениях аргумента x .

Если x — какое-то действительное число > 0 и ≤ 1 , то можно также построить верхнюю грань $m(x)$ значений функции $f^*(\lambda)$ при всех неотрицательных λ , принадлежащих области x ; эта верхняя грань есть функция x . Мы различаем два случая:

либо при любом положительном рациональном числе $\lambda \leq 1$ верхняя грань $m^*(\lambda) = m$, тогда под a мы понимаем действительное число 0 ;
либо мы имеем противоположный случай; тогда мы образуем такую область a рациональных чисел, которая содержит λ , при условии, что существует некоторое положительное рациональное число $\lambda' > \lambda$ ($\lambda \leq 1$),

для которого $m (*\lambda') < m$; такая область есть некоторое действительное число.

В обоих случаях из непрерывности функции $f(x)$ при $x = a$ непосредственно следует, что $f(a)$ не может быть меньше чем m ; стало быть, $f(a) = m$. Тем самым доказано также, что m не может быть универсальной областью $+\infty$. (Мы построили наименьшее значение a , при котором f достигает максимума. Аналогичным образом можно построить число b , при котором f достигает минимума.)

Теоремы А и В допускают совместную формулировку: запас значений функции, непрерывной на замкнутом интервале, есть опять-таки замкнутый интервал.

Для доказательства теоремы С имеет смысл предположить, что функция $f(x)$ не является константой, при отрицательных x равна $f(*0)$, а при значениях аргумента $> *1$ равна $f(*1)$; это ограничение не нарушает общности доказательства. Пусть x — действительное число, α — дробь. Образует верхнюю грань абсолютной величины разности

$$|f(\lambda) - f(\mu)| \quad (6)$$

для всех рациональных чисел λ и μ , удовлетворяющих нашим условиям: λ принадлежит области x и $|\lambda - \mu| < \alpha$. Эта верхняя грань есть некоторая вещественнозначная функция $d(x, \alpha)$ от x и α . Отбросим ограничивающее требование, чтобы рациональное число λ принадлежало x , и обозначим возникающую таким образом верхнюю грань $d(\alpha)$. Справедливо, что

$$d(\alpha) \geq d(\beta) > *0, \text{ если } \alpha > \beta \text{ и } d(x, \alpha) \leq d(\alpha).$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{\alpha = 0} d(\alpha) = *0.$$

Для этого образуем такую область $x(\alpha)$ рациональных чисел, которая содержит λ в том случае, когда существует рациональное число $\lambda' > \lambda$, для которого оказывается, что

$$d(*\lambda', \alpha) < d(\alpha).$$

Область $x(\alpha)$ есть некоторая вещественнозначная функция α . Если b, b' — какие-то два действительных числа, между которыми заключена $x(\alpha)$, т.е. если

$$b < x(\alpha) < b',$$

то $d(\alpha)$ — верхняя грань абсолютной величины (6) для рациональных λ, μ , удовлетворяющих условиям $b \leq *\lambda \leq b'$ (λ принадлежит b' , но не принадлежит b) и $|\mu - \lambda| < \alpha$.

Пусть

$$\lim_{n = \infty} \inf x\left(\frac{1}{n}\right) = a,$$

а γ есть произвольная дробь. Так как функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$, существуют действительные числа b и b' , между которыми заключено a , и некоторое действительное положительное число ϵ , такое, что

неравенство

$$|f(\xi) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} \gamma \quad (7)$$

выполняется при всех ξ из интервала

$$b - \epsilon < \xi < b' + \epsilon.$$

Из (7) следует, что

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \gamma, \text{ если } b \leq \xi \leq b' \text{ и } |\eta - \xi| < \epsilon. \quad (8)$$

Кроме того, существует некоторое натуральное число n , такое, что рациональное число $+1/n$ принадлежит области ϵ и значение $\xi(1/n)$ заключено между b и b' . В силу неравенства (8), справедливого для указанных ξ и η , число γ не может быть меньше, чем отвечающая соответствующему n верхняя граница $b(1/n)$; стало быть,

$$b(\alpha) \leq \gamma, \text{ если только } \alpha \leq 1/n. \quad (9)$$

Теорема А может быть распространена на непрерывные функции многих действительных аргументов. В нашем анализе верна *основная теорема алгебры*.

В общем случае функция, "обратная" данной функции $f(\xi)$, не существует, даже если каждому действительному числу η , являющемуся элементом некоторого определенного множества T , отвечает одно и только одно число ξ , удовлетворяющее равенству

$$\eta = f(\xi).$$

Наоборот, существование обратной функции удается доказать в том случае, когда $f(\xi)$ есть некоторая *непрерывная* на единичном интервале *монотонная* функция. Пусть, например, она является монотонно *возрастающей* функцией, т.е. пусть

$$f(a) < f(b)$$

всякий раз, когда a и b — два действительных числа из единичного интервала, причем a меньше, чем b . Если η — какое-то действительное число, то образуем такую область рациональных чисел, которая содержит каждое отрицательное λ и, кроме того, каждое $\lambda < 1$, для которого $f^*(\lambda) < \eta$. Эта область есть некоторое действительное число и при этом — значение определенной функции $g(\eta)$ при значении аргумента η . Если переменные ξ и η ограничить интервалами

$$^*0 \leq \xi \leq ^*1 \text{ и } f(^*0) \leq \eta \leq f(^*1),$$

то каждая из функций f и g обратна другой:

$$f(g(\eta)) = \eta; \quad g(f(\xi)) = \xi.$$

Роль *дифференцирования и интегрирования* как процессов, порождающих новые функции, в области *непрерывных функций* удается сохранить в таком же объеме, что и в *прежнем анализе*. В соответствующие

рассуждения не приходится вносить существенных изменений. Менее просто обстоит дело, конечно, с гораздо более далеко идущими обобщениями теорий интеграла и меры, предложенными Риманом, Дарбу, Кантором, Жорданом, Лебегом и Каратеодори.

§ 6. Наглядно представляемый и математический континуум

До сих пор мы занимались построением чистой теории чисел; приняв в качестве исходного натуральные числа и руководствуясь основными чертами исторически сложившихся арифметики и анализа, мы шаг за шагом продвигались вперед, используя наши дефиниционные принципы и не пытаясь, так сказать, смотреть по сторонам. Теперь мы хотим остановиться и осмотреться вокруг с тем, чтобы понять, где мы, собственно, находимся.

Как мы убедились, непрерывность функции есть свойство *трансфинитное*, т.е. вопрос о том, непрерывна или нет некоторая функция, определенная с помощью наших принципов, требует для своего решения не только полного обзора натуральных чисел, но и такого же обзора тех *множеств* (точнее, тех четырехмерных множеств натуральных чисел), которые возникают при комбинированном и сколь угодно сложном применении наших принципов. Если же к нашим дефиниционным принципам подходить как к "*открытой*" системе, т.е. оставить за собой право дополнять их по мере надобности новыми принципами, то вопрос о том, непрерывна ли некоторая данная функция (в противоположность всем *финитным* вопросам), вообще говоря, также остается *открытым*: функция, непрерывная согласно нашим определениям, может утратить это свойство, если расширить наши дефиниционные принципы и, соответственно, перейти от имеющихся "на сегодня" действительных чисел к новым числам, при построении которых могут играть роль дополнительно введенные дефиниционные принципы *).

Пусть функция рассматриваемого нами вида представляет положение материальной точки как функцию времени. Сравним наше абстрактное (*begriffliche*) высказывание о том, что такая функция является непрерывной, или, еще проще, о том, что эта функция при всех действительных значениях аргумента из определенного интервала принимает только такие значения, которые заключены в известной части пространства и могут быть наглядно удостоверены, что должно служить, как это принято, "объективированному", "идеализированному", "схематизированному" выражению упомянутого высказывания при математическом представлении реального мира! Я вижу, например, что этот карандаш в течение какого-то времени неподвижно лежит передо мной на столе; это восприятие дает мне хотя

*) Разумеется, для всех известных из анализа непрерывных функций этот вопрос не остается открытым, так как содержащееся в утверждении об их непрерывности отрицательное суждение существования есть логическое следствие "аксиом", в которые переходят наши дефиниционные принципы, если их формулировать как утвердительные суждения существования о множествах. Но это — специфическая особенность таких "безусловно" непрерывных функций.

и не абсолютное, но все же разумное и достаточно обоснованное право на утверждение, что в течение какого-то времени этот карандаш находился на этом столе. Было бы явно нелепо полагать, что подобное право может быть поколеблено каким-то "расширением наших дефиниционных принципов", как будто бы в какие-то недоступные моему восприятию моменты времени мой карандаш, возможно, находился где-то в окрестностях Сириуса или кто знает где еще. Если временной континуум допустимо представлять с помощью некоторой переменной, "пробегающей" действительные числа, то тем самым, как мне кажется, задан тот — узкий или широкий — диапазон, в котором надлежит рассматривать понятие действительного числа, и этот вопрос не может быть делом *логических* рассуждений касательно принципов определения и т.п.

Чтобы лучше понять отношение между континуумом, непосредственно данным созерцанию, и понятием числа (после приведенного выше примера различие между тем и другим вполне ощутимо), остановимся на *времени* как наиболее фундаментальном континууме; чтобы всецело оставаться в области непосредственно данного, будем придерживаться *феноменологического* (в отличие от объективного) времени — той непрерывной формы переживаний моего сознания, которая позволяет мне воспринимать процесс, в котором одно переживание сменяет другое. (Под "переживанием" здесь следует понимать то, что я переживаю, и в точности то, как я это переживаю, а не, скажем, соответствующие переживаемому реальные, происходящие в духовно-телесном индивидууме психические или даже физические процессы, принадлежащие реальному миру.) Для того чтобы вообще можно было установить связь с миром математических понятий, должна быть дана идеальная возможность установления в этом времени строго точечного "теперь", констатации моментов времени. Тогда из любых двух не совпадающих временных моментов один всегда наступает *раньше*, а другой — *позже*. Два момента времени *A* и *B*, из которых *A* наступает раньше, ограничивают *отрезок времени AB*; поэтому отрезку принадлежит любой момент, наступающий позже *A*, но раньше *B*. Содержание переживания, которое заполняет отрезок времени *AB*, могло бы "само по себе", не становясь чем-то иным, приходиться на какой-либо другой момент времени; отрезок времени, который оно в этом случае заполнило бы, равен отрезку *AB*. Подобное описание временного "равенства", наверное, очень уязвимо; но именно поэтому я не буду на нем останавливаться: примем, что для любых двух отрезков времени утверждение об их равенстве имеет точный смысл, основанный на непосредственном созерцании времени. Тогда перед нами открывается возможность измерения, возможность построения *математического учения о времени* на следующем фундаменте: на основной категории "момент времени", бинарном отношении "*A* наступает раньше *B*" и кватернарном отношении "отрезок времени *AB* равен отрезку времени *A'B'*" (с привлечением натуральных чисел и заданного для них основного отношения $\mathfrak{F}$). Упомянутый выше разрыв между континуумом, данным непосредственно созерцанию, и понятием числа теперь становится преодолимым, если непосредственное выражение того наглядно воспринимаемого факта, что в течение известного

времени этот карандаш лежал там-то, можно истолковать следующим образом: 1) слова "в течение известного времени" заменить словами "в каждый момент времени, принадлежащий известному отрезку времени OE "; правда, такое истолкование больше не передает наглядно данного, тем не менее оно допустимо, *если только разложение на моменты времени вообще правомерно*; 2) должно быть истинным и следующее. *Если P есть момент времени, то область рациональных чисел, которой λ принадлежит тогда и только тогда, когда существует момент времени L , наступающий раньше P и такой, что*

$$OL = \lambda \cdot OE,$$

должна допускать арифметическое построение в чистой теории чисел на основе наших дефиниционных принципов и тем самым быть действительным числом в нашем смысле; таким образом, если отрезок времени OE принять в качестве единицы, то не только каждой точке P будет соответствовать — как ее "абсцисса" — некоторое действительное число, но и, наоборот, каждому действительному числу — некоторый момент времени.

Если моменты времени с их отношениями "раньше" и "позже" могут действительно служить фундаментом чистой теории времени, то в созерцании времени должен быть заложен ответ на вопрос: имеется такого рода соответствие между моментами времени и действительными числами или нет? Если оно отсутствует, то следует попытаться так расширить или изменить наши дефиниционные принципы, чтобы достигнуть желаемого согласия <Konkordanz>. Если же оно окажется недостижимым, то чисто арифметический анализ лишится реальной ценности, и учение о континууме придется рассматривать как нечто самостоятельное и стоящее на одной ступени с учением о числе. Как бы то ни было, на вопрос о том, так ли обстоит дело, как это предполагается в пункте 2), или на аналогичный столь же фундаментальный вопрос (например, на вопрос о том, выполняется ли для моментов времени принцип сечения Дедекинда или принцип сходимости Коши) ответ должен быть дан; как бы мы ни вертелись и ни крутились вокруг этих вопросов, чтобы обойти понятие множества (или последовательности), ответ на них надо дать, и *объем его зависит от наших дефиниционных принципов*.

И вот сейчас я думаю: все, что мы здесь потребовали, есть явная *бесмыслица*; созерцание времени (от которого мы ожидаем именно концептуального выяснения сущности непрерывного течения времени) не дает ответа на эти вопросы — как не может человек ответить на вопросы, с которыми к нему обращаются по недоразумению и которые ему поэтому непонятны. Фундаментом математической дисциплины может, по-видимому, служить категория натуральных чисел, но не континуум, как он дан в наглядном созерцании. Нужные для этого предпосылки (см. главу I, § 1) не выполняются: уже понятию точки континуума недостает необходимой опоры в наглядном созерцании. Заслугой философии Бергсона следует считать подчеркивание глубокого отчуждения мира математических понятий

от непосредственно переживаемой непрерывности феноменологического времени ("la durée" *).

Где же заложено, что данное сознанию существует не просто как бытие (например, как логическое бытие понятий), а как длящееся и изменяющееся "теперь-бытие" (Jetzt-sein) — так что я могу сказать: "Вот это *теперь есть*, а вот *теперь* его больше нет?" (Dies ist *jetzt* — doch *jetzt* nicht mehr)? Если мы в своей рефлексии вырвемся из этого потока и противопоставим себе в качестве объекта неизменное "теперь", охватывающее изменяющееся содержание переживания, то в этом *текущем* мы сможем выделить точки. Каждой точке соответствует определенная целостность переживаний: если сознание находится в этой точке, то оно обладает соответствующей целостностью переживаний; только это *есть*. Но откуда все же берется конкретная длительность каждого переживания? Придерживаясь отдельных изолированных точек **), мы на этот вопрос можем дать лишь один ответ: мое переживание исчерпывается данной временной точкой, но с ней связано более или менее отчетливо воспоминание, интенциональный предмет которого есть мое переживание в некоторый момент времени в прошлом. Мы оставляем в стороне проблему, откуда подобные *воспоминания* черпают свою убедительность. Например, если я воспринимаю свет в течение короткого интервала времени, то в момент *A* я обладаю не только переживанием этого восприятия, но одновременно и теми воспоминаниями "о" переживаниях восприятий во все прошлые моменты времени, которые в этот короткий интервал у меня возникли. Однако это еще не все. Я вспоминаю в момент времени *A* не только переживание *восприятия*, имевшиеся у меня в недавно прошедший момент времени *B*, но и *всю совокупность* переживаний в этот момент *B*, а она, в свою очередь, помимо восприятия содержит воспоминания о моих переживаниях во все предыдущие моменты времени. Непрерывное восприятие состояло бы таким образом из бесконечно многих вложенных одна в другую и взаимосвязанных систем бесконечно многих воспоминаний; предшествующее является "вложенным" (Eingeschachtelte). Ясно, однако, что наше переживание ничего этого не содержит; к тому же структура (Gefüge), состоящая из точечных, без конца вкладываемых один в другой моментов переживания, как некое замкнутое целое абсурдна. Представление о потоке как о состоящем из отдельных точек и потому *распадающемся* на отдельные точки оказывается ошибочным. От нас ускользает как раз то, что составляет непрерывность, переливание от точки к точке, то, как постоянно длящееся "теперь" постоянно уносится от нас — и мимо нас — уходя в бездну прошлого.

Как все это происходит на самом деле, каждый переживает непосредственно; из-за изначальности феноменологического времени описать это невозможно. Достаточно следующего. То, что содержится в моем сознании, сосре-

*) См., например, первые страницы его книги "Evolution créatrice", вышедшей также в немецком переводе (Jena, Diederichs, 1912).

**) Не следует забывать, что в "континууме" действительных чисел отдельные элементы на самом деле изолированы друг от друга так же, как, например, целые

доточено в одном: в теперь-бытии (*Jetzt-seiendes*), в том нечто, которое вместе со своим положением во времени ускользает от меня; именно поэтому оно есть тут-бытие (*Dasein*), всегда новое, длящееся и тут же меняющееся. Исчезнувшее может снова всплыть, однако не как вернувшееся переживание, а скорее как содержание какого-то (подлинного) воспоминания: тогда оно становится (*wird*) прошлым; в объективной картине течения жизни, которую я себе рисую, по отношению к тому, что дано сейчас, его надлежит считать, тем, что было раньше. Для объективно представленного времени отсюда получается только вот что: 1) отдельная временная точка не является самостоятельной — взятая сама по себе она есть чистое ничто и существует лишь как "промежуточный пункт" (что, естественно, никоим образом не может быть постигнуто математикой); 2) в сущности времени (а не в несовершенстве наших средств — обстоятельстве случайном) коренится основание того, что каждый определенный момент времени совершенно неуказуем, что его никогда нельзя *точно* зафиксировать — возможна лишь *приближенная* фиксация *). То же самое справедливо и относительно любого наглядно данного континуума, особенно для континуума пространственной протяженности.

Как получается, что мы на этом не успокаиваемся, что после того, как наше переживание становится реальным процессом в реальном мире, а наше феноменологическое время простирается, как нечто космическое, на весь мир, мы все-таки подменяем континуум точным понятием действительного числа, вопреки существенной неточности, неустранимой из того, что нам надо, — как во всем этом не просто проявляется какая-то насильственная систематизация или стремление к простоте мысли (*Denkökonomie*), вызванное нашими практическими задачами и целями: в действие вступает подлинный разум, раскрывающий присущий действительности "логос" (в таком чистом виде, какой только возможен для нашего сознания, которое все не может "перепрыгнуть через собственную тень"), — обсуждать все это не может быть здесь нашей задачей. Конечно, наглядно созерцаемый и математический континуум не совпадают; между ними зияет пропасть. Тем не менее существуют разумные мотивы, побуждающие нас стремиться к тому, чтобы от одного перейти к другому**), — столь же разумные, как и те, которые заставляют при исследовании природы стремиться проникнуть "за" пределы той реальности, которая основывается на актах опыта и в которой мы живем как люди, составляющие часть природы (*natürliche Menschen*), — к стоящему за чувственными данными "подлинно объективному", бескачественному физическому миру (например, от исполненных красок зримых вещей к колебаниям эфира или поведению соответствующих математических функций, описывающих электромагнитное поле).

*) О проблеме времени см. Husserl. *Ideen...*, §§ 81, 82; Linke. *Die phänomenale Sphäre und das reale Bewusstsein*. — Halle, 1912. — Kap. VI.

**) Например, не от нашей воли зависит то, что мы не можем связать непрерывность со схемой целых чисел. И все же: кто знает, что еще дремлет в лоне физики будущего — квантовой теории!

Так и в нашем построении анализа заложена, если угодно, некоторая *теория континуума*, которая (преодолевая рамки своей логической последовательности) должна быть явлена разуму (*vernünftig aufzuweisen*), так же, как и любая физическая теория. Понятие действительного числа является в ней абстрактной схемой континуума с его частями, бесконечно вкладываемыми одна в другую, понятие функции — схемой зависимости "покрывающих" друг друга континуумов (в одном из случаев, например, данном движущейся точкой: покрытие временного континуума некоторым линейно-пространственным *lineares räumliches*). Я не могу приводить здесь более глубокое обоснование, однако и из сказанного должно быть понятно, что если для понятий действительного числа и (непрерывной) функции, как мы их здесь обрисовали, справедлива теорема А предыдущего параграфа, наличествует очень существенная часть подобного разумного оправдания: это свидетельствует о том, что указанные понятия пригодны для точного выражения того, что означает "движение" в мире физической реальности.

Итак, строго фиксированная (*exakte*) временная или пространственная точка не заключена в непосредственно данных временной продолжительности или пространственной протяженности как их неотъемлемый элемент; лишь разум, проникающий сквозь это непосредственно данное, в состоянии постигнуть соответствующую идею, и лишь в арифметико-аналитическом понятии действительного числа, принадлежащем чисто формальной сфере, она кристаллизуется во всей своей определенности. Если говорить о пространстве, то давайте ограничимся геометрией прямых! Если учение о времени и пространстве мы теперь попытаемся построить как самостоятельную математико-аксиоматическую науку, то нам придется принять во внимание следующее.

1. Выделить отдельную точку невозможно. Точки также не являются индивидами и поэтому не могут быть охарактеризованы своими свойствами. (В то время как "континуум" действительных чисел состоит из самых настоящих индивидов, континуум точек времени и пространства однороден.) Поэтому-то точки и точечные множества никогда не могут быть заданы абсолютно, а определяются лишь в зависимости (как функции) от системы координат. (Система координат — это остаток, неизбежно сохраняющийся после уничтожения "Я" *Ich-Vernichtung*) в геометро-физическом мире, который разум вылушивает из того, что ему дано в качестве нормы "объективности", — в объективной сфере это скудный, но верный признак того, что тут-бытие (*Dasein*) дано или может быть дано лишь как интенциональное содержание переживания сознания некоторого чистого осмысляющего "Я".)

2. Далее следует сформулировать аксиому непрерывности: относительно единичного отрезка *OE* каждой точке *P* соответствует в качестве абсциссы некоторое действительное число и наоборот. Лишь вследствие аксиомы непрерывности обретают ясный смысл — несмотря на обстоятельство, о котором говорилось в предыдущем пункте, — все собственные суждения [при образовании их принцип 5 (см. главу I, § 2) не используется].

3. Если на ступени, достигнутой нами в § 3 этой главы, мы подведем под чистую теорию чисел новый фундамент, приняв действительные числа наряду с натуральными в качестве новой основной категории (аналогично тем соображениям, которые были высказаны для дробей в § 2), то на таком расширенном фундаменте воздвигнется здание учения, которое мы временно назовем "гиперанализом". Гиперанализ отнюдь не совпадает с нашим анализом. Так, в гиперанализе чаще, чем в анализе, встречаются такие множества действительных чисел, в определении которых "существует" выступает в связи с "некоторым действительным числом". *Как следствие этого, в гиперанализе, вообще говоря, не справедливы ни принцип сходимости Коши, ни теоремы о непрерывных функциях* (а именно, они справедливы только для тех функций и последовательностей, которые уже встречаются в анализе). Отсюда проистекает важный вывод: мы должны стойко сопротивляться непрестанно возникающему искушению принять в качестве исходного более высокий уровень, нежели основной слой натуральных чисел, ибо *только анализ а не гиперанализ приводит к приемлемой теории континуума*. Таким образом, дело обстоит теперь так. В соответствии с аксиомой, приведенной выше под номером 2, при выборе определенной системы координат OE возникает "всепроницающее" несоответствие не только между точками, с одной стороны, и действительными числами, с другой, но и между множествами точек, множествами множеств точек, вообще между всеми множествами учения о пространстве и времени, с одной стороны, и всеми множествами *гиперанализа*, с другой стороны; или, говоря еще точнее, имеет место соответствие между множествами гиперанализа и функциями точек O, E в учении о пространстве или времени. Поэтому упомянутую аксиому нельзя заменить, например, (не выполняющимся в гиперанализе) принципом сходимости Коши или любой другой аналогичной формулировкой, обычно принятой при аксиоматическом построении геометрии (не говоря уже об аксиоме полноты Гильберта). Кроме того, из непригодности гиперанализа следует, что учение о времени и геометрию вообще нельзя развивать как самостоятельные аксиоматические науки. Хотя элементарная геометрия, т.е. геометрия, насколько ее удастся обосновать, не прибегая к аксиоме непрерывности, может быть построена синтетически, *собственно геометрия континуального допускает только аналитическое построение*, т.е. такое, когда анализ развертывается как часть чистой теории чисел, а с его теоремами затем обращаются геометрически, с помощью содержащегося в понятии координат принципа переноса — только так получают разумные понятия о кривых, поверхностях и т.д. в точной сфере. К нашей теории континуума относится утверждение: часть пространства, а также поверхность, ограничивающая часть пространства, часть этой поверхности или опять-таки ограничивающая ее линия суть образования такого рода, что совокупность попадающих в них точек может быть построена арифметически как трехмерное множество действительных чисел. Это утверждение по своему характеру аналогично утверждению о том, что каждой точке на прямой соответствует действительное число: оно столь же мало подтверждается или опровергается тем, что нам непосредственно дано. Тем не менее оно есть разумное следствие идеи

(Konzeption) строго определенной (exakte) точки пространства. Геометрические аксиомы выполняют при этом лишь ту задачу, что позволяет, опираясь на известного рода отношения, — последние можно рассматривать как данные непосредственно — сформулировать принцип переноса.

Если с нашей точки зрения взглянуть на современный анализ, то придется сказать: на пути, ведущем от наглядного созерцания к формальному понятию, он — со своими принципами — остался где-то в туманной середине; но, прикрываясь своими смутными представлениями о множестве и функции, он может выдавать себя за науку, оперирующую формальными понятиями. Необходимо, однако, признать, что наша критика оснований большей частью не относится к конкретным проблемам, решаемым анализом; когда туман рассеется, нам не составит труда очистить их от остатков налипшей на них грязи.

Соображения, изложенные в этом параграфе, разумеется, надлежит рассматривать как мало поучительный суррогат подлинной философии континуума. Поскольку, однако, ничего более существенного тут не достигнуто, а наша задача относится не к теоретико-познавательной, а к математической области, пусть дело этим и ограничится.

§ 7. Величины. Меры

Вернемся еще раз к рассмотренному выше принципу переноса, связывающему пространство и время, с одной стороны, и числа — с другой.

Концептуально (auf begriffliche Weise) задать временную точку P относительно "единичного отрезка" OE означает построить из первичных отношений "раньше" и "позже" с помощью дефинициальных принципов (из которых исключен принцип 5) отношение $\Lambda(O, E, P)$, такое, что каждым двум точкам O и E , из которых O раньше, чем E , отвечает (gehört) одна и только одна точка P , удовлетворяющая этому отношению. Если точки O', E', P' также удовлетворяют тому же отношению, то мы говорим, что P' находится с $O'E'$ в таком же соотношении (Verhältnis), как и P с OE ; в этом и состоит, по нашему мнению, первоначальный смысл понятия соотношения. Следует обратить внимание на то, что не могут существовать два отношения (Relationen) Λ и Λ^* с различными объектами (которым соответствовали бы различные трехмерные множества точек), такие, чтобы одна и та же точка P находилась с единичным отрезком OE как в соотношении Λ , так и в соотношении Δ^* . Действительно, если бы это имело место, то те отрезки времени OE , которым принадлежала бы точка P , удовлетворяющая как отношению $\Lambda(O, E, P)$, так и отношению $\Lambda^*(O, E, P)$, образовывали бы множество отрезков, которое не является ни пустым, ни универсальным. Но поскольку не только все точки времени, но и все отрезки по своему смыслу тождественны, такое множество (соответствующее некоторому производному бинарному отношению точек нашей области операций — принцип задания 5 по-прежнему исключается!) не существует. Аксиома непрерывности утверждает, что все эти отношения Λ , которые мы здесь называли соотношениями, или, скорее, их объемы

(Geltungsumfänge), допускают взаимно однозначное представление посредством действительных чисел.

Чтобы несколько точнее изложить такое истолкование понятия "соотношение", которое, как нам кажется, позволяет представить в правильном свете значение чисел для измерения величин, будем исходить не из точек времени, а из его отрезков. Теорию, которую мы при этом развиваем, с более общей точки зрения можно рассматривать и как теорию произвольных линейных положительных величин. Наш исходный пункт сводится к следующему.

Категория объектов: отрезки времени. Первичные отношения:

1) $a = b$. Это "равенство" отрезков времени, удовлетворяющее известным аксиомам "равенства" (каждый отрезок равен самому себе; если $a = b$, то $b = a$; если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$), не следует смешивать с тождеством.

2) $a + b = c$. Это отношение (Beziehung) остается в силе, если любой из трех отрезков a, b, c заменить равным ему отрезком. Если оно имеет место между отрезками a, b, c и между отрезками a, b, c' , то $c = c'$. Сложение удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам.

Самое важное из производных отношений — то, которое выражается формулой $a < b$, или $b > a$; оно означает: существует отрезок d , такой, что $a + d = b$. То обстоятельство, что в случае любых двух различных моментов времени один всегда наступает раньше, а другой позже, влечет относительно этого отношения важный факт: из трех возможностей

$$a < b \mid a = b \mid a > b$$

всегда имеет место лишь одна.

На описанном фундаменте мы построим теперь (используя натуральные числа) с помощью принципов главы I некую математическую дисциплину, причем принцип 5 исключим раз и навсегда. Еще один важный факт состоит в том, что наше поле операций *однородно*, т.е. что кроме пустого и универсального множеств других одномерных множеств отрезков не существует. Следовательно, один отдельно взятый отрезок невозможно задать чисто понятийным образом (*absolut in begrifflicher Weise*), т.е. каким-то его характеристическим свойством. Наоборот, отрезок всегда можно определить лишь относительно другого отрезка, на основе бинарного отношения отрезков $R(a, b)$. Нетрудно видеть, что каждое такое отношение, коль скоро оно имеет место между отрезками a и b , сохраняется, если любой из отрезков заменить равным ему отрезком*). Под "соотношением", или "пропорцией", мы понимаем некоторое бинарное отношение отрезков $R(a, b)$, такое, что каждому отрезку a соответствует один и — с точностью до равенства — только один отрезок b , для которого выполняется это отношение. Переходя от формально-логической к содержательной точке зрения, мы перестаем различать пропорции с равным объемом

*) Сказанное, разумеется, относится только к отношениям из нашей области операций; к ней не принадлежит, например, отношение, когда два отрезка лежат раздельно.

〈Geltungsumfang〉, т.е. заменяем каждую пропорцию соответствующим ей двумерным множеством отрезков: мы называем его мерой 〈Masszahl〉 пропорции. То, что a , b образуют систему элементов этой меры Λ , мы выражаем формулой

$$b = a\Lambda,$$

или словами: b находится с a в соотношении Λ . Далее справедливо следующее: если два отрезка находятся друг с другом как в соотношении Λ , так и в соотношении Λ^* , то Λ совпадает с Λ^* . Ибо в противном случае те отрезки a , для которых $a\Lambda = a\Lambda^*$, образовывали бы одномерное множество отрезков, отличных от пустого и универсального множеств. Меры можно умножать и складывать. Определение этих операций дается равенствами

$$(a\Lambda)M = a(\Lambda M); (a\Lambda) + (aM) = a(\Lambda + M).$$

Установленное тем самым естественное понятие меры само по себе не имеет ничего общего с числами чистой теории чисел. Однако мы понимаем, что "чистые" числа, прежде всего натуральные, являются необходимым концептуальным средством введения некоторой меры.

Отношение 〈Beziehung〉 равенства $a = b$ есть пропорция; ее меру мы обозначим единицей, 1. В более общем случае сложение, как неоднократно упоминалось, приводит к отношению $b = na$, где n — произвольное натуральное число. Это отношение также есть пропорция; ее меру, определяемую натуральным числом n , мы обозначим тоже n . Обратное отношение $a = nb$, или $b = a/n$, также есть пропорция. Для того чтобы мы могли это утверждать, необходимо доказать следующее: для каждого отрезка a существует 1) один и 2) с точностью до равенства только один отрезок b , такой, что $a = nb$. Если c — произвольный отрезок, то отрезку nc заведомо присуще свойство, которое утверждалось в 1) для отрезка a . Но вследствие однородности, если некоторое свойство присуще одному отрезку, то оно верно и для всех отрезков; отсюда и следует утверждение 1). Утверждение 2) следует из того, что если $b < b'$, то и $nb < nb'$.

В силу доказанного для любых двух натуральных чисел m и n равенство

$$b = \frac{ma}{n}$$

выражает определенную пропорцию между m и n ; ее мера зависит только от дроби $m/n = \alpha$, и поэтому ее саму мы обозначим через α . Сложение и умножение мер, соответствующих дробям, происходит параллельно сложению и умножению самих дробей. Справедлива (не сводимая к более простым фактам) аксиома Архимеда: для любых двух отрезков a и b существует натуральное число n , такое, что $na > b$.

Мы видели выше, что два отрезка заведомо находятся друг к другу лишь в одном соотношении, но всегда ли они находятся в каком-нибудь соотношении? Мы знаем, что аксиома непрерывности позволяет ответить на этот вопрос утвердительно, а именно, следующим образом. Если a и b — любые два отрезка, то область дробей, к которой γ принадлежит тогда и только тогда, когда $\gamma a > b$ (и которая представляет собой "открытый остаток"

в области дробей), допускает и чисто арифметическое определение, т.е. эта область дробей встречается в чистой теории чисел и может быть представлена непосредственно созерцаемым образом с помощью некоторого положительного действительного числа. Наоборот, если I есть открытый остаток дробей в чистой теории чисел, отличный как от пустой, так и от универсальной области, то отношение $b = Ia$ (оно означает, что для всех дробей γ : $\gamma a > b$, причем только таких, что γ принадлежит I) есть некоторая пропорция; ее меру, определяемую с помощью i , мы обозначим тоже через I . При таком подходе все меры "совпадают" с положительными действительными числами; сложение и умножение в области мер и в области положительных действительных чисел происходит совершенно параллельно.

Так как этими весьма специальными пропорциями все меры исчерпываются, при построении теории измерений наше общее истолкование этого понятия не достигает, если можно так сказать, полного раскрытия, а играет лишь роль идеи, указывающей, в каком направлении надлежит идти.

§ 8. Кривые и поверхности

В качестве примера того, каким образом геометрические представления благодаря использованию аналитических понятий обретают точную формулировку, рассмотрим — в заключение наших исследований континуума — такие понятия, как плоская кривая и поверхность в пространстве.

В геометрии на плоскости нам необходимо различать два совершенно различных представления, которые принято называть одним и тем же словом "кривая"; чтобы их разделить, я применяю термины "*линия*" и "*кривая*". Грубо говоря, речь идет о различии между сетью улиц какого-то города или трамвайной "*линией*", с одной стороны, и тем путем ("*кривой*"), которым проходит пешеход по улицам этого города (и который во время этой прогулки пребывает *in statu nascendi*⁸), или, соответственно, путем, который описывает едущий трамвай, с другой стороны. "*Линии*" встречаются, например, как границы при разбиении плоскости на части, "*кривая*" есть "*траектория*" (Bahn) движущейся точки. Если плоскость разложить на изолированные точки, то линию надо будет рассматривать как некое специфическое множество таких точек или, точнее, — если, в соответствии с принципом переноса аналитического геометрии, мы представляем точки плоскости парами действительных чисел и сохраняем веру во всемогущество Логоса — как встречающееся в чистой теории чисел множество двоек действительных чисел, соответствующее определенному бинарному отношению ("*неявному равенству*") между действительными числами. Можно считать, что совокупность точек плоскости, через которые "проходит" точка, движущаяся по плоскости, есть линия в этом смысле; однако путь точки необходимо отличать от этой линии (которую можно назвать "следом" или "колеи" движения). Товарный вагон, даже если рельсы, по которым он должен двигаться, существуют, может двигаться во время маневров поезда по самым различным путям и, в частности, по путям, длина которых может варьировать в широких пределах. "Кривая" (во втором смысле) по своей сущности лишь указывает на некоторое движение — выступает как его абстрактный зависимый момент. Чтобы точно задать

движение, необходимо представить положение движущейся точки как зависящее от времени с помощью двух функций действительного аргумента, построенных чисто арифметически; при этом значения аргумента должны соответствовать точкам времени, значения же функций — первой и второй координате ее положения ("параметрическое представление"). Мы будем иметь здесь дело только с таким истинным (*eigentlichen*) понятием кривой — понятием, с которым мы встречаемся также и в дифференциальной геометрии.

Сам путь есть одномерный континуум "точек пути"; каждая точка находится в определенном месте, совпадает (*koinzident*) с определенной точкой плоскости, не будучи, однако, сама точкой плоскости. Между точками пути как "стадиями" движения существует отношение "раньше — позже", совершенно так же, как оно существует между точками времени; при движении континуум точек траектории непрерывно и монотонно *покрывает* континуум точек времени. Такой взгляд позволяет в известной мере отделить "путь" от породившего его движения. Он может быть перенесен на кривые в трехмерном пространстве; но прежде всего он имеет важное значение для определения понятия "*поверхность*", и для этого трудного случая мы изложим его полностью, со всеми математическими подробностями.

Речь идет о понятии поверхности, аналогичном "кривой", а не "линии", о поверхностях того рода, которые дифференциальная геометрия пытается передать с помощью параметрического представления. Я утверждаю, что определение понятия поверхности, включающее в себя все возможные случаи пересечения (*Durchbringen*) и т.п., может быть получено только в том случае, если поверхность рассматривается как состоящая из "точек поверхности", из элементов *sui generis*⁹, которые образуют двукратно (*zweifach*) протяженный континуум — "поверхность в себе". Но эта поверхность вложена в пространство, и поэтому каждой точке поверхности, занимающей определенное "место" в пространстве, соответствует в нем определенная точка — та, в которой находится точка поверхности. В обычном параметрическом представлении

$$\xi = \xi(u, v), \eta = \eta(u, v), \zeta = \zeta(u, v)$$

три действительных числа ξ, η, ζ характеризуют, как декартовы координаты, точку пространства, числа u, v , как "гауссовы" координаты, — точку поверхности, а функции $\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)$ математически устанавливают упоминавшееся выше соответствие. Но, как известно, представление точек поверхности парами чисел не обладает достаточной общностью для того, чтобы описывать все поверхности в их отношениях связности — "в большом". Переходя к математической формулировке, мы заменяем поэтому "поверхность в себе" множеством $\mathfrak{F}$ (встречающимся в чистой теории чисел) предметов какой-то, но вполне определенной категории; элементы этого множества суть точки поверхности. [Мы не обсуждаем здесь "принцип переноса", позволяющий нам, благодаря существующему между точками поверхности внутреннему отношению, переходить от точек такого рода к этим предметам чистого анализа, аналогично тому, как понятие

координат позволяет переходить от точек пространства к тройкам действительных чисел.] Но как охватить эту непрерывную связность между точками, объединяющую их в двумерную поверхность? После того как мы раздробили континуум на изолированные точки, восстановить связность, опирающуюся на "несамостоятельность" отдельных точек, задним числом привлекая некий ее концептуальный эквивалент, довольно трудно. Я выбираю, по существу, тот же подход, которого придерживался в части моей книги "Идея римановой поверхности", посвященной Analysis situs*).

То, что во временном континууме отдельная точка существует лишь как "промежуточный пункт", в анализе мы учитываем — после того, как несмотря ни на что превратили точку в самостоятельный индивид, в некоторое действительное число a , — определяя ее с помощью бесконечной последовательности неравенств

$$|x - a| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

и рассматривая окрестности, все плотнее стягивающиеся к a . Этот суррогат непрерывной связности мы используем, в частности, при точном определении непрерывности (непрерывной функции). Понятие "бесконечной близости", с помощью которого старый анализ пытался обойти — способом, небезупречным с точки зрения противоречий, — эту несамостоятельность точек, в современном анализе уступает место бесконечной последовательности стягивающихся окрестностей. В соответствии с этим мы утверждаем: "поверхность в себе" задана, если задано (в чистой теории чисел) определенное множество $\mathfrak{F}$ (задано свойством, характеристичным для его элементов — точек поверхности) и, кроме того, отношение $U(P, Q; n)$, наличие которого для двух точек поверхности P, Q и натурального числа n может быть выражено словами: точка Q лежит в n -й окрестности точки P . Потребуем, чтобы отношение U удовлетворяло следующим условиям.

1) Точка P содержится в любой окрестности точки P ; $(n + 1)$ -я окрестность точки P составляет часть n -й окрестности точки P .

Подобно тому как множество всех действительных чисел — множество, которое соответствует свойству $R(u)$: " u есть некоторое действительное число" с пустым местом u , — выступает в теории чисел как тип (Тури) одномерного континуума, так аналогичное множество пар (соответствующее бинарному отношению $R(u) \cdot R(v)$, имеющему два пустых места u и v), или так называемая "числовая плоскость", служит образцом двумерного многообразия. Потребуем поэтому, чтобы каждая окрестность при непрерывном отображении переходила во внутренность единичного квадрата

$$|u| < 1, \quad |v| < 1$$

этой числовой плоскости; что означает здесь "непрерывное отображение", можно установить с помощью самого понятия окрестности. Данное требование поэтому точно формулируется следующим образом.

*) См. особенно главу I, § 4 — "Понятие поверхности". Ср. также книгу: Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre. — Veit. 1914 (главы VII и VIII, прежде всего с. 213).

2) Если P_0 есть точка поверхности, то существуют взаимно обратные непрерывные функции

$$P = P(u, v) \mid u = u(P),$$

$$v = v(P),$$

$$[P(0, 0) = P_0],$$

задающие взаимно однозначное отображение первой окрестности $\mathcal{U}$ точки P на внутренность единичного квадрата K числовой плоскости.

Условие непрерывности для функции $P(u, v)$ означает следующее: если n есть какое-то натуральное число, а u, v — некоторая точка единичного квадрата, то существует дробь α , такая, что для всех действительных чисел u', v' , удовлетворяющих условиям

$$|u' - u| < \alpha,$$

$$|v' - v| < \alpha,$$

$P(u', v')$ принадлежит n -й окрестности $P(u, v)$. Для функции $u(P)$ непрерывность означает, что для каждой точки P из $\mathcal{U}$ и каждой дроби α имеется натуральное число n , такое, что все точки P' , принадлежащие n -й окрестности точки P , лежат в $\mathcal{U}$ и удовлетворяют условию

$$|u(P') - u(P)| < \alpha.$$

То же самое справедливо и для функции $v(P)$.

Для того чтобы теоремы о непрерывных функциях на нашей поверхности можно было обосновать аналогично тому, как это было сделано в § 5 для функций одного действительного аргумента, необходимо предположить еще следующее.

3) Существует функция $P(\lambda)$ одного или нескольких аргументов, обозначаемых символом λ и относящихся к категории натуральных чисел следующего рода: для всех аргументов $P(\lambda)$ есть точка поверхности; для каждой точки P поверхности и каждого натурального числа n существует λ , для которого $P(\lambda)$ лежит в n -й окрестности точки P (значения функции $P(\lambda)$ распределены по поверхности "всюду плотно").

Подчеркнем еще раз, что множество $\mathfrak{F}$ не обязательно должно быть одномерным. Оно может быть и многомерным; в этом случае знак P представляет несколько пустых мест. Однако все сказанное выше полностью сохраняет свое значение.

От "поверхности в себе" перейдем к поверхности в пространстве: множество $\mathfrak{F}$ мы вкладываем в пространство, указывая для каждой точки поверхности P ее место в пространстве с помощью трех (определяемых чисто арифметически) функций

$$\xi = \xi(P),$$

$$\eta = \eta(P),$$

$$\zeta = \zeta(P),$$

которые вещественнозначны и непрерывны для всех P . [Если мы рассмат-

риваем только окрестности некоторой точки, т.е. исследуем поверхность, как принято говорить, только "в малом", то с помощью приведенного выше условия 2) мы непосредственно получаем непрерывное параметрическое представление поверхности в обычной форме (9).]

Сведение непрерывной связности к понятию окрестности страдает одним недостатком: установление n -й окрестности с помощью отношения $U(P, Q; n)$ влечет за собой много такого, что не имеет места при задании непрерывной связности. Например, на плоскости мы можем выбрать в качестве n -й окрестности некоторой точки внутренность круга радиуса $1/n$ с центром в этой точке, но ничто не мешает нам выбрать и внутренность круга радиуса $1/2^n$; кроме того, вместо окрестностей, имеющих форму круга, можно рассматривать также окрестности эллиптические, квадратные или имеющие какую-нибудь другую форму. Мы вынуждены мириться с этим произволом (равно как и с произволом в выборе предметов, играющих роль точек поверхности), поскольку не располагаем еще сколько-нибудь удовлетворительным ответом на вопрос, как ясно и четко преодолеть полосу, отделяющую то, что нам непосредственно дано, от принадлежащего математике. (Неустранимый разрыв между истинным континуумом и некоторым множеством изолированных элементов всегда где-нибудь да проявится.)

Укажем дополнительно те условия, что при которых две аналитические поверхности в пространстве совпадают, т.е. представляют в наглядном смысле одну и ту же поверхность в пространстве.

Пусть дана поверхность $\mathfrak{F}$, вложенная в пространство с помощью функций

$$\xi(P), \eta(P), \zeta(P),$$

и другая поверхность $\mathfrak{F}^*$, точкам которой их место в пространстве указывают функции

$$\xi^*(P), \eta^*(P), \zeta^*(P),$$

и пусть, далее, имеются две взаимно непрерывные *) функции

$$P^* = F^*(P),$$

$$P = F(P^*), \tag{10}$$

осуществляющие такое обратимо-однозначное отображение каждого из подмножеств $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^*$ на другое, что для двух точек P, P^* , связанных между собой преобразованиями (10), всегда справедливо

$$\xi(P) = \xi^*(P^*),$$

$$\eta(P) = \eta^*(P^*),$$

$$\zeta(P) = \zeta^*(P^*);$$

тогда мы говорим, что обе поверхности в пространстве совпадают под действием (10).

*) Что означает термин "непрерывная", в данном случае ясно без пояснений.

На этом мы заканчиваем наше изложение. Мы видели, что построение анализа на наших принципах вполне возможно, и осуществили его первые стадии так далеко, как нам казалось необходимым для того, чтобы во всей полноте охватить проблему Пифагора. Если нас упрекнул в том, что логические принципы, которые нам пришлось привлечь для точного определения понятия действительного числа, не содержатся в наглядном представлении о континууме, то мы ответим: то, что мы обнаруживаем в наглядном континууме, и мир математических понятий друг другу чужды, и требование их полного совпадения должно быть отвергнуто как абсурдное. Тем не менее те абстрактные схемы, которые доставляет нам математика, необходимо, чтобы сделать возможной точную науку о таких предметных областях, в которых играют свою роль континуумы.

Ч А С Т Ь ІІ

РАСКРЫТИЕ МИРА

ИНЕРЦИЯ И КОСМОС. ДИАЛОГ

I. И все-таки она вертится!

Петр. Дорогой друг! Когда мы вчера вечером встретились после долгой разлуки, я то и дело вспоминал в нашей беседе далекий 1915 год, когда мы вместе с тобой усердно штудировали теорию относительности, по-дружески делясь восторгами и предаваясь мечтам о будущем. Тогда мы ничуть не сомневались, что у нас в руках мировой закон, позволяющий дать исчерпывающее объяснение всем явлениям без исключения! С тех пор мне довелось выслушать немало критических замечаний, и я стал "мудрее". Однако меня горько поразило, что ты, как мне кажется, отвергаешь даже ту основную идею, которая, как и в прежние времена, представляется мне ядром нового учения. Я бы хотел сегодня подробно поговорить с тобой о том, почему ты не веришь больше, что *(М) инерция тела обусловлена действием на него всех масс, находящихся во Вселенной!* О Саул, Саул! Как можешь ты отречься от столь очевидной истины! Возьми, например, маятник Фуко. По мнению Ньютона, плоскость колебаний маятника остается неподвижной в абсолютном пространстве; неподвижные звезды также находятся в абсолютном пространстве в состоянии, близком к состоянию покоя. Поэтому плоскость колебаний маятника следует за неподвижными звездами и поворачивается относительно Земли. Но Эйнштейн объявил: существуют только относительные движения; роль абсолютного пространства как посредника столь же сомнительна, сколь и излишня. Не призрак этого пространства, а реально существующие гигантские массы неподвижных звезд всего Космоса удерживают или увлекают за собой плоскость колебаний маятника. Земля сплюснута потому, что она вращается — не абсолютно, а относительно неподвижных звезд. Если ты отвергаешь подобную точку зрения, то я вообще не знаю, что остается от общей теории относительности.

Павел. И все же вчера вечером ты не ослышался — я действительно не могу больше разделять высказанное тобой только что убеждение; и если это — скала, на которой зиждется храм теории относительности, то я, о Петр, и в самом деле стал отступником. Но чтобы умирить твою скорбь по поводу моей ереси, признаюсь тебе со всей прямоотой: если бы предложенное Махом объяснение действительно удалось довести до конца, то

оно обладало бы в моих глазах необычайной привлекательностью; оно дает простое, наглядное и убедительное решение проблемы движения. Нет ни малейшего сомнения и в том, что — наряду с равенством гравитационной и инертной массы — оно послужило для Эйнштейна важнейшим мотивом при построении общей теории относительности. Наконец, я согласен с тобой и в том, что ядро теории надлежит искать в физическом содержании конкретных утверждений, а не в каком-нибудь формально-математическом принципе, например в равноправии всех систем координат. Этот принцип, давший, к сожалению, название всей теории, по существу напрочь лишен содержания, потому что законы природы, как бы они ни были выражены, всегда допускают формулировку, "инвариантную относительно произвольных преобразований координат". Ничего не говорит и кинематический принцип относительности движения, если не присоединить к нему физического предположения о том, что *(С) все явления причинно однозначно определены материей, т.е. зарядом, массой и состоянием движения элементарных составных частей материи*. Лишь на основе упомянутого выше принципа выглядит безосновательным и невозможным, чтобы какая-то масса воды, на которую извне не действуют никакие силы, в стационарном состоянии принимала то форму ("покоящегося") шара, то форму ("вращающегося") эллипсоида.

Петр. Я рад, что ты так кратко и ясно выразил основополагающее утверждение С; с него и в самом деле берет начало все наше каузальное физическое мышление. Никто не в состоянии воздействовать на некоторую часть электромагнитного поля, не "схватив" материю, создающую поле. Но как ты можешь сомневаться в том, что инертность тел порождается космическими массами?

Павел. Ты прав. Со своей стороны, я не могу отстаивать С, поскольку а priori вижу невыполнимость М. Именно, я утверждаю, что *(А) согласно общей теории относительности понятие относительного движения нескольких раздельно расположенных тел столь же шатко, сколь и понятие абсолютного движения одного-единственного тела*.

Петр. Как? Ты, стало быть, отрицаешь, что неподвижные звезды обращаются вокруг Земли, и полагаешь, будто с тем же основанием можно утверждать, что они покоятся? Но разве мы не видим каждую ночь, как вращается звездное небо?

Павел. То, что мы воспринимаем благодаря нашему органу зрения, — это вращение не звезд, а "звездного компаса"; в том месте, где мы находимся, его образуют направления лучей света, испускаемых звездами и доходящих в момент наблюдения до наших глаз. И в этом существенное различие, ибо между звездами и моими глазами находится "метрическое поле", определяющее распространение световых лучей и способное, согласно теории относительности, изменяться так же, как электромагнитное поле. Направление, в котором мы видим звезду, зависит от метрического поля ничуть не меньше, чем от местоположения самой звезды.

Если бы пространство, в соответствии с представлениями старой теории света, было сплошь заполнено некоей субстанцией — эфиром, то вопрос о том, движется ли в данный момент тело относительно того эфира, кото-

рый пребывает в том же месте, что и тело, или не движется, имел бы, конечно, вполне ясный смысл. В этом случае сравнивались бы друг с другом состояния движений двух субстанций, находящихся в одном и том же месте. Но как можно в общей теории относительности сравнивать друг с другом состояние движения двух тел, *находящихся в различных местах*? Во времена Маха, когда тела, образующие систему отсчета, еще были твердыми, такое было возможно; тогда остров материи, каким является наша Земля, как твердое тело, в котором распределение масс раз и навсегда установлено с помощью евклидовой геометрии, можно было мысленно экстраполировать на все пространство и затем констатировать, например, что Солнце движется относительно него. Но в руках Эйнштейна система координат размягчилась настолько (ведь сам Эйнштейн говорит иногда о некоем "моллюске отсчета"), что обрела способность двигаться вместе со всеми телами мира; и как бы тела ни двигались, ты можешь одним махом "привести их с помощью преобразования в состояние покоя". Представь себе четырехмерный мир в виде пластилиновой массы, пронизанной нитями, которые не пересекаются, а в остальном расположены совершенно произвольно, — мировыми линиями частиц материи; ты можешь подвергнуть пластилин непрерывной деформации так, чтобы не одна, а все нити стали вертикальными прямыми. Если я истолкую вертикальную ось как ось времени, то это будет означать, что каждое тело застывает на своем месте в пространстве. Примени теперь это к неподвижным звездам и представь себе, что деформация затронула метрическое поле — проходящий в пластилине конус распространения света; тогда Земля и все неподвижные звезды будут покоиться относительно воплощаемой пластилином системы отсчета, звездный же компас — вращаться относительно Земли именно так, как мы это наблюдаем.

Петр (после небольшого молчания). Да... Против этого мне трудно привести сколько-нибудь обоснованное возражение. Ведь твоя идея, собственно говоря, лежит как на ладони. Итак, ты приходишь к выводу, что рассматриваемое вне зависимости от метрического поля относительное движение различных тел в мире есть чистое ничто; и если бы принцип С был верен, то все происходящее в мире зависело бы только от заряда и массы всех частиц материи и должно было бы однозначно определяться ими. Но поскольку такое утверждение очевидным образом нелепо — здесь я, пожалуй, имею право продолжить твою мысль, — от принципа причинности придется отказаться. В частности, сплюснутость Земли ты не можешь объяснить ни ее вращением относительно неподвижных звезд, как это делали Мах и Эйнштейн, ни абсолютным вращением, как это делал Ньютон.

Пока я ничего не могу противопоставить такому радикализму... но мое чутье противится отказу от позитивного и удовлетворительного взгляда на инерцию как на обусловленную распределением масс во Вселенной в пользу твоей общей и абстрактной идеи. Ты отрицаешь, что этот взгляд может быть проведен последовательно; но разве Эйнштейн уже не сделал то, что ты отрицаешь, в той самой работе*), в которой он расширил свои

*) Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. — 1917. — S. 142.

первоначальные законы гравитации, включив в них "космологический член"? Перед лицом свершившегося факта любое доказательство его невозможности утрачивает силу.

Павел. Я смогу возразить тебе лишь в том случае, если мы сначала совместными усилиями заложим фундамент, от которого будем исходить в своих рассуждениях. Мне кажется, что конкретное физическое содержание теории относительности можно рассматривать, не имея определенной точки зрения на причинное отношение между космическими массами и инерцией. Со времен Галилея и Ньютона мы усматриваем в движении тела борьбу между двумя тенденциями — *инерцией* и *силой*. Согласно старым представлениям тенденция к сохранению состояния движения — "управляющее воздействие" (*Führung*), которое проявляется в *естественном движении тела по инерции*, вытекает из формально-геометрической структуры мира (равномерное движение по прямой), присущей ему раз и навсегда, независимой и не испытывающей влияния со стороны материальных процессов. Эйнштейн отбросил эти представления: то, что оказывает столь мощное воздействие, как инерция (например, когда при столкновении двух поездов она в противоборстве с молекулярными силами кромсает на части вагоны), должно быть чем-то реальным, в свою очередь испытывающим воздействие со стороны материи. Эйнштейн осознал далее, что в гравитационных явлениях проявляется изменчивость "управляющего поля" (*Führungsfeld*) и его зависимость от материи. Дуализм управления (*Führung*) и силы, таким образом, сохраняется; но (*G*) *управление есть не что иное, как физическое поле состояний* (аналогичное электромагнитному), *взаимодействующее с материей. Гравитация относится к управлению, а не к силе*; лишь на этом пути становится до конца понятной причина равенства гравитационной и инертной масс.

Петр. А управляющее поле не без произвола допускает разложение на однородную постоянную составляющую — инерцию Галилея — и на переменную составляющую — гравитацию Ньютона; существование жесткой геометрической структуры отвергается.

Да, с описанием такого рода я полностью согласен. Предложенный тобой термин "управляющее поле" для обозначения установленного Эйнштейном единства инерции и гравитации мне также нравится, так как он хорошо передает физическую роль и реальный характер того, что имеется в виду. Если, несмотря на единую природу управляющего поля, *in* *grah*i удастся разложить его — по крайней мере приближенно и для ограниченной области — на однородный фон галилеевой инерции и некоторую переменную, чрезвычайно слабую по сравнению с фоном флуктуацию — поле силы тяжести, то ситуация складывается примерно такая же, с какой имеет дело геодезист, конструирующий реальную поверхность Земли со всеми морскими бассейнами, утесами, долинами и горами путем построения идеальной поверхности — геоида, к которой он затем привязывает все малые выпуклости и углубления. Из единой природы управляющего поля однако следует, что оно как целое должно корениться в материи. Суть дела ты можешь лучше всего представить, используя в качестве аналога электрическое поле. Между пластинами заряженного конденсатора электрическое

поле создается электронами, сосредоточенными на пластинах; в целом это поле однородно и искажается лишь в окрестности отдельных электронов, вздымаясь подобно крохотным горным пикам над широко расстилающейся плоской поверхностью. Но заряды электронов создают не только отклонения атомных размеров в окрестности каждого электрона, но и однородное поле между пластинами, которое возникает вследствие наложения полей, создаваемых отдельными электронами. Точно так же и инерция порождается совместным действием всех масс в мире, но вблизи каждой звезды однородность управляющего поля нарушается, и это выражается в гравитационном притяжении звезды и существенно определяется только данной звездой.

Павел. Твоя аналогия подкупает; к ней я еще вернусь. А пока мне хотелось бы сказать следующее. Перейти от старого взгляда на вещи к новому (G) означает *заменить геометрическое различие между равномерным и равноускоренным движением динамическим различием между управлением и силой*. Противники Эйнштейна задавали вопрос: почему при столкновении в обломки превращается поезд, а не колокольня, мимо которой он мчится, — ведь колокольня обладает относительно поезда таким же количеством движения (*Bewegungsruck*), каким поезд обладает относительно колокольни? Ответ, подсказываемый здравым смыслом, гласит: потому что поезд сходит со своей траектории в направляющем поле, а колокольня остается на своей орбите. Можно проследить до мельчайших подробностей, каким образом в борьбе между управлением и силой вагоны превращаются в груды искореженного железа. В том же динамическом смысле вращается и Земля; она вращается относительно помещенного в ее центре "инерциального компаса", следующего за управляющим полем.

Уравнения теории гравитации Эйнштейна обладают стационарным решением, соответствующим равномерно вращающейся массе жидкости и создаваемому ею гравитационному полю; ты знаешь сам, как подходить к этой задаче. Ее решение отлично от статического поля покоящегося шара жидкости: вращаясь, масса жидкости не принимает форму шара, а сплющивается. Что означает в данном случае вращение? Оно имеет именно тот динамический смысл, о котором мы только что говорили.

До тех пор пока мы игнорируем управляющее поле, нельзя говорить ни об абсолютном, ни об относительном движении; лишь с учетом управляющего поля понятие движения становится содержательным. Теория относительности, если понимать ее правильно, отнюдь не искореняет абсолютное движение в пользу относительного, а уничтожает кинематическое понятие движения и заменяет его динамическим. Мировоззрение, за которое боролся Галилей, при таком подходе не подвергается критическому анализу — оно обретает конкретное истолкование.

Петр. У меня нет возражений против твоей общей позиции. Только ты считаешь, что материю и управляющее поле надлежит рассматривать в отдельности; но если поле создано материей, то *волей-неволей* появляются неподвижные звезды, которые и вызывают сплюснутость Земли.

Павел. Но именно это я и отвергаю! Вот как я рассуждаю. То, что я до сих пор говорил и кратко сформулировал в двух утверждениях G, кото-

рые только относятся к физике, лежит в основе реальных исследований проблем теории относительности. Но далеко выходящий за эти рамки принцип Маха M , согласно которому неподвижные звезды с таинственной силой должны вмешиваться в земные события, до сих пор остается чисто умозрительным, имеет лишь космологический смысл и поэтому может приобрести значение для естествознания только после того, как для астрономических наблюдений станут доступны не отдельные звездные острова, а мир в целом. Мы могли бы вообще не затрагивать этот вопрос, если бы я не был вынужден признать, что перспектива построить картину мира в целом на основе теории относительности весьма заманчива. Проблема представляется мне важной, и я готов изложить свои соображения.

II. Космология

Петр. Позволь мне привести известный результат Тирринга *). На тело k , покоящееся в центре громадного быстро вращающегося полого шара H (заменяющего сферу неподвижных звезд), согласно законам гравитации Эйнштейна действует сила, аналогичная центробежной силе, которая действовала бы на тело k , если бы оно вращалось, а полый шар H покоился бы. Разумеется, интенсивность этой силы при реализуемых соотношениях гораздо меньше: центробежная сила входит с очень малым множителем, равным отношению гравитационного радиуса полого шара к его геометрическому радиусу. Гравитационный радиус массы M , если она выражена в граммах, составляет $1,87 \cdot 10^{-27} M$ сантиметров; например, гравитационный радиус Земли равен 0,5 сантиметрам, а гравитационный радиус Солнца 1,5 километрам. По Маху, центробежную силу, сплюснутость Земли можно объяснить действием обращающегося вокруг покоящейся Земли звездного неба, если предположить, что среднее расстояние до звезд сравнимо с гравитационным радиусом их общей массы.

Павел. Но в схеме Тирринга на покоящееся тело k помимо центробежной силы действует еще одна сила примерно той же интенсивности, но направленная не от оси вращения, а параллельно ей. Кроме того, как ты сам упомянул, центробежная сила может быть правильно учтена лишь тогда, когда радиус и масса полого шара H связаны точно определенным соотношением. Отсюда ясно, что одно дело, когда k покоится, а H вращается, и другое, когда полый шар H покоится, а тело k вращается в противоположную сторону с той же угловой скоростью, — вопреки принципу относительности движения! При моем динамическом подходе различие между обоими случаями понять нетрудно; и в самом деле, рассмотрение формул Тирринга показывает, что в первом случае материя, сосредоточенная в теле k , следует, а материя, сосредоточенная в полой шаре H , не следует за управляющим полем, тогда как во втором случае все обстоит наоборот.

Петр. Твое замечание проясняет кое-что и для меня. Но твоё возражение ничем мне не угрожает. Тирринг оперирует с бесконечным простран-

*) Phys. Z. — 1918. — Bd 19. — S. 33; 1921. — Bd 22. — S. 29.

ством и полученное им метрическое поле отличается тем, что по мере удаления в бесконечность все точнее соответствует однородному состоянию, описываемому евклидовой геометрией. В силу этого такое бесконечно удаленное окаймление (Saum) пространства действует здесь как некий материальный очаг, создающий поле. Это становится особенно ясным, если воспользоваться аналогией с электростатическим полем. Такое поле создают покоящиеся заряды; подлинное распределение его интенсивности удастся однозначно вывести из законов близкого действия, лишь присоединив условие, согласно которому поле на бесконечности спадает до нуля. Пространственный горизонт действует подобно бесконечно большому полюму металлическому шару. В случае электрического поля так же, как и в случае управляющего поля, однородный фон — "нулевой уровень" поля — следует относить за счет этого бесконечного удаленного пространственного горизонта; именно там таится чудовищная мощь, оказывающая успокоительное действие на происходящие в мире события. Горизонт должен исчезнуть, если мы хотим по-настоящему провести принцип Маха: трехмерное пространство не может иметь никакого окаймления, оно должно быть *замкнутым* (наподобие сферической поверхности в случае двух измерений). И вот Эйнштейн, вводя в свой первоначальный закон гравитации незначительное изменение — так называемый космологический член, действительно смог показать*), что в состоянии равновесия наш мир замкнут. Его законы требуют наличия материи; это означает, что без материи никакое управляющее поле вообще невозможно. Материя распределена равномерно и покоится. Гравитационный радиус всей находящейся в мире массы сравним с геометрическим радиусом мира; по-видимому, случайно наличествующая совокупная масса определяет кривизну и тем самым размеры мира. Здесь ты видишь прямую связь с исследованием Тирринга, и здесь, я считаю, программа Маха реализована с полнотой, не оставляющей, в принципе, желать лучшего. Разумеется, обрисованное мною состояние равновесия следует понимать макроскопически. Отдельные звезды движутся так же, как молекулы газа в замкнутом покоящемся ящике: ведь если рассматривать газ на макроскопическом уровне, то можно сказать, что он покоится и равномерно распределен внутри ящика. Тем самым одновременно становится понятным тот замечательный и действительно требующий объяснения факт, что скорости звезд всюду очень малы по сравнению со скоростью света¹. Отпадают и парадоксы, возникающие в связи с астрономическими следствиями бесконечной протяженности пространства**).

Павел. Откровенно говоря, эта космическая теория никак не позволяет мне мысленно нарисовать ясную и детально проработанную картину того, *каким образом* материя создает это управляющее поле.

*) Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — 1917. — S. 142.

**) Эти парадоксы были в частности, рассмотрены Зеелигером (Seeliger // *Astronomische Nachrichten.* — 1895, — Bd 137. — № 3273; *Münchener Berichte.* — 1896. — Bd 26). Совсем в ином направлении пытались найти решение еще Ламберт (Lambert), а после него Фурнье д'Альбе (Fournier d'Albe. *Two New Worlds.* — London, 1907) и Иларье (Charlier C.L.L. // *Arkiv für Matem. Astr. och Fysik.* — 1908. — V. 4. — № 42). Cp. *Naturwissenschaften.* — 1922. — Bd 10. — S. 481.

Петр. Возможно, потому, что здесь необходимо добавить следующее: даже в обычной теории, если в ней отсутствует гравитационный член, приближение одного тела к другому оказывает по индукции действие на инертную массу. В статическом гравитационном поле скорость света f связана с гравитационным потенциалом Φ соотношением

$$f = c + \frac{\Phi}{c},$$

в котором постоянная c , как это следует из самого соотношения, означает скорость света вдали от гравитирующих масс. Каждому телу соответствует постоянная, определяемая только его внутренним состоянием, — "множитель массы" m_0 ; однако энергия E тела и его инертная масса M (отношение импульса к скорости) зависят от гравитационного потенциала, определяемого положением тела, по формулам

$$E = m_0 f, \quad M = m_0 f.$$

Если переместить тело в область меньшего гравитационного потенциала, например, переставить со стола на пол, то энергия тела уменьшится на величину той работы, которую необходимо совершить, чтобы поднять тело с пола на стол. По мере приближения тела к центру Земли его энергия убывает, но пропорционально убыли энергии возрастает его инертная масса. Это с достаточной определенностью указывает на то, что инерцию тела можно считать полностью обусловленной действием по индукции космических масс, создающих гравитацию.

Павел. Если бы ты только мог сказать, как можно это указание превратить в подлинное объяснение! Чем больше я размышляю над этим, тем шире кажется мне та пропасть, через которую надо перебросить мост. По существу эта проблема сдвинулась ненамного: место инертной массы занял множитель массы m_0 . Он остается характеристической постоянной, присущей только данному телу, и не подвержен никаким воздействиям по индукции; не видно никаких подходов, которые позволили бы представить, каким образом он возникает в результате взаимодействия всех масс Вселенной. Трудность, связанная с пространственным горизонтом, устраняется, конечно, при переходе к замкнутому пространству; но трудность, которая кроется повсюду внутри мирового континуума — в его моллюскоподобной податливости, деформируемости (вспомни о моем утверждении А!), остается по-прежнему. Ограничение статическими соотношениями физически неясно, даже сомнительно. Ты спрашиваешь, почему покоящийся точечный заряд создает вокруг себя электростатическое поле F , интенсивность которого убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. Законы близкого действия электростатического поля этого не объясняют. Прими же теперь во внимание время и проанализируй следующий процесс: от некоторого нейтрального материнского тела отрывается небольшой заряд и в момент времени t вдали от тела приходит в состояние покоя. Если теперь с момента t прошел один час, то вокруг заряда в радиусе одного светового часа (около 10^{14} ч) устанавливается то самое поле F , о котором я только что говорил. Это возникновение поля

F с необходимостью следует из законов переменного электромагнитного поля, если принять дополнительное предположение о том, что в пространстве до отрыва заряда не было никакого поля. Стало быть, дело не в том, что данное поле определяется бесконечно удаленным пространственным горизонтом, — поле проистекает из связи с окаймлением мира в бесконечно далеком прошлом.

Если не ограничиваться статикой, то, как показал де Ситтер, законы гравитации, расширенные путем введения космологического члена, допускают простое решение, при котором (в противоположность утверждению Эйнштейна) мир не содержит никаких масс и его метрическое поле полностью однородно*). Чтобы воспользоваться графическим представлением, я вычеркну два пространственных измерения, отчего мир станет не четырех-, а всего лишь двумерным. Изображения, которые я строю, лежат в трехмерном пространстве R с такой метрикой, какую предписывает миру специальная теория относительности; если осью времени служит вертикаль, то в прямоугольном треугольнике, один из катетов которого расположен по горизонтالي, а другой по вертикали, квадрат гипотенузы равен *разности* квадратов катетов. Относительно состояния мира в целом я буду различать три гипотезы.

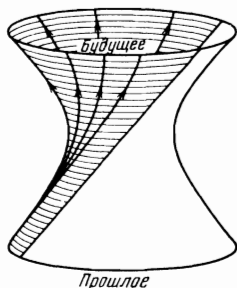
I (*Простейшая космология*). По своим метрическим свойствам мир совпадает с некоторой вертикальной плоскостью в пространстве R . Звезды распределены бесконечно редко и покоятся; стало быть, их мировые линии — вертикальные прямые. Световой конус с вершиной в точке P образуют две проходящие через P прямые, составляющие с вертикалью угол 45° . Это — нормальное состояние, которое лишь незначительно нарушается взаимодействием небесных тел.

II (*Эйнштейн*). По своей метрической структуре мир точно представим прямым круговым цилиндром с вертикальной осью в нашем пространстве R . Мировые линии звезд, как и прежде, — вертикальные прямые, но плотность масс не бесконечно мала, а вполне определенным образом зависит от радиуса поперечного сечения цилиндра. Световой конус состоит из двух винтовых линий, навитых на цилиндр и пересекающих его образующие под углом 45° .

III. Геометрическое место всех точек пространства R , находящихся на заданном (вещественном) расстоянии от центра O , имеет вид не сферы, а однополостного гиперболоида с вертикальной осью; это и есть упоминавшееся выше решение де Ситтера. Световой конус состоит из двух прямолинейных образующих гиперболоида, проходящих через начало координат, звезды распределены равномерно с бесконечно малой плотностью. Плоскости, проходящие через заданную образующую l асимптотического конуса (с вершиной в точке O и углом раствора 90°), высекают на гиперболоиде два семейства геодезических линий; гиперболы одного семейства сходятся вниз (в прошлом) к общей асимптоте l и расхо-

*) Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. London. — Nov. 1917. Об этом см.: Weyl H. Raum, Zeit, Materie. — 5. Aufl. — Berlin, 1923. — S. 322, а также Phys. Z. — 1923. — Bd. 24. — S. 230.

дятся веерообразно вверх по всему гиперboloиду; второе семейство возникает из первого при перестановке местами верха и низа. Мировые линии первого семейства — это мировые линии звезд в невозмущенном нормальном состоянии, принадлежащих извечно существующей звездной системе с причинными связями.



Петр. Если принцип Маха не удастся провести и с помощью космологического члена, то я считаю, что он вообще бесполезен, и стою за возвращение к простейшей космологии.

Павел. Все-таки мне кажется, что это опрометчиво. Плоскость I обладает одним-единственным связным бесконечно удаленным окаймлением; тут пространство и время, бесконечно далекое прошлое и бесконечно далекое будущее не могут быть отделены друг от друга. Поэтому не существует разумных оснований, которые бы запрещали мировой линии тела замыкаться либо точно, либо приближенно; однако это привело бы к ужаснейшим последствиям — появлению двойников и встречам с самим собой. Напротив, цилиндр II так же, как и гиперboloид III, обладает двумя несвязными окаймлениями; нижним (бесконечно далекое прошлое) и верхним (бесконечно далекое будущее); к этому по существу и сводится содержание утверждения о том, что наш мир замкнут в пространстве: он простирается "из вечности в вечность". И ради такого окаймления мира с двух сторон я сохраняю космологический член. На эйнштейновском цилиндре световой конус имеет бесконечно много самопересечений. Это означает, что наблюдатель должен видеть бесконечно много изображений одной и той же звезды; между состояниями звезд, порождающими два последовательных изображения, проходит целый зон — время, которое требуется свету, чтобы совершить один оборот вокруг мировой сферы; восприятие того, что происходит в данный момент времени, заменяется призраками далекого прошлого. Напротив, гиперboloид де Ситтера сочетает в себе достоинства обоих подходов: окаймление с двух сторон — во-первых, со стороны прошлого и будущего и, во-вторых, светового конуса без самопересечений. В этом случае малые скорости звезд объясняются не "термодинамическим" выравниванием, наступающим постепенно, на протяжении зон, а общностью происхождения. Астрономические факты свидетельствуют в пользу такого представления.

Если принять гипотезу III, то нам должно казаться, что все звезды в некоторой звездной системе разлетаются по радиальным направлениям от любой произвольно выбранной звезды; для наблюдателя, находящегося на центральной звезде, спектры других звезд будут сдвинуты к красному концу, причем тем сильнее, чем дальше находится звезда. И вот в спектрах спиральных туманностей, — по-видимому, наиболее удаленных от нас небесных объектов — за редким исключением спектральные линии обладают сильным красным смещением*). Если бы его причиной действительно была общая тенденция разлета материи — тенденция, которой на языке формул соответствует космологический член в уравнениях гравитации, — то из гипотетических определений параллаксов спиральных туманностей мы получили бы радиус мира 10^{27} см².

Петр. Светящиеся призраки звезд в Космосе II слишком сильно размыты для того, чтобы их можно было воспринимать.

Павел. Но и диффузное излучение, заполняющее Вселенную, должно было бы быть очень сильным: звезды в среднем должны испускать столько же света, сколько и поглощать. Излучение должно находиться в таком же статистическом равновесии, как и движение звезд.

Петр. Судя по всему, что ты сказал, ты веришь в некую безраздельную власть управляющего поля, не зависящего от материи. Вдали от какой-либо материи или когда вся материя исчезает — ведь в этом и состоит твой взгляд? — господствует то самое однородное состояние *Z*, которому соответствует гиперболоид III (или, в предельном случае, плоскость I). Это хорошо согласуется с опытом, но, как кажется, противоречит принципу непрерывности. Дело в том, что хотя состояние *Z* качественно вполне определено, реализовать его в мировом континууме можно бесконечно многими способами, подобно тому, как в обычной геометрии все прямые качественно ничем не различаются, однако их положение в пространстве может варьировать до бесконечности. Какие же из этих потенциальных возможностей осуществимы, если имеющуюся материю я непрерывно устремлю к нулю? Мне кажется, что в случае исчезающей материи управляющее поле должно становиться *неопределенным*.

Павел. Не совершаешь ли ты такую же ошибку, какую совершил в 1914 г. Эйнштейн**), когда, исходя из принципа причинности, он пришел к выводу о невозможности общей теории относительности? Ибо, рассуждал он, если законы природы инвариантны относительно произвольных преобразований координат, то, выбрав какое-нибудь одно решение и подвергнув его преобразованиям, я получу бесконечно много новых решений. Если я разделю мир на две части трехмерным сечением, ограничивающим

*) E d d i n g t o n . Mathematical Theory of Relativity. — Cambridge, 1923. — P. 162. Читатель этого журнала, конечно, знает из регулярно публикуемых "Астрономических сообщений", сколь мало еще ясности относительно положения спиральных туманностей. Об одной иной гипотезе, призванной объяснить красное смещение в спектрах спиральных туманностей (она была выдвинута Линдеманом (Lindemann)), см. Naturwissenschaften — 1923. — Bd. 11. — S. 961.

**) Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — 1914. — S. 1067.

одно из двух окаймлений от другого, и воспользуюсь только такими преобразованиями, которые сохраняют неизменной "нижнюю" половину мира, то все новые решения в нижней половине окажутся совпадающими с исходным решением. Эйнштейн не заметил, что все эти решения и в верхней половине объективно соответствуют одной и той же последовательности состояний и что различие могло бы быть только в том случае, если бы четырехмерный мир был *стоячей средой*, в которой каким-то образом запечатлеваются следы материальных процессов. И лишь в этом случае возможные варианты реализации, о которых ты говоришь, можно было бы считать различными. Но теория относительности не без твоего одобрения напрочь отвергает такого рода стоячую среду.

Если ты считаешь, что вдали от всех материальных масс управляющее поле с необходимостью неопределенно, то, рассуждая последовательно, ты должен принять такой же постулат и относительно электромагнитного поля. Но по общепринятому мнению с исчезновением материи напряженность электромагнитного поля становится равной нулю; и это отнюдь не означает, что вообще "никакого поля нет", — просто оно находится в определенном "состоянии покоя", из которого может постоянно переходить (*einpassen*) во все другие возможные состояния. Позволительно ли произнести тут слово "эфир"? Под последним я понимаю не некую субстанцию, в гипотетические движения которой хотелось бы проникнуть, — состояние эфира для меня есть доминирующее метрическое и электромагнитное поле. В теории Вейля, а также в недавно опубликованных Эддингтоном и Эйнштейном набросках "аффинной" теории поля электрическое поле оказывается включенным в метрическое. Единственно возможное *однородное* состояние метрического поля — это гиперболоид III, на котором напряженность электромагнитного поля всюду обращается в нуль. Из этого состояния покоя — покой означает в данном случае однородность — эфир порождается материей. Эфир и материя связаны не односторонним причинным отношением между тем, что порождает возмущение, и тем, что испытывает возмущение, а отношением взаимодействия. Наиболее наглядный способ лишить силы твое возражение, основанное на принципе непрерывности, — это следующая аналогия: эфир можно сравнить с морской поверхностью, а материю — с бороздящими море судами. Различные возможности, о которых ты говоришь, состоят здесь в том, что одна и та же форма поверхности моря, одно и то же качественное состояние материально реализуемо бесконечно многими способами; а именно, "материальное состояние" считается вполне определенным лишь тогда, когда относительно каждой частицы жидкости установлено, в каком месте морского бассейна она находится. Заданию системы координат в эфире, соотносению со стоячей средой соответствует в данном случае произвольный способ различения отдельных однородных частиц воды (например, нумерация частиц). Если вечером, когда все суда находятся в гавани, вода снова приходит в состояние покоя, то это состояние качественно такое же, что и утром перед выходом судов в море: поверхность моря представляет собой гладкую "однородную" плоскость. Но крошечное за этим внешним сходством материальное состояние может

быть совершенно иным. Считать реальное положение всех частиц воды в бассейне моря, возмущенном судами, складывающимся из раз и навсегда закрепленного состояния покоя и отклонения, вызванного судами (как это было принято в случае управляющего поля до Эйнштейна), недопустимо. Это сравнение четко показывает, где я провожу границу между приемлемыми новыми идеями, которые принесла нам общая теория относительности, и таким ее истолкованием, которое бьет мимо цели. Рушится — и этого я не могу отрицать — обещанное общей теорией относительности радикальное решение проблемы движения, вокруг которого главным образом развернулась борьба при широком обсуждении новой теории. Перестанем же упиваться переворотом, произведенным общей теорией относительности, и будем радоваться спокойному свету, который ныне она проливает на многое, позволяя более проникновенно понять тонкие, но отнюдь не маловажные черты структуры мира!

В том, что во взаимодействии материи и эфира имеется *огромный перевес на стороне эфира*, нас убеждает почти полное совпадение инерциального и звездного компаса. Если вспомнить, как на гиперболоиде де Ситтера мировые линии звездной системы с общей асимптотой возникают из бесконечного прошлого, то можно сказать, что мир рожден из вечного покоя "отцом-эфиром", но возмущен "духом беспокойства" (Гёльдерлин), таящимся в активности материи (*im Agens der Materie*), в "лоне Земли и людей", и он никогда более не обретает покоя.

Петр. Я больше не буду порицать тебя как отступника. Ибо я все явственнее чувствую, что ты не поступил с физическим содержанием теории относительности, а твои мысли о Космосе по-прежнему выдержаны в ее духе. Я тщательно обдумываю твои аргументы; но независимо от того, соглашусь я с тобой или нет, мне доставляет радость вновь считать тебя своим единомышленником.

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КАК СТИМУЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Различные математики придерживаются различных взглядов на то, какое влияние оказывает физическая теория относительности на исследования в области чистой математики. Тем не менее вряд ли кто-нибудь в наше время согласится с Э. Штуди — современником Феликса Клейна, с которым он враждовал всю жизнь, — математиком, получившим в своей области замечательные результаты, и человеком, обладавшим необузданным темпераментом, который в своей книге, вышедшей в 1923 г., бросил авторам работ по теории относительности и тензорному анализу тяжкий упрек в том, что по их вине пришла в запустение богатая область культуры (*ein reiches Kulturgebiet des Verwahrlosung einheimgegeben zu haben*), а именно алгебраическая теория инвариантов. Гнев Штуди был вызван тем, что физики, занимавшиеся теорией относительности, в большей или меньшей степени пренебрегали символическим методом и классическими обозначениями теории инвариантов. К проблеме, затронутой Штуди, я еще вернусь. Как бы то ни было, я вряд ли стоял бы здесь и осмелился гово-

речь на тему нашего заседания, если бы не был убежден, что на протяжении последних десятилетий теория относительности оказывала и продолжает оказывать скорее благотворное, чем опустошительное воздействие на развитие нескольких разделов математики, включая теорию инвариантов. Высказанная мной точка зрения вряд ли нуждается в подтверждении: факты говорят сами за себя на языке, не оставляющем ни малейших сомнений.

Проблема относительности имеет первостепенное значение в геометрии и алгебре, что было давно осознано математиками. Она занимала важное место в философско-математических идеях Лейбница. В XIX столетии в качестве адекватного понятия, позволяющего разрабатывать эту проблему, было предложено и развито понятие группы преобразований. Предположим, что вам задано множество каких-либо объектов, которые мы можем назвать точками. Преобразования, или взаимно однозначные отображения, этого множества точек в себя, оставляющие неизменным все объективно важное для точек, образуют группу — группу автоморфизмов. Если точками каким-то образом поставлены в соответствие координаты (возникшие сами собой *self-created*), воспроизводимые знаки, вроде чисел), то любой автоморфизм переводит это соответствие в другое, от которого оно (говоря словами Лейбница) объективно неотличимо. Следовательно, любое введение координат требует акта выбора, при котором мы выделяем одну систему координат из класса одинаково допустимых систем. Именно класс систем, а не данный индивидуальный способ отнесения координат может быть охарактеризован объективно. В теории Галуа "точками" служат n корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ алгебраического уравнения n -й степени с рациональными коэффициентами. Все объективные отношения выражаются в терминах основных операций сложения, умножения, вычитания и деления; иначе говоря, любое отношение представимое в виде $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, где $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть некоторый многочлен от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с рациональными коэффициентами. Если корни перенумеровать числами $1, 2, \dots, n$, то корням будут поставлены в соответствие координаты. Всякое преобразование сводится к перестановке n корней, всякий автоморфизм — к перестановке, не нарушающей все алгебраические соотношения $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ с рациональными коэффициентами; эти автоморфизмы образуют группу Галуа. Примеры из геометрии в этой аудитории, вероятно, более знакомы. В трехмерном евклидовом пространстве система отсчета состоит из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов. Относительно такой системы отсчета любой вектор может быть задан тройкой своих координат (x_1, x_2, x_3) . Переход от одной такой системы отсчета к любой другой осуществляется с помощью некоторого ортогонального преобразования координат x_1, x_2, x_3 ; такого рода преобразования образуют группу автоморфизмов. В аффинной геометрии эту группу заменяет группа всех однородных линейных преобразований с отличным от нуля определителем (или, если следовать Эйлеру, с определителем, равным 1). В первой половине XIX столетия возникла проективная геометрия, группа автоморфизмов которой состоит из всех коллинеаций, т.е. всех точечных

преобразований, переводящих прямые в прямые. Мёбиус добавил свою сферическую геометрию, автоморфизмы которой переводят сферы в сферы. В пространстве трех и большего числа измерений группа преобразований Мёбиуса совпадает с группой всех конформных преобразований. Идеи, которыми руководствовался в своих исследованиях Мёбиус, — по-видимому, неявно, так как сформулировать их без понятия группы невозможно, — сделал явными в своей Эрлангенской программе (1872) Феликс Клейн. Переходы между одинаково допустимыми способами задания координат или систем отсчета в пространстве Клейна находят свое выражение в некоторой группе Γ преобразований координат. Клейн определяет геометрию с помощью группы Γ , которую математик волен выбирать по своему усмотрению: отношения между точками получают объективный смысл, если эти отношения инвариантны относительно группы Γ ; две конфигурации точек считаются объективно одинаковыми, если одна конфигурация переходит в другую, когда над ней производится какая-либо из операций группы. Например, если группа транзитивна — а в дальнейшем мы будем предполагать, что это так, — то все точки одинаковы, пространство однородно.

Согласно специальной теории относительности Эйнштейна четырехмерный мир пространственно-временных точек есть пространство Клейна, характеризующееся определенной группой Γ ; эта группа — группа евклидовых преобразований подобия — наиболее известна геометрам, правда, с одним весьма важным отличием. Ортогональные преобразования, т.е. однородные линейные преобразования, оставляющие неизменной квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad (+)$$

следует заменить преобразованиями Лоренца, оставляющими инвариантной квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \quad (-)$$

Для математиков это было полной неожиданностью, но нельзя сказать, чтобы доставило особое беспокойство: все необходимые согласования сразу же произвел Минковский. В самом деле, математики привыкли к тому, что в алгебраической геометрии переменные могут принимать произвольные комплексные значения: это намного упрощает ее теории, так как поле всех комплексных чисел алгебраически замкнуто; иначе говоря, произвольное алгебраическое уравнение степени n с коэффициентами из поля комплексных чисел всегда имеет n корней, принадлежащих тому же полю. Но в области комплексных чисел не существует различия между квадратичными формами (+) и (—): при замене x_4 на ix_4 квадратичная форма (+) переходит в квадратичную форму (—). Правда, за последние сорок необычайных лет алгебра заняла прямо противоположную позицию: она не только признала права поля действительных чисел наряду с правами поля комплексных чисел, но и проводит свои исследования, насколько это возможно, над произвольным числовым полем, не предполагая более, что это основное поле алгебраически замкнуто, хотя

оно и замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления. Две невырожденные квадратичные формы с коэффициентами из заданного поля $\mathfrak{F}$ принадлежат одному и тому же типу, если одна из них переводится в другую линейным преобразованием с коэффициентами из $\mathfrak{F}$. Специальная теория относительности могла бы преподать алгебраистам урок: не пренебрегать другими типами квадратичных форм, кроме форм главного типа, представленных единичной формой $x_1^2 + x_2^2 + \dots$. На самом деле в своей арифметической теории квадратичных форм, бывшей классическим направлением исследования от Гаусса до Минковского, алгебраисты никогда не пренебрегали изучением форм "неглавного" типа. Боюсь, что в этом повинны геометры. И все же вряд ли имеются основания утверждать, что в данном случае от теории относительности математики получили новый стимул: скорее Эрлангенская программа Клейна и проведение различий между типами квадратичных форм оказались в счастливом согласии с теорией относительности, и открытие Эйнштейна подтвердило важность этих геометрических и алгебраических идей, указав одно очень важное и неожиданное применение в физике.

Сегодня мы имеем обыкновение рассматривать математические проблемы с позиций абстрактной алгебры и топологии. Между ортогональной группой и группой Лоренца имеется топологическое различие, несравненно более резкое, нежели алгебраическое различие в типе квадратичных форм: ортогональная группа принадлежит к числу компактных многообразий, группа Лоренца — не принадлежит. Наиболее разработанным разделом теории групп является теория представлений групп линейными преобразованиями. Представления в гильбертовом конечно- или бесконечномерном пространстве имеют первостепенный интерес для квантовой механики. Если группа конечна, то каждое такое представление распадается на неприводимые части конечной размерности, а вся теория — одно из достояний творений математики — подчиняется соотношениям ортогональности и полноты. Именно они позволяют совершить переход от конечных групп к компактным группам. Теория рядов Фурье есть не что иное, как теория представлений группы вращений окружности. Завороженные красотой и гармонией теории представлений компактных групп, математики на время отошли в сторону от более сложной и менее гармоничной ситуации, с которой им, судя по всему, придется столкнуться при изучении компактных групп. Но группа Лоренца и интерес, проявляемый квантовой механикой к представлениям группы Лоренца в гильбертовом пространстве, возымели свое действие: В. Баргман в Америке, Гельфанд и Наймарк в России мужественно приступили к дерзкой задаче построения теории представлений группы Лоренца в гильбертовом пространстве, а русские математики распространили теорию на произвольные локально (но не глобально) компактные группы.

Вряд ли можно сомневаться в том, что специальная теория относительности привела к более важным для физики последствиям, чем общая теория относительности. В математике мы сталкиваемся с противоположной ситуацией: специальная теория относительности оказала сравнительно слабое, а общая теория относительности — весьма значительное влияние,

прежде всего на развитие общей схемы дифференциальной геометрии. Геометрию мира того самого типа, который понадобился Эйнштейну для математического воплощения его основной идеи об инерциальном поле, не только воздействующем на материю, но и испытывающем воздействие с ее стороны, он нашел в готовом виде в математической литературе: исходя из гауссовой теории поверхностей в евклидовом пространстве, Риман развил концепцию n -мерного риманова пространства. Выбор координат в этом пространстве остается совершенно произвольным, зависящим от произвольных (дифференцируемых) преобразований. Система координат обычно покрывает лишь часть многообразия; чтобы покрыть его полностью, требуется наложение на него некоторого конечного или даже бесконечного числа частично перекрывающихся "заплат". Но нас это мало беспокоит, так как мы еще далеки от того, чтобы охватить четырехмерный мир во всей его протяженности. Предположение о том, что в бесконечно малой окрестности точки теорема Пифагора сохраняет свою силу, находит выражение в формуле Римана

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j \quad (g_{ij} = g_{ji}) \quad (*)$$

для квадрата длины ds линейного элемента, ведущего из точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в любую бесконечно близкую точку $P'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n)$. Коэффициенты g_{ij} не зависят от линейного элемента, но в общем случае изменяются от точки к точке. Риману удалось несколько продвинуться в разработке такого рода геометрии, разительно отличающейся по своей основной тенденции от Эрлангенской программы Клейна; в частности, Риман вывел то, что сейчас принято называть тензором кривизны Римана. Сложный математический аппарат для римановой геометрии был разработан Г. Риччи и Т. Леви-Чивитой под названием "абсолютного дифференциального исчисления". Именно этот аппарат, о котором Эйнштейн узнал от своего друга математика Марселя Гроссмана из Цюриха, позволил Эйнштейну записать уравнение движения планеты и дифференциальные уравнения гравитационного поля, не обращаясь к опыту, в чисто абстрактной и тем не менее необычайно привлекательной форме. Природа милостиво подтвердила свои законы, высказав свое одобрение с такой ясностью, какой от нее вряд ли когда-либо удавалось добиться.

Важное значение, которое приобрела риманова геометрия благодаря теории гравитации Эйнштейна, дало импульс дальнейшему развитию этой геометрии, более тщательному изучению ее оснований и — как следствие подобных исследований — обобщению ее в различных направлениях. Первым и решающим шагом стало введение Леви-Чивитой понятия инфинитезимального параллельного переноса вектора. Начнем с гауссова представления поверхности в евклидовом пространстве. Точкам P данной поверхности отнесены произвольные координаты x_1, x_2 ; положение точки P в объемлющем пространстве задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2)$, где $\mathbf{r} = OP$ — вектор, ведущий из начала координат в точку P этого простран-

ства. Приращение

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} dx_2$$

есть линейный элемент, соединяющий точку $P = (x_1, x_2)$ с соседней точкой поверхности $P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$. Так выясняется, что двумерное линейное многообразие касательных векторов $\mathbf{r}$ в точке P отнесено к аффинному векторному базису, состоящему из двух векторов

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}, \quad \mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2.$$

Метрическая структура этой "розы векторов" учитывается лишь задним числом, когда квадрат длины вектора $\mathbf{r}$ записывается в виде квадратичной формы $\sum g_{ij} \xi_i \xi_j$ от его компонент ξ_i с некоторыми коэффициентами g_{ij} . Таким образом, двумерное евклидово векторное пространство — "роза векторов" в точке P — допускает истолкование как аффинное пространство, к которому в качестве "абсолюта" присоединена квадратичная форма. Аналогичным образом аффинное пространство иногда истолковывается как проективное пространство, в котором одна плоскость абсолютно выделена как "бесконечно удаленная плоскость". В подобной процедуре явственно ощущается искусственность: она, если можно так выразиться, фальсифицирует группу; в то же время вполне очевидно, каким образом предложенный Гауссом подход привел к подобному истолкованию. Естественной системой отсчета для этой "розы векторов" может быть декартова система, состоящая из двух перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в точке P ; выберем же такую систему отсчета, не связывая ее с координатами x_1, x_2 , к которым отнесена окрестность точки P на поверхности. Линейный элемент $\overline{PP'}$ тогда определяется выражением $\overline{PP'} = \sum \omega_i \mathbf{e}_i$, где ω_i — линейные дифференциальные формы $O_{i1}dx_1 + O_{i2}dx_2$. Инвариантность должна распространяться на 1) произвольные преобразования координат x_i и 2) произвольные повороты системы отсчета $\mathbf{e}_i$ "розы векторов" в точке P — произвольные в том смысле, что они могут произвольным образом зависеть от точки P . Эта схема, обычно используемая Э. Картаном, лучше соответствует природе пифагоровой метрики. Если же мы хотим включить теорию электрона, разработанную Дираком, в общую теорию относительности, то у нас не останется иного выхода, кроме как принять метод Картана. Ибо четыре компоненты ψ -функции Дирака заданы относительно декартовой (точнее, лоренцевой) системы отсчета. Известно, каким образом они преобразуются при переходе от одной лоренцевой системы отсчета к другой (по спиновому представлению группы Лоренца), но закон этого преобразования в силу самой своей природы не допускает распространения на произвольные линейные преобразования между аффинными системами отсчета.

Вернемся к поверхности в евклидовом пространстве. Касательный вектор $\mathbf{r}$ в точке P путем параллельного переноса в объемлющем евклидовом пространстве можно переместить в точку P' . Получающийся в резуль-

тате вектор $\mathbf{t}'$ уже не будет касательным к поверхности в P' , и мы можем поэтому разложить его на тангенциальную и (бесконечно малую) нормальную составляющую $\mathbf{t} = \mathbf{t}' + \mathbf{t}_n$ в точке P' , после чего отбросить $\mathbf{t}_n$: отображение $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}'$ есть не что иное, как инфинитезимальный параллельный перенос на поверхности по Леви-Чивите. На первый взгляд кажется, что этот процесс зависит от вложения поверхности в окружающее евклидово пространство, но если проделать соответствующие вычисления, то окажется, что он полностью определяется внутренней метрикой поверхности. Следовательно, возможно и внутреннее определение этого процесса. Первое очевидное свойство параллельного переноса Леви-Чивиты состоит в том, что он оставляет неизменной длину вектора $\mathbf{t}$. В комбинации с другим внутренним свойством — я не буду его формулировать, а лишь обозначу как "условие замыкания" — параллельный перенос Леви-Чивиты и в самом деле приводит к однозначному определению "аффинной связности", под действием которой каждый вектор P переходит во вполне определенный вектор в бесконечно близкой точке P' . После того как понятие инфинитезимального параллельного переноса Леви-Чивиты удалось сделать не зависящим от вложения поверхности в объемлющее евклидово пространство, оно становится применимым к любому двумерному и, более того, к любому n -мерному риманову многообразию.

Понятие *аффинно связного многообразия* естественно ввести как многообразие, на котором определен инфинитезимальный параллельный перенос вектора, удовлетворяющий условию замыкания. Действительно, во всем тензорном анализе с его "ковариантными производными" используется только аффинная связность, а не метрика. Следовательно, риманова кривизна также находит здесь себе место. Действительно, если "розу векторов" в точке P , подвергая инфинитезимальным параллельным переносам, обнести по замкнутому контуру и вернуться в точку P , то "роза векторов", вообще говоря, не вернется в исходное положение, а перейдет в некоторое другое, получающееся из исходного при повороте вокруг P . Поворот этот по существу есть то, что Риман назвал кривизной и для чего более подходящим названием было бы "ротор вектора". Аффинные понятия ковариантного дифференцирования и кривизны становятся применимыми к римановой геометрии вследствие того, что риманова метрика однозначно определяет аффинную связность.

Так наряду с метрической римановой геометрией возникла аффинная дифференциальная геометрия. Можно сказать, что в непосредственной близости от мировой точки P причинная структура Вселенной описывается уравнением $\Sigma g_{ij} dx_i dx_j = 0$. Следовательно, риманова метрика g_{ij} и метрика g_{ij}^* того же пространства приводят к одинаковой причинной или конформной структуре, если $g_{ij}^* = \lambda g_{ij}$, где λ — положительный множитель, произвольным образом зависящий от точки P . Такого рода свойства риманова пространства конформны: они сохраняются при замене $g_{ij} \rightarrow \lambda g_{ij}$. Нетрудно также указать, при каких условиях две аффинные связности эквивалентны в том смысле, что приводят к одним и тем же геодезическим и, следовательно, к одной и той же инерциальной или проективной структуре. Можно, далее, поставить вопрос о том, что произойдет, если заменить

геодезические любым семейством кривых, обладающим следующим свойством: через каждую точку в любом направлении проходит одна из этих кривых (общая геометрия путей).

Ясно, что тут имеется обильная пища для математического исследования и широкие возможности для обобщений. Так, в кильватере общей теории относительности возникли различные школы дифференциальных геометров. Здесь, в Принстоне, эти исследования возглавили Эйзенхарт и Веблен, в Голландии — Схоутен; во Франции плодотворное геометрическое воображение Э. Картана позволило открыть много новых аспектов предмета. К числу наиболее выдающихся учеников этих ученых принадлежат Трейси Томас и Дж.М. Томас в Принстоне, ван Данциг в Голландии и Шиншен Черн (Чжень) из парижской школы. А в Цюрихе в этой области трудился одинокий волк — Герман Вейль; к сожалению, он слишком охотно перемежал свои занятия математикой размышлениями на физические и философские темы. Разными путями все эти авторы вскоре пришли к выводу, что проективную дифференциальную геометрию лучше строить не абстрактным способом — в виде ветви аффинной дифференциальной геометрии, как это описано выше, а независимо — связывая с каждой точкой P данного многообразия проективное пространство Σ_P в смысле Пуанкаре и Плюккера так, чтобы это однородное пространство заняло место, отводимое аффинной "розе векторов" в аффинно связном многообразии. Аналогичным образом, связывая с каждой точкой P пространство Мёбиуса Σ_P , можно построить общую конформную геометрию. Обобщение очевидно. Пусть заданы многообразие M и однородное пространство Клейна Σ , определяемое транзитивной группой преобразований Γ . Предположим, что каждой точке P сопоставили экземпляр Σ_P пространства Клейна и что этот экземпляр под действием инфинитезимального преобразования из группы Γ , зависящего линейно от координат dx_i точки P' относительно точки P , переведен в пространство $\Sigma_{P'}$, поставленное в соответствие бесконечно близкой точке P' . Многообразие M или по крайней мере часть его отнесено к координатам x_i . В каждом пространстве Σ_P мы должны выбрать допустимую систему отсчета, относительно которой точки пространства Σ_P будут задаваться координатами ξ . Поскольку пространство Клейна по предположению служит обобщением аффинного касательного векторного пространства, естественно предположить, что в Σ_P "отмечен" какой-то вполне определенный центр O , "накрывающий" точку P многообразия M . Систему отсчета в Σ_P можно выбрать так, чтобы O совпал с ее началом $\xi_1 = \xi_2 = \dots = 0$. В дальнейшем естественно предположить, что бесконечно малые векторы, исходящие из точки O в пространстве Σ_P , с одной стороны, и бесконечно малые векторы, исходящие из точки P в многообразии M , с другой стороны, "согласуются" посредством взаимно однозначного линейного преобразования. Из этого предположения следует, что пространство Σ имеет такую же размерность, что и M . Далее, естественно предположить, что если бесконечно малый вектор OO_1 в Σ_P покрывает вектор PP' в M , то перенос $\Sigma_P \rightarrow \Sigma_{P'}$ переводит точку O_1 в центр O' пространства $\Sigma_{P'}$. Однако никаких других ограничений не накладывается. Обнося Σ_P последовательными бесконечно малыми переносами по замкнутому кон-

туру, мы после возвращения в точку P получаем некоторое отображение пространства Σ_P в себя — операцию, принадлежащую группе Клейна и не зависящую от выбора координат x_i и, если понимать это должны образом, также и от выбора допустимых систем отсчета во всех пространствах Клейна, ассоциированных с различными точками многообразия M . Разумеется, полученное преобразование зависит от замкнутого контура, по которому мы обносим пространство Σ_P . Этот автоморфизм есть обобщение кривизны Римана. Следовательно, здесь перед нами естественная общая основа, на которой покоится понятие этой кривизны. Инфинитезимальная тенденция в геометрии, начало которой было положено гауссовой теорией кривых поверхностей, на наших глазах сливается с другим направлением математической мысли, достигшим кульминации в Эрлангенской программе Клейна.

Систему отсчета в Σ_P нежелательно связывать с координатами x_i , покрывающими окрестность точки P в многообразии M . В этом отношении старый подход к изучению аффинно связанных многообразий вводит в заблуждение. Именно такой урок надлежит извлечь из всего сказанного мною о методе Картана в римановой геометрии. Изучая кривые в трехмерном евклидовом пространстве, мы используем не неподвижную декартову систему отсчета, а связываем с точкой P , перемещающейся вдоль кривой, подвижную систему отсчета, теснейшим образом "привязанную" с кривой, а именно декартову систему отсчета, состоящую из касательной, главной нормали и бинормали. Свобода как раз и означает упомянутую "привязку". Картан назвал такой способ описания кривой *méthode de repère mobile* — методом подвижного репера. В современном варианте дифференциальной геометрии в целом метод подвижного репера комбинируется с топологией, и ассоциированные пространства Клейна появляются под названием слоев; *реперы* же — системы отсчета в расслоенных пространствах — было сочтено за благо сохранить не зависящими от координат в базе M .

Трудно удержаться от искушения и не рассказать вам о некоторых попытках использования упомянутых мною более общих геометрий для разработки единых теорий поля, которые охватывают — наряду с гравитационным — также и электромагнитное поле и включают не только фотоны, но и электроны, нуклоны, мезоны и т.п.; но сколь ни велик был соблазн, я все же решил не поддаваться ему.

Никто не может заранее предсказать, какие геометрические структуры будут придуманы, поэтому было бы опрометчиво утверждать, будто описанная схема, основанная на использовании ассоциированных пространств Клейна и их инфинитезимального переноса, носит универсальный характер. Какой бы ни была структура, ее необходимо описать арифметически относительно системы отсчета f , будь то система координат для многообразия M , или система координат для M плюс допустимые системы отсчета для каждого из ассоциированных пространств Клейна, или нечто более сложное. Всегда возникает проблема эквивалентности, т.е. вопрос о том, при каких условиях одна из двух структур может быть переведена в другую путем изменения универсальной системы отсчета f . Именно

при попытке решить эту проблему для римановой геометрии Кристоффель впервые ввел свой символ с тремя индексами, описывающий, как показал впоследствии Леви-Чивита, инфинитезимальный перенос, а Риман построил свой тензор кривизны. Этот пример типичен. В ряде важных случаев попытка решить проблему эквивалентности привела к тому, что пространства Клейна были отождествлены с точками многообразия и для них была определена операция инфинитезимального переноса. Вспомогательные переменные, которые при этом приходилось вводить, можно было интерпретировать как координаты в расслоенном пространстве Σ_P . Таким образом, удивительно широкая применимость этой схемы была доказана на практике.

Я хочу сказать несколько слов о подходе Картана к римановой геометрии. "Роза векторов" в каждой точке P данного многообразия несет некоторую декартову систему отсчета e_i . Бесконечно малый вектор $\overline{PP'}$ в точке P можно представить в виде

$$PP' = dP = \sum \omega_i e_i, \quad (1)$$

где ω_i — линейные дифференциальные формы от x_i . Переходя от точки P в соседнюю точку P' , мы получаем в точке P' две декартовы системы отсчета: ту, которая ассоциирована с точкой P' , и ту, в которую переходит система отсчета, ассоциированная с точкой P , при параллельном переносе на P в P' . Обе системы отсчета в P' связаны бесконечно малым поворотом

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j, \quad (2)$$

где коэффициенты ω_{ij} — опять-таки линейные дифференциальные формы. Перемещение розы векторов описывается соотношениями (1) и (2). Условие замкнутости, которое я так и не сформулировал, позволяет выразить коэффициенты ω_{ij} через ω_i . Адекватным инструментом для выполнения вычислений, неизбежно возникающих при таком подходе, является α -исчисление, полностью разработанное Картаном. Оно имеет дело с полилинейными дифференциальными формами, их умножением и "внешним" дифференцированием; это исчисление играет важную роль в различных областях математики, включая топологию.

Скаляр $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет дифференциал $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Формально мы можем продифференцировать любой линейный дифференциал $\varphi = \sum_k \varphi_k dx_k$ и получить $d\varphi = \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i dx_k$. Существенный момент заключается в том, что, желая придать смысл формальному выражению, мы вводим условие антисимметричности $dx_i dx_k = -dx_k dx_i$ для умножения дифференциалов dx_i . Возможно, более "честный" способ состоит во введении двух независимых линейных элементов dx и δx и в представлении $d\varphi$ в виде кососимметричной билинейной дифференциальной формы

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) dx_i dx_k. \quad (3)$$

Самое замечательное в этой дифференциальной форме — ее инвариантность относительно произвольных преобразований координат. Если φ есть дифференциал df некоторого скаляра f , то $d\varphi = 0$: дифференциал от дифференциала всегда есть нуль. Теория электромагнитного поля Максвелла являет великолепный пример этого исчисления. Потенциалы φ_i служат коэффициентами некоторой инвариантной дифференциальной формы $\varphi = \sum \varphi_i dx_i$ порядка 1; ее дифференциал $F = d\varphi$ порядка 2 (задаваемый соотношениями (3)) определяет напряженности электромагнитного поля

$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$. Так как сама величина F есть дифференциал, дифференциальная форма dF порядка 3 должна обратиться в нуль, т.е.

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Используемые здесь обозначения не столь странны, как это может вам показаться. В самом деле, взгляните хотя бы на традиционную форму записи двукратного интеграла $\int \dots dx_1 dx_2$. Ведь и здесь истинный смысл произведения дифференциалов $dx_1 dx_2$ — как площади параллелограмма, натянутого на два линейных элемента dx и δx , — становится более ясным, если записать это произведение в виде определителя $dx_1 \delta x_2 - dx_2 \delta x_1$; лишь такая запись позволяет понять без каких бы то ни было дополнительных пояснений, что происходит с интегралом при преобразовании координат. Умножение линейных форм

$$\sum f_i dx_i \cdot \sum g_k dx_k = \sum f_i g_k dx_i dx_k,$$

конечно, должно учитывать антисимметричность: $dx_k dx_i = -dx_i dx_k$. Совершенно ясно, как это обобщается на формы более высоких порядков. Все интегральные теоремы векторного и тензорного анализа являются частными случаями общей теоремы Стокса для дифференциальной формы порядка r на r -мерном (ориентируемом) многообразии, вложенном в пространство с координатами x_i : интеграл от дифференциала df по многообразию C размерности $r+1$ равен интегралу от f по r -мерной границе ∂C многообразия C . Таким образом, у правила "дифференциал дифференциала равен нулю" есть топологический двойник — утверждение о том, что любая граница ∂C всегда замкнута, т.е. имеет нулевую границу. Вопрос о том, всегда ли допустимо считать, что форма f , дифференциал которой равен нулю, сама является дифференциалом некоторой формы, приводит непосредственно к топологической теории гомологий и когомологий; в этой области фундаментальное значение имеет работа де Рама.

Впечатляющим примером мощи техники, в которой *méthode de repère mobile* — метод подвижного репера — комбинируется с исчислением внешних дифференциальных форм, может служить краткая статья Черна, опубликованная в т. 45 журнала "Annals of Mathematics": в ней Черн дает внутреннее доказательство аналога формулы Гаусса—Бонне для риманова пространства произвольной четной размерности. Классическая формула Гаусса—Бонне для замкнутой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве гласит,

что интеграл от гауссовой кривизны равен $2\pi q$, где четное целое число q — один из наиболее важных топологических инвариантов, известный под названием эйлеровой характеристики. Аллендёрфер вывел эту формулу для риманова пространства четной размерности, вложенного в евклидово пространство*).

Эта формула, возможно, простейший пример взаимосвязи между дифференциальными и топологическими свойствами пространства, и, по-видимому, немало глубоких нерешенных проблем в этой области еще ждут своего часа.

Если мы попытаемся понять, что стоит за формальным аппаратом тензорного исчисления, который используется в общей теории относительности, то неизбежно придем к общему понятию *ковариантной величины*. Рассмотрим преобразования пространства Клейна Σ , осуществляющие переход между допустимыми системами отсчета, которые оставляют неподвижным центр O пространства Σ . Такие преобразования образуют некоторую группу Γ . Ковариантная величина определенного типа $\otimes$ задается относительно допустимой системы отсчета f с помощью конечного набора компонент $X_1, \dots, X_n$, принимающих независимо все вещественные значения, когда величина $\otimes$ пробегает многообразие всех допустимых значений. Компоненты X'_i той же величины относительно другой допустимой системы отсчета f' связаны с X_i линейным преобразованием $X'_i = \sum t_{ij} X_j$, коэффициенты t_{ij} которого определяются преобразованием S группы Γ , переводящим f в f' . Произведению элементов S группы Γ соответствует произведение соответствующих линейных преобразований $\|t_{ij}(S)\|$. В этом случае мы говорим о представлении группы Γ линейными подстановками, а именно это представление определяет тип $\otimes$ ковариантной величины. В последние десятилетия была детально разработана теория представлений непрерывных групп Ли, в которой замечательным образом слились воедино алгебраический, дифференциальный и интегральный метод. Мы видим, что Штуди напрасно сокрушался о проблемах, якобы выброшенных за борт "релятивистами": именно развитие общей теории относительности позволило подойти к решению этих проблем на гораздо более высоком уровне, о котором и не помышлял формально мысливший Штуди. Весьма важной для представлений линейной группы оказалась симметрия характеров, изученная А. Юнгом в его *количественном анализе* и с иных позиций — Г. Фробениусом. Вигнер обнаружил впоследствии, что характеры имеют непосредственное отношение к квантовомеханическим системам, состоящим из одинаковых частей (например, электронов). Для ортогональной группы Картан открыл огромное количество неприводимых двузначных представлений, не менее многочисленных, чем однозначные. Их появление обусловлено топологической причиной: ортогональная группа не односвязна, но обладает односвязным накрывающим многообразием, состоящим из двух листов, которые про-

*) В действительности Аллендёрфер и А. Вейль — еще до Черна — доказали формулу Гаусса—Бонне, вкладывая каждую из клеток, на которые разбито риманово пространство, в евклидово пространство. Черн избавился от процедуры вложения.

стираются над ней без границ и ветвлений. Наиболее простое из этих двузначных представлений — то самое спиновое представление, которое Дирак использовал в лоренц-инвариантной квантовой теории электрона.

Разумеется, было бы странно утверждать, будто все эти исследования берут начало в теории относительности. Так, кропотливая подготовительная работа Фробениуса и Исайи Шура по конечным и компактным группам или первые работы Картана по полупростым группам Ли и их представлениям не имеют ничего общего с теорией относительности. Но если говорить о себе, то именно желание понять, какое математическое содержание кроется за формальным аппаратом общей теории относительности, привело меня к изучению представлений и инвариантов групп; и я думаю, что мой опыт в этом отношении не был единственным.

Какой же вывод следует из всего сказанного? Теория относительности тесно переплетается со многими важными разделами математики. Ее влияние в математике оказалось далеко не столь революционным, каким оно было в физике и эпистемологии естественных наук; ибо ее концепция хорошо вписалась в круг идей, уже существовавших в математике. Но именно потому, что теория относительности была с такой легкостью поглощена математикой, она стимулировала развитие и разработку тех математических идей, с которыми у нее наблюдалось естественное "сродство".

ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА*)

События внешнего мира разыгрываются *в пространстве и времени*. При математическом описании все величины, характеризующие состояния, записываются в виде функций пространственно-временных координат; последние выступают в качестве независимых переменных. Возможные точки пространства-времени образуют четырехмерный континуум. Наглядным смыслом, непосредственно и явно данным созерцанию, обладает только то, что совпадает или достаточно близко друг к другу в пространстве-времени. Именно поэтому Аристотель описывал пространство как среду соприкосновения (*das Medium der Berührung*). Однако мы не можем довольствоваться просто констатацией фактически происходящих соприкосновений, а вынуждены проецировать их на качественно недифференцированное поле свободных *возможностей* — континуум всех возможных совпадений (*Koinzidenzen*); во всяком случае поступать так приходится тогда, когда наша теоретическая картина должна быть приведена в соответствии со всем объективным миром, который с необходимостью превосходит все, что я как отдельный человек могу о нем узнать. Я думаю, что эта необходимость в конечном счете коренится в том, что действительность не есть бытие как таковое (*an sich*) — она самоконструируется *для сознания*. Если пространственная форма тела самоконструируется как нечто тождественное при взгляде на него в различной перспективе, то для этого имеется существенная предположка, состоящая в том, что позиция, определяющая перспективу, в кото-

*) Доклад, прочитанный в мае 1930 г. на Роузболловских чтениях в Кембриджском университете.

рой нам является отдельный образ, меняется, и различные фактически занимаемые позиции сами выступают в качестве фрагмента заложенного в нас, хотя и бесконечного, континуума возможностей. Пространство и время, как говорит Кант, представляют собой формы чистого созерцания. Координаты служат для того, чтобы можно было различать точки пространственно-временного континуума. Они играют ту же роль, что и имена, которые позволяют различать и называть людей, или же произвольная нумерация объектов в какой-то области, состоящей из дискретных элементов. На непрерывном многообразии координаты являются непрерывными функциями объектов¹; после введения координат каждая величина, непрерывно зависящая от своего местоположения (*vom Ort*), может быть выражена в виде некоторой функции координат. Переход от одной системы координат к другой сводится поэтому к некоторому преобразованию, осуществляемому с помощью непрерывных функций. Констатация того, что любая система координат пригодна в качестве основы описания происходящих в природе явлений, не несет в себе никакого содержательного высказывания о свойствах и закономерностях природы. Тем самым мы отвергаем лишь наивную веру в магию имен, подразумевающую, что имя внутренне присуще вещи, что познание пойдет по неверному пути, если мы не воспользуемся "правильными" именами, и что, называя имя, мы обретаем над вещью волшебную власть.

Описание природных процессов на основе системы координат происходит, как это очевидно, в *арифметических* терминах, так как используемые имена в этом случае суть числа. Всем вам это хорошо известно из аналитической геометрии. Тем не менее, чтобы облегчить переход к заложенным в нас формам мышления и созерцания, давайте заменим их геометрическими терминами, истолковывая координаты в евклидовом "пространстве образов". Координаты задают отображение реального мира на это пространство образов — отображение такого же типа, что и проектирование искривленной поверхности Земли на плоские географические карты. На карте, выполненной в проекции Меркатора, Сан Франциско, южная оконечность Гренландии и мыс Нордкап расположены на одной прямой; не следует удивляться, что на карте северного полушария, исполненной в ортографической проекции, этого не будет.

Четырехмерный пространственно-временной континуум не аморфен, а наделен *структурой*. Если вместе с Ньютоном уверовать в абсолютное пространство и абсолютное время, то миру будет приписано разделение на *слои* и идущие поперечно относительно них *волокна*: все одновременные мировые точки образуют трехмерный слой, а все мировые точки, имеющие одинаковое местоположение, — одномерное волокно. Кроме того, пространство и время обладают некоторой метрической структурой, проявляющейся в понятиях равенства временных интервалов и конгруэнтности пространственных фигур. Сколь бы полно и точно мы ни описывали эту структуру и какова бы ни была внутренняя основа, все законы природы свидетельствуют о том, что структура эта оказывает решающее влияние на протекание физических явлений: поведение твердых тел и часов опре-

деляется почти исключительно метрической структурой, так же как и движение материальной точки и световых волн, не подверженных никаким воздействиям. И познать ее можно, лишь наблюдая, как она влияет на конкретные процессы природы. Ньютон с полной ясностью выразил эту программу в предисловии к своим "Principia". Хотя он а priori верит в абсолютное пространство и тем самым в абсолютное движение, тем не менее цель своего исследования он характеризует как установление истинных движений, исходя из движений относительных, которые суть разности истинных, а также *исходя из их причин и действий*. Свою мысль он пояснил следующим известным примером: "Если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислять угловую его скорость". Если какая-нибудь система координат или какой-то класс систем координат выделены, то это может произойти лишь на основе физических процессов, когда устанавливается, что те или иные процессы в соответствующих координатах допускают такое-то аналитическое описание². Поясню этот по сути само собой разумеющийся и, как мы видели, неявно признававшийся Ньютоном *"общий постулат относительности"* на примере так называемой специальной теории относительности, справедливость которой этот принцип ни в коей мере не исключает. Из опыта известно, что мировая линия не подверженной никакому воздействию материальной точки — одномерное многообразие последовательно проходимых ею мировых точек — определяется заданием начальной точки и начального направления. Аналогичным образом, световой конус — геометрическое место всех мировых точек, до которых доходит световой сигнал, испущенный из данной мировой точки *O*, "здесь-теперь", — определяется только точкой *O* независимо от состояния, в частности от состояния движения, источника и цвета света. Согласно специальной теории относительности можно, в частности, составить такую "карту" мира, на которой 1) мировая линия любой материальной точки, на которую не действует какая-либо сила, оказывается прямой (закон инерции Галилея) и 2) световой конус с вершиной в любой мировой точке представляет собой прямой круговой конус с вертикальной осью и углом раскрытия 90° (распространение света с постоянной скоростью в виде концентрических сферических волн). Выделить какую-нибудь из "нормальных" систем координат объективно, без индивидуального задания, невозможно: они связаны между собой преобразованиями Лоренца. Правда, установление структуры требует, как следует из сказанного, прослеживания движения материальных точек, свободных от действия каких-либо сил, — точек, выходящих из *всех возможных* местоположений по *всем возможным направлениям*; здесь всегда предполагается ссылка на коренящийся в созерцании континуум свободных возможностей. Чтобы избежать прямого задания системы координат, необходимо производить выделение нормальной системы не путем указания индивидуального случая, а на основе закономерности, выполняющейся при любых обстоятельствах. Общий постулат теории относительности находится в тесной связи с основным принципом теории познания: объектив-

ная картина мира не должна содержать ничего такого, что в принципе не могло бы быть проверено на опыте³. Хотя многие физически различные цвета вызывают одно и то же ощущение красного, призма делает доступным для восприятия это скрытое различие. Те же различия, которые нельзя раскрыть для опыта, надлежит отбрасывать. Коль скоро установлено, что на основе явлений природы без индивидуального задания невозможно произвести выбор, сужающий совокупность нормальных систем координат, связанных между собой преобразованиями Лоренца, позволительно (но, впрочем, бесплодно) утверждать, будто существует тем не менее объективная одновременность, хотя принципиально невозможно провести различие между конкурирующими измерениями времени. Здесь мы, конечно, должны снова обратиться к возможности. Лейбниц сказал однажды в ходе дискуссии о понятии абсолютного движения в ответ на возражение, будто движение все же, наверное, может быть и там, где его не наблюдают: "На это я отвечу, что движение хотя и независимо от наблюдения, но оно отнюдь не независимо от возможности наблюдения вообще. Движение имеется лишь там, где происходит доступное наблюдению изменение; там же, где изменение нельзя установить путем наблюдения, там нет и никакого изменения" [1].

Прошу извинить меня за то, что я еще раз привожу эти соображения, ставшие в наши дни почти тривиальными. Перехожу теперь к основной идее общей теории относительности. *То, что оказывает такое мощное реальное воздействие, какое производит метрическая структура мира, не может быть жестким, раз и навсегда установленным геометрическим свойством мира, а само является чем-то реальным, тем, что не только производит воздействие на материю, но и само испытывает воздействие с ее стороны.* Мысль о том, что структурное поле взаимодействует с материей так же, как электромагнитное поле, применительно к пространству высказал еще Риман. Эйнштейн независимо от Римана снова пришел к ней, опираясь на представления специальной теории относительности, перенес ее на четырехмерный мир и дополнил одним важным соображением, впервые сделавшим ее физически плодотворной. Со времен Галилея мы рассматриваем движение материальных тел как *борьбу между инерцией и силой*. Инерцию можно охарактеризовать как тенденцию к постоянству, сохраняющую посредством *инфинитезимального параллельного переноса* мировое направление движущейся частицы, которая перемещается в этом направлении из своего мирового местоположения P в бесконечно близкую точку P' . Поскольку эта тенденция к постоянству направления действует от одного момента времени к другому, возникает "геодезическая" мировая линия. Из равенства тяжелой и инертной массы Эйнштейн заключил, что *в дуализме инерции и силы гравитация выступает на стороне инерции* и, следовательно, в явлениях гравитации проявляется искомая изменяемость инертного поля и его зависимость от материи. Вы знаете, что выросшая из этого пронизательного вывода теория гравитации Эйнштейна, одно из величайших творений человеческого разума, получила блестящее подтверждение на опыте.

Можно поставить вопрос, как Ньютон пришел к тому, что в приводившихся выше выражениях а ргіогі провозгласил абсолютное пространство и абсолютное время, хотя сам он усвоил эмпирическую программу выведения реального процесса образования слоев и волокон из его воздействия на наблюдаемые явления. Ответ, как мне кажется, заключен главным образом в его теологии, теологии Генри Мора: пространство для него есть *божественное* всеобщее, присутствующее в вещах⁴. Поэтому структура пространства относится к самому пространству так, как — в силу нашего представления — абсолютный Бог относится к миру: мир подвержен его действию, но он возвышается над миром, и мир не может на него влиять. Если так взглянуть на дело, то окажется, что теория относительности есть лишение пространства божественной сущности. Ныне мы проводим различие между аморфным континуумом и его метрической структурой. Первый сохранил свой априорный характер, однако стал отражением чистого сознания, противостоящего бытию, в то время как структурное поле целиком и полностью оказалось вверенным реальному миру и игре действующих в нем сил; именно как такого рода реальную сущность Эйнштейн назвал его эфиром. То, что зависимость эфира от материи была столь трудно познаваема, объясняется — не отвергаемым и эйнштейновской теорией — громадным перевесом эфира в его взаимодействии с материей. Если это не некий бог, то все же нечеловеческой силы великан. "Соотношение сил" можно оценить как $10^{20}:1$. Действительно, если строить величину этого взаимодействия аддитивно из величины взаимодействия гравитации и величины взаимодействия материи, то последнюю надлежит умножить на безразмерное число 10^{-20} . Наше чувство восстает против столь грубого нарушения природой простейших правил fair play. Думаю, что если нам когда-нибудь удастся понять причину этого, то мы совершим огромный шаг в познании природы; в настоящее время мы можем строить лишь робкие догадки⁵.

Благодаря теории Эйнштейна силы гравитации были осмыслены как вытекающие из метрической структуры; некая физическая сущность была "геометризована". Вполне понятно, что во имя единства картины мира попытались *геометризовать всю физику*. Усилия, предпринятые в этом направлении, составляют непосредственный предмет моей лекции. Прежде всего необходимо было взяться за *электромагнитное поле*. Вплоть до создания новой квантовой физики гравитация и электромагнетизм считались единственными первичными сущностями природы. Можно было надеяться, следуя теории Г. Ми в качестве образца, построить материальные элементарные частицы как узлы энергии в гравитационно-электромагнитном поле, как такие области малой протяженности в пространстве, в которых интенсивности полей достигают необычайно высоких значений. Поэтому проблема усматривалась тогда в *объединении гравитации и электромагнетизма* (Elektrizität). С тех пор, однако, ситуация существенно изменилась в двух пунктах. Во-первых, квантовая теория добавила к электромагнитным волнам *волны материи*, описываемые волновой функцией ψ Шрёдингера, относительно которой Паули и Дирак установили, что она является

не скаляром, а многокомпонентной величиной. Эксперименты по дифракции волн электронов сделали существование этих волн осязаемо убедительным. Этот новый результат еще не имеет связи с квантовым поведением процессов природы; величина ψ , характеризующая состояние поля материи, должна быть включена в классическую физику поля наряду с гравитацией и электромагнетизмом. Не *две*, а *три* вещи следует подвести под одну крышу. К тому же запечатленные в спектрах свойства математических преобразований величины ψ неопровержимо свидетельствуют о том, что поле материи *нельзя* свести к гравитации и электромагнетизму; самое большее, можно поставить вопрос об обратной сводимости.

Второй пункт состоит в совершенно новой интерпретации уравнений поля, при которой понятие интенсивности заменяется понятием *вероятности*. Лишь благодаря такой статистической интерпретации получает свое основание корпускулярно-атомистический аспект природы. Производимый затем с помощью уравнений поля процесс квантования служит, в частности, основой для уяснения факта существования и однотипности известных ныне элементарных частиц — электронов и протонов. Однако в случае интересующей нас проблемы единой теории поля вопрос о том, как интерпретировать уравнения поля — классически-причинно или квантово-статистически — мы можем оставить в стороне.

Поскольку подходы, о которых я намереваюсь рассказать, отчасти носят формально-математический характер, я не могу здесь не сказать несколько подробнее о соответствующем математическом аппарате. Рассматривая пример с инерцией, мы уже упоминали о том, что структурное поле можно понимать как близкодействие — действие на бесконечно малом расстоянии. Каким образом перенести идею близкодействия на метрическую структуру пространства, Риман вывел из теории искривленных поверхностей Гаусса. Мы будем следовать ходу рассуждений Римана, если иметь в виду ту цель, которую он ставил перед собой; что же касается формы аналитического представления, то мы с самого начала откажемся от первоначального подхода Гаусса — Римана — Эйнштейна и придадим этой форме тот вид, который, как недавно выяснилось, необходим для того, чтобы охватить поля материи. Точки поверхности отличаются друг от друга значениями двух координат x^1, x^2 ; поскольку выбор координат произволен, объективные законы должны быть инвариантны относительно группы всех непрерывных преобразований координат x^P . Из точки $P = (x^P)$ выходят линейные элементы PP' , которые ведут в бесконечно близкие точки $P' = (x^P + dx^P)$. Линейный элемент такого рода — это прототип вектора с началом в точке P и компонентами dx^P относительно выбранной системы координат. Согласно основному принципу дифференциального исчисления бесконечно малые векторы, исходящие из точки P , образуют *линейное многообразие*. Чтобы отделаться от сомнительного понятия бесконечно малой, заменим его *касательной плоскостью* в точке P . По самому смыслу ее введения плоскость эта представляет собой некоторое линейное векторное пространство с выделенным началом; задав в нем два линейно независимых вектора e_1 и e_2 , мы можем записать любой вектор и

с началом в точке P одним и только одним способом в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^2 \mathbf{u}_a \mathbf{e}_a,$$

где $\mathbf{u}_a$ — компоненты вектора $\mathbf{u}$ относительно репера $\mathbf{e}_a$. Соответствующая структура выражается в том, что среди всех возможных реперов выделены *декартовы* реперы. Преобразования, задающие переход от одного декартова репера к другому равноправному с ним реперу, образуют хорошо известную ортогональную группу, которая оставляет инвариантной числовую меру вектора (квадрат его длины)

$$\sum_a \mathbf{u}_a^2.$$

Для нашего мира размерность следует повысить с 2 до 4; и вместо ортогональной группы появляется группа Лоренца, а инвариантная числовая мера вектора относительно нормального репера принимает вид

$$-\mathbf{u}_0^2 + \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{u}_3^2$$

(с одним знаком минуса — геометрия Минковского). Векторы с нулевой числовой мерой образуют конус с вершиной в начале координат, который уже встречался нам под названием светового конуса.

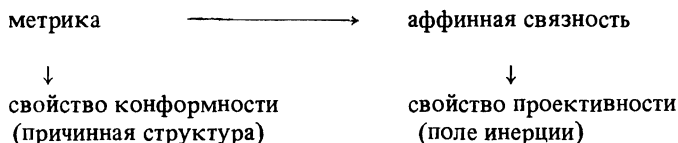
Касательную плоскость можно сначала рассматривать совершенно независимо от искривленной поверхности — так сказать, снять ее с этой поверхности и положить рядом. Искривленная поверхность отнесена к координатам x^P ; на ней господствует инвариантность относительно группы всех непрерывных преобразований этих координат. Касательная плоскость представляет собой линейное векторное пространство с выделенным началом, отнесенное к нормальному реперу; на ней господствует инвариантность относительно произвольных поворотов нормальных реперов — относительно группы преобразований Лоренца; при этом повороты локальных реперов в различных точках искривленной поверхности независимы. Для аналитического представления явлений природы нам требуется не только система координат в нашем мире, но и такие локальные реперы, которые в каждой точке произвольно выбраны из бесконечно многих равноправных нормальных реперов. Однако на самом деле касательная плоскость в точке P не отделена от искривленного многообразия, а *вложена* в него. После того как система координат и локальные реперы $\mathbf{e}_a$ выбраны, связь описывается численными значениями компонент h_a^P четырех базисных векторов $\mathbf{e}_a$ относительно нашей системы координат. Если точка P перемещается по многообразию, то 4×4 величин h_a^P являются непрерывными функциями точки P или ее координат x^P . Они описывают количественное изменение *метрического поля*. В структуре мы поэтому различаем: 1) ее *природу*, которая всюду одинакова и представлена некоторой математической "сущностью", не претерпевающей никаких изменений, или группой Лоренца; и 2) "*ориентацию*", или вложение; способная к непрерывным изменениям, она вносит вклад в неустранимую неопределенность

того, что занимает переменное место на континуальной шкале, по природе своей зависимо и взаимодействует с материей. Первое — априорный элемент — я склонен опять-таки связать с нашим созерцанием. Философы, пожалуй, правы, когда считают, что пространство, данное в нашем созерцании (*unser Anschauungsraum*), независимо от данных физического опыта, таково, что обладает евклидовой структурой. Что касается меня, то я настаиваю лишь на том, что центром пространства, данного этому созерцанию, является наше "Я" и что совпадение, связь этого пространства с пространством физическим становится все более и более смутной по мере того, как мы удаляемся от этого центра, от нашего "Я". В теоретических построениях это находит отражение опять же в отношении, которое существует между искривленной поверхностью и плоскостью, касательной к ней в точке P : обе почти совпадают в непосредственной окрестности центра P , но чем дальше от P , тем произвольнее становится продолжение этого совпадения до однозначного соответствия между поверхностью и плоскостью.

Тому, кто занимается теорией относительности, хорошо известно, что любое свойство инвариантности, содержащее произвольную функцию, приводит к некоторому *закону сохранения*. Например, инвариантность относительно любых преобразований координат четырех произвольных функций дает четыре компоненты закона сохранения *энергии и импульса*. Инвариантность относительно любых поворотов локальных реперов, соответствующая шести произвольным функциям, эквивалентна симметрии тензора *энергии—импульса* или закону сохранения *момента импульса*, который в трехмерном пространстве имеет три компоненты, а в четырехмерном мире включает в себя закон инертности энергии, в силу чего число компонент повышается до шести⁶.

Для понимания соответствующей математической ситуации фундаментальное значение имеет открытие Леви-Чивиты [2], состоящее в том, что метрическое поле римановой геометрии однозначно определяет *бесконечно малый параллельный перенос*, который переводит векторы, приложенные в точке P , в векторы, приложенные в бесконечно близкой точке P' . Описываемая этим процессом *аффинная связность* является основным понятием аффинной дифференциальной геометрии. Параллельный перенос векторов содержит как частный случай *проективный* процесс переноса вектора в определяемом им направлении, процесс, который в реальном мире проявляется в виде тенденции к сохранению поля инерции. После этого становится понятным произведенный Эйнштейном синтез Евклида и Ньютона, становится понятным, каким образом метрическое поле определяет инерцию, а потому — в силу закона равенства тяжелой и инертной масс — и гравитацию. Непосредственно метрикой определяется и световой конус (*Nullkegel*), т.е. в реальный мир вводится причинная структура, разбиение мира на прошлое и будущее, осуществляемое световым конусом (той части конуса с вершиной в точке P , которая обращена в будущее, принадлежат все те и только те мировые точки, до которых может дойти сигнал, исходящий из точки P ; той же его части, которая обращена в прошлое, принадлежат те и только те мировые точки, из которых может быть послан сигнал, доходящий до точки P). Наоборот,

поскольку световой конус задает в точке P угловую меру и относительные длины всех векторов, приложенных в точке P , математик с полным основанием говорит, что в этом случае мы имеем дело со свойством *конформности*. Итак, мы приходим к следующей схеме:



Первая попытка объединить гравитацию и электромагнетизм на основе геометризации электромагнитного поля была предпринята мною в 1918 году [3]. Она была основана на следующих соображениях. Если воспользоваться бесконечно малым параллельным переносом и обнести вектор вдоль замкнутой кривой в нашем мире, то по завершении обхода вектор, вообще говоря, не вернется в исходное положение. Это свойство известно под названием неинтегрируемости переноса вектора. Поскольку числовая мера вектора при параллельном переносе остается неизменной, длина конечного вектора заведомо совпадает с длиной начального вектора, хотя оба вектора могут и не совпадать по направлению. В этом я усмотрел некую непоследовательность. Речь идет о *калибровке*. Выбор локального репера предполагает выбор определенной единицы длины. Спрашивается, следует ли считать равноправными такие реперы, которые переходят друг в друга при растяжении, должно ли растяжение входить в группу преобразований наряду с поворотами, существует ли некая выделенная единица длины? Классическая геометрия и физика дают утвердительный ответ на первую альтернативу. Тем самым метрическая геометрия сводится поначалу к геометрии конформной. Основным соотношением, которое возникает между векторами, имеющими начало в одной и той же точке P , является их конгруэнтность, или равенство длин. Если мы абстрагируемся от направления, то понятие *вектора* переходит в понятие *отрезка*: два вектора определяют один и тот же отрезок тогда и только тогда, когда они конгруэнтны. Векторы с началом в точке P образуют некоторое четырехпараметрическое, а отрезки — лишь некоторое однопараметрическое многообразие. После того, как единица длины задана посредством локального репера, каждому вектору можно однозначно сопоставить его числовую меру. Но одной лишь конформности оказывается недостаточно; Эйнштейн пытался было пойти по этому пути, но быстро отказался от своего намерения. Необходим некий принцип, позволяющий переносить отрезки, отложенные из точки P , в бесконечно близкие точки. В данном случае речь идет не о параллельном переносе векторов, а о конгруэнтном переносе отрезков. Я предположил, что первоначальный мир обладал метрической, а не аффинной структурой. В этом я следовал по стопам Эйнштейна и Римана. Но описанное выше обобщение оставляет место и для *неинтегрируемого переноса отрезков*. После введения всюду определенной калибровки с помощью локальных реперов конгруэнтный перенос можно задать, указав то *изменение dl длины l произвольного отрезка, отложенного из точки P , которое происходит при*

переносе. Величина dl пропорциональна l , и коэффициент пропорциональности линейно зависит от величины PP' , на которую мы производим перенос, с компонентами dx^P ; он имеет вид

$$\Sigma f_p dx^P.$$

Для полного определения метрического поля требуется, таким образом, помимо величин h_α^P , задать четыре изменяющиеся от местоположения к местоположению функции f_p , которые являются коэффициентами линейной дифференциальной формы, имеющими инвариантный смысл. При изменении калибровки растяжение локального репера в отношении e^λ : 1 преобразует величины h_α^P в $e^\lambda h_\alpha^P$; одновременно, как следует из определения, величины f_p заменяются на $f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$. Таким образом, имеет место ин-

вариантность объективных законов относительно подстановки

$$h_\alpha^P \rightarrow e^\lambda h_\alpha^P, \quad f_p \rightarrow f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p},$$

где λ — произвольная функция местоположения (*калибровочная инвариантность*). Далее, *электромагнитное поле* зависит ровно от четырех потенциалов φ_p , которые служат коэффициентами линейной дифференциальной формы. Известно также, что физический смысл имеют не сами потенциалы, а напряженности полей, т.е. представляемое потенциалами φ_p поле

не изменяется, если вместо φ_p взять $\varphi_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$. Это навело меня на

мысль отождествить геометрические величины f_p с потенциалами электромагнитного поля, измеренными в некоторых заранее не известных единицах. Правильность этого предположения можно было проверить, исследовав, совпадают ли вытекающее из физических законов взаимодействие материи и величин f_p с экспериментальными данными относительно ее взаимодействия с потенциалами электромагнитного поля. То, что испытывает со стороны материи и оказывает на материю такое же воздействие, какое испытывает и какое оказывает электромагнитное поле, и есть электромагнитное поле. Все экспериментально данное относительно потенциалов электромагнитного поля сосредоточено в уравнениях Максвелла. Однако решение вопроса зависит от того, какой закон взаимодействия положить в основу. На деле в рамках моей теории можно принять такую величину взаимодействия, которая приводит к желаемому совпадению. Одновременно это дало "космологический член", введенный незадолго до того Эйнштейном в уравнения гравитации (наряду с другими малыми членами того же порядка), и выяснилось, что единица измерения, с помощью которой наша теория измеряет электромагнитные потенциалы, — того же порядка, что и космологический член. Поэтому экспериментальной проверке развитая мною теория была бы доступна лишь в том случае, если бы оказалось возможным охватить наблюдениями существенную часть Вселенной. Должен заранее признать, что предложенная мною геомет-

ризация электромагнитного поля в наглядном отношении несколько не очевидна, если исходить из физической сущности этого поля; в частности, я не мог выдвинуть никаких априорных соображений о связи произвольного аддитивного члена $\partial\lambda/\partial x^P$, входящего в соответствии с данными опыта в компоненты электромагнитных потенциалов, с калибровочным множителем e^λ , который требуется классической геометрией. Взаимосвязь между величинами f_P и потенциалами возникает лишь как результат величины, характеризующей взаимодействие специального вида (*einer besonder Wirkungsgrösse*). Приступая к выбору этой величины, я располагал лишь весьма скудным набором интегральных инвариантов. Принцип калибровочной инвариантности чрезвычайно сузил широкий диапазон открывавшихся ранее возможностей. В этом, быть может, был главный успех моей теории, от которой я первоначально ожидал, что она позволит, используя некие умозрительные построения, вполне однозначно получить величину, характеризующую это взаимодействие. Калибровочная инвариантность соответствует *закону сохранения электрического заряда* — так же, как инвариантность относительно преобразований координат приводит к закону сохранения энергии и импульса. В этом был заключен сильный формальный аргумент в пользу данной теории: следовало бы *a priori* ожидать, что закон сохранения заряда имеет своим источником некий принцип инвариантности поля, содержащий *одну* произвольную функцию.

Моя теория встретила возражения. Проф. Эддингтон привлек внимание к английскому переводу Библии и привел слова из "Второзакония": "В кисе твоей не должны быть двоякие гири, бóльшие и меньшие. В доме твоём не должна быть двоякая ефа, бóльшая и меньшая. Гиря у тебя должна быть точная и правильная, и ефа у тебя должна быть точная и правильная". Эйнштейн сразу выдвинул то возражение, что согласно спектроскопическим данным длины волн в спектре, например атома водорода, не зависят от его предыстории, что при одинаковых условиях они всегда имеют одно и то же распределение. В ответ я заметил, что делать какие-либо предположения относительно поведения реальных атомов можно лишь на основе реально действующих законов взаимодействия; что же касается закона взаимодействия, который я положил в основу, то из него следует правдоподобное, хотя и не доказанное строго предсказание: длины волн не подчиняются конгруэнтному переносу, а в каждом местоположении устанавливаются заново в определенном, зависящем от строения атомов, отношении к радиусу кривизны мира в этом местоположении. Радиус кривизны есть один из отрезков, которые могут быть вычислены, исходя из основных величин рассматриваемой теории. Количественная изменчивость метрического поля делает, по-видимому, помимо прочего, возможной еще и выделенную калибровку — благодаря тому, что радиус кривизны всюду можно использовать как единицу длины. Таким образом, атомистика косвенно одерживала верх над космологией. Это выглядело почти как крушение всех надежд. Тем не менее ситуацию спасало безразмерное число порядка 10^{20} , входящее в закон гравитации. Исходя из этого, следовало ожидать, что радиус мира относится к радиусу электрона примерно

как 10^{20} (или несколько меньшая степень числа 10) к 1. Квадрат этой величины, т.е. 10^{40} , равен отношению радиуса электрона к его "гравитационному радиусу", который показывает, как сильно масса электрона возмущает окружающее метрическое поле. При космологической интерпретации систематического красного смещения спектральных линий спиральных туманностей предположение о том, что отношение радиуса мира к радиусу электрона равно 10^{40} , приводит к не такому уж плохому совпадению с данными наблюдений [4]. Я убежден также в том, что масса сама по себе не является ни инертной, ни тяжелой, а порождена гравитационным полем, и поэтому определять ее следует как поток гравитационного поля, проходящий через наружную оболочку частицы, — так же, как мы вслед за Фарадеем определяем заряд, вычисляя поток электрического поля, проходящий через такого рода оболочку. Хорошая теория должна делать невозможным определение массы без учета гравитации. Если учесть эти соображения, то взаимосвязь атомистики и космологии перестает казаться столь фантастической, как это может показаться на первый взгляд⁷.

Предложенная мной геометрическая теория электромагнитного поля не принесла, однако, никаких плодов в смысле физических следствий, относящихся к атомистике. Невольно закралось сомнение: может быть, следуя классической геометрии и физике и отрицая существование абсолютной единицы длины, я совершил ошибку? Ведь атомистика дает нам в руки абсолютные единицы для измерения всех величин. В классическую эпоху при попытке решить эту проблему теоретическая физика сталкивалась с дилеммой. С одной стороны, например, законы механики должны относиться ко всем значениям массы и заряда движущихся тел; с другой стороны, из точных законов должно получаться, что в качестве предельно элементарных частиц могут существовать только электроны и протоны, обладающие определенными значениями заряда и массы. Квантовая физика рассматривает уравнения поля как правила, позволяющие вычислять вероятности для отдельных элементарных частиц. Лишь после квантования эти уравнения становятся применимыми к любому числу таких частиц. Поэтому у меня сегодня нет сомнений в том, что законы поля обязательно содержат атомистические константы. Например, в установленный Дираком [5] закон поля электрона в качестве абсолютной константы входит "длина волны электрона" — число $\hbar/mc$. Тем самым основной принцип моей теории — принцип относительности измерения длины — приносится в жертву атомизму и теряет свою убедительность.

Еще одно принципиальное соображение сводится к следующему. В теоретической картине мира переход от f_p к $-f_p$ означает объективное изменение метрического поля, так как это нечто совсем иное, чем увеличение или уменьшение отрезка при конгруэнтном переносе по замкнутому пути. Но принятый закон взаимодействия не позволяет выбрать знак перед f_p на основе наблюдаемых явлений. Таким образом, вопреки приведенному выше теоретико-познавательному тезису теоретическая картина мира содержит в этом пункте неопределенность (*Verschiedenheit*), не устранимую никакими данными наблюдений.

Эддингтон подошел к проблеме единства электричества и гравитации с другой стороны [6]. Он предположил, что первоначально мир наделен не метрической структурой, а лишь аффинной связностью; по замыслу Эддингтона, все физические величины выводимы из инфинитезимального параллельного переноса векторов. Из инерции можно непосредственно извлечь лишь свойство проективности, но не аффинную связность. Предпринималась ли попытка обойтись только этим свойством проективности (по аналогии с эфемерной идеей Эйнштейна сохранить от метрики лишь конформную часть — причинную структуру, зависящую от того, как распространяются световые сигналы), мне неизвестно. В пользу подхода Эддингтона а priori можно сказать, что аффинная связность играет поистине решающую роль при формулировке физических законов. Поскольку эти законы связывают состояния в соседних пространственно-временных точках, в них входят дифференциалы величин, характеризующих состояния. Каждая такая величина, например, потенциал электромагнитного поля, обладает определенными компонентами относительно локального репера. Ее обычный дифференциал есть разность компонент в двух бесконечно близких точках P и P' относительно любого из двух заданных в этих точках локальных реперов. Однако для формулировки инвариантных законов нужен не обычный, а ковариантный дифференциал; он представляет собой разность значений компонент в точках P и P' , отнесенных к локальному реперу в точке P или к *локальному реперу, который получается из него при параллельном переносе в точку P'* ; поэтому ковариантные дифференциалы зависят только от локального репера в точке P и при повороте его преобразуются в точности так же, как компоненты самой величины, характеризующей состояние. В римановой геометрии структурное поле рассматривается как вложение или *ориентация* (локального нормального репера), в дифференциальной аффинной геометрии — как закон, по которому производится *сдвиг* (параллельный перенос векторов). Моя же теория носит смешанный характер, поскольку в ней метрика рассматривается отчасти как ориентация (конформная часть), отчасти как сдвиг (конгруэнтный перенос отрезков).

Каким же образом Эддингтон, исходя из предложенного им аффинного подхода, объяснит метрические свойства природы, в частности, поведение часов и масштабных стержней? Ответ: для этого Эддингтон воспользовался в качестве средства *определения* установленным Эйнштейном космологическим законом гравитации, согласно которому компоненты кривизны, вычисляемые по аффинной связности, пропорциональны величинам, описывающим метрическое поле; для Эддингтона тензор кривизны есть *per definitionem* метрический тензор. Это означает, что в его теории масштаб в *каждом направлении* задается характерным для этого направления радиусом кривизны мира; что касается моей теории, то в ней неизменность масштаба, который может поворачиваться вокруг точки P , гарантируется заложенной в ее основу метрической структурой, а согласование с кривизной достигается лишь благодаря продолжающему сохраняться общему для всех направлений растяжению или сжатию. Вторую систему уравнений, которые позволили Эйнштейну вслед за Леви-Чивитой вывести аффинную

связность из метрических основных величин, Эддингтону пришлось превратить из дифференциальных уравнений в законы природы. Должен признаться, что я не вижу, как избежать этого шага, если стремиться к совпадению с данными опыта. Недостаточно обеспечить, чтобы компоненты кривизны порождали метрический тензор, — надо показать, что эти величины оказывают на поведение часов, масштабов и т.д. в точности такое же влияние, какое мы приписываем метрическому полю. Это может, естественно, произойти в предположении определенных законов природы, накладывающих ограничения на аффинную связность. Эйнштейн подхватил предложенную Эддингтоном аффинную теорию поля и попытался дополнить ее подходящим принципом взаимодействия, чтобы удовлетворить фактам опыта. Сразу же выяснилось, что в этом случае имеется гораздо больше интегральных инвариантов, чем в моей теории. С одной стороны, это можно рассматривать как преимущество, поскольку тем самым оказывается больше свободы для согласования теории с опытом. С другой стороны, в этом заключен и некий недостаток; во всяком случае, моя установка прямо противоположна, поскольку я склонен считать удовлетворительной лишь такую теорию, которая не оставляет никакой свободы и согласно которой величины взаимодействия, характеризующие процессы природы, оказываются единственно возможными и *по чисто математическим причинам*. Эйнштейну в предложенном им последнем варианте аффинной теории удалось получить такие величины взаимодействий, из которых вытекали в точности те же законы природы, что и из моей метрической теории, включая малые космологические члены и все численные коэффициенты. Должен признаться, что причина подобного совпадения мне непонятна. Но во всяком случае оно учит тому, что обе соперничающие концепции являются лишь различными геометрическими одеяниями одного и того же положения вещей и что вообще на концепции эти следует смотреть скорее как на геометрические покровы, чем на подлинные геометрические теории электромагнетизма (*Elektrizität*). Борьба между аффинной и метрической теорией электромагнетизма стала тем самым в определенной мере беспредметной — тем более, что, пожалуй, дело уже не в том, какая из двух теорий одержит победу и выживет, а в том, как их похоронить: как близнецов в одной общей или каждого в своей собственной могиле?!

Не стану излагать здесь попытки Т. Калуцы и О. Клейна — попытки, вряд ли имеющие большие перспективы на успех, — включить электромагнитный потенциал в метрический тензор путем перехода от четырехмерного мира к пятимерному [7]. Дискуссионными в этом подходе с моей точки зрения являются лишь соображения О. Веблена, высказанные в мой адрес и состоящие в том, что пять координат Калуцы — Клейна можно рассматривать как однородные координаты в четырехмерном мире по аналогии с однородными проективными координатами*).

*) Через несколько месяцев после моего доклада была опубликована статья О. Веблена и Б. Хоффмана "Проективная теория относительности" (Veblen O., Hoffmann B. Projective Relativity // Phys. Rev. — 1930. — V. 36. — P. 810), открывшая перед этим направлением благоприятные перспективы.

Около двух лет Эйнштейн упорно идет по новому следу [9]. Наряду с римановой метрикой он в качестве основной структуры вводит *дальний параллелизм* векторов. Он, таким образом, предполагает, что все локальные реперы связаны между собой, в результате чего для всех них возможны лишь одновременные и одинаковые повороты. Эта их связь не нарушается и при параллельном переносе Леви-Чивиты, задаваемом римановой метрикой. Эйнштейн порывает с инфинитезимальной точкой зрения. Последствия этого равнозначны тому, как если бы он бросил на произвол судьбы все, что было достигнуто путем перехода от специальной теории относительности к общей. Возместить потери сколько-нибудь осязаемым выигрышем пока не удалось. Например, до сих пор остается неясным, каким образом можно было бы получить закон сохранения энергии и импульса. Исходя из общих соображений (*spekulativ*), я считаю, что геометрия, положенная в основу этой теории, а priori неестественна; я не могу себе представить, что за сила могла бы заставить локальные реперы застыть в том положении, какое они занимают, будучи повернутыми друг относительно друга. Сильный физический аргумент против такой картины — это закон сохранения вращательного момента. Как я уже упоминал, этот закон эквивалентен требованию инвариантности, предполагающему, что локальные реперы в различных мировых точках независимы и могут свободно вращаться друг относительно друга. Кроме того, в эйнштейновской геометрии существуют прямые, или геодезические, двух сортов — в зависимости от того, подвергается ли направление инфинитезимальному параллельному переносу Леви-Чивиты или дальнему параллелизму. В природе нет никаких указаний на то, что инерция ведет себя столь же двойственно.

Я считаю, что открытие поля материи полностью изменило ситуацию за последние 4—5 лет. Все эти геометрические выкрутасы оказались преждевременными — мы вернулись на твердую почву физических фактов. Величина ψ , описывающая поле материи, обладает двумя компонентами ψ_1 и ψ_2 , которые зависят от локального репера; я должен кратко пояснить те преобразования, которым подвергаются эти компоненты при поворотах. Я ограничусь поворотами трехмерного пространства, которые можно рассматривать как повороты единичной сферы вокруг начала пространственной декартовой системы координат. Произведем стереографическую проекцию и перейдем от сферы к плоскости экватора, которую, следуя Гауссу, будем считать плоскостью комплексной переменной ξ ; в однородной записи полагают $\xi = \psi_2 / \psi_1$. Если обозначить символом $\bar{\psi}$ величину, комплексно сопряженную с ψ , и отбросить знаменатель

$$t = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2,$$

то формулы стереографической проекции будут иметь вид

$$x = \bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1, \quad y = i(\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1),$$

$$z = \bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2.$$

Тогда каждому повороту D — ортогональному преобразованию пространственных координат x, y, z , не затрагивающему время t , — отвечает неко-

торое линейное преобразование компонент ψ_1 и ψ_2 , под действием которого приведенные выше выражения претерпевают требуемое преобразование D . Разумеется, преобразование обеих компонент ψ при повороте D определено лишь с точностью до произвольного постоянного множителя $e^{i\lambda}$, равного по модулю единице, который я с вашего разрешения назову калибровочным множителем. Закон преобразования компонент ψ был впервые установлен Паули и с полной надежностью подтверждается спектроскопическими данными, говоря точнее, структурой дублетных термов спектров щелочных элементов и тем, что эти дублетные компоненты, как показывает эффект Зеемана, обладают *полуцелыми внутренними квантовыми числами*. Из предложенного Шрёдингером перевода классических уравнений движения на язык квантовой механики — в уравнения, все еще оперирующие скалярной функцией ψ , — следует принцип, согласно которому при переходе от свободного электрона к электрону, движущемуся в заданном электромагнитном поле, действующий на ψ дифференциальный оператор $\partial/\partial x_p$ подлежит замене на

$$\frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{ie}{2\pi h} \varphi_p,$$

где φ_p — потенциалы электромагнитного поля ($-e$ — заряд электрона, h — квант действия). В руках Дирака этот принцип превратился в яркую путеводную нить и позволил вывести уравнение движения электрона со спином (для ψ с двумя компонентами). Удалось получить правильные выражения для энергии и тем самым объяснить аномальный эффект Зеемана, тонкую структуру атома водорода и т.д. Если положить $(e/2\pi h)\varphi_p = f_p$, то сформулированное выше правило становится равнозначным принципу, который формально выглядит так же, как наш старый принцип калибровочной инвариантности: *уравнение движения электрона инвариантно относительно подстановки*

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda} \psi, \quad f_p \rightarrow f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p} \quad (*)$$

(λ — произвольная функция мировой точки). Этот новый принцип — закономерный результат развития квантовой теории, позволяющий пополнить новыми обильными опытными фактами сокровищницу нашей теории поля.

Рассматриваемый принцип задним числом может быть осмыслен и в рамках общей теории относительности [9]. Мы будем прочно привязаны к римановой метрике, если единица длины задается атомистически — длиной волны электрона h/mc . Компоненты величины ψ по самой своей сути определены относительно нормального репера лишь с точностью до калибровочного множителя $e^{i\lambda}$. В специальной теории относительности, где репер ведет, если можно так выразиться, вольное существование, этот калибровочный множитель постоянен; но в общей теории относительности, где реперы локальны — привязаны каждый к своей мировой точке —

и их можно поворачивать независимо один от другого, в качестве калибровочного множителя необходимо выбрать произвольную функцию местоположения. Подобно тому, как в моей старой теории после выбора конформности в качестве первичного свойства для однозначной определенности ковариантных дифференциалов всех функций состояния в каждой точке требовалась линейная дифференциальная форма $\Sigma f_p dx_p$, так же и здесь для однозначного определения ковариантных дифференциалов материальных величин ψ требуется аналогичная линейная форма. С калибровочным множителем эта форма связана таким образом, что возникает инвариантность относительно подстановки (*). После выбора подходящей величины взаимодействия (*Wirkungsgrösse*) мы получаем уравнения Максвелла для электромагнитного поля, уравнения Эйнштейна для гравитации и уравнения Дирака для материи. Величины f_p при этом отождествляются с потенциалами электромагнитного поля. Этот новый принцип калибровочной инвариантности приводит к закону сохранения электрического заряда совершенно так же, как и старый. С формальной точки зрения между этими принципами, таким образом, налицо сильнейшее сходство, однако с содержательной (*sachliches*) точки зрения между ними имеются важные различия.

1. Новый принцип взращен на почве *опыта* и представляет собой концентрированное выражение огромного богатства экспериментальных данных, полученных в спектроскопии.

2. Калибровочный множитель $e^{i\lambda}$ входит не в метрические величины h_p^α , а в материальные величины ψ .

3. Показатель экспоненты не вещественный, а чисто мнимый. Упрек в адрес старой теории, что знак величины $\pm f_p$ не определен, снимается неопределенностью в знаке величины $\sqrt{i}$. Еще при создании старой теории меня не покидало предчувствие, что калибровочный множитель должен иметь вид $e^{i\lambda}$, только я, естественно, не мог найти для него геометрическую интерпретацию. Работы Шрёдингера и Лондона [10] подтвердили это требование, указав на связь с квантовой теорией — связь, которая становится все более отчетливой.

4. Здесь существует естественная единица измерения потенциалов f_p электромагнитного поля — это не известная космологическая величина, а известная атомистическая величина $e/2\pi\hbar$.

Я ни на миг не сомневаюсь, что от моей старой теории калибровочной инвариантности необходимо отказаться в пользу новой теории. Новая калибровочная инвариантность — я сохраняю за ней прежнее название из-за далеко идущего формального совпадения со старой инвариантностью, — по-видимому, должна иметь большое значение для дальнейшего развития квантовой теории, что особенно ясно видно в случае квантования уравнений поля, недавно произведенного Гейзенбергом и Паули. Благодаря новой калибровочной инвариантности электромагнитное поле становится таким же необходимым дополнением поля материи, каким в старой теории была гравитация. Как видно из п. 2, калибровочный множитель входит не в гравитационные величины h_p^α , а в ψ . С точки зрения здравого физического смысла, не испорченного умозрительными построениями, пожалуй, несравненно приятнее то, что электромагнитное поле следует в кильватере

за кораблем материи, а не гравитации. Г-н Фок назвал вывод новой калибровочной инвариантности из общей теории относительности, к которому он пришел почти одновременно со мной, геометризацией теории электрона, разработанной Дираком. Не могу с ним согласиться. Мне кажется, что связывая электромагнетизм (*Elektricität*) с материей, а не с гравитацией, мы тем самым отказываемся от геометризации. Боюсь, что тенденцию к геометризации, получившую столь убедительное и наглядное подкрепление в случае гравитации, не удалось распространить на другие физические сущности. Если мы все же захотим продолжить эту тенденцию, то необходимо придумать некую естественную, изящную геометрию, в которой для описания соответствующего ей структурного поля, помимо величин h_{α}^p , требуется функция ψ , описывающая состояния и обладающая трансформационными свойствами поля материи. Таким образом, исходить следует из геометризации поля материи; если это удастся сделать, то электромагнитное поле появится само собой, как бесплатное приложение. Я не имею ни малейшего представления о том, какой должна быть эта геометрия*).

При описанном нами подходе квантование уравнений поля затрагивает не только величину ψ и потенциалы электромагнитного поля f_p , но и метрические величины h_{α}^p . Поэтому сумма углов жесткого треугольника не только изменяется при движении треугольника в гравитационном поле, но и подпадает под соотношение неопределенностей Гейзенберга. Когда Риман строил свою дифференциальную геометрию, предположив, что аксиомы Евклида выполняются не только в "большом", но и в бесконечно малом, он все же забыл добавить, что "эмпирические понятия, на которых основаны метрические свойства (*Massbestimmungen*) пространства, — понятия твердого тела и светового луча — утрачивают смысл в бесконечно малом". Можно полагать, что квантовая теория ответила на вопрос о том, каким образом при приближении к бесконечно малому эти понятия становятся зыбкими: если размеры окрестности столь малы, что становится ощутимой конечная величина кванта действия, то статистическая неопределенность значений всех физических величин проявляется все более и более сильно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Переписка Лейбница и Кларка. Пятое письмо Лейбница, § 52.
2. Rend. Circ. Mat. Palermo — 1917. — V. 42.
3. Вместо того чтобы приводить данные о моей статье на эту тему, я лучше сошлюсь на изложение вопроса в моей книге "Пространство, время, материя" (5-е изд., 1923, см. особенно § 40, 41).
4. Weyl H. Raum, Zeit, Materie. — 5. Aufl. — S. 323; Naturwiss. — 1924. — Bd. 12. — S. 202; Phil. Mag. (7). — 1930. — V. 9. — P. 936.
5. Dirac P.A.M. // Proc. Roy. Soc. Lond. (A). — 1928. — V. 117. — P. 610.

* В "проективной теории относительности" Веблена к скалярной функции ψ прибегают не от хорошей жизни, однако до сих пор неясно, откуда должна появиться не скалярная функция ψ с относящимся к ней законом преобразования Паули, совершенно чуждым современной геометрии.

6. Proc. Roy. Soc. Lond. (A). — 1921. — V. 99. — P. 104. С предложенной Эддингтоном аффинной теорией поля, а также с дальнейшей ее разработкой, которую осуществил Эйнштейн, немецкому читателю лучше всего познакомиться по немецкому переводу книги Эддингтона: *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*. — Berlin, 1925 (см. с. 317 и далее).
7. *Kaluza Th.* // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.* 1921. — S. 966; *Klein O.* // *L. Phys.* — 1926. — Bd. 37. — S. 895; 1927. — Bd 46. — S. 188.
8. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.* — 1928. — S. 217, 224; 1929. — S. 2.
9. *Weyl H.* *Elektron und Gravitation* // *Z. Physik.* — Bd 56. — S. 330.
10. *Schrödinger E.* // *Z. Physik.* — 1922. — Bd 12. — S. 13. *London F.* // *Z. Physik.* — 1927. — Bd 42. — S. 375.

Ч А С Т Ь ІІІ

ВЕЛИКИЕ МАСТЕРА

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО

14 февраля 1943 г. в Гёттингене в возрасте 81 года ушел из жизни великий математик Давид Гильберт. Оглядываясь назад, мы видим, что та эпоха математики, которая несет на себе печать его духа и ныне постепенно уходит за горизонт, отмечена более гармоничным сочетанием решений отдельных конкретных проблем и формирования общих абстрактных понятий, нежели предшествующая и последующая эпохи. Труды самого Гильберта внесли немалую лепту в достижение этого счастливого равновесия, и направления наших нынешних исследований во многих случаях могут быть прослежены вплоть до исходивших от Гильберта импульсов. Наше поколение не выдвинуло ни одного математика, который бы мог сравниться с ним.

Америка многим обязана Гильберту. Немало молодых математиков этой страны, сыгравших впоследствии видную роль в развитии американской математики, отправлялись в 1900—1914 гг. в Гёттинген, чтобы учиться у Гильберта. Но круг математиков, на которых повлияли поставленные им проблемы, его точки зрения и методы, несравненно шире круга тех, кто непосредственно прошел вдохновляющую школу Гильберта.

Гильберт был совершенно чужд национальным и расовым предрассудкам; во всех общественных вопросах, независимо от того, касались ли они политики, социальных отношений или духовной жизни, он неизменно отстаивал свободу, нередко в полной изоляции перед лицом сплоченного большинства окружавших его лиц. Он сохранил ясную голову и не боялся плыть против течения даже среди бурных страстей, вызванных первой мировой войной, которые выбили почву из-под ног многих ученых. Не случайно, когда нацисты произвели в 1933 г. "чистку" германских университетов, наиболее тяжелый удар пришелся по школе Гильберта, и его наиболее близкие сотрудники покинули Германию либо добровольно, либо спасаясь от преследований нацистов. Сам Гильберт был слишком стар и остался; однако период, следовавший за 1933 годом, стал для него временем все более углубляющегося трагического одиночества.

Гильберт родился 23 января 1862 г. в иной Германии; его родным городом был Кёнигсберг, форпост Пруссии на востоке; город Канта. Вопреки традициям германских студентов, имевших обыкновение странствовать,

переезжая из университета в университет, Гильберт получил образование дома, и именно в университете своего родного города он поднялся на первые ступени академической лестницы, став приват-доцентом, а по прошествии должного времени — экстраординарным профессором. Всю свою жизнь Гильберт говорил с неискоренимым балтийским акцентом. Репутация Гильберта как ведущего алгебраиста вполне установилась, когда по инициативе Феликса Клейна ему в 1885 г. предложили занять должность ординарного профессора Гёттингенского университета. С тех пор до конца дней Гильберт оставался в Гёттингене. В 1930 г. он вышел в отставку.

Пытаясь разобраться в том, кто оказал решающее влияние на Гильберта в годы его становления как ученого, поражаешься странно противоречивому характеру его отношения к Кронекеру: испытывая влияние Кронекера, Гильберт восстает против него. Работы Кронекера, несомненно, имели главенствующее значение для Гильберта в алгебраический период его творчества. Но почтенный старец из Берлина, как казалось Гильберту, использовал свою власть и свой авторитет лишь для того, чтобы удерживать математику в прокрустовом ложе категорических философских принципов и подавлять те направления, которые не согласуются с ними: Кронекер настаивал на конструктивных доказательствах теорем существования в терминах целых чисел, в то время как Гильберт одним из первых выступил в защиту общих теоретико-множественных идей Георга Кантора. Горькое чувство усугубляли и некоторые личные мотивы*). Запоздалое эхо старой вражды слышится в полемическом выпаде против интуиционизма Брауэра, которым шестидесятилетний Гильберт начинает свою первую статью о новом обосновании математики ("Neubegründung der Mathematik", 1922); разящие удары Гильберта нацелены против призрака Кронекера, который, казалось, восстал из могилы. Но противоречивость и неоднозначность проявляется и здесь: борясь с Кронекером, Гильберт следует за ним; рассуждая со строго интуиционистских позиций, он в то же время считает необходимым оберегать неинтуиционистскую математику.

В кёнигсбергский период на молодого Гильберта наиболее значительное влияние оказала его дружба с Адольфом Гурвицем и Минковским. Своим математическим образованием Гильберт обязан не столько лекциям, профессорам или книгам, сколько дружеским беседам. "Во время бесчисленных прогулок, — вспоминал впоследствии Гильберт в статье "Памяти Гурвица", — иногда происходивших каждый день, мы за эти восемь лет обследали все закоулки математической науки, и Гурвиц с его обширными, основательными и хорошо упорядоченными познаниями неизменно был нашим руководителем". Более тесная и нежная дружба навсегда связала Гильберта с Минковским. Кёнигсбергский кружок распался в 1892 г., когда Гурвиц уехал в Цюрих, куда вскоре отправился и Минковский. Гильберт сначала стал преемником Гурвица в Кёнигсберге, а затем переехал в Гёттинген. В 1902 г. Гильберт и Минковский встречаются в Гёт-

*) О том, какие страдания причиняла Георгу Кантору с его повышенной возбудимостью оппозиция со стороны Кронекера, красноречиво свидетельствуют бурные вспышки негодования в письмах Кантора к Миттаг-Леффлеру; см. Schoenflies A. Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen // Acta Math. — 1928. — Bd 50. — S. 1—23.

тингене, где для Минковского была создана новая кафедра математики. Двое друзей становятся главными героями того великого и блестящего периода, который наша наука пережила в последующее десятилетие в Гёттингене, периода, незабываемого для тех, кто прошел через него. Клейн, в жизни которого математические исследования перестали занимать центральное место, правил математическим миром как далекое, но всеблагое божество в заоблачных высях. Но вскоре счастливое созвездие распалось из-за скоропостижной кончины Минковского в 1909 г. В речи, посвященной памяти Минковского и произнесенной на заседании Гёттингенского научного общества, Гильберт сказал о своем друге: "Нас свела наша наука, которую мы любили превыше всего. Она казалась нам цветущим садом. В этом саду проложено немало дорожек, по которым приятно бродить на досуге, поглядывая по сторонам, и наслаждаться, не очень утруждая себя, особенно если рядом с тобой товарищ, разделяющий твои мысли. Но нам с Минковским нравилось искать и тайные тропинки, открывать новые виды, красота которых по нашему мнению стоила того, чтобы ради нее задержаться; и если нам удавалось поделиться нашими открытиями друг с другом, нашей радости не было границ"¹.

Я привожу эти слова не только как свидетельство дружбы редкой глубины и плодотворности, основанной на общности научных интересов, но и потому, что мне слышатся в них отзвуки нежной дудочки гаммельнского крысолова, каковым, несомненно, был Гильберт, соблазнивший столь многих крыс последовать за ним в глубокие воды математики. Если требуются примеры, я могу рассказать собственную историю. Я приехал в Гёттинген восемнадцатилетним провинциалом, выбрав Гёттингенский университет главным образом потому, что директор моей гимназии случайно оказался двоюродным братом Гильберта и снабдил меня рекомендательным письмом к нему. Во всей полноте невинности и невежества я записался на объявленный Гильбертом в тот семестр курс лекций о понятии числа и квадратуре круга. Большая часть курса оказалась недоступна моему разумению. Но двери нового мира распахнулись передо мной, и хотя я сидел у ног Гильберта не так уж долго, в моем юном сердце созрела решимость во что бы то ни стало прочитать и изучить все, написанное этим человеком. По окончании первого курса я отправился домой, держа под мышкой его "Zahlbericht"², и за летние каникулы тщательно проштудировал эту работу, не будучи ранее знаком ни с элементарной теорией чисел, ни с теорией Галуа. Это были счастливейшие месяцы моей жизни, и их сияние сквозь годы, обремененные грузом забот и сомнений, которых не миновал никто из нас, и поныне согревает мне душу.

Влияние ученого на эпоху, в которой он живет, не находится в прямо пропорциональной зависимости от научного веса его исследований. Разумеется, исследования Гильберта необычайно глубоки и универсальны, но его огромное влияние объясняется не только этим. Гаусс и Риман, если назвать лишь двух других гёттингенцев, были, конечно, фигурами не меньшего масштаба, чем Гильберт, но их деятельность не вызывала особого отклика у современников, и вокруг них не образовалась "школа" преданных учеников и последователей. Несомненно, это отчасти объясняется тем, что

ситуация изменяется со временем, однако более важную роль играют, по-видимому, человеческие характеры. Склонность к уединению, даже к стремлению скрыться от людей вполне совместима с высокими творческими способностями. Но Гильберт по природе отличался необычайным жизнерадостием, он искал общения с людьми, прежде всего с молодыми учеными, и получал истинное наслаждение, обмениваясь мыслями с другими. Своих учеников, по крайней мере тех, к которым он проявлял более глубокую личную заинтересованность, Гильберт учил так же, как некогда сам учился у Гурвица, — совершая с ними дальние прогулки по лесам, окружающим Гёттинген, или в дождливые дни, подобно "перипатетикам", разгуливал с ними по дорожкам своего крытого сада. Его оптимизм, духовная страстность, непоколебимая вера в высшую ценность науки и уверенность в способности разума находить простые и ясные вопросы были неотразимо заразительны. Если Кант через критику и анализ пришел к принципу примата практического разума, то Гильберт как бы воплощал в себе принцип примата чистого разума — иногда с насмешливым высокомерием (с *arrogancia*³ в испанском смысле), иногда с обезоруживающей улыбкой интеллектуально испорченного ребенка, а в большинстве случаев — с серьезностью человека, уверенного (и обязанного быть уверенным) в том, что составляет смысл всей его жизни. Энтузиазм Гильберта уживался с критической проницательностью, но не со скептицизмом. Снобистская поза напускного равнодушия, пустопорожняя болтовня и тем более игривый цинизм были чужды окружению Гильберта. Прежде чем произнести в его присутствии ложь или пустую фразу, следовало дважды подумать: его прямота была небезопасна. Гильберт отличался необычайным трудолюбием и любил приводить слова Лихтенберга: "Гений — это трудолюбие". Но несмотря на все это, Гильберта окружала радостная и светлая атмосфера. Он обладал великой силой убеждения; иногда она позволяла даже заурядным умам высоко подниматься над их обычным уровнем и получать удивительные, хотя и изолированные результаты. Кто-то из математиков, не помню, кто именно, сказал однажды Гильберту: "Вы вынудили всех нас считать важными те проблемы, которые считали важными Вы". Присущая Гильберту сила предвидения и опыт рождали уверенность в плодотворности его указаний. Он не держал свой свет под спудом. В рукописях Гильберта нередко можно встретить выражения, говорящие о том, что он гордился изящным или неожиданным результатом и в этом своем законном чувстве удовлетворения не всегда воздавал должное тем своим предшественникам, на чьих идеях он воздвигал свои теории. Математические проблемы — не изолированные проблемы, парящие в вакууме; в них ощущается биение пульса жизни тех идей, которые благодаря нашим усилиям воплощаются в нашем историческом опыте *in concreto* и образуют тем не менее нерасторжимое целое, выходящее за рамки каждой частной науки. Гильберт обладал даром пробуждать эту жизнь; с ней он соразмерял свои личные научные усилия; за нее он считал себя ответственным в той сфере, где протекала его деятельность. В этом смысле, а отнюдь не в силу приверженности к той или иной признанной эпистемологической или метафизической доктрине Гильберт был философом. Разве не в таких личных ка-

чествах академического наставника — в большей мере, чем в объективных обстоятельствах или в общепринятых метафизических учениях, — содержит ответ на поставленный Хатчинсоном вопрос о подлинном *universitas literarum*⁴?

Если бы моей целью было нарисовать портрет Гильберта во всей полноте его личности, то мне непременно пришлось бы сказать и о его отношении к великим силам, движущим жизнью людей: к обществу и политике, к искусству, религии, морали, к нравам, семье, дружбе, любви; и я бы, вероятно, не считал себя вправе умолчать о тенях, отбрасываемых при таком обилии света. Но я хочу обрисовать лишь математическую грань личности Гильберта, чтобы хоть как-то объяснить его необычайное обаяние и колоссальное влияние. Отмечая последнее, не следует упускать из виду такой фактор, как окружающая обстановка. Немецкий университет в таком небольшом городке, как Гёттинген, в безмятежное время, предшествовавшее 1914 году, был благоприятной средой для развития научной школы. Высокий общественный престиж профессоров и всего, что связано с университетом, создавали атмосферу, подобная которой вряд ли когда-либо существовала в Америке. И коль скоро вокруг Гильберта собралась группа учеников, не слишком обремененных учебной программой и сосредоточивших все свои помыслы на научных исследованиях, то могли ли они не стимулировать друг друга! Нечто аналогичное происходило впоследствии и в Принстоне в первые годы существования Института высших исследований⁵. И в том, и в другом случае при образовании "точек конденсации" научных изысканий наблюдался своего рода "эффект снежного кома".

Прежде чем приступить к более подробной характеристике трудов Гильберта, я хочу кратко сформулировать, в чем состоит своеобразие гильбертовского математического мышления. Оно проявляется прежде всего в присущем Гильберту стиле изложения — его предельной ясности. Читая Гильберта, вы как бы совершаете прятную прогулку по залитой солнцем открытой местности. Прежде чем собраться с силами и начать взбираться ввысь, вы можете оглядеться вокруг, вам отчетливо видны все детали, все пути-дороги и водоразделы, и ваш дальнейший путь ведет прямо вверх, вам не приходится ни блуждать, ни обходить какие-либо препятствия. Стиль Гильберта не имеет ничего общего с лаконизмом большинства современных математиков, исходящих из предположения, что труд печатника и бумага стоят дорого, а усилия и время читателя — нет. Проводя полную индукцию, Гильберт находит время полностью изложить первые два шага, прежде чем сформулировать общее заключение, приводящее от n к $n + 1$. А сколь многочисленны примеры, иллюстрирующие фундаментальные теоремы в его алгебраических работах, — примеры, придуманные не *ad hoc*, а примеры, раскрывающие существо дела, заслуживающие того, чтобы их изучать!

В подходе Гильберта к математике *простота* и *строгость* шествуют рука об руку. Предыдущее поколение математиков и даже большинство аналитиков поколения Гильберта воспринимали все возрастающие требования к строгости, предъявляемые к математическому анализу со времен критики его оснований в XIX столетии, — критики, нашедшей свое наивысшее

выражение в трудах Вейерштрасса, — как тяжкое ярмо, затруднявшее их движение вперед. Гильберт многое сделал, чтобы изменить такое отношение. В знаменитом докладе "Математические проблемы", прочитанном на парижском конгрессе в 1900 году, Гильберт подчеркнул значение трудных конкретных *проблем* и их плодотворность. "Всякая научная область, — сказал он, — жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Как вообще каждое человеческое начинание связано с той или иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем. Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты"⁶. "Если ищут общие методы, не имея в виду какую-нибудь определенную задачу, то эти поиски по большей части напрасны"⁷. *Методологическое* (methodological) *единство математики* было для Гильберта результатом глубокого убеждения и опыта. Снова приведу его собственные слова: "Перед нами встает вопрос, предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадается ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет поэтому становиться все меньше. Я не верю в это и не хочу этого. Математическая наука, на мой взгляд, представляет собой неделимое целое, организм, жизнеспособность которого обуславливается связностью его частей"⁸. Характерная особенность метода Гильберта — присущий ему *прямой подход* к решению проблем, не заслоняемых алгоритмами; Гильберт всегда рассматривает вопросы в их первоизданной простоте. Яркий пример того — спасение Гильбертом принципа Дирихле, павшего жертвой критики Вейерштрасса, но таких примеров в трудах Гильберта великое множество. Его мощь, позволявшая ему одинаково пренебрегать судорогами геркулесовых усилий и хитроумными трюками и уловками, сочетается с бескомпромиссной чистотой.

Автору этих строк Гильберт оказал немалую услугу тем, что на протяжении каждого из четко ограниченных периодов своей деятельности занимался почти исключительно одной определенной группой проблем. Если он был поглощен интегральными уравнениями, то интегральные уравнения виделись ему везде; если он бросал заниматься каким-нибудь вопросом, то окончательно и бесповоротно, и обращался к чему-нибудь другому. Именно таким своеобразным путем достиг он универсальности. Я различаю пять основных периодов: (I) теория инвариантов (1885—1893); (II) теория алгебраических числовых полей (1893—1898); (III) основания (а) геометрии (1898—1902) и (б) математики в целом (1922—1930); (IV) интегральные уравнения (1902—1912); (V) физика (1912—1922). Названия этих периодов несколько более конкретны, чем должны были бы быть. Не все из алгебраических достижений Гильберта непосредственно связаны с инвариантами. Его работы по вариационному исчислению отнесены мною к работам по интегральным уравнениям. Имеются, конечно, и некоторые перекрытия периодов и несколько "блудных сыновей", нарушающих хронологическую последовательность, самый поразительный из них — доказательство Гильбертом в 1909 г. теоремы Варинга.

Доклад Гильберта о "Математических проблемах", который упоминался выше, охватывает все области нашей науки. Пытаясь разглядеть сквозь завесу времени, какое будущее нам уготовано, Гильберт поставил и рассмотрел двадцать три нерешенные проблемы, которые, как мы теперь можем подтвердить, оглядываясь назад, действительно сыграли важную роль в развитии математики на протяжении последующих сорока с лишним лет. Любой математик, решивший одну из них, занимал почетное место в математическом сообществе.

ЛИТЕРАТУРА

Собрание работ — *Gesammelte Abhandlungen* — Гильберта было опубликовано в трех томах издательством Ю. Шпрингера (Берлин) в 1932 — 1935 гг. В это издание входит его *Zahlbericht*, но не включены две книги: *Grundlagen der Geometrie* (7. Aufl., Leipzig, 1930)⁹; *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Leipzig und Berlin, 1912)¹⁰.

Гильберт является соавтором следующих трудов:

Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik. — Bd 1. — 2 Aufl. — Berlin, 1931; Bd 2. — Berlin, 1937;

Hilbert D., Ackermann W. Grundzüge der theoretischen Logik. — Berlin, 1928:

Hilbert D., Cohn-Vossen S. Anschauliche Geometrie. — Berlin, 1932;

Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik. — Bd 1. — Berlin, 1934; Bd 2. — Berlin, 1933¹¹.

В собрание работ Гильберта включены статьи Б.Л. ван дер Вардена, Г. Хассе, А. Шмидта, Р. Бернайса и Э. Хеллингера о работах Гильберта по алгебре, теории чисел, основаниям геометрии и арифметики, интегральным уравнениям. В них прослежено развитие этих областей после Гильберта, приведена обширная библиография. Читатель может также ознакомиться с номером журнала "Die Naturwissenschaften" (1922, т. 10, с. 65—104), посвященным Гильберту, где помещены обзоры его работ до 1922 г., и со статьей Л. Бибераха "О влиянии парижского доклада Гильберта "Математические проблемы" на развитие математики за последние тридцать лет" (*Die Naturwissenschaften.* — 1930. — Bd. 18. — S. 1101—1111). О. Блюменталь написал биографию Гильберта (*Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen.* — Bd 3. — S. 388—429).

Я опускаю все ссылки на литературу, указанную в этих статьях.

Теория инвариантов

Классическая теория инвариантов имеет дело с многочленами $J = J(x_1, \dots, x_n)$, зависящими от коэффициентов $x_1, \dots, x_n$ одной или нескольких основных форм от данного числа переменных $\eta_1, \dots, \eta_g$. Любая линейная подстановка s с определителем, равным 1, примененная к g аргументам, индуцирует некоторое линейное преобразование $U(s)$ переменных коэффициентов $x_1, \dots, x_n$: $x \rightarrow x' = U(s)x$, в результате чего многочлен $J = J(x_1, \dots, x_n)$ переходит в некоторую новую форму $J(x'_1, \dots, x'_n) = J^s(x_1, \dots, x_n)$. Многочлен J — инвариант, если $J^s = J$ для любой подстановки s . (Ограничение *унимодулярными* преобразованиями s позволяет избежать более сложного понятия относительных инвариантов и снять необходимость в ограничении однородными многочленами, что приводит к удобному следствию: инварианты образуют *кольцо*.) Эта классическая проблема¹² является частным случаем общей проблемы инвариан-

тов, когда s принадлежит произвольно заданной абстрактной группе Γ и $s \rightarrow U(s)$ — любое представление этой группы (т.е. закон, по которому каждый элемент s группы Γ индуцирует линейное преобразование $U(s)$ n переменных $x_1, \dots, x_n$, такое, что произведению элементов группы Γ соответствует композиция индуцированных преобразований). Развитие этой теории до Гильберта привело к двум основным теоремам, которые, однако, были доказаны лишь для весьма частных случаев. Первая теорема утверждает, что *инварианты обладают конечным целым базисом*. Иначе говоря, среди них всегда можно выбрать конечное число инвариантов, скажем, $i_1, \dots, i_m$, таких, что любой инвариант J окажется представимым в виде многочлена от $i_1, \dots, i_m$. Тождественное отношение между базисными инвариантами $i_1, \dots, i_m$ есть многочлен $F(z_1, \dots, z_m)$ от m независимых переменных $z_1, \dots, z_m$, обращающийся тождественно в нуль при подстановке

$$z_1 = i_1(x_1, \dots, x_n), \dots, z_m = i_m(x_1, \dots, x_n).$$

Вторая основная теорема утверждает, что *идеал отношений между инвариантами имеет конечный базис*. Иначе говоря, среди них можно выбрать конечное число отношений, скажем $F_1, \dots, F_h$, таких, что любое отношение F будет представимо в виде

$$F = Q_1 F_1 + \dots + Q_h F_h, \quad (1)$$

где Q_i — многочлены от переменных $z_1, \dots, z_m$.

Осмелюсь высказать предположение, что Гильберту сначала удалось доказать *вторую* теорему. Отношения F образуют подмножество в кольце $k[z_1, \dots, z_m]$ всех многочленов от $z_1, \dots, z_m$ с коэффициентами из заданного поля k . Найдя свое простое доказательство этой теоремы, Гильберт не мог не заметить, что оно применимо к любому множеству многочленов Σ , каким бы оно ни было; тем самым он открыл одну из наиболее фундаментальных теорем алгебры, которая сыграла важную роль в становлении нашего нынешнего абстрактного подхода; теорема эта гласит:

(А) *каждое подмножество Σ кольца многочленов $k[z_1, \dots, z_m]$ порождает идеал с конечным базисом*.

Думаю, я не впаду в дурную метафизику, если добавлю, что доказательство теоремы оказалось таким простым *именно* в силу этой ее общности. Оно состоит в последовательном присоединении переменных z_i одной за другой, и каждый отдельный шаг основан на использовании следующего утверждения: если данное *кольцо* r удовлетворяет условию (Р), состоящему в том, что каждое подмножество кольца r порождает идеал с конечным базисом, то кольца $r[z]$ многочленов от одной переменной z с коэффициентами из r удовлетворяет тому же условию (Р). Коль скоро это установлено, мы получаем не только теорему (А), но и рассмотренное Гильбертом ее теоретико-числовое *arithmetical* уточнение, когда поле k рациональных чисел заменяется кольцом рациональных целых чисел.

Подмножество Σ отношений, к которому Гильберт применяет свою теорему (А), само есть *идеал*, и поэтому идеал $\{F_1, \dots, F_h\}$, т.е. совокуп-

ность всех элементов вида (1), где $Q_i \in k[z_1, \dots, z_m]$, не только содержит Σ , но и совпадает с ним. Но доказательство остается в силе, даже если Σ не является идеалом, — оно позволяет "единым росчерком пера", во-первых, построить порождающий идеал $\{\Sigma\}$ для Σ и, во-вторых, редуцировать этот идеал к конечному базису $\{\Sigma\} = \{F_1, \dots, F_h\}$.

Построение полного набора отношений $F_1, \dots, F_h$ завершило бы изучение алгебраической структуры кольца инвариантов, если бы оказалось, что любое отношение F представимо в виде (1) *только одним способом*. Но поскольку, вообще говоря, это не так, мы должны обратиться к "векторам из многочленов" $M = \{M_1, \dots, M_h\}$, для которых $M_1 F_1 + \dots + M_h F_h$ тождественно обращается в нуль по z (сизигии первого порядка). Эти линейные отношения M между $F_1, \dots, F_h$ в свою очередь образуют идеал, к которому применима теорема (А), и мы получаем базис отношений M , что позволяет построить сизигии второго порядка. К первым двум основным теоремам Гильберт добавляет третью, согласно которой при отсутствии избыточности сизигии¹³ можно выбрать так, что их последовательность обрывается самое большее через m шагов.

Но все это построение повисает в воздухе, пока не доказана *первая основная теорема*, носящая совсем иной характер, так как в ней речь идет о базисе области целостности, а не идеала. Рассматривая инварианты, мы действуем в кольце $k_x = k[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от $x_1, \dots, x_n$ над данным полем k . Гильберт применяет свою теорему (А) к совокупности $\mathfrak{J}$ всех инвариантов J , для которых $J(0, \dots, 0) = 0$ (кстати сказать, она образует подкольцо в k_x , но не образует идеала!), и тем самым находит базис идеала $i_1, \dots, i_m$, порожденного совокупностью $\mathfrak{J}$. Каждый из инвариантов $i = i_r$ допускает разложение в сумму $i = i^{(1)} + i^{(2)} + \dots$ однородных форм степени $1, 2, \dots$, и, поскольку все слагаемые сами являются инвариантами, i_r можно считать однородными формами степени $\nu_r \geq 1$. Далее Гильберт утверждает, что $i_1, \dots, i_m$ составляют систему целых образующих кольца всех инвариантов. Чтобы пояснить идею, на которой основан этот шаг, я воспользуюсь некоторой конечной группой Γ , состоящей из N элементов s (хотя этот случай общей проблемы инвариантов сам Гильберт никогда не рассматривал). Каждый инвариант J можно представить в виде

$$J = c + L_1 i_1 + \dots + L_m i_m \quad (L_r \in k_x), \quad (2)$$

где c есть константа $J(0)$. Если ν — степень инварианта J , то, не нарушая равенства (2), в L_r можно вычеркнуть все члены, имеющие степени не ниже $\nu - \nu_r$. Если бы некоторый процесс позволили заменить коэффициенты L в (2) на инварианты, то желаемый результат можно было бы получить индукцией по степени инварианта J . В случае конечной группы найти такой процесс нетрудно: это не что иное, как усреднение. Линейное преобразование $U(s)$ переменных $x_1, \dots, x_n$, определяемое элементом s , переводит (2) в

$$J = c + L_1^s i_1 + \dots + L_m^s i_m.$$

Суммируя по s и деля полученную сумму на число N , мы получаем

соотношение

$$J = c + L_1^* i_1 + \dots + L_m^* i_m,$$

где

$$L_r^* = \frac{1}{N_s} \sum_s L_r^s.$$

Оно того же характера, что и (2), за исключением того решающего обстоятельства, что новые коэффициенты L_r^* по построению являются инвариантами*).

В действительности Гильберту пришлось иметь дело не с конечной группой, а с классическим случаем, когда группа Γ состоит из всех линейных преобразований s переменных $\eta_1, \dots, \eta_g$; при этом вместо усреднения ему пришлось обратиться к изобретенному Кэли дифференциальному методу (так называемому Ω -процессу Кэли), который Гильберт искусно приспособил для своих целей. (Суть процесса Кэли состоит в том, что g^2 компонент матрицы s представляют собой независимые переменные, и вместо абсолютных инвариантов J необходимо рассматривать относительно инвариантные однородные формы, каждая из которых имеет определенные степень и вес.)

Теорема (А) Гильберта — это краеугольный камень общей теории алгебраических многообразий. Рассмотрим теперь менее общий случай, когда k — поле всех комплексных чисел. Алгебраическое многообразие в n -мерном координатном пространстве $x_1, \dots, x_n$, по-видимому, естественно задать системой алгебраических уравнений $f_1 = 0, \dots, f_h = 0$ ($f_i \in k[x]$). Из теоремы (А) следует, что ничто не изменится, если допустить бесконечные системы уравнений. Пусть $Z(f_1, \dots, f_h)$ обозначает множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, в которых $f_1, \dots, f_h$ и, следовательно, все элементы идеала $\tilde{f} = \{f_1, \dots, f_h\}$ одновременно обращаются в нуль; если $g \in \{f_1, \dots, f_h\}$, то g обращается в нуль на $Z(f_1, \dots, f_h)$, обратное же, вообще говоря, неверно. Например, x_1 обращается в нуль всякий раз, когда обращается в нуль x_1^3 , тем не менее x_1 не представим в виде $x_1^3 \cdot q(x_1, \dots, x_n)$. Язык алгебраической геометрии различает простую плоскость, когда $x_1 = 0$, и тройную плоскость, когда $x_1^3 = 0$, хотя множество точек в обоих случаях одно и то же. Следовательно, на самом деле под алгебраическим многообразием мы понимаем полиномиальный идеал, а не множество его нулей. Но даже если невозможно, чтобы каждый многочлен g , обращающийся в нуль на $Z(f_1, \dots, f_h) = Z(\tilde{f})$, содержался в идеале $\tilde{f} = \{f_1, \dots, f_h\}$, то можно надеяться, что по крайней мере некоторая степень многочлена g содержится в нем. "Nullstellensatz"**) Гильберта утверждает, что это действительно так, по крайней мере в том случае,

*) Конечной группой Γ я воспользовался здесь лишь в качестве примера. В самом деле, прямое элементарное доказательство первой основной теоремы для конечных групп, в котором не используется гильбертов принцип (А), было предложено Э. Нётер (Noether E. // Math. Ann. — 1916. — Bd. 77. — S. 89.). При делении на N мы предполагали, что k — поле характеристики 0.

**) Теорема о нулях. — Примеч. пер.

когда k — поле комплексных чисел. Это теорема выполняется для произвольного поля коэффициентов k , если координаты x_i точек x принадлежат полю k или любому алгебраическому расширению поля k . Ясно, что Nullstellensatz относится к самым основам понятия алгебраического многообразия*).

На самом деле Гильберт рассматривал эту теорему как средство исследования инвариантов. Поскольку теперь мы имеем дело с полной линейной группой, условимся рассматривать только однородные инварианты, не оговаривая каждый раз особо, что они однородны. Исключим константы (инварианты степени 0). Предположим, что у нас имеется μ отличных от констант инвариантов $J_1, \dots, J_\mu$, таких, что любой отличный от константы инвариант обращается в нуль на множестве их общих нулей. Базис идеала, порожденного множеством $\mathfrak{J}$ всех отличных от констант инвариантов, заведомо удовлетворяет этому требованию, но систему $J_1, \dots, J_\mu$ можно получить ценой гораздо меньших затрат. В самом деле, изяшно комбинируя несколько соображений, Гильберт доказал, что если для данной точки $x = x^0$ вообще существует инвариант, не обращающийся в нуль в этой точке и не сводящийся к константе, то существует и такой инвариант, вес которого не превосходит некоторой априорной величины W (например, $W = 9n(3n + 1)^8$ для инвариантов тернарной основной формы степени n). Следовательно, инварианты $J_1, \dots, J_\mu$ можно выбирать из инвариантов, вес которых не превышает W , что позволяет произвести явное алгебраическое построение этих инвариантов¹⁵.

Когда Гильберт опубликовал свое доказательство существования конечного базиса идеала, формалист Гордан, считавшийся в то время королем инвариантов, воскликнул: "Это — не математика, это — теология!" Гильберт, как это он делал всю жизнь, резко возразил против уничижительного отзыва о доказательствах чистых теорем существования (existential argument) как о "теологии", но, как мы видим, копая глубже, сумел удовлетворить конструктивным требованием Гордана. Сочетая Nullstellensatz с процессом Кэли, Гильберт в дальнейшем показал, что каждый инвариант J есть некоторая целая алгебраическая (хотя и не всегда целая рациональная) функция инвариантов $J_1, \dots, J_\mu$, удовлетворяющая уравнению

$$J^e + G_1 J^{e-1} + \dots + G_e = 0,$$

где G — многочлены от $J_1, \dots, J_\mu$. Следовательно, соответствующие алгебраические расширения должны позволить осуществить переход от $J_1, \dots, J_\mu$ к базису всей области целостности. После этого уже можно воспользоваться испытанными алгебраическими приемами, которые были разработаны Кронекером и позволяют осуществить явное построение.

После формальных исследований — от Кэли и Сильвестра до Гордана — Гильберт положил начало новой эпохе в теории инвариантов. В самом деле, открывая новые идеи и вводя новые мощные методы, он не только поднял теорию инвариантов на новый уровень, установившийся в алгебре благода-

*) Все рассматриваемые здесь общие алгебраические понятия и факты превосходят изложены в книге: van der Waerden B.L. Modern Algebra. V. 2.—2nd ed.—1940.—Р. 1—72¹⁴.

ря достижениям Кронекера и Дедекинда, но и разработал эту теорию столь тщательно, что почти завершил ее, по крайней мере для случая полной линейной группы. Свою работу "О полной системе инвариантов" ("Ueber die vollen Invariantensysteme") Гильберт с чувством законной гордости заканчивает словами: "Итак, я убежден, что важнейшие цели теории функциональных полей, порожденных инвариантами достигнуты", и после этого уходит со сцены*).

В развитии теории инвариантов после того, как ее покинул Гильберт, особого внимания, по моему мнению, заслуживают два направления. Во-первых, это перенесение процесса усреднений, который применялся выше для конечных групп, на непрерывные компактные группы. Пользуясь этим трансцендентным процессом интегрирования по групповому многообразию, Адольф Гурвиц разобрал случай вещественной ортогональной группы. Метод оказался весьма плодотворным. Простое замечание о том, что инварианты вещественной ортогональной группы являются *eo ipso*¹⁶ инвариантами полной комплексной ортогональной группы, показывает, каким образом полученные результаты могут быть перенесены даже на некомпактные группы и, в частности, на все полупростые группы Ли. Во-вторых, это нынешняя теория инвариантов для произвольных групп, которая заняла свое естественное место в рамках теории представлений групп линейными подстановками, развитию которой больше всего способствовали работы Г. Фробениуса.

Хотя первая основная теорема была доказана для широких классов групп Γ , мы до сих пор не знаем, выполняется ли она для любой группы. Попытки доказательства теоремы в такой ее общности, как вскоре выяснилось, успеха не имели. Многообещающий алгебраический подход к решению вопроса намечен в проблеме, фигурирующей под номером 14 в парижском списке математических проблем Гильберта¹⁷.

Поскольку мы столь подробно остановились на Гильбертовой теории инвариантов, нам остается лишь кратко отметить другие, стоящие более обособленно, достижения Гильберта в алгебре. Первая работа, в которой молодой алгебраист проявил свой настоящий характер, посвящена условиям, при которых форма с вещественными коэффициентами представима в виде суммы квадратов таких форм; в этой работе, в частности, рассмотрен вопрос о том, является ли достаточным явно необходимое условие — положительность формы при всех действительных значениях аргументов. Используя остроумные соображения, основанные на непрерывности, и алгебраические конструкции, Гильберт находит три особых случая, для которых ответ на этот вопрос утвердителен, — среди них, разумеется, случай положительно определенной квадратичной формы — и контрпримеры для всех остальных случаев. К аналогичным методам он обращается и в двух работах, посвященных привлекательной проблеме определения максимального числа и относительного расположения вещественных

* Я рекомендую вниманию читателя краткое изложение его работ по теории инвариантов; оно было написано самим Гильбертом для Международного математического конгресса, состоявшегося в Чикаго по случаю Всемирной выставки 1893 г; см. второй том его "Gesammelte Abhandlungen", работа под номером 23.

овалов алгебраической кривой или поверхности. Гильберт высказал предположение о том, что независимо от числа переменных всякая *рациональная* функция с действительными (или рациональными) коэффициентами представляет собой сумму квадратов таких же функций при условии, что она принимает положительные значения при действительных значениях своих переменных; а в своих "Grundlagen der Geometrie"¹⁸ Гильберт отметил роль этого факта в геометрических построениях с помощью линейки и "Eichmass"¹⁹. Впоследствии О. Веблен принял — в качестве основы различения положительных и отрицательных элементов в любом поле — аксиому, согласно которой никакая сумма квадратов не равна нулю. Независимо от него Э. Артин и О. Шрайер детально разработали теорию таких "вещественных полей", и, используя эту теорию, Артину удалось доказать предположение Гильберта*).

Я хотел бы бегло упомянуть также теорему Гильберта о неприводимости, согласно которой в неприводимом многочлене вместо всех переменных, кроме одной, можно подставить, не нарушая его неприводимости, подходящие целочисленные значения, а также его работу о решении уравнения девятой степени с помощью функций минимального числа переменных. Все это стало отправными пунктами более поздних алгебраических работ (Э. Нётер, Н. Чеботарева и др.). Наконец, нельзя не отметить, что на заложенном Гильбертом фундаменте Э. Ласкер и Ф.С. Маколей возвели детальную теорию полиномиальных идеалов, которая в свою очередь позволила Эмми Нётер создать общую аксиоматическую теорию идеалов. Таким образом, в области алгебры, как и во всех других областях, введенные Гильбертом понятия оказали сильное влияние на последующее развитие.

Алгебраические числовые поля

За сорок лет до того, как Гильберт, завершив теорию инвариантов, обратился к *теории алгебраических числовых полей*, ее основы были заложены Дирихле, исследовавшим группы единиц, а также Куммером, Дедекиндом и Кронекером, которые ввели понятие идеального дивизора. В этой теории изучается алгебраическое поле k над полем k рациональных чисел. Дедекинд не только заложил основы теории, но и получил один из наиболее важных общих результатов, показав, что простые делители дискриминанта поля k являются в то же время теми простыми числами, разложение которых в произведение простых идеалов в поле k содержит кратные сомножители (разветвленные простые числа). Пусть l — рациональное простое число; присоединив к полю k корень l -й степени из числа α , принадлежащего k , мы получим относительное циклическое поле $K = k(\alpha^{1/l})$ степени l над k при условии, что k содержит корень l -й степени из единицы $\xi = e^{2\pi i/l}$ (по Лагранжу, таким способом получается наиболее общее относительное циклическое поле степени l над k). Можно утвер-

*) Veblen O. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1906. — V. 7. — P. 197–199; Artin E., Schreier O // Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. — 1926. — Bd 5. — S. 85–99; Artin E., // Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. — 1926. — Bd 5. — S. 100–115.

ждать, что именно это обстоятельство побудило Куммера, когда он пытался доказать теорему Ферма о неразрешимости уравнения $\alpha^l + \beta^l = \gamma^l$, перейти от рационального основного поля k к круговому полю $k_l = k(\xi)$, а затем рассмотреть идеальные числа в k_l и исследовать, будет ли число классов эквивалентности идеальных чисел в k_l взаимно просто с l . Гильберт, продолжив предпринятое Куммером изучение относительных циклических полей степени l над k_l — Гильберт окрестил их "куммеровыми полями", — усовершенствовал методы Куммера.

Первым существенным вкладом самого Гильберта стала теория *относительных полей Галуа* K над заданным алгебраическим числовым полем k . Гильберта интересовало главным образом то, как группа Галуа Γ поля K/k связана с разложением простых идеалов поля k в K . Пусть $\mathfrak{P}$ — простой идеал в K относительной степени f ; подстановки s группы Γ , для которых $s\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, образуют группу разложения. Как всегда в теории Галуа, этой группе соответствует некоторое подполе поля K/k (поле разложения); число из поля K принадлежит полю разложения тогда, когда оно инвариантно относительно всех подстановок из группы разложения. Подстановки t , переводящие любое целое число A из K в число tA , сравнимое с A по модулю $\mathfrak{P}$, образуют инвариантную подгруппу группы разложения индекса f , называемую группой инерции; соответствующее поле (поле инерции) оказывается "зажатым" между полем разложения и полем K . Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в k , в который переходит $\mathfrak{P}$, а $\mathfrak{P}^e$ — точная степень идеала $\mathfrak{P}$, на которую делится $\mathfrak{p}$. Характер полученных Гильбертом результатов я продемонстрирую на доказанной им следующей центральной теореме: в поле разложения идеала $\mathfrak{P}$ разложение простого идеала $\mathfrak{p}$ в k на простые множители содержит простой идеал $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{P}^e$ степени 1 (отсюда и его название); при переходе от поля разложения к полю инерции идеал $\mathfrak{p}^*$ остается простым, но степень его возрастает до f ; при переходе от поля инерции к полному полю K идеал $\mathfrak{p}^*$ распадается на e простых сомножителей $\mathfrak{P}$ одной и той же степени f . Относительно последнего утверждения я замечу следующее. Если $\mathfrak{P}$ переходит к $\mathfrak{p}$ только в первой степени, т.е. если $e = 1$ (а так будет непременно, если $\mathfrak{p}$ не делит относительный дискриминант поля K/k), то группа инерции состоит только из тождественной подстановки. В этом случае теория конечных полей Галуа показывает, что группа разложения является циклической группой порядка f и что ее элементы $1, s, s^2, \dots, s^{f-1}$ однозначно определяются сравнениями

$$sA \equiv A^P, \quad s^2A \equiv A^{P^2}, \dots, \quad (\text{mod } \mathfrak{P}),$$

которые выполняются для любого целого числа A . Здесь P — число вычетов в k по модулю $\mathfrak{p}$ и, следовательно, P^f — число вычетов в K по модулю $\mathfrak{P}$. Сейчас мы называем элемент $s = \sigma(\mathfrak{P})$ подстановкой Фробениуса идеала $\mathfrak{P}$; чрезвычайно важно, что нам удастся выделить один специальный элемент группы разложения среди всех остальных. Нетрудно видеть, что для любой подстановки u группы Галуа $\sigma(u\mathfrak{P}) = u^{-1} \cdot \sigma(\mathfrak{P})u$. Следовательно, если поле Галуа K/k абелево, то подстановка $\sigma(\mathfrak{P}) = \sigma(u\mathfrak{P})$ зависит только от $\mathfrak{p}$, и ее можно обозначить $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$.

В 1893 году Германское математическое общество (Deutsche Mathematischer Vereinigung) обратилось к Гильберту и Минковскому с предложением подготовить в течение двух лет обзор по теории чисел. Вскоре Минковский отошел от работы, а монументальный обзор Гильберта "Теория полей алгебраических чисел" (Die Theorie der algebraischen Zahlkörper) вышел в ежегоднике Общества в 1896 г. (предисловие датировано апрелем 1897 г.). То, что сделал Гильберт, бесконечно превосходило ожидания Общества. Его работа — подлинная жемчужина математической литературы. Даже сейчас, спустя почти пятьдесят лет, изучение этой книги неопределимо для каждого, кто пожелает овладеть теорией алгебраических чисел. Восполнив пробелы своими собственными оригинальными исследованиями, Гильберт сплавил отдельные фрагменты теории в грандиозное единое целое. Он тщательно взвесил доказательства всех известных теорем, прежде чем отдать предпочтение тем из них, "принципы которых допускают обобщение и наиболее полезны для дальнейших исследований". Но для того чтобы выполнить такой отбор, пришлось произвести эти "дальнейшие исследования"! Гильберт уделил особое внимание системе обозначений, и в результате его обозначения стали общепринятыми (в их числе — к ужасу американских издателей — готические буквы для идеалов!). Гильберт значительно упростил теорию Куммера, основанную на необычайно громоздких вычислениях, он ввел те понятия и доказал часть тех теорем, которые составляют сегодня основания общей теории относительных абелевых полей. Наиболее важными являются понятие символа норменного вычета, центральная теорема об относительных циклических полях — его знаменитое Satz 90 (Gesammelte Abhandlungen.— Bd 1.— S. 149). Разрешите мне привести один абзац из предисловия Гильберта, в котором он описывает общий характер теории чисел и, в частности, вопросы, рассматриваемые в его работе:

"Здание теории числовых полей отличается редкой красотой и гармонией. Особым величием поражает, на мой взгляд, одна часть этого сооружения — теория абелевых полей, которую открыли для нас Куммер благодаря своей работе о высших законах взаимности и Кронекер благодаря своим исследованиям по комплексному умножению эллиптических функций. Труды этих двух математиков, позволившие заглянуть в глубь теории, в то же время обнаружили, что в этой области все еще таятся неслетные сокровища, сулящие богатую награду исследователю, который знает цену таким богатствам и с любовью постигает искусство добывать их".

Сам Гильберт также выступил такого рода старателем и за последующие два года извлек на свет много скрытых под землей сокровищ. Руководящим принципом для него неизменно служила аналогия с соответствующими проблемами царства алгебраических функций одной переменной, где к услугам исследователя были предложенные Риманом мощные топологические средства и абелевы интегралы (см. замечания Гильберта по поводу двенадцатой из его парижских "Проблем")²⁰. Истинное наслаждение — следить за тем, как Гильберт, шаг за шагом продвигаясь от частного к общему, вводит адекватные понятия и методы, как он получает важные

заключения. Отмечу его выдающуюся работу по относительным квадратичным полям и его последнее и наиболее важное исследование — "О теории относительных абелевых числовых полей" (Ueber die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper). Подробно рассмотрев несколько примеров, Гильберт, как по наитию, постиг и сформулировал основные факты относительно так называемых полей классов.

Если работы Гильберта по теории инвариантов ознаменовали ее конец, то его исследования по теории алгебраических чисел явились только началом. Значительная часть труда таких специалистов по теории чисел, работавших в последние десятилетия, как Фуртвенглер, Такаги, Хассе, Артин, Шевалле, была посвящена доказательству результатов, которые были предвосхищены Гильбертом. Используя ζ -функцию для заключения о существовании некоторых вспомогательных простых идеалов, Гильберт существенно опирался на трансцендентные рассуждения. Последующие исследования позволили постепенно исключить эти трансцендентные методы и показали, что, будучи удобными и мощными средствами изучения распределения простых идеалов, они тем не менее чужды проблеме полей классов. Стараясь описать главные достижения в этой области, я не могу не отметить прогресс и упрощения, вызванные этим более поздним развитием²¹.

Разработанная Гильбертом теория норменного вычета основана на следующих его открытиях. Гильберт 1) осознал основную идею и определил символ норменного вычета для всех неисключительных простых точек; 2) осознал необходимость введения бесконечных простых точек; 3) сформулировал общий закон взаимности в терминах норменного символа; 4) заметил, что этот закон позволяет распространить определение норменного символа на исключительные простые точки, где и сосредоточен главный интерес. Существенный прогресс был достигнут впоследствии Э. Артином, который 5) взял в качестве значения символа вычета не корни из единицы, а элементы группы Галуа. В своем кратком обзоре проблем, поставленных Гильбертом, я воспользуюсь этой идеей Артина и позволяющим сократить изложение языком 6) p -адических чисел Гензеля и 7) идеалей Шевалле*).

Как всем известно, целое число a , не делящееся на простое число $p \neq 2$, называется квадратичным вычетом, если разрешимо сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Гаусс ввел символ $\left(\frac{a}{p}\right)$, принимающий значения ± 1 , если a — квадратичный вычет по $\pmod{p}$, и -1 , если a — квадратичный невычет по $\pmod{p}$, и заметил, что этот символ является характером: $\left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{a'}{p}\right) = \left(\frac{aa'}{p}\right)$. В самом деле, p вычетов по модулю p (в качестве их представителей можно выбрать числа $0, 1, \dots, (p-1)$) образуют поле, а ненуле-

* Последнее изложение этой теории содержится в статье К. Шевалле (Chevalley C. La théorie du corps de classes // Ann. Math. — 1940. — V. 41. — P. 394—418).

вые элементы этого поля — *группу*, в которой квадратичные вычеты составляют подгруппу индекса 2. Пусть $K = k(b^{1/2})$ — квадратичное поле, которое получается из поля рациональных чисел k путем присоединения квадратного корня из рационального числа b . Целое число $a \neq 0$ Гильберт называет *p*-адической нормой в K , если оно сравнимо с нормой подходящего целого числа в K по модулю любой данной степени p . Гильберт полагает $\left(\frac{a, K}{p}\right) = +1$, если a — *p*-адическая норма, и $\left(\frac{a, K}{p}\right) = -1$ в противном случае, и обнаруживает, что *p*-адический норменный символ также является характером. Систематическое изучение чисел по модулю произвольно высоких степеней простых чисел p было проведено К. Гензелем в форме *p*-адических чисел, и я повторяю определение Гильберта на этом языке: "Рациональное число $a \neq 0$ или, в более общем виде, *p*-адическое число $a_p \neq 0$ есть *p*-адическая норма в K , если уравнение

$$a_p = Nm(x + yb^{1/2}) = x^2 + by^2$$

имеет *p*-адическое решение $x = x_p, y = y_p$; норменный символ (a_p, K) равен $+1$, если a_p — (*p*-адическая) норма в K , и равен -1 в противоположном случае". Ясно, что *p*-адические числа образуют поле $k(p)$, а ненулевые *p*-адические числа — мультипликативную группу G_p , в которой, как показал Гильберт, *p*-адические нормы в K образуют подгруппу индекса 2 или 1. Особый интерес представляет цикличность факторгруппы. Нетрудно видеть, что *p*-адические квадраты образуют подгруппу G_p^2 индекса 4, если $p \neq 2$, и индекса 8, если $p = 2$; поэтому факторгруппа G_p/G_p^2 нециклическая, и одного-единственного характера было бы недостаточно для ее описания. Разумеется, каждый *p*-адический квадрат есть *p*-адическая норма в K . Для успеха введенного Гильбертом определения одинаково существенны оба шага: замена квадратов *K*-нормами и переход от сравнений по модулю p к сравнениям по модулю сколь угодно высоких степеней p ; первый шаг позволяет ослабить, а второй — усилить условие Гаусса для квадратичных вычетов.

Каждое *p*-адическое число $a_p \neq 0$ имеет вид $p^h \cdot e_p$, где e_p — *p*-адическая единица; следовательно, a_p имеет определенный *порядок* h (относительно p). Обычное рациональное число a совпадает с определенным *p*-адическим числом $I_p(a) = a_p$. Здесь I_p означает гомоморфное проектирование k в $k(p)$:

$$I_p(a + a') = I_p(a) + I_p(a'), \quad I_p(aa') = I_p(a) \cdot I_p(a').$$

Характер $\left(\frac{a, K}{p}\right)$ совпадает с $(I_p(a), K)$.

Тут мы подходим ко второму открытию Гильберта: он понял, что простые соотношения < laws > получатся лишь тогда, когда к "конечным простым точкам" < spots > добавляется бесконечная простая точка q . По определению, *q*-адические числа являются действительными числами, и $I_q(a)$ есть действительное число, с которым совпадает рациональное число a . Следовательно, действительное число a_q есть *q*-адическая норма в K ,

если уравнение $a_q = x^2 - by^2$ разрешимо в действительных числах x, y . Ясно, что при $b > 0$, т.е. в случае вещественного поля K , это имеет место для любого a_q ; но если $b < 0$, т.е. если K — мнимое поле, то только положительные числа a_q являются q -адическими нормами. Следовательно,

$$\begin{aligned} (a_q, K) &= 1, & \text{если } K \text{ — вещественное поле,} \\ (a_q, K) &= \text{sign } a_q, & \text{если } K \text{ — мнимое поле.} \end{aligned}$$

Таким образом, то, что норменный символ является характером, для бесконечной простой точки проверяется гораздо легче, чем для конечной.

Третье открытие Гильберта состоит в том, что закон взаимности Гаусса вместе с двумя дополнениями можно сжато выразить одной изяшной формулой:

$$\prod_p (I_p(a), K) = \prod_p \left(\frac{a, K}{p} \right) = 1, \quad (3)$$

где произведение берется по всем бесконечным и всем конечным простым точкам p . Это произведение нетрудно получить, так как почти все множители (т.е. все множители за исключением конечного числа их) равны единице. В самом деле, если простое число p не входит в дискриминант поля K , то $(a_p, K) = 1$ для каждой p -адической единицы a_p . Формула (3) — первый настоящий успех, который принесла идея норменного символа; по-видимому, он и придал Гильберту уверенность в том, что высшие законы взаимности надлежит формулировать в терминах норменных вычетов.

Каждое рациональное число a ставит в соответствие каждой простой точке p некоторое p -адическое число $a_p = I_p(a)$. На какие свойства этого соответствия мы опираемся, образуя произведение (3)? Ясный ответ на этот вопрос дает понятие *идея*, введенное Шевалле: идеалом a называется функция, ставящая в соответствие каждой простой точке p некоторое p -адическое число $a_p \neq 0$, которое почти для всех простых точек является p -адической единицей. Идеи образуют мультипликативную группу J_K . В силу соответствия $p \rightarrow a_p = I_p(a)$ каждое рациональное число $a \neq 0$ порождает идеал, называемый *главным идеалом a* . Располагая идеалами a , мы можем снова вернуться к обозначению $\left(\frac{a, K}{p} \right)$ для (a_p, K) . Формула

$$\varphi_K(a) = (a, K) = \prod_p (a_p, K) = \prod_p \left(\frac{a, K}{p} \right) \quad (4)$$

определяет характер φ_K — норменный характер на группе J_K всех идеалов. Закон взаимности в форме Гильберта (3) утверждает, что

$$(a, K) = 1, \quad (5)$$

если a — главный идеал. Из самого определения норменного символа (a_p, K) следует, что то же соотношение выполняется, если a — норма в K , т.е. если a_p — p -адическая норма в K для каждой простой точки p . Два идеала a, a' называются эквивалентными ($a \sim a'$), если их отношение $a'a^{-1}$ есть главный идеал. Обозначим как $\text{Nm } J_K$ группу всех идеалов, эквивалентных нормам в K . Тогда равенство (5) выполняется для всех идеалов a из

$\text{Nm } J_K$; было бы неплохо узнать, что оно не выполняется ни для каких других идеалов, или, иными словами, что $\text{Nm } J_K$ — подгруппа группы J_K индекса 2.

Теперь мы уже достигли стадии, на которой опыт обращения с квадратичным полем K над полем рациональных чисел k может быть обобщен на любое относительно абелево поле K над заданным алгебраическим числовым полем $k = k(\theta)$. Прежде всего необходимо сказать несколько слов о бесконечных простых точках поля k . Определяющее их уравнение $f(\theta) = 0$ — неприводимое над k уравнение степени m — имеет m различных корней $\theta', \theta'', \dots, \theta^{(m)}$ в континууме комплексных чисел. Предположим, что r из них — действительные (например, $\theta', \dots, \theta^{(r)}$). Тогда каждый элемент α из k имеет r действительных сопряженных элементов $\alpha', \dots, \alpha^{(r)}$, и $\alpha^{(t)}$ получается из α при гомоморфном проектировании $I^{(t)}$ поля k в поле всех действительных чисел:

$$\alpha \rightarrow \alpha^{(t)} = I^{(t)}(\alpha) \quad (t = 1, \dots, r).$$

Таким образом, речь идет об r действительных бесконечных простых точках $q', \dots, q^{(r)}$ с соответствующими гомоморфизмами $I' = I_{q'}, \dots, I^{(r)} = I_{q^{(r)}}$; поля $k(q'), \dots, k(q^{(r)})$ совпадают с полем всех действительных чисел. Тем самым α есть n -я q -адическая степень, если уравнение $\alpha' = \xi'^n$ имеет действительное решение ξ' . Ясно, что это налагает условие только при четном n и тогда α' должно быть положительно. (В комплексной области это уравнение всегда разрешимо независимо от того, четно или нечетно n , и именно поэтому мы полностью исключаем из рассмотрения комплексные бесконечные простые точки.)

Конечные простые точки являются простыми идеалами $\mathfrak{p}$ поля k . При изучении поля Галуа K/k относительной степени n мы сначала исключаем разветвленные идеалы $\mathfrak{p}$, которые входят в относительный дискриминант поля K/k . Неразветвленный идеал $\mathfrak{p}$ поля k разлагается в K на некоторое число g различных простых идеалов $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_g$ относительной степени f , $fg = n$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{p}$ -адическое число $a_{\mathfrak{p}} \neq 0$ есть $\mathfrak{p}$ -адическая норма в K тогда и только тогда, когда его порядок (относительно $\mathfrak{p}$) кратен f . В частности, $\mathfrak{p}$ -адические единицы являются нормами. Таким образом, мы сталкиваемся с существенно более простой ситуацией, чем при определении гауссова символа квадратичного вычета: норменный характер числа $\alpha_{\mathfrak{p}}$ зависит только от порядка i числа $\alpha_{\mathfrak{p}}$ относительно $\mathfrak{p}$. Теперь ясно, что делать дальше: выберем первообразный корень f -й степени из единицы ξ и положим по определению $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = \xi^i$, если $\alpha_{\mathfrak{p}}$ имеет порядок i . Эта функция числа $\alpha_{\mathfrak{p}} \neq 0$ есть характер, принимающий значение 1 для норм и только для них. Но здесь возникает препятствие: не существует алгебраического свойства, которое позволяло бы отличать друг от друга несколько первообразных корней f -й степени из единицы. Таким образом, выбор корня ξ произволен. С этим можно было бы смириться, если бы мы имели дело лишь с одним простым идеалом. Но если нам необходимо рассматривать одновременно все простые идеалы — а это необходимо при составлении произведений типа (L) — то произвол в выборе ξ для каждо-

го $\mathfrak{p}$ разрушает все надежды на получение простого закона взаимности, аналогичного соотношению (5). Я воздержусь от описания тех приемов, к которым прибегли Эйзенштейн, Куммер и Гильберт, чтобы преодолеть эту трудность. Лучшее из известных решений проблемы было найдено Артином: если поле K/k абелево, то для K и $\mathfrak{p}$ однозначно определена подстановка Фробениуса $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$, которая является элементом порядка f группы Галуа Γ поля K/k . Пусть этот элемент группы Галуа заменит ζ в нашем окончательном определении $\mathfrak{p}$ -адического норменного символа:

$$(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^i, \text{ если } \alpha_{\mathfrak{p}} \text{ имеет порядок } i \text{ относительно } \mathfrak{p}. \quad (6)$$

Теперь для любого идея α мы могли бы образовать произведение

$$\prod_{\mathfrak{p}} (\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = (\alpha, K)$$

по всем конечным и бесконечным (действительным) простым точкам $\mathfrak{p}$ и сформулировать закон взаимности, утверждающий, что $(\alpha, K) = 1$ для любого главного идея α , если бы не пробел в нашем определении $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K)$: оно не распространяется на некоторые исключительные простые точки, а именно, на бесконечные простые точки и на разветвленные простые идеалы. В одном частном случае Куммеру с помощью необычайно сложных вычислений удалось получить правильное значение $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K)$ для исключительных значений $\mathfrak{p}$.

Четвертое открытие Гильберта состоит в изобретении простого и остроумного метода, позволяющего обойти это серьезное препятствие на пути дальнейшего прогресса. Ограничимся сначала идеями α , которые в наших исключительных простых точках являются n -ми степенями; иными словами, предположим, что уравнение $\alpha_{\mathfrak{p}} = \zeta_{\mathfrak{p}}$ разрешимо для $\mathfrak{p}$ -адических значений $\alpha_{\mathfrak{p}}$ идея α для этого конечного числа исключительных простых точек. С учетом такого ограничения нетрудно определить (α, K) :

$$(\alpha, K) = \prod'_{\mathfrak{p}} (\alpha_{\mathfrak{p}}, K);$$

здесь штрих означает, что произведение распространяется только на исключительные простые точки, для которых нам известно, что означает $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K)$. При том же ограничении мы, следуя Артину, докажем закон взаимности:

$$(\alpha, K) = 1, \text{ если } \alpha - \text{главный идеаль}, \quad (7)$$

и заметим, что по тому же самому определению $(\alpha, K) = 1$, если α — норма.

Обратимся теперь к произвольному идею α . Легко показать, что существует эквивалентный идеаль $\alpha^* \sim \alpha$, который является n -й степенью во всех исключительных простых точках, но, разумеется, таких эквивалентных идеалей много. Правда, ограниченный закон взаимности гарантирует, что

$$(\alpha^*, K) = \prod'_{\mathfrak{p}} (\alpha_{\mathfrak{p}}^*, K)$$

принимает одно и то же значение для любого из эквивалентных идеалов α^* и что именно это значение мы теперь обозначаем (α, K) . Приняв это определение, мы сразу и *без ограничений* получим закон взаимности (7) и утверждение о том, что $(\alpha, K) = 1$ для каждой нормы α . Таким образом, сам закон взаимности превращается в средство установления контроля над исключительными простыми точками!

Коль скоро значение (α, K) известно для каждого идеала α , мы можем вычислить $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K)$ для заданной простой точки $\mathfrak{p}$ и заданного $\mathfrak{p}$ -адического числа $\alpha_{\mathfrak{p}} \neq 0$, взяв значение (α, K) на "примарном" идеале, также обозначаемом $\alpha_{\mathfrak{p}}$, равным $\alpha_{\mathfrak{p}}$ в точке $\mathfrak{p}$ и 1 в любой другой простой точке. (Идеаль α есть произведение своих примарных компонент: $\alpha = \prod_{\mathfrak{p}} \alpha_{\mathfrak{p}}$.) Можно на-

деяться, что справедливы следующие два утверждения:

- I. $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{\mathfrak{p}}$ есть $\mathfrak{p}$ -адическая норма.
- II. Пусть $\mathfrak{p}$ — заданный простой идеал; тогда $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = 1$ для каждой $\mathfrak{p}$ -адической единицы $\alpha_{\mathfrak{p}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ — неразветвленный простой идеал.

Прямые утверждения I и II:

(I₀) если $\alpha_{\mathfrak{p}}$ — норма, то $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = 1$;

(II₀) если $\mathfrak{p}$ — неразветвленный простой идеал, то $(\alpha_{\mathfrak{p}}, K) = 1$ для каждой $\mathfrak{p}$ -адической единицы $\alpha_{\mathfrak{p}}$,

были доказаны выше. Утверждение, обратное утверждению (I₀), тривиально для неисклительных простых точек, но из-за косвенного характера определения норменного символа для исключительных простых точек доказательства утверждения, обратного утверждению (I₀), для исключительных точек и утверждения, обратного утверждению (II₀), весьма сложны. Из утверждения II мы знаем, что для любого разветвленного простого идеала $\mathfrak{p}$ норменный характер числа $\alpha_{\mathfrak{p}}$ зависит не только от порядка этого числа: это простое свойство, которое делает возможным определение (6), ограничивается неразветвленными идеалами $\mathfrak{p}$. Можно также надеяться, что справедливо следующее утверждение:

III. Если главный идеаль α — норма некоторого идеала в K , то число α — норма некоторого числа в K .

Это верно для циклических полей K/k , но, вообще говоря, неверно для абелевых полей.

Снова обозначим $\text{Nm } J_K$ подгруппу группы J_K идеалов, эквивалентных нормам. Тогда норменный символ $\varphi_K(\alpha) = (\alpha, K)$ определяет гомоморфное отображение факторгруппы $J_K/\text{Nm } J_K$ в группу Галуа поля K/k . Следует ожидать, что это отображение взаимно однозначно:

IV. С помощью норменного символа факторгруппа $J_K/\text{Nm } J_K$ изоморфно отображается на группу Галуа поля K/k .

Утверждения I, II, III_c (индекс "с" означает ограничение циклическими полями) составляют основные предложения того, что можно было бы назвать *норменной теорией относительных абелевых полей*. Они относятся к данному полю K/k .

Существует вторая часть этой теории — *собственно теория полей классов*, в которой рассматривается вопрос о том, каким образом все возмож-

ные относительные абелевы поля K над k отображаются в структуре группы J_k иделей поля k . Как мы видели, каждое такое поле K определяет в J_k некоторую подгруппу $Nm J_k$ конечного индекса. Возникает вопрос: *какие именно подгруппы J_k^* группы J_k порождаются при этом абелевыми полями K/k . Ясно, что следующие условия необходимы:*

- 1) Каждый главный идеал принадлежит J_k^* .
- 2) Существует натуральное число n , такое, что каждая n -я степень идеала принадлежит J_k^* .
- 3) Существует конечное множество S простых точек, такое, что α принадлежит J_k^* , если α — единица в каждой простой точке, и равно 1 в простых точках множества S .

Основная теорема, относящаяся к полям классов, утверждает, что эти условия являются также и достаточными.

В. Пусть задана подгруппа J_k^* группы J_k , удовлетворяющая трем перечисленным выше условиям (и, следовательно, как нетрудно проверить, имеющая конечный индекс); тогда существует однозначно определенное абелево поле K/k , такое, что $J_k^* = Nm J_k$.

Разделим иделы поля k на классы, относим два идеала к одному и тому же классу, если их частное принадлежит J_k^* . Тогда J_k/J_k^* — группа классов, и K называется соответствующим полем классов. Наиболее важный пример получается, если положить J_k^* состоящим из *единичных идеалов α* , принимающих значения α_p , равные p -адическим единицам в каждой простой точке *). Тогда классы можно описать как обычные классы *идеалов*: два идеала принадлежат одному и тому же классу, если их частное есть главный идеал (α), порожденный числом α , положительным во всех действительных простых точках. Соответствующее поле классов K (так называемое абсолютное поле классов) имеет относительный дискриминант, равный 1, и является наибольшим неразветвленным абелевым полем над k (теорема II). Его степень n над k равна числу классов идеалов, а его группа Галуа изоморфна группе классов идеалов поля k (теорема IV). Если f — наименьшая степень, после возведения в которую p попадает в главный класс, то идеал p допускает разложение в произведение n/f различных простых идеалов в K , каждый из которых имеет относительную степень f . Последнее утверждение представляет собой не что иное, как повторение нормального определения поля классов. Следовательно, разложение идеала p в поле K зависит только от того, к какому классу принадлежит p . Обобщить эту теорию, перейдя от случая неразветвленных простых идеалов, на котором в основном была сосредоточена мысль Гильберта, к случаю разветвленных простых идеалов, рассмотренному Такаги, проще всего путем замены идеалов идеалами.

Гильберт также утверждал, что каждый идеал поля k становится главным идеалом в абсолютном поле классов. Ныне мы в состоянии показать, что это так, но наши рассуждения далеки от полной ясности, так как вопрос выходит за рамки абелевых полей.

*) В бесконечных (действительных) простых точках единицами считаются положительные числа.

Как говорилось выше, Гильберт не доказал эти теоремы во всей их общности; однако, отправляясь от гауссовой теории родов в квадратичных полях и исследований Куммера, он шаг за шагом продвигался вперед, отправляясь от простейших примеров, и по ходу дела вводил необходимые понятия, доказывал теоремы о них и в конечном счете сумел обозреть весь ландшафт полей классов. Нечего и пытаться дать здесь хотя бы общее представление об идее этих весьма сложных доказательств. Завершение работы Гильберт оставил своим преемникам. По-видимому, еще далек тот день, когда у нас будет более или менее полная теория относительных числовых полей Галуа²².

Кронекер показал, а Гильберт нашел более простое доказательство того, что абелевы поля над рациональным основным полем k с необходимостью являются подполями круговых полей и, следовательно, получаются из трансцендентной функции $e^{2\pi i x}$ путем придания рациональных значений ее аргументу. Для абелевых полей над мнимым квадратичным полем аналогичную роль играет так называемое комплексное умножение эллиптических и модулярных функций ("Jugendtraum" Кронекера). В то время как Генрих Вебер, следуя по стопам Кронекера, и Р. Фютер под руководством Гильберта сделали эту мечту реальностью, сам Гильберт обратился к модулярным функциям нескольких переменных, определяемых алгебраическими числовыми полями, и начал изучать их значение для арифметики. Эти исследования Гильберт так и не опубликовал, но О. Блюменталь, а впоследствии Э. Гекке воспользовались черновиками Гильберта и развили его идеи. Результаты оказались многообещающими, но еще далекими от полноты. То, что в наиболее плодотворный период своей жизни Гильберт передал своим ученикам целый комплекс таких привлекательных проблем, как выяснение взаимосвязей между теорией чисел и модулярными функциями*), убедительно свидетельствует о продуктивности его мышления²³.

Остается упомянуть чрезвычайно простое доказательство трансцендентности чисел e и π , которым Гильберт открыл серию своих работ по арифметике, и доказательство им – в работе 1909 года – гипотезы Варинга, продолжавшейся около столетия. Последнюю работу я отношу к наиболее оригинальным его творениям, однако мы не можем останавливаться на ней, тем более что через десять лет после Гильберта Харди и Литтлвуд нашли другой подход, позволяющий получить асимптотические формулы для числа представлений. В последнее время "круговой метод" Харди – Литтлвуда породил обширную литературу по этому вопросу и связанным с ним проблемам**).

*) Fueter, R. Singuläre Moduln und complexe Multiplikation. – Bd. 1. – Leipzig, 1924; Bd. 2. – Leipzig, 1927, а также Hasse H./J. reine angew. Math. – 1927. – Bd 157. – S. 115–139; Blumenthal O./Math. Ann. – 1903. – Bd 56. – S. 509–548; Math. Ann. – 1904. – Bd 58. – S. 497–527; Hecke E./Math. Ann. – 1912. – Bd 71. – S. 1–37; Math. Ann. – 1913. – Bd 74. – S. 465–510.

**) Здесь достаточно указать первую публикацию: Hardy G.H., Littlewood J.E. // Quart. J. Math. – 1910. – V. 48. – P. 272–293, и последнее исследование в этой области, обобщающее теорему Варинга на произвольные алгебраические поля: Siegel G.L. // Amer. J. Math. – 1944. – V. 66. – P. 122–136.

Аксиоматика

Вряд ли возможна более глубокая пропасть, нежели та, которая разделяет последнюю работу Гильберта по теории числовых полей и его классическую книгу "Основания геометрии" ("Grundlagen der Geometrie"), опубликованную в 1899 г. Единственным предвестником этого фундаментального труда была краткая заметка 1895 года о прямой как кратчайшей линии. Но, как сообщает О. Блюменталь, еще в 1891 г., когда на одном из математических заседаний обсуждался доклад Г. Винера о роли теорем Дезарга и Паппа, Гильберт обронил замечание, в котором, как в зародыше, содержалась основная идея аксиоматического подхода: "Надо, чтобы такие слова, как *точка*, *прямая*, *плоскость*, во всех предложениях геометрии можно было заменить, например, словами *стол*, *стул*, *пивная кружка*".

Греки считали геометрию дедуктивной наукой, которая имеет дело с чисто логическими выводами из небольшого числа однажды установленных аксиом. И Евклид, и Гильберт следовали этой программе. Правда, список Евклида был далеко не полным, у Гильберта же он полон, и в его рассуждениях нет логических пробелов. Евклид пытался дать описательное определение основных пространственных объектов и отношений, фигурирующих в аксиомах; Гильберт отказался от такой попытки. Все, что нам нужно знать об этих основных понятиях, содержится в аксиомах. Эти аксиомы служат, так сказать, неявными (и, разумеется, неполными) их определениями. Евклид считал, что аксиомы должны быть очевидными; предметом его рассмотрения было реальное пространство физического мира. Но в дедуктивной системе геометрии очевидность и даже истинность аксиом несущественны: последние выступают скорее в качестве предположений, из которых извлекаются логические следствия. В самом деле, существует много различных материальных интерпретаций основных понятий, для которых эти аксиомы становятся истинными. Например, аксиомы n -мерной евклидовой векторной геометрии выполняются, если считать вектором распределение постоянных токов в данной электрической цепи, которая состоит из n проводников, соединенных в некоторых точках разветвления, а в качестве квадрата длины вектора принять джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени. При построении геометрии на аксиоматической основе стремятся к возможно большей экономии и тем самым проясняют роль отдельных групп аксиом. Расположенные в их естественной иерархии, это будут аксиомы инцидентности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности. Например, если окажется, что учение о геометрических пропорциях или теорию площадей многоугольников можно построить, не обращаясь к аксиомам непрерывности, то так и следует поступить.

Во всем этот Гильберт был не одинок, но в его исполнении видна рука мастера. Выдающейся фигурой среди предшественников Гильберта был М. Паш, который прошел длинный путь, отправляясь от Евклида, пока не выявил скрытые аксиомы порядка и с методической ясностью не создал дедуктивную систему проективной геометрии (1882). Свой вклад в решение проблемы внесли также другие предшественники Гильберта: Ф. Шур в

Германии и блистательная школа геометров (Пеано, Веронезе) в Италии. В отношении экономии понятий Гильберт был более консервативен, чем итальянцы: он вполне сознательно следовал евклидовой традиции с ее тремя типами неопределяемых элементов — точками, прямыми, плоскостями — и отношениями между ними: инцидентности, порядка и конгруэнтности отрезков и углов. Это придает его книге особое очарование — вы как бы вглядываетесь в лицо, знакомое до мельчайших подробностей и в то же время облагороженное.

Одно дело возводить геометрию на прочном основании, другое — исследовать логическую структуру возведенного здания. Если я не ошибаюсь, Гильберт был первым, кто свободно передвигался на этот более высокий, "метагеометрический" уровень: он стал систематически изучать взаимную независимость своих аксиом и решать вопрос о независимости некоторых из наиболее фундаментальных теорем геометрии от тех или иных ограниченных групп аксиом. Его метод заключается в *построении моделей*: если показано, что данная модель не согласуется с одной из аксиом, удовлетворяя всем остальным, то эта аксиома не может быть следствием прочих аксиом. Один выдающийся пример применения этого метода был известен довольно давно: это модель Кэли — Клейна для неевклидовой геометрии. Незадолго до Гильберта Леви-Чивита построил удовлетворительную арифметическую модель неархимедовой геометрии Веронезе. Вопрос о *непротиворечивости* тесно связан с вопросом о независимости. Общие идеи такого рода мы склонны считать почти банальными, настолько глубоко они проникли в наше математическое мышление. Гильберт сформулировал их на ясном и точном языке, исключая возможность ошибки, воплотив их в труде, который подобен кристаллу, ибо представляет собой монолитное целое с множеством граней. Художественные достоинства этого труда, несомненно, способствовали успеху созданного Гильбертом научного шедевра.

При построении своих моделей Гильберт проявил поразительную изобретательность. Наиболее интересным представляется мне то, как он показывает, что теорема Дезарга не вытекает из аксиом инцидентности для плоскости, но что последние вместе с теоремой Дезарга позволяют вложить плоскость в пространство большего числа измерений, для которого выполняются все аксиомы инцидентности; не менее интересен и другой пример: как Гильберт решает вопрос о необходимости аксиомы непрерывности Архимеда для того, чтобы восстановить полноту аксиом конгруэнтности, сокращенных путем исключения отражений.

Что служит Гильберту строительным материалом, когда он конструирует свои модели? Модель Клейна неевклидовой геометрии может быть интерпретирована следующим образом: если мы признаем евклидову геометрию с ее точками, прямыми и т.д., мы можем, изменив лишь систему терминов, получить также и неевклидову геометрию. Сам Клейн отдавал предпочтение другой интерпретации — в терминах проективного пространства. Однако аналитическая геометрия Декарта давно указала более общее и удовлетворительное решение вопроса, которое не могли не знать Риман, Клейн и многие другие: все, что необходимо для нашей конструкции, — это поле дей-

ствительных чисел. Следовательно, любое противоречие в евклидовой геометрии должно проявляться в виде какого-то противоречия в аксиомах арифметики, на которых основаны действия, производимые нами с действительными числами. Никто до Гильберта не формулировал со всей ясностью это положение. Гильберт устанавливает полный и простой набор аксиом для действительных чисел. Система аксиом арифметики — так же, как система аксиом геометрии, — содержит части, которые можно изымать и заменять другими. С чисто алгебраической точки зрения самыми важными являются аксиомы, характеризующие (коммутативное или некоммутативное) поле. Любое такое абстрактное числовое поле может служить основой для построения соответствующих геометрий. *Vice versa*²⁴, числа и операции над ними можно ввести в терминах пространства, удовлетворяющего определенным аксиомам; прекрасный пример тому — *Streckenrechnung*²⁵, предложенное Гильбертом на основе теоремы Дезарга. В общем случае обратный переход намного сложнее. Чикагская школа под руководством Э.Г. Мура продолжила исследования Гильберта; в частности, О. Веблен многое сделал для установления полного соответствия между проективными пространствами, подчиняющимися некоторым простым аксиомам инцидентности (без аксиом порядка), и абстрактно определяемыми числовыми полями *).

Вопрос о независимости в буквальном смысле состоит в том, чтобы убедиться в невыводимости какого-то вполне определенного предложения (proposition) из других предложений. Он, очевидно, предполагает, что предметом исследования являются сами предложения, а не те вещи, о которых в них говорится, и что мы предварительно полностью проанализировали логический механизм дедукции. Метод моделей позволяет чудесным образом обойтись без такого рода логических исследований. Но за уклонение от фундаментального решения проблемы приходится платить дорогой ценой: метод моделей просто сводит все к вопросу о непротиворечивости аксиом арифметики, оставляя его без ответа. Аналогичным образом, *полнота*, означающая в буквальном смысле, что каждое общее предложение о предметах, к которым относятся аксиомы, может быть разрешено путем построения вывода (by inference) из аксиом, заменяется *категоричностью* (О. Веблен), означающей, что любая мыслимая модель считается изоморфной той модели, с помощью которой установлена непротиворечивость. Именно в этом смысле Гильберт доказывает, что существует только "одна" декартова геометрия, удовлетворяющая всем его аксиомам. Лишь для конечных проективных пространств Г. Фано и О. Веблена, — например, для проективной плоскости, состоящей из семи точек, — эта модель оказывается чисто комбинаторной схемой, и на вопросы о непротиворечивости, независимости и полноте получаются ответы, имеющие абсолютный смысл. Гильберт, по-видимому, никогда не задумывается над тем,

*) Среди последующих работ на эту тему отмечу статью В. Швана "Исчисление отрезков и теория групп" (Schwan W. Streckenrechnung und Gruppentheorie // Math. Z. — 1919. — Bd 3. — S. 11–28). Полная библиография трудов по аксиоматике геометрии, выполненных после Гильберта, заняла бы много страниц, поэтому я предпочитаю не приводить соответствующих имен.

чтобы проиллюстрировать свою концепцию аксиоматического метода на чисто комбинаторных схемах, и тем не менее именно они до сих пор служат наиболее простыми примерами.

Иной подход к основаниям геометрии, в корне отличный от принятого в его книге, Гильберт избрал в своей работе, которая по праву считается одним из самых ранних документов теоретико-множественной топологии. С точки зрения механики главная задача, которую должна решить геометрия, состоит в описании движения твердого тела. Это была точка зрения Гельмгольца, которому удалось с помощью небольшого числа простых аксиом описать группу движений в евклидовом пространстве. Софус Ли рассмотрел этот же вопрос в свете своей общей теории непрерывных групп. Теория Ли зависит от некоторых допущений о дифференцируемости; задача о том, как избавиться от этих ограничительных допущений, составила одну из проблем, сформулированных Гильбертом в его парижском докладе. В работе, о которой я только что упомянул, Гильберту *удается* избавиться от этих допущений в предположении, что проблема Гельмгольца рассматривается для плоскости. Доказательство трудно и громоздко; естественно, что условие непрерывности составляет теперь фундамент, а не служит замковым камнем для свода, венчающего сооружение, как это было в "Основаниях" Гильберта. Другие авторы (Р.Л. Мур, Н.Дж. Леннес, В. Зюс, Б. фон Керекъярто) существенно продвинули решение проблемы в этом топологическом направлении. Тут, может быть, интересна одна реминисценция наполовину личного характера. Гильберт определяет двумерное многообразие с помощью окрестностей и требует, чтобы был указан класс "допустимых" взаимно однозначных отображений окрестности на жордановы области в плоскости x, y , из которых любые две связаны непрерывными преобразованиями. Когда в 1912 г. я читал в Гёттингене курс теории римановых поверхностей, я пользовался работой Гильберта и заметил, что для задания класса допустимых отображений можно воспользоваться самими окрестностями. Окончательную завершенность возникшему на этом пути определению придал Ф. Хаусдорф; аксиомы Хаусдорфа используются в топологии буквально на каждом шагу*) (тем не менее, когда нам приходится объяснять, что такое *дифференцируемое* многообразие, мы и поныне следуем окольному пути Гильберта; см. труд Веблена и Уайтхеда "Основания дифференциальной геометрии", Кембридж. 1932).

Фундаментальная проблема *абсолютного доказательства непротиворечивости* для аксиом, которые должны охватывать весь математический анализ и даже канторовскую теорию множеств во всей ее необъятной общности, постоянно находилась в сознании Гильберта, как свидетельствует доклад, прочитанный им в 1904 г. на Международном конгрессе в Гейдельберге. Мы видим Гильберта в пути, но еще далеко не достигшим конечной цели. А затем наступил период, когда все его внимание захватили сначала

*) Аналогичный подход получил развитие и в США; его главным инициатором был Э.Г. Мур. Поскольку мне приходится писать главным образом по памяти, мой рассказ неизбежно окрашен гёттингенскими традициями.

интегральные уравнения, а затем физика. Явственный отзвук старой проблемы слышен в докладе "Axiomatische Denken", с которым Гильберт выступил в 1917 г. в Цюрихе. К этому времени трудности в основаниях математики достигли критической стадии, и положение дел взывало о помощи. Под ударами неотразимых парадоксов теории множеств Дедекинда и Фреге отказались от своих исследований природы чисел и арифметических предложений; Бертран Рассел указал на иерархию типов, которая, если не "пресечь" ее насильственно, подрывает арифметическую теорию континуума, и, наконец, Л.Э.Я. Брауэр со своим интуиционизмом открыл нам глаза и показал, сколь далеко общепринятая математика выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности. Я сожалею, что, находясь в оппозиции к Брауэру, Гильберт никогда открыто не признал того, в сколь большом долгу он, как и все остальные математики, находится перед Брауэром за это его открытие.

Гильберт не хотел идти на тяжелые жертвы, которых требовала точка зрения Брауэра; и он узрел, по крайней мере в общих чертах, путь, позволяющий избежать тяжелых увечий. В то же время Гильберт был встревожен признаками зарождающихся колебаний в рядах математиков, кое-кто из которых открыто перешел на сторону Брауэра. Моя собственная статья о Grundlagenkrise²⁶ в Math. Z. (1921. — Bd 10), написанная в Европе в беспокойной атмосфере первых послевоенных лет, красноречиво свидетельствует об этих настроениях.

Итак, Гильберт самым серьезным образом обращается к проблемам оснований математики. Он убежден, что полную надежность удастся восстановить, не "совершая предательства по отношению к нашей науке". Гнев и решимость звучат в его голосе, когда он призывает "die Grundlagenfragen einfürallemal aus der Welt zu schaffen"²⁷. "Отнять у математиков закон исключенного третьего, — утверждает Гильберт, — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксеру пользование кулаками".

Гильберт понимал, что математические утверждения сами по себе не могут стать предметом математического изучения, призванного ответить на вопрос об их непротиворечивости в его первоначальном смысле, если эти утверждения предварительно не сведены к *формулам*. Алгебраические формулы типа $a + b = b + a$ — самые известные тому примеры. Процесс дедукции, с помощью которого ранее полученные формулы порождают новые формулы, следует описывать без всякой ссылки на какие-либо значения этих формул. Начало дедукции составляют первичные формулы — аксиомы, — которые должны быть выписаны явно. Если в Гильбертовых "Основах геометрии" значение геометрических терминов было признано не относящимся к делу, а относительно значения таких логических терминов, как "и", "не", "если . . . , то . . .", все еще предполагалось, что оно подлежит осмыслению, то теперь решительно изгоняются последние остатки смыслового содержания. В результате в формулах появляются логические символы, например, знак $\rightarrow$ в формуле $a \rightarrow b$, что читается: "*a* имплицитует *b*". Гильберт полностью согласен с Брауэром в том, что математические предложения²⁸ в подавляющем большинстве не являются "реаль-

ными" предложениями, передающими определенное содержание, которое удостоверяемо очевидными данностями (verifiable in the light of evidence). Однако он подчеркивает, что эти нереальные — "идеальные" — предложения необходимы для придания "полноты" нашей математической системе. Таким образом, полностью отказываясь от требования осмысленности, Гильберт противостоит Брауэру, призывавшему отбросить все лишнее смысла; то, что Гильберт стремится установить, — это не *истинность* конкретного (individual) математического предложения, а *непротиворечивость* системы. Игра в дедукцию, если вести ее по правилам, уверяет Гильберт, никогда не приведет к формуле $0 \neq 0$. В этом и только в этом смысле он обещает сохранить в целости заботливо возвращенную нами классическую математику.

Тем, кто обвинял его в сведении математики к простой игре, Гильберт возражает, ссылаясь, во-первых, на то, что введение идеальных элементов во имя достижения полноты — обычный метод, широко используемый во всей математике (таковы, например, идеальные точки, лежащие вне достижимой области пространства, без которых пространство было бы неполно), и, во-вторых, на смежную с математикой науку — физику, где аналогичным образом экспериментально проверяется не отдельное утверждение, а лишь система в целом, которая в принципе только и может сопоставляться с опытом.

Но как убедиться в том, что "игра в дедукцию" никогда не приведет к противоречию? Можем ли мы доказать это, пользуясь тем же математическим методом, правильность которого и составляет вопрос, а именно путем дедукции, исходящей из аксиом? Очевидно, это привело бы к регрессу ad infinitum²⁹. Для Гильберта как поборника аксиоматического метода нелегко было признать, что непротиворечивость достигается с помощью *интуитивных рассуждений*, основанных на очевидности, а не на аксиомах. И, тем не менее, то, что в дело в конце концов вступает проницательное око нашего разума, не вызывает удивления. Уже тогда, когда мы излагаем правила игры, нам приходится рассчитывать на понимание. Игра проходит без слов, но ее правила необходимо *сформулировать*, и любое рассуждение о правилах, в частности об их непротиворечивости, необходимо облечь *е слова*. Кстати сказать, описывая необходимую интуитивную основу своей Beweis-theorie³⁰, сам Гильберт демонстрирует мастерское владение языком — этим, увы, неоднозначным средством общения. При выборе того, что он считает очевидным в своих "метаматематических" рассуждениях, Гильберт поступает как католик, более ревностный, чем папа римский, — он стремится к большей строгости, чем Кронекер и Брауэр. Однако это не помогает справиться с той трудностью, что наше рассуждение, сопровождая некоторую гипотетическую последовательность формул, приводящую к формуле $0 \neq 0$, проводится с гипотетической общностью и основано на очевидности такого сорта, которую формалист склонен заклеить как применение принципа совершенной индукции. Элементарную арифметику можно основывать на таких интуитивных рассуждениях, как это описывает сам Гильберт, но для введения бесконечного, которое бы выполняло всю ту важную роль, которую оно играет в высшей математи-

ке, нам требуется формальный аппарат переменных и "кванторов". Тем самым Гильберт отдает предпочтение четкому разграничению: он становится строгим формалистом в математике, строгим интуиционистом в метаматематике.

Я попытаюсь кратко пояснить, каким образом Гильбертов формализм восстанавливает в правах *принцип исключенного третьего*, бывшего главной мишенью критики Брауэра. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел $0, 1, 2, \dots$. Любое свойство A , присущее числам (например, свойство "быть простым"), можно представить с помощью пропозициональной функции $A(x)$ (" x есть простое число"), из которой при подстановке вместо переменной x конкретного числа b возникает какое-то определенное предложение $A(b)$ (" b есть простое число"). Согласно принципу, который отрицает Брауэр и стремится сохранить Гильберт, либо 1) существует число x , для которого справедливо $A(x)$, либо 2) $A(x)$ не справедливо ни при каком x ; и для свойства A может быть найден "образец", или "представитель", r — такое число, что при любом b из $A(b)$ следует $A(r)$, т.е. $A(b) \rightarrow A(r)$. В самом деле, в случае альтернативы 1) в качестве r можно выбрать одно из тех чисел x , для которых справедливо $A(x)$, а в случае альтернативы 2) r можно выбрать наугад. Так, образом, представляющим свойство "быть честным", может служить Аристид, поскольку, как утверждали афиняне, если есть на свете честный человек, так это Аристид. Предположив, что представитель известен, мы можем решить, существует ли честный человек, или все люди нечестны, просто *взглянув на представителя*: если он нечестен, то и все люди нечестны. В области чисел выбор представителя может быть сделан даже единственным: в случае 1) выбирается наименьшее число $x = r$, для которого выполняется $A(x)$, а в противном случае выбирается $x = 0$. Таким образом, представитель r получается из A с помощью некоторого оператора ρ_x ($r = \rho_x A(x)$), применимого к любому мыслимому свойству A . Пропозициональная функция может содержать кроме x также и другие переменные $y, z, \dots$. Поэтому оператор ρ необходимо снабдить индексом x — точно так же, как при интегрировании необходимо указывать, по какой переменной оно производится. Оператор ρ_x исключает переменную x ; например, $\rho_x A(x, y)$ есть пропозициональная функция только y . Такого рода операторы принято называть кванторами. Следовательно, нашу аксиому можно записать в виде

$$A(b) \rightarrow A(\rho_x A(x)). \quad (8)$$

То, что выбор представителя однозначен и производится описанным выше способом, не существенно: наше правило все равно применимо лишь тогда, когда x пробегает все числа $0, 1, 2, \dots$. Вместо того чтобы жестко фиксировать представителя, мы мысленно наделяем квантор ρ_x универсальной применимостью, и он как бы выбирает для нас представителя. Аксиома выбора Цермело оказывается, таким образом, вплетенной в ткань принципа исключенного третьего. Это смелый шаг, но чем смелее, тем лучше, лишь бы можно было показать, что мы остаемся в рамках непротиворечивости!

При формалистском подходе (in the formalism) пропозициональные функции заменяются формулами, действия с которыми должны быть описаны без всякой ссылки на их значение. В общем случае среди символов, входящих в формулу $\mathcal{A}$, встречаются переменные $x, y, \dots$. Мы говорим, что символ ρ_x связывает переменную x в формуле $\mathcal{A}$, стоящую после него *), и что x свободна в формуле $\mathcal{A}$, если она не связана никаким квантором.

Итак, $x, y, \rightarrow, \rho_x$ суть символы, входящие в формулы; готические буквы не принадлежат к числу такого рода символов, и мы используем их в целях коммуникации. Нашу главную аксиому (8) более естественно считать правилом для образования аксиом. Оно гласит: возьмите любую формулу $\mathcal{A}$, в которой x является единственной свободной переменной, и любую формулу $\mathcal{b}$ без свободных переменных и образуйте из них формулу

$$\mathcal{A}(\mathcal{b}) \rightarrow \mathcal{A}(\rho_x \mathcal{A}). \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{A}(\mathcal{b})$ означает формулу, которая получается из $\mathcal{A}$ при подстановке $\mathcal{b}$ во всей формуле вместо переменной x всюду, где x входит свободно.

При таком подходе, используя определенные правила, формулы можно получать как аксиомы. Дедукция проводится по правилу силлогизма: из двух полученных ранее формул $\mathcal{a}$ и $\mathcal{a} \rightarrow \mathcal{b}$, первая из которых вновь появляется во второй формуле слева от знака $\rightarrow$, получается формула $\mathcal{b}$.

Каким образом Гильберт предлагает убедиться в том, что эта дедуктивная игра никогда не приведет к формуле $0 \neq 0$? В основе предлагаемой им процедуры лежит следующая идея. Пока мы имеем дело лишь с "финитными" (finite) формулами — формулами, не содержащими кванторов $\rho_x, \rho_y, \dots$, нам достаточно просто посмотреть на них, чтобы решить, истинны они или ложны. Однако когда в формуле появляется квантор ρ , такого рода описательная оценка формул становится невозможной: наглядность больше не срабатывает. Но любая конкретно заданная дедукция представляет собой последовательность формул, в которых аксиоматическое правило (9) используется лишь ограниченное число раз. Предположим, что встречается только один квантор ρ_x и что всякий раз, когда он появляется, за ним стоит одна и та же финитная формула $\mathcal{A}$, так что все случаи применения правила (9) имеют вид

$$\mathcal{A}(\mathcal{b}_1) \rightarrow \mathcal{A}(\rho_x \mathcal{A}), \dots, \mathcal{A}(\mathcal{b}_n) \rightarrow \mathcal{A}(\rho_x \mathcal{A}). \quad (10)$$

Предположим также, что формулы $\mathcal{b}_1, \dots, \mathcal{b}_n$ финитны, и произведем редукцию, заменяя $\rho_x \mathcal{A}$ некоторой финитной формулой $\mathcal{z}$ всякий раз, когда $\rho_x \mathcal{A}$ входит в нашу последовательность как часть какой-либо формулы. В частности, формулы (10) перейдут при этом в формулы

$$\mathcal{A}(\mathcal{b}_1) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{z}), \dots, \mathcal{A}(\mathcal{b}_n) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{z}). \quad (11)$$

*) Если правило, согласно которому ρ_x связывает x во всем, что стоит после этого символа, понимать буквально, то формулу $\mathcal{a} \rightarrow \mathcal{b}$ надлежит записывать в виде $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{a} \\ \mathcal{b} \end{array} \right.$. При такой записи формулы напоминают генеалогические деревья.

Теперь мы видим, как выбирать формулу $\mathfrak{z}$: если, просматривая одну за другой финитные формулы $\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1), \dots, \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_h)$, мы найдем истинную формулу, скажем $\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_3)$, то в качестве $\mathfrak{z}$ мы берем $\mathfrak{b}_3$. Если же все эти формулы окажутся ложными, то $\mathfrak{z}$ можно выбирать наугад. Тогда все h формул (11), получившихся в результате редукции, являются "истинными", и наше предположение о том, что данный дедуктивный вывод заканчивается ложной формулой $0 \neq 0$, приводит ad absurdum. Решающее значение во всем этом имеет то, что в конкретно заданном дедуктивном выводе используется только ограниченное число явно представленных индивидов $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_h$. Если мы ошибемся в выборе представителя, например, выберем не Аристиды, а Алкивиада как олицетворение неподкупности, то ошибка не причинит нам вреда, покуда все те немногие люди (из бесконечной толпы афинян), с которыми мы непосредственно имеем дело, будут падки на подкуп.

Несколько более сложный случай возникает, если допустить, что формулы $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_h$ содержат квантор ρ_x , при условии, однако, что за ним всегда следует одна и та же формула $\mathfrak{A}$. В этом случае мы предпримем сначала пробную редукцию и заменим $\rho_x \mathfrak{A}$, скажем, числом 0. Формулы $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_h$ перейдут при такой замене в редуцированные финитные формулы $\mathfrak{b}_1^0, \dots, \mathfrak{b}_h^0$, а (10) перейдет в

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1^0) \rightarrow \mathfrak{A}(0), \dots, \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_h^0) \rightarrow \mathfrak{A}(0).$$

Такая редукция непригодна лишь в том случае, если формула $\mathfrak{A}(0)$ ложна и в то же время одна из формул $\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_1^0), \dots, \mathfrak{A}(\mathfrak{b}_h^0)$, скажем, $\mathfrak{A}(\mathfrak{b}_3^0)$, истинна. Но тогда $\mathfrak{b}_3^0$ оказывается совершенно законным представителем формулы $\mathfrak{A}$, и вторая редукция, заменяющая $\rho_x \mathfrak{A}$ на $\mathfrak{b}_3^0$, приводит к желаемому результату.

Но все это — не более чем скромное начало тех трудностей, которые ожидают нас впереди. Кванторы $\rho_x, \rho_y, \dots$ с различными переменными и применяемые к различным формулам нагромождаются друг на друга. Выполним пробную редукцию и увидим, что в некоторых местах она не проходит; обнаружив это, мы сумеем внести необходимые исправления. Но и в исправленном варианте редукция в каких-то местах может отказать, и мы начнем описывать порочный круг. Возникает проблема: каким образом надлежит вносить последовательные исправления, чтобы с уверенностью получить редукцию, правильно работающую во всех местах данной последовательности формул? Ничто не способствовало в такой мере обнаружению скрытых порочных кругов в обычных трансфинитных рассуждениях в математике, чем усилия убедиться в непротиворечивости, несмотря на все порочные круги.

Система обозначений, служащая для такого рода формализации математики, а также соответствующий общий подход и первые попытки доказательства непротиворечивости принадлежит самому Гильберту. Осуществление программы Гильберта было продолжено его молодыми сотрудниками — П. Бернаисом, В. Аккерманом и Дж. фон Нейманом. Последние

два доказали непротиворечивость "арифметики" — той ее части, в которой еще не допускается опасная аксиома о свертывании (conversion) предикатов в множества. Оставшийся пробел в то время казался вполне безобидным, и были разработаны подробные планы вторжения в анализ. Но тут разразилась катастрофа: предположив, что непротиворечивость установлена, К. Гёдель показал, как строить арифметические предложения, которые очевидным образом истинны и тем не менее не выводимы в данном формализме³¹. Метод Гёделя применим к формализму Гильберта, равно как и к любому другому не слишком органичительному формализму. Ни одна из двух областей — область формул, выводимых в формализме Гильберта, и область реальных, очевидным образом истинных предложений — не содержит другую (при условии, что в непротиворечивости формализма вообще можно убедиться). Тем самым отпал вопрос о полноте формализма в том самом абсолютном смысле, который имел в виду Гильберт. Когда впоследствии Г. Генцен восполнил пробел в доказательстве непротиворечивости арифметики, оказавшийся, как показало открытие К. Гёделя, действительно серьезным, сделать это удалось, лишь существенно снизив требования Гильберта к очевидности*). Границы того, что заслуживает доверия с интуитивной точки зрения, снова стали неопределенными. Поскольку все силы были сосредоточены на защите исконной территории арифметики, до вторжения в анализ, не говоря уже об общей теории множеств, дело так и не дошло.

Таково положение и поныне; окончательного решения проблемы не видно. Но что бы ни принесло нам будущее, нет сомнений в том, что Брауэр и Гильберт подняли проблемы оснований математики на новый уровень. Возвращение на позиции "Principia Mathematica" Рассела и Уайтхеда немислимо.

Гильберт был страстным поборником аксиоматики. Он был преисполнен убеждения, что аксиоматический подход имеет универсальное значение не только для математики, но и для всех наук. Его исследования в области физики выдержаны в аксиоматическом духе. В своих лекциях он любил пояснять сущность аксиоматического метода на примерах, относящихся к биологии, экономике и т.д. Современная эпистемологическая интерпретация науки формировалась под сильным его влиянием. Иногда кажется, что, восхваляя аксиоматический метод, Гильберт склонен считать конструктивный, или генетический, метод обреченным на полное вымирание. Я уверен, однако, что по крайней мере в более поздний период своей жизни он придерживался иного мнения. Ибо хотя исходные математические объекты Гильберт изучает с помощью аксиом своей символической системы, ее формулы строятся в самом явном и финитном виде. В последнее время аксиоматический метод с корней математического дерева распространился на все его ветви. Так, вся алгебра, сверху донизу, проникнута аксиоматическим духом. Роль аксиом в ней можно описать следующим образом: это средство задания области изменения переменных, входящих в явные конструк-

*) Gentzen G. // Math. Ann. — 1936. — Bd. 112. — S. 493—565.

ции. Однако не очень трудно представить картину и так, что аксиомы приобретут главенствующее положение. Непредвзятое отношение к вопросу состоит в том, чтобы отдавать должное обоим подходам; увлекательность современных математических исследований в немалой степени обязана счастливому сочетанию аксиоматического и генетического методов.

Интегральные уравнения

Два периода, на протяжении которых усилия Гильберта были сосредоточены на основаниях сначала геометрии, а затем всей математики, разделены двадцатью долгими годами, посвященными математическому анализу и физике.

Зимой 1900—1901 гг. шведский математик Э. Хольмгрен выступил на семинаре Гильберта с докладом о первых публикациях Фредгольма по интегральным уравнениям, и Гильберт, по-видимому, сразу же воодушевился. Предыстория вопроса, долгая и изобилующая крутыми поворотами, берет начало с Даниила Бернулли. На протяжении двух веков математики не оставляли попыток решить задачу о колебаниях сплошной среды (в механике, акустике, оптике, электромагнетизме) и связанную с ней краевую задачу теории потенциала. Поворотным пунктом стал выход "Аналитической теории теплоты" Фурье (1822). Г.А. Шварц (1885) впервые доказал существование собственных колебаний для случая двух и большего числа измерений, определив основную частоту мембраны. В последнем десятилетии XIX в. Пуанкаре проложил свой путь к развитию мощных теоретико-функциональных методов; вместе с К. Нейманом он принялся за решение краевой задачи для уравнения потенциала; Вольтерра изучил тот тип интегральных уравнений, который ныне носит его имя, а для линейных уравнений с бесконечно большим числом неизвестных Хельга фон Кох ввела определители бесконечного порядка. Большинство научных открытий совершается, когда приходит их время; лишь иногда, в редких случаях, взлет гения опережает развитие событий на десятилетия. Открытие Фредгольма всегда казалось мне сильно запоздалым. Что может быть естественнее, чем идея о предельном переходе от дискретной системы материальных точек к сплошной среде, сопровождающемся переходом от системы линейных уравнений, описывавших дискретные точки, к интегральному уравнению? Но то обстоятельство, что в более простых случаях в пределе возникает дифференциальное, а не интегральное уравнение, на целых два столетия приковало внимание математиков к дифференциальным уравнениям!

Следует, однако, заметить, что простота полученных Фредгольмом результатов обусловлена особой формой его уравнения:

$$x(s) - \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = f(s) \quad (0 \leq s \leq 1);$$

найти ее было бы трудно, если бы он не руководствовался теми задачами математической физики, к которым он применял его. В самом деле, линей-

ный оператор в левой части действует на неизвестную x , порождая некоторую заданную функцию f : $(E - K)x = f$; он состоит из двух частей: тождественного оператора E и интегрального оператора K , в некотором смысле более слабого по сравнению с E . Фредгольм доказал, что для этого типа интегральных уравнений имеют место следующие два факта относительно n линейных уравнений с тем же числом n неизвестных. 1) Однородное уравнение $[f(s) = 0]$ имеет конечное число линейно независимых решений $x(s) = \varphi_1(s), \dots, \varphi_h(s)$, а однородное уравнение с сопряженным ядром $K'(s, t) = K(t, s)$ имеет столько же решений $\psi_1(s), \dots, \psi_h(s)$. 2) Неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда заданная функция f удовлетворяет h линейным уравнениям

$$\int_0^1 f(s) \psi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Пользуясь искусственным приемом, предложенным Пуанкаре, Фредгольм вводит параметр λ , заменяя K на λK , и получает решение в виде, хорошо известном из теории конечных систем линейных уравнений, а именно в виде отношения двух определителей типа Хельги фон Кох, каждый из которых является целой функцией параметра λ .

Гильберт увидел две вещи: 1) после того как функция Грина K для заданной области G и уравнения потенциала $\Delta u = 0$ построена на границе области с помощью уравнения Фредгольма, дифференциальное уравнение колеблющейся мембраны $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$ переходит в неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

с симметричным ядром K , $K(s, t) = K(t, s)$ (параметр λ не вводится искусственно, а отвечает существу задачи); 2) задача нахождения "собственных значений" λ и "собственных функций" $\varphi(s)$ этого интегрального уравнения является интегральным аналогом задачи о приведении квадратичной формы от n переменных к главным осям. Следовательно, соответствующая теорема для квадратичной интегральной формы

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t) x(s) x(t) ds dt \quad (12)$$

с произвольным симметричным ядром K должна служить общей основой теории колебаний сплошной среды. Даже если другие и понимали это, Гильберт усмотрел то же самое по крайней мере с большей ясностью и приложил все усилия, чтобы доказать соответствующее предложение; ему удалось сделать это с помощью того же прямого метода, который около 1730 г. Бернулли применил к колебаниям струны, — предельного перехода, исходя из алгебраической задачи. При выполнении перехода к пределу Гильберту понадобился определитель Кох—Фредгольма. Он установил, что существует последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, стремящихся к бесконечности, $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и некоторая ортонорми-

рованная система соответствующих собственных функций $\varphi_n(s)$:

$$\varphi_n(s) - \lambda_n \int_0^1 K(s, t) \varphi_n(t) dt = 0,$$

$$\int_0^1 \varphi_m(s) \varphi_n(s) ds = \delta_{mn},$$

таких, что

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t) x(s) x(t) ds dt = \sum \xi_n^2 / \lambda_n,$$

где ξ_n есть коэффициент Фурье $\int_0^1 x(s) \varphi_n(s) ds$. Из этой теории следует, что каждую функцию вида

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям φ_n :

$$y(s) = \sum_n \eta_n \varphi_n(s), \quad \eta_n = \int_0^1 y(s) \varphi_n(s) ds.$$

Избранный Гильбертом предельный переход весьма сложен. Вскоре после этого Э. Шмидт в своей гёттингенской диссертации предложил более простое и конструктивное доказательство тех же результатов, приспособив для нужд интегральных уравнений метод Г.А. Шварца, изобретенный на двадцать лет раньше.

От конечных форм путь лежит либо к интегралам, либо к бесконечным рядам. Поэтому Гильберт рассматривает ту же задачу об ортогональном преобразовании заданной квадратичной формы

$$K = \sum K_{mn} x_m x_n \quad (13)$$

в форму специального вида

$$\kappa_1 \xi_1^2 + \kappa_2 \xi_2^2 + \dots \quad (\kappa_n = 1/\lambda_n \rightarrow 0) \quad (14)$$

и для случая бесконечно многих (действительных) переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, или векторов x , в бесконечном счетномерном пространстве. Допустимыми считаются только такие векторы x , которые имеют конечную длину $|x|$,

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots;$$

они образуют то, что мы теперь называем гильбертовым пространством. По сравнению с "пространством" всех непрерывных функций $x(s)$ гильбертово пространство обладает важным преимуществом — свойством определенной полноты, и именно это свойство позволяет установить, что данная

квадратичная форма K (13) приводится к виду (14) тогда и только тогда, когда она вполне непрерывна, с помощью рассуждения, хорошо известного для алгебраического случая: числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ определяются как последовательные максимумы формы K на "сфере" $|x|^2 = 1$.

Теорема о квадратичной интегральной форме означает, что связь между пространством функций $x(s)$ и гильбертовым пространством векторов $(x_1, x_2, \dots)$ устанавливается с помощью любой *полной* ортонормированной системы $u_1(s), u_2(s), \dots$ и выражается равенствами

$$x_n = \int_0^1 x(s) u_n(s) ds.$$

Неравенство Бесселя гласит, что сумма квадратов коэффициентов Фурье x_n не превосходит интеграла от квадрата функции $x(s)$. Отношение полноты, впервые введенное А. Гурвицем и подробно изученное В. Стекловым, требует, чтобы в этом неравенстве возобладали знак *равенства*. Таким образом, из теоремы о квадратичных формах бесконечно многих переменных сразу же получаются соответствующие результаты относительно собственных значений и собственных функций симметричных ядер $K(s, t)$ — или эти результаты могли быть получены, если бы мы были вправе рассчитывать на равномерную сходимость ряда $\sum x_n u_n(s)$ для любого заданного вектора $(x_1, x_2, \dots)$ гильбертова пространства. В частном случае, когда собственный вектор квадратичной формы (13) соответствует интегральной форме (12),

$$x_n = \lambda \sum_m K_{nm} x_m,$$

Гильберт решает задачу, составляя равномерно сходящийся ряд

$$\lambda \sum_m x_m \int_0^1 K(s, t) u_m(t) dt,$$

который действительно порождает непрерывную функцию $\varphi(s)$ с n -м коэффициентом Фурье

$$x_n = \lambda \sum_m K_{nm} x_m;$$

тем самым он получает собственную функцию ядра $K(s, t)$ для собственного значения λ . Вскоре после этого под влиянием идей Гильберта Э. Фишер и Ф. Рисс доказали свою хорошо известную теорему о том, что пространство всех функций $x(s)$, квадрат которых интегрируем по Лебегу, обладает таким же свойством полноты, что и гильбертово пространство, и, следовательно, каждое из этих пространств допускает взаимно однозначное отображение на другое пространство с помощью полной ортонормированной системы $u_n(s)$. Я упоминаю об этих деталях потому, что многие молодые математики, воспринимавшие гильбертово пространство как абстрактное понятие и не проводящие различия между двумя его реализациями — как пространства интегрируемых с квадратом функций $x(s)$ и как пространства последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ с суммируемым квадратом, —

предают забвению хронологическую последовательность событий. Думаю, что Гильберт поступил разумно, когда решил не выходить за рамки непрерывных функций и не вводить без особой надобности общие понятия Лебега.

Наивысшим достижением Гильберта в области интегральных уравнений, по-видимому, следует считать предложенное им обобщение теории спектрального разложения — переход от вполне непрерывных к так называемым *ограниченным* квадратичным формам. Гильберт обнаружил, что в общем случае точечный спектр обладает точками сгущения и кроме точечного спектра появляется непрерывный спектр. И в этом случае он получает результат прямым переходом к пределу, устремляя *ad infinitum* число переменных $x_1, x_2, \dots$. И снова другие математики вскоре находят более простые доказательства полученных им результатов.

Последовательно расширяя таким образом границы общей теории, Гильберт не упускает из виду обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных, из которых эта общая теория возникла. Он — и одновременно молодой итальянский математик Эудженио Элиа Леви — разрабатывает метод параметрикса, наводя мост между дифференциальными и интегральными уравнениями. Для заданного эллиптического дифференциального оператора Δ^* второго порядка параметрикс $K(s, t)$ представляет собой некую разновидность качественной аппроксимации функции Грина, зависящую, подобно последней, от значений аргумента s и параметра t . Предполагается, что параметрикс обладает регулярной особенностью при $s = t$, так что неоднородное уравнение $\Delta^* u = f$ при

$$u = K\rho, \quad u(s) = \int K(s, t) \rho(t) dt$$

порождает для функции плотности ρ интегральное уравнение $\rho + L\rho = f$ с ядром $L(s, t) = \Delta^* K(s, t)$, достаточно регулярным при $s = t$ для того, чтобы к нему можно было применить теорию Фредгольма. Здесь важен отказ от предположения о том, что K удовлетворяет уравнению $\Delta^* K = 0$, так как в общем случае для данного дифференциального оператора Δ^* фундаментальное решение не известно. От хлопот с граничными условиями Гильберт избавляется, предполагая, что интегрирование производится по *компактному* многообразию — типа сферической поверхности, — и находит, что его метод применим, если параметрикс не только имеет регулярную особенность, но и является симметричным относительно аргумента и параметра.

Сказанного вполне достаточно, чтобы уяснить главное: на территории анализа была открыта богатая золотоносная жила; сравнительно легко доступная, она должна была иссякнуть не скоро. Линейные уравнения с бесконечно многими неизвестными необходимо было изучать дальше (Э. Шмидт, Ф. Рисс, О. Тёплиц, Э. Хеллингер и др.); более тщательного исследования ждали непрерывный спектр и его роль в интегральных уравнениях с "сингулярными" ядрами (Э. Хеллингер, Т. Карлеман); было обращено должное внимание и на обыкновенные дифференциальные уравнения второго и более высокого порядка с регулярными и сингулярными

граничными условиями (А. Кнезер, Э. Хильб, Дж.Д. Биркгоф, М. Бохер, Я.Д. Тамаркин и многие другие)*). Для распределения собственных значений удалось вывести такие асимптотические законы, которые необходимы при рассмотрении термодинамики излучения (Г. Вейль, Р. Курант). Разложения по собственным функциям стали изучаться безотносительно к тому, что они возникли в области дифференциальных и интегральных уравнений. В новом свете предстали непрерывные дроби Стилтеса и проблема моментов. Наиболее честолюбивые начали штурм нелинейных интегральных уравнений. Вокруг Гильберта объединилась многочисленная международная школа молодых математиков, и интегральные уравнения вошли в моду не только в Германии, но и во Франции, где им уделяли внимание такие великие мастера, как Э. Пикар и Гурса, в Италии и по эту сторону Атлантики. Было написано много работ как хороших, так и посредственных. Однако общий итог состоял в значительном изменении во взгляде на анализ.

Замечательны приложения интегральных уравнений вне той области, для которой они были первоначально введены. Из этих приложений я назову следующие три. 1) Проблема Римана, состоящая в определении n аналитических функций $f_1(z), \dots, f_n(z)$, регулярных всюду, кроме конечного числа точек, и претерпевающих при аналитическом продолжении вокруг этих точек заданные линейные преобразования. Эту проблему решил сам Гильберт, а позднее в более простом и полном виде И. Племель. (В весьма частном случае проблема сводится к вопросу о существовании алгебраических функций на римановой поверхности, заданной как накрывающая комплексной z -плоскости.) Исследования Дж.Д. Биркгофа по матрицам, элементами которых служат аналитические функции, принадлежат к тому же направлению. 2) Доказательство полноты неприводимых представлений компактной непрерывной группы. Этот результат служит неоценимым инструментом при разработке общей теории инвариантов методом усреднения, предложенным Адольфом Гурвицем; вместе со своими уточнениями и обобщениями он играет важную роль в современных работах по теории групп, включая разработанную Г. Бором теорию почти периодических функций**). Так возник контакт со "старой знакомой" Гильберта — теорией инвариантов. 3) Совсем недавно метод параметрикса, предложенный Гильбертом, позволил доказать центральную теорему существования в развитой У.В.Д. Ходжем теории гармонических интегралов на компактных римановых пространствах***)³².

*) Ссылки на более поздние публикации и результаты, относящиеся к системам дифференциальных уравнений, см. в работах Schur A. // Math. Ann. — 1921. — Bd. 82. — S. 213—239; Bliss G.A. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1926. — V. 28. — P. 561—584; Reid W.T. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1938. — V. 44. — P. 508—521.

**) Weyl H. and Peter F. // Math. Ann. — 1927. — Bd 97. — S. 737—755; Haar A. // Ann. Math. — 1933. — V. 34. — P. 147—169; von Neumann J. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1934. — V. 36. — P. 445—492. См. также Pontrjagin L. Topological groups. — Princeton, 1939.

***) Hodge W.V.D. The theory and applications of harmonic integrals. — Cambridge, 1941; Weyl H. // Ann. Math. — 1943. — V. 44. — P. 1—6.

История была бы довольно драматичной, даже если бы она на этом закончилась. Но произошло своего рода чудо: спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве оказалась подходящим математическим аппаратом для новой квантовой физики, начало которой было положено в 1925 г. Гейзенбергом и Шрёдингером. Это послужило толчком к пересмотру всего комплекса проблем более тонкими средствами (Дж. фон Нейман, А. Винтнер, М. Стоун, К. Фридрихс). Поскольку Дж. фон Нейман был сотрудником Гильберта вплоть до того времени, когда интересы фон Неймана разделились между квантовой физикой и основаниями математики, историческая преемственность его интересов с научной деятельностью Гильберта не нарушалась и на этой более поздней стадии. То, что произошло в наше время с теорией абстрактных пространств и линейных операторов в них, выходит за рамки настоящей статьи.

Картина "аналитического" периода в творчестве Гильберта была бы неполной, если бы я не упомянул о втором мотиве — *вариационном* исчислении, переплетающемся с главным мотивом — интегральными уравнениями. "Теорема о независимости", которой завершается его парижский доклад о проблемах математики (1900), представляет собой существенный вклад в формальный аппарат этого исчисления. Но гораздо более важную роль сыграл предпринятый Гильбертом дерзкий штурм проблем, касающихся максимумов и минимумов функционалов. Весь тщательно разработанный традиционный арсенал вариационного исчисления был сознательно оставлен в стороне. Вместо этого Гильберт предложил строить минимизирующую функцию как предел последовательности функций, для которых рассматриваемый интеграл стремится к своему минимальному значению. Классическим примером может служить интеграл Дирихле по двумерной области G :

$$D[u] = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Допустимыми считаются все функции u с непрерывными производными, удовлетворяющие заданным граничным значениям. Если d — нижний предел значений, принимаемых интегралом $D[u]$ на допустимых u , то можно найти последовательность допустимых функций u_n , такую, что $D[u_n] \rightarrow d$ при $n \rightarrow \infty$. Сама последовательность функций u_n не обязательно должна сходиться, однако можно попытаться улучшить ее с помощью процесса интегрального сглаживания так, чтобы она стала сходящейся. Поскольку предельная функция оказывается гармонической, а значение гармонической функции в любой точке P равно ее среднему на любой окружности K с центром в P , то $u_n(P)$, очевидно, лучше всего заменить ее средним на K в надежде, что это среднее значение будет сходиться к числу $u(P)$, которое не зависит от выбора окружности, в то время как его зависимость от точки P минимизирует интеграл. Помимо интегрирования Гильберт до перехода к пределу использует процесс выделения из последовательности u_n подходящей подпоследовательности. Неравенство

$$\{D[u_m - u_n]\}^{1/2} \leq \{D[u_m] - d\}^{1/2} + \{D[u_n] - d\}^{1/2},$$

открытое С. Зарембой, делает этот шаг необязательным.

Метод Гильберта особенно хорошо приспособлен к решению задач, в которых граница области не играет столь заметной роли, как в краевых задачах. Незначительная модификация позволяет включить в рассмотрение точечные особенности, и именно так Гильберт решает фундаментальную проблему для потоков на римановых поверхностях, тем самым получая необходимое обоснование предложенного Риманом подхода к теории абелевых интегралов, а затем Гильберт показывает, что и основные теоремы Пуанкаре и Кёбе об униформизации могут быть доказаны тем же способом. Наши успехи в теории чисел были бы несравненно более значительными, если бы мы располагали столь же мощными методами построения относительных абелевых полей и полей Галуа над заданными алгебраическими числовыми полями, каким для аналогичных проблем в теории полей алгебраических функций оказался трансцендентный метод Римана — Гильберта! Широкая применимость этого метода в теории конформных отображений и минимальных поверхностей была установлена усилиями Рихарда Куранта, который на протяжении многих лет был ближайшим сотрудником Гильберта во всех математических делах в Гёттингене*). Менее прямое, но весьма значительное влияние идеи Гильберта оказали на общую тенденцию современного развития вариационного исчисления³³; в Европе среди других следует отметить Каратеодори, Лебега, Тонелли, а в США — серию исследований, начиная с ранних работ О. Больца до недавних работ М. Морса.

Физика

Еще до кончины Минковского, последовавшей в 1909 г., Гильберт приступил к систематическим занятиям теоретической физикой в тесном сотрудничестве со своим другом, неизменно поддерживавшим контакт со смежной наукой. Первым плодом этих совместных занятий стали работы Минковского по теории относительности. Гильберт продолжал заниматься физикой на протяжении многих лет и в 1910–1930 гг. нередко выступал с лекциями и проводил семинары по физике. Расширение кругозора и контакт с физиками, с которыми Гильберт мог встречаться на их собственной территории, доставляли ему большую радость. Но собранный им здесь урожай вряд ли можно сравнить с его достижениями в чистой математике.³⁴ Лабиринт экспериментальных фактов, которые приходится принимать во внимание физику, слишком многообразен, они накапливаются слишком быстро, а их интерпретация и относительный вес слишком изменчивы для того, чтобы аксиоматический метод мог найти здесь достаточно прочную опору — исключение составляют лишь окончательно сложившиеся разделы нашей физической науки. Люди, подобные Эйнштейну и Нильсу Бору, во тьме прокладывали путь к своим концепциям — общей теории относительности и теории строения атома, — руководствуясь опытом и

*) Книга Куранта о принципе Дирихле готовится к печати. (Courant R. Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces. — N.Y.: Interscience Publishers, 1950. Имеется перевод: Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Физматгиз, 1953. — *Примеч. пер.*)

воображением, отличными от тех, которыми пользуются математики, хотя математика, несомненно, и для них играет важную роль. Поэтому обширным планам Гильберта в области физики не суждено было свершиться.

Тем не менее применение Гильбертом интегральных уравнений к кинетической теории газов и к элементарной теории излучения стало значительным вкладом в эти теории. В частности, полученное Гильбертом асимптотическое решение фундаментального уравнения Максвелла — Больцмана в кинетической теории газов — интегрального уравнения второго рода — позволило четко разделить два слоя феноменологических законов физики, к которым приводит эта теория; физики разработали метод Гильберта более детально и применили его к нескольким конкретным задачам. В своих исследованиях по общей теории относительности Гильберт объединил теорию гравитации Эйнштейна и предложенную Г. Ми программу единой теории поля³⁵. Для развития общей теории относительности на той стадии более плодотворным оказался трезвый подход Эйнштейна, не связывавшего эту теорию с программой Ми, во многом носившей умозрительный характер. Предпринятые Гильбертом усилия позволяют считать его предвестником единой теории гравитации и электромагнетизма. Однако функция Гамильтона, которую рассматривал Гильберт, еще содержала чрезмерно много произвольного; последующие попытки (Вейля, Эддингтона, самого Эйнштейна и других) были направлены на уменьшение этого произвола. В те времена окружение Гильберта питало радужные надежды; казалось, еще немного, и удастся установить универсальный закон, охватывающий и строение Вселенной в целом, и структуру всех атомных ядер. Но проблема единой теории поля и поныне остается нерешенной; можно почти с уверенностью сказать, что удовлетворительное решение будет включать, помимо гравитации и электромагнетизма, волны материи (Ψ -функцию Шрёдингера — Дирака для электрона и аналогичные полевые величины для других ядерных частиц) и что его математический аппарат не будет простым расширением методов эйнштейновской теории гравитации, ставшей ныне классической.

Гильберт был не только великим ученым, но и великим учителем. Свидетелями этого являются его многочисленные ученики и ассистенты, которых он обучал тайнам "ремесла" математика, допуская их к активному сотрудничеству в нескончаемом потоке своих работ и на своих лекциях; конспекты лекций Гильберта проникли из Гёттингена во многие публичные и частные математические библиотеки. Диапазон затронутых в них тем необычайно широк. Накопленный Гильбертом огромный опыт преподавания лег в основу книги "Наглядная геометрия", написанной им совместно с С. Кон-Фоссеном. Просматривая внушительный список лекций, помещенный в качестве приложения в его "Gesammelte Abhandlungen" (Bd. 3. — S. 430), невольно поражаешься значительному числу его выступлений на такие общие темы, как "Познание и мышление", "О бесконечности", "Природа и математика". Речь Гильберта была удивительно плавной, без запинок, как у Минковского, и отнюдь не монотонной. Гильберт без труда находил

точные слова и любил по несколько раз повторять короткие ключевые фразы, чтобы подчеркнуть их значимость. В целом лекции Гильберта были подлинным отражением его духа; непосредственные и впечатляющие, могли ли они не вдохновлять?!

ФЕЛИКС КЛЕЙН И ЕГО МЕСТО В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СОВРЕМЕННОСТИ*)

Все, кому выпало счастье пройти вместе с Феликсом Клейном отрезок пути, отмеренный ему здесь, в Гёттингене, в эти дни вновь и вновь вспоминают его. Так и кажется, будто он стоит у порога и сейчас войдет с характерной сдержанной, но такой приятной улыбкой, которой он имел обыкновение благодарить человека за самостоятельность в их совместной работе над поставленными им проблемами, приглашая его к подлинно равноправному, не ведающему преград сотрудничеству. Еще звучит в нашей памяти его речь, сопровождаемая характерным движением рук, словно держащих натянутые поводья. Это¹ — поистине творение его рук, которое он замыслил и начал, всесторонне обдумал и всячески продвигал, творение, завершение которого сегодня торжественно празднуют Гёттинген и математика. Не о нем — Клейне сегодня надо было бы произносить речь, а ему надлежало выступать перед нами и, оглаживаясь на прошлое и заглядывая в будущее, указать нам те идеи и силы, из которых выросло это его творение, — выступить с одним из тех докладов, в которых с такой яркостью раскрылись величие его личности, его гений, энергия и воля. Он не дожил до сегодняшнего торжества, ибо по возделываемой им ниве тоже прокатилась безжалостная, всеокрушающая война. И нам сегодня не остается ничего другого, как благоговейно воздать должное его памяти.

Я не буду описывать, каким великолепным, неистощимым на новые идеи организатором он был, сколь плодотворным было его влияние на процесс высвобождения математики из культурной изоляции и установления связей между нею и ее приложениями в физике и технике, его вклад в оживление и модернизацию преподавания и естествознания в средней и высшей школе. Не стану я характеризовать и значение его деятельности как педагога высшей школы, значение, на которое в области математики вряд ли может претендовать кто-либо из тех, кто был до него и кто будет после него. Отведенное мне время я хотел бы посвятить размышлениям о том, *какое место в структуре современной математики занимает Феликс Клейн благодаря своим методам и своему вкладу в научные исследования.* Да позволено мне будет ограничиться *чистой математикой.* Я отдаю себе отчет в том, что, поступая так, я по меньшей мере отхожу от Клейна, который постоянно стремился рассматривать математику во взаимодействии с ее приложениями. Увенчав Гаусса в своих лекциях по истории математики титулом первого среди математиков (*die Krone unter den Mathematikern*), Клейн пояснил, что имеет в виду "редкую разносторонность, сочетающуюся с огромными достижениями в каждой области, за которую он

*) Речь, произнесенная 3 декабря 1929 г. на торжественном заседании Гёттингенского математического общества по случаю открытия Математического института.

(Гаусс) брался", ибо перед нами "редкая картина совершеннейшего равновесия между могучей силой математического творчества, строгостью аргументации при осуществлении своих гениальных замыслов и практическим чутьем в отношении приложений к потребностям человека и общества вплоть до старательнейшего проведения наблюдений и измерений"². Приложения интересовали Клейна в значительно меньшей степени, чем Гаусса, — это я могу, пожалуй, сказать без всяких обиняков, и это в какой-то мере оправдывает то ограничение, которое он на себя наложил. Ибо Клейн занимался приложениями от случая к случаю, выступая скорее как систематизатор, чем подлинный творец. Его "Теория волчка"³, скажем, задумана как образец выполнения выдвинутой им же программы, но по моему мнению, именно поэтому она не идет ни в какое сравнение с его выдающимися достижениями в чистой математике, несущими на себе гораздо более сильный отпечаток свободы и необходимости. Говоря о своей небольшой книге 1882 г., посвященной *римановой теории алгебраических функций*⁴, что он написал ее "почти как физик", Клейн очень точно охарактеризовал методы и дух своего составившего целую эпоху сочинения; но его автор не был физиком — не был им даже тогда, когда выводил фундаментальные теоремы существования на римановых поверхностях, исходя из представления о поверхности как об идеальном проводнике, на котором распределение токов однозначно определяется их источниками. Правда, в начале своей научной карьеры под влиянием своего учителя Плюккера, бывшего и геометром, и физиком-экспериментатором, Клейн вознамерился было посвятить себя исследованиям в области *физики*. И еще на студенческой скамье в Бонне он составил план, по которому для подготовки к этому ему надлежало предварительно основательно изучить одну за другой различные математические дисциплины. Ознакомившись с этим планом, физик не удержался бы от улыбки. Набег на все области математики превратился для Клейна в завоевательный поход, который он, надо отдать ему должное, провел мастерски; но при этом Клейн "погряз" в математике. *Как ученый он был и навсегда остался чистым математиком.*

Любой процесс формообразующего конструирования (*Alles Gestalten*) непреодолимо противоречив: с одной стороны, в нем выражается нечто чисто идеальное, объективное, фактически требуемое и поэтому необходимое — как будто нечто потустороннее, стремясь обрести определенную форму, лишь сковывает человека и использует его как свой рупор; с другой стороны, оно позволяет хранить историю духа, запечатлевать мгновения генезиса и не допускает отрыва от исторического процесса и консервации в виде мертвого продукта. Наука — это учение о значимом и действительном, о высшем объективном благе, которому смиренно служит человек, и вместе с тем это одна из разновидностей человеческого творчества, ради результатов которого не следует поступаться, однако, жизнью как высшей человеческой ценностью. Бог как вечно завершенное и вечно становящееся⁵. В математике особенно сильна опасность придавать значение лишь первой, объективной стороне; математик склонен к

абсолютизации. Клейн был свободен от этой слепоты. Лекции о развитии математики в XIX столетии, которые он прочитал в военные годы, убедительно показывают, *как тонко он понимал историю*. Все вещи он воспринимал в историческом разрезе. Именно с этим тесно связано его сдержанное отношение к основаниям. Он любил подчеркивать, что познание начинается, так сказать, с середины, и ведет в неизведанное — как тогда, когда совершается восходящее, так и тогда, когда происходит нисходящее движение. Наша задача состоит в том, чтобы постепенно рассеивать тьму в обоих направлениях, а абсолютный фундамент — этот огромный слон, несущий на своей могучей спине башню истины, — он существует разве что в сказках.

Менее решительным представляется мне Клейн в другом отношении. Он вполне сознавал значение связей математики с опытно-естественнонаучной и технической сферами и всячески способствовал установлению этих связей. Тем не менее следует отметить, что для него *в структуре двуховного мира* главную роль играла математика. Подобно мифам, языку и музыке, математизация принадлежит к числу первичных видов человеческой деятельности, в которых бурлит глубочайшая человечность, живет стремление к созиданию форм духа и выражается мировая гармония. Клейн высказывал сожаление по поводу того, что "немецкое общество, по-видимому, не в состоянии создать единую атмосферу культуры, которая в качестве своеобразной и неперменной компоненты включала бы в себя точное естествознание". Если сегодня в этом отношении все же наметились кое-какие перемены, то проистекает это, наверное, из необычайно возросшего интереса к технике, благодаря которой точное мышление становится достоянием широких масс людей, хотя на основании собственного опыта общения с подрастающим поколением я иногда в этом несколько сомневаюсь: мне не раз приходилось наблюдать, что именно юноши, сосредоточившие все свои помыслы на мотоспорте, проявляют особенно враждебное отношение к изучению теории, например механики. Во всяком случае мне кажется, что решающее значение имеет то духовное или — если воспользоваться выражением, давно уже устаревшим, — "метафизическое" настроение, которое снова ожило среди нас. Причина этого состоит прежде всего в изменившемся отношении к творениям культуры, о чем свидетельствует, например, спорная, но блестящая книга Шпенглера⁶ или гораздо более фундаментальная "Философия символических форм" Кассирера⁷. Мощное воздействие оказывает теория относительности. О несравненно большем значении, которое в наши дни приобрели усилия, направленные на постижение античной математики, свидетельствуют такие книги, как "Платон и пифагорейцы" Эриха Франка и "Классические произведения математики" Шпайзера⁸, а также такие фигуры, как безвременно скончавшийся Грезер, которому мы обязаны воссозданием "Искусства фуги" Баха⁹. По своей натуре Клейн не питал особой склонности к этому кругу вопросов и интересовался ими значительно меньше, чем приложениями. Он, пожалуй, никогда не вникал полностью в смысл фундаментальных философских проблем — хотя его философские высказывания, вполне естественно, имеют большое значение, ибо

выражают богатый духовный опыт человека редкой многосторонности и продуктивности. Но и в них он оставался в плену догм своего времени, отмеченных эмпиризмом и психологизмом, крайнем выразителем которых явился Мах и которые ныне начинают становиться все сомнительнее, как раз если подходить к ним с беспристрастной эмпирической точки зрения.

Наиболее яркой чертой Клейна как ученого было *стремление к сближению*, соединению самых различных наук, способствующему их взаимопроникновению. Его деятельность в этом направлении была успешной не только в отношении математики и ее приложений: особенно плодотворными оказались связи, установленные Клейном между различными математическими дисциплинами и типами мышления. В этом, в постижении внутренних взаимосвязей и отношений между областями, основы которых совершенно различны, он был поистине гениален. Характерным в этом отношении был уже доклад 24-летнего Клейна, прочитанный им при вступлении в первую его профессиру.

В XIX веке развитие геометрии происходило по многим, на первый взгляд ничем не связанным между собой направлениям. *Эрлангенская программа*¹⁰ открыла в понятии группы преобразований те узлы, которые скрепляют все разновидности геометрии и вместе с тем определяют отличительные особенности каждой из них; в этой программе вопрос "Что такое геометрия?" ставится и получает основополагающий ответ. Не менее характерно и то, как Клейн пришел к этому важному открытию, под знаком которого геометрические открытия развиваются вот уже полвека. Он никогда не замыкался в своем собственном мире идей, испытывая острую потребность в многостороннем общении. Он установил многообразные личные отношения не только в Германии, но и во Франции, Англии, Италии, Америке, что, как правило, приводило к оживленной переписке и обмену идеями. Он работал в постоянном контакте с друзьями и учениками, был неизменно внимателен к чужому мнению, но — самое главное — он щедро делился со всеми, кто окружал его, своим двуховным богатством. Побывав в годы странствий, предшествовавших эрлангенскому периоду, последовательно в университетах Бонна и Гёттингена, он познакомился у Плюккера и Клебша с немецкой геометрией, а затем в Париже — с французской, особенно благодаря общению с Гастоном Дарбу. Познакомившись с норвежцем Софусом Ли, Клейн вместе со своим новым другом принялся за поиски точки зрения, позволяющей единым взором охватить эти, шедшие в различных направлениях, линии исследований. Еще в 1832 г. в Париже по-юношески пылкий Галуа в бессмертном письме к своему другу Шевалье, написанном в ночь перед смертью, — на следующее утро 20-летний юноша погиб на дуэли — указал на конечные группы как на "истинную метафизику" алгебраических уравнений. Его кратко изложенные идеи оставались тайной за семью печатями. Но в то самое время, когда Клейн и Ли находились в Париже — в 1870 году, — Камилл Жордан в своем обширном "Трактате о подстановках"¹¹ снял печати и систематически обосновал теорию конечных групп. Запал был поднесен к фитилю. *С тех пор группа заняла центральное место в матема-*

тическом творчестве Клейна; понятие группы красной нитью проходит через все его работы. "Лекции об икосаэдре" Клейна — это восхитительная симфония, в которой геометрия, алгебра, теория функций и теория групп слились в многоголосую мелодию, управляемую взаимосвязями, исполненными глубокого внутреннего смысла¹². Оглядываясь на прошлое, Клейн называл период, в который были выполнены эти исследования и тесно связанные с ними исследования по преобразованиям 5-й, 7-й и 11-й степени эллиптических модуль-функций, счастливейшим в своей математической деятельности; Гордан, активно сотрудничавший в ту пору с Клейном, — Гордан обычно встречался с ним на полпути между Эрлангеном и Мюнхеном в Эйхштадте — в шутку называл тот период *Mathesis quercupolitana*¹³. "Взаимосвязь между Галуа и Риманом" — гласил пароль.

Клейн упорно стремился открывать шлюзы, герметически разделяющие каналы математического мышления, и это вне всякого сомнения оказало сильное воздействие на следующее поколение математиков. Хотя постоянно сетуют по поводу далеко зашедшей специализации научного знания, я думаю, что за последние десятилетия положение в целом скорее улучшилось, чем ухудшилось. Ведь ученые большей частью становятся жертвой непреодолимо трагической судьбы: постоянно возрастающая масса научного материала контрастирует с интеллектуальной силой индивида, остающейся неизменной. Однако мне все же кажется, что среди ученых нашего поколения встречается немало разносторонне образованных людей. С одной стороны, это результат воздействия таких достойных подражания примеров, какой явил Клейн. Но если сегодня ученый нередко оказывается человеком с более основательной подготовкой и более широким кругозором, чем, например, художник, то объясняется это, по-видимому, тем, что за последние десятилетия значимости и ценность ученого как типа, а также науки были поставлены под сомнение, оказались под знаком кризиса, в то время как художнику в чисто человеческом плане был нанесен ущерб прямо-таки гротескным восхвалением и мистификацией искусства как хранителя последних тайн мироздания.

Главным орудием математической методологии Клейна было *интуитивное постижение* (*Verstehen*) *взаимосвязей, основанное на наглядном усмотрении*. В своем блестящем докладе о Римане Клейн говорит: "Чистая математика растет, когда для решения старых задач применяются новые методы; по мере того как мы начинаем лучше понимать старые задачи, новые возникают сами собой". Только исследователь, духовно родственник Риману, мог дать такой его портрет, который нарисовал Клейн; то, что сказано им о Римане, является ключом к пониманию его собственного подхода. "Венец здания любой математической теории, — говорит Клейн, — состоит, конечно, в убедительном доказательстве всех ее утверждений. Разумеется, математика сама решает, в каких случаях она может обойтись без убедительных доказательств. Но тайна гениальной работы мысли — умения находить новые постановки проблем, угадывать новые теоремы, извлекать ценные результаты и устанавливать важные связи — останется навсегда. Если не вырабатывать новых точек зрения, не ставить новых целей, то математика со всеми ее строгими, логическими доказательствами вскоре

исчерпает себя и в ней начнется застой, ибо иссякнет запас питающих ее веществ. Поэтому развитию математики в известном смысле более всего содействуют те, кто наделен не столько способностью к проведению строгих доказательств, сколько интуицией. Нет сомнения в том, что Риман является тем из математиков последних десятилетий, кто и поныне оказывает наибольшее влияние”.

Если интуитивное постижение подлежащих открытию взаимосвязей простиралось столь далеко, что позволяло прояснять все до мельчайших подробностей, то Клейн достигал совершенства. В работах, группирующихся вокруг икосаэдра, оно позволило Клейну в тончайших деталях провести численные расчеты. Но стоило появиться остатку, преодолеть который можно было лишь путем такого сосредоточения логических усилий, в котором ничто не упускается из виду, как Клейн отступал. Девиз Гаусса *”Nil actum reputans si quid superesset agendum”* (”Не считать ничего сделанным, если еще что-нибудь осталось сделать”) был отчеканен не для него. Так, Клейн в порыве поистине божественного откровения провидел и сформулировал теорему об униформизации, но в ее обосновании Пуанкаре обошел его. Правда, строгого и полного доказательства пришлось ждать еще 25 лет. Замечу, кстати, что теория аналитических функций стала ареной особенно азартных состязаний, исход которых, подобно завоеванию Южного полюса, определялся мизерной разницей в несколько дней: Абель и Якоби оспаривали друг у друга право считаться основоположником теории *эллиптических* функций, Клейн и Пуанкаре соперничали в создании теории *автоморфных* функций. У Клейна способность к открытию нового и дар предвидения не уравнивались *ex ecutor power*¹⁴, как метко выразился Харди. Может быть, своеобразие Клейна лучше всего обнаруживается по контрасту с этим выдающимся математиком наших дней. Сам Харди в своем недавнем выступлении в Лондонском математическом обществе указывает на противоположность между теорией функций Бора, Ландау и Литлвуда, которую он характеризовал словами *hard, sharp, narrow*¹⁵ и теорией Биркгофа и Кёбе, для которой он применяет эпитеты *soft, large, vague*¹⁶. Изошренная тонкость математической мысли, головоломные трюки, позволяющие доказывать результаты, еще определенно не созревшие для того, чтобы можно было уяснить их исходные принципы, — все эти орудия первооткрывателей, прокладывавших новые пути в математической пустыне, были совершенно чужды Клейну.

В чем секрет того особого постижения истины, которым столь мастерски владел Клейн? Если я не ошибаюсь, решающая черта его подхода, хотя и не полностью этот подход характеризующая, заключалась в следующем: сначала в объекте исследования естественным образом выделяются различные стороны, каждая из которых осваивается с помощью соответствующей сравнительно узкой и легко обозримой группы предположений, после чего вновь производится синтез, приводящий к исходному составному целому. И получается, что аналитическая часть этого процесса ведет прямым путем к *аксиоматике*. В Эрлангенской программе Клейн ясно, в детально разработанном виде представил один особый случай этого подхода, показав, что постижение геометрических отношений достигается пу-

тем постепенного спуска, ведущего от наиболее широкой к наиболее узкой группе преобразований; и по крайней мере *один раз*, когда он отстаивал свои результаты, относящиеся к неевклидовой геометрии, и ему пришлось объяснять и уточнять, он вынужден был дойти до горького конца — *аксиоматизации*. Но в целом подобная обостренная логичность ему претила. Здесь мы сталкиваемся с еще одним противоречием, внутренне присущим человеческому формообразующему конструированию (*Gestalten*), между созидющим, текучим, связующим, всем, что опутывает человека в жизни, и тем, что служит выработке некой чистой формы, которая в борении становится чем-то обособленным. Клейн инстинктивно противился обособлению; классифицируя и анализируя, он все же стремился остаться в изменчиво-бурлящей сфере. Клейн отвергал одностороннюю определенность. Такая внутренняя установка, эта "гибкая (*konziliante*) натура", как в отношении себя говорил Гёте, единственно благоприятна для практической деятельности. Людям противоположного склада, любящим в порывах своей активности идти до конца в каждом избранном ими направлении, достичь аналогичной свободы удастся в лучшем случае лишь при условии, что они в каждый последующий период отстраняются от прежних плодов своего творчества, и меняя области деятельности и точки зрения, поправляют сами себя. Но, с другой стороны, образ мышления Клейна мешал ему превратить аксиоматику в полноценный инструмент конкретного математического исследования. В конце жизни Клейн высказал следующую мысль: "Математика в наши дни напоминает мне крупное оружейное производство в мирное время. Витрина заполнена образцами, которые своим остроумием, искусным и пленяющим глаз выполнением восхищают зрителя. Собственно происхождение и назначение этих вещей, их способность стрелять и поражать врага отходят в сознании на задний план и даже совершенно забываются". Хотя в этом суждении заключено определенное зерно истины, мы чувствуем, что в целом оно неверно.

Противоречие, о котором мы здесь говорим, получает, так сказать, воплощение в самих основаниях математики — в виде *противоречия между континуумом и целым числом*. С наглядной точки зрения первичным является континуум. Но полагание единицы, выделение жестко определенного куска этого непрерывного потока — оставшаяся часть сохраняет свою нераздельность, ожидая повторения той же процедуры, — есть первоначало всякого осознанного формообразования, первоначало математики. Однако наглядно-образная первичность континуума, "бытие в континууме" — это тот источник интуиции, особую окраску которому как раз и придали главные достижения Клейна. К континууму восходят и корни неоднократно подчеркивавшейся им *противоположности между математикой, работающей с тем или иным приближением, и математикой точной* (*Approximations-und Präzisions-Mathematik*). Проследив эту противоположность до самых глубоких ее основ, мы приходим к позиции интуитивного построения, как ее истолковывает Брауэр, и к вскрытым им трудностям в основаниях анализа. Следует заметить, однако, что эти апории еще со времен античности будоражат мысль, когда она обращается к бесконечному; так, они привели Лейбница к заключению, что с телами следует свя-

зывать лишь явления, а не субстанциональное бытие, ибо континуум подпадает под категорию возможного — как субстрат того, что возможно, — и может быть постигнут только в процессе становления своих частей, обретающих все большую определенность. Но и в этих вопросах Клейн предпочитал не входить в тонкости; для него было достаточно противоположности между теорией и практикой — противоположности, преодолеваемой посредством прикладной математики.

До сих пор я пытался представить своеобразие Клейна наподобие того, как описывают какое-нибудь тело, когда характеризуются внешние границы объекта, но ничего не говорится о его субстрате. Теперь картину надо восполнить: в пространстве, заключенном между этими границами, нет пустот. *Путь Клейна в науке* можно уподобить полету ракеты. Сверкая, она взмывает и устремляется круто вверх: в 1869—1882 гг. Клейн заявляет о себе серией неуклонно нарастающих, необычайно интенсивных и богатых результатами исследований. Потом они вдруг начинают разворачиваться виришь, и их благодатная сень простирается над ранее завоеванной территорией: появляются большие обобщающие работы, подводящие итог тому, что им было сделано, разворачивается его грандиозная практически-организационная деятельность. Поворотным пунктом становится катастрофа, приключившаяся с 33-летним Клейном на пасху 1882 г., когда здоровье его сильно пошатнулось. Сам Клейн весьма образно поведал нам о том, как на Нордерне, уже перед самым возвращением домой, когда, мучимый приступом астмы, он просидел на тахте последнюю ночь, перед его мысленным взором вдруг предстала *теорема о предельном круге*¹⁷. "Открытие этой теоремы, — говорит он, — по-видимому, было связано с внутренним напряжением, которое привело к крайнему обострению способности к творчеству; когда напряжение спало, я почувствовал себя совсем обесиленным". И безжалостно добавляет: "С тех пор сокровеннейший центр моего творческого мышления погиб навсегда". С чувством восхищения и благоговения взираем мы на колоссальную работу, дарованную миру в последующие десятилетия человеком, таившим внутри тяжелую рану.

Как я уже говорил, все, что сделал Клейн в области математики, проще и полнее всего можно понять, если исходить из понятия *группы*. Исторически понятие группы, хотя и в неявной форме, впервые выступает в феномене *симметрии*; искусство, и прежде всего доведенное древними египтянами до высокого совершенства искусство украшать поверхности орнаментами, здесь предшествовало науке. Проблема *правильных тел* была подлинным побудительным стимулом развития греческой математики. Этим древним символом совершенства Кеплер пользовался для того, чтобы раскрыть скрытую гармонию планетных сфер. Глубокие законы симметрии безраздельно властвуют в царстве *кристаллов*. Симметрия находит свое выражение в группе преобразований, переводящих данную структуру как целое в самое себя. При этом, конечно, погруженные в пространство структуры — плоский орнамент, правильное тело, кристалл — разрешается подвергать не любым преобразованием, а лишь производить

их *подобные отображения*, которые сохраняют все объективные пространственные отношения. И получается, что за этими дискретными группами стоит *непрерывная группа изоморфных отображений пространства на себя*, которая и определяет точный смысл однородности пространства. Именно в силу своей однородности пространство и время как формы явлений противостоят материальному содержанию мира; в их однородности проявляются принципы индивидуации: однородность пространства и времени делает возможным существование различных индивидов, которые тем не менее одинаковы во всех своих свойствах. Вопросы, касающиеся точного смысла однородности пространственно-временного мира, ныне принято охватывать названием *теория относительности*. В своей Эрлангенской программе Клейн открыл, что эта группа изоморфных отображений, произвольно (*nach Gutdünken*) задаваемая в области формализованной математики, служит истинным принципом классификации различных геометрий.

Но оказывается, что группы безраздельно властвуют и в *алгебре*. Так, проблема решений уравнений n -й степени допускает следующую формулировку. Пусть заданы n чисел или точек на комплексной числовой плоскости, рассматриваемых *совместно*, без какого бы то ни было упорядочения; из этого агрегата требуется выделить одну-единственную точку. Объектом рассмотрения в этой проблеме относительности (*des Relativitätsproblem*) является не состоящее из бесконечно большого числа точек непрерывное пространство, а агрегат из n чисел — вопрос состоит в том, в какой мере возможно обособить в нем отдельное число от других чисел, руководствуясь объективными алгебраическими признаками? Правда, в отличие от однородного пространства рассматриваемая область чисел обладает той особенностью, что по своим объективным свойствам каждый ее элемент является обособленным *индивидом*; на этом и основано использование чисел в качестве координат, т.е. символов, позволяющих различать элементы континуума. Но в алгебре мы допускаем только такие свойства и отношения, которые основаны на операциях $+$ и $\times$, отношения же по величине (*Größenbeziehung*) — "больше" и "меньше" — исключаются. Если алгебра строится аксиоматически, то существует не *одна* числовая область, а бесконечно много числовых полей, каждое из которых представляет собой некоторый самостоятельный мир; такой подход исключает искусственность в нашем абстрагировании от отношений по величине: ведь элементы абстрактного числового поля совершенно не подчиняются таким отношениям. Но оказывается, что в чистой алгебре числа в значительной мере утрачивают характер индивидуальностей, и *теория Галуа* есть не что иное, как *теория относительности числовых полей* и, в частности, теория нашего агрегата, состоящего из n чисел. Весьма красиво эти алгебра и геометрия единообразно понимаемой относительности проявляются в основаниях проективной геометрии. Простейшие аксиомы инцидентности — даже без каких бы то ни было требований непрерывности — порождают числовое поле, принадлежащее проективному пространству в смысле абстрактной алгебры. Относительность этого пространства выражается двояко: во-первых, в произвольности выбора проективной системы координат, состоящей из любых пяти точек, из которых никакие четыре не лежат на одной

плоскости, и, во-вторых, в группе изоморфных отображений числового поля на себя, которые приводят к особым изоморфным отображениям пространства, оставляющим неизменной выбранную систему координат¹⁸. Если числовое поле является континуумом обычных действительных или комплексных чисел, то они укладываются в эту схему¹⁹ и выполняется так называемая основная теорема проективной геометрии.

На *теорию функций* владычество групп было впервые распространено самим Клейном — с помощью введенного им понятия *автоморфной функции*. Если область существования аналитической функции односвязна, то, следуя Риману, можно представить ее как внутренность круга. Единственными конформными, т.е. сохраняющими аналитичность, отображениями круга на себя являются дробно-линейные преобразования. Отсюда возникает понятие автоморфной функции как функции, инвариантной относительно некоторой группы линейных подстановок независимых переменных. Важнейшие функции, встречавшиеся в истории математики, такие, как показательная функция, эллиптические функции, модулярная функция, подпадают под это понятие, акцентирующее их главный, решающий аспект. Каждая фигура, наделенная специфическими свойствами симметрии, если, следуя Риману, превратить ее в благодатную ниву, на которой произрастают аналитические функции, приводит к определенному классу автоморфных функций. Но понятие автоморфной функции, как показал Клейн в *теоремах униформизации*, имеет несравненно более широкое значение. Причина этого кроется, очевидно, в той роли, которую группы играют в *топологии* — дисциплине, занимающейся изучением свойств континуумов, остающихся неизменными при всевозможных непрерывных деформациях.

Если некоторый процесс распространяется по континууму так, что его продолжение из какой-либо точки на ее окрестности однозначно определяется ситуацией в самой точке, — так происходит, например, при интегрировании или распространении неоднородной окраски или постепенном прекращении волнения на поверхности воды, — то, несмотря на неоднозначность в малом, процесс не обязательно приводит к некоторому окончательному состоянию всей структуры. Если эта структура представляет собой, например, некоторую замкнутую кривую C , то процесс, распространяясь вдоль кривой, может после возвращения в исходную точку привести к другому состоянию, оказаться на другом уровне. В этом случае однозначность в большом наступит тогда, когда кривую C мы мысленно заменим спиралью с бесконечно большим числом витков, располагающихся над кривой C . Сдвинув каждую точку спирали на один или два витка вперед, мы получим отображения спирали на себя, которые на кривой C совпадают, ни одна точка кривой C не сдвигается с места. В этом смысле можно сказать, что кривая как носитель процессов описанного выше типа обладает *скрытой топологической симметрией* и что выражающая эту симметрию группа состоит из накрывающих преобразований спирали в себя, скрывающихся за тождественным преобразованием кривой C . Применение этой идеи к поверхности, которая по своей природе может быть носителем аналитических функций, приводит к кругу идей униформизации.

Последней областью, в которой теория групп сказала свое веское слово, в последние годы стала *квантовая теория*. Все электроны по существу одинаковы; это загадочный факт, быть может, наиболее глубокое утверждение, которое в настоящее время можно высказать о природе, мы до сих пор не включили в качестве необходимой черты в нашу теоретическую картину мира²⁰. Но из него следует, что действующие в атоме или в молекуле законы инвариантны относительно перестановок электронов. Группа таких перестановок, наряду с изотропией пространства, играет поэтому решающую роль в атомной физике.

Во всех перечисленных выше важных случаях — за исключением, разумеется, квантовой теории — в работах Клейна на первый план выступают группы, сплетаясь в узелки всей ткани. Я хотел бы добавить несколько замечаний об отдельных ее нитях.

По моему мнению, на *теорию групп линейных преобразований и их инвариантов* влияние Эрлангенской программы стало полностью сказываться лишь теперь. Раньше математики охотно следовали примеру Кэли и каждую группу линейных преобразований путем присоединения к ней *абсолютных элементов*²¹ пытались сводить к полной линейной группе. Сам Клейн часто пользовался этим искусственным приемом. Так, путем присоединения бесконечно удаленной плоскости удастся перейти от аффинного пространства к проективному. Теория инвариантов ортогональной группы была понята как теория инвариантов полной линейной группы — только ко всем подлежащим рассмотрению структурам в качестве абсолюта была присоединена квадратичная форма (ортогональная группа состоит как раз из тех линейных преобразований, которые оставляют эту форму инвариантной). Именно в таком аналитическом одеянии представил Эйнштейн свою общую теорию относительности. Но этот метод не обладает универсальной применимостью и не отвечает существу дела — так же, как, скажем, принцип проективного порождения Штайнера, согласно которому любой многочлен всегда может быть представлен в виде определителя из многочленов более низких степеней²². Лишь теперь мы начали признавать суверенное положение каждой группы в отдельности. Это возымело последствия и для *общей теории относительности*, и для *дифференциальной геометрии*. Рассмотрим в качестве примера четырехмерный мир с его "метрическим полем", служащим по Эйнштейну причиной явлений гравитации. Четыре координаты — непрерывные функции местоположения в мире, значения которых позволяют различать мировые точки, — произвольны. Следовательно, законы этого мира должны быть инвариантными относительно *группы всех непрерывных преобразований координат*. Метрика в точке P проявляется в том, что из класса координатных реперов, образуемых четырьмя векторами в точке P , выделяется класс декартовых реперов. Переход от одного декартова репера к другому осуществляется с помощью *группы ортогональных преобразований*. Только эта группа характеризует природу нашего многообразия, и в рамках формализованной математики ортогональную группу можно заменить любой другой раз и навсегда выбранной группой. В каждой точке одни из равноправных

декартовых реперов мы должны посредством некоторого произвольного акта выбора принять за *локальный репер* — точно так же, как среди возможных равноправных систем координат мы должны были бы выбрать какую-нибудь одну, чтобы положить ее в основу соответствующего аналитического представления. Инвариантность объективных законов существует поэтому и относительно произвольных "вращений" локальных реперов, которые в различных точках можно считать совершенно независимыми. Эта аналитическая формулировка общей теории относительности, в которой метрика задается посредством локальных реперов, становится необходимой, если помимо электромагнетизма мы хотим в ее рамках охватить и *волны материи Шрёдингера — Дирака*. В то же время именно здесь обнаруживаются границы Эрлангенской программы в дифференциальной геометрии. Помимо ортогональной группы, описывающей неизменную *(feste) природу* многообразия, есть еще и *ориентация*, в нашем примере — ориентация локального репера в каждой точке относительно системы координат или еще чего-то такого, что инвариантно в указанном выше смысле. Эту проблему ориентации вовсе не обязательно излагать в форме "учения о перенесениях"²³, развитого в первую очередь Картаном и Схоутеном. Думаю, что Клейн вряд ли стал бы отвергать ограниченность своей теоретико-групповой программы. Ведь предпринял же он в области алгебраических уравнений энергичное наступление на проблемы, лежащие за пределами групп Галуа.

Чтобы осуществить "слияние Галуа и Римана", достигшее кульминации в *теоремах униформизации*, Клейну пришлось не только проникнуть в труднодоступный тогда мир римановых идей, но и дать *более свободное толкование его основного понятия — понятия римановой поверхности*; это было необходимо не только для того, чтобы придать наглядный смысл многозначным функциям, но и для того, чтобы понятие римановой поверхности непосредственно стало существенным исходным пунктом теории. Корни разработанной Риманом теории алгебраических функций и их интегралов уходят глубоко в континуум; согласно Риману, функции и законы, которым они подчиняются, возникают из континуального точечного многообразия римановой поверхности, топологических свойств, которыми она обладает как *поверхность*, и "конформных свойств", которые она имеет как *риманова поверхность*. Следуя пути, указанному Риманом, Клейн поднялся на высочайшую вершину, с которой только можно беспрепятственно окинуть единым взглядом окрестности, — на вершину униформизации.

Для метода, которым пользовался Риман, несущественно то, что исходным пунктом служит алгебраическое уравнение и определяемая им алгебраическая функция: его теория столь же хороша для *произвольной аналитической функции*. Не требуется и того, чтобы основой служила риманова поверхность в том виде, который соответствует алгебраическому уравнению, — в виде многолистной накрывающей поверхности над плоскостью независимых переменных. Быть может, важнее даже проведение аналитического (*formelmässig*) построения, если нормальная форма, к которой поверхность приводится путем униформизации, представляет собой

некоторый неевклидов двумерный кристалл, — задача, которая, впрочем, не получила еще полного решения. Группа перестановок корней алгебраического уравнения может быть заменена произвольной группой монодромии, состоящей из линейных преобразований; на этот путь обобщения ступил сам Риман, описав его в работах по гипергеометрическому ряду. Понять какой-нибудь вопрос означает ввести его в контекст более общих и более легко обозримых фактов. *Так континуум, и в частности топология, становится мощным инструментом математического понимания.* Вследствие наглядно-образной первичности континуума этот метод так же хорошо подходит для открытий, как и для осмысления (Übersicht).

Несравненно труднее строгое обоснование. Ибо континуум, столь доступный наглядному представлению, упорно сопротивляется проникновению логики. Именно поэтому Вейерштрасс и другие авторы встали на более тяжелый, но, по их мнению, и более надежный путь *прямой алгебраической конструкции*. В одном письме Шварцу Вейерштрасс говорит: "Чем больше я размышляю над принципами теории функции — а занимаюсь я этим непрестанно, — тем тверже становится мое убеждение в том, что возводить ее надлежит на фундаменте алгебраических истин и что поэтому неверен путь, когда, наоборот, для обоснования более простых и фундаментальных алгебраических теорем привлекают, говоря кратко, трансцендентное, — как ни соблазнительны на первый взгляд, например, могут показаться соображения, с помощью которых Риман открыл так много важнейших свойств алгебраических функций". Сегодня мы должны сказать, что Вейерштрасс остановился на полпути. Функции он строит алгебраически, а их коэффициенты черпает из не поддающегося алгебраическому исследованию континуума обычных комплексных чисел. При последовательном же алгебраическом подходе вместо этого континуума подставляется любое числовое поле в смысле абстрактной алгебры. После этого все построение вместе с теорией алгебраических чисел сдвигается на общую аксиоматическую основу. В самом деле, когда Гильберт прокладывал новые пути в теории числовых полей, он руководствовался аналогией, имеющейся между ней и положением вещей в области алгебраических функций, которое с помощью своих методов раскрыл Риман. Конечно, для доказательств аналогия была совершенно бесполезна²⁴. В направлении, которое проложил Вейерштрасс, господствующей выступает общая теория, частным случаем которой надлежит считать алгебраические функции с произвольными комплексными коэффициентами, — *теория абстрактных числовых полей и их алгебраических расширений*. Благодаря общности исходных предположений и аксиоматизации мы и здесь вынуждены покинуть путь вычислений, производимых вслепую, и разлагать сложные факты на простые компоненты, к каждому из которых удастся подобрать простую ключевую идею. Программа абстрактной аксиоматизации алгебры начала разворачиваться в глубоких по содержанию работах Дедекинда и Кронекера, но вся широта этого метода как средства уяснения математических взаимосвязей стала очевидной, пожалуй, лишь в новое время — благодаря работам американской школы Диксона и Веддерберна, а в Германии — благодаря Штейнницу, исследованиям Эмми Нётер и ее кружка, а также рабо-

там Артина. Конечно, покоренная Клейном с помощью "гомологического метода" (как я называю для краткости его подход) вершина униформизации, высоко взымающаяся над областью абелевых, коммутативных, групп, пока не взята методами абстрактной алгебры. Здесь еще налицо большие проблемы, ожидающие своего решения в будущем²⁵

Описанные два способа математического мышления — топология и абстрактная алгебра — уходят корнями в глубь самой природы мира математики, ни одному из них мы не можем отдать предпочтения, как это делал Вейерштрасс. Но они плохо совместимы. То, что легко доступно для одного, трудно достижимо для другого. Такие классические теории, как теория алгебраических функций, если их рассматривать с этих точек зрения, выглядят совершенно по-разному. Насколько невозможно быть слугой этих двух господ, я прочувствовал лишь теперь, стараясь приспособить теорию групп к приложениям в квантовой механике. Прекрасным примером могут служить также предпринятые ван дер Варденом исследования принципов исчислительной геометрии, которую он сначала представил в свете абстрактной алгебры, но недавно интерпретировал как вытекающую из чисто топологических теорем о точках пересечения. Там, где можно следовать топологическим методам, они кажутся сегодня все еще более мощными.

Если бы, подводя итог, я должен был *во вкладе Клейна в чистую математику* отметить то, что представляется мне наиболее важным, то я назвал бы следующее.

Клейн заменил *понятие геометрии*, как оно было разработано в проективной школе, гораздо более свободным и широким взглядом на сущность геометрии. Его предшественником, да и то лишь в отдельных робких намеках, был один лишь Мёбиус. Теперь считается, что в сферу геометрии входят также, как и подобает, *теория конформных отображений и топология*; в этих областях в наши дни пульс геометрической жизни бьется наиболее сильно. Смысл геометрии в понимании Клейна — это не что иное, как *теория относительности* в ее общем математически формализованном варианте.

Клейн всесторонне осмыслил *группу* как великий упорядочивающий и озаряющий принцип в алгебре, геометрии и анализе и распространил его на приложения.

На одном *конкретном примере*, представляющем большой интерес, он до конца проследил переплетение всех этих дисциплин с теорией групп.

Руководствуясь наводящими наглядными физическими соображениями, Клейн с его широким творческим размахом показал значение основных идей *римановой теории функций*.

Создав свою *теорию автоморфных функций* и применив ее к проблеме униформизации, Клейн достиг подлинной вершины римановой теории функций и своими прозрениями и открытиями выявил в топологии проблематику, далеко не исчерпанную в теоретико-функциональном отношении, и поныне, проблематику, прояснение которой с позиций абстрактной алгебры разве что только начинается.

Таково воздействие Клейна, наложившего печать своего гения на целую эпоху, оставившего глубокий и неизгладимый след в теории групп, топологии и абстрактной алгебре, продолжающих развиваться и поныне. Возжженное им пламя не нуждается в том, чтобы бережно хранить его как некую святыню — оно пылает под всеми котлами и во всех печах и горнах математических кухонь и кузниц, творя повседневную и великую работу. Созданное Клейном продолжает жить и оказывать влияние, его имя не будет забыто никогда.

АНРИ ПУАНКАРЕ

“Отыскание истины должно быть целью нашей деятельности; это — единственная цель, достойная ее.

... Следовательно, именно эта гармония и есть единственная объективная реальность, единственная истина, которой мы можем достигнуть; а если я прибавлю, что универсальная гармония мира есть источник всякой красоты, то будет понятно, как мы должны ценить те медленные и тяжелые шаги вперед, которые мало-помалу открывают ее нам”.

Этимися словами начинается “Ценность науки” Пуанкаре — замечательная книга, как бы пылающая восхищением перед наукой, вся пронизанная им, книга, каждая страница которой вызывает чувство признательности автору, столь высоко и бескомпромиссно ценящему чистую истину. По достоинству оценить необычайную плодотворность и величие закончившегося ныне жизненного пути Пуанкаре сумеет лишь тот, кто разделяет его умонастроение (“Ценность науки” с полным основанием можно считать духовным завещанием Пуанкаре)¹.

Гению Пуанкаре, проложившему новые пути не в одной области математической науки, математика и математическая физика обязаны важнейшими достижениями последних десятилетий. Преисполненные восхищения, стоим мы перед неисчерпаемыми сокровищами непреходящего знания, извлеченными на свет из глубоких недр этим мастером с присущей ему изобретательностью, интуитивным постижением глубоких взаимосвязей и мощным ударом создания логических комбинаций. Чтение отдельных его работ и книг доставляет наслаждение не только разнообразием и фундаментальностью содержащихся в них идей и взглядов, но и формой изложения, отточенностью стиля. Хотя найденные Пуанкаре слова наиболее точно и глубоко передают суть дела, они не тащатся, тяжело ступая и кряхтя под бременем смысловой нагрузки, подобно рыбакам, влекущим сеть сквозь глубокие воды, о нет! Изящно, легко и свободно они парят, подобно чайкам склевывая добычу на лету, окруженные мириадами брызг фантазии...

Пуанкаре родился 29 апреля 1854 г. в Нанси. После завершения образования сначала работал инженером, но вскоре посвятил себя чисто научной деятельности, избрав путь, предназначенный ему самой природой. С 1881 г. Пуанкаре жил в Париже. С 1886 г. получил профессию по математической физике и теории вероятностей в Парижском университете,

с 1896 г. был профессором математической астрономии и небесной механики того же университета, а в 1904 г. стал также профессором общей астрономии Политехнической школы. Пуанкаре был удостоен всех почестей, какие только могут выпасть на долю ученого. На протяжении многих лет он принадлежал к числу "сорока бессмертных" Французской академии. Смерть, наступившая 17 июля сего года², оборвала его необычайно плодотворную научную деятельность.

Неудивительно, что мыслитель такого склада, как Пуанкаре, чья ярко выраженная индивидуальность (как отметил Радосш в своем докладе о первом присуждении премии Бояи) позволяла признать в нем ученого-интуитивиста, для которого стимулом широких по охвату исследований служит неисчерпаемый источник геометрических и физических представлений, с самого начала своей научной деятельности (под влиянием Эрмита) оказался в орбите великих теоретико-функциональных идей Римана. Он безошибочно определил то место, с которого можно было бы продолжить построение теории функций, и осуществил свой замысел в серии блестящих работ, примыкающих к работам Фукса по линейным дифференциальным уравнениям. Эти работы, украшающие первые тома журнала *Acta Mathematica*, позволяют считать Пуанкаре наряду с Клейном создателем теории автоморфных функций. Такие функции, отличающиеся инвариантностью относительно некоторой группы линейных преобразований (к числу автоморфных функций принадлежат эллиптические функции, а также введенные Клейном эллиптические модулярные функции), играют исключительно важную роль по крайней мере по двум причинам.

Во-первых, они позволяют решить проблему униформизации. Этот факт был давно осознан Клейном и Пуанкаре, но получил прямое и полное доказательство лишь в девяностые годы в работах Пуанкаре. Вейерштрасс в своей теории функций при определении аналитического (и, в частности, алгебраического) образа (x, y) был вынужден использовать в каждой точке особое представление $x = x(t)$, $y = y(t)$ с "локально униформирующим" t , соответствующим рассматриваемой точке. Риман рассматривал единое представление во всей области с помощью параметра $\wp$, но изменялся этот параметр не в плоской области, а на "римановой поверхности". В теории униформизации оба эти подхода требуется слить воедино, для чего переменные x, y аналитического образа во всем диапазоне их изменения необходимо представить однозначными аналитическими функциями "униформирующего" параметра t , принимающего значения на однолистной комплексной плоскости. Тем самым аналитический образ становится более доступным обычной теории аналитических функций, чем в случае первоначального подхода Вейерштрасса или Римана, что давно было показано для алгебраических кривых рода 1, для которых проблему униформизации решают эллиптические функции. Впрочем, речь идет о теории, именно сейчас переживающей пору бурного развития.

Во-вторых, автоморфные функции играют важную роль потому, что позволяют получить истинную *нормальную форму римановых поверхностей* для дискретных групп движений плоскости Лобачевского — Бояи. Именно в этих группах идея римановой поверхности находит свое наиболее

чистое, свободное от всего наносного и случайного воплощение. Напомним, что дискретные группы движений трехмерного евклидова пространства служат внутренней характеристикой кристаллических форм минералов. Это позволяет утверждать, что двумерный неевклидов кристалл является внутренней характеристикой римановой поверхности. Таким образом, наряду с рассмотренной многими авторами проблемой представления функций (существование которых сам Риман смог доказать только с помощью принципа Дирихле) аналитическими выражениями, определяемыми соответствующим заданной (замкнутой) римановой поверхности алгебраическим уравнением с двумя переменными, возникает другая проблема, имеющая несравненно большее значение для теории функций, — вывод аналогичных аналитических выражений на основе не алгебраического уравнения, а римановой поверхности, заданной в ее собственной нормальной форме, т.е. как неевклидова группа движений. Основы для решения этой проблемы Пуанкаре заложил своими Θ - и Z -функциями, хотя многое еще предстоит сделать.

Разумеется, мы не можем даже бегло упомянуть о наиболее важных отдельных результатах, полученных в работах Пуанкаре по автоморфным функциям, и тем более о найденных им интересных приложениях этих результатов в теории линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами и в теории приведения абелевых интегралов. Однако в связи с теорией абелевых функций нельзя хотя бы кратко не остановиться на работах Пуанкаре, подготовивших создание общей теории *аналитических функций многих переменных*, — я имею в виду предложение Пуанкаре обобщение теории вычетов Коши на случай двойных интегралов и его доказательство теоремы о представимости мероморфной функции двух переменных в виде отношения двух целых функций. Топология (Analysis situs) — геометрическая дисциплина, занимающаяся изучением инвариантных свойств многообразий при взаимнооднозначных непрерывных отображениях и играющая со времен Римана существенную роль в теории функций, — получила заметное развитие в трудах Пуанкаре, в особенности в том, что касается многомерных многообразий⁴.

В основе современной теории целых трансцендентных функций одной переменной (которую ζ -функция Римана как своеобразный фермент связывает с аналитической теорией чисел) лежит важная теорема, берущая начало в работах Пуанкаре. Эта теорема учит нас, как по распределению нулей целой функции $f(z)$ (по ее "роду Лагерра") судить о скорости убывания коэффициентов ее степенного разложения при увеличении индекса и о скорости роста $\max_{|z|=r} |f(z)|$ при неограниченном возрастании r .

Если от теории функций мы обратимся к *дифференциальным уравнениям*, то окажется, что и эта важная область математического анализа почти всеми своими достижениями обязана гению Пуанкаре! Именно он избавил нас от страха перед расходящимися рядами, показав, в каком смысле "асимптотические представления" расходящимися рядами могут оказаться чрезвычайно полезными при рассмотрении интегралов дифференциальных уравнений. Упомяну также о длинной серии работ, посвященных виду ин-

тегральных кривых вещественных дифференциальных уравнений и привлечших внимание математиков к соотношениям, существующим в вещественной области, о построении Пуанкаре *периодических решений* систем дифференциальных уравнений и "асимптотических" решений, неограниченно приближающихся к решению при возрастании независимых переменных. С помощью разработанного им мощного аналитического аппарата Пуанкаре удалось в большой работе "О проблеме трех тел и уравнениях динамики", удостоенной премии шведского короля Оскара II (Acta Mathematica, 1890), и в фундаментальном труде "Новые методы небесной механики" придать новый мощный импульс развитию *небесной механики*⁴. И хотя я не имею возможности остановиться сколько-нибудь подробно на столь важных работах Пуанкаре, как работы по фигуре равновесия вращающейся жидкости или по дифракции волн Герца, все же нельзя не упомянуть хотя бы по названию весьма тонкий *метод выметания*, позволивший Пуанкаре подойти к решению краевых задач теории потенциала, и обойти молчанием капитальный труд "Об уравнениях математической физики" (1894 г.), в которых мастер, опираясь на фундаментальное неравенство Г.А. Шварца и используя остроумную модификацию метода последовательных приближений, дал математически строгое доказательство существования бесконечно многих "собственных колебаний" непрерывной системы масс и показал, что совершаемое системой колебание самого общего вида представимо в виде суперпозиции собственных колебаний. Ряд результатов и методов мы относим теперь, после того как Фредгольм и Гильберт, наконец, открыли нам глаза, к кругу идей теории интегральных уравнений — теории, в которую Пуанкаре давно внес немалый вклад, впервые установив критерии сходимости для бесконечных определителей.

Я смог указать лишь немногие вершины жизненного пути Анри Пуанкаре. Ограниченный объем (и, что касается автора настоящей заметки, некоторые другие причины) не позволяют нарисовать сколько-нибудь адекватную картину необычайной важности всего того, что Пуанкаре успел сделать в науке, ведущего положения, занимаемого его работами в современной математической литературе, плодотворного влияния, которое оказывали и продолжают оказывать предложенные им новые идеи и методы⁵. Дух его пролил немало света на путь, по которому мы идем! Но вокруг нас еще немало темных мест, прояснить которые предстоит в непрестанном и упорном труде грядущим поколениям. Пусть же никогда не переведутся в будущем идейные вдохновители и факелоносцы, каким был Пуанкаре!

"Мы должны страдать, мы должны трудиться, мы должны платить за свое место на спектакле, но лишь для того, чтобы *видеть* или, по крайней мере, чтобы произвести на свет других".

ЭММИ НЁТЕР*)

Друзья Эмми Нётер в Америке с глубоким прискорбием восприняли известие о ее внезапной кончине в воскресенье 14 апреля¹. Казалось, она благополучно перенесла операцию по поводу злокачественной опухоли и, как мы все считали, находилась на пути к выздоровлению, но неожиданное осложнение привело к внезапному ухудшению состояния, за которым через несколько часов последовала смерть. Эмми Нётер была воплощением жизнелюбия, так прочно и уверенно стояла на земле, обладала таким здоровым юмором и стойкостью перед лицом неурядиц, что никто из нас не был готов к такому исходу. Она находилась в самом расцвете своих математических способностей; богатое воображение у нее идеально сочеталось с виртуозной техникой, накопленной непрерывным опытом. И теперь внезапно наступил конец, ее голос умолк, ее работа внезапно прервалась.

"Туда, туда, во тьму могилы

Неслышно сходят красивые, нежные, добрые,

Неслышно сходят умные, мудрые, храбрые.

Знаю. Но не приемлю. И не смирюсь".

Нотка протеста, подобная отчетливо звучащей в четверостишии из "Погребальной песни без музыки" Эдны Сент Винсент Милле, примешивается к нашей печали в этот час, когда мы собрались, чтобы почтить память нашего друга, ее жизнь, работу и личность.

Не многое я могу рассказать о внешних событиях ее жизни; вдали от ее родины и тех мест, где она жила и работала на протяжении десятилетий, собрать необходимые сведения не представляется возможным. Эмми Нётер родилась 23 марта 1882 г. в небольшом университетском городке Эрлангене на юге Германии. Ее отцом был Макс Нётер, выдающийся математик, сыгравший важную роль в развитии теории алгебраических функций как главный представитель алгебро-геометрической школы. В Эрлангенский университет он пришел в 1875 г. на должность профессора математики и занимал ее до самой смерти, последовавшей в 1921 г. Кроме Эмми в доме рос ее брат Фриц, который был на два с половиной года моложе. Впоследствии он занялся прикладной математикой и недавно стал профессором Высшей технической школы в Бреслау. Та же причина, которая положила конец карьере Эмми в Гёттингене, заставила его переехать в Томский научно-исследовательский институт математики и механики в Сибирь². Семейство Нётер — поразительный пример наследственной природы математического таланта, наиболее яркой иллюстрацией которой служит базельская гугенотская династия Бернулли.

Плечом к плечу с Максом Нётером в Эрлангене работал еще один математик, его близкий друг, так же, как и сам Нётер, бывший питомцем школы Клебша, — Гордан. В Эрланген Гордан прибыл незадолго до Нётера — в 1874 г. и также остался в Эрлангене до конца жизни (Гордан умер

*) Речь, посвященная памяти Эмми Нётер, произнесена 26 апреля 1935 г. в Гудхарт Холле, Колледж Брин Мор.

в 1912 г.). Свою докторскую диссертацию "О полной системе инвариантов тернарных биквадратичных форм" Эмми выполнила под руководством Гордана. Эта работа целиком выдержана в духе Гордана и его проблем. В журнале "Mathematische Annalen" помещен подробный некролог и анализ работ Гордана, написанный Максом Нётером при участии Эмми. Если не считать отца, Гордан, по-видимому, был одним из наиболее близких людей на раннем этапе жизни Эмми, сначала как друг дома, затем и как математик. Глубокое уважение к Гордану Эмми сохранила на всю жизнь, хотя ее собственные математические вкусы вскоре начали развиваться совершенно в другом направлении. Вспоминаю, что портрет Гордана украшал стену кабинета Эмми в Гёттингене. Эти двое людей — отец и Гордан — сыграли решающую роль в создании той атмосферы, в которой выросла Эмми. Именно поэтому я беру на себя смелость обрисовать их несколькими штрихами.

Риман построил теорию алгебраических функций одной переменной и интегралов от них — так называемых абелевых интегралов — с помощью трансцендентного метода, основанного на использовании принципа минимума в теории потенциала, названного Риманом принципом Дирихле, и вскрыл чисто топологическую основу разнообразных теоретико-функциональных отношений, существующих в этой области. (Строгое доказательство принципа Дирихле, столь очевидного с точки зрения физика, было найдено Гильбертом лишь через пятьдесят лет.) Оставалась нерешенной проблема — заменить и обосновать предложенные Риманом трансцендентные доказательства существования явными алгебраическими построениями, исходящими из уравнения алгебраической кривой. Вейерштрасс (в своих лекциях, подробная запись которых была опубликована позднее) решил эту проблему в присущей ему наполовину функционально-теоретической, наполовину алгебраической манере, но Клебш ввел идеи Римана в геометрическую теорию алгебраических кривых, а после того как Клебш сравнительно молодым умер³, Нётер продолжил его дело: Макс Нётеру удалось возвести все здание алгебраической геометрии кривых на основе так называемой теоремы Нётера о вычетах. Позднее то же направление исследований было подхвачено и продолжено главным образом в Италии; жила, на которую напал Нётер, и поныне продолжает оставаться обильным источником исследований. Убедительным подтверждением тому могут служить работы находящихся среди нас Лефшеца и Зариского. Позднее наряду с трансцендентным методом Римана и алгебро-геометрическим методом Нётера возникла арифметическая теория алгебраических функций, созданная, с одной стороны, Дедекиндом и Вебером, а с другой — Гензелем и Ландсбергом. Именно к этому направлению примыкала и Эмми Нётер. Краткий обзор арифметической теории алгебраических функций, устанавливающий параллелизм соответствующих понятий в конкурирующих теориях, был опубликован Эмми Нётер в "Ежегоднике немецкого математического общества" (Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung) за 1920 г. Этот обзор дополнил известный обзор Брилля и Макса Нётера по алгебро-геометрической теории, напечатанный в 1984 г. в одном из первых томов Ежегодника. Теорема Нётера о вычетах впоследствии была

включена в созданную ею общую теорию идеалов в произвольных кольцах. В таком научном родстве отца и дочери, ставшей в известном смысле его преемником в алгебре, но занявшей независимую позицию в своем отношении к математике и в выборе проблем, есть что-то невыразимо прекрасное и трогательное. Отец Эмми, насколько я могу судить по его работам и в еще большей степени по многочисленным некрологам-биографиям, написанным для "Mathematische Annalen", был человеком весьма интеллигентным, добрым, гармоничным, с разносторонними интересами, глубоко образованным.

Человеком иного склада — чудаковатым, порывистым и односторонним — был Гордан. Большому любителю прогулок и бесед, ему доставляло особое удовольствие бродить по улочкам Эрлангена, не пропуская по дороге ни одной пивной или кафе, либо с друзьями, подкрепляя аргументацию неистовой жестикуляцией и не обращая ни малейшего внимания на окружающих, либо в одиночку, бормоча на ходу себе под нос и размышляя над математическими проблемами или в более праздном настроении производя в уме длиннейшие вычисления. В Гордане было нечто от вечного "буриша" 1848 г. — манера одеваться, пристрастие к пиву и табаку, умеряемое неподдельным чувством юмора, к тому же он был отмечен печатью подлинного остроумия. Когда Гордану приходилось слушать других в аудитории или на заседаниях, он всегда наполовину спал. Как математик Гордан значительно уступал Нётеру и принадлежал к совершенно иному типу ученых. Сам Нётер охарактеризовал Гордана короткой фразой: "Он был алгоритмистом". Сильной стороной Гордона были изобретательность в продумывании формальных процессов и умение облекать их в вычислительные процедуры. В его статьях формулы, не прерываемые ни единым словом, нередко занимают по двадцать страниц подряд. Рассказывают, будто во всех своих работах Гордан собственноручно писал только формулы, а текст добавляли друзья. Нётер сказал о нем так: "Формула всегда и всюду была неоценимой опорой формирования его мыслей, умозаключений и присущей ему манеры выражаться. . . На своих лекциях он тщательно избегал любых основополагающих определений концептуального типа, даже если речь шла об определении предела".

Гордан также принадлежал к числу ближайших сотрудников Клебша, в соавторстве с которым он написал книгу по абелевым интегралам. Позднее интересы Гордана, следуя внутренней логике развития его формального таланта, переместились в теорию инвариантов. Он внес существенный вклад в усовершенствование так называемого символического метода. Его усилия увенчались успехом: с помощью своего излюбленного вычислительного метода путем явного построения ему удалось доказать конечность рационального целого базиса для бинарных инвариантов. Через несколько лет Гильберт доказал теорему о конечности базиса в гораздо более общем виде — для произвольного числа переменных, но при этом использовал совершенно новый подход, методы, выдержанные в чисто "гильбертовом" духе, оставив в стороне весь аппарат символического метода и изыскав как можно более прямой путь к решению каждой проблемы. *Ex ungue leonem*⁴ — молодой лев Гильберт показал свои когти. Одна-

ко сначала предложенное Гильбертом доказательство было чистым доказательством существования и не приводило ни к какой реально осуществимой за конечное число шагов алгебраической конструкции, что и вызвало характерное замечание Гордана: "Это — не математика, это — теология!" Что бы он сказал о "теологии", развитой впоследствии его бывшей ученицей Эмми Нётер, отказавшейся от проведения каких бы то ни было вычислений и действовавшей в несравненно более разреженной атмосфере абстракции, чем когда-либо отваживался действовать Гильберт!

В свое время Гордан отметил формальную аналогию между бинарными инвариантами и схемой валентных связей в химии — ту самую аналогию, которая задолго до него поразила Сильвестра, размышлявшего над тем, на каком примере следовало бы излагать теорию инвариантов, чтобы она была доступна широкой аудитории. Эти размышления легли в основу статьи, опубликованной Сильвестром в первом томе "American Journal of Mathematics", основанного им в Университете Джона Гопкинса. Гордан, по-видимому, не знал о своем предшественнике. Во всяком случае, скромное открытие аналогии между бинарными инвариантами и схемами химических валентных связей побудило его выступить с предложением об организации во всех германских университетах специальных кафедр новой науки — "математической химии". Я привожу этот случай как характерный пример присущей Гордану порывистости и неосмотрительности. Замечу попутно, что совсем недавно квантовая механика превратила формальную аналогию, замеченную Сильвестром и Горданом, в подлинную теорию, обнаружив, что бинарные инварианты являются удобным математическим средством для описания нескольких валентных состояний молекулы в спиновом пространстве⁵.

Метеор Феликс Клейн, чей математический гений извлек огонь из столкновения мира идей Римана с миром идей Галуа, пронесся в небесах над Эрлангеном еще до рождения Эмми. В Эрлангене Клейн провозгласил свою "Эрлангенскую программу", но вскоре переехал в Мюнхен. Клейн вдохновил Гордана на занятия теоретико-инвариантными исследованиями проблем, группировавшихся вокруг "Лекций об икосаэдре" и родственных вопросов теории алгебраических уравнений. Даже находясь на расстоянии друг от друга, Клейн и Гордан продолжали интенсивно сотрудничать. Станный это был "тандем", если принять во внимание, что Гордан мыслил формально, тогда как Клейн всецело руководствовался интуицией. Общая проблема, лежавшая в основе их исследований, — клейновская проблема форм — дожила до наших дней и недавно стала предметом глубокого анализа в работах д-ра Брауэра, применившего к ней методы гиперкомплексных числовых систем и их представлений, бывших основной областью деятельности Эмми Нётер в течение последних шести-семи лет.

Странно, что именно такой формалист, как Гордан, способствовал "запуску" Эмми Нётер на ее математическую орбиту. Трудно представить себе большой контраст, чем тот, который существует между ее первой работой — диссертацией — и работами, выполненными в пору профессио-

нальной зрелости: первая являет собой яркий пример формальных вычислений, вторая — не менее яркий и впечатляющий пример аксиоматического мышления в терминах абстрактных понятий в математике. Диссертация завершается таблицей — полной системой ковариантных форм для заданной тернарной формы четвертого порядка, содержащей 331 форму в символическом представлении. Внушительный труд, но боюсь, что сегодня мы склонны отнести эту работу Нётер к тем достижениям, о которых сам Гордан, когда его спросили о пользе теории инвариантов, отзывался так: "Она очень полезна, ведь по ней можно написать много диссертаций!".

Нелегко воссоздать перед американской аудиторией подлинную атмосферу жизни в Германии тех лет, в которой выросла в Эрлангене Эмми Нётер. Еще меньшее представление об этой атмосфере имеет нынешнее поколение немцев. Неколебимая устойчивость бюргерского уклада жизни усугублялась для Эмми тем, что Макс Нётер (и Гордан) провели в одном университете много лет подряд. Я беру на себя смелость утверждать, что юность Эмми пришлось на те годы, когда период наивысшего подъема в научном творчестве Макса Нётера и Гордана прошел, хотя оба, несомненно, продолжали оставаться активно работающими математиками. И в этом отношении окружавшая Эмми Нётер атмосфера отличалась ничем не возмущаемым постоянством. Нарисованная картина будет неполной, если не упомянуть о том, что неизменно высоко ставились духовные ценности. Это основывалось на глубокой образованности, глубоком и неподдельном активном интересе к высшим достижениям интеллектуальной культуры и доведенном до высокой степени совершенства умении наслаждаться ими. Отношения в семье Нётер, насколько можно судить, были теплыми и дружескими. Сама Эмми Нётер всегда была теплой, если можно так выразиться, как свежее испеченный каравай хлеба. От нее исходило явственно ощутимое успокоительное, живительное тепло. Наше поколение винит эпоху в полном отсутствии искренности, в том, что люди пытаются скрыться за обманчивой внешней безмятежностью и буржуазным покоем, в игнорировании мощных созидательных и разрушительных сил, реально формирующих судьбу человека, в том, что большинство людей закрывает глаза на контраст между духом истинного христианства, провозглашаемого религией, и реальной частной и общественной жизнью. Ницше пробудил Германию ото сна. Трудно переоценить ту роль, которую Ницше (с которым, кстати сказать, Нётер однажды встречался в Энгадине) сыграл в коренном изменении моральной и духовной атмосферы, царившей в Германии. Думаю, что в принципе он был прав. Но все же нельзя отрицать, что в широких кругах Германии, как и в семействе Нётер, уважительное отношение к духовным ценностям, интеллектуальная культура, добросердечие и человеческая теплота были неподдельными, хотя и уживались с сентиментальностью, вагнерианством и плюшевыми диванами.

В юности Эмми Нётер принимала посильное участие в работе по дому, вытирала пыль, готовила обед, ходила на танцы. Судьба обычной немецкой женщины была бы уготована ей, если бы как раз в то время перед девушками в Германии не открывалась возможность не встречая сколь-

ко-нибудь заметного сопротивления вступить на научное поприще. В характере Эмми не было ничего бунтарского, она покорно воспринимала окружающий мир таким, каким он был. Но вот она стала математиком. Ее зависимость от Гордана продолжалась недолго. Он сыграл важную роль, став отправной точкой, но не оказал длительного влияния на Эмми Нётер. Тем не менее именно математическая атмосфера Эрлангена, по-видимому, способствовала тому, что Эмми стала алгебраистом. Гордан вышел в отставку в 1910 г. Его преемником стал Эрхард Шмидт, которого через год сменил Эрнст Фишер. Он также был алгебраистом и занимался теорией исключения и инвариантов. Думаю, что Фишер оказал на Эмми Нётер более глубокое влияние, чем Гордан. Под его руководством ею был совершен переход от формализма Гордана к гильбертовскому подходу. В работах того времени Эмми Нётер неоднократно ссылается на беседы с Фишером. Этот период ее жизни длился до 1919 г. Основные интересы были сосредоточены на конечных рациональных и целых базисах. Ей удалось доказать конечность для инвариантов конечной группы (не используя общую теорему Гильберта для идеалов), для инвариантов с целыми коэффициентами и, наконец, приступить к решению той же проблемы наряду с решением проблемы построения минимального базиса, состоящего из независимых элементов, для полей рациональных функций.

Еще в бытность свою в Эрлангене примерно в 1913 г. Эмми иногда случалось читать лекции, когда ее отец бывал болен и ей приходилось замещать его. Тогда же она, по-видимому, побывала и в Гёттингене, но лишь с краткосрочными визитами, приехав вместе со своим братом Фрицем. По крайней мере в 1910–1913 гг., когда я был приват-доцентом в Гёттингенском университете, мне он запомнился гораздо лучше, чем она. Во время первой мировой войны (в 1916 г.) Эмми переехала в Гёттинген насовсем. О том, чтобы она осталась, позаботились Клейн и Гильберт. К тому времени Гильберт с головой погрузился в общую теорию относительности. Для Клейна теория относительности и ее связь с его старыми идеями, изложенными в Эрлангенской программе, была последней вспышкой его математических интересов и математической деятельности. Подтверждения тому мы находим на страницах второго тома его "Лекций о развитии математики в XIX столетии". Для Гильберта и Клейна Эмми была желанным гостем, так как ее познания в теории инвариантов могли быть им весьма полезны. Именно в то время ей удалось дать математически строгую и универсальную формулировку двум наиболее важным аспектам общей теории относительности: во-первых, используя "нормальные координаты", свести проблему дифференциальных инвариантов к чисто алгебраической проблеме; во-вторых, установить тождества между левыми частями уравнений Эйлера в вариационном исчислении для случая, когда (кратный) интеграл инвариантен относительно группы преобразований, содержащих произвольные функции (если речь идет об инвариантности относительно произвольных преобразований четырех мировых координат, то тождества Нётер содержат закон сохранения энергии и импульса) ⁶.

Еще во время войны Гильберт пытался провести Эмми Нётер через конкурс на замещение должности приват-доцента философского факуль-

тета Гёттингенского университета, но все его попытки оказались безуспешными из-за сопротивления филологов и историков. Хорошо известен анекдот о том, как Гильберт, выступая в поддержку кандидатуры Нётер на ученом совете факультета, заявил: "Не понимаю, почему пол кандидата служит доводом против избрания ее приват-доцентом. Ведь здесь университет, а не мужская баня!" По всей видимости, реплика Гильберта лишь еще больше разожгла страсти. И все же Эмми Нётер начала читать лекции в Гёттингене, объявленные Гильбертом. Но в 1919 г., после окончания войны и провозглашения Германии республикой, обстановка изменилась, и назначение Эмми Нётер приват-доцентом состоялось. В 1922 г. Эмми получила звание "внештатного экстраординарного профессора", не налагавшее на нее никаких обязанностей и не дававшее ей права на получение оклада. Скромное вознаграждение ей выплачивали лишь за "нагрузку" по алгебре.

Во время бурных событий, последовавших за революцией 1918 г., Эмми Нётер не осталась безучастной и в большей или меньшей степени перешла на сторону социал-демократов. Не будучи членом партии, она принимала активное участие в обсуждении насущных политических и социальных проблем. Одна из ее первых учениц Грета Герман входила в философско-политический кружок Нельсона в Гёттингене⁷. Сейчас трудно представить себе то воодушевление, с которым молодое поколение Германии тех лет ожидало перемен, стремилось перестроить Германию, Европу, все общество в целом на основе разума, гуманизма и справедливости. Но увы! Настроения среди академической молодежи вскоре переменялись. В междоусобице, охватившей Германию в последующие годы и принимавшей в отдельных случаях форму гражданской войны, мы находим представителей академической молодежи главным образом на стороне реакционных и националистических сил. Объясняется это главным образом нарушением Антантой обещаний, содержащихся в "четырнадцати пунктах" Вильсона, и тем, что республиканской Германии пришлось испытать на себе ничуть не менее жесткий кулак победителей, чем кайзеровскому рейху. В частности, молодежь болезненно восприняла клеветническую кампанию против Германии, сопровождавшую вынужденное заключение унижительного мирного договора. Именно тогда была утрачена реальная возможность создания мирной Европы и посеяны семена того ужасного развития событий, свидетелями которого мы все стали. В последующие годы Эмми Нётер не принимала активного участия в политической жизни, но навсегда осталась убежденной пацифисткой. К этим своим взглядам она относилась со всей серьезностью, считая их необычайно важными для себя.

Занимая скромное положение "внештатного экстраординарного профессора", Эмми Нётер проработала в Гёттингене до 1933 г., в последние годы — в великолепном новом здании Математического института, построенном благодаря энергии Куранта и щедрой финансовой помощи со стороны Рокфеллеровского фонда. Я хорошо помню Эмми Нётер такой, какой я увидел ее в зимний семестр 1926–1927 гг., когда меня пригласили прочитать в Гёттингене курс лекций по представлениям непрерывных групп. Эмми Нётер была в числе моих слушателей: как раз в то время

ее интересовали гиперкомплексные числовые системы и их представления. Возвращаясь после лекций домой по холодным, грязным и мокрым от дождя улицам Гёттингена, мы много беседовали тогда с ней и с фон Нейманом, прибывшим в Гёттинген стипендиатом Рокфеллеровского фонда. После своего переезда в Гёттинген на постоянную работу я честно пытался добиться от министерства хоть какого-то улучшения для нее, потому что мне было стыдно занимать привилегированное положение, находясь рядом с ней, превосходившей, по моему глубокому убеждению, меня как математика во многих отношениях. Мои усилия оказались безуспешными. Не удалась и попытка добиться избрания Эмми Нётер членом Гёттингенского научного общества. Традиции, предрассудки, посторонние соображения перевесили ее научные заслуги и значимость, которую к тому времени уже никто не отрицал. В бытность мою в Гёттингене в 1930–1933 гг. Эмми Нётер, несомненно, была сильнейшим центром математической деятельности как по плодотворности программы научных исследований, так и по влиянию на широкий круг учеников.

Превращение Эмми Нётер в великого самобытного мастера, дань благоговейного восхищения которому мы приносим сегодня, происходило сравнительно медленно. Столь позднее созревание — редкое явление в математике. В большинстве случаев незаурядный творческий импульс проявляется рано. Одним из редких исключений, кроме Эмми Нётер, может быть назван Софус Ли. Лишь в 1920 г., через 13 лет после защиты диссертации, в журнале "Mathematische Zeitung" появилась статья "О модулях в некоммутативных областях, в частности из дифференциальных и разностных выражений", написанная Эмми Нётер в соавторстве с Шмейдлером. Эта статья стала поворотным пунктом в творчестве Эмми Нётер. Именно в этой статье перед нами впервые предстала та Эмми Нётер, которую все мы знаем, — преобразившая лицо современной алгебры. Авторы статьи производили действия над дифференциальными операторами так, как это ныне принято в квантовой механике. В этой статье особенно ярко проявилось собственное Эмми Нётер аксиоматическое мышление, оперирующее с абстрактными понятиями. Композицию (последовательное выполнение) дифференциальных операторов можно интерпретировать как своего рода умножение, которое не коммутативно. Вместо того чтобы оперировать с формальными выражениями, авторы в самом начале статьи аксиоматически задали простейшие свойства операций сложения и умножения дифференциальных (и разностных) операторов. Эти аксиомы и послужили основой всей работы. Аналогичный прием типичен и для последующих работ Эмми Нётер. В дальнейшем я попытаюсь охарактеризовать тот мир алгебры в целом, в котором протекала математическая деятельность Эмми Нётер.

Не менее характерным для Эмми Нётер было ее сотрудничество с другими математиками, в данном случае с Шмейдлером. Думаю, что Шмейдлер вкладывал в это сотрудничество столько же, сколько получал от него. Однако позднее Эмми Нётер выступала как истинный инициатор. Она щедро делилась своими идеями с коллегами. У нее было много учеников, и один из главных методов исследования проблемы состоял в том, что она

излагала свои еще не законченные идеи в лекциях и обсуждала их с учениками. Иногда она семестр за семестром читала лекции по одному и тому же предмету, обретавшему все более упорядоченный и унифицированный вид и позволявшему войти в самую суть полученных результатов. Ясно, что подобный подход иногда предъявляет чрезвычайно высокие требования к аудитории. Как правило, лекции Эмми Нётер изобиловали различного рода техническими погрешностями. Она была очень рассеянна и к тому же не слишком заботилась о ясности и четкости изложения. И все же она была великим педагогом, и те, кто сумели приспособиться к ней, смогли научиться у нее многому. О роли Эмми Нётер в алгебре невозможно составить верное представление только по ее собственным работам. Она обладала необычайной способностью стимулировать других исследователей, и многие из высказанных ею идей обретали окончательную форму только в работах ее учеников и сотрудников. Значительная часть того, что составляет содержание второго тома "Современной алгебры" ван дер Вардена, должно принадлежать Эмми Нётер. То же самое относится и к частям недавно вышедшей из печати книги Дойринга по алгебрам, в создании которой Эмми Нётер принимала активное участие. По признанию Хассе, стимулом к написанию серии его прекрасных работ о связи между теорией гиперкомплексных полей и теорией полей классов послужили замечания, сделанные Нётер в разговоре с ним. Она могла между прочим обронить в беседе в присущей ей лапидарной, пророческой манере какое-нибудь замечание, вроде "Символ норменного вычета — это не что иное, как циклическая алгебра", рожденное ее богатым воображением, позволявшим ей в большинстве случаев безошибочно постигать истину и с годами становившимся все сильнее и сильнее. Такое замечание могло стать вехой, намечающей направление будущего нелегкого исследования. Результаты, полученные самой Эмми Нётер, не позволяют составить правильное представление о масштабах сделанного ею: не следует забывать, что Эмми Нётер в первую очередь является создателем нового стиля мышления в алгебре, рождение которого имело эпохальное значение.

Эмми Нётер была неразрывно связана со своими учениками, любила их и интересовалась их личными делами. Они составляли несколько шумную и буйную ватагу "мальчиков Нётер", как их называли в Гёттингене. Среди тех, кто учился у самой Эмми Нётер, я могу назвать Грету Герман, Крулля, Хельцера, Грелля, Кете, Дойринга, Фиттинга, Витта, Тзена, Сходу, Левицкого, Ф.К. Шмидта. На последнего Эмми Нётер оказала большое влияние, главным образом через посредника — Крулля. Ван дер Варден приехал к Эмми Нётер из Голландии более или менее сложившимся математиком со своими собственными идеями, но позаимствовал у Эмми Нётер аппарат абстрактных понятий и стиль мышления, позволившие ему сформулировать свои идеи и решить свои проблемы. Артин и Хассе стоят рядом с Эмми Нётер как два независимых ума, работавших в областях, которые близко соприкасались с сферой ее деятельности, хотя оба сильно тяготели к теории чисел. С Хассе Эмми Нётер особенно тесно сотрудничала в последние годы. Рихард Брауэр и Эмми Нётер подходили к более глубоким, структурным проблемам алгебры с различных сторон; Нётер

действовала в более абстрактном духе, Брауэр, воспитанный в школе великого алгебраиста И. Шура, предпочитал оперировать с матрицами и представлениями групп. Различие в подходах делало их сотрудничество необычайно плодотворным. Эмми Нётер поддерживала тесные дружеские отношения с П.С. Александровым из Москвы, который часто бывал в Гёттингене⁸. Думаю, что присущий Эмми Нётер склад мышления не мог не сказаться на работах П.С. Александрова по топологии. В начале 30-х годов она провела один семестр в Москве, где близко познакомилась с Л.С. Понтрягиным⁹. Еще раньше, в 1928—1929 учебном году она в течение одного семестра читала лекции во Франкфурте, а Зигель, гостивший в ту пору в Гёттингене, прочитал там свой курс лекций.

Весной 1933 г. над Германией опустилась ночь нацизма. Математико-естественный факультет Гёттингенского университета, над созданием и укреплением которого в течение десятилетий трудились Клейн и Гильберт, был потрясен до основания. После длившегося всего один день "междоусобицы" я принял бразды правления Математическим институтом от Нейгебауэра. Но Эмми Нётер, как и многим другим, было запрещено всякое участие в академической деятельности. Она была лишена права преподавать и, следовательно, своей и без того небольшой "учебной нагрузки" и скромного оклада. Времена ожесточенной борьбы, подобные тем, которые мы переживали в Гёттингене летом 1933 г., тесно сплачивают людей. Я сохранил неизгладимые воспоминания о тех месяцах, об Эмми Нётер. Ее мужество, искренность, безразличие к собственной судьбе, поддержка среди окружающих нас ненависти и подлости, отчаяния и горестей были для тех, кто знал ее, моральной поддержкой. Разумеется, было предпринято все зависящее от нас, чтобы воздействовать на министерство и другие ответственные и безответственные, но достаточно могущественные организации и попытаться спасти то скромное официальное положение, которое она занимала в университете. Вряд ли министерство получало по еще какому-нибудь случаю столь внушительные груды самых лестных отзывов, какие поступили в защиту Эмми Нётер. В то время мы еще боролись, в нас еще теплилась надежда, что худшего удастся избежать. Но все наши усилия оказались тщетными. Франку, Борну, Куранту, Э. Ландау, Эмми Нётер, Нейгебауэру, Бернайсу и другим ученым, чьи имена еще недавно были гордостью университета, пришлось покинуть его стены, так как их лишили возможности работать. Гёттинген был развеян по ветру! Этот поворот событий и привел Эмми Нётер в колледж Брин Мор¹⁰. Там она преподавала недолго и как гость Института высших исследований в Принстоне оставила у всех нас живые воспоминания о себе, освежать которые вряд ли необходимо. Она не испытывала недобрых чувств против Гёттингена и своей родины за то, что с ней обошлись так несправедливо. Она не порывала дружбу из-за политических разногласий. Даже прошлым летом она побывала в Гёттингене, жила и работала там так, словно все обстояло по-старому. Эмми Нётер искренне радовалась, что Хассе в изменившейся политической обстановке удалось восстановить старые, почтенные и гордые математические традиции Гёттингена. С не меньшей легкостью Эмми Нётер приспособилась и к своему новому американско-

му окружению, студентки из колледжа Брин Мор были столь же близки ее сердцу, как некогда "мальчики Нётер" в Гёттингене. В Брин Мор она была счастлива. Должно быть, за всю свою предшествующую жизнь она никогда не получала столько знаков уважения, симпатии и дружбы, как за последние полтора года в Брин Мор. И вот теперь мы стоим у ее могилы. . .

То, что сделала за эти два последних напряженных года Америка для Эмми Нётер и германской науки, не будет забыто никогда.

Если за этим кратким жизнеописанием Эмми Нётер должен последовать беглый обзор ее трудов и краткая характеристика ее человеческих и научных качеств, то необходимо хотя бы несколькими штрихами нарисовать сцену, на которой разворачивалась ее научная деятельность — мир алгебры. Система действительных чисел, играющая столь важную роль во всей математике и физике, напоминает двуликого Януса: с одной точки зрения, действительные числа — это поле алгебраических операций $+$, $\times$ и обратных им операций, с другой — непрерывное многообразие, части которого непрерывно соединены между собой. Одна сторона — алгебраический, другая — топологический лик чисел. Современная аксиоматика односторонняя и потому не приемлет столь странного сочетания войны и мира (и в этом отношении она отличается от современной политики), тщательно разделяя эти стороны.

Итак, чистый алгебраист может производить над своими числами операции только четырех типов: сложение, вычитание, умножение и деление. Для него множество чисел замкнуто, и он отнюдь не намерен выхо-



На снимке 1932 г. слева направо: Э. Витт, Н. Бернайс, Элен Вейль, Герман Вейль, Иоахим Вейль, Э. Артин, Э. Нётер, Э. Кнауф, неизвестный, Тзен, Э. Бонн (будущая фрау Витт).

доть за пределы этого множества: производя допустимые операции над любыми двумя числами, он всегда получает число, принадлежащее тому же множеству. Такое множество называется областью рациональности, или полем. Простейшим из полей является множество всех рациональных чисел. Другим примером может служить множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b – рациональные числа, – так называемое поле алгебраических чисел ($\sqrt{2}$). Классическая проблема алгебры – решение алгебраического уравнения $f(x) = 0$ с коэффициентами из поля K , например, из поля рациональных чисел. Если корень δ уравнения известен, то вместе с ним известны все числа, которые получаются из δ (и чисел из K) в результате четырех действий: они образуют алгебраическое поле $K(\delta)$, содержащее δ . В числовом поле $K(\delta)$ само δ играет роль производящего числа, позволяющего рационально выразить все остальные числа. Вместо δ в качестве производящего числа можно выбрать многие, почти все числа из $K(\delta)$. Это означает, что вместо уравнения $f(x) = 0$ гораздо удобнее изучать поле $K(\delta)$. Переход от $f(x) = 0$ к $K(\delta)$ позволяет нам отвлечься от несущественных деталей и считать эквивалентными все уравнения, возникающие из уравнения $f(x) = 0$ при рациональных преобразованиях неизвестной x . Формулу (уравнение $f(x) = 0$), которая могла бы ввести нас в соблазн вычислений, производимых вслепую, мы заменяем понятием, а именно понятием поля, прийти к которому можно лишь концептуальным путем.

В рамках системы *целых* чисел без какого бы то ни было ограничения разрешается производить только операции сложения, вычитания и умножения; от деления приходится отказаться. Такая область называется областью целостности, или *кольцом*. Поскольку понятие целого числа характерно для всей теории чисел, можно утверждать, что теория чисел занимается изучением колец, а не полей. Многочлены от одной прямой, или неизвестной x , также образуют область, названную нами кольцом. Коэффициенты многочлена могут быть при этом ограничены заданным числовым полем или кольцом. Алгебра не интерпретирует аргумент x как переменную, непрерывно изменяющуюся в некотором интервале. Алгебра рассматривает аргумент как пустой символ¹¹, позволяющий слить коэффициенты многочлена в единое выражение, естественно определяемое правилами сложения и умножения. Утверждение о равенстве многочлена нулю означает в алгебре скорее то, что все его коэффициенты равны нулю, чем то, что он принимает нулевое значение при всех значениях независимой переменной. Вместо неизвестной x не запрещается подставлять какое-нибудь число или многочлен от одной или нескольких других переменных $y, z, \dots$. Но такая подстановка – процесс чисто формальный, точно отображающий кольцо многочленов от x на кольцо чисел или многочленов от $y, z, \dots$. Называя отображение точным, я имею в виду, что оно сохраняет все рациональные отношения, представимые в терминах основных операций – сложения, вычитания и умножения.

Алгебра знает и другие способы построения новых полей или колец, кроме присоединения неизвестных. Пусть p – простое число, например число 5. Рассмотрим обычные числа, условившись, однако, считать два числа равными, если они сравнимы по модулю p , т.е. дают при делении

на p одинаковые остатки (вычеты). Наглядно переход от чисел к вычетам по модулю p можно представить как наматывание числовой прямой на окружность длиной p . Возникающее при этом поле состоит из p различных элементов. *Простому числу в кольце многочленов от одной переменной x (с коэффициентами из данного поля K) соответствует простой многочлен $p(x)$.* Если считать равными два многочлена, сравнимые по модулю заданного простого многочлена $p(x)$, то кольцо всех многочленов превращается в поле, обладающее такими же алгебраическими свойствами, как и числовое поле $K(\delta)$, возникающее из исходного числового поля K при присоединении к нему корня δ уравнения $p(x) = 0$. Подчеркнем, что весь процесс происходит в рамках чистой алгебры: решать уравнение $p(x) = 0$, в действительности неразрешимое над полем K , не требуется. Изложенная нами интерпретация алгебраического числового поля $K(\delta)$ была предложена Кронекером после того, как Коши положил по существу ту же идею в основу теории функций комплексной переменной.

Так шаг за шагом математики подошли к мысли о построении алгебры на чисто аксиоматической основе. Среди тех, кто положил начало и участвовал в развитии аксиоматического направления, можно назвать целую плеяду замечательных математиков: Кронекер и Дедекинд, Э.Г. Мур в Америке, Пеано в Италии, Штейниц и в особенности Гильберт в Германии. В аксиоматической теории поле — это совокупность элементов, называемых числами, на которой заданы две операции $+$ и $\times$, удовлетворяющие обычным аксиомам. Отбросив аксиому деления, постулирующую однозначную обратимость умножения, мы получаем вместо поля кольцо. Поля уже не являются фрагментами, вырезанными из универсального множества чисел — континуума действительных или комплексных чисел, рассматриваемого в математическом анализе. Каждое поле становится, так сказать, миром в себе. С помощью операций можно связать элементы любого поля, но не элементы различных полей. Точка зрения, согласно которой каждый объект, исследуемый средствами математического анализа, является носителем особого рода чисел, задавать которые следует в терминах самого объекта и его внутренних составляющих вместо того, чтобы к любому объекту подходить с одной и той же универсальной числовой системой, разработанной а priori и независимо от приложений, эта точка зрения, говорю я, все глубже укореняется в аксиоматических основаниях геометрии, а в последнее время весьма необычным образом и в квантовой физике. Здесь мы сталкиваемся с одним из тех загадочных параллелизмов в развитии математики и физики, при виде которых невольно захватывается мысль о предустановленной гармонии разума и природы.

Говоря об аксиоматике, я имею в виду следующую методическую процедуру: естественное разделение различных сторон конкретно заданного объекта математического исследования, описание каждой из них на основе своей, сравнительно узкой и легко обозримой группы допущений, последующее объединение частных результатов, полученных при надлежащей спецификации, с возвращением к сложному целому. Последняя, синтетическая часть процедуры осуществляется чисто механически. Искусства требует первая аналитическая часть — разбиение целого на

части и их обобщение. Следует подчеркнуть, что поиск общности ведется не ради общности. Каждое обобщение упрощает, уменьшая число гипотез, и тем самым позволяет понять определенные стороны необозримого целого. О естественности того или иного разбиения на части с последующим обобщением вряд ли можно судить на основе какого-нибудь другого критерия, кроме плодотворности разбиения. Если систематизировать описанную процедуру, осуществляемую исследователем, который опирается на всевозможные аналоги, подсказываемые ему его математическим опытом, изобретательностью и интуицией, то мы приходим к тому, что называется аксиоматикой. Итак, аксиоматика в наши дни перестала быть только методом выяснения логических связей и углубления оснований и превратилась в мощное средство математического исследования. Эмми Нётер виртуозно использовала аксиоматический метод, как нельзя лучше соответствовавший складу ее ума, и превратила алгебру в Эльдorado аксиоматики. Важным моментом является установление "правильных" общих понятий, таких, как поле, кольцо и т.д., разбиение общего утверждения на частные и правильное обобщение последних с помощью установленных понятий. После того как разбиение целого на части произведено и мы абстрагировались от несущественных деталей, доказательство частных утверждений во многих случаях не представляет особого труда. Выступая в 1941 г. с докладом о топологии и абстрактной алгебре как двух направлений математического мышления, я сказал следующее:

"В то же время нельзя умолчать и о том, что среди современных математиков все шире распространяется мнение о бесперспективности абстрактных методов: их плодотворность, по всеобщему убеждению, близка к исчерпанию. Действительно, прекрасные универсальные понятия не падают с неба. Сначала исследователи сталкиваются с конкретными проблемами, подавляющими своей неприступной сложностью и безраздельным господством частных. Затем появляются аксиоматики и устанавливают со всей непреложностью: вместо того чтобы, напрягая все силы и сбивая руки в кровь, ломиться в двери, можно изготовить ключик, который позволит открыть их без особого труда и лишнего шума. Но изготовить ключ аксиоматики могут лишь после того, как сквозь трещины в замке, проделанные их предшественниками, они изучат его устройство вдоль и поперек, — прежде чем обобщить, формализовать, необходимо иметь математическую субстанцию. Я также придерживаюсь того мнения, что математическая субстанция, формализацией которой мы занимались в последние десятилетия, постепенно близится к исчерпанию. Превдвигу, что грядущему поколению математиков придется довольно туго".

Эмми Нётер возражала против подобного мнения и не без оснований: она ссылалась на то, что лишь за последние годы с помощью аксиоматического метода, применяя некоммутативную алгебру к коммутативным полям и к соответствующим теориям чисел, ей удалось обнаружить новые, вполне конкретные и глубокие проблемы и указать путь, ведущий к их решению.

Научная деятельность Эмми Нётер подразделяется, как мне кажется, на три отчетливо различных эпохи: 1) период относительной зависимости

(1907–1919 гг.); 2) исследования, группирующиеся вокруг общей теории идеалов (1920–1926 гг.); 3) исследование некоммутативных алгебр, их представлений линейными преобразованиями и применение их к изучению коммутативных числовых полей и соответствующих теорий чисел (с 1927 г.). Первый период был кратко охарактеризован мной, когда я говорил о жизненном пути Эмми Нётер. Теперь я хотел бы сказать несколько слов о втором периоде — периоде общей теории идеалов.

Идеалы предложил Дедекин, который намеревался, вводя идеальные элементы, восстановить основной закон единственности разложения числа на простые множители, нарушившийся в алгебраических числовых полях. Идея состояла в замене числа, например b , его свойством быть делителем множества всех чисел, делящихся на b , которое и называлось¹² идеалом (b) . Аналогичным образом наибольший общий делитель двух чисел a и b можно интерпретировать как множество всех чисел вида $ax + by$, где x и y независимо принимают значения из множества всех целых чисел. В кольце обычных целых чисел такое множество совпадает с множеством кратных одного числа d — наибольшего общего делителя чисел a и b . Но в случае алгебраических числовых полей аналогичное утверждение перестает быть верным, и поэтому возникает необходимость рассматривать в качестве делителей не только числа, но и идеалы. По определению подмножество кольца R называется идеалом, если сумма и разность любых чисел из подмножества принадлежат ему же, равно как и произведение любого числа из подмножества и любого числа из кольца. С другой стороны, понятие идеала возникло в алгебраической геометрии. Алгебраическая поверхность в пространстве определяется одним алгебраическим уравнением $f = 0$, где f — многочлен от координат. Если же приходится рассматривать алгебраические многообразия меньших размерностей, то они определяются не одним уравнением, а конечной системой алгебраических уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_k = 0$. Но тогда все многочлены обращаются в нуль на алгебраическом многообразии, соответствующем линейной комбинации базисных многочленов $f_1, f_2, \dots, f_k$ вида $A_1 f_1 + A_2 f_2 + \dots + A_k f_k$, где A_i — произвольные многочлены. Все многочлены такого типа образуют идеал в кольце многочленов; алгебраическое многообразие состоит из точек, в которых все многочлены идеала обращаются в нуль. Именно для таких идеалов справедлива теорема Гильберта о базисе — один из основных инструментов Гильберта в изучении инвариантов. Эта теорема утверждает, что любой идеал кольца многочленов имеет конечный базис. Теорема Нётера о вычетах содержит критерий, позволяющий нам решать, принадлежит ли тот или иной многочлен идеалу, элементы которого имеют общими лишь конечное число нулей. Для полиномиальных идеалов Ласкер, более известный нематематикам как неоднократный чемпион мира по шахматам, получил результаты, показывающие, что свойства таких идеалов значительно отличаются от того, что обнаружил Дедекин в полях алгебраических чисел.

Рассмотрим, например, следующие три кольца: кольцо обычных целых чисел и кольца многочленов от одной и двух независимых переменных с рациональными коэффициентами. Для каждого из них выполняется теоре-

ма о единственности разложения на простые множители, но алгоритмы Евклида или тот факт, что наибольший общий двух элементов a и b содержится в идеале (a, b) , т.е. может быть представлен в виде $af + bg$, где f и g — два надлежащим образом выбранных элемента кольца, остаются в силе лишь для двух первых колец: в области многочленов от двух переменных x и y многочлены x и y не имеют общего делителя; тем не менее уравнение $1 = xf + yg$, где f и g — два многочлена, невозможно, так как при $x = 0, y = 0$ правая часть обращается в нуль.

Эмми Нётер построила на аксиоматической основе общую теорию идеалов, охватывающую все частные случаи. Ее главной аксиомой было утверждение о цепочке делителей — гипотеза о том, что цепочка идеалов $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots$ после конечного числа шагов должна обрываться, если каждый член $\mathfrak{a}_i$ содержит предыдущий $\mathfrak{a}_{i-1}$ в качестве собственной части. Развитаая Эмми Нётер абстрактная теория слила воедино многие важные достижения математики. Кроме того, Эмми Нётер показала, что один и тот же аксиоматический подход позволяет осуществить спуск, с одной стороны, к полиномиальным идеалам, а с другой, к классическому случаю — идеалам в полях алгебраических чисел. В отдельных случаях общая теория Эмми Нётер вышла даже за пределы всего, что было известно из результатов, полученных Ласкером для полиномиальных идеалов.

До сих пор мы упорно сохраняли все аксиомы, которым удовлетворяют обычные числа. Существуют, однако, веские основания, побуждающие отказаться от коммутативности умножения. Действительно, такие операции, как вращения твердого тела в пространстве, некоммутативны относительно своей композиции: для композиции двух вращений весьма существенно, производятся ли сначала первое вращение и затем второе или же вращения выполняются в обратном порядке. Композиция рассматривается в данном случае как своего рода умножение. Вращения, если их записать в координатах, являются линейными преобразованиями. Линейные преобразования, поскольку их можно складывать и умножать, служат наиболее важным примером некоммутативных величин. Следовательно, любое заданное абстрактное некоммутативное кольцо или "алгебру" каких-то величин, не нарушая соотношений, устанавливаемых основными операциями $+$ и $\times$, можно реализовать в виде кольца или алгебры линейных преобразований. Именно в этом и состоит главная цель теории представлений. Теория некоммутативных алгебр и их представлений была построена Эмми Нётер на новой, чисто концептуальной основе с использованием всех результатов, накопленных в течение десятилетий замечательными по богатству высказанных в них идей трудами Молина, Фробениуса, Диксона, Веддерберна и других авторов. И снова решающую роль играет понятие идеала, сформулированное в различных вариантах. Весьма полезным оказывается также понятие *автоморфизмов*, т.е. преобразований, которые можно производить в алгебре, не нарушая ее внутренних соотношений. Теория Эмми Нётер не использовала вычислительных средств, например, определителя, обращение которого в нуль Дедекиннд использовал в качестве критерия полупростоты. Отказ от подобных критериев был тем более желателен, что критерий Дедекиннда оказался непригодным в некото-

рых областях рациональности. В тесном сотрудничестве с Хассе и Брауэром Эмми Нётер исследовала структуру некоммутативных алгебр и с помощью введенного ею *скрещенного произведения* применила теорию к обычным коммутативным числовым полям и их арифметикам. К наиболее важным работам Эмми Нётер этого периода относятся: "Гиперкомплексные величины и теория представлений" (1929 г.), "Некоммутативная алгебра" (1933 г.) и три статьи меньшего объема о норменных вычетах и теореме о главных родах. Ее теория скрещенных произведений была опубликована Хассе в связи с его исследованиями по теории циклических алгебр. Совместная работа Брауэра, Хассе и Эмми Нётер, содержащая доказательство того, что каждая простая алгебра над обычным полем алгебраических чисел циклична в смысле Диксона, останется заметной вехой в истории алгебры.

Я вынужден воздержаться от попытки хотя бы в общих чертах обозреть содержание этих глубоких исследований. Вместо этого я попытаюсь в заключение дать краткую общую оценку Эмми Нётер как математика и как личности.

Сила Эмми Нётер заключалась в ее способности абстрактно оперировать понятиями. Для получения новых результатов ей не были нужны путеводные нити конкретных примеров. Эта особенность ее математического дара имела, однако, и свои слабые стороны, так как иногда Эмми Нётер не вполне понимала специфические детали наиболее интересных приложений своих общих теорий. В то же время Эмми Нётер обладала живейшим воображением, позволившим ей наглядно видеть даже весьма далекие связи, она непрестанно стремилась к слиянию разрозненных фрагментов в единую теорию. Она умела находить тайную суть известных фактов, упорядочивать их с помощью подходящих общих понятий, отыскивать выгодную позицию, позволявшую единым взглядом обозреть все в целом, очищать рассматриваемый предмет от лишнего сора и тем самым придавать ему столь простую и четкую форму, что намечаемая экспедиция с целью завоевания новых территорий обретала высокие шансы на успех. Способность Эмми Нётер прояснять существо дела проявилась, например, в ее теории скрещенного произведения, в которой почти все основные факты были обнаружены Диксоном и Брауэром. Эмми Нётер неуклонно стремилась к аксиоматической чистоте. Все, что она делала, должно было совершаться в рамках и с помощью внутренних свойств исследуемой системы, ничто не должно было привноситься извне, право на применение признавалось только за инвариантными процедурами. Так, она считала недопустимым использовать, как это часто делал Шюр, матрицы, коммутирующие со всеми элементами данной матричной алгебры, и вместо матриц предпочитала вводить автоморфизмы. Но и эта тенденция может завести слишком далеко. Например, Эмми Нётер с презрением отказалась использовать примитивный элемент в своих работах по теории Галуа. Однажды она заметила: "Доказательство равенства двух чисел a и b , сводящееся к доказательству сначала неравенства $a \geq b$, а затем неравенства $a \leq b$, неверно. То, что числа a и b действительно равны, следовало бы доказывать, вскрывая внутреннюю причину их равенства".

Из всех предшественников Эмми Нётер в алгебре Дедекиннд был особенно близок ей по духу. К нему она питала глубокое благоговение. Своим студентам Эмми Нётер рекомендовала читать написанные Дедекинндом приложения к "Теории чисел" Дирихле, причем не к одному, а ко всем изданиям. Она принимала активное участие в публикации трудов Дедекиннда, пытаясь в комментариях к каждой из работ Дедекиннда проследить за развитием его идей в работах современных математиков. Ее духовное родство с Дедекинндом, бывшим, по-видимому, наиболее типичным нижнесаксонцем среди германских математиков, является блестящим примером того, сколь беспочвенны все попытки установить взаимосвязь между расовой принадлежностью и типом математического мышления. Для ее собственной работы помимо трудов Дедекиннда огромное значение имели также работы Штейница по теории абстрактных полей. Эмми Нётер жила в эпоху великого расцвета алгебры в Германии, в который немалый вклад внесла и она сама. Но методы, развитые Эмми Нётер, не следует рассматривать лишь как средства спасения. Кроме Артина и Хассе, чье математическое творчество имеет немало общего с работами Нётер, можно назвать алгебраистов иного склада, таких, как И. Шур в Германии, Диксон и Веддерберн в Америке, чьи достижения не уступают результатам Эмми Нётер ни по глубине, ни по значению. Возможно, последователи Эмми Нётер, преисполненные простительного энтузиазма, не всегда полностью сознают это.

Эмми Нётер принимала горячее участие в издании журнала "Mathematische Annalen", и то, что этот нелегкий труд не получил явного признания, по-видимому, причиняло ей боль.

Тот, кто видел Эмми Нётер впервые и не знал ее интеллектуальной мощи, легко мог принять ее за чудаковатую особу и подшутить над ней. Она была плотного сложения, обладала громким голосом, и перекричать ее в споре было не так-то просто. Она была великолепным проповедником, и проповеди ее не следовали установившимся канонам. Она была несколько грубоватым и бесхитростным человеком, но средце у нее было на месте. Ее откровенность никогда не была вызывающей. В повседневной жизни Эмми Нётер была скромна и непритязательна. Доброта и дружелюбие были присущи ей от рождения. Тем не менее она наслаждалась признанием и могла застенчиво улыбнуться в ответ, как юная девочка, услышавшая комплимент. Никто не мог бы сказать, что грации стояли у ее колыбели, но если мы в Гёттингене в шутку называли ее *der Noether* (с артиклем мужского рода), то в этой шутке была и дань уважения мощи ее интеллекта, преодолевшего барьер различия полов¹³. Она обладала тонким чувством юмора и умела создавать вокруг себя необычайно уютную атмосферу, чаепития у нее на квартире доставляли неизменное удовольствие всем участникам. Но она была человеком односторонним, так как равновесие было нарушено доминирующей ролью ее математического таланта. Важные стороны человеческой жизни остались нераскрытыми для нее и среди них любовная, служащая, если верить поэтам, для многих из нас сильнейшим источником эмоций, восторгов, желаний, печалей и конфликтов. Иногда она производила впечатление непослушного ребенка, но была человеком

добрым и мужественным, готовым прийти на помощь другому, способным к глубокой привязанности и преданности. Из тех, кого я знал, она несомненно была одной из самых счастливых.

Невольно напрашивается сравнение с другой женщиной-математиком, также снискавшей всемирную известность, — с Софьей Ковалевской. Соня была натурой более сложной, но и несравненно менее счастливой. Для того чтобы получить высшее образование, Соне пришлось преодолеть сопротивление родителей и вступить в фиктивный брак, который впоследствии стал фактическим. Эмми Нётер, как я уже упоминал, не обладала ни бунтарским характером, ни наклонностями богемы. Ковалевская в полной мере была наделена и женским обаянием, и женскими инстинктами и женским тщеславием. Она была далеко не безразлична к своим светским успехам. Ковалевская была человеком противоречивым, с причудами, математика сделала ее несчастной, тогда как Эмми Нётер находила в работе величайшее наслаждение. У Ковалевской многие интересы лежали за пределами математики. В свои последние годы в Париже, лихорадочно работая над мемуаром, представляемым на соискание Большой премии, Соня, намекая в письме на некоего М., в которого она была влюблена, признавалась: "Толстый М. занимает все место на моем диване и в моих мыслях". Такой была Соня: вы явственно ощущаете противоречие между творческим умом и жизнью с ее страстями, самоиронию, с которой Соня относится к происходящему в ее душе острому конфликту. Как далеко все это от того, чем была наполнена жизнь Эмми Нётер! Но Эмми Нётер, несомненно, обладала большей силой, большим научным талантом.

Две черты доминировали в ее характере. Во-первых, врожденная творческая мощь ее математического гения. Эмми Нётер была не глиной, которой искусные руки творца придали гармоническую форму, а скорее осколком первичной человеческой породы, в которую тот вдохнул жизнь. Во-вторых, ее сердце не ведало ничего дурного. Она не верила в зло, ей трудно было поверить в то, что зло может играть какую-то роль в общении людей между собой. Эта черта ее характера с особой силой проявилась для меня в последнее бурное лето (лето 1933 г.), которое мы провели вместе с ней в Гёттингене. Память о том, что она свершила в науке, и о ней как о человеке среди ее друзей изгладится не скоро. Она была великим математиком, величайшим по моему убеждению из всех, кого когда-либо производил ее пол, и великой женщиной.

ПАНЕГИРИК (ВОЛЬФАНГ ПАУЛИ)

Трудно даже представить, как бы сложилась история физики, не будь того влияния, которое оказывал на развитие этой науки в течение последних двадцати с лишним лет Паули. По словам одного лауреата Нобелевской премии, "Паули на протяжении многих лет был совестью и своего рода критерием истины для большинства физиков". По единодушному мнению мирового физического сообщества, Паули несомненно заслуживает то признание, которого удостоила его вклад в науку Шведская королевская ака-

демия, ведающая по завещанию Нобеля присуждением Нобелевских премий по физике.

Я считаю большой удачей, что по воле случая — благодаря тому, что Нобель родился в Швеции, — честь присуждения высшей международной награды за научные достижения выпала одной из скандинавских стран — Швеции. Именно эти страны идут в авангарде цивилизации. Именно в Скандинавии человек ближе, чем где бы то ни было, подошел к осуществлению своей мечты о счастливой и свободной жизни, справедливости и равных возможностях для всех, торжестве добра над злом. Где, как не в скандинавских странах, могут воссиять и быть любимыми красота и истина? Особенно большой вклад скандинавские страны внесли за последние десятилетия в развитие математики и физики. Достаточно назвать лишь одно имя — имя Нильса Бора, оказавшего в последние тридцать лет необычайно сильное влияние на развитие физики и всего поколения молодых физиков. Паули также принадлежит к числу учеников Нильса Бора.

Принято считать, что теоретика труднее стать лауреатом Нобелевской премии, чем экспериментатору. Происходит это по той очевидной причине, что оценить важность теоретического открытия на ранней стадии труднее, чем оценить значимость экспериментального открытия. Когда в середине двадцатых годов возникла современная квантовая физика, ее нередко называли "физикой мальчишек" (*Knabenphysik*), и, действительно, в то время ни Гейзенберг, ни Дирак, ни Паули не перешагнули через двадцатипятилетний рубеж (де Бройль и Шрёдингер были несколько старше). Приятно отметить, что ныне все эти "мальчишки", принявшие участие в великой драме идей, удостоены Шведской королевской академией высшей награды.

Борн и Вольфганг Паули, получивший образование в Вене, начали свою научную карьеру в Мюнхене у Арнольда Зоммерфельда. Возможно, я был одним из первых, с кем Паули установил научные контакты, так как его первые публикации были посвящены единой теории гравитации и электромагнетизма, предложенной мной в 1918 г. Работы Паули по единой теории поля были выполнены в характерный для него чисто "паулевской" манере: нащупав уязвимое место теории, он нанес ей весьма чувствительный удар. Статья Паули по теории относительности, написанная в те же годы для "Энциклопедии математических наук"¹, — зрелый труд, шедевр, отчетливо показывающий, насколько глубоко и свободно его автор владеет математическими и физическими аспектами теории, и это — несмотря на то, что его автору едва минуло двадцать лет! Защитив в Мюнхене диссертацию на соискание ученой степени "доктора философии", Паули переехал в Гёттинген, за которым со времен Гаусса установилась заслуженная репутация центра физико-математических исследований и где вели преподавательскую работу Макс Борн и Джеймс Франк, а из Гёттингена отправился в Копенгаген. Именно в Копенгагене он окончательно сформировался как ученый под сильным влиянием Нильса Бора. С 1923 г. по 1928 г. Паули был доцентом Гамбургского университета, а в последующие годы занимал кафедру теоретической физики в Федеральной высшей технической школе в Париже. 1935–36 учебный год Паули провел в Институте высших исследований в Принстоне. В 1940 г., сразу после вторжения нацистов в Данию и Норве-

гию, когда стало ясно, что и всем другим нейтральным странам Европы грозит опасность оказаться в плену у свастики, Институт высших исследований предпринял попытку пригласить Нильса Бора и Паули в США. Бор отказался, считая, что патриотический долг требует его пребывания в Копенгагене, но нам повезло "заполучить" Паули². Думаю, что он не пожалел о своем приезде, хотя Швейцария избежала участи подвергнуться нашествию фашистских орд.

Позвольте мне теперь бросить беглый взгляд на наиболее важные достижения Паули в физике, хотя математик вряд ли имеет право высказываться о них со всей определенностью. Паули близок нам, математикам, поскольку среди физиков он отличается высоко развитым "математическим чутьем". И все же Паули прежде всего остается физиком, ибо был в высшей степени наделен тем качеством, которое отличает физика: живым интересом к экспериментальным фактам во всей их поразительной сложности. Безошибочные, интуитивные оценки относительного веса соответствующих экспериментальных фактов служили Паули надежной путеводной нитью в его теоретических исследованиях. В лице Паули перед нами предстает недостижимый образец сочетания глубокой физической интуиции и отточенной математической техники³.

Как я уже упоминал, Паули начал свою научную деятельность "под знаком" теории относительности. Но хотя впоследствии он один или два раза возвращался к этой теории, его основная работа, по которой нам надлежит оценивать его творческий вклад в развитие науки, проходит в квантовой физике. В ее истории естественно различать периоды до и после предпринятого Гейзенбергом и Шрёдингером героического прорыва к созданию в 1925 г. последовательной квантовой теории атома. Во времена, предшествовавшие этому выдающемуся событию, физикам приходилось работать с моделью атома, предложенной Нильсом Бором, довольствоваться компромиссом, несколько туманно сформулированным Бором под названием "принципа соответствия"; и находить выход из лабиринта спектроскопических данных, руководствуясь не столько теорией, сколько удачной догадкой (или, по выражению Паули, "нюхом"). Нельзя не отметить, что именно в этот период Паули получил некоторые из своих наиболее выдающихся результатов. Например, Паули заметил, что так называемую сверхтонкую структуру спектральных линий надлежит приписывать квантовой природе ядра атома, а не электронных оболочек ядра. Но именно исследования по аномальному эффекту Зеемана привели Паули к открытию принципа запрета, согласно которому два электрона не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Это была весьма смелая концепция. Принцип запрета при всей своей необычности и непонятности с точки зрения классической физики имеет решающее значение для понимания периодической системы химических элементов. Непреходящий характер этого достижения Паули вряд ли может пострадать от любых последующих изменений наших физических теорий.

По правилу квантования Планка — Бора следовало бы ожидать, что в состоянии устойчивого равновесия каждый электрон, обращающийся вок-

руг атомного ядра, занимает самый низкий из всевозможных энергетических уровней. В действительности же, перебрав химические элементы, расположенные в их естественном порядке, мы обнаружим, что только первые два электрона — у водорода и гелия — связаны в низком состоянии. Затем, по-видимому, наступает своего рода насыщение: у следующего элемента — лития — имеется лишь один валентный электрон. Как показывают спектры, восемь электронов в атомах от лития до неона связаны на более высоких уровнях. У неона заполняется замкнутая оболочка, которая не может более присоединять ни одного электрона. Все эти фундаментальные факты и объясняет принцип запрета Паули. Развивая свой принцип, Паули должен был преодолеть еще одну дополнительную трудность. Когда Паули приступил к работе над принципом запрета, квантовое состояние электрона было принято описывать тремя квантовыми числами. Но тогда оболочки должны были содержать 1, 4, 9, . . . электронов, в то время как в природе наблюдаются оболочки с 2, 8, 18, . . . электронами. Чтобы учесть "удвоенное количество" электронов в оболочках, Паули ввел для электрона четвертое квантовое число. Вскоре после этого Гаудсмит и Уленбек предположили, что это квантовое число связано с собственным угловым моментом, или спином, электрона. И снова именно Паули удалось первому правильно (коль скоро основы новой квантовой механики была заложены) описать природу спина, коренным образом отличающуюся от природы вращающегося волчка и не укладывающуюся в рамки классических понятий.

Принцип Паули раскрывает некое общее загадочное свойство электрона, значение которого отнюдь не ограничивается спектроскопией. Сам Паули применил спин электрона к статистике частиц в вырожденном газе для объяснения парамагнитных свойств такого газа. Работа Паули по парамагнетизму металлов заложила основы квантовой теории электронов в металлах. Важный шаг в направлении, указанном квантовой теорией излучения Дирака, шаг, повлекший за собой события первостепенного значения, был сделан в совместной работе Паули и Гейзенберга по квантовой теории уравнений поля. Тем самым волновая механика совершала переход от теории одной частицы к теории взаимодействия бесконечно большого числа частиц. Проведенные Паули исследования внутренней взаимосвязи между спином и статистическим поведением частиц естественно привели его к изучению динамики мезона. Ныне мезон — одна из общепринятых частиц в ядерной физике. Большие сомнения вызывает изобретенная Паули наиболее трудно уловимая из всех элементарных частиц, которую он назвал нейтрино, а кое-кто из физиков предпочитает называть паулино. Нейтрино — это частица, лишенная заряда и массы покоя, но тем не менее играющая неоценимую роль, если мы хотим, чтобы выполнялись законы сохранения энергии и углового момента. Немало вопросов, связанных с существованием нейтрино, еще ожидают своего решения⁴.

Мой краткий обзор научной деятельности Паули как физика далеко не полон. Я не упомянул о двух обширных статьях по квантовой теории, написанных Паули в 1925 г. и в 1933 г. для энциклопедического издания *Handbuch der Physik* ⁵. Огромно влияние (хотя оценить его по достоинству чрезвычайно трудно), оказываемое Паули на тех, кто вступает с ним

в научную переписку⁶ или личное общение. Научная продуктивность Паули поддерживается на неизменно высоком уровне, что само по себе удивительно, в особенности, если учесть непрестанные скачки в развитии теоретической физики. Сравнивая работу физика-теоретика с работой математика, я нахожу, что на долю первого выпали большие трудности. Если математик не может решить какую-нибудь проблему, то он модифицирует ее до тех пор, пока не найдет решения. Никакая непостижимая реальность не ограничивает свободы его воображения. Математик поэтому склонен поддаться искушению Пера Гюнта: "Как-нибудь выкрутимся", — сказал кривой". Физик поступает иначе. Ему приходится противостоять упрямым фактам, наблюдаемым в природе. Проблема строения атома должна быть решена прямо, в противном случае никакой прогресс невозможен. По этой причине физик-теоретик время от времени переживает период изобилия, когда после упорных усилий удается достичь новой ступени в теоретической интерпретации, как это было, например, в 1925 г. В период изобилия на теоретика обрушивается масса захватывающей работы. Но периоды изобилия сменяются периодами застоя, когда теоретика не остается ничего другого, как терпеливо ожидать медленного накопления новых экспериментальных данных — фактов, не укладывающихся в какую бы то ни было теоретическую схему. Отвага и необычайная находчивость, проявленные Паули в подобный интригующий период, вызывают у меня глубочайшее восхищение.

Жизнь физика-теоретика ограничена еще одним противоречием — конфликтом между чистой наукой и приложениями. Как теоретик он склонен к созерцательной жизни и ее идеалам. "Счастье созерцания, не зависящее от нашей собственной жизни", как некогда выразился Дильтей, — одна из первооснов и благоденственных особенностей нашего существования. Правда, созерцание физиком окружающего мира не пассивно. Это — акт творческого созидания, но созидания из символов, напоминающего процесс творчества у музыканта. С другой стороны, наука занимается изучением реальности и применима к реальности. Она призвана служить на благо человечеству, но может и причинять человечеству ущерб. Технические применения науки используются для того, чтобы облегчить жизнь людей и сделать ее более несчастной, для созидания и для разрушения. В какой мере теоретик несет или может нести ответственность за практические последствия своих открытий? Сколь прекрасно возведенное теоретиками здание квантовой физики и сколь ужасна атомная бомба! Как надлежит квалифицировать деятельность физиков, принимавших участие в создании атомной бомбы: только как исполнение гражданского долга перед страной, вовлеченной в мировую войну, или как профанацию своей науки⁷? События последних лет, как мне кажется, убедительно показали необоснованность опасений, что ученые могут не внять призыву к гражданскому долгу, если на ставку будет поставлено существование нации. Не следует, однако, забывать о серьезной угрозе: в борьбе за основные ценности нашего существования мы можем утратить их; неукоснительное следование научным целям (странный парадокс!) может подорвать самые основы человеческой жизни. Всю свою жизнь Паули интересовался философией⁸. Особенно привлекали его

творения древнекитайских мыслителей. Неудивительно, что его симпатии находятся на стороне тех, кто не склонен духовное приносить в жертву мирскому и считать высшим критерием практическую отдачу.

КАРТАН О ГРУППАХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Эта книга, в основу которой положен курс лекций, прочитанный в 1931–1932 гг. в Сорбонне¹, по существу охватывает в несколько более явной форме тот же материал, который включен в *Actualités Scientifiques et Industrielles*. — 1935. — № 194 (рецензия: *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1935. — 41. — P. 774).

Методом подвижного репера автор исследует произвольные многообразия M_λ в пространстве Клейна R , геометрия которого описывается его группой автоморфизмов. Основная цель настоящей рецензии состоит в том, чтобы выявить аксиоматические основы этой теории.

Координатизация пространства R состоит во взаимно однозначном отображении точек A пространства R на многообразие Σ (числовых) символов, служащих координатами. В пространстве Клейна такая координатизация возможна только относительно некоторой системы отсчета f или, кратко, системы f . Абстрактная группа G и ее реализация взаимно однозначными преобразованиями многообразия Σ предполагаются заданными. Тем самым мы имеем дело с четырьмя типами объектов: точками A , символами x , системами отсчета f и элементами подгруппы s , взаимосвязь между ними устанавливается двумя аксиомами (а) и (б).

(а) Любая пара систем отсчета f, f' определяет элемент группы $s = (f \rightarrow f')$, называемый переходом от f к f' . Наоборот, любой элемент s из G переводит данную систему отсчета f в однозначно определенную систему отсчета f' , такую, что $s = (f \rightarrow f')$. Последовательность переходов $f \rightarrow f' \rightarrow f''$ соответствует композиции элементов группы: из $s = (f \rightarrow f')$, $t = (f' \rightarrow f'')$ следует $ts = (f \rightarrow f'')$. (Единичный элемент есть $f \rightarrow f$, а $f' \rightarrow f$ — элемент, обратный $f \rightarrow f'$).

(б) Относительно данной системы отсчета f каждая точка A определяет символ $x = (A, f)$ как свою координату, тем самым устанавливая взаимно однозначное соответствие $A \rightleftharpoons x$ между R и Σ . Координата $x' = (A, f')$ точки A в другой системе отсчета f' получается из x в результате преобразования, соответствующего элементу группы $s = (f \rightarrow f')$ в данной реализации.

Следствия: если f, f^* — любые две системы отсчета, то равенство $(A^*, f^*) = (A, f)$ определяет взаимно однозначное отображение $A \rightarrow A^*$ пространства R на себя — *автоморфизм пространства* $\{f, f^*\}$. Если элемент группы t переводит f, f^* в g, g^* , то одновременно $(A^*, g^*) = (A, g)$. Следовательно, автоморфизмы пространства $\{f, f^*\}$ образуют группу, изоморфную группе G , но их изоморфное отображение на элементы группы G определено с точностью до произвольного внутреннего автоморфизма группы G . Фигуры в R , переходящие друг в друга под действием автоморфизмов пространства, считаются *равными*.

Нас будут интересовать λ -мерные параметризованные многообразия

$$M_\lambda: x = x(t_1, \dots, t_\lambda),$$

где t_α — вещественные параметры. Воспользуемся пока обычными вещественными координатами в R : пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$. В данной точке $A = (t_1, \dots, t_\lambda)$ многообразия M_λ функции $x_1(t_1, \dots, t_\lambda)$ и их производные до данного порядка p образуют контактный элемент порядка p , или, кратко, p -росток. Мы получаем последовательность таких ростков порядков $p = 0, 1, 2, \dots$, каждый из которых содержится в предыдущем. Основная задача состоит в том, чтобы решить, когда два параметризованных многообразия M_λ, M'_λ равны. В аналитическом варианте можно вместо этого поставить вопрос о том, при каких обстоятельствах два данных p -ростка равны, а затем применить такой критерий к упомянутой выше последовательности ростков порядков $p = 0, 1, 2, \dots$. Начнем с низшего порядка — равенства двух точек.

Все символы, которые получаются из данного x под действием операций нашей группы, образуют слой $\varphi = \Sigma(x)$ в Σ . Точка A принадлежит φ , если ее координаты относительно некоторой и, следовательно, любой системы отсчета $\mathfrak{f}$ лежат в φ : стратификация Σ переносится на R независимо от систем отсчета. Предположим, что Σ , рассматриваемое как многообразие своих слоев, m -мерно и что $k_1, \dots, k_m$ — параметры, набор значений которых характеризуют и отличают отдельные слои в этом многообразии. Их можно использовать как точные инварианты (инварианты порядка 0) и тем самым решить основную задачу для точек. Картан выбирает простейшую из возможных конструкцию: многообразие Σ_0 в Σ , пересекающее каждый слой ровно в одной точке x_0 ; $k_1, \dots, k_m$ вводятся как параметры на Σ_0 .

С каждой точкой x_0 на Σ_0 связана подгруппа $G^0 = G(x_0) = G(k_1, \dots, k_m)$ из G , элементы которой реализованы как преобразования, оставляющие точку x_0 неподвижной. Мы предполагаем, что G является r -параметрической непрерывной группой Ли, и обозначаем символами $\omega_1, \dots, \omega_r$ базис для компонент произвольного инфинитезимального элемента группы G . Кроме того, мы установим базис

$$\pi_i = c_{i1}(k) \omega_1 + \dots + c_{ir}(k) \omega_r, \quad i = 1, \dots, m,$$

для тех компонент, обращение которых в нуль задает инфинитезимальные элементы подгруппы $G(x_0)$; Картан называет их *главными компонентами порядка 0*. Для каждой точки A , принадлежащей слою $\Sigma(x_0)$, системы отсчета $\mathfrak{f}$ порядка 0 вводятся с помощью условия

$$(A, \mathfrak{f}) = x_0.$$

Переходы между системами отсчета $\mathfrak{f}$ порядка 0 осуществляются с помощью элементов подгруппы $G(x_0)$.

От одной точки A мы переходим к паре точек AA' , или, точнее, к линейному элементу AA' , отправляясь из точки A (точка A' находится бесконечно близко от A), и снова возникает вопрос: когда два таких линейных элемента AA', BB' равны? Пусть A, A' принадлежат соответственно слоям

$\Sigma(x_0), \Sigma(x'_0)$, системы отсчета $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ ограничены уравнениями

$$(A, \mathfrak{f}) = x_0, (A', \mathfrak{f}') = x'_0. \quad (1)$$

Мы хотим знать, когда существует система отсчета $\mathfrak{g}$, такая, что

$$(A, \mathfrak{f}) = (B, \mathfrak{f}), (A', \mathfrak{f}') = (B', \mathfrak{g}).$$

Введем систему отсчета $\mathfrak{g}'$, которая получается из $\mathfrak{g}$ преобразованием $\omega = (\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}')$, и получим

$$(A, \mathfrak{f}) = x_0, (A', \mathfrak{f}') = x'_0 \mid (B, \mathfrak{g}) = x_0, (B', \mathfrak{g}') = x'_0,$$

$$(\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}') = (\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}').$$

Полная система инвариантных характеристик линейного элемента AA' состоит, таким образом, из значений $k_i, k'_i = k_i + dk_i$ инвариантов в точках A и A' и из множества переходов $\omega = (\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}')$ между системами отсчета $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$, удовлетворяющих уравнениям (1). Выберем $\mathfrak{f}'$ бесконечно близко к $\mathfrak{f}$, так, чтобы ω был инфинитезимальным. При фиксированной системе отсчета $\mathfrak{f}$ вариация системы $\mathfrak{f}'$ оставляет m компонент π_i неизменными, придавая в то же время произвольные значения остальным $r - m$ компонентам. Если от $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ перейти к другой паре с помощью элементов групп $s, s + ds$ из $G(x_0), G(x'_0)$; то ω перейдет в

$$\bar{\omega} = s^{-1} \omega s + s^{-1} ds.$$

Иными словами, π_i претерпевает неоднородную линейную подстановку

$$\bar{\pi}_i = \sum_k \sigma_{ik} \pi_k + \delta \sigma_i,$$

зависящую только от s .

Применим наше замечание ко всем точкам $A' = (t_\alpha + dt_\alpha)$ в окрестности некоторой данной точки $A = (t_\alpha)$ на параметризованном многообразии M_λ . Подчеркивая зависимость от линейного элемента (dt_α) , получаем уравнения

$$dk_i = k_{i1} dt_1 + \dots + k_{i\lambda} dt_\lambda, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

и относительно произвольной системы отсчета $\mathfrak{f}$ порядка 0 в A

$$\pi_i = b_{i1} dt_1 + \dots + b_{i\lambda} dt_\lambda. \quad (3)$$

Матрица $\|b_{i\alpha}\|$ играет здесь роль координаты в некотором пространстве Клейна $R^{(1)}$ с группой $G(x_0) = G^0$; каждый элемент s группы G^0 реализован преобразованием координат специального типа

$$\bar{b}_{i\alpha} = \sum_k \sigma_{ik} b_{k\alpha} + \sigma_{i\alpha}^0.$$

С новым пространством Клейна мы можем проделать все, что делали прежде, и получить набор инвариантов $k_j^{(1)}$ порядка 1 для наших 1-ростков, подгруппу $G^{(1)}$ группы G^0 , зависящую от значений новых инвариантов, и "системы отсчета порядка 1", образующие подкласс систем отсчета порядка 0 и переходящих друг в друга под действием элементов группы $G^{(1)}$. Базис для тех компонент произвольного инфинитезимального эле-

мента группы G , обращение в нуль которых задает элементы группы $G^{(1)}$, можно установить, добавляя к $\pi_1, \dots, \pi_m$ некоторые дополнительные компоненты

$$\pi_j^{(1)} = c_{j1}^{(1)}\omega_1 + \dots + c_{jr}^{(1)}\omega_r. \quad (4)$$

Полная инвариантная характеристика 1-ростка состоит в задании значений $k_i, k_{i\alpha}$ и $k_j^{(1)}$. Коэффициенты $c^{(1)}$ в (4) зависят от этих аргументов.

Аналогично тому, как мы перешли от 0 к 1, совершается переход от порядка $p-1$ к p . Уменьшение группы $G \supset G^0 \supset G^{(1)} \supset \dots$ должно завершиться после конечного числа шагов, и тогда на следующем шаге построение новых инвариантов прекратится. На параметризованном многообразии M_λ все эти инварианты — функции параметров t_α . Их совпадение для двух таких многообразий M_λ, M'_λ необходимо и достаточно для того, чтобы многообразия были равны. Такая теорема единственности сопровождается соответствующей теоремой существования. Для одномерных многообразий на инварианты не налагаются никакие ограничения, а в случае нескольких параметров t_α инварианты должны удовлетворять некоторым условиям интегрируемости.

Возможно, а иногда и желательно исследовать специальные классы многообразий, налагая на инварианты условия.

Кривые в евклидовом 3-пространстве E_3 являются одним из простейших примеров нашей теории. Относительно декартовой системы отсчета мы имеем в качестве координат тройки чисел (x_1, x_2, x_3) ; пространство однородно, и Σ_0 состоит из одного символа $(0, 0, 0)$. Системы отсчета с точкой A кривой, выбранной за начало, — порядка 0; системы отсчета, у которых, помимо этого, первая ось совпадает с касательной, — порядка 1; и, наконец, триэдр Френе является единственной системой отсчета порядка 2. На этом процесс обрывается. Инвариантов порядка 0 не существует, но существует по одному инварианту каждого из порядков 1, 2, 3, а именно ds/dt (t — параметр, ds — элемент дуги), кривизна ρ и кручение τ . Для минимальных кривых в (комплексном) E_3 , для которых инвариант ds/dt равен нулю, приведенное выше упорядочение систем отсчета порядка 1 становится невозможным; они требуют особого рассмотрения, иллюстрируя наше замечание в предыдущем абзаце. То же верно и для плоских кривых с $\rho = 0$.

Несколько сложнее проводится исследование многообразий без фиксированной параметризации. Требуется узнать, можно ли перевести два многообразия

$$M_\lambda: x = \varphi(t_1, \dots, t_\lambda) \quad \text{и} \quad M'_\lambda: x = \varphi'(\tau_1, \dots, \tau_\lambda)$$

друг в друга с помощью подходящего автоморфизма в сочетании с надлежаще выбранным преобразованием параметров. На этот раз необходимо учитывать обе зависимости: от произвольной системы отсчета $\mathfrak{f}$ и от произвольных параметров t_α . В этом случае коэффициенты $k_{i\alpha}$ в (2) и $b_{i\alpha}$ в (3) следует рассматривать как координаты в пространстве Клейна $R^{(1)}$, так как преобразование параметров t_α влияет как на $b_{i\alpha}$, так и на $k_{i\alpha}$ (хотя последние коэффициенты безразличны к изменению системы отсчета).

Именно эту задачу Картан рассматривает в настоящей книге, и некоторым способом ему удается свести второе влияние — выбор параметров — к выбору системы отсчета. Я не вполне понимаю, как это он делает в общем случае, хотя в приводимых их примерах процедура вполне ясна. Мне кажется желательным с самого начала сохранять оба фактора в отдельности; процесс сам стремится отнормировать их во взаимозависимости по мере того, как мы переходим ко все более высоким порядкам. С той же ситуацией мы встречаемся повсюду в дифференциальной геометрии. Например, римановы пространства можно рассматривать, вводя координаты и связывая с каждой точкой A систему отсчета, т.е. декартову систему осей. Инвариантность требуется относительно произвольных преобразований координат и ортогональных преобразований систем отсчета, которая может произвольно зависеть от точки A . Известно, как обходились с системами отсчета Гаусс, Риман и Эйнштейн: параметры, коль скоро они выбраны, однозначно определяют в каждой точке аффинный набор осей, и этим можно воспользоваться, трактуя декартову геометрию в терминах аффинных систем отсчета и фундаментальной метрической формы, а не в терминах декартовых систем отсчета. Картан ударяется здесь в противоположную крайность, нормируя параметры в терминах систем отсчета. Я предпочел бы сохранить полную беспристрастность по отношению к выбору и параметров, и систем отсчета, коль скоро мы рассматриваем совершенно общие задачи дифференциальной геометрии.

Рецензируемая книга преследует тройную цель: она содержит 1) изложение общей теории конечных непрерывных групп Ли на языке, приспособленном к дифференциально-геометрическим приложениям, 2) общее описание метода подвижного репера и 3) приложение этой теории к ряду важных примеров. Расположение материала продиктовано соображениями скорее дидактики, чем системы. Например, первые примеры глав 1—3 о кривых в E_3 , минимальных кривых в E_3 , линейчатых поверхностей в E_3 (рассматриваемых как одномерные многообразия прямых) предшествуют общей формулировке. Главы 4—9, 11, 13, 14 посвящены группам Ли. В то время как темы 1) и 3) изложены подробно, тема 2), которой мы уделили основное внимание в настоящей рецензии, лишь кратко затронута в начале главы 10 с точки зрения групп преобразований, а в начале главы 12 — с абстрактной точки зрения. В обеих главах далее идут приложения: кривые на аффинной и проективной плоскостях и произвольные поверхности в E_3 . В последнем примере — единственном, в котором рассматриваются многообразия более чем одного измерения, — заходит речь об условиях интегрируемости; хотя их роль в теории групп Ли широко обсуждается, общая формулировка этих условий как неотъемлемой части теоремы существования в теории репера опущена.

Все книги этого автора — и рецензируемая не является исключением — необычайно стимулируют мысль, полны оригинальных точек зрения и изобилуют интересными геометрическими деталями. Картан, несомненно, является величайшим мастером дифференциальной геометрии, живущим ныне. Эта рецензия неполна, ибо она направлена на то, чтобы обнажить корни, а не

на описание той пышной кроны, которую книга Картана раскидывает над читателем. Нельзя не воздать должное и Жанру Лере, который сумел обработать записи лекций, придав им вид настоящей книги и в то же время сохранив живость первоначального изложения. Тем не менее я должен признать, что читать эту книгу, как и большинство работ Картана, мне было трудно. В чем здесь причина — только ли в великой традиции французской геометрии, которой следует Картан, стиле и содержании, которые он считает твердо установленными в качестве общей основы для всех геометров и которые не разделяем мы, родившиеся и получившие образование в других странах?

ОГЛЯДЫВАЯСЬ НАЗАД: ЦЮРИХ В 30-е ГОДЫ

Я был приглашен в Федеральное высшее техническое училище (ETH) в 1913 г. как преемник геометра К.Ф. Гайзера. Моя преподавательская деятельность охватывала все области математики, а иногда, если того требовали мои собственные исследования, также теоретическую физику (теория относительности и квантовая механика) и философию науки. Дважды моя работа в Цюрихе прерывалась на год: в первый раз во время первой мировой войны, когда меня призвали в германскую армию как рядового ландшафтмистра, и во второй раз, когда я был приглашенным профессором по математической физике в американском Принстонском университете. Самым тяжким испытанием для меня в цюрихские годы были поступающие время от времени приглашения из других мест, поскольку решения такого рода давались мне весьма трудно. Однажды в начале пресловутой инфляции случилось так, что я получил одновременно два приглашения: из Берлина и из Гёттингена. Сравнительно быстро я решил отказаться от Берлина. Но отказаться от кафедры Феликса Клейна в Гёттингене было не столь просто. Ведь Гёттинген, хорошо известный мне еще со студенческих и приват-доцентских времен, был наряду с Парижем центром математической мысли. Когда откладывать решение стало решительно невозможно, я в состоянии внутренней борьбы, пробродив вместе с женой несколько часов по улицам, вскочил на подножку последнего трамвая, направляющегося в сторону озера к почтамту, успев крикнуть жёне: "Придется принять приглашение! Иного выхода нет!" Но затем на меня, должно быть, подействовал дух беззаботного веселья, царивший в тот прекрасный летний вечер на берегах озера: на почтамте я подошел к окошечку и протелеграфировал отказ. Вернувшись домой, я очень удивил этим свою жену. Сейчас мне трудно сказать с уверенностью, что в этой истории правда и что вымысел. Во всяком случае об этом решении нам с женой не пришлось пожалеть.

Спустя семь лет ситуация повторилась: меня пригласили в Гёттинген как преемника величайшего математика нашего времени Давида Гильберта. На этот раз я не мог более сопротивляться, в чем мне вскоре пришлось горько раскаяться. Но в ту пору — в начале тридцатых годов — самые проныцательные и сведущие в политике из моих швейцарских друзей считали,

что опасность для Германии представляют лишь коммунисты, но отнюдь не нацисты.

То, что я, человек, не обладающий хорошей памятью на события прошлого, отчетливо сохранил воспоминания о годах моей работы в ЕТН, во многом объясняется мотивами личного характера; что касается науки, то воспоминания вращаются главным образом вокруг моей деятельности в качестве исследователя, а не преподавателя. Для широкой публики это мало интересно. Да и истекшие бурные четверть века стерли в моей памяти многие черты прошлого. Поэтому я лучше повторю здесь в несколько сокращенной форме ту речь, которую я произнес осенью 1930 г. в Гёттингенском математическом обществе, членом которого я состоял еще в бытность студентом. В этой речи по свежим, еще живым впечатлениям я рассказал кое-что о том, какое значение имела для меня Швейцария, и о тех принципах, которые я стремился воплотить во время моей работы в ЕТН. Привожу текст своего выступления:

”Уважаемые коллеги!

Когда Якоб Буркхардт¹ в возрасте сорока лет покинул Политехнический институт в Цюрихе, чтобы принять приглашение университета в своем родном городе Базеле, он исходил из убеждения в том, что в возрасте сорока лет человек должен отправиться туда, где он хотел бы умереть. Я отнюдь не хочу этим сказать, что и я вернулся, наконец, из Швейцарии к себе на родину в Северную Германию: для меня, уроженца Ганновера, а не Гольштейна, границы родины простираются несколько дальше, чем для Буркхардта, для которого Цюрих, находящийся в двух часах езды по железной дороге от Базеля, уже был далекой чужбиной, я не хочу сказать, что вернулся сюда лишь для того, чтобы умереть среди вас. Но все же слова Буркхардта относятся и ко мне. Я тоже почувствовал, что в сорок пять лет приглашение занять вакансию воспринимается с меньшим энтузиазмом и решение требует более серьезного, вдумчивого отношения, чем в двадцать семь лет. Чтобы было понятно, что я имею в виду, скажу немного о себе и немного о Швейцарии.

В 1913 г. — за год до начала войны — я, молодой, недавно женившийся, приехал в Цюрих. Мое представление о Швейцарии, как и большинства немецких юношей того времени, сложилось главным образом под влиянием поэзии Готфрида Келлера и К.Ф. Мейера. Сколь же велико поэтому было мое удивление, когда я обнаружил, что нахожусь за границей. По мере приближения войны я со все большей отчетливостью ощущал, что немецкая культура занимает в Швейцарии не столь безраздельно господствующее положение, как это казалось Келлеру, и что различия в путях развития, особенно со времени образования в 1870 г. Германской империи, вырыли глубокий ров, разделяющий культуру Германии и Швейцарии. Но прежде всего я понял, что Швейцария — не немецкая Швейцария, это крыша Европы, под которой германская культура встречается с романской. Мало-помалу испытал на себе влияние романской культуры и я. Если вспомнить, что за годы моей самостоятельной жизни, начиная со студенческой скамьи, я более половины времени провел в Швейцарии, — а это были, пожалуй, наиболее важные и продуктивные годы моей жизни вообще, — то вряд

ли приходится удивляться тому, что к Швейцарии я испытываю не менее теплые чувства, чем к Германии. Ибо я всегда стремился жить без предвзвешиваний и никогда не рассматривал национальную принадлежность как некое достоинство или привилегию, которой можно кичиться, или как шоры, позволяющие игнорировать иной образ жизни. Наоборот, я исходил из убеждения, что то лучшее, чем каждый обязан своему народу, невольно проявляется во всем, чем бы и как бы ни занимался человек, и заслуживает благодарности и признательности повсюду, где бы ему ни довелось жить. Сейчас мне особенно остро недостает свойственных людям романского склада умения ценить простые радости жизни и наслаждаться ими, особой романской жизнерадостности, человечности и манеры общения. В Швейцарии родились и выросли мои дети. Там, несмотря на чопорность, с которой швейцарцы обычно встречают "чужаков", завязались самые теплые дружеские отношения, какие у меня были за всю мою жизнь. Не стану отрицать, что когда я покидал Цюрих, на сердце у меня было тяжело, как будто я совершаю предательство.

Наконец Швейцария с ее складывавшимися на протяжении веков демократическими традициями оказала весьма существенное влияние на мои политические взгляды. После свободной и непринужденной атмосферы Швейцарии современная Германия с ее дремотно-судорожной напряженностью произвела на меня тягостное впечатление. Немцы принимают в умственной жизни более живое и страстное участие, чем несколько более рассудочные швейцарцы. Это та черта, за которую немцев нельзя не любить. Мысль о том, будто современная политическая лихорадка отчасти обусловлена страстной привязанностью к духовному началу, возженной от этого благородного огня, не укладывается в моем сознании. Но наряду с увлечением всем возвышенным немцам свойственно почти пугающее пренебрежение к фактам и здравому смыслу, которое оборачивается слабостью немцев и не может быть скрыто тонкой завесой идеализма — его заглушают тревожные взрывы чисто отрицательных душевных порывов: сетования на бедственное положение, жалобы на несправедливость, негодование, ненависть и брань. Психолог мог бы сделать из этого вывод, что мы, немцы, страдаем от скрытого комплекса исторической вины и, будучи не в силах признаться себе в этом, в необузданном порыве сваливаем вину на других и только на других. Надеюсь, что именно та часть немецкого студенчества, которая обучается на естественных и математических факультетах, не даст этому течению увлечь себя, поскольку наши науки далеки от человеческих интересов и страстей и заниматься ими могут лишь те, кто прошел основательную выучку и может мыслить строго объективно. Я от души советую тем из вас, кто имеет такую возможность, провести один или два семестра в каком-нибудь зарубежном университете — в Швейцарии, Англии или Франции, чтобы на расстоянии обрести истинную меру оценки для происходящего в тревожной и накаленной обстановке современной Германии.

"Политика — скверная песня". Позвольте мне теперь лучше сказать несколько слов о себе самом, о том, как я понимаю свою задачу как преподавателя и исследователя, задачу, о которой я, памятуя наставление

Гёте: "О том, что гложет изнутри, страдать не должно", могу судить лишь в меру своего разумения.

По моему убеждению, высшая школа — это не только наиболее высокое из учебных заведений, через которые общество передает подрастающему поколению богатство своей культуры и, в частности, технический опыт и теоретическую картину мира: высшая школа служит еще и научному исследованию. Тот, кто познает и теоретически мыслит, принадлежит, так же, как художник, к одному из основных типов людей; такой человек должен найти свое место в структуре современного общества, и он находит его сегодня лишь в высшей школе. От того, кто познаёт, "требуют речи"; так пусть же юное поколение сидит у его ног и внимает его речам, когда они прорываются. В такого рода отношении между учителем и учениками я усматриваю основное достоинство высшей школы. Не думаю, что систему образования следует строить только снизу, столь же необходимо и противоположное движение. Все, что связано с природой и необходимостью, растет снизу, но дух и свобода духа вторгаются сверху. Именно в этом смысле, как я надеюсь, дорогие коллеги, смогу я стать вашим учителем: буду бросать семена на ветер — пусть их ловит, кто может. Я не слишком подхожу для того, чтобы твердой рукой вести других по пути решения конкретных проблем, возникающих в процессе исследования. Моя собственная работа в математике никогда не отличалась систематичностью, в ней не было последовательности, не было единого метода. Мне почти всегда были больше по душе экспрессия и выразительность, чем само познание. И я убежден, что независимо от моих личных вкусов, сама математика — в отличие, например, от экспериментальных наук — обладает чертами, сближающими ее со свободным творчеством в искусстве, и что поэтому современная научная деятельность, при которой естественно-научные институты достигли небывалого расцвета, не особенно идет ей на пользу. По той же причине отношения между учителем и учеником в математике всегда должны будут оставаться более тонкими и менее определенными, чем в других науках: не требуем же мы в обычных условиях от того, кто работает в области искусства, чтобы его творчеством руководили ученики.

При моем умонастроении правильнее всего было бы оставаться в Цюрихе, где круг моих обязанностей был сравнительно узок, а условия для *vita contemplativa*² были особенно благоприятны. Осознать это было нелегко. Мысленно я сравнивал себя главным образом с двумя людьми: с Якобом Буркхардтом и Германом Гессе. Последний своим складом ума и своей судьбой мне особенно близок. Гессе "подался на юг" не только в географическом смысле. Его пример привлекает и в то же время предостерегает. Ибо его уделом стало глубокое одиночество, а все счастье его чувствований, восприятий и поэзии оказалось наполненным чудно окрыленным, всепроникающим, мягким, тихим отчаянием. Буркхардт, находясь в Базеле, без всяких колебаний отверг приглашение занять в Берлине кафедру своего великого учителя Ранке³. Однако его мышление черпало силы в мощной гуманистической связи с культурой, которой он служил как историк, и в связи со своим родным городом-республикой Базелем и с его обществом.

Я вернулся сюда потому, что не хочу утратить связи с молодежью, — без такой связи старость обречена на неизбежное одиночество — потому, что, по моему убеждению, для науки нет более благоприятной обстановки, чем духовная общность в тех центрах, где наука растет и развивается; свой долг поэтому я вижу в том, чтобы передать новому поколению научные традиции и в конце концов вернуть себя в лоно своего народа.

Прошлое не властно надо мной; более того, я не люблю хранить свидетельства былого, ибо в них прошлое приобретает своего рода самостоятельность, вследствие чего оно продолжает оказывать влияние на настоящее. Совершенное мной я рассматриваю как фрагмент безостановочно движущейся ленты жизни. Насколько хватит моих сил, я буду стремиться к тому, чтобы быть открытым для современности, поддерживая личный контакт с вами — теми, кто учится, и духовный контакт с продолжающей развиваться наукой.

Моя речь лишена энтузиазма. Возвращение человека, который в юные годы, полагаясь только на себя, отправился завоевывать мир, в гавань того общества, к которому он принадлежит, — это отречение от прошлого.

”Кто в высь не стремится? Но любовь

Клонит к земле, а пуще любви — горе,

И все же наш путь

Вспять не вернется к началу”.

Смысл этих слов Гёльдерлина юным сердцам понять не легко. . . .”

Так говорил я тогда, двадцать пять лет назад. Но вскоре в то самое народное сообщество, в которое я так жаждал вернуться, проник яд, распространяемый крысоловом Гитлером. Жизнь в стране, где у власти находилось это исчадие ада и позор немецкой нации, стала для меня невыносимой, и хотя эмиграция была горьким решением, давшимися мне ценой тяжелых душевных переживаний, я отряхнул пыль отечества со своих ног. Мне посчастливилось найти в Америке во вновь учрежденном Институте высших исследований в Принстоне (штат Нью-Джерси) новое весьма плодотворное место для своей деятельности. Ученый вряд ли может мечтать о лучшем; но с *Родиной* мне пришлось расстаться. Я должен быть доволен уже тем, что мои дети и внуки пустили корни в новой земле.

УНИВЕРСИТЕТЫ И НАУКА В ГЕРМАНИИ

Вы знаете, что я математик. Меня интересует и всегда интересовала наука как таковая, а не вопросы ее организации. И хотя большая часть моей сегодняшней лекции будет посвящена системе университетского образования и организации научных исследований в Германии, я прошу вас иметь в виду, что не являюсь специалистом в той области, о которой буду говорить. Однако я хорошо знаю Германию и знаком с германской системой высшего образования по личному опыту: в Германии я родился, здесь же получил образование, а затем преподавал в Гёттингенском университете, сначала — в течение трех с половиной лет перед первой мировой войной — в качестве приват-доцента, а затем, в 1930–1933 гг. (включая полгода при нацистском режиме), — в качестве полного профессора. В период с 1913

по 1930 гг. я был профессором Федерального высшего технического училища в Цюрихе (Швейцария).

Собственные знания о предмете сегодняшней лекции я старался углубить с помощью нескольких книг, которые рекомендую вашему вниманию.

P a u l s e n Friedrich. The German Universities.

Это классический немецкий труд, вышедший в Германии в 1902 г., а в переводе на английский — в 1906 г.

H a r t James Morgan. Universities. A Narrative of Personal Experience. New York, 1874.

Если судить по весьма затрепанному экземпляру, взятому мною в Принстонской библиотеке, книга Харта, по-видимому, на протяжении многих лет пользовалась у студентов большой популярностью.

В 1930 г. была издана книга А. Флекснера (Abraham Flexner), идейного основателя нашего Института высших исследований, озаглавленная "Universities, American, English, German".

Удивительно, в какой мере Харт и Флекснер единодушны в оценке того, что они считают достоинствами и недостатками.

По вопросам истории немецких университетов в нацистский период я обратился к книге: H a r t s h o r t E.Y. Jr. The German Universities and National Socialism, 1937, которую рекомендую и вам.

Вначале я буду говорить об организации и об истории университетского образования и научной деятельности в Германии вплоть до 1933 г., а закончу кратким обзором тех бед и несчастий, которые обрушились на них при нацизме.

Я полагаю справедливым следующее: *насколько трагической является многовековая политическая история Германии, настолько счастливой является история ее высшего образования.* На протяжении почти всей своей истории немецкий народ был лишен политической независимости, и тем не менее с тех пор, как немецкие университеты приобрели свой нынешний вид, т.е. с XVIII в. и до 1933 г., в них неизменно царил дух интеллектуальной свободы. Американцу Стенли Холлу принадлежит фраза, сказанная в 1890 г.: "Немецкий университет сегодня — самое свободное место на земле".

Если бы меня попросили охарактеризовать степень престижа различных социальных групп в Германии времен Вильгельма II, то я отметил бы, что тогда — в бытность мою студентом — существовали две категории лиц, положение которых в обществе намного превосходило положение соответствующих категорий в США — это военные и студенты. Несомненно, в Германии царил милитаристский дух. Но это только одна сторона дела: немецкая нация гордилась своей армией и своими университетами. Пальмерстон называл Германию землей проклятых профессоров. Немцы обладают даром с увлечением отдаваться интеллектуальной и художественной деятельности. Мне больше по душе была жизнь в Швейцарии с ее стародавней демократией, чем жизнь в имперской Германии с ее делением на касты и классы, но есть нечто такое, за что исконных моих соотечественников я всегда любил больше, чем рассудительных жителей Швейцарии, — это их искренний и страстный интерес к вещам, связанным с работой ума. Все

и вся, относящаяся к университету, пользовалось исключительным и всеобщим уважением.

В подтверждение сказанного приведу курьезный эпизод из немецкой университетской жизни 90-х годов. Однажды Куно Фишер¹, второразрядный философ из Гейдельбергского университета, был потревожен шумом, которые производили рабочие, мостившие булыжником улицу перед его домом. Как раз незадолго до этого Фишер получил приглашение занять должность профессора в Берлине. Открыв окно, он крикнул рабочим: "Если вы сейчас же не прекратите этот шум, я приму приглашение из Берлина!" Десятник бросился к бургомистру, тот вызвал архитектора города, и было решено отложить ремонт мостовой до начала каникул.

Практически все чиновники правительственных органов Германии прошли через систему высшего образования — гимназию и университет. Но вместе с тем верно и то, что в политической сфере престиж профессоров имел свой предел; на общественную жизнь они не оказывали почти никакого влияния. В имперской Германии было немыслимо, чтобы профессор математики стал военным министром, как это было с Полем Пенлеве² во Франции. Высокообразованные люди, которые могли бы быть лидерами не только в области мысли, но и в области действия (в этой связи я вспоминаю, например, экономиста Макса Вебера³, чья смерть в 1920 г. была большой потерей для молодой Германской республики), вплоть до 1918 г. сами устранились от какой-либо политической деятельности.

Хотя имперская Германия, конечно, не была демократической страной, с точки зрения доступности ее высшие учебные заведения отличались большим либерализмом и большей демократичностью, чем это было во Франции или Англии. Студенты университетов были освобождены от платы за обучение, если не считать умеренных взносов за посещение некоторых дополнительных лекций. И только после первой мировой войны стали появляться студенты, жившие полностью или частично на средства, заработанные во время каникул. В мое время считалось, что в каникулы студент должен продолжать свои занятия дома и что физический труд не соответствует его социальному статусу. Некоторые, правда, зарабатывали репетиторством, но таких было немного. После 1918 г. это положение в корне изменилось. Вместе с тем университеты были явно рассчитаны не на широкий круг людей, а на интеллектуальную элиту. В Германии было около двадцати университетов. Нацисты сократили ежегодный прием в университеты всего рейха до 15 тысяч; до 1933 г. прием составлял немногим более 20 тысяч. Эти цифры надо сопоставить со всем населением Германии, насчитывавшим от 60 до 70 миллионов⁴.

Теперь я перейду к несколько более подробному описанию системы университетского образования в Германии, обращая внимание на три основных аспекта: 1) сочетание преподавания и научных исследований; 2) *Lehr- и Lernfreiheit*, т.е. свобода выбора как у преподавателя, так и у студентов; 3) автономия университетской корпорации по отношению к государственным институтам.

Сочетание преподавания и научных исследований составляло одну из наиболее характерных особенностей современного немецкого универси-

тета. В Германии считалось нормой, что каждый профессор университета — ученый, ведущий самостоятельную научную работу, и, наоборот, любой ученый и мало-мальски значительный исследователь — профессор какого-нибудь университета. Поэтому *все выдающиеся представители науки занимались каждодневной преподавательской деятельностью*. Иная традиция сложилась в Англии, где в XIX в. преподавание стало по большей части сосредоточиваться в руках членов колледжей (fellows) и "тьюторов" (tutors); хотя научная жизнь страны и была связана с древними центрами образования Оксфордом и Кембриджем, но связь эта носила довольно неопределенный характер. Такая или почти такая же картина наблюдалась и во Франции, где Великая революция в числе многих других исторически сложившихся институтов разрушила и все старые университеты. То, что пришло им на смену в эпоху Наполеона, уже не имело глубоких корней, восходящих к традициям средневековых университетов, традициям, которые и по сей день сохраняются в Англии и Германии. Не слишком греша против истины, можно сказать, что ведущие умы Англии и Франции находились вне университетов, а в Германии сосредоточивались в их стенах. Соответственно университеты в Германии оказывали более существенное влияние на жизнь нации. Если сегодня сочетание преподавания с занятиями наукой в немецких университетах уже не выглядит столь специфической особенностью, как несколько десятилетий назад, объясняется это просто тем, что в других странах идет аналогичный процесс. В качестве примера приведу американскую высшую школу (graduate school).

Невозможно понять, что такое немецкий университет, не обратившись к его истории. Как и у большинства других европейских университетов, традиции университетов в Германии восходят к Парижскому университету, возникшему в последней четверти XII в. Привилегии средневекового университета определялись папской буллой; церковь, и только она одна, занималась всеми вопросами образования. Лишь позднее император и монархи отдельных государств также стали выступать в качестве представителей римского права, в рамках которого существовали университеты. Университет был, по существу, самоуправляющейся корпорацией с собственной юрисдикцией, корпорацией образованных людей, профессоров и студентов, которые вместе жили в колледжах. Они выбирали на определенный срок ректора и совет университета; первоначально ректор не обязательно должен был быть профессором — им мог стать и студент. Преподаватели были разделены на четыре факультета: богословский, юридический, медицинский и *facultas artium* — "факультет свободных искусств"; студенты объединялись в землячества. Преподавание велось в форме лекций и диспутов. Обучение на факультете свободных искусств носило подготовительный характер; в течение трех или четырех лет студенты получали знания по основным наукам: логике, физике, математике (включая астрономию), психологии, этике и политике в соответствии с Аристотелем, Евклидом, Птолемеем. По окончании факультета студенты получали степени бакалавра и магистра свободных искусств и переходили на один из трех основных факультетов, дающих более специальное образование. Образование и ученые степени, полученные в средневековых университетах, признава-

лись во всех странах христианского мира безотносительно к национальным границам. Полностью господствовала *устоявшаяся система* догм, учений и верований относительно Бога и мира: *истина* считалось *данной раз и навсегда*, и ее следовало передавать из поколения в поколение.

Современные германские университеты унаследовали многие черты своих средневековых предшественников, в частности, деление на четыре факультета. Но последний факультет — свободных искусств, который называется теперь философским, — в первой половине XVIII в. полностью изменил свою сущность и значение. Реформация и порожденный религиозными войнами неприглядный принцип *hujus regio ejus religio* — религия монарха определяет религию его подданных — лишили университеты их универсальности; они стали местными и, продолжая сохранять характер церковных учреждений, оказались связанными с различными вероисповеданиями. На университеты легла унылая печать богословской ортодоксальности различного толка. Однако следствием происходившего в XVII—XVIII вв. процесса секуляризации стал переход власти над университетом из рук господствующей церкви в руки государства или монарха. Начиная с этого времени немецкие университеты становятся государственным институтом. Однако сейчас нас интересует совсем не этот факт политического развития. В начале XVIII в. именно в Германии произошли такие изменения в интеллектуальной жизни, которые положили начало типично немецкому явлению — соединению преподавания с научными исследованиями. Под влиянием философии Лейбница и Христиана Вольфа, а также при личном содействии самого Вольфа философский факультет Прусского университета в Галле стал центром широких исследований в области физических наук, математики, гуманитарных наук, истории и философии. В то время как три других факультета продолжали выполнять задачи прежде всего профессиональной подготовки, выпуская священников, врачей, судей и адвокатов, философский факультет перестал носить подготовительный характер. От роли подчиненного он перешел к роли ведущего, стал центром проведения главных научных исследований и источником знаний, на которых базировались все профессии, представленные в университете. Самостоятельные исследования и обучение их проведению стали теперь его основной задачей. Вскоре король Англии Георг II, который был одновременно и правителем Ганновера, основал университет Георга Августа в Гёттингене; этот университет с самого начала стал соперничать с университетом в Галле в осуществлении той же линии. Мало-помалу под влиянием философского факультета стремление к самостоятельным научным исследованиям распространилось и на другие факультеты. Истина становится не чем-то раз и навсегда данным, но вещью, которую надлежит *искать*, а университетский преподаватель вместо обучения студентов мудрости, почерпнутой из книг, начинает учить их искусству открывать новые истины. Германские университеты, в особенности университеты в Галле и Гёттингене, могут гордиться тем, что именно они положили начало этому движению и впервые провозгласили принцип *libertas philosophandi* — свободы научного творчества, преподавания и обучения. После революции, произведенной Вольфом,

из немецких университетов начинают исчезать учебники; и сейчас, по прошествии более чем 200 лет, в нашей американской высшей школе учебники все еще являются одной из наиболее серьезных помех на пути прогресса. Лекции по-прежнему остаются основной формой преподавания, что же касается диспутов, то они заменяются семинарами, цель которых — вовлечь студентов в научные занятия и обучить их исследовательской работе. На семинаре студенту отводится роль активного партнера, и возникает живой контакт между преподавателем и студентом, в результате которого обе стороны становятся одновременно и дающими и получающими.

Приняв рационалистическую философию Вольфа, германские университеты завоевали ведущее место в интеллектуальной жизни нации. Философия Канта, а затем труды романтиков — от Фихте до Гегеля — сыграли впоследствии аналогичную роль. Во Франции и Англии, напротив, университеты оказались неспособными воспринять новые веяния в философии и остались в плену старых догм. Влияние философии внесло существенные изменения в религиозный дух Германии: конфликт между выполнением традиционных религиозных установлений и грубым, чисто негативным атеизмом, который имеет место в вашей стране, был там совершенно неизвестен (по крайней мере в интеллектуальной среде). Впрочем, должен сразу сказать, что ни храм, ни стадион не является составной частью германского университета.

Дело, начатое в Галле и Гёттингене, было завершено Берлинским университетом, основанным в 1810 г. на глазах наполеоновской армии, оккупировавшей Германию. Это было время полного политического застоя в Германии, но вместе с тем и расцвета в области культуры — в литературе и философии: достаточно назвать имена Канта, Гёте и Шиллера. Проект нового университета был разработан Вильгельмом фон Гумбольдтом. Он и его брат Александр были великими учеными в своих областях; вместе с тем братья были дальновидными и весьма влиятельными государственными деятелями либерального толка — благородными натурами типа Джефферсона, которые по счастливому стечению обстоятельств принадлежали к правящему классу. В Берлине их поддерживали философы — Фихте, Шлейермахер и Гегель. "С открытием Берлинского университета, — пишет д-р Флекснер, — в старые мехи влили новое вино. . . Никогда прежде, да и впоследствии, не удавалось преобразовать старые институты в соответствии с заданной идеей". Позвольте мне привести два высказывания из меморандума Гумбольдта. Гумбольдт предлагает объединить общее и специальное образование, а также преподавание и научные исследования. "Наука, — говорит он, — вещь фундаментальная, и если она чиста, то ею будут заниматься искренне и подобающим образом, невзирая на отдельные заблуждения. *Уединение и свобода* — вот два принципа, господствующих в ее царстве". "*Уединение и свобода*" — хорошо сказано. И далее, когда Гумбольдт выступает за организацию научных исследований непосредственно в университетах вместо того, чтобы оставлять их всецело в ведении академий, он говорит: "Лекция, читаемая без каких-либо помех или ограничений перед аудиторией, в которой всегда найдется достаточное число самостоятельно мыслящих людей, может быть таким же источником

вдохновения для творца, как тишина уединения или свободные контакты с коллегами в академической среде". Берлинский университет стал образцом сначала для других университетов Пруссии, а затем и всей Германии. Смею надеяться, что в Германии после ее нынешнего упадка еще появятся дальновидные люди масштаба Гумбольдта и что союзники позволят этим людям начать работу по духовному возрождению нации, как это сделал Наполеон⁵.

Подводя итоги, я могу сказать, что германские университеты выполняют четыре связанные между собой основные функции: (1) дают общенаучное образование, передавая молодому поколению культурное и интеллектуальное наследие в наиболее зрелом и чистом виде; (2) дают специальное образование, выпуская священников, судей и адвокатов, врачей, учителей средней школы и работников высших органов государственного аппарата (в частности, философский факультет готовит учителей средней школы); (3) проводят научные исследования; (4) прививают навыки самостоятельной исследовательской деятельности. Функции (3) и (4) считаются наиболее важными, в особенности на философском факультете. Профессор немецкого университета считает себя прежде всего ученым. Его репутация определяется его научным талантом. Паульсен пишет: "Филолог, историк, математик или физик читает свои лекции так, как если бы его аудитория состояла исключительно из научных работников или профессоров; он игнорирует тот факт, что на самом деле большинство его слушателей составляют студенты, готовящие себя для чисто практической деятельности — на поприще школьного учителя; впрочем, быть может, напротив, он отдает себе в этом отчет, но полагает при этом, что самым ценным достоинством учителя должно быть настоящее научное образование". Так оно и было: из всех обширных и глубоких знаний по математике, которые студент получал в университете, лишь незначительная часть была нужна ему как учителю средней школы. Поэтому-то некоторые подвергали критике данную систему, и среди них — Карл Генрих Беккер, занимавший в республиканском правительстве пост министра просвещения Пруссии. Он считал, что в результате такой ориентации на углубленные знания у студентов философского факультета складываются неправильные профессиональные идеалы, которые впоследствии вызывают у них чувство неудовлетворенности своей профессией.

В книге Харта, о которой я упоминал выше, говорится: "В представлении немцев идея университета включает цель и условия; целью является Wissenschaft — знание в самом возвышенном смысле этого слова, т.е. ревностный, систематический, самостоятельный поиск истины во всех ее формах, безотносительно к какому бы то ни было ее утилитарному использованию. Условиями являются *Lehrfreiheit* и *Lernfreiheit*⁶. *Lehrfreiheit* означает право преподавателя учить тому, чему он пожелает, и так, как он того пожелает. *Lernfreiheit* предполагает освобождение студентов от каких-либо обязательных учебных предписаний — всевозможных упражнений, контрольных опросов, проверочных работ и т.п."

Д-р Флекснер подверг обстоятельной критике американские колледжи и университеты за их стремление приносить непосредственную практичес-

кую пользу обществу, что приводит к необходимости заниматься вещами, несовместимыми со статусом университета. Так, например, в Колумбийском университете наряду с курсом лекций по истории философии вниманию студентов предлагается курс лекций о рациональной постановке дела владельцем аптеки-магазина в сельской местности. В Германии любят создавать учебные заведения с четко ограниченной специализацией: существуют технические и сельскохозяйственные, торговые и лесные, геологические и музыкальные *Hochschulen*⁷, а также педагогические училища и академии. Но университеты — это нечто совсем иное. Их цель, по словам Харта, — давать научные знания на самом высоком уровне. В них нет спорта. Нет и учительских колледжей или факультетов подготовки управляющих отелей (одно из недавних нововведений в Корнельском университете).

Передо мной учебные планы германских университетов на зимний семестр 1932—1933 гг. Возьмите любой университет, например Гёттингенский, и вы поймете, что я имею в виду. К учебной работе привлекается дополнительно лишь несколько преподавателей; им доверены вводные занятия по греческому языку и рисованию, музыке, стенографии и фехтованию. Штатные же преподаватели и профессора ведут многочисленные курсы, о содержании которых можно судить по их названиям: богословие Нового Завета, римское гражданское право, общая патология, история государств Средиземноморья до Помпея⁸, философия эпохи эллинизма, теория электричества и магнетизма, коллоидная химия, дифференциальные уравнения в частных производных. Ядро цикла математических дисциплин составляет ряд систематических курсов повышенного уровня, охватывающих значительную часть математики и образующих основу подготовки любого математика. Такие курсы не могли бы быть предложены в американском колледже в силу их слишком высокого уровня; в весьма ограниченном объеме встречаются они и в программе наших аспирантов, которые имеют слишком узкую специализацию лишь по тому предмету, по которому впоследствии собираются вести свою исследовательскую работу. Впрочем, в пользу германской системы университетского образования можно было бы сказать и многое другое.

В германских университетах существовали три формы учебной работы: лекции, читаемые перед большой аудиторией, практические занятия в классе или лаборатории (с участием ассистентов) и семинарские занятия, преследующие цель приобщить студентов к научно-исследовательской работе. Лекционные курсы по основным предметам собирали многочисленную аудиторию. Лекции по высшей алгебре профессора математики Берлинского университета слушало 400—500 студентов. Столь большое число слушателей делало лекционную систему весьма экономной. Но помимо этого профессора собирали вокруг себя небольшие группы студентов, увлеченных предметом; так возникали школы и появлялись ученики, которые со временем приходили на смену старым профессорам, принося с собой новые идеи. В целом немецкие профессора гораздо больше общались со студентами и молодыми учеными, чем их французские коллеги. Большинство ведущих американских математиков моего поколения прошло

школу Давида Гильберта в Гёттингенском университете. Все они с благоговением вспоминают время, проведенное в Гёттингене.

Еще несколько слов о *Lernfreiheit* немецких студентов. Поступив в университет, студент сам решает, что он собирается изучать. На старших курсах он учится без всяких зачетов и экзаменов, устных или письменных. В соответствии со своими наклонностями студент выбирает преподавателей, лекции которых он собирается слушать, практические занятия и семинары, в работе которых собирается участвовать. Обычно он два или три раза переходит из университета в университет, причем стремление попасть в тот или иной из них чаще всего обусловлено тем, насколько популярен преподаватель или ученый, у которого он намерен учиться. Студент может следовать советам профессора, но может и пренебречь ими на свой страх и риск. Университет ни в коей мере не вмешивается в частную жизнь студентов. Не существует чего-либо подобного дисциплине. Если студенту не нравится данный профессор, то он может слушать лекции другого; нередко студент может выбирать между несколькими преподавателями, ведущими один и тот же предмет. Если в какой-то день студент вообще не расположен идти в университет, то он может и не приходить — никто за этим не следит. Студенты живут не в общежитиях, расположенных на территории университета, а снимают комнату в городе и столуются либо дома, либо в ресторане. В таком образе жизни нет ничего общего ни с укладом средневековых буршей, ни с английскими или американскими колледжами. Студенты не платят за обучение в целом, но вносят умеренные взносы за каждый прослушанный ими курс лекций; последнее обстоятельство служит единственным внешним стимулом, побуждающим студента не прерывать начатый курс — ведь он сам выбрал его и уплатил за это деньги. Студенту дается от двух до четырех недель на размышление, прежде чем он запишется на тот или иной курс и внесет плату; в это время он может *hospitieren*, т.е. ему предоставляется право посещать различные лекции с целью выбрать для себя, нравится ли ему преподаватель; если не нравится, то студент не записывается на читаемый им курс и больше не посещает его лекций.

Эта на первый взгляд ничем не ограниченная свобода студента в действительности существенно скована необходимостью сдавать *государственный экзамен* в конце университетского обучения, разумеется, при условии, что студент намерен в дальнейшем продолжать научную карьеру или поступить на государственную службу. Именно *государство* экзаменует будущих врачей, судей, юристов, школьных учителей, священников и чиновников гражданских ведомств или по крайней мере осуществляет верховный надзор над экзаменами. Например, комиссия, принимающая экзамены на звание школьного учителя, назначается государством из числа профессоров университета и школьных работников; экзамен обычно происходит в стенах одного из университетов. Экзаменационные требования сформулированы весьма общо; экзамен охватывает определенные области знаний, а не те конкретные курсы лекций, которые читал в данном университете тот или иной член экзаменационной комиссии. Одним из условий допуска к экзамену является требование, чтобы соискатель в течение

определенного времени — трех или четырех лет — проучился в университете. Ясно, что это требование повышает значение университетов, составляя привилегию, которая, возможно, более важна, чем все остальные их привилегии вместе взятые; но экзамены как таковые не являются заботой университета.

В то время как студенты немецких университетов пользовались столь полной свободой, которая делала их ответственными только перед самим собой, в средних школах, которые предшествуют университету, существовали твердые учебные программы, исключавшие какой-либо выбор, и царил строгая дисциплина. Школа строилась на представлении о том, что национальная культура, которую, как предполагалось, она должна внедрять в сознание молодых людей, — это нечто цельное и что оно может быть разрушено, если позволять ученикам по собственной прихоти таскать изюминки из пирога. Однако школьник (или его родители) мог выбрать один из трех типов школ: гимназию, где основной упор делался на преподавание классических языков — латыни и греческого; реальное училище (*Oberrealschule*), где основное внимание уделялось естественным наукам и живым языкам; и, наконец, учебное заведение промежуточного типа — реальную гимназию. Сдав выпускной экзамен в любой из школ этих трех типов, учащийся получал право на зачисление в университет. Из сказанного следует, что переход из школы в университет означал резкий перелом: на смену строгой дисциплине и подчинению приходила полная свобода действий и внутренняя ответственность. Несомненно, такого рода переход таит в себе большую опасность для молодых людей.

В самом деле, опасности, которыми чревата система университетского образования в Германии, настолько очевидны, что останавливаться на них специально нет необходимости. Возможно, слишком много средних студентов оказалось за бортом или извлекло для себя ничтожно мало пользы; возможно, требования были слишком высоки, и в них следовало внести кое-какие коррективы с тем, чтобы расширить круг лиц, стремящихся попасть в университет и получающих на это право. С 1840 по 1940 гг. число студентов возросло в пять раз, в то время как население увеличилось не более чем вдвое⁹. Однако университетская система была по-настоящему хороша только для способных; что касается нужд науки и научных исследований, то у нее было одно большое достоинство: *лиц, действительно предназначенных для занятий наукой, можно было выбирать из обширного круга молодых людей*, которые в годы учения пребывали в атмосфере научно-исследовательского поиска и, таким образом, имели возможность проявить себя. Я полагаю, что именно в этом кроется одна из главных причин успеха и высокого уровня научных исследований в Германии.

Свободе выбора немецкого студента — его *Lernfreiheit* — сопутствует *Lehrfreiheit* профессора. Прочитирую вновь д-ра Флекснера: "В Германии преподаватель университета беспрепятственно читает свой собственный курс. Он полностью свободен в выборе темы, способа изложения, формы семинарских занятий; никто не вмешивается в его частную жизнь. Ни факультет, ни министерство не осуществляет над ним никакого контроля;

он обладает достоинством человека, который, занимая высокое положение в интеллектуальной сфере, никому не подвластен". А Харт пишет: "Университет — сам себе закон, каждый профессор — сам себе закон, каждый студент вращается вокруг своей оси со своей собственной скоростью". Мое назначение в Гёттинген означало для меня принятие единственного обязательства: читать раз в семестр курс по собственному выбору, а раз в два года — курс публичных лекций. Таким образом, я мог бы ограничиться одной-двумя лекциями в неделю; полагаю, что недельная нагрузка в 6—9 часов лекций и практических занятий считалась бы вполне нормальной. Для того чтобы как-то разумно скоординировать предлагаемые студентам программы занятий по математике и физике, в Гёттингене существовал обычай: преподаватели в неформальном порядке собирались вместе и один за другим, по старшинству (определяемому стажем работы в университете) рассказывали своим коллегам о своих планах на предстоящий семестр; затем в ходе товарищеского обсуждения в эти планы вносились необходимые поправки. Различия в административном положении и возрасте на таких встречах не имели никакого значения; декан факультета не председательствовал и никак не влиял на присутствующих с тем, чтобы было принято то или иное решение.

В этой связи нельзя не упомянуть о таком институте как *приват-доцентура*. В Германии университетская карьера начиналась с должности приват-доцента, аналогичной должности преподавателя (*instructor*) в американских университетах. После сдачи факультетского экзамена приват-доцент получал *venia legendi* — право чтения лекций. Таким образом, государственный экзамен открывал дорогу к любой научной карьере, *но с одним весьма существенным ограничением*: ключ к карьере университетского преподавателя находился в руках самого университета; в этом деле отсутствовал всякий контроль со стороны государства или каких-либо административных органов вне университета. Поэтому в отличие от должности профессора приват-доцент не назначается государством и не получает жалованья. Его содержание обеспечивается денежными взносами студентов, посещающих его лекции. Он имеет право читать лекции, но не имеет каких-либо обязательств. Это позволяет ему посвящать все свое время и энергию исследовательской работе, ограничиваясь, допустим, двумя-тремя лекциями в неделю на тему, которая его самого особенно интересует. Поскольку такие темы, как правило, слишком специальные и не нужны для сдачи государственных экзаменов, его лекции, как правило, посещает весьма ограниченное число студентов, однако это те студенты, которые сами питают глубокий интерес к данному частному предмету. В средневековых университетах вы получали право на чтение лекций, став магистром; иногда магистру даже вменялось в обязанность преподавать на факультете свободных искусств без всякого денежного вознаграждения. Такие магистры, обычно состоявшие студентами одного из трех высших факультетов, составляли совсем иную категорию преподавателей, чем профессора. Они-то и являются прямыми предшественниками немецких приват-доцентов.

Вы видите, в чем состоит положительная сторона приват-доцентуры: она позволяет ученому в молодые годы нести лишь незначительное бремя преподавательской работы. Он полностью сам себе хозяин. Он может повышать свой научный уровень, развивать собственные идеи и в небольшом кругу студентов, увлеченных его проблематикой и его личностью, отрабатывать навыки преподавательского искусства. Как пишет д-р Флекснер, приват-доцент воплощает в себе ученого "в наиболее полной и чистой форме — весьма почетная начальная ступень, ведущая к весьма почетной карьере". Харт называет приват-доцента "живительной кровью университета". Однако вам хорошо видна и обратная сторона медали — материальная необеспеченность приват-доцента. В момент получения этого звания вам неизвестно, сколь долго вы пробудете приват-доцентом: два года или пятнадцать лет. Некоторые решают свои финансовые проблемы, вступая в брак с представительницей какого-нибудь богатого семейства; этот путь вполне возможен благодаря высокому социальному престижу университетского преподавателя. Имеются и другие, менее предосудительные способы решения этой проблемы. Профессора Гёттингенского университета следили за тем, чтобы каждый приват-доцент время от времени читал какой-нибудь большой курс, например по анализу; это позволяло приват-доценту заработать за год сумму, обеспечивавшую его на три последующих года. Иногда — особенно часто так бывало во времена республики, когда инфляция сводила на нет целые состояния, — приват-доцентов привлекали к работе в качестве ассистентов; на них возлагалось — также за соответствующее вознаграждение *Lehrauftrag* — задание по преподаванию специальных предметов. Но, разумеется, все компромиссы такого рода ограничивали свободу.

Итак, я рассказал вам о сочетании научной деятельности с преподаванием и о свободе выбора для преподавателей и студентов; перехожу теперь к третьему аспекту — к вопросу о том, в какой мере германские университеты были автономными. Из числа своих профессоров университет избирал ректора и совет, обычно сроком на один год. Я считаю немаловажным то обстоятельство, что на всех официальных церемониях, торжествах, приемах высоких гостей и т.п. университет был представлен ректором, т.е. одним из представителей его ученого сословия, а не каким-нибудь президентом или официальным лицом, состоящим на государственной службе. Факультеты подобным же образом избирали декана из числа своих членов сроком на один или два года. Преподаватели, организованные по факультетам, сами, без вмешательства администрации, решали большинство вопросов, связанных с университетской жизнью. Мне никогда не доводилось видеть более налаженного и более демократичного административного механизма, чем тот, который существовал на факультете математики и естественных наук Гёттингенского университета, членом которого я состоял в 1930—1933 гг. Факультет также присуждал ученые степени доктора и, что еще важнее, присваивал право чтения лекций *venia legendi* — приват-доцентам.

Вместе с тем университеты находились на государственном обеспечении: министерство просвещения распоряжалось их фондами, решало

вопрос о создании новых кафедр и имело решающий голос при назначении новых профессоров на уже существующие кафедры. В последнем случае процедура состоит в следующем. Факультет предлагает три кандидатуры — primo, secundo, tertio loco¹⁰. Эти предложения не являются обязательными для министра; иногда он их отвергает, иногда возвращает факультету со своими возражениями и предлагает представить новые рекомендации. Но, как правило, министр отскакивал на одной из кандидатур, предложенных факультетом, причем чаще всего — на кандидате primo loco. Из статистических данных, которыми я располагаю, следует, что за период 1882—1902 гг. на юридическом факультете было произведено 125 назначений в соответствии с рекомендацией факультета, 15 раз профессорами назначались без соответствующих рекомендаций или вопреки им. По поводу отношений между университетом и государством д-р Флекснер пишет: "Если учесть ситуацию, сложившуюся в 1914 г., то немцы с их государственной монополией, в рамках которой университет был *равноправным юридическим лицом*, поступали разумнее, чем английские или американские организации в своих странах; германские университеты находились на более высоком уровне, были почти полностью автономными, пользовались большим авторитетом и оказывали более широкое влияние". По мнению Гумбольдта, государство не имеет иных обязанностей по отношению к университету кроме материально-финансового обеспечения и сотрудничества при отборе и назначении нужных преподавателей. "Государство должно иметь в виду, — пишет он, — что оно не выполняет и не может выполнять его (университета) функции и что всякое вмешательство будет только помехой". Вплоть до прихода к власти нацистов германское государство в общем следовало этому совету. Влияние государства на внутреннюю жизнь университетов было несравненно меньшим, чем влияние ректора или попечительского совета в американских высших учебных заведениях.

Существовало две категории профессоров — ординарные и экстраординарные, но число последних было значительно меньше. Таким образом, по существу было только две категории: приват-доценты и профессора. Повышение в должности в стенах одного и того же университета бывало редко, и преподаватель на него не рассчитывал. Приват-доцент в Гёттингене ожидал приглашения на должность профессора где-нибудь в Гейдельберге, а профессор в Гейдельберге ожидал приглашения на должность профессора в каком-нибудь другом университете, играющем более важную роль в избранной им области. Сбудутся или нет ожидания преподавателей, зависело почти исключительно от их научной репутации среди коллег во всех немецкоязычных университетах. Результатом было состязание в масштабах всей германской нации: каждый университет стремился привлечь лучших из числа тех ученых, на согласие которых он мог рассчитывать, чтобы повысить свой престиж и стать более притягательным для студентов. В этом всеобщем обмене участвуют также и австрийские и швейцарские университеты, не отличающиеся по своей организации от университетов в Германии. Возьмите мой собственный пример: три с половиной года я был приват-доцентом в Гёттингене, затем профессором в Цюрихе; там я получил

приглашения из университетов Карлсруэ, Бреславля, Гёттингена, Берлина, Амстердама и Лейпцига — все эти приглашения я отклонил — и, наконец, повторное приглашение из Гёттингена.

Приват-доцент живет только на взносы студентов за право посещения его лекций. Доход профессора складывается из двух частей: из твердого оклада, выплачиваемого государством, и взносов (или определенной их части), вносимых теми студентами, которые посещают его лекции. Во всяком случае таково общее положение, от которого были лишь некоторые отклонения. Назначение на должность было пожизненным, и даже когда профессор уходил в отставку и переставал читать лекции, его оклад сохранялся. По закону государство не имело право лишить профессора его звания или оклада, уволить его или перевести на другое место. Этот порядок служит свидетельством того, что университетские профессора имели чрезвычайно высокий престиж.

Итак, если сравнить современные германские университеты с аналогичными средневековыми учреждениями, то можно выделить следующие их характерные черты: в них сохранилось деление на четыре факультета, хотя структура и назначение философского факультета коренным образом изменились; сохранилась значительная автономия университетов как привилегированных корпораций — несмотря на то, что они стали государственными учреждениями; был положен конец традиции (продолжающей существовать в Англии) совместного проживания в колледже студентов или студентов и преподавателей. С 1810 г. германские университеты взяли твердый курс на объединение научной и преподавательской деятельности. Все это в очень большой мере произошло благодаря влиянию философской мысли.

Сказанное может создать у вас слишком идиллическое представление. Я допускаю, что описывая, так сказать, идеальный германский университет, опускаю обычные недостатки, присущие человеческим установлениям, которые, как и в любом деле, здесь имелись. Мировое общественное мнение, если не считать тех, кто был проникнут негативизмом, порожденным губительной политикой германского государства, единодушно разделяло ту высокую оценку, которую я здесь дал. Я мог бы привести много высказываний авторитетных американцев и англичан, с похвалой отзывавшихся о немецких университетах, — начиная с Джорджа Банкрофта, писавшего в 1820 г. ректору Гарвардского университета Каркленду: "Ни одно правительство не умеет так хорошо организовывать университеты и высшие школы, как прусское", и кончая заключением д-ра Флекснера, относящимся к 1930 г.: "Как хорошо продуманный институт, выполняющий вполне определенные и совсем непростые задачи, германский университет представляет собой лучшее из того, что когда-либо создавалось в любой другой стране". От самих немцев, в особенности от тех, кто занимал ответственные посты, вы могли бы услышать более критические высказывания. Так, было распространено мнение, что студенческая жизнь в университетах Англии или Америки носит более здоровый характер. Примечательно, что если Флекснер с удовлетворением отмечает тенденцию развития наших американских высших учебных заведений в направлении, сближаю-

щем их с немецким образцом, то прусский министр просвещения Беккер в своей брошюре, изданной в 1919 г., предлагал радикальные реформы, призванные сделать германские университеты хотя бы частично похожими на американские.

Думаю, нет сомнения в том, что именно организация университетского образования в том виде, как она была разработана Гумбольдтом, явилась одним из факторов, обусловивших в свое время тот высокий авторитет, который *немецкое образование и наука* снискали во всем мире. Ванситарт в известной книге "Уроки моей жизни" посвятил главу "Испытание мыльного пузыря на прочность" обоснованию той мысли, что значение германской науки чрезмерно преувеличено. Его аргументы, как я мог бы показать вам на многочисленных примерах, часто весьма шатки, чтобы не сказать недобросовестны. Француз Фернан Ло в своей книге "Высшее образование во Франции" писал в 1892 г.: "Господство немецкой науки во всех без исключения областях признается ныне всеми народами. Главенствующую роль Германии в науке можно сравнить с гегемонией Англии в торговле или на море. Возможно, эта роль даже несколько больше". Любопытно высказывание испанского философа Ортеги-и-Гасета в его книге 1930 г. "Миссия университета" (Английский перевод вышел в 1944 г.): "По стечению обстоятельств — одновременно счастливому и несчастливому — нацией, которая бесспорно занимает почетное место в авангарде науки, является германская нация. В дополнение к изумительному таланту и предрасположению к научным занятиям у немцев есть еще одна врожденная черта, которую трудно искоренить: они по своей натуре обладают невозмутимым складом ума и склонностью к педантизму". Приведенные высказывания находятся в явном противоречии друг с другом, но, по-видимому, Ло и Ортега знают предмет лучше, чем Ванситарт.

Проанализируем некоторые факты. Немцы очень сильны в том, что они называют *Geisteswissenschaften*, т.е. в науках о духе и человеке. Нам придется вспомнить афинянина Фукидида, чтобы найти историка, сравнимого по значимости с Ранке; не слишком уступает ему и Момзен. Метод критического анализа в языкознании, особенно в области классической филологии, был разработан почти исключительно немцами — Ф.А. Вольфом, Бёком, Лахманом, братьями Гримм, Боппом (основателем сравнительного языкознания) и другими. Германия дала миру целый ряд выдающихся философов; упомяну хотя бы Майстера Экхарта, Лейбница, Канта, Гегеля. Во второй половине XIX в. Германии принадлежало ведущее место в области *медицины*, а вплоть до первой мировой войны — и в области *химии*.

Однако я лучше ограничусь своей собственной областью — математикой, а также смежной с ней наукой — физикой. В математике в качестве *Princeps Mathematicorum*¹¹ единодушно признан Карл Фридрих Гаусс, работавший в Гёттингене в первой половине XIX в. Но я спешу добавить, что общая картина развития математики в Германии была не столь уж впечатляющей. Германия никогда не знала такого взрыва математичес-

кой мысли, какой произошел во Франции в конце XVIII — начале XIX вв. Году в 1908 среди немецких студентов-математиков господствовало мнение, что Франция и Германия были ведущими странами в нашей области знания, причем Франция была немного впереди. После 1918 г. она несколько отстала от нас, но потом снова догнана. Тем временем на авансцену выдвинулась Америка; больших успехов достигла и Россия. Есть, правда, одна область математики, ее, так сказать, святая святых, в которой Германия превосходит все другие страны, — это теория чисел. То же верно и в отношении оснований математики, тесно связанных с проблемой бесконечного. Все выдающиеся математики, работавшие в этой области, возникшей в 1890 г., — Дедекин, Кантор, Гильберт, Гёдель — являются немцами; исключение составляет лишь голландец Брауэр.

Что касается физики, то здесь Германия не может сравниться с Англией, давшей миру таких звезд первой величины, как Ньютон, Фарадей, Максвелл, лорд Резерфорд. Гельмгольца можно, пожалуй, поставить в один ряд с лордом Кельвином. Однако и здесь нашлось одно важное направление, в котором Германия далеко обогнала другие страны, в особенности в XX в., — это теоретическая физика. Есть Эйнштейн. Правда, его пример показывает бессмысленность деления людей по национальному признаку; но все же Эйнштейн родился в Германии, и, начав свою научную деятельность в Швейцарии, он на протяжении почти двадцати лет состоял членом Берлинской академии наук. Немецким физикам принадлежит немалая роль в разработке того нового направления атомной физики, которое известно под названием квантовой механики: начиная с введения Максом Планком в 1900 г. универсального кванта действия и до радикального пересмотра классической физики в теоретических трудах Гейзенберга и Шрёдингера (1925—1926). Помимо квантовой механики и теории относительности, перед которыми меркнет все остальное, я могу упомянуть еще два других выдающихся события в физике, свидетелем которых мне довелось быть. Как вы знаете, рентгеновские лучи были открыты немцем Рентгеном, и не кто иной, как Макс фон Лауэ, первый применил их для изучения внутренней атомной структуры кристаллов. Разработанный им метод имеет первостепенное значение для кристаллографии и играет важную практическую роль в технике — для анализа и испытания различных материалов, металлов, волокон и т.п. Людвиг Прандтль из Гёттингенского университета стал отцом современной гидродинамики, разработав теорию пограничного слоя; благодаря этой теории мы поняли, чем вызывается сопротивление твердого тела, обтекаемого потоком воздуха или воды.

Разумеется, все успехи немецких ученых в математике и физике были достигнуты ими благодаря сотрудничеству и обмену идеями с учеными всех стран. Если исключить годы войны, то такой взаимный обмен идеями не знает государственных границ. Бессмысленно пытаться раздёрнуть единую ткань на отдельные нити и уже совсем абсурдно говорить о "немецкой математике" или "немецкой физике", как это делали нацистские фанатики. На самом деле не может быть ничего более интернационального, чем

математика и естественные науки. Математическое понятие, ясное американскому математику, утверждение, в истинности которого он убедился, теория, признанная им логически непротиворечивой, остаются таковыми для китайского или индийского математика, и *vice versa*. Это банальное замечание. Существуют индивидуальные различия в стиле, но нет различий в существе дела, и ничто не обусловлено какими бы то ни было национальными или расовыми различиями^{1 2}.

Но вернемся к вопросам организации!

Университеты в Германии не были единственным местом, где осуществлялось преподавание и велись научные исследования. Кроме них, начиная с XIX в., стали появляться *Technische Hochschulen* — высшие технические школы, или училища, по своему характеру не слишком отличающиеся от наших американских технологических институтов. Можно, в общем, считать исторической случайностью, что специальность инженера не оказалась представленной в университетах в качестве еще одного, пятого факультета и для нее были созданы самостоятельные высшие учебные заведения. Ведь в конце концов инженерное дело находится к физике почти в таком же отношении, как медицина к биологии. Я полагаю, что решающее значение здесь имел пример наполеоновской *École Polytechnique* — Политехнической школы. Швейцарское Федеральное высшее техническое училище было первым высшим учебным заведением, созданным по образцу *École Polytechnique* в стране, где все главные университеты организованы по принципу германских университетов, и поэтому опыт Цюрихской высшей школы мог легко быть перенесен в Германию. Таким образом, немецкую высшую техническую школу надлежит рассматривать как своего рода гибрид *École Polytechnique* и германского университета.

Помимо сказанного существуют еще академии. Академии, или научные общества, впервые появились в Италии в эпоху Возрождения. Процветающие и поныне *Academia dei Lincei* — Академия рысьеглазых в Риме, *Académie française* — Французская академия и *Académie des Sciences* — Академия наук в Париже, а также *London Royal Society* — Лондонское Королевское общество появились в XVII столетии. Германия в этом отношении несколько отстала (следствие Тридцатилетней войны!). Берлинская академия была основана в 1700 г. Лейбницем. Другие германские академии — в Гёттингене, Лейпциге, Гейдельберге и Мюнхене, а также академии в Турине, Стокгольме и Петербурге — отпрыски Берлинской академии. В эпоху, когда свободные научные исследования еще не внедрились в несколько одряхлевшие университеты, когда не было еще научных журналов, идеи выдвигались и распространялись главным образом благодаря личной переписке между несколькими большими европейскими учеными. Лейбниц намеревался покрыть Европу сетью академий — центров научных исследований, которые, как он надеялся, станут мощными объединениями, несущими народам просвещение и мир. Он мечтал о союзе европейских наций, основанном на восстановленном единстве христианской церкви и общем стремлении всех людей к истине. В настоящее время германские академии находятся, так сказать, в тени университетов и

играют второстепенную роль. Как и аналогичные учреждения в других странах, они решают вполне определенные и необходимейшие задачи быстрой публикации результатов научных исследований и создания таких коллективных трудов, какими являются, например, "Tesaurus lingua latinae"¹³ или "Математическая энциклопедия". Поскольку германские академии не имеют каких-либо специфических особенностей, этих кратких сведений о них достаточно.

Заметной вехой в новейшем развитии научных исследований в Германии стало основание императором Вильгельмом II в 1911 г. Kaiser Wilhelm Gesellschaft — Общества кайзера Вильгельма, призванного способствовать развитию науки; в задачу Общества входила организация самостоятельных научных институтов. Кайзер побудил лидеров германской промышленности путем пожертвований и займов вложить крупные суммы в субсидирование научных исследований. В этом отчетливо прослеживается идея международного соревнования в области науки и замысел усиления роли Германии. Общество было основано как частная организация, и только позднее, во времена Республики, когда ресурсы его сильно истощились, государство взяло на себя часть расходов. В основу был положен разумный принцип: каждый институт создается с ориентацией на одно лицо — выдающегося ученого, способности которого подтверждены его достижениями. Первым президентом Общества кайзера Вильгельма был, как ни странно, теолог Гарнак. Его преемником стал физик-теоретик Планк. Оба они были высокообразованными выдающимися деятелями, а совсем не администраторами. Создаваемые Обществом институты в определенном смысле были отклонением от прежнего принципа совмещения научных исследований и преподавания; в некоторых кругах их рассматривали как символ превосходства практицизма и специализации над общей культурой. Существовали институты кайзера Вильгельма по физике, гидродинамике, химии, по исследованиям свойств металлов, каменного угля и волокон, по биологии, антропологии, по изучению мозга, туберкулезу, психиатрии, международному и гражданскому праву различных стран и т.д. Открытие распада атома урана, лежащее в основе создания атомной бомбы, было совершено в Институте кайзера Вильгельма по химии. В 1933 г. научный выход всех этих институтов — числом более 30 — стал сопоставим с научными результатами, полученными в университетах; более того, наметившаяся тенденция вела к тому, что институты могут даже превзойти университеты в этом отношении. Поскольку институты были в большей мере свободны от контроля государства, нацисты не смогли прибрать их к рукам так быстро, как они сделали это с университетами¹⁴. Лиза Мейтнер покинула Институт кайзера Вильгельма по химии только в 1938 г., причем, насколько я помню, не была уволена, а ушла по собственному желанию иехала в Швецию.

Продумывая план этой лекции, я решил сопоставить состояние университетского образования и науки в Германии до 1933 г. с тем печальным состоянием, в котором они оказались в период гангстерского режима нацистов. Но представляет ли это интерес сейчас? Базисная автономная струк-

тура, не претерпевавшая в своем развитии сколько-нибудь резких изменений на протяжении шести столетий, гораздо важнее тех эфемерных нововведений, которые появились в последние двенадцать катастрофических лет. Учитывая это, я ограничусь несколькими замечаниями.

Нацисты провозгласили теорию, согласно которой на смену *церковному* университету средневековья пришел *гуманитарный* университет гумбольдтовского типа, а теперь он пришел в упадок и в свою очередь должен под их, нацистов, славным руководством уступить место университету *политическому*. В соответствии с этими критериями приема в университет наряду со способностями стали политическая благонадежность, удостоверяемая партийным гауляйтером, членство в одной из нацистских организаций и отменные физические данные. Студентов обязали отбывать службу в трудовых лагерях; были введены и обязательные занятия спортом. Как выражались нацисты, ключевым в решении вопроса о приеме кандидата для них было соображение о том, "сможет ли он впоследствии, заняв какой-либо высокий пост, внести свой вклад в формирование политической, культурной и экономической жизни народа". Аналогичным образом, для преподавателей *venia legendi* стало лишь одним из необходимых условий: преподаватель должен был отбывать сборы в общественных лагерях и в специальных учебных академиях, где благодаря простой пище, физическому труду и лекциям о нацистском *Weltanschauung*¹⁵ он не мог не проникнуться героическим истинно "народным" взглядом на жизнь. В шествиях, которые нацисты устраивали во все прежние и новые, придуманные ими национальные праздники, университет должен был маршировать, как гильдия в "Мейстерзингерах"; в одной колонне шли преподаватели, студенты, служащие, должностные лица и рабочие.

Система университетского самоуправления была пересмотрена в соответствии с принципом единоначалия. Детали не представляют особого интереса. Любое решение, связанное с предоставлением права преподавать, требовало одобрения министра. В каждом университете нацистская партия была представлена ячейками в двух корпорациях, одна из которых охватывала всех преподавателей, а другая — всех студентов. Профессора могли быть уволены, отправлены на пенсию или переведены на другое место, и эта новая возможность использовалась весьма широко. По самым скромным подсчетам с 1933 по 1938 гг. по политическим и расовым мотивам было уволено от 15 до 20 процентов университетских преподавателей. *Lernfreiheit* была сильно ограничена официально установленными учебными планами. Например, в учебном плане по экономике говорится: "В течение первых двух семестров студента надлежит ознакомить с расовыми основаниями науки. Лекции по расовым и национальным вопросам, по антропологии и доисторической эпохе, по историческому развитию германского народа, в особенности за последние сто лет, составляют одно из начал в преподавании всех гуманитарных наук". Один американский наблюдатель, побывавший в Германии в 1936 г., резюмировал свои впечатления следующим образом: "Немецкие университеты, в свое время дарившие лучшие свои традиции аналогичным учреждениям в США, ныне пере-

няли самые худшие черты последних. В них чрезмерно большое внимание стали уделять спорту, утвердился идеал узкой специализации, а учебные программы унифицированы до такой степени, что это зло еще хуже, чем поклонение культу учебников". Следует добавить, что все это было поставлено на службу варварской идеологии, совершенно чуждой Америке.

Прием в университеты снизился до 60 процентов от прежнего уровня. Но это сокращение лишь отчасти было вызвано соответствующими мероприятиями, установлением квот и введением системы отборочных испытаний преимущественно политического характера. Оно объясняется также и значительной потерей престижа образования и занятий наукой при режиме, который смотрел на научную объективность как на предрассудок, относящийся к той же эпохе, что и свободная конкуренция между отдельными тружениками, предприятиями или странами. Студенты, многие из которых были ярыми нацистами, надеялись, что сбудутся их старые мечты и что они, как в средние века, снова получат равные с профессорами права в управлении университетом, будут иметь свой голос при решении вопросов, касающихся новых назначений и т.п. В первые месяцы после нацистского переворота министерство просвещения уступило давлению студентов. Но вскоре участие студентов в управлении университетом было приостановлено. В 1934 г. студенчеству преподнесли устав, наглухо закрывающий все пути к подобному вмешательству в университетские дела; в качестве главной задачи студентам предписывалось "обеспечивать неразрывные узлы, связывающие университет с народом, а также готовить поколение выпускников университета, которое имело бы глубокие корни в народе и было бы крепким духом и телом". Таким образом, нацисты предавали студентов так же, как они предавали консерваторов — своих союзников по первому кабинету министров, созданному Гитлером в бытность его канцлером, как они предавали чаяния немецких трудящихся. Студенты подчинились приказу фюрера и вернулись к учению. В своей речи на открытии зимнего семестра 1934 г. студенческий лидер Высшей технической школы в Дармштадте признал, что студенты шли по неправильному пути, и заверил, что отныне они вернутся к овладению научными знаниями, сделав это своей главной целью. Но нет худа без добра: нацисты распустили все махровые студенческие организации, общества и объединения (*Burschenschaften*), составлявшие наиболее неприглядную сторону жизни немецких студентов. Взамен были созданы "товарищеские общежития", где студенты жили, не разделяясь по принадлежности к различным организациям (однако и это нововведение потерпело позорный провал).

Следствием нацификации университетов явилось резкое падение научных работ в гуманитарных областях; психология, история, социология, экономика и т.д. стали главным образом орудием нацистской пропаганды. Иным было положение в математике, физике, химии и технических науках. Несмотря на свою расистскую и "народную" идеологию, нацисты вскоре осознали, что точные и технические науки ничем заменить нельзя.

Поэтому математические, физические и технические журналы продолжали публиковать хорошие работы, и выход научных исследований в этих областях сначала почти не уменьшился¹⁶. Понадобилось бы значительно больше времени, чтобы последствия разрушительной деятельности нацистов сказались и в точных и технических науках. Не сомневаюсь, что в конце концов упадок наступил бы и здесь. Ибо система, основанная на равновесии между авторитетом университета как сообщества независимых мыслителей и авторитетом правительства, полностью попирается тоталитарным правительством, не признающим законов и не чувствующим ответственности перед своим народом.

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ — МАТЕМАТИК, МЫСЛИТЕЛЬ, ЧЕЛОВЕК

В конце прошлого века один из посетителей оксфордского Тринити-колледжа принял участие в совместном обеде членов колледжа. Попробовав завязать обычную для оксфордцев беседу со своим визави, он услышал в ответ невнятное мычание. Обращение к соседу справа дало такой же результат. И лишь ректор колледжа рассеял недоумение: "да ведь они математики, мы никогда с ними не разговариваем".

Приводя эту историю (или, скорее, легенду) в своей лекции "Две культуры и научная революция", английский писатель Чарльз Перси Сноу вовсе не хотел лишний раз подтвердить распространенное в обществе представление о чужеродности математиков. Он имел в виду гораздо более серьезное явление — раскол культуры на две враждебные друг другу части — гуманитарную и научную (scientific), существующий и в сфере ее носителей — художественной интеллигенции и ученых. Говоря о все увеличивающейся стене непонимания и антипатии между обеими группами, Сноу приводит в качестве подтверждающего его точку зрения примера позицию английского поэта Т.С. Элиота. Увы, в этом случае его содержательная и в общем верная критика бьет мимо цели. Глубокая дружба и близость интересов связывали англичанина Томаса Элиота и немца Германа Вейля, математика, чувствовавшего себя как дома по обе стороны стены, разделившей культуру. В этом Вейль был наследником давней культурной традиции, представленной в Германии такими именами как Лейбниц, позднее Гёте (при всей его нелюбви к математике), и в первой трети нашего столетия — "золотом веке" современной физики — плеядой ее создателей Э. Шрёдингером, В. Гейзенбергом, В. Паули и многими другими.

Жизнь

Герман Вейль родился 9 ноября 1885 г. в небольшом городке Эльмсхорн недалеко от Гамбурга. Несмотря на близость к большому городу, место было достаточно глухим, чтобы впоследствии Вейль смог назвать себя "парнем из деревни". Его родителями были управляющий местным банком Людвиг Вейль и Анна Вейль-Дик. Гимназические годы (1895–1904) Вейль провел неподалеку, в Альтоне. Весной 1904 г. он поступает в Гёттинген.

генский университет, избрав его "главным образом потому, что директор моей гимназии случайно оказался двоюродным братом Гильберта и снабдил меня рекомендательным письмом к нему". Так вспоминал Вейль много лет спустя, в 1944 г., отдавая дань памяти своему только что скончавшемуся учителю.

Свое вступление в науку он описывает далее так: "Во всей полноте невинности и невежества я записался на объявленный Гильбертом в тот семестр курс лекций о понятии числа и квадратуре круга. Большая часть курса оказалась недоступна моему разумению. Но двери нового мира распахнулись передо мной, и хотя я сидел у ног Гильберта не так уж долго, в моем юном сердце созрела решимость во что бы то ни стало прочитать и изучить все, написанное этим человеком. По окончании первого курса я отправился домой, держа под мышкой его "Zahlbericht" (обзор, а по объему целая книга, Гильберта по теории алгебраических чисел), и за летние каникулы тщательно проштудировал эту работу, не будучи ранее знаком ни с элементарной теорией чисел, ни с теорией Галуа. Это были счастливейшие месяцы моей жизни, и их сияние сквозь годы, обремененные грузом забот и сомнений, которых не миновал никто из нас, и поныне согревает мне душу".

Молодой Вейль попадает в круг учеников Гильберта. В их числе были в то время Курант, Тёплиц, Хаар. Впоследствии Курант вспоминал, что он был сразу принят в этот "внутренний круг", а вот Вейлю с этим не повезло. Высокомерное отношение большинства к застенчивому провинциалу могло проявиться, среди прочего, и в насмешливой фразе, например, такой: "вот один из тех, кто тоже размышляет о математике".

В 1908 г. Вейль заканчивает университет. Его диссертация, посвященная сингулярным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, находилась еще целиком в русле тогдашних интересов Гильберта. Созданная последним теория интегральных уравнений нуждалась в возможно более широком поле применений.

Жизнь в Геттингене продолжалась до 1913 г. Этот год — важный рубеж в жизни Вейля. Он получает приглашение занять кафедру в Федеральной высшей технической школе в Цюрихе (в Гёттингене он был приват-доцентом), где и прошли в спокойной, творческой обстановке лучшие годы его математической жизни. Его дань первой мировой войне заключалась в годе гарнизонной службы простым солдатом в Саарбрюккене. В это же время он женится на Елене Йозеф, дочери врача, с которой он прожил почти всю свою жизнь. В 1915 г. у них родился сын Фриц-Йоахим, ставший, как и отец, математиком, а через два года еще один сын — Михаэль. Много лет спустя, в 1938 г., появилась совместная работа Германа и Йоахима Вейлей о мероморфных кривых.

Многие математики, посещавшие дом Вейлей, вспоминали обаяние и жизнерадостность Елены. Ей были близки интересы мужа в философии и его страстная любовь к литературе. Гелла, как ее обычно звали, занималась переводами с испанского на немецкий. Переводила она и испанского философа Ортегу-и-Гассета, интересовавшего Вейля. Елена Вейль скончалась в сентябре 1948 г., когда Вейли давно уже жили в Америке. Ее смерть

была для Вейля большим ударом. Слова Р. Куранта на ее похоронах дают нам возможность представить облик Вейля во время их первых встреч: "Известие о помолвке Германа Вейля и Геллы вызвало всеобщее удивление, ибо чести, которой добивались многие, был удостоен робкий, молчаливый человек, далекий от круга признанных законодателей математического мира Гёттингена".

Приведя эти слова в своей статье о Вейле, французские математики К. Шевалле и А. Вейль далее продолжают: "Робким, молчаливым, далеким от круга законодателей — таким выглядел Герман Вейль в начале своей карьеры; таким, должно быть, он и остался в глубине несмотря на свои блестящие успехи. Как это часто бывает с робкими людьми, он умел, если ему удавалось сломать барьер своей застенчивости, быть вдохновенным и красноречивым. Вот как он вспоминает о первой встрече со своей будущей женой: "В этот вечер я описывал пожар на гумне, свидетелем которому мне только что довелось быть. Потом она говорила мне, что влюбилась в меня уже тогда, слушая мой рассказ"

Таким был математик, уже завоевавший себе известность работами по анализу и только что вышедшей книгой о римановых поверхностях, которому предстояло в ближайшие пять лет буквально взорваться целым фейерверком работ по теории чисел (равномерное распределение и оценки тригонометрических сумм), дифференциальной геометрии (жесткость выпуклых поверхностей и пространства аффинной связности), общей теории относительности (новые решения уравнений теории), единой теории поля, основаниям математики и логике (развитие интуиционизма и новый подход к континууму).

Вейль живет в Цюрихе до 1930 г. Это время его расцвета. В середине 20-х гг. появляются работы по теории представлений непрерывных групп и теории инвариантов, выходит несколькими изданиями знаменитое изложение теории относительности "Пространство, время, материя", содержащее и единую теорию поля, построенную Вейлем в 1918 г.

Во второй половине 20-х гг. Вейль вносит существенный вклад в квантовую механику не только своими работами и книгой "Теория групп и квантовая механика", но и личным общением с создателями новой физики (Э. Шрёдингером, М. Борном, В. Паули). Он находит новую, интегральную форму перестановочных соотношений, ставшую особенно полезной в квантовой теории поля, указывает физикам, что дырки в теории Дирака не могут быть протонами, наконец, предсказывает взаимную связь временных и пространственных отражений с зарядовым сопряжением. Последняя нашла свое воплощение в СРТ-теореме, найденной Паули в 40-х гг.

Двадцатые годы для Вейля — также время напряженных философских поисков и раздумий. В 1926 г. выходит его книга "Философия математики и естествознания". Наконец, это время счастливой семейной жизни. На юбилейном обеде в Цюрихе, посвященном столетию со дня рождения Вейля, его сын Михаэль так рассказывал о тех годах: "Мое детство падает на "двадцатые", время величайшей продуктивности Германа. Иначе говоря, Ахим и я видели его не слишком много (...), но даже и в этих условиях, довольно часто, в основном воскресными полднями, он снимал с полки

потрепанный и загадочный томик "Wolffs poetischer Hausschatz" и читал из него с таким напряжением и силой, что стены тряслись; многие из этих стихотворений я помню и сегодня — сказания о подвигах героев, о трусливых злодеях, об эрлах, возникающих из ночи, о кораблях, застигнутых бурей на озере Эри, об Эль Киде, дерзко скачущем к Замоге. Герман читал эти стихи скорее как песни, полностью поглощая все наше внимание. В наши головы не только вливалась высокая поэзия, но в них и запечатлелся вулкан чувств, охватывавший фигуру отца с книгой". Позднее пришел черед других книг, "а также стихов — море стихов — Гельдерлина, Гёте (больше всего из "Дивана"), Готфрида Келлера, Верхарна, Ницше, Демеля, Франца Верфеля и других и даже пассажи из "Волшебной горы" Т. Манна и "Заратустры" Ницше. Оглядываясь назад, можно сказать, что за этим стояла прозрачная педагогическая идея: заронить в нас любовь к литературе, особенно, конечно, немецкой, приравливаясь к ребячьим умам и интересам. И я могу сказать, что он в этом полностью преуспел".

Вейля часто приглашали занять кафедры в немецких университетах. Не без колебаний он отклонял эти приглашения, но перед соблазном стать преемником своего учителя в Гёттингене он не устоял. В 1930 г. начались три года его гёттингенской жизни. Конец ей положил нацистский переворот в начале 1933 г. Тяжелые путы, наложенные нацистами на духовную жизнь нации, изгнание многих ученых из институтов и университетов привели Вейля к трудному для него решению — покинуть страну. Политические идеи и тяжеловесная риторика автора "Mein Kampf" вряд ли могли привести к каким-то иллюзиям относительно будущего.

Вейль переезжает в Принстон, в недавно созданный Институт высших исследований, где он будет работать до своей отставки в 1951 г., а затем вплоть до смерти в 1955 г. состоять его почетным членом. Среди его коллег по Институту — Дж. фон Нейман, А. Эйнштейн, К. Гёдель, во время войны — В. Паули. В таком окружении вряд ли было плохо работать. В 30-е г. в Америке написаны работы по комплексному умножению абелевых функций, по теории потенциала, дифференциальной геометрии, механике. И все же в предисловии к вышедшей в 1938 г. книге "Классические группы, их инвариантность и представления" Вейль писал: "Боги наложили на мои писания путы чужого языка, не звучавшего у моей колыбели.

"Was dies heissen will, weiss jeder,
Der im Traum pferdlos geritten"

(*"Что это значит — каждый знает, Кто скакал во сне без коня"*) — хотелось бы мне сказать вместе с Готфридом Келлером. Никто более меня не чувствует связанной с этим утраты силы, легкости и ясности выражения". И все же дело было, по всей вероятности, не только в языке. В том же предисловии мы читаем: "Опыт подсказывает мне, что борьба с опасностью слишком сильной специализации и технизации математического исследования особенно важна в Америке. Строгая точность, достижимая математическим мышлением, привела многих авторов к манере изложения, которая должна произвести на читателя такое впечатление, как если бы он был заключен в ярко освещенную камеру, где каждая де-

таль выделяется с одинаково ослепляющей ясностью, но без рельефности. Я предпочитаю открытый ландшафт под ясным небом с его глубиной перспективы, где обилие отчетливо очерченных близких деталей постепенно сходит на нет по мере удаления к горизонту”.

Вернуться в Цюрих Вейль смог только после войны, но радость возвращения была омрачена кончиной Геллы в 1948 г. Вейль снова женился через два года на Элен Бер из Цюриха и последующие пять лет своей жизни проводил по полгода в Принстоне и Цюрихе.

9 декабря 1955 г. Вейль скоропостижно скончался через месяц после торжественного празднования своего семидесятилетия. Он умер окруженный любовью близких и учеников, уважением коллег, оставив после себя на редкость завершённое здание математической мысли. Самым трудным для него были, пожалуй, философские размышления и отношения с обществом, когда раздирающее противоречие проходит между любовью к родине и невозможностью существовать в рамках все давящей тоталитарной системы. Вейль рассказал об этом в последний год своей жизни, вспоминая былые времена в Цюрихе: “Жизнь в стране, где у власти находилось это исчадие ада и позор немецкой нации (Гитлер), стала для меня невыносимой, и хотя эмиграция была горьким решением, давшимися мне ценой тяжелых душевных переживаний, я отряхнул пыль отечества со своих ног”.

Выбор, сделанный Вейлем в 1933 г., приходилось делать многим в XX веке, и не только в Германии. Имеет смысл поэтому сравнить судьбу Вейля с судьбой другого выдающегося представителя немецкой культуры — физика Вернера Гейзенберга. В диалогах “Часть и целое” Гейзенберг описывает мучительные раздумья о своей жизни в нацистской Германии, трудные разговоры с эмигрировавшими физиками (летом 1939 г. в Америке). Он предпочел остаться, понимая всю тяжесть своего выбора — неизбежность моральных компромиссов, да и прямой опасности для жизни (во время войны он был близок к людям, организовавшим покушение на Гитлера в 1944 г.). Результаты жизненной позиции его и таких ученых, как Планк, Ган, теперь можно оценить: атомное оружие, оказавшее столь роковое влияние на развитие человечества, было создано не в Германии. После войны, когда все лежало в руинах, именно авторитет этих ученых обусловил возможность возрождения немецкой науки и образования. Свою лепту в это дело внес и Вейль двумя лекциями 1945 г. об истоках системы немецкого университетского образования. В 1953 г. они были опубликованы под заглавием “Университеты и наука в Германии”.

Развитию математики после войны очень помог основанный в сентябре 1944 г. В. Зюссом институт в Обервольфахе (недалеко от Фрайбурга) и предназначенный исключительно для проведения научных конференций. 25 октября 1951 г. Герман Вейль (вместе с сыном Иохимом и невесткой Мартой) в знак благодарности за оказанное гостеприимство оставил в книге гостей два коротких стихотворных экспромта¹⁾, первый по-немецки,

¹⁾ Заимствованных из Perspectives in Mathematics (Anniversary of Oberwolfach 1984), Basel, Birkhäuser: 1986 и переведенных Ю.А. Даниловым. Помимо его переводов в этом очерке использованы переводы Б.В. Бирюкова, Е.И. Коркиной, Д.А. Райкова, Д.Б. Фукса и автора.

второй по-английски — это были два языка, на которых написаны все его работы.

Два кратких наставления капуцинов

Спотыкаясь о Штолля и Штайна¹⁾,

Я в Шварцвальде бродил неприкаянно

И в такую чашобу залез —

Переменные скрыли весь лес.

Приуныл я тут было,

Но достало мне силы,

Взял я в руки себя и сказал:

”Пусть в Шварцвальде темно,

Мюнстер тоже не светел,

Бодрость духа ты зря не теряй.

Сквозь деревья вдали ведь просвет уж заметен:

Цюрих, Хельсинки там, так и знай”.

И вся тяжесть с души моей сразу же спала,

Лгать не стану — мне истина стала сиять:

Пфлюгер подал пример, ничего, что нас мало,

Будем малым числом поле функций пахать.

Зюсс разослал всем cable²⁾.

Собрались — кто в дождь, кто в Nebel,

Под гостеприимный gable

Лоренцхофа — в новый Babel.

Нож и вилка здесь наш label.

Стол накрыт, не стол, а table.

Сколь душа, наш ум и тело were able

Проглотить, столь было яств. Доски все, конечно, — stable.

Места хватит для всего: и для правды, и для fable,

Излагаемых по вкусу: кто by talk, а кто by chalk.

Ныне по домам we walk.

В этих стихах искусно сплетены и отношение Вейля к создателям теории функций многих комплексных переменных, и окружающая Обервольфах природа Шварцвальда, и противоборство двух школ теории функций, и намеки на католическое влияние в Мюнстере. В них видна неподдельная радость автора, с легкостью подчиняющего себе стихии двух языков.

¹⁾ Штолль (W. Stoll) и Штайн (K. Stein, обычная транскрипция ”Штейн” — немецкие математики, представители мюнстерской школы. Эти слова перекликаются еще с Stock und Stein (камни, горы).

²⁾ Лоренцхоф — первоначальное место института, около Обервольфаха, cable — телеграмма, Nebel (нем.) — туман, gable — фронтон крыши, Babel — Вавилон, label — знак, table — стол, were able — были способны, stable — устойчивы, fable — сказка, by talk — словами, by chalk — мелом, we walk — мы пошли.

Мысли

Когда читаешь написанные Вейлем математические работы, может показаться, что все это он сделал легко, как бы играючи, в них невозможно найти следы отчаянных усилий и срывов, хорошо известных каждому математику. Картина резко меняется, если мы обратимся к его философским размышлениям. Их незавершенность сразу бросается в глаза. Вот как сам Вейль сравнил эти два пласта своей жизни: "В духовной жизни человека отчетливо различаются, с одной стороны, сфера действия, создания форм, конструирования — это сфера, которой посвятили себя активно работающие художники, ученые, инженеры, государственные деятели и которая подчинена императиву объективности, с другой стороны сфера осмысления; эта сфера реализуется в понимании, и на нее следует смотреть как на борьбу за смысл наших действий, как на собственную сферу философа. Творческому деянию, не контролируемому осмыслением, грозит опасность утраты смысла — оно может сбиться с пути, окостенев, превратиться в рутину; но и осмысление подстерегает опасность вырождаться в подрывающие творческие силы человека "рассуждения по поводу", которые никого ни к чему не обязывают".

Но к подобным мыслям Вейль пришел в конце 20-х г.: г., когда за плечами были уже многие вершины. А началось все в последнем классе гимназии, когда на чердаке родительского дома был найден никому не нужный экземпляр краткого комментария к "Критике чистого разума". Спустя пятьдесят лет это событие было описано так: "Одним толчком я был пробужден от "догматического забвения", в моем юношеском сознании мир был решительно поставлен под сомнение". Впрочем, уже через год чтение "Оснований геометрии" Гильберта в университете вернуло юному уму устойчивый взгляд на окружающий мир. Затем последовал период "позитивистского спокойствия" и, наконец, знакомство в 1913 г. с феноменологией Эдмунда Гуссерля, немецкого философа, работа его в то время в Гёттингене. "...Именно Гуссерль освободил меня от позитивизма и возвратил к более широкому взгляду на мир", продолжает Вейль в своем философском "завещании" "Познание и осмысление". Памяти Гуссерля он посвятил в 1940 г. работу "Призрак модальности", анализирующую понятие "возможности" в окружающем нас мире: математическом, физическом, наконец, просто человеческом.

По воспоминаниям сына Вейля в двадцатые годы среди мыслителей, привлекавших его внимание, были Демокрит, Лейбниц, Кант, Фихте, Гуссерль, Кассирер, Рассел, но и подчеркнуто далекие от науки — Кьеркегор, Ницше, Хайдеггер, Ясперс, Экхарт. Трехтомную "Философию" Ясперса Вейль читал целыми днями по субботам и воскресеньям, обсуждая прочитанные главы с семьей и друзьями, а в 1947 г. в Гейдельберге ему довелось обсуждать и с самим философом параллели между экзистенциализмом и современной физикой.

Глубоко проникая в мир философии, Вейль никогда не забывал свои математические корни. Придумав геометрическую аналогию теории познания (о ней см. ниже), он тут же интерпретирует на этом языке выска-

звания Гуссерля и, обнаруживая, что некоторые из них становятся ложными, говорит о "серьезном подозрении к ним". Другой яркий пример — отношение Вейля к Б. Расселу как мыслителю. В 1946 г. он написал рецензию на том "The Library of Living Philosophers", посвященной Расселу. В ней Вейль приводит следующую историю из жизни последнего: "Я помню в точности момент, один день в 1894 г., — рассказывает Рассел — когда во время прогулок по Тринити-Лейн во мне вспыхнула уверенность, что онтологический аргумент (в пользу бытия Бога) верен. Я вышел, чтобы купить коробку табака: когда я шел обратно, я неожиданно подбросил ее в воздух и, ловя, воскликнул: "Великий Скотт (Иоанн Дунс Скотт — английский философ и богослов XIII века), онтологический аргумент — просто звук". Может ли кто-нибудь после этого анекдота сомневаться, что по своей натуре Рассел — философ, но не математик?"

Говоря о философских интересах Вейля, нельзя, конечно, не вспомнить и интеллектуальную атмосферу Цюриха 20-х гг.

В 1921–1927 гг. вместе с Вейлем в Высшей технической школе работал физик Э. Шрёдингер, человек разносторонних интересов. Среди его книг — и философские очерки, и "Что такое жизнь? (с точки зрения физика)". — знаменитое изложение генетики, и сборник стихов. По словам Шрёдингера, математические советы и поддержка Вейля были неоценимыми, когда он создавал свою волновую механику. Строя теорию цветового пространства, Шрёдингер опирался на конструкции аффинной геометрии, почерпнутые в книге Вейля "Пространство, время, материя", а излагая основы генетики в своей "Философии математики и естествознания" в 1949 г., Вейль многое почерпнул из книги Шрёдингера.

Другая незаурядная личность, с которой Вейль много общался, — Вольфганг Паули, также преподававший в Высшей школе (с 1928 г.). Позже им довелось провести вместе военные годы в Принстоне. Свидетельством их отношений более раннего времени является сохранившаяся переписка. Помимо проблем теории поля, в ней обсуждался вопрос о месте причинности в физике. В своей работе "Соотношение причинного и статистического описаний в физике" (1920) Вейль предположил, в рамках чисто философского обсуждения, что будущая физическая теория должна порвать с причинностью. В этих обсуждениях принимал участие и Эйнштейн, для которого акаузальный подход был неприемлем. Недавно историки науки высказали соображения, что эти идеи Вейля могли оказать впоследствии влияние на возникновение вероятностной интерпретации квантовой механики. Но помимо чисто научных вопросов у Паули и Вейля было о чем поговорить. Изучение Паули античной и средневековой философии и науки, его интерес к таким фигурам, как Плотин, Прокл или Кеплер, и, наконец, его тесные связи с психологом К.Г. Юнгом, еще одним жителем Цюриха, вряд ли были неинтересны Вейлю. Связи Вейля (как и Шрёдингера) с Юнгом были, по-видимому, более отдаленными. Они выразились в участии в 1948 г. в XXVI конференции (Eranos conference), ежегодно устраиваемой на Лаго Маджоре в Швейцарии. В них участвовали близкие к Юнгу ученые, философы, богословы. Работа Вейля "Наука как символическая конструкция че-

ловека" появилась в трудах конференции, посвященной в том году проблеме человека, в окружении работ физика М. Фирца и биолога А. Портмана.

Размышления Вейля над философскими вопросами науки не прекращались и позже, в Америке. В 1949 г. он выпускает новое, английское издание "Философии математики и естествознания". Через несколько лет в "Познании и осмыслении" Вейль писал об этой книге: "У меня уже не хватило мужества написать ее заново с учетом тех изменений в научном знании и философии, которые произошли за эти годы. Я ограничился тем, что выправил старый текст, переработал некоторые разделы и написал заново несколько приложений, которые потребовали у меня больше усилий, чем некогда вся книга". В этих приложениях Вейль выходит за границы математики и физики, которые доминировали в первом издании книги 1926 г. Он пишет о генетике, химии, связи физики и биологии, об идее эволюции в естествознании. Его старым привязанностям — квантовой теории и основаниям математики — также отданы два приложения, ведь после 1926 г. окончательно оформилась квантовая механика и появилась теорема Гёделя о неполноте. Очерк последней, данной на широком философском и историческом фоне (с подробным экскурсом, например, в историю парадокса лжеца), является лучшим введением в этот круг проблем.

В приложении, посвященном квантовой теории, Вейль вспоминает свою старую геометрическую аналогию теории познания. В ней объекты познания, субъекты (или многие Я) и явление объекта субъекту сравниваются соответственно с точками плоскости, системами координат и координатами точки. Пользуясь этими сопоставлениями, Вейль анализирует различные философские доктрины. Об этой аналогии, которая, видимо, была ему дорога, он говорит также и в "Познании и осмыслении". Вейль с радостью отмечает, что она в точности совпадает с той схемой состояний и наблюдаемых, которая позднее появилась в квантовой механике. Впрочем, одно отличие двух схем все же имеется: в квантовой теории пространства являются комплексными. Занятно, что совсем другая конструкция раннего Вейля — фазовый множитель его единой теории поля — тоже появилась в квантовой механике умноженной на i .

Говоря о связи физики и биологии, Вейль высказывает сомнения по поводу ортодоксальных интерпретаций эволюции и происхождения жизни. Эти взгляды разделялись также многими его коллегами, математиками и физиками. Ряд конкретных соображений, высказываемых Вейлем в связи с этим, можно найти и у биологов (например, у таких представителей отечественной школы критиков дарвинизма, как Н.Я. Данилевский, Л.С. Берг, А.А. Любищев), но скорее всего Вейль пришел к ним самостоятельно.

Обсуждая в другом приложении комбинаторные идеи в генетике, Вейль демонстрирует удивительную способность перебрасывать мосты между самыми удаленными областями человеческой мысли. Изменения генотипа во времени приводят к проблеме выяснения его тождественности самому себе. Приводя различные определения тождественности,

Вейль вспоминает, что та же проблема возникает в психологии (тождественность человеческого Я) и указывает, что она решается в мировой литературе в сценах узнавания, начиная с "Одиссеи". Эти замечания Вейля перекликаются с анализом проблемы тождественности литературного героя, данной в предвоенные годы М.М. Бахтиным в его исследовании пространства-времени (хронотопа) литературных произведений. Вообще проблема тождества волновала Вейля во всех ее облициях. Так, он неоднократно подчеркивал загадочность тождественности всех элементарных частиц одного сорта.

Мы привели здесь лишь несколько мыслей Вейля из щедрой их россыпи на страницах "Философии". Как же сам Вейль оценивал свою работу? Приведенные выше его слова продолжают так: "Как часто я с трудом удерживался от того, чтобы оставить работу, а когда приложения были написаны, швырнуть их в огонь".

Эти поразительные слова, вряд ли способные вызвать сочувствие прагматически настроенного читателя, могут иметь несколько истоков. Хотя Вейлю и везло с окружением, в более широких кругах философски ориентированной интеллигенции его идеи должны были скорее отторгаться. Рассел или Карнап были там явно предпочтительнее. С другой стороны, математику вообще нелегко высказываться по философским вопросам, и Вейль всегда чувствовал, что "здесь нельзя обойтись вовсе без компромиссов", да и "крики беотийцев" задевают даже самых великих.

А его волновали не просто философские вопросы науки. Вейль пробовал идти гораздо дальше, пытаясь проникнуть в ту сферу бытия, которая, казалось бы, раз и навсегда была отвергнута наукой Нового времени. Вот некоторые свидетельства этого пути. "Из событий моей духовной жизни счастливейшими для меня были: изучение в бытность мою еще юным студентом (в 1905 г.) великолепной работы Гильберта "Zahlbericht" и чтение Майстера Экхарта, захватившее меня в чудесные дни пребывания в Энгадине зимой в 1922 г. Отныне для меня открылся доступ в религиозный мир (...). Я так и не довел до конца те религиозно-метафизические спекуляции, на которые меня толкнули Фихте и Экхарт; здесь, впрочем, сказала, наверное, и природа самого объекта". "В связи с изучением Фихте я сам в те далекие времена месяцами предавался метафизическим размышлениям о Боге, Я и Море, в которых, казалось, мне открывается последняя истина. Должен признаться, что от тех размышлений в моей памяти не сохранилось никаких следов".

Но осталась книга "The Open World", вышедшая в 1932 г. и подводящая итог поиска математиком Мирового Абсолюта. Он таков: "Бог, как завершенное бесконечное, не может и не будет постигнут им (разумом); ни Бог не может проникнуть в человека путем откровения, ни человек не может постичь Бога путем мистического восприятия. Завершенное бесконечное мы можем выражать только в знаках".

Эти вопросы волновали в нашу эпоху не одного Вейля. Летним вечером 1952 г. Гейзенберг и Паули (или скорее носящие их имена персонажи диалогов Гейзенберга "Часть и целое") вели неторопливую беседу, гуляя вдоль моря по одной из набережных Копенгагена. Неожиданно

данно Паули спросил: "Верить ли ты в личностного Бога?" Ответом была такая переформулировка этого вопроса: "Может ли кто-либо постигнуть глубинный порядок вещей или событий, существование которого, кажется, не вызывает сомнений, так же непосредственно, как он постигает душу другого человека?" В конце концов друзья согласились, что они вряд ли могут следовать словам знаменитого амулета Паскаля "Бог Авраама, Исаака и Иакова – не философов и ученых", и вернулись к прерванному обсуждению несимпатичной им позитивистской философии.

Чтобы яснее очертить существо вопроса, сравним еще Вейля с такой фигурой русской научной и философской мысли, как П.А. Флоренский. Они почти ровесники (Флоренский родился в 1882 г.), но Флоренскому не удалось сполна раскрыть свои дарования. В том же году, когда Вейль покинул Германию, Флоренский был арестован и отправлен в Сибирь, а в 1937 г. его жизнь была насильственно прервана. Как и Вейль, Флоренский интересовался и занимался многими областями науки, им обоим было присуще глубокое понимание языка, как человеческого, так и научного, их объединяли математическое образование и литературный талант, и, наконец, оба они пришли к теологическим проблемам. Но если Вейль шел к ним, исходя из своего математического опыта, твердо стоя на территории освоенной наукой, и лишь заглядывая в область трансцендентного бытия, то для Флоренского, одного из крупнейших православных богословов, истина Откровения была, конечно, центром, вокруг которого кристаллизовались его занятия отдельными науками и попытки соединить их в единое целое. Естественно, что и его гносеологические выводы были совсем другими: "Познание не есть захват мертвого объекта хищным гносеологическим субъектом, а живое нравственное общение личностей, из которых каждая для каждой служит и объектом и субъектом. В собственном смысле познаваема только личность и только личностью".

И все же, несмотря на это принципиальное различие, у Вейля и Флоренского можно найти много общего не только в интересах, но и в достигнутом. Так, приведенная выше геометрическая аналогия Вейля очень близка по типу рассуждений ко многим "моделям" Флоренского¹⁾. Можно только гадать, чем бы завершились эти поиски, если бы на плечи ищущих не бросался век-волкодав.

Оглядываясь еще раз на жизненный путь, пройденный Вейлем, во всем многообразии его связей с окружающим Миром, нельзя не признать, что его уход из науки совпал с эпохой ее кардинального изменения. Из науки ушло единство и бескорыстность знания.

¹⁾ См., например, раздел "Иррациональности в математике и догмате" в кн.: Флоренский П.А. Столп и утверждение истины. – М., 1914 (новое издание – М.: Правда, 1990) или его рассуждения о Лицах Троицы (Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским // Историко-математические исследования. – Вып. 31. – М.: Наука, 1989. – С. 116–190).

Б.В. БИРЮКОВ

"СВЕТ НЕ ВНЕ МЕНЯ, А ВО МНЕ"

Братия! не будьте дети умом: на злое
будьте младенцы, а по уму будьте
совершеннолетни

Апостол Павел

В ряду великих математиков-универсалов нашего столетия — масштаба Давида Гильберта и Джона фон Неймана — Герман Вейль занимает в некотором смысле особое положение. Ученый, получивший фундаментальные результаты в разнообразнейших областях своей науки и в ее приложениях, результаты, оказавшие непреходящее воздействие на математику и теоретическую физику XX века, он непрестанно размышлял над философскими основаниями науки, стремился осмыслить сущность и динамику познающего человеческого духа. И здесь он во многом шел против течения. В ученых кругах Запада в его время преобладали позитивистские взгляды — в их различных обличьях, будь то конвенционализм или логический атомизм, операционализм или логический эмпиризм, взгляды, нередко связанные с вульгарным атеизмом. Вейль достаточно быстро преодолел "позитивистский соблазн" примитивного понимания науки как "себе самой философии" и в вопросах методологии и мировоззрения двинулся собственным путем. Путь этот, однако, приходилось обосновывать — столь непривычен он был для поклонников воззрений, скажем, Б.Рассела или Р.Карнапа, да и Д.Гильберта тоже. Соответствующая аргументация нашла отражение во многих докладах, статьях и монографиях Вейля с их выраженной философской ориентацией. Читатель смог убедиться в этом, ознакомившись с данной книгой, особенно ее первой частью. Но стоит указать, что перу Вейля принадлежат книги: "Пространство, время, материя" (1918); "Философия математики и естествознания" (1926)¹⁾ — эта монография выпущена также английским изданием (1949) с дополнениями Вейля²⁾; "Ступени бесконечного" (1931); "Открытый мир" (1932); и, наконец, "Симметрия" (1952)³⁾. Своеобразным философским завещанием великого ма-

¹⁾ Данный труд частично имеется в русском переводе в кн.: Вейль Г. О философии математики. — М.; Л.: ГТТИ, 1934.

²⁾ Некоторые из дополнений читатель, владеющий русским языком, может найти в кн.: Прикладная комбинаторная математика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.

³⁾ Русский перевод: М.: Наука, 1968.

тематика и мыслителя явился его доклад в Лозанне (Швейцария) “Познание и осмысление”, повод к которому послужило присуждение Вейлю премии за его достижения в философии науки. Доклад состоялся в 1954 году. Признание пришло... В следующем году Вейля не стало.

В науке и философии Запада “плывцу против течения” не были уготованы подводные рифы, на которые в художественной литературе напоролись, скажем, писатели-анти тоталитаристы Джордж Оруэлл и Артур Кёстлер: первый с трудом нашел издателя для своего знаменитого романа “1984-й”, перипетии судьбы второго были столь тяжелы, что немецкий оригинал его не менее известного творения — повествования “Слепая тьма” — был утрачен и для современной культуры сохранился лишь его английский перевод... Жизненный путь Вейля был не похож и на тот печальный удел — смерть в заключении, — который выпал на долю замечательного русского ученого и философа Павла Александровича Флоренского, многие идеи которого шли в удивительной параллели с мыслями Вейля, и на судьбу одного из создателей алгебро-логической теории релейно-контактных схем — Виктора Ивановича Шестакова, который силой обстоятельств принужден был маскировать открытое им применение логики в технике (а это было одно из первых направлений реализации “в металле” конструктивистской установки в математике!) алгебраической терминологией и кончина которого в 1987 г. прошла незамеченной математико-логической общественностью. И все же...

В 1917 г. Вейль создал научный шедевр — “Континуум” (во всяком случае названным годом помечено его Предисловие к нему). Это была книжечка, такая же небольшая по объему и такая же богатая по содержанию, как и эпохальное для логики сочинение Готлоба Фреге “Запись в понятиях” (1979). В “Континууме” Вейль занял резко критическую позицию по отношению к классическому математическому анализу, опирающемуся на “наивное” понятие множества, а также к формализму в математике. Этим он открыл — вслед за Л.Э.Я. Брауэром, о работах которого он тогда не знал, — период с о в р е м е н н о г о подхода к основаниям математики, который характеризуется н е к л а с с и ч е с к о й логической установкой. Тем самым Вейль в философии математики встал — по сути дела, в одиночку! — против “теоретико-множественного Гольфстрима” своего времени. Правда, знакомство с “неинтуиционизмом” Брауэра, ко взглядам которого он впоследствии во многом присоединился, укрепило его в занятой им позиции, но, по-видимому, не прибавило сторонников, тем более, что развивая свой подход, Вейль выступил оппонентом также и влиятельной расселовской концепции сведения математики к логике. Не лишне отметить, что еще в 50-х годах нашего века Н.Бурбаки — а за именем этого “профессора университета г. Нанкаго” скрывались такие выдающиеся математики, как Андре Вейль, Жан Дьёдонне, Анри Картан, Лоран Шварц, Клод Шевалле и др., — квалифицировал интуиционистскую математику как “своего рода исторический курьез”.

Воззрения Вейля, касающиеся природы математики, ее оснований, ее отношения к логике, его взгляды на науку вообще и естествознание, в част-

ности, — все это, конечно, не оставалось неизменным на протяжении долгой творческой жизни автора данной книги. Но если взять в качестве исходного цюрихский период Вейля, то можно, пожалуй, выделить главные положения его мировоззрения, пронесенные им через десятилетия. Постараюсь их очертить.

Первое, что обращает на себя внимание, когда знакомишься с работами Вейля, написанными на мало-мальски "широкую" тему, это постоянная опора их создателя на громадный массив научного и философского наследия — от эллинской натурфилософии и математики до трудов ученых и мыслителей Нового времени, от пионеров функционального и теоретико-множественного математического мышления прошлого века до тончайших исследований по основаниям математики и логики, выполненных в XX столетии, от философии Канта и Фихте до герменевтики и феноменологии, от мистики Майстера Экхарта до теории относительности и квантовой физики, от антиномий древних до логических исчислений современной математической логики. И все это — в контексте коллизий самых последних научных и философских идей и школ, будь то модальная логика и философия жизни, экзистенциализм и логика квантовой механики.

Это Вейлево стремление опереться на традиции прошлого, учесть, пересмотреть их, поставить в связь с современным ему идейным развитием имело определенную общую направленность. Ею были поиски соразмерно-гармоничного и абсолютного в сфере человеческого знания. Именно в этом контексте смотрел он на математику, на математизацию, которая, говорил он, аналогично мифотворчеству, языку и музыке, принадлежит к числу изначальных проявлений активности человека: здесь бурлит "глубочайшая человечность, живет стремление к созиданию форм духа и выражается мировая гармония" (с. 253). Атмосферой поисков абсолютного проникнуты его истолкования топологии и абстрактной алгебры, теории относительности и законов квантовой физики — здесь действует вейлевская непроборимая установка на выявление и использование инвариантных отношений, изоморфизмов, групп и симметрий как средств выражения элементов того непреходящего, что несут в себе теоретические конструкции.

Сила и стины — несмотря на неустранимый из нее момент относительности, присущий всему, что узнает и делает человек, говоря словами поэта, "в бореньях силы напрягая", — заключалась для Вейля в ее объективности. Именно этим привлекала его, в частности, теория относительности: она виделась ему в свете "основного принципа теории познания" (с. 192), согласно которому верная картина мира должна содержать только то, что в принципе экспериментально проверяемо; и это — несмотря на то, что в ней, этой картине, неизбежно появляется неопределенность, которую не в силах устранить никакие опытные данные (ср. статью "Геометрия и физика"). Неопределенность, однако, не разрушает объективности, и именно это убеждение делает воззрения Вейля решительно несовместимыми ни с какими формами конвенционализма, релятивизма и солипсизма.

Вейль был убежден в единстве и мощи — но отнюдь не всесии! — науки: математики и математического естествознания. Но наука не была для него

тождественна знанию в широком смысле. Вейль меньше всего был "сциентистом", и трудно представить себе большего антипода технократическим упованием, к сожалению, еще достаточно модными в наши дни.

Будучи прежде всего математиком, Вейль был преисполнен веры в ее великие возможности, проистекающие из тех живительных соков, которые "извлекают ее глубокие корни из разума и природы" (этимися словами он завершает свой доклад "Математический способ мышления"). Но вера в математику никак не была у него связана с отвержением или умалением иных сфер и способов познания. Свет, который несет с собой математика, писал он в своем эссе "Полвека математики" (1951), подобен свету звезд — прекрасному и ясному, но холодному и внечеловеческому, — и тем не менее математика есть прежде всего "содержательная", а не "формальная" наука; это то, что понимается и творится человеком, и поэтому она есть деятельность — система действий по построению, конструированию специфических абстрактных объектов; именно в деятельностной природе математического мышления таится источник его эвристической силы.

Абстракция, абстрактные конструкторы понимались Вейлем при этом совсем не "идеалистически": доминантой его подхода к математическому — более общо, теоретическому знанию как таковому — было построение: символическая, знаковая конструкция. Не "умозрительные", так сказать, абстрагирование и обобщение, а абстракция, опирающаяся на регулярные, по определенным правилам (система которых не обязана быть "замкнутой" и неизменной!) порождаемые знаковые образования, — вот что главное. Ибо последние суть средства, служащие в качестве реально-наглядной опоры для ума. Это необходимая питательная среда, в которой взращивается мысль математика и математизирующего естествоиспытателя, развертывается процесс теоретизации вообще. Именно абстракция, опосредованная символизацией, приводит к шагам, совершающимся под девизом "мыслить конкретно!" (см. с 8).

Сплав абстракции и символического конструирования, составляющий основу науки, находит реализацию в раскрытии закономерностей реальности. Раскрытие этого характеризуется Вейлем как теоретическое конструирование мира, причем как такое конструирование, которое всегда так или иначе нужно сопоставлять с наблюдаемыми фактами. Это — сложный процесс: историческое развитие научных теорий, подчеркивает Вейль, развитие, совершающееся на основе эвристических рассматриваний, есть "извилистый и многоступенчатый путь, ведущий от опыта к конструкции" (с. 18). На этом пути наука сталкивается с противоположениями непрерывного и прерывного, топологического и алгебраического, континуума как среды становления и континуума как "собрания" индивидуализируемых точек и рядом других не менее фундаментальных контроверз. Человек преодолевает эти контроверзы — как и иные трудности бытия и познания, — "символически конструируя универсум", то есть строя абстрактные образы реально-вещных "положений дел"; в такого рода построении он использует знаково-воплощаемые представления о пространстве и времени, о причинности, о законах макро- и микромира. Здесь взаимо-

действуют две главных потенции человеческого интеллекта: *рациональное* познание, включая его логическую сторону, и (*интеллектуальная*) *интуиция*, с помощью которой улавливается *смысл* и достигается *понимание* сути вещей.

Много размышляя о соотношении математического и логического, Вейль сдержанно относился к возможностям (формальной, математической) *логики*. Ни о каком ее "приоритете" по отношению к математике и другим наукам, с его точки зрения, не может быть и речи. Выступая с докладом "Математический способ мышления", Вейль вспомнил слова американского математика Бенджамена Пирса (отца известного философа и логика, основоположника прагматизма Чарльза Пирса), сказанные им в 1870 году: "Математика — это наука, извлекающая необходимые следствия". Отметив, что это определение принималось десятилетиями, Вейль заключил: "Мне кажется, что оно содержит весьма скудную информацию относительно подлинной природы математики" (с. 20). Ибо она, эта природа, имеет исходным пунктом то, что Вейль называл "математическим процессом": *итерацию* и *базирующуюся* на ней совершенную (полную "математическую") *индукцию*, служащую как определению объектов, так и *доказательству* утверждений о них. В частности, наглядные представления об итерации и порождаемом с ее помощью натуральном ряде необходимы для построения основных понятий теории множеств и развертывания логических формализмов. При этом значимость как формальных, так и особенно содержательных — осмысляющих, осмысленных — рассмотрений логического характера для математики и математического естествознания отнюдь не отвергается: рассмотрения эти трактуются Вейлем как необходимое (но достаточно скромное) орудие развития математики и наук о природе. Что же касается *конструктивно* мыслящего математика, то логическая дедукция — выведение следствий из аксиом или посылок — не есть для него главное дело; ибо он смотрит на свои логические выкладки и суждения, получаемые с их помощью, как на "не более чем аккомпанемент" своей конструирующей деятельности (см. с. 19).

Впрочем, из помещенных в данной книге работ Вейля отчетливо видно, как *переплетены* в его трактовке оснований, особенно оснований анализа, математическое и логическое, сколь некатегоричны подчас его оценки возможностей логики и аксиоматики. Это и понятно: оба начала, обе способности человеческого духа — математическая и логическая — поддаются конструктивному представлению. И в 1932 г. Вейль констатирует: аксиоматика не является только методом прояснения и углубления оснований — она выступает инструментом конкретных математических исследований.

Один из возможных вариантов конструктивного развертывания математики (анализа) достаточно четко намечен в "Континууме"; но подобное развертывание, как очень быстро осознал Вейль, возможно и на иных путях, в частности в русле идей Брауэра, интуиционистский подход которого заранее отвергает какую-либо *завершенную формализацию* математики и логики. Приняв в основном брауэровскую программу, Вейль отдал долж-

ное и достижениям Гильберта: "Брауэр и Гильберт, — читаем мы в статье "Давид Гильберт и его математическое творчество", — подняли проблемы оснований математики на новый уровень. Возвращение на позиции "Principia Mathematica" Рассела и Уайтхеда невысказуемо" (с. 241). По-видимому, под влиянием Гильберта взгляды Вейля на соотношение конструктивно-генетического и аксиоматически-логического в математическом мышлении со временем стали более взвешенными, что нашло свое выражение, например, в словах: "увлекательность современных математических исследований в немалой степени обязана счастливому сочетанию аксиоматического и генетического методов" (с. 242).

Мировоззренческо-методологические взгляды Вейля проникнуты пафосом величия Разума и Смысла, господствующего в мире. Присущая человеку интуиция на научном уровне несколько не противоположна разуму — это интуиция мысли, рациональная интуиция, интуиция как ее понимал Р. Декарт, с которого, говорит Вейль, началась западная философия. Поэтому нечего удивляться, что прогрессу математики с его точки зрения в определенном смысле более содействуют те, кто наделен не столько даром проведения строгих доказательств, сколько математической интуицией; именно в свете этой мысли подходит Вейль к оценке творчества Феликса Клейна.

Познание нуждается в наглядно убедительных, интуитивно ясных, самоочевидных истинах — без них невозможно уже элементарное оперирование с простейшими знаками, оперирование, которому такое значение придавал Гильберт и которое Вейль считает исходным пунктом "символической конструкции мира", воздвигаемой наукой. В брауэровских терминах этому соответствует "праинтуиция" — изначальная интуиция — порождения "еще одного", создающая натуральный ряд и в конечном счете всю математику. Корни интуиции — как способности, заключенной в "имманентном" (то есть специфически данном каждому индивиду) сознании, — издревле пытается выявить философия; в этом, в частности, видит Вейль необходимость обращения к философскому наследию, когда возникает задача уяснения фундамента математического знания и наук, пользующихся его достижениями. С большим сожалением, однако, автор доклада "Познание и осмысление" констатирует, что в этом вопросе философская рефлексия не очень преуспела. Впрочем, добавлю я, что тут удивительного: природа сознания до сих пор, по сути, остается для науки ("точной" науки) во многом загадкой, а без привлечения научных данных — как разобраться в нашем Я?

Идеи Разума и Смысла, проблемы понимания и истолкования, вопрос о том, как соотносится то, что дано человеку, и то, что на рассматриваемом этапе динамики науки (или даже в принципе) остается вне этой данности, вводятся Вейлем в контекст религиозного видения мира. Такое видение, согласно Вейлю, необходимо, в частности, для "узаконения" идей возможности и бесконечности, без которых нет математики. Ибо уже в анализе мы вынуждены проецировать действительное на универсум возможного, открытого в бесконечность. Без учета "бесконечностного" аспекта познания невысказуемо и верный взгляд на

логику, поскольку соприкосновение с бесконечным (и возможным) определяет потребность в логических структурах, отличных от классической, восходящей к Аристотелю, логики, в структурах, где принцип *tertium non datur* утрачивает свою общезначимость и где появляются модальности, вводятся конструкции, изображающие логику микромира и другие "не-стандартные" реалии бытия и мысли.

Что касается гуманитарной сферы — наук о человеческом духе, языка, искусства, религии и пр., то это для Вейля область, подлежащая прежде всего осмыслению, и этим-то она отличается, скажем, от аксиоматически строящейся математики, где кардинально-важную роль играет логическая дедукция. Однако между гуманитарным, с одной стороны, и математическим и естественнонаучным, с другой стороны, существует глубокая связь. И тут, и там присутствуют символические формы и имеет место знаковое конструирование. И там, и тут необходимы понимание, истолкование, рефлексия как над изучаемым и осмысляемым, так и над тем, как изучение и осмысление производится наукой и человеческим Я. Суть дела — в различном "удельном весе" рефлексии и в несовпадении ее конкретных форм. Для гуманитарных и других "исторических", как называет их Вейль, наук характерна "герменевтическая" интерпретация, в естественно-математических же областях преобладает символическая конструкция. При этом Вейль решительно против любых попыток разрыва, противопоставления понимания — предмета герменевтики как основы наук о духе, и естественно-научного обьяснения. Отмечая мистический ореол, которым подчас окружают слова "понимание" и "интуиция", Вейль подчеркивает, что в математике можно и должно более трезво смотреть на вещи и трактовать процессы понимания в терминах взаимодействия аналитической и синтетической компонент математического мышления.

Религиозность Вейля определяет его мягкий, но последовательный и решительный антипозитивизм, несогласие с какими бы то ни было вариантами плоского "безбожия". Последнее неприемлемо для него — и это я хочу подчеркнуть, — в частности, по этическим соображениям: позитивизм закрывает путь к осмыслению самоценности и уникальности каждой человеческой личности и тем самым лишает мир нравственного начала.

Позиция Вейля последовательно гуманистична в самом возвышенном смысле. Можно сказать, что это ведущий мотив его философско-математических исканий. Математика является для него продуктом активности творческого человеческого духа, устремленного в "открытый мир". Отсюда проблема соотношения "Я", внутренне присущего субъекту ("имманентного" единства индивидуального ума, в отношении которого только и правомерны вопросы о смысле жизни, справедливости и совести), с одной стороны, и "Я" человека социального, погруженного в мир тревог и надежд, субъекта и вместе с тем объекта истории, с другой. Этот вопрос, как мы отлично понимаем, глубоко нравственен: ведь от того, как личность и общество его решают, зависит поведение людей и масс. а XX век показал, каковы бездны морального падения, до которых может прийти — или быть доведен — человек; но наш век высветил и огромные силы, тающиеся в деятельном добре, противостоящем злу.

Сказанное проясняет внутренние мотивы безусловного демократа и зма Вейля — во всем, будь то вопросы культуры, науки, образования или политики. В последней он осуждал "магию слов", заглушающую голос разума. "Ученый, — говорил он, — обязан пробиваться сквозь туман абстрактных слов и достигать незыблемого скального основания реальности" (с. 8). Непреклонный сторонник прав личности, свободы выбора и простора для творчества, Вейль был непримирим по отношению к режиму, который смотрел на научную объективность как на "предрассудок, относящийся к той же эпохе, что и свободная конкуренция между отдельными труженниками, предприятиями или странами" (с. 320). Его неприятие тоталитаризма и эмиграция из нацистской Германии были также естественны, как глоток свежего воздуха для человека, задыхающегося в смрадной атмосфере нечищенного свиного хлева.

Пророческой была озабоченность Вейля сохранением культурной и научной преемственности. Как свидетельствует испанский философ Х. Ортега-и-Гассет, беседовавший с Вейлем в 20-х годах, последний не исключал того, что "сложное здание" строгой науки может придти в упадок и от него может остаться лишь "гротескный" памятник, если хотя бы одно поколение утратит способность его понимать. Нужна "подготовка в течение многих веков", чтобы выработать тот род понимания, который это здание предполагает. Если разрывается культурная преемственность, то от науки остается пустая оболочка, которая если и будет существовать, то без внутреннего смысла¹. Последующая история родины Вейля, судьбы науки и образования в этой стране (они описаны в докладе "Университеты и наука в Германии"), — да и не одной только ее — показали реальность опасений великого математика. Пусть читатель поразмыслит, сколь актуальны приведенные мысли Вейля в контексте нынешних раздумий над нашей собственной новейшей историей².

В историческом развитии земной цивилизации встречаются — в числе прочих — творцы крайних типов. Имена одних, например, гремят при их жизни, но стушеваются со сменой десятилетий и веков. Имена других, кого недооценивали современники, время вырисовывает все ярче. Я думаю, Вейль принадлежит, скорее, ко второму типу. — Нет, конечно, современники видели в нем большого математика, много сделавшего и в теоретической физике, естественного преемника Гильберта. Но был ли он для них крупным мыслителем? Вряд ли. Ортега-и-Гассет мимоходом, в примечании к своей книге "Восстание масс" (1929), приводит свой разговор с "физиком Вейлем". Ныне мы, однако, все явственнее убеждаемся в масштабности мысли автора "Континуума" и "Открытого мира", бившегося

¹ См.: Beisswanger P. Die Phasen in Hermann Weyls Beurteilung der Mathematik // Mathematisch-Physikalische Semesterberichte. Neue Folge. — 1965. — Bd XII, Heft 2. — S. 134.

² Ср. предвосхищения В. Ходасевича в его знаменитой речи о Пушкине (Колемный треножник. — 1921; переиздание: Знамя. — 1989. — № 3) и горькое сетование П. Флоренского (в письме В.И. Вернадскому от 5.XII.1930 // Новый мир. — 1989. — № 2. — С. 201) по поводу безнадежной утраты "общих линий умственной деятельности".

над тайной тех сторон мира и познания, которые неизбежно ускользают от философов, не являющихся вместе с тем деятелями в конкретных науках, и от ученых — математиков или физиков, пренебрегающих жгучими проблемами этики, мировоззрения и метода. Сказанное объясняет причину удивительной с о в р е м е н н о с т и Вейля, современности, которую не может не почувствовать каждый, кто благожелательно вдумается в переливы граней его духовного наследия.

Одно замечание, вызванное спецификой отечественной читательской аудитории. Философские высказывания Вейля могут подчас показаться странными и неприемлемыми — ведь он широко пользуется мало знакомым у нас языком Майстера Экхарта, Фихте, Кассирера, Брауэра и особенно Гуссерля. Нет спору, не со всем методологическим, логическим, философско-математическим у Вейля можно соглашаться, здесь неизбежны разные точки зрения. Далеко не во всем уверен и он сам. Но за непривычной терминологией "трансценденции" (под которой большей частью имеется в виду неисчерпаемая для познания реальность), "имманентного Я" (т.е. личности) или "априорности" (обычно использующейся им для выражения способности человека строить абстрактные символические конструкты) надо стремиться разглядеть существо дела и, выделив главное, отметив спорное, подвергнув критике уязвимое, ввести искания Вейля, анализирующего вопросы философии науки, в общую сокровищницу современной культуры. Сделать это в краткой статье, разумеется, нельзя, и я с легким сердцем отказываюсь от этого, будучи уверенным, что детальные исследования творчества этого замечательного ученого и мыслителя не замедлят последовать.

* * *

Имеется, однако, тема, мимо которой я не могу пройти. Это — созвучие многих Вейлевых мыслей тем положениям, которые развивали ряд выдающихся представлений нашей, отечественной, науки и философии.

Как явствует из "Воспоминаний о пережитом", наибольшее влияние, если не считать И. Канта, которого Вейль читал в начальный период своего духовного развития, на него оказали Гуссерль, Фихте и Майстер Экхарт. Именно они определили постановку главного для Вейля вопроса — о д е й с т в и и с м ы с л е: "В духовной жизни человечества отчетливо различаются, с одной стороны, *действия*, созидания форм, конструирования, это, которой посвятили себя активно работающие художники, ученые, инженеры, государственные деятели и которая подчинена императиву объективности — и сфера *осмысления*, с другой стороны; эта сфера реализуется в понимании и на нее следует смотреть как на борьбу за *смысл* наших действий как собственную сферу философа. Творческому деянию, не контролируемому осмыслением, грозит опасность утраты смысла — оно может сбиться с пути и, окостенев, превратиться в рутину; но и осмысление подстерегает опасность — вырождаться в подрывающие творческие силы человека "рассуждения по поводу", которые никого ни к чему не обязывают" (с. 40—41).

В поисках путей преодоления этих опасностей Вейль обращается прежде всего к феноменологии Эдмунда Гуссерля¹. Влияние последнего на свое философско-математическое мышление Вейль признавал самым значительным, и оно действительно прослеживается во многих Вейлевых высказываниях и работах: к феноменологии автор "Континуума" обращался неоднократно, пытаясь, критически переосмыслив, "переложить" ее на язык образов математики и физики. Но, как нетрудно заметить, давалось это ему с трудом². Быть может, задача была бы облегчена, будь он знаком с

¹ Можно ли считать столь большое внимание, которое Вейль уделяет феноменологии, чем-то случайным, вызванным "внешними" обстоятельствами биографии Вейля? Я думаю, нет. Ибо Гуссерль оказал идейное воздействие не только на Вейля, но и на ряд других математиков. Назову лишь Оскара Беккера, имя которого не раз встречается на страницах Вейля, причем нередко в интересующем нас контексте. Отмечу, что Беккер был одним из создателей модальной логики, что ему принадлежит известный труд "Основания математики в их историческом развитии" (1964) – комментированного собрания текстов классиков математики, логики и философии; что книга Беккера "Существование в математике" (1927) представляет интерес и в наши дни. Будучи учеником Гуссерля, Беккер в философии математиков занимал Вейлево-Брауэровы позиции. В чем здесь дело?

Немецкий философ Эдмунд Гуссерль (1859–1938) получил добротное математическое образование, позволявшее ему, если надо, говорить с математиками на понятном им языке: он учился у Леопольда Кронекера и Карла Вейерштрасса; его первая диссертация (Promotion) была посвящена вопросам вариационного исчисления; лишь после этого Гуссерль обратился к философии, где его учителем был известный философ и психолог Франц Brentano; вторая диссертация Гуссерля (на право доцентуры – Habilitation) носила название "О понятия числа. Психологический анализ". Первая большая работа Гуссерля – "Философия арифметики" (1891) – подверглась критике со стороны Фреге, указавшего на несостоятельность развивавшейся в ней дескриптивно-психологической концепции математики. Именно под влиянием Фреге (а не в результате восприятия идей Brentano, как полагал Вейль) пришел Гуссерль к категорическому антипсихологизму в истолковании природы математического и логического знания. Документальным выражением этого перехода – перехода, означавшего резкий разрыв с эмпирико-субъективистским истолкованием науки, распространенным во второй половине прошлого века (Дж. Ст. Милль, В. Вундт, Б. Эрцманн, Хр. Зигварт и др.), – явился упоминаемый Вейлем труд Гуссерля "Логические исследования" (1900 – 1901) и последующие его работы. Так возникла "феноменология" – оригинальное идеалистическое философское направление, сохраняющее значительное влияние на Западе и в наши дни. Подробнее см. в моей статье: Феноменология в контексте философии математики: Гуссерль – Фреге – Беккер – Вейль // Философские науки. – 1989. – № 2.

² Что математик-интуиционист Вейль не все принимал у философа-идеалиста Гуссерля, вполне понятно. Ему, например, было трудно согласиться с тем, что "между сознанием и реальностью поистине зияет смысловая пропасть" (с. 49). И Вейль привлекает воззрения классика немецкой философии конца XVIII – начала XIX вв. Иоганна Готтлиба Фихте, представляющие собой, говорит автор доклада "Познание и осмысление", "более радикальный" гносеологический идеализм. Фихте, мыслитель, подчеркивавший свободно-порождающую деятельность разума, его "продуктивное воображение", трактуется как "чистой воды конструктивист": Вейль не очень заботится об историко-философской корректности подобного истолкования – для него важно противопоставить конструктивистские элементы фихтевской философии уязвимым, с его точки зрения, сторонам феноменологии. При этом Вейль понимает, что построения Фихте – "топорная работа". Иначе и не мог отнестись к ним математик, как раз в годы наиболее интенсивных философских раздумий развертывавший тончайшую сеть аргументации в своем "Континууме".

трудами идейного предшественника Гуссерля — Владимира Сергеевича Соловьева (1853—1900), отличающимися поразительной ясностью. Ибо мысль этого русского философа, проникнутая пафосом "оправдания истины" и исканиями "внутренней связи или общего смысла (ratio)" всех существенных сторон человеческих знаний¹, оценивается ныне как явное предвосхищение концептуального аппарата феноменологии²; об этом свидетельствуют, например, развиваемые Соловьевым тезисы о "безусловном мышлении", о его превращении в "становящийся разум истины".

Но русская мысль шла не только путями, параллельными гуссерлевским; но и расходившимися с ними, причем в пунктах, созвучных Вейлю. Так, оппонентом Гуссерля выступил Лев Шестов (1866—1938). Сказать о его интерпретации феноменологии здесь стоит, в частности, потому, что шестовское истолкование Гуссерлева "познания сущности" (*Wesenserkentnis*), данной в явлениях ("феноменах"), помогает лучше понять ту сторону феноменологии, которая привлекала к себе Вейля. В статье "Памяти великого философа (Эдмунд Гуссерль)"³, написанной в год смерти их обоих, Шестов выявляет именно тот аспект учения Гуссерля, который имел в виду Вейль, продумывая свои позиции в философии математики и естествознания.

Как рассказывает Шестов, при первой же встрече с Гуссерлем, когда речь зашла о сущности философии, последний заявил: философия есть осмысление (*Besinnung*). — Зачем же с точки зрения Гуссерля нужно это *Besinnung*, ставит вопрос Шестов. И отвечает: чтобы обосновать существование науки об "абсолютных истинах". "Что истинно, то абсолютно истинно, само по себе; истина тождественно едина, воспринимают ли ее в суждениях люди или чудовища, ангелы или боги", — цитирует он немецкого философа. Истина имеет последней своей опорой и н т у и т и в н у ю о ч е в и д н о с т ь, и тут-то и нужно о с м ы с л е н и е, исходный пункт которого составляет так называемая феноменологическая редукция. Смысл этого замысловатого понятия в изложении Вейля не очень ясен, и мы призовем на помощь Шестова: "Чтобы пробиться к истокам, к началам, к корням всего, — комментирует Гуссерля русский философ, — нужно оторваться от всего реального, от изменчивых, преходящих явлений, сделать *epoché* (. . .), ввести их в скобки, так сказать. Тогда за скобками останется чистое, идеальное бытие", которое и есть то, истинность чего гарантирована от каких-либо сомнений "самой очевидностью".

Нетрудно видеть, что идея с а м о о ч е в и д н о с т и — в форме л о г и к о - м а т е м а т и ч е с к о й и н т у и ц и и, о которой также говорил Гуссерль, — это и есть то главное, что Вейль "взял на вооружение" из арсенала феноменологической философии: как метко выразился один из исследователей математического творчества Вейля⁴, именно эта идея служила

¹ См. Соловьев Вл. [Теоретическая философия]: разделы "Достоверность разума" и "Форма разумности и разум истины" // Сочинения, т. 1. — М.: Мысль, 1988.

² Ср. статью А.В. Гузельи "Философия любви" в т.1 "Сочинений" Вл. Соловьева.

³ Эта статья Шестова перепечатана в журнале: Вопросы философии. — 1989. — № 1. — 144—160; ниже мы цитируем ее по данной публикации.

⁴ Weisswanger P. Op. cit. S. 139.

ему для того, чтобы "высводобить арифметику натуральных чисел из оков учения о множествах" — порвать, добавлю я, с тем "курьезом", когда естественное для математика (да и любого человека вообще) понятие целого положительного числа появляется где-то в конце длинного теоретико-множественного туннеля.

"Миросозерцания могут спорить, только наука может решать, и ее решения носят на себе печать вечности" — приводит Шестов слова Гуссерля. Вейль, конечно, понимал, что это преувеличение, что научные истины редко бывают такими, какими хотел их видеть основоположник феноменологии. Но тезис Гуссерля играл для Вейля роль своего рода категорического императива научной частности — роль идеала, к которому должен стремиться ученый. Работа в науке обостряет совесть ищущего истину, говорил Вейль в докладе "Познание и осмысление"; для математика нелегко решиться высказываться на философские темы. Но, видимо, иной диктат — диктат мыслителя — заставлял его неизменно это делать. Ибо "разве не перестал бы быть философом тот, кто перестал жить в состоянии удивления и умственного беспокойства?" — воскликнул Вейль, завершая свой доклад в Колумбийском университете в 1954 году (см. с. 74).

Выше я привел слова Вейля, в которых он различает область действия, включая знаково-теоретические построения (именно к этой области относится математика и теоретическая физика, где Вейль работал как ученый), и сферу понимания, осмысления, связанную с "имманентным Я", сферу, через которую в область действия проникает свет разума. Несколько "снижая" постановку проблемы самим Вейлем, можно сказать, что человек знает больше, чем может выразить в языке и знаково-конструктивной деятельности: в пользу такого вывода говорят последние психологические и логико-методологические исследования¹. В этой связи нелишне отметить, что данный аспект познания — только в более широком контексте анализа человеческой активности как целостного процесса, отнюдь не все стороны которого улавливаются на путях психологии и логики, — давно присутствовал в нашей отечественной научной и философской мысли (существенно продолжавшей и развивавшей давнюю традицию западно-европейской философии и восточной мудрости). Так, он явственно просматривается у Владимира Соловьева; предполагал его и Павел Флоренский. О несовпадении науки и знания — последнее шире науки — говорил наш генетик, один из создателей учения о наследственности атомного века — Николай Владимирович Тимофеев-Ресовский².

В свете сказанного понятно, почему названные ученые-мыслители, от Соловьева до Вейля, решительно отвергали позитивизм. Принципиальную основу негативного отношения к этому до сих пор influentially на Западе направлению точно сформулировал тот же Вл. Соловьев. Охарактеризовав позитивизм как соединение "так называемых положительных или естественных наук посредством одного общего метода, ограничивающего их познанием наблюдаемых явлений и их внешних соот-

¹ Ср., например, книгу Поляни М. Личностное знание / Пер. с англ. — М., 1985.

² Эти его слова звучат в отснятом о нем документальном фильме.

ношений", он детально показал, почему притязание позитивизма "быть всеобщим мировоззрением" совершенно неосновательно¹. Русский философ имел в виду позитивистов своего века — Огюста Конта, Джона Стюарта Милля, Герберта Спенсера, — но его аргументация вполне приложима к "неопозитивизму" XX столетия, апеллирующему к математической логике, и я предоставляю читателю самому убедиться в этом.

При позитивистском подходе к математике и логике обосновать их пытаются, обращаясь либо к психологии, либо к "приборно" трактуемым данным физического знания (так называемый физикализм). Вейль, следуя Гуссерлю, подобный подход решительно отвергает. Эта позиция отчетливо выражена, например, в его оценке методологических установок Феликса Клейна. Вейль сожалеет, что Клейн "оставался в плену догм своего времени, отмеченных эмпиризмом и психологизмом, крайним выразителем которых явился Мах и которые ныне начинают становиться все сомнительнее, как раз если подходить к ним с беспристрастной эмпирической точки зрения" (с. 254). Вспомним, что с Маха начинается та философская традиция, которая в 20-х — 30-х гг. привела к формированию платформы логического позитивизма деятелями известного Венского кружка (М. Шлик, О. Нейрат, Ф. Франк, Р. Карнап и др.), платформы, трансформировавшейся впоследствии в концепцию логического эмпиризма (В. О. Куайн)².

В противовес психологизму и эмпиризму Вейль разрабатывает систему представлений о конструктивно-символической природе математических и логических наук. В ней он широко использует концептуальный арсенал и фактический материал детально разработанной теории символических форм Эрнста Кассирера, наполняя ее математическим содержанием. Именно с такого рода понятийным аппаратом в руках подходит Вейль не только к арифметике и алгебре, но и к топологии, геометрии, анализу — разделам, где фундаментальную роль играет идея непрерывности. Мысли, идущие во многом в одном направлении с мыслями Вейля, развивал в нашей стране ученый, инженер, философ и богослов Павел Александрович Флоренский (1882—1937?); для него наука, включая математику (в которой он проявил себя как самостоятельный исследователь еще в студенческие годы) — тоже была символическим описанием мира; именно средствами знаковых систем как неких духовно-материальных структур, с его точки зрения, оперируют различные области культуры, а научная деятельность в конкретных областях — и, разумеется, в математике — ведется с учетом их символического представления и средствами подходящих знаковых конструкций. В духе такого рода взглядов Флоренский, подобно Вейлю, трактует пространственно-временной континуум и его отображение в сознании.

Сходство общей устремленности мысли Флоренского и Вейля — при всем различии их терминологии и концептуального аппарата — подчас по-

¹ Соловьев Вл. Сочинения, т. 1. — С. 125, 138.

² Описание предьстории и истории Венского кружка, а также их связи с современным западным логическим эмпиризмом можно найти, например, в кн.: Koppelberg D. Die Aufhebung der analytischen Philosophie. Quine als Synthese von Carnap und Neurath. — Frankfurt am Main, 1987.

ражает. Достаточно сопоставить Вейлев анализ "двуликости" континуума и его математического выражения, проведенный в шедевре, изданном им в 1918 году, с воззрениями Флоренского, который рассматривает гносеологический образ как явление в четырех измерениях. Для Вейля время — "наиболее фундаментальный континуум", и весь анализ соотношения наглядно-созерцаемого и математического континуума, абстрактной схемой которого оказывается мир действительных чисел, строится вокруг понятия времени (см. "Континуум", § 6 главы II). Флоренский также стремится осмыслить сущность времени, длительности или, как он говорит, *т о л щ и н ы* предметов по четвертой координате¹. Вейль подчеркивает, что "уже понятию точки континуума недостает необходимой опоры в наглядном созерцании" (с. 153) — Флоренский констатирует, что предмет только трехмерный, то есть нулевой длительности, "нулевой толщины во времени, есть отвлеченность и никак не может считаться частью действительности"; "сечение действительности во времени" не может быть в нашем восприятии "со-временным или одно-временным", — оно обязательно имеет в разных точках различные временные характеристики: "мы рассматриваем и сознаем разные части образа не в одно и то же мгновенье". Вейль проводит умственный эксперимент, истолковывая точечное восприятие как структуру, состоящую из "вкладываемых один в другой моментов переживаний", — Флоренский пишет о том, что о времени образа нельзя судить, исходя из времени "других, ему посторонних (мысленных образов-воспоминаний)", и подходить к нему с мерою этого последнего; нужно или войти в "собственное время" данного образа, рассматриваемого как замкнутое в себе единство, или же "подняться созерцанием до образа, конкретно объединяющего тот образ и другие, от которых мы хотели бы отправляться". Эта последняя мысль перекликается с тем, что говорит Вейль о непрерывности времени, "переливании" его от точки к точке. Флоренский смотрит на время, "четвертую координату образа", как на "собственное его, этого образа, время (. . .) Это время не есть время внешнее, под каковым разумеется лишенное яркой индивидуальности время безжизненных вещей", но оба эти вида времени связаны друг с другом. Вейль же, отмечая несовпадение наглядно созерцаемого и математического континуума и говоря о переходе от одного к другому, подчеркивает, что побуждения к этому переходу столь же разумны, что и те, которые заставляют нас, изучая природу, стремиться "проникнуть "за" пределы той реальности, которая основывается на актах опыта и в которой мы живем как люди, составляющие часть природы" (с. 155). Акценты разные, но перекличка идей достаточно красноречива. . .

Подобно Вейлю, ссылающемуся на Гуссерля (в свою очередь следующему, не ведая этого, по пути Вл. Соловьева), Флоренский исходит из фундаментальной значимости "интуитивной дискурсии", или "дискурсивной (то есть интеллектуальной) интуиции", с которой он связывает идею бесконечности. Правда, бесконечность Флоренского — не итеративно по-

¹ См. фрагмент его рукописи "Анализ пространственности [и времени] в художественно-изобразительных произведениях" // Социологические исследования. — 1988. — № 1. — С. 101–114; ниже цитируется этот источник.

рождаемая потенциальная бесконечность Вейля (и Брауэра), а бесконечность актуальная, канторовская: свой подход, базирующийся на понятии символа, русский ученый, по-видимому, не завершил сколько-нибудь явными конструктивистскими выводами.

Путь, на который в математике не вступил Флоренский, в России осваивали другие. Здесь надлежит назвать прежде всего друга Флоренского (и однокашника его по математическому отделению физико-математического факультета Московского университета) — Николая Николаевича Лузина (1883—1950). Но сначала несколько слов об эволюции взглядов Вейля на основания математики. В развитии его философско-математической концепции можно выделить два периода: период, отмеченный работой "Континуум", и период, последовавший за знакомством Вейля с идеями Брауэра, когда Вейль переходит на позиции интуиционизма. Следует, однако, отметить, — и это ясно видно из статьи "Математика и логика", — что, принимая в целом брауэровские воззрения, Вейль вместе с тем не отказывается и от своих первоначальных представлений: они кратко изложены в разделе 5 ("Конструктивистский компромисс") названной статьи.

Первоначальная философско-математическая концепция Вейля обычно рассматривается как тематически связанная с идеями Анри Пуанкаре, развитыми им в начале века в полемике с Расселом и Гильбертом; в отличие от подходов логицизма и формализма Пуанкаре настаивал на том, что преодоление трудностей обоснования математики (обусловленных, в частности, антиномиями логики и теории множеств) следует связывать с идеей интуитивной первичности итерационно-индуктивных процессов и недопустимостью в математике (и логике) так называемых непредикативных определений. Непредикативными, грубо говоря, называются определения, в которых определяемый объект уясняется (вводится, конструируется) в терминах, предполагающих либо допускающих (в определяющей части определения) неявную ссылку на него самого. Поскольку непредикативные определения не позволяют в общем случае сводить определяемое к уже введенным понятиям (объектам) — подразумевая, что определяемое так или иначе известно, — на них можно смотреть как на чреватые ошибкой "порочного круга" (о чем так настойчиво говорит Вейль) и в этом смысле считать их неконструктивными.

Подход, требующий исключения непредикативных определений и замены — там, где это возможно, — определениями предикативными (т.е. явно задающими определяемое), имеет различные оттенки и именуется по-разному: предикативизмом, полуинтуиционизмом, эффективизмом (в зависимости от расстановки акцентов предпочтительным оказывается тот или иной термин). Он, однако, содержит то общее, что в сфере логического обычно сохраняются "традиционные" принципы, в частности закон исключенного третьего; что касается области собственно-математической, то в ней ориентируются на содержательное понимание (это, правда, не препятствует построению логико-математических формализмов, претендующих на экспликацию соответствующего математического и логического содержания).

Замысел, реализованный в "Континууме", как раз и состоял в разработке методологии — она приводит к так называемой предикативной иерархии и пути ее формального представления показаны в помещенных в настоящей книге комментариях, — которая позволяет при построении анализа исключить, используя вейлевские дефиниционные принципы, непредикативные определения и тем самым реализовать идеал конструктивности. На первый план при этом выходит проблема о с м ы с л е н н о с т и математических выражений и существования математических объектов, связываемая с их принципиальной предикативной определемостью.

Мысль Н.Н. Лузина двигалась в сходном направлении. Он развивал далее тот вариант полунтуитионизма, который был представлен виднейшими фигурами французской школы теории множеств и функций (Э. Борель, Р. Бэр, А. Лебег). Следуя в русле их идей, Лузин подвергал критике принципы классической теоретико-множественной математики с позиций возможности их конструктивной (эффективной — в очерченном выше смысле) определемости (проверяемости, осуществимости). Здесь обнаруживаются многие параллели в мышлении Вейля и Лузина. Вспомним эмоционально-приподнятое начало Предисловия к "Континууму", где Вейль говорит, что здание анализа в значительной мере возведено на песке и после замены его зыбкого основания надежными опорами "понесут они не все из того, что ныне принято считать покоящимся на прочной основе" (с. 91). А теперь послушаем Лузина: "Современное состояние математического анализа убедительно доказывает, насколько важно установить точное разграничение между математическими сущностями, которые рассматриваются как *существующие*, и *другими*, реальность которых лишь кажущаяся¹ и которые поэтому требуют по крайней мере переосмысления".

Вейль видит истоки математики в интуитивно понятном итерационном процессе; Лузин говорит о шагах "неограниченного регулярного процесса, употребляемого для получения решения предложенной математической проблемы"². Строя теорию континуума, Вейль стремится удалить из нее все, что не является содержательно осмысленным с точки зрения принимаемых им принципов, — Лузин утверждает необходимость проведения границ "между математическими сущностями, которые в самом деле реальны, и теми, которые кажутся реальными, но на деле не имеют никакого substratum и которым ничего интуитивно не соответствует"³. При этом оба принимают принцип *tertium non datur*. Вейль формулирует этот принцип уже в самом начале "Континуума", связывая его с условием осмысленности. "Только *осмысленному* предложению соответствует некоторое суждение, только *истинному* суждению — некоторое *положение вещей*, положение же вещей существует, и все тут"; и "если предложение "*a* обладает свойством *E*" выражает некоторое суждение, то его отрицание — "*a* не обладает свойством *E*" — также выражает некоторое суждение, и тогда формальная логика с полным основанием утверждает, что из этих двух суждений

¹ Лу з и н Н.Н. Собрание сочинений, т. 2. — М., 1958. — С. 23.

² Там же. — С. 343.

³ Там же. — С. 23.

всегда одно должно быть истинным, а другое ложным" (с. 94–95). Лузин по существу рассуждает так же; говоря словами авторов предисловия ко второму тому его "Собрания сочинений", он занимает ту позицию, что "из двух противоположных непротиворечивых утверждений теории множеств наука должна отобрать то, которое истинно, либо установить, что самая постановка вопроса теряет смысл"¹.

Для Вейля первична содержательная математика, а все ее формализации — вторичны: "Обобщение, формализация и аксиоматизация требуют существования некоторого математического содержания (Substanz)" (с. 39). Лузин также считает исходным содержательный анализ понятий, будучи убежден, что формальные методы как таковые "не могут никогда быть успешными вследствие (их) грубости и бедности"². И подобно Вейлю, он отдает предпочтение соображениям интуитивного (и "экспериментального", по его словам) рода — как эвристически более ценным, — а не вопросам непротиворечивости теории.

Конечно, подход Вейля и идеи Лузина — не одно и то же. У Лузина отсутствует разработанная концепция обоснования анализа, использующая средства как математического, так и логического конструирования. Но ведь и Вейль, создав "Континуум", смотрел на свою работу лишь как на попытку, требующую проверки и развития. Вспомним его слова: "Независимо от того, удалось ли мне или нет найти здесь в полном объеме требующиеся логические принципы построения — принципы эти опираются, с одной стороны, на понятия "и", "или", "не", "существует", а с другой стороны, на специфически математические понятия множества, функции, натурального числа (итерации), а их установление во всяком случае является вопросом не соглашения, а логического познания, — совершенно ясно одно: негативная часть моих рассуждений имеет значение уже благодаря содержащейся в ней критике существующих до сих пор оснований анализа, так как указывает на содержащийся в них порочный круг" (с. 124).

Мы знаем теперь, что очерченный выше Вейлев подход может быть проведен вполне строго. Но в 20-х годах это было не очень ясно. Поэтому не удивительно, что "эффективист" Лузин, в отличие от Вейля, "отсекавшего" не укладывавшиеся в рамки его подхода части анализа, не желал отказываться от классической математики, стремясь лишь к переосмыслению ее "идеалистических" (как он выражался) понятий на основе "реалистически" (эффективистски) приемлемых принципов³. Естественно, что Лузин не принял интуиционизма Брауэра (так же как и формализма Гильберта), в частности, тех следствий для логики, которые вытекают из брауэровских идей. Имея в виду интуиционистскую логику — логику без закона исключенного третьего, — Лузин писал в 1929 году: "даже для нас, математиков, привычных к существованию многих геометрий, существование

¹ Новиков П.С., Келдыш Л.В. От редакторов тома // Там же. — С. 7.

² Лузин Н.Н. Собрание сочинений, т. 2. — М., 1958. — С. 562–563.

³ Ср. анализ философских посылок полуинтуиционизма Н.Н. Лузина в ст.: Новоселов М.М. Эффективизм // Философская энциклопедия, т. 5. — М.: Советская энциклопедия, 1970. — С. 591–592.

многих логик было бы, право, очень печальной роскошью"¹. Но — каких только парадоксов не бывает в живой динамике научной мысли! — еще з а д в а г о д а д о этого заявления тот же Лузин дал категорически положительный отзыв о работе, направленной как раз на создание логической системы без этого закона.

Прежде чем об этом говорить, вернемся к Вейлю. Как я уже сказал, после знакомства с работами Брауэра, Вейль принял установки интуиционизма. Документальным свидетельством этого является его работа 1921 года "О новом кризисе оснований математики"². Однако Вейль не просто принял интуиционистскую концепцию: в известном смысле он возвысился над представлениями Брауэра — так же как и над воззрениями Гильберта. Во всяком случае, в этом смысле можно истолковать позицию, изложенную в следующих его словах: "Как ни крути, а *очевидность* остается последним источником истины и познания. Брауэр основывал на ней математику, Гильберт — уверенность в (ожидаемой) непротиворечивости математики. Но очевидность никогда не может привести к установлению окончательных правил и уберечь от заблуждения. Поэтому границы, до которых простирается брауэровская математика, остаются смутными; и нельзя быть также уверенным в том, что, строя математические рассуждения в соответствии с гильбертовской программой, разные авторы порой не перегнут палку в отношении очевидности" (с. 64). Позиция Лузина была более резкой. Творчески работавший в дескриптивной теории множеств, он критически оглядывал теоретико-множественное мышление так сказать изнутри него самого. Это, видимо, и определило неприятие брауэровской концепции: в полном ее виде он считал последнюю "неприемлемой ввиду ее разрушительного действия в математике", комментируют его позицию П.С. Новиков и Л.В. Келдыш³; не был согласен он и с подходом Гильберта.

Воззрения Брауэра и Гильберта — в их центральных пунктах — выдержали, однако, испытание временем, и позиция Вейля в этом отношении была, так сказать, вещей. При всем "сродстве" взглядов Вейля и Гильберта на роль знаковых систем в математике, согретая своеобразным философским светом атмосфера Брауэровой мысли была ближе Вейлю. Одним из коренных положений Брауэра был отказ от принципа исключенного третьего как недопустимого при рассуждениях о бесконечных совокупностях. Отказ этот означал разрыв с одним из главных положений аристотелевской — классической двузначной — логики. Вейль пошел в конце концов на этот разрыв. В докладе "Математической способ мышления" он говорил: "Конструктивный опыт перестает подкреплять принципы аристотелевской логики, когда эти принципы применяются к экзистенциальным и общим суждениям, относящимся к бесконечным областям, таким, как последовательность целых чисел или континуум точек" (с. 21).

¹ Лузин Н.Н. Собрание сочинений, т. 2. — М., 1958. — С. 468.

² Эта работа Вейля вошла — в качестве части III — в опубликованный в 1934 г. сборник: Вейль Г. О философии математики. — М.: ГГИИ, 1934.

³ Новиков П.С., Келдыш Л.В. Цит. соч. — С. 6.

Впервые свои идеи, включая отказ от принципа *tertium non datur*, Брауэр высказал в диссертации, относящейся к 1907 г. Независимо от Брауэра аналогичные представления, правда не в столь общей форме и без связи с общими вопросами логики, были высказаны в России математиком С.О. Шатуновским. Этот факт хорошо известен¹. Однако лишь сравнительно недавно было обращено внимание на то, что в нашей стране идеи логической системы без закона исключенного третьего были развиты, исходя из философских соображений, вне математики (хотя и по аналогии с некоторыми ее результатами — неевклидовыми геометриями). В 1910 г., 18 мая, Николай Александрович Васильев (1880–1940) — сын русского математика А.В. Васильева — в пробной лекции, предварявшей его вступление в должность приват-доцента Казанского университета, изложил замысел логической теории, в которой вместо закона исключенного третьего действует закон исключенного четвертого².

Замысел этот строился на убеждении, что "закон исключенного третьего должен быть совершенно удален из скрижали законов мысли"³, так как он не общезначим. В серии последующих публикаций (1912–1913, 1924) Васильев подробно изложил абрис того, что он назвал "воображаемой (неаристотелевой) логикой". В концепции Васильева было заложено большое многообразие логических "новаций", включая многозначность и паранепротиворечивость (то есть "терпимость" к противоречиям определенного вида) логических структур⁴. Для нас, однако, интересна та оценка вклада Н.А. Васильева, которую дал Лузин.

"Отзыв о работах Н.А. Васильева по математической логике, составленный проф. Н. Лузиным", датирован 4 января 1927 г. В нем мы читаем: "В последнее время в связи с пересмотром математики пришлось отказаться от привычных взглядов на бесконечность, и в частности пришлось потребовать для нее особой логики, существенно отличающейся от логики конечных вещей. Более точно: пришлось в связи с парадоксами, начавшими загромождать математику, отказаться от применения к бесконечным предметам (каковы: пространство, время, множество, число) *закона исключенного третьего* и заняться таким образом строительством новой логики, существенно отличной от аристотелевой, именно: *логики без закона исключенного третьего*". Упомянув далее разработку такого рода логики, которую ведет Брауэр и Гильберт, Лузин пишет: "К ним же примыкает по направлению известный математик и физик-теоретик Weyl (...) Тех же приблизительно взглядов придерживается французский математик Borel. — Таким образом, в настоящее время дело идет о создании для математики новой логики, такой, где закон

¹ См., например, Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. — М.: Наука, 1968. — С. 536–537.

² О жизни и творческом пути Н.А. Васильева см.: Бажанов В.А. Николай Александрович Васильев. 1880–1940. — М., 1988. Работы Н.А. Васильева по логике, разбросанные в разных изданиях, только недавно собраны в кн.: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. — М.: Наука, 1989.

³ Цит. по названной в предыдущем примечании книге В.А. Бажанова, с. 77.

⁴ См. книгу В.А. Бажанова, гл. 8.

исключенного третьего уже не входит как непременно долженствующий соблюдаться. Работы Н.А. Васильева посвящены созданию такой точно логики”. Отметив, что свои исследования Васильев начал, когда “и речи не могло быть о пересмотре математической логики”¹, Лузин заключает: “идеи Н.А. Васильева удивительным образом совпадают с новейшими усилиями, к которым должны прибегнуть математики силою вещей. История науки знает много примеров таких совпадений идей. Эти совпадения наилучшим образом выявляют объективную ценность совпавших мыслителей”².

На этом, пожалуй, наши сопоставления можно закончить. Последующая история брауэровско-вейлевских идей, как они были представлены в нашей стране, хорошо известна: это и работы по формализации интуиционистской логики (В.И. Гливенко), по разработке ее семантики и исследованию ее отношения к логике классической (А.Н. Колмогоров); это и “снятие” интуиционизма в отечественной школе конструктивной математики (А.А. Марков, Н.А. Шанин и их ученики), и многое другое — всего не назвать. А ныне идеи Вейля о символическом конструировании обрели жизнь в реалиях современной информатики.

Вопросы, над которыми бился Вейль-философ — это “проблема отношения между предметным содержанием, мыслью и высказыванием (<...>); проблема отношения между Я имманентного сознания, пребывающим в потоке одних только своих переживаний, и индивидуальным человеком, живущим в мире, подверженном смерти и общающимся с подобными себе существами” (с. 55). Такими словами обрисовал Вейль в работе “О символизме математики и математической физики” (1953) волновавшие его “великие философские проблемы”. И проблемы эти Вейль так для себя и не решил. “Односторонний теоретический план” подхода к ним, развивавшейся Гуссерлем, и фанатическая устремленность Фихте, — сказал Вейль в докладе “Познание и осмысление”, — разбивает вдребезги “исполненный отчаяния крик Иуды: “Почему именно я должен быть Иудой!” Нетрудно увидеть в этих словах Вейля перекличку с высказанным пятнадцатью годами ранее — тоже критически и тоже в адрес Гуссерля — тезисом Шестова о европейской мысли, которая “зачарованная самоочевидностями, считает себя “возвысившейся” над “откровенной” истиной, для которой человеческие слезы могущественнее, чем обнаруживаемые очевидностями необходимости”.

Истины Откровения постоянно стояли на горизонте Вейля после того, как он порвал с позитивизмом. Именно этот настрой, считал он, наполняет мышление “глубочайшим внутренним светом” (с. 5), в силу чего оно оказывается не каким-то набором жестких правил, а творением духа, единым во всех своих проявлениях, будь то интуиция и дедукция математика или прозрение и осмысление философа. “Наука, — писал Вейль

¹ В тезисах диссертации Брауэра выдвигалась только идея логики без закона исключенного третьего. Какая-либо логическая теория не строилась.

² Полный текст отзыва Н.Н. Лузина приведен в книге В.А. Бажанова, с. 137.

в статье о Феликсе Клейне, — это учение о значимом и действительном, о высшем объективном благе, которому смиренно служит человек, и вместе с тем это одна из разновидностей человеческого творчества, ради результатов которого не следует поступаться, однако, жизнью как высшей человеческой ценностью. Бог — вот вечно завершенное и вечно становящееся” (см. с. 252).

Свою философскую монографию ”Открытый мир” Вейль начинает главой ”Бог и Вселенная”; в ней универсум трактуется как космос, гармонически упорядоченный нерушимыми законами математики — науки о бесконечном. Бог для Вейля есть источник гармонии мира, а наука, особенно математика — путь к ее раскрытию, и движение по этому пути совершается посредством знакового конструирования. Напомню здесь слова Вейля, сказанные им в связи с идеями Николая Кузанского и Лейбница: взгляд, согласно которому математика отражает в конечных символах идеи, которые для Бога суть непосредственная данность бесконечного, ”в наше время мало находит сочувствия, и во всяком случае слишком односторонне теологичен. Убедительней звучит указание на *естественнонаучное* применение математики, на роль, которую она играет при конструктивном построении теории реального мира в физике” (с. 65). ”Теологичность” математики, таким образом, нисколько не противостоит для Вейля ее научным и практическим применениям, и мы знаем, какое большое значение придавал он нематематическим приложениям своих математических результатов, причем не только в физике, но и в биологии, искусстве и других областях¹.

”Свет не вне меня, а во мне” — в этих словах Фихте (они приведены в докладе ”Познание и осмысление”), я думаю, весь Вейль: без света, внутреннего света, для человека невозможно творчество как проявление его сущности и необходимое условие деятельного, сеющего добро, отношения личности к миру и другим Я. Источник света Вейль видел в Боге — так же как и Владимир Соловьев, и Павел Флоренский. Но Вейль понимал, что на этот вопрос можно смотреть и иначе: ведь ”первопричина” света для сознания скрыта (см. с. 51). Замечу в этой связи, что религиозно-идеалистическое понимание мира и познания, развиваемое большими умами, нисколько не отвергает ”света разума”, если им преисполнены и материалистически мыслящие философы и ученые; здесь достаточно указать на трогательно-уважительное отношение русского философа-богослова С.Н. Булгакова к Людвигу Фейербаху или на высокую оценку нравственной стороны Н.Г. Чернышевского как ”мудрого и справедливого человека”, которая была дана Владимиром Соловьевым².

¹ Взгляды Вейля на взаимоотношение математики и естествознания, особенно физики, проанализированы в статье: P ester A. Mathematik—Naturwissenschaft—Philosophie. Zum 100. Geburtstag von Hermann Weyl // Deutsche Zeitschrift für Philosophie. — 1985. — Bd 33, Heft 12. — S. 1094—1101.

² Имеются в виду эссе С.Н. Булгакова ”Религия человекобожества у Л. Фейербаха” (М., 1906) и статья В.С. Соловьева ”Из литературных воспоминаний. Н.Г. Чернышевский” (Письма Владимира Сергеевича Соловьева, т. I. — СПб, 1908).

В статье ”Г. Вейль и методологические проблемы науки” — статье двадцатилетней давности¹ — я уже характеризовал теолого-идеалистическую сторону взглядов Вейля, и не стану повторяться². Добавлю лишь, что отмеченные в этой статье мотивы пантеизма в мировоззрении Вейля, возможно, связаны с увлечением Майстером Экхартом: отстаивавшаяся этим средневековым мистиком идея единства человеческой души, мира и Бога³ предвосхищала близкие Вейлю положения философии немецкого классического идеализма конца XVIII — начала XIX вв.

Религиозно-идеалистический характер вейлевского мировоззрения бесспорен. Но ведь известно, что ”умный” идеализм, поднимающий ”вечные” проблемы бытия и познания, гораздо проникновеннее и нравственнее примитивного материализма и плоского ”безбожия”. А в чем-чем, так уж в уме Вейлю не отказать! Я убежден, что именно этот тезис — его следует подчеркнуть — должен стать руководящим в нашем отношении к методологии Вейля, к его взгляду на мир. Ибо Вейлевы представления о познании, науке, о математике и логике, о человеке и его судьбе, как мне кажется, много богаче и содержательнее, чем, скажем, философия того же Рассела, позитивиста-атеиста.

Наследие Вейля ценно и поучительно прежде всего благодаря его исканиям истины, исканиям, в которых заложен запал гуманизма необычайной силы, громадное нравственное начало — боль души, которая заставляет нас сочувствовать человеку, вытолкнутому ”навстречу своей индивидуальной судьбе” (с. 51). Ныне, когда человечество вырабатывает — вынуждено вырабатывать! — новое мышление: и в политике, и в философии, и в науке, да не будем мы забывать Вейля. Он боролся за истину, понимаемую не просто как категория гносеологии или методологии, а прежде всего как нравственная ценность общечеловеческого характера. На немецком или английском языке для такой истины, кажется, нет подходящего слова. В русском — есть. Это — правда. Вейль всегда бился за Правду.

¹ Она представляет собой послесловие к русскому переводу ”Симметрии” Вейля.

² Мой взгляд на творчество Вейля теперь во многом иной; не под всем, сказанным 20 лет назад, теперь бы я поставил свою подпись.

³ Основные взгляды Майстера Экхарта были официально осуждены католической церковью в 1329 г.

КОММЕНТАРИИ

Все статьи Вейля, переведенные в настоящем издании (кроме "Континуума"), содержатся в его собрании сочинений (Weil H. *Gesammelte Abhandlungen*. — Berlin: Springer, 1968, Bd 1—4). Полную библиографию трудов Вейля см. в кн.: Вейль Г. *Избранные труды*. — М.: Наука, 1984. Ниже мы используем частично комментарии этого издания.

ЧАСТЬ I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ

(The Mathematical Way of Thinking)

Текст выступления Вейля на конференции, посвященной двухсотлетию Пенсильванского университета (17 сентября 1940 г.), был опубликован в журнале *Science* (1940. — V. 92. — P. 437—446) и в книге "Pennsylvania University Bicentennial Conference. Studies in the History of Science. Philadelphia" (1941. — P. 107—123). Данный в нем анализ общих принципов мышления математика, проведен, как обычно у Вейля, на широком философском и общенаучном фоне и с привлечением примеров из его собственной, к тому времени уже более чем тридцатилетней, математической практики.

1. См. об этом более подробно статью "Университеты и наука в Германии" в этом сборнике.

2. Первое, что бросается в глаза (*греч.*).

3. См., например, "Два отрывка о принципе непрерывности" (Лейбниц. Сочинения, т. 1. — М.: Мысль, 1982. — С. 105—206).

4. Мах Е. — *Mechanik*. — 1912. — S. 131.

5. Более подробно эта мысль Вейля разъясняется в его книге "Philosophy of Mathematics and Natural Science" (Princeton, 1949. — P. 149—150). Две обсуждаемые здесь точки зрения состоят в следующем. Согласно одной "общее понятие" эллипса суть совокупность всех конкретных эллипсов на плоскости. Это чисто теоретико-множественная точка зрения, когда "общее" получается путем собирания в одно множество всех частных случаев. Согласно другой переменные a , b , c являются абстрактными символами, которые могут принимать частные значения. Таким образом, мы начинаем с общего "абстрактного" понятия и тогда частные понятия (конкретные эллипсы) представляют собой общее понятие плюс выбор значения переменной (там же с. 150). Вейль связывает эти две точки зрения соответственно с Аристотелем и Платоном, анализируя процесс определения понятий с помощью конструкции диалезиса (разделения надвое). Эти вопросы близки к интересовавшей Вейля загадке "пустого" символа (см. прим. 11 к статье "Эмми Нётер").

6. При прочих равных условиях (*лат.*).
7. См. S p e i s e r A. Klassische Stücke der Mathematik. — 1925. — S. 148.
8. В оригинале "melt, thaw and resolve themselves into a dew".
9. См. А р х и м е д. Сочинения / Пер. и прим. И.Н. Веселовского. — М.: Физматгиз, 1962.
10. K a s n e r E., N e w m a n J. Mathematics and imagination. — London: Bell, 1950.
11. Излагаемое здесь представление топологических пространств с помощью симплициальных разбиений впоследствии привлекло внимание физиков. Сюда относится, в частности, исчисление Редже "скелетных" пространств, появившееся в 1961 г. (его изложение в книге: М и з н е р Ч., Т о р н К. Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977, т. 3, гл. 42 содержит ряд моментов, близких соображениям Вейля) и его позднейших анализ Т.Д. Ли (L i e T.D. Physics in Terms of Difference Equations // The Lesson of Quantum Theory (Niels Bohr Centenary Symposium. — Amsterdam: North Holland. 1986. — P. 181–198). В последней работе высказывается предположение, что симплициальная структура может иметь более фундаментальное значение, чем подлежащий ей континуум.
12. См. Г а л и л е й Г. Пробирных дел мастер. — М.: Наука, 1988. — С. 41.
13. Отрицательное решение этой проблемы было дано А.А. Марковым в 1958 г. Он показал, что требуемого алгоритма не существует.
14. Так в оригинале. Не ясно, что имеет в виду автор.
15. На геометрический манер (*лат.*) (часть названия труда Б. Спинозы "Этика, изложенная на геометрический манер").

ТОПОЛОГИЯ И АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА КАК ДВА СПОСОБА ПОНИМАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ (Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verstandnisses)

Доклад опубликован в Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 1932. — Bd 38. — S. 177–188. Тема, затрагиваемая здесь Вейлем, волновала многих математиков. Ее обсуждение можно найти в кн.: Пуанкере А. О науке. — М.: Наука, 1989. — С. 158–169, 309–320; Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Сов. Радио, 1983; Биркгофф Г. Математика и психология. — М.: Сов. Радио 1977. Степень эмоциональной привлекательности (или, наоборот, отталкивания) этих типов мышления для разных представителей математического мира можно почувствовать из слов французского математика А. Вейля из предисловия к книге: Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Мир, 1972: "Мне неоднократно указывали, что многие важные факты и содержательные результаты, касающиеся локальных полей, могут быть доказаны чисто алгебраическими средствами без использования локальной компактности и поэтому сохраняют силу при значительно более общих предположениях. Но, быть может, никто не будет сомневаться, что мне известно об этом обстоятельстве, равно как и о возможности аналогичного обобщения даже таких глобальных результатов, как теорема Римана — Роха. Мы имеем здесь дело с математикой, а не с теологией. Пусть другие математики думают, что им доступно проникновение в мысли Бога об их любимом предмете; мне это всегда казалось пустым и бессмысленным занятием". Более широкое рассмотрение затронутых вопросов вынуждает отнести сюда и проблему соотношения логики и интуиции в математическом мышлении, и оствальдовское разделение ученых на "романтиков" и "классиков" и поиски психологических оснований двух типов мышления в связи с асимметрией полушарий головного мозга человека (см. новейшую сводку в кн.: Б р а г и н а Н.Н., Д о б р о х о т о в а Т.А. Функциональные асимметрии человека. — М.: Медицина, 1988).

1. См. прим. 11 к статье "Эмми Нётер".
2. То есть неприводимый.
3. Обзор современной алгебры, содержащий обсуждение общих принципов, на которых она основана. и идейно близкий взглядам Вейля дан в кн.: Ш а ф а р е

в и ч И.Р. Алгебра — I//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 11. М.: ВИНТИ, 1986).

4. Этот взгляд, ярко характеризующий склонности Вейля, более подробно развит в его книге "Континуум", помещенной в настоящем издании. Тем не менее в его собственном творчестве трудно выделить преобладание какого-нибудь одного под-хода.

5. См. подробное изложение в работе "Математический способ мышления".

6. В современной топологии эти две структуры, топологическая и комбинаторная (или, по-современному, кусочно-линейная), тщательно различаются. Во времена Вейля господствовала столь твердая уверенность в противном, что приведенное Вейлем утверждение получило название "основной гипотезы топологии" (Hauptvermutung). Она была опровергнута Р. Кирби и П. Зибенманом в 1969 г.

7. См. прим. 13 к статье "Математический способ мышления".

8. В оригинале "Eingebettet". Это конечно не вложение в смысле теории множеств.

9. См. предыдущее примечание. Ниже на с. 36, говорится о вложении (и это, действительно, вложение поверхностей) в R^4 .

10. Тем не менее, Бурбаки удалось объединить оба метода в едином понятии структуры. Мнения по поводу плодотворности такого объединения расходятся.

11. См. С п р и н г е р Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960. — С. 304.

12. Сделать это призвал геометров Гильберт в своей 15-й проблеме. Теперь этот раздел геометрии имеет и чисто алгебраическое обоснование. См. комментарий С. Клеймана в кн. Mathematical Developments arising from Hilbert Problems // Proc. Symp. Pure Math. — Providence (Rhode Island): American Mathematical Society. — 1976. — V. 28. — P. 445—482.

13. Здесь имеется в виду комплексные кривые, т.е. двумерные многообразия. 14. Эта точка зрения получила развитие в 50-х гг. нашего века в теории схем А. Гротендика. См. изложение в кн.: Ш а ф а р е в и ч И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972 и М а м ф о р д Д. Лекции о кривых на алгебраических поверхностях. — М.: Мир, 1968.

15. С тех пор многое изменилось. Неоспоримое господство абстрактных алгебраических методов в обосновании и доказательствах современной алгебраической геометрии очевидно, хотя и вызывает иногда реакцию, вроде приведенного в начале этого комментария. Все-таки наглядность и пространственная интуиция ("картинки") всегда останутся исходным пунктом рассуждений геометра, а устрашающая строгость таких книг, как Ш е в а л л е К. Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. — М.: Физматгиз, 1961, будет отпугивать не одно поколение начинающих.

16. Это одновременно и верно, и неверно. В те годы вряд ли можно было предвидеть появление гомологической алгебры, К-теории, этальных когомологий. С другой стороны, в более широкой перспективе. Вейль может быть и прав.

17. Мы особенно рекомендуем читателю очерк И.Р. Шафаревича (см. выше прим. 3).

18. Русский перевод последнего издания: в а н д е р В а р д е н Б.Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.

19. A l e x a n d r o v P.S., H o p f H. Topologie. — Berlin: Springer, 1935.

20. Новый русский перевод: К л е й н Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.: Наука, 1989.

А.Н. Паршин

ПОЗНАНИЕ И ОСМЫСЛЕНИЕ (ВОСПОМИНАНИЕ О ПЕРЕЖИТОМ) Erkenntnis und Besinnung (Ein Lebensrückblick)

Доклад, прочитанный в Лозанском университете в мае 1954 г. Впервые опубликован в журнале *Studia Philosophica, Jahrbuch der Schweizerischen Philosophischen Gesellschaft, Annaire de la Société Suisse de Philosophie*. 1954.

1. Гилетический (от греч. hyle) – вещественный, материальный.
2. См. К а н т И. Критика чистого разума // Сочинения, т. 3. – М.: Соцэкгиз, 1964. – С. 128.
3. Н ь ю т о н И. Математические начала натуральной философии // Известия Николаевской Морской Академии. – 1915. – Вып. 4. – С. 2.
4. Р и м а н Б. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 323.
5. Русский перевод: П у а н к а р е А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 5–153. Ланге Фридрих Альберт (1828–1875) – немецкий философ-неокантианец, автор двухтомного труда "История материализма и критика его значения в настоящее время" русский перевод, т. 1–2, 1881–1883.
6. Гуссерль Эдмунд (1859–1938) – немецкий философ, основатель феноменологии.
7. Медикус Фриц (1876–1946) – профессор Высшего технического училища, историк философии, издатель сочинений И.Г. Фихте (в шести томах, 1908–1912). Читал лекции по философии Фихте.
8. Brentano Франц (1838–1917) – немецкий философ, создатель дескриптивной психологии, из которой позже выросла феноменология Гуссерля.
9. Имеется в виду учение Канта о категориях. См. К а н т И. Сочинения, т. 3, с. 175.
10. Согласно феноменологии Гуссерля имманентное сознание – сознание, интенциональные предметы которого принадлежат тому же потоку переживаний, что и сами акты сознания. Здесь создаваемое и сами акты сознания образуют единство. После осуществления феноменологической редукции (вынесения за скобку) всех предметно-содержательных характеристик сознания остается чистое сознание, чистое "Я", которое имманентно абсолютному бытию.
11. Эпохэ – метод феноменологии, с помощью которого предмет или положение путем феноменологической редукции выключается из обычных, эмпирических связей, освобождается от различных идеологических связей, освобождается от различных идеологических "напластований" с тем, чтобы уяснить "смысл", сущность предмета.
12. Гуссерль проводил различие между гилетическим (hyle) и интенциональной формой (morphé).
13. Ф и х т е И.Г. Первое введение в наукословие // Новые идеи в философии, сб. № 12: К истории теории познания. – Спб., 1914. – С. 34.
14. Там же, с. 48–49.
15. Кьеркегор Сёрен (1813–1855) – датский философ и писатель, согласно которому "отчаяние" – путь осознания человеком религиозного значения своей личности.
16. Fichte J.G. Anweisung zum seligen Leben. – Berlin, 1912. – S. 6–7.
17. М а й с т е р Э к х а р т. Проповеди и рассуждения/ Пер. М.В. Сабашниковой. – М., 1912. – С. 68, 71.

А.П. Огурцов

О СИМВОЛИЗМЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (Über den Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik)

Поздняя статья Вейля, напечатанная в известном междисциплинарном журнале *Studium Generale*. – 1954. – V. 6. P. 219–228. показывает глубокий интерес Вейля к проблемам языка, как человеческого, так и научного. Эта статья примыкает к таким его работам, как "Призрак модальности" (см. В е й л ь Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1984. – С. 256–274) и "Wissenschaft als Symbolische Konstruktion des Menschen" (*Eranos-Jahrb.* – 1948/49. – S. 375–431).

1. Обсуждаемая здесь точка зрения нашла свое развитие в современной лингвистике в работах Э. Сепира и Б.Л. Уорфа. Развивая замечание Сепира о том, что "мы видим, слышим и воспринимаем так или иначе те или другие явления главным образом потому, что языковые нормы нашего общества предполагают данную форму выражения" (так называемая гипотеза лингвистической относительности), Уорф подверг глубокому анализу логическую структуру языка и ее связь с нормами нашего поведения и мышления. Так, поставив в одной из своих работ вопрос: "Являются ли наши представления "времени", "пространства", и "материи" в действительности одинаковыми для всех людей или они до некоторой степени обусловлены структурой данного языка?", Уорф дает на него следующий ответ, высказанный с характерной для него решительностью и бескомпромиссностью: "Ньютоновские понятия пространства, времени и материи не есть данные интуиции. Они даны культурой и языком. Именно из этих источников и взял их Ньютон". (Whorf B.L., Language, Thought and Reality. — N.Y., 1956. Некоторые статьи переведены в кн.: Новое в лингвистике, вып. 1. — М.: ИЛ, 1960.)

2. Более подробно роль символизма в химии Вейль обсуждает в приложении D ("Химическая валентность и иерархия структур") к книге Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. — Princeton, 1949 (это приложение переведено в кн.: Прикладная комбинаторная математика. — М.: Мир, 1968).

3. Расплываются, тают и падают, как роса (*англ.*).

4. На вопрос: где же заключена научная точность, обе стороны отвечают различно. Интуитионист говорит: в человеческой мысли, формалист: на бумаге.

5. Сравни также следующее высказывание Ф. Дайсона: "В широчайшем смысле можно сказать, что центральная идея этой теории (электродинамики — А.П.) состоит в том, что природа обладает двухъярусной структурой. В более глубоком нижнем ярусе пребывают электрические и магнитные поля ... В верхнем ярусе мы видим материальные объекты, энергии и силы. Только верхний ярус непосредственно доступен наблюдениям. Объекты нижнего яруса, например, электрическое поле, могут быть обнаружены только наблюдением над теми энергиями и силами, которые они порождают в верхнем ярусе ... Таким образом, сама напряженность поля — это чистая математическая абстракция". (Дайсон Ф. Новаторство в физике // Элементарные частицы. — М.: Физматгиз, 1963). Аналогичные взгляды высказывал также В. Гейзенберг (см. Гейзенберг В. Физика и философия. — М.: ИЛ, 1963).

6. Первая сторона, вторая сторона (*англ.*). Имеются в виду стороны в судебном разбирательстве.

7. Своего рода (*лат.*).

8. "Универсальный математический метод" (*лат.*).

9. Комбинаторное искусство (*лат.*).

10. Часть работ Лейбница по всеобщей характеристике переведена на русский язык (см. Лейбниц Г. Сочинения. — М.: Мысль, 1984, т. 3). Тщательное изучение его конструкции показывает, что она в существенном совпадает с найденной в нашем веке нумерацией Гёделя. Удивительно, что это обстоятельство ускользнуло от внимания Вейля.

11. Об основаниях науки (*голл.*).

12. Третьего не дано (*лат.*).

13. См. также приложение А к кн.: Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. — Princeton. 1949. (русский перевод: Вейль Г. Структура математики // УМН. — 1976. — Т. 31. — С. 220—238).

14. См. Weyl H. *The Open World*. — London, 1932.

15. Здесь речь идет о девяти чинах ангельской иерархии. См. Святого Дионисия Ареопагита о Небесной Иерархии М., 1898.

16. См. Платон. Законы, V. 738a, b; 764d—747c; VI, 771b—d; XI. 919d, 929a.

17. Серьезное отношение к магии чисел дошло до гораздо более позднего времени. Например, ей посвящен трактат английского платоника второй половины XVIII века Томаса Тейлора: T aylor Th. *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans*. — N.Y.,

1972), выдержанный в традициях сочинений Никомаха Геразского и Теона Смирнского.

18. Упоминаемые здесь теоретико-числовые свойства — это свойства делимости чисел, связанные с p -адическими пополнениями (конечными точками) поля рациональных чисел. Интересно, что упомянутой в прим. 10 всеобщей характеристике Лейбница может быть придан точный математический смысл именно с помощью перехода к p -адическому пополнению.

19. См. русский перевод в кн.: Г и л ь б е р т Д. — Основания геометрии. — М.: Гостехиздат, 1948.

20. Русский перевод: Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П. Основания математики. Логическое исчисление и формализация арифметики. — М.: Наука, 1982; Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П. Основания математики. Теория доказательств. — М.: Наука, 1982.

21. Русский перевод: В и т г е н ш т е й н Л. Логико-философский трактат. — М.: ИЛ, 1958.

А.Н. Паршин

ЕДИНСТВО ЗНАНИЯ

(Address on the unity of knowledge delivered
at the Bicentennial Conference of Columbia University)

Еще одна юбилейная речь Вейля, произнесенная через четырнадцать лет после предыдущей ("Математический способ мышления"), как бы резюмирует итог его философских исканий. В отличие от "Познания и осмысления" здесь основное внимание уделено философии науки. Опубликовано в кн. Columbia University in the City of New York Bicentennial Celebration. — N.Y., 1954. Высказываемые здесь взгляды на состояние естествознания уточняют соображения, изложенные Вейлем в приложении к книге: Philosophy of Mathematics and Natural Science. — Princeton, 1949 (русский перевод: Основные черты физического мира. Форма и эволюция // В е й л ь Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 345–360).

1. Имеется в виду Филадельфия и Пенсильванский университет.

2. C a s s i r e r E. Philosophie der Symbolischen Formen. — Bd 1–3. Berlin. 1923–1929.

3. Существо рациональное (лат.).

4. Существо символическое (лат.).

5. Материальными узами, функциональными узами (лат.).

6. Осторожные сомнения, высказываемые здесь по поводу современных интерпретаций эволюции, разделялись многими физиками и математиками (см., например, описываемую Гейзенбергом беседу, в которой принимает участие Дж. фон Нейман: Heisenberg W. Physics and beyond. N.Y., 1972, русский перевод: Природа. — 1973. — № 4. — С. 76–83).

7. Приведенные выше рассуждения Вейля излагались им неоднократно (см. по этому поводу прим. 22 в кн. В е й л ь Г. Избранные труды. М.: Наука, 1984. — С. 494, а также Heitler W. Über die Komplementarität von beloser und lebender Materie // Abh. math. naturwiss. Klasse. Akad. Wiss. Lit. Mainz. — 1976, No. 1).

8. Мнению, но не в реальности (греч.).

9. Наглядно представимо (нем.).

10. Усмотрение сущности (нем.).

А.Н. Паршин

**МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА. КРАТКИЙ ОБЗОР,
СЛУЖАЩИЙ В КАЧЕСТВЕ ПРЕДИСЛОВИЯ
К РЕЦЕНЗИИ НА КНИГУ "ФИЛОСОФИЯ БЕРТРАНА РАССЕЛА"**

(Mathematicss and logic. A brief survey serving as a preface
to a review of "Philosophy of Bertrand Russell")

Впервые опубликовано в журнале The American Mathematical Monthly. — 1946. — V. 52. — P. 2—13.

Вейль дает здесь краткий и доступный обзор проблематики оснований математики в первой трети двадцатого века для общематематической аудитории, упоминает и некоторые более поздние результаты. Несколько более субъективно и эмоционально, чем другие точки зрения, описан подход самого Вейля к построению математического анализа, изложенный в книге "Континуум", перевод которой включен в настоящий сборник. Более подробно об этом подходе сказано в комментарии к переводу "Континуума". Здесь мы отметим только важное понятие экзистенциальной категории (предпоследний абзац п. 1). Так Вейль называет совокупность, которая настолько проста, что обеспечено выполнение законов обычной (классической) логики для любых свойств ее элементов. Специальное выделение таких категорий оказалось необходимым ввиду интуиционистской (а позже — конструктивистской) критики традиционной логики. Как отмечает сам Вейль, в основаниях математики преобладает экстенциональная точка зрения, отождествляющая совокупности, состоящие из одних и тех же элементов. Реже встречается понимание смысла предложения как его синтаксического построения из атомарных предложений по правилам исчисления предикатов первого порядка (конец третьего от конца абзаца п. 1). Это следует иметь в виду, читая обсуждение иерархии уровней в п. 3. Вейль почти не касается конструктивного направления в математике, которое стало интенсивно развиваться после уточнения понятия вычислимой функции в конце тридцатых годов. Термин "конструктивный" в п. 3 и 5 употребляется для гораздо более абстрактных понятий.

Вейль упоминает (в конце п. 3) о том, что расселовская теория типов позволила избежать парадоксов. Одну из точных формулировок этого утверждения дает следующий малоизвестный результат Г. Генцена, содержащейся в книге: *Collected papers of Gerhard Gentzen/Ed. M. Szabo. — Amsterdam: North-Holland, 1969.*

Теория типов (без арифметических аксиом и аксиомы бесконечности) имеет простую модель, в которой совокупность объектов каждого конкретного типа конечна. Действительно, достаточно взять одноэлементное множество $\{0\}$ в качестве совокупности V_0 объектов низшего типа и положить $V_{i+1} = \wp(V_i)$, т.е. в качестве совокупности объектов типа $i+1$ взять семейство всех подмножеств множества V_i .

С другой стороны, мнение Гёделя (конец подстрочного примечания в конце п. 3) о недостаточности расселовского доказательства сводимости к типам ≤ 5 подтверждается его собственным результатом из [9]. Там показано, что непротиворечивость арифметики T_α типа α доказуема в арифметике $T_{\alpha+1}$ типа $\alpha+1$, так как в $T_{\alpha+1}$ можно записать определение истинности для T_α . Поэтому $T_{\alpha+1}$ не интерпретируется в T_α в силу теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости.

Сложнее обстоит дело с вопросом о корректности (или хотя бы непротиворечивости) аксиоматической теории множеств. Наиболее распространенное обоснование использует ее модель в виде так называемой кумулятивной иерархии, восходящей еще к Цермело и представляющей собой по существу продолжение расселовской иерархии типов на все трансфинитные уровни. Полагая $C_0 = \phi$ (пустое множество), $C_{\alpha+1} = \wp(C_\alpha)$ (множество всех подмножеств множества C_α), $C_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} C_\beta$ для предельных ординалов λ , легко убедиться, что все аксиомы системы Цермело Z выполнены в $C_{\omega+\omega}$, а если α — недостижимый кардинал, то в C_α выполнена также и аксиома замены, характеризующая систему ZF.

Описывая аксиоматическую теорию множеств, Вейль обозначает буквой Z ее формулировку в стиле Гёделя — Бернаиса с двумя сортами переменных — для классов и для множеств. Аксиомы 1–4 из п. 4 (плюс аналогичная аксиома для дополнения множеств, т.е. для отрицания отношения) представляют собой "разбиение на части" так называемой аксиомы свертывания (формулы A в элемент a): для любой формулы $A(x)$ имеет элемент a , такой, что A коэкстенсивна с $\epsilon(x, a)$ & $\epsilon(x, b)$. В современной литературе по теории множеств буквой Z (также в память о Цермело) обозначается другая формализация (по существу эквивалентной системы), где классы не вводятся. Она соответствует пониманию "корректно определенного свойства" просто как формулы в языке теории множеств. Когда Вейль в начале п. 5 говорит, что в его предикативной системе не постулируются никакие аксиомы, он имеет в виду отсутствие аксиом свертывания. Подразумевается, однако, что постулирована аксиома индукции и элементарные арифметические аксиомы вроде определяющих равенств сложения и умножения.

В современной математике за пределы теории множеств и классов выходят только некоторые конструкции теории категорий, но и их можно охватить, не привлекая существенно новых идей.

Судьба гильбертовской теории доказательств оказалась гораздо более благоприятной, чем предсказывал Вейль, хотя большинство надежд Гильберта не оправдалось. Первые идеи этой теории были высказаны Гильбертом еще в начале XX века, а более подробно развиты в двадцатых годах. Гильбертовское обоснование математики предусматривало доказательство истинности ее "экспериментально проверяемой" части, то есть числовых тождеств (финитных или реальных предложений в терминологии Гильберта). Важное наблюдение Гильберта, легшее в основу его программы, состояло в том, что для этого достаточно непротиворечивости. Для более сложных предложений (например, имеющих вид $\exists x A(x)$) непротиворечивость уже не гарантирует истинности, как показывает теорема Гёделя о неполноте.

Первоначальная гильбертовская постановка задачи требовала, чтобы доказательство непротиворечивости проходило в финитном языке числовых тождеств. Допущение более широких (но корректных с точки зрения брауэровского интуиционизма) средств пришло позднее, особенно под влиянием результатов Гёделя о неполноте. Генценовское доказательство непротиворечивости арифметики [10] показало, как можно примирить ограничения, налагаемые теоремой Гёделя, с требованием финитности: привлеченный Генценом принцип (бескванторная индукция до ϵ_0), выходящий за рамки формальной арифметики первого порядка, формулируется в языке финитных предложений. Более подробно о современном состоянии исследований по основаниям математики можно прочесть, например, в следующих публикациях: Крайзель Г. Биография Курта Гёделя // УМН. — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 175–216; № 3. — С. 203–238; Такеути Г. Теория доказательств. — М.: Мир, 1978; Крайзель Г. Работы по теории доказательств. — М.: Мир, 1981.

1. Наоборот (*лат.*).
2. Объем понятия (*нем.*).
3. "Что такое числа и чем они должны быть" (*нем.*).
4. "Непрерывность и иррациональные числа" (*нем.*).
5. Манера выражаться (*фр.*). Часто употребляется в смысле "это лишь так говорят".
6. Свободно становящаяся последовательность (букв.: последовательность выбора) (*нем.*).
7. В момент образования (*лат.*).
8. "Исследования по основаниям теории множеств" (*нем.*).
9. "Непротиворечивость гипотезы континуума" (*нем.*).
10. Русский перевод: Генцен Г. Непротиворечивость чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода / Под ред. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. — М.: Наука, 1967. — С. 77–153.

**КОНТИНУУМ
КРИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОСНОВАНИЯМ АНАЛИЗА**
(*Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über
die Grundlagen der Analysis.* —
Leipzig: Verlag von Veit und Comp., 1918.)

1. Общие замечания.

В этой книге Вейль намечает программу перестройки оснований математики на арифметической основе. История вопроса и основные предпосылки изложены в его работе "Математика и логика" (см. настоящую книгу), и мы не будем на этом останавливаться, а опишем связь идей и конструкций Вейля с современными построениями.

Несмотря на небольшой объем, книга в целом и особенно предложенная Вейлем схема построения "работающего анализа" оказали существенное влияние на многих последующих исследователей. Следы этого влияния заметны даже в работах конструктивистской школы Маркова — Шанина, хотя в своей критике они пошли гораздо дальше Вейля (который, правда, тоже не стоял на месте после 1918 г.).

Вейль предвосхитил и многие другие постановки задач и результаты математической логики. Он ставит (в середине § 3 главы I) вопрос о том, достигла ли математическая логика полного описания логически очевидных, то есть общезначимых в современной терминологии, суждений. Положительный ответ на этот вопрос дала теорема Гёделя о полноте (1930). В конце § 3 главы I Вейль высказывает предположение о возможной формальной неполноте арифметики, а также о том, что для установления важных математических свойств, быть может, придется выйти за рамки формальной системы и применить новые интуитивные соображения.

Более спорным представляется предположение Вейля о принципиальной неформализуемости и тем более неразрешимости геометрии (конец главы I, перед примером с теоремой Ферма). Через несколько лет после "Континуума" А. Тарский (и, по-видимому, несколько других математиков, в том числе К. Гёдель, не опубликовавший этого результата) нашел универсальный разрешающий метод для элементарной геометрии. С помощью так называемой элиминации кванторов всякое суждение языка элементарной геометрии эффективно приводится к нормальной форме, исходя из которой, можно сразу сказать, истинно это суждение или ложно (см., например, Энгелер Э. *Метаматематика элементарной математики.* — М.: Мир, 1987 или Ершов Ю.Л. *Разрешимые теории.* — М.: Наука, 1979). Вопреки предсказанию Вейля (конец последнего абзаца § 3 главы I), это не привело к тривиализации рассматриваемой области математики. Одна из причин заключается в экспоненциальной сложности разрешающей процедуры для элементарной геометрии (см. Рабин М., Фишер М. // *Кибернетический сборник.* — 1989). Тем не менее высказывание Вейля было одним из первых указаний на неправдоподобность существования разрешающего метода для всей математики, а именно такой метод получился бы при успешном проведении (окончательно сформулированной после 1918 года) программы Гильберта в ее сильной форме: полная формализация всей математики и доказательство формальной разрешимости всех суждений (либо A , либо A формально доказуемо). Для проверки суждения достаточно было бы порождать все теоремы и ждать, которое из суждений $A, \bar{A}$ появится первым. Обоснованность предположений Вейля была подтверждена теоремой Чёрча об алгоритмической неразрешимости исчисления предикатов и последующими результатами о неразрешимости систем, содержащих арифметику. Сомнения Вейля в полноте аксиом геометрии следует рассматривать в связи с его исходной гипотезой о том, что любая математическая дисциплина неявно содержит теорию натуральных чисел (п. 3 в начале § 5). Сравнение упомянутых выше результатов Тарского и Чёрча показывает, что в элементарной геометрии натуральные числа невыразимы.

В конце главы I Вейль полемизирует с формалистской доктриной в основаниях математики. Одним из аргументов в поддержку этой доктрины было наблюдение

Гильберта о том, что финитные (экспериментально проверяемые) суждения, доказуемые в непротиворечивой теории, истинны. Мы знаем теперь, что некоторый смысл любой непротиворечивой системе аксиом приписывает теорема Гёделя о полноте, позволяющая построить модель такой системы аксиом. Разумеется, построенная модель не всегда будет иметь теоретико-познавательное значение, как того требует Вейль.

2. Язык первого порядка у Вейля

Вслед за Пуанкаре Вейль считает законными только те свойства, которые явно определимы в некотором языке. Его понимание смысла свойств интенционально; поэтому совпадение логического смысла свойств — это по определению совпадение их описаний. Для множеств, определяемых свойствами, равенство вводится экстенционально: два свойства определяют одно и то же множество, если им удовлетворяют одни и те же элементы. Общепринятое в математике со времен Дирихле и вплоть до нашего времени определение функции (как множества пар) представляется Вейлю нечетким, по-видимому, из-за того, что оно не предполагает никакого языка для явного задания соответствующих свойств. По сходной причине Вейль отвергает в конце § 4 главы II возможность существования единой, независимой от языка определения, шкалы кардинальных и ординальных чисел. Вейль понимает под финитностью множества определимость в описанном им языке и тем самым существенно расходится с гильбертовским употреблением этого термина (см. конец главы 1, перед заключительными замечаниями). В § 2 главы II Вейль описывает вариант языка логики первого порядка, предвосхищающий некоторые идеи Шейнфинкеля, Куайна и Бурбаки. Его суждения строятся из атомарных символов, т.е. символов отношений, с помощью операций 1—6, то есть отрицания, отождествления аргументов, конъюнкции, дизъюнкции, подстановки константы и квантора существования, который выражается с помощью символа *, подлежащего расшифровке. Более подробное индуктивное определение требует вводить наряду с суждением также перечень его аргументных мест.

Мы определим по индукции формулы в смысле Вейля (сокращенно В-формулы), их аргументные места и перевод В-формулы F в формулу F^{Π} обычного языка исчисления предикатов. Мы определим также обратный перевод предикатных формул F в В-формулы F^B и покажем тем самым, что Вейль не ошибался, предполагая, что этот язык полон (конец § 2 главы II). Если В-формула F имеет n аргументных мест, то в F^{Π} будут свободно входить в точности переменные $x_1, \dots, x_n$, а предикатная формула F с n свободными переменными перейдет в В-формулу F^B с n аргументами.

Определение В-формулы и перевода F^{Π} состоит из тех же пунктов, что и у Вейля.

0. Исходное n -местное отношение R является В-формулой с аргументами. При этом $R^{\Pi} = R(x_1, \dots, x_n)$.

1. Если F — В-формула с n аргументами, то $\bar{F}$ — также В-формула с n аргументами. При этом $(\bar{F})^{\Pi} = \overline{F^{\Pi}}$.

2. Если F — В-формула с n аргументами, $1 \leq i \leq j \leq n$, то $I_{i,j}F$ — В-формула с $n - 1$ аргументом. Если

$$F^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

то $(I_{ij}F)^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_j, \dots, x_{n-1})$, т.е. x_j отождествляется с x_i , а индексы всех следующих переменных уменьшаются на 1. Таким образом, $(I_{ij}F)^{\Pi}$ содержит свободно в точности переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$.

3, 4. Если F, F' — две В-формулы соответственно с n и m аргументами, то $F \cdot F'$, $F + F'$ — В-формулы с $n + m$ аргументами. При этом, если $F^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_n)$, $F'^{\Pi} = G'(x_1, \dots, x_m)$, то $(F \cdot F')^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_n) \cdot G'(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ и аналогично для $F + G$.

5. Если F — В-формула с n аргументами, a — предмет и $1 \leq i \leq n$, то $I_i a F$ — В-формула с $n - 1$ аргументами. При этом $(I_i a F)^{\Pi}$ получается из F^{Π} подстановкой объекта a вместо переменной x_i и сдвигом индексов, больших i , на единицу (см. п. 3).

6. Если F — В-формула с n аргументами, $1 \leq i \leq n$, то $\exists i F$ — В-формула с $n - 1$ аргументами, и $(\exists i F)^\Pi$ получается из F^n по существу приписыванием спереди квантора $\exists x_i$ и сдвигом индексов, больших i , на единицу. Точнее, если

$$F^\Pi = G(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

то $(\exists i F)^\Pi = \exists z G(x_1, \dots, z, x_i, \dots, x_{n-1})$, где z — новая переменная.

Чтобы убедиться, что наш п. 6 соответствует употреблению символа $*$ у Вейля, достаточно описать дерево построения суждения, содержащего этот символ.

Перевод В-формулы F^B на обычный язык исчисления предикатов определяется индукцией по построению формулы. При этом формула $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с n свободными переменными переходит в В-формулу с n аргументами. Введем символику, изображающую отождествление переменных в В-формулах, с помощью операторов I_{ij} . Для списков переменных $y = y_1, \dots, y_n$ и $z = z_1, \dots, z_m$ определим последовательность $I(y, z)$ таких операторов, приводящую к списку $y(z - y)$, где $(z - y)$ получается вычеркиванием из z всех переменных, встречающихся в y . Полагаем

$$I(y, u) = I_i, \quad n + 1, \text{ если переменная } u \text{ входит в } y \text{ на } i\text{-м месте;}$$

$$I(y, u) \text{ пусто, если } u \text{ не входит в } y.$$

Для более чем одночленных списков полагаем

$$I(y, zu) = I(yz', u) I(y, z), \text{ где штрих означает вычеркивание повторений,}$$

$$I(z) \stackrel{\text{def}}{=} I(\phi, z).$$

$$\text{Пример. } I(y_1 y_2 y_1 y_3 y_1 y_3) = I_{34} I_{14} I_{13}.$$

Базис индукции, определяющей перевод F^B ,

$$F = P(t_1, \dots, t_m).$$

Пусть объекты расположены в списке $t_1, \dots, t_m$ на местах $i_1, \dots, i_k$ (обозначим эти объекты $a_1, \dots, a_k$), а переменные — на остальных местах. Обозначим буквой y результат вычеркивания объектов из списка $t_1, \dots, t_m$ и положим

$$F^B = I(y) I_{i_1} a_1 \dots I_{i_k} a_k P.$$

$$\text{Пример. } F = P(a, y_1, b, y_2, y_1, y_3, y_1, y_3);$$

$$F^B = I(y) I_1 a I_3 b P = I_{34} I_{14} I_{13} I_1 a I_3 b P.$$

Индукционный переход. Если $F = \bar{G}$, то $F^B = (\bar{G})^B$. Если $F = GcH$, где c есть или $+$, и y, z — списки свободных переменных формул G, H , выписанных в порядке их первых вхождений, то $F^B = I(y; z)(G^B \cdot H^B)$.

Если $F = \exists z G$, то $F^B = \exists i G^B$, где i — место переменной z в списке свободных переменных формулы G . Определение перевода F^B закончено.

Описанный выше перевод предикатных формул в В-формулы определен только с точностью до алфавитного переименования переменных.

З а м е ч а н и е. Индукцией по построению формул можно доказать, что наши операции перевода взаимно обратны, то есть

$$(i) \quad F^{\Pi B} = F \quad \text{для В-формулы } F,$$

$$(ii) \quad \varphi^{\Pi B} \simeq \varphi \quad \text{для предикатных формул } \varphi,$$

где $\simeq$ обозначает (взаимно однозначное) переименование связанных и свободных переменных.

В начале § 4 главы 2 Вейль использует понятие субъектно упорядоченного отношения, где можно менять порядок аргументных мест отношения. Отобразить это понятие в нашей символике можно двумя способами.

1. Можно ввести для В-формул дополнительное правило построения — оператор P_{ij} перестановки i -го и j -го аргументов n -аргументной формулы ($i < j \leq n$), полагая

$$(P_{ij}F)^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

если $F^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

2. Можно, не вводя новой операции, достичь того же эффекта с помощью предиката тождества J . Если для некоторой формулы F мы имеем

$$F^{\Pi} = G(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

то, чтобы переставить x_i и x_{i+1} , то есть получить В-формулу с переводом, эквивалентным $G(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)$, мы берем формулу

$$(J(x_1, x_1) \cdot \dots \cdot J(x_i, x_i) \cdot J(x_{i+1}, x_{i+1}) \cdot G(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n))^B.$$

3. Построение математического анализа по Вейлю

Мы проанализируем здесь работу, сделанную Вейлем, существенно опираясь на исследование С. Фефермана (Feferman S. Weyl Vindicated: "Das Kontinuum" 70 Years Later // Italian Conference in the Philosophy of Science, 1988).

Современное аксиоматическое построение вещественного анализа использует (вслед за Гильбертом, см. книгу: Гильберт Д. Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. — М.: Наука, 1982) язык L арифметики второго порядка, где имеются переменные для натуральных чисел (числовые переменные) $n, m, k, \dots$, переменные для отношений или предикатов от натуральных чисел $X, Y, Z, \dots$, а также константы для примитивно рекурсивных функций (из натуральных чисел в натуральные), которые будут описаны позже. Замысел Вейля состоял в том, чтобы переменные второго порядка (для предикатов) пробегали множества натуральных чисел, определимые без порочного круга, то есть без ссылки на совокупность всех множеств натуральных чисел. На более синтаксическом уровне это выражается требованием, чтобы каждый предикат был определен формулой, не содержащей кванторов по предикатам (формулой первого порядка). Формулы (и входящие в них числовые термы) определяются обычным образом. (В отличие от Вейля натуральный ряд начинается у нас с 0, а не с 1.)

Числовые переменные и константа 0 — термы. Если f — k -местная константа для функции, $t_1, t_2, \dots, t_k$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_k)$ — терм.

Атомарные формулы имеют вид $t_1 = t_2$ или $X(t_1, \dots, t_k)$, где X — k -местная предикатная переменная, $t_1, \dots, t_k$ — термы. Формулы строятся из атомарных формул с помощью обычных связей $\neg, \rightarrow, \&, \vee$ и кванторов $\forall n, \exists n, \forall X, \exists X$ по числовым и предикатным переменным.

З а м е ч а н и е. Отношение Вейля к формулам, содержащим кванторы по предикатам, не вполне однозначно. В 1918 г., когда был издан "Континуум", Вейль еще не перешел на позиции интуиционизма Брауэра, предусматривающие существенное изменение традиционной, классической логики. Однако уже здесь Вейль считает, что ее законы безоговорочно применимы лишь к утверждениям об основных категориях, таких, как натуральные числа. Тем не менее при построении анализа он использует утверждения, содержащие такие кванторы. Поэтому мы, следуя упомянутой работе Фефермана, используем язык второго порядка. С другой стороны, также вслед за Феферманом мы существенно ослабили имеющийся у Вейля принцип определения новых предикатов с помощью итерации, который приходит в противоречие с требованием определимости формулой первого порядка. Действительно, вынося кванторы вперед, легко убедиться, что каждая формула F первого порядка эквивалентна формуле вида

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n S(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

где S — бескванторная формула. С другой стороны, рекурсия вида

$$\Phi^*(n+1, X) = \Phi^*(n, X),$$

где $\Phi(X)(m)$ просто выражается через предикат вида $\exists k T(m, k, X)$ с бесквантор-

ным T , может определять предикат с "бесконечным" числом кванторов, не эквивалентный тем самым никакой формуле первого порядка. (Более точное рассуждение с применением теоремы Клини о нормальной форме имеется у Фефермана. См. также ниже точное вычисление выразительной силы примитивно рекурсивного определения предикатов.) Вейль вводит нужные ему вычислимы (примитивно рекурсивные) функции натуральных чисел, такие, как сложение, умножение и т.д. с помощью "предикатной рекурсии", определяющей их графики. Мы добавляем числовую примитивную рекурсию непосредственно.

Логика определяемой ниже логико-математической системы L (совпадающей с точностью до технических деталей с системой $K^{(\alpha)}$ из статьи Фефермана) — это классическое исчисление предикатов с равенством и двумя сортами переменных. Нелогические аксиомы, в которых t' обозначает $sc(t)$ (т.е. $t + 1$), а $E(s)$ — результат подстановки терма s вместо всех вхождений переменной x в выражение E :

1. Аксиомы для 0 и sc .

$$n' \neq 0; \quad n' = m' \rightarrow n = m.$$

2. Индукция. $X(0) \ \& \ \forall n(X(n) \rightarrow X(n')) \rightarrow \forall nX(n)$.

3. Явное определение функций.

Для каждого терма t имеется константный функциональный символ f , обозначаемый λnt , с аксиомой $f(n) = t$.

4. Примитивная рекурсия. Для любых функциональных констант g, h с соответствующим числом мест имеется функциональная константа f (обозначаемая $R_c(g, h)$) с аксиомами

$$f(n, m) = g(m),$$

$$f(n', m) = h(n, m, f(n, m)).$$

5. Элементарные аксиомы свертывания. Для любой формулы F первого порядка имеется аксиома

$$\exists X \forall n(X(n) \leftrightarrow F).$$

(ACA)

Конец описания системы L .

(ACA) расшифровывается как арифметическая аксиома свертывания, а вся система в целом обозначается в литературе по теории доказательств через $(ACA)_0$. Уточнения и полезные комментарии имеются у Фефермана. Посмотрим, до какой степени эта система соответствует замыслу Вейля.

Теорема 1. (а) Система L имеет модель, где область значений предикатных переменных — формулы первого порядка.

(б) Система L — консервативное расширение арифметики первого порядка PA (см. ниже): формула F , не содержащая предикатных переменных, выводима в L тогда и только тогда, когда она выводима в PA .

Дадим доказательство утверждения (б), которое доказывает и (а). Напомним, что язык системы PA состоит из формул, не содержащих предикатных переменных, а аксиоматика PA получается из аксиоматики L путем вычеркивания аксиомы свертывания и замены аксиомы индукции на схему

$$F_n[0] \ \& \ \forall n(F \rightarrow F_n[n']) \rightarrow \forall nF$$

для произвольной формулы F .

Включение $L \supset PA$ очевидно. Чтобы доказать обратное включение, предположим, что замкнутая формула F без предикатных переменных невыводима в PA . Тогда по теореме Гёделя о полноте имеется модель $M = \{M, 0, sc, \dots\}$ системы $PA + \{\neg F\}$. Она расширяется до модели M^* систему $L + \{\neg F\}$ если в качестве значений предикатов взять все подмножества множества M , определяемые в M формулами первого порядка с параметрами из M . Поэтому формула F невыводима в системе L , что и требуется доказать.

Может показаться, что построение той части анализа, которая рассматривается в главе II книги Вейля, требует средств, выходящих за рамки системы L , так как в ней нет функций множеств, которые использует Вейль. Однако в действительности

он рассматривает только функции, графики которых могут быть определены формулами, поэтому небольшая модификация позволяет воспроизвести построения Вейля. Введение рациональных чисел (множество Q) и вещественных чисел (множество R) как дедекиндовых сечений проходит почти без изменений. Пусть $Q = \{r_n: n \in N\}$ — какая-нибудь стандартная нумерация рациональных чисел. С ее помощью свойства подмножества Y множества Q сводятся к свойствам соответствующего множества

номеров $\tilde{Y} = \hat{X} \subset N$, где $n \in X \leftrightarrow r_n \in Y$. Теперь последовательность $\langle X_n \rangle_{n \in N}$ подмножеств X_n множества N рассматривается как бинарное отношение $X \subset N^2$, такое, что $m \in X_n \leftrightarrow X(m, n)$. В частности, чтобы доказать существование супремума последовательности $Y = \{Y_n\}_{n \in N}$ вещественных чисел, достаточно установить существо-

вания пересечения $\bigcap_{n \in N} Y_n$, то есть $\bigcap_{n \in N} X_n$, где $X_n = \tilde{Y}_n$. Это получается с помощью

аксиомы свертывания. Аналогично получаются полнота по Коши и лемма Бореля, рассматриваемые Вейлем в § 4 главы II. Рассуждения о произвольных вещественных функциях уже не вписываются непосредственно в язык L , так как требуют переменных для функций $F(X) = Y$ с аргументами и результатами-множествами (дедекиндовыми сечениями). Однако языка L снова достаточно, если вслед за Вейлем сосредоточить внимание на непрерывных функциях и других аппроксимативных объектах, определяемых своими значениями на просто устроенном счетном множестве. Например, непрерывная функция F определяется своими значениями на Q .

Сначала рассматривается $F_1 = F \downarrow Q: Q \rightarrow R$, затем — бинарное отношение $F_1^* = \{(n, m): r_m \in F_1(r_n)\}$. Таким образом множество пар натуральных чисел F_1^* представляет функцию F . Таким же образом можно развить теорию дифференцирования и интегрирования непрерывных функций, степенных рядов, измеримых по Лебегу функций и другие части анализа, упомянутые Вейлем.

Однако, чтобы иметь возможность говорить об объектах высших типов непосредственно, желательно иметь теорию в языке теории типов (и даже в более богатом языке), которая с одной стороны подходит для изложения анализа, а с другой стороны допускает арифметическую интерпретацию. Такая теория W построена у Фермана.

Вернемся к схеме введения предикатов с помощью итерации

$$\theta(0, X) = \Psi(X),$$

$$\theta(n+1, X) = \Phi(n+1, \theta(n, X)),$$

где $\Phi(n, Y)$ — формула первого порядка, т.е. построена без помощи кванторов по предикатам.

Оценим класс предикатов, который определим с ее помощью. Напомним схему построения разветвленного анализа. Предикаты уровня 1 определяются арифметическими формулами, содержащими кванторы только по натуральным числам (кванторы уровня 0), но не по предикатам. Предикаты уровня 2 определяются формулами, содержащими кванторы по натуральным числам, а также кванторы $\exists X^1, \forall X^1$ по предикатам уровня 1. Вообще предикаты уровня $(n+1)$ определяются формулами, содержащими кванторы $\exists X^i, \forall X^i$ уровня $i \leq n$.

Мы покажем, что с помощью подстановки и итерации определимы в точности предикаты конечных уровней. Точнее, с помощью не более чем n применений итерации определимы предикаты уровня $\leq n$.

Напомним, что (при зафиксированной нумерации формул F натуральными числами $\lceil F \rceil$) определением истинности для данного класса замкнутых формул обычно называется такой предикат T , что $F \leftrightarrow T(\lceil F \rceil)$ для всех $F \in K$.

Несколько злоупотребляя терминологией, мы будем использовать ее и при наличии параметров, то есть называть предикатом истинности такой предикат T , что

$$F \leftrightarrow T(\lceil F \rceil, X, x)$$

(1)

для любой формулы F данного класса с единственной свободной предикатной переменной X и индивидуальной переменной x .

Обычно говорят, что соотношение (1) характеризует предикат выполнения (satisfaction predicate).

Предикат со свойством (1) удовлетворяет соотношениям $T_r(T)$: для любых формул F, G

$$\begin{aligned} (T(\ulcorner F \urcorner \& \ulcorner G \urcorner, X, x) &\leftrightarrow T(\ulcorner F \urcorner, X, x) \& T(\ulcorner G \urcorner, X, x), \\ (T(\ulcorner \neg F \urcorner, X, x) &\leftrightarrow \neg T(\ulcorner F \urcorner, X, x)), \\ \dots \end{aligned} \quad (2)$$

где многоточие обозначает аналогичные соотношения для кванторов и базисные соотношения для атомарных формул.

Если данный класс замкнут относительно явных определений, то в нем обычно имеется предикат истинности формул ограниченной сложности (например, ограниченной длины $|F|$). Действительно, условие $\text{Tr}_n(T)$, получающееся из (1) добавлением справа условия $|F| \leq n$, можно записать в виде достаточно длинной конъюнкции вида (2). Но тогда определение истинности для данного класса K в целом можно записать в виде

$$(\exists T \in K) \text{Tr}_F(T) \& T(\ulcorner F \urcorner, X, x). \quad (3)$$

Заметим, что предикатный квантор в (3) пробегает рассматриваемый класс K , хотя сам предикат (3) в силу стандартной диагональной конструкции не принадлежит классу K . Мы видим, таким образом, что для формул (с кванторами) уровня k имеется предикат истинности $T^{(k)}$ уровня $k+1$. Поэтому квантор QX^k уровня k можно заменить числовым квантором Q , если разрешается употреблять предикат $T^{(k)}$: предполагая для простоты записи, что параметр X отсутствует, имеем $QX^k A \leftrightarrow QpA_X[\lambda x T^{(k)}(p, x)]$.

С другой стороны, соотношение (2) можно понимать как определение предиката T в виде итерации по длине формулы F с индукционным переходом нескольких различных типов в зависимости от вида формулы F . Такая итерация сводится к стандартной известным способом. Таким образом, предикат $T^{(k)}$ можно задать одним применением итерации к предикатам уровня k . С другой стороны, аналогичное рассуждение позволяет заменить итерацию

$$\Phi(n, X) \leftrightarrow \Phi(\Phi(\dots \Phi(X) \dots)) \quad (n \text{ раз})$$

одним применением квантора по предикату уровня k :

$$\begin{aligned} \Phi(n, X) &\leftrightarrow \exists Y (Y(0, X) \leftrightarrow X \& (\forall m < n) (Y(m+1, X) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \Phi(Y(m, X)) \& Y(n, X))), \end{aligned}$$

так как импликация слева направо получается подстановкой $\Phi(\dots \Phi(X))$ вместо Y .

Таким образом, все предикаты уровня $k+1$ можно получить с помощью числовых кванторов из предиката $T^{(k)}$, который в свою очередь получается из некоторого фиксированного предиката уровня k с помощью итерации.

Оценим еще дедуктивную силу рассмотренных ранее принципов. Система L является консервативным расширением арифметики Пеано PA и ее дедуктивная сила определяется ординалом ϵ_0 . Система, где допускаются итеративные определения предикатов и схема индукции, представляет разветвленный анализ всех конечных уровней, ординал которого равен $\varphi(\omega, 0)$ (см. Schütte К. Proof theory. — Berlin: Springer, 1979).

1. Порочный круг (лат.).
2. Чистая математика (лат.).
3. Топология (букв: анализ положения) (лат.).
4. С самого начала (лат.).
5. Первое, что бросается в глаза (греч.).
6. "Ни одно множество не может содержать элементы, определяемые в терминах его самого" (англ.).
7. Точная нижняя грань (лат.).
8. В стадии зарождения (лат.).
9. Своеобразных (лат.).

Г.Е. Минц

ЧАСТЬ II

Имя математика Германа Вейля прочно вписано в историю фундаментальной теоретической физики XX века. Интерес к ее проблемам, ряд конкретных результатов и плодотворных идей, замечательные книги по теории относительности и квантовой механике — все это выделяет Вейля среди математиков его поколения. Он унаследовал, можно сказать, роль, которую в предыдущем поколении играл А. Пуанкаре.

Однако различие двух профессий, несмотря на все их родство и обоюдную пользу контактов, вполне ощутимо. И статьи Вейля, собранные в разделе "Раскрытие мира", выразительно характеризуют *взгляд математика на познание физического мира*. Разумеется, не просто математика, а математика-философа, внесшего важный вклад в само это познание.

Одна из самых ранних форм, в которые запечатлелось восхищение могуществом науки: "Дайте мне точку опоры..." предоставляет повод уподобить математику рычагу, а поиск точки опоры возложить на теоретическую физику. Искать приходится в принципиально нематематизируемой области — в физической реальности, наощупь, полагаясь на интуицию — физическую интуицию, возникающую только у того, кто физическую реальность облизал вдоль и поперек, общупал ее собственными руками. Для математика, посвятившего свою жизнь конструированию разнообразных рычагов, физическая реальность с ее видимой хаотичностью явлений, фактов, свойств, с ее математическим эклектизмом всегда остается несколько чуждой. Даже если в этой реальности математик рассмотрел идею какого-то замечательного рычага и какой-то его рычаг удалось приложить.

Подобную отчужденность и вызванную ею печаль можно ощутить в подслушанном Вейлем диалоге двух апостолов релятивизма. Идеи Маха сыграли важную роль в создании общей теории относительности — релятивистской теории гравитации Эйнштейна. Однако принцип Маха никому не удалось из словесно-физической формы перевести в физико-математическую. В истории физики нередко освещающая идея сторавет почти полностью, оставляя только уголек, и физики благодарны уже за тот свет, что позволил сделать во тьме очередные несколько шагов. В математике, пожалуй, чаще обгорают лишние, случайные части исходной идеи, и очищенная огнем красивая математическая структура занимает должное место в ее арсенале.

Первую и вторую статьи разделяют всего несколько лет, но фактически речь должна идти о разных эпохах в теоретической физике. 1924 год — расцвет эпохи единых геометризованных теорий поля, точнее, расцвет надежд на такую теорию. Началом этой эпохи стал проект единой теории Вейля 1918 года*). А к началу 30-х годов прог-

*)См. В и з г и н В.П. Единые теории поля в первой трети XX века. — М.: Наука, 1985.

рамма единых теорий выдохлась из-за своей безуспешности на фоне мощного расцвета квантовой программы. Вряд ли кто-либо провозгласил конец этой программы так решительно и безжалостно как Вейль в статье 1931 года, назвавший "геометрическими выкрутасами" все предлагавшиеся проекты единой теории и оставивший только выбор способа их похорон. В этой безжалостности можно усмотреть следы "обиды" Вейля на физику, которая не пожелала воспользоваться найденной им возможностью реализовать идею близкодействия гораздо последовательнее, чем в эйнштейновской ОТО.

У программы единой теории (расширившей свои претензии на квантовую область) оставался один главный приверженец — Эйнштейн, который в 1918 г., отдавая должное красоте вейлевского "рычага", первым сказал, что точки опоры для этого рычага не найти *). Эйнштейн еще два десятилетия, до конца жизни, отдал поиску подлинной единой теории. Этот поиск некоторые считали глухим тупиком, другие в упорстве Эйнштейна видят глубину проникновения, оправдывающуюся в нынешних единых теориях. Но кто может упрекнуть Вейля? Ведь он, предлагая похоронить все первые проекты единых теорий, не исключал саму возможность найти "естественную, изящную геометрию", предлагая только центр тяжести перенести с гравитации на поле материи. При этом из тела своей погибшей теории он извлек одну важную идею и перевоплотил ее в принцип калибровочной симметрии, ключевой для нынешней программы единой теории. А естественная, изящная геометрия, способная объединить гравитацию и поля материи, и сейчас остается лишь заветной мечтой теоретиков.

Второй важный мотив, звучащий у Вейля, — космологический. Читатель может получить наглядное представление о весьма спекулятивном состоянии релятивистской космологии дофридмановского этапа. То, что статью Вейля 1924 года следует отнести к этому этапу, в общем не удивительно: работу А.А. Фридмана не заметил тогда по существу никто, даже Эйнштейн. Гораздо удивительнее, что нового этапа в релятивистской космологии Вейль не заметил и в 1931 году, уже после работ Леметра и открытия Хаббла, когда расширение Вселенной из указанной Фридманом возможности превратилось в наблюдаемый факт. Конечно, математик Вейль мог себе позволить не следить за физико-астрономической жизнью. Но есть и более глубокая причина. Именно математик Вейль в 1919 году, пытаясь связать свою единую теорию с физической реальностью, видимо, впервые обнаружил соотношение, которое впоследствии стало называться "совпадением больших чисел" и восприниматься как чисто эмпирический факт: это — связь космологических параметров (радиуса Вселенной, позже — хаббловского параметра, или возраста Вселенной) и характеристик физики атома, физики микромира**). Сырьем для Вейля послужила замечательная работа де Ситтера 1917 года, в которой впервые космологические характеристики оценивались — хоть и очень предположительно — на основе реальных астрономических наблюдений. Путь, по которому Вейль пришел к связи параметров микро- и мегафизики, был настолько далек от стандартов математической (и даже физической) строгости, что мог быть рожден только отчаянным желанием внедрить в жизнь свою единую теорию. Этот путь был вскоре заброшен, но полученный "незаконно" результат остался и зажил собственной жизнью. Опирающаяся на это соотношение грандиозная идея о взаимосвязи космологии и микрофизики недаром захватила в пожизненный плен Эддингтона и увела далеко от физики Дирака. Не удивительно, что родителем этой идеи Вейль — математик и философ — был слишком увлечен ею и не обратил внимание на нестатическую космологию, еще не встроенную в общую картину мира.

Статья Вейля 1949 года, завершающая раздел, написана уже вдали от гущи событий теоретической физики. Это — мастерский рассказ о месте математического аппарата

*) Насколько глубокое впечатление производила теория Вейля, можно судить по отношению к ней П. Дирака. Известный ценитель математической красоты физической теории, он в 70-е годы попытался вдохнуть новую физическую жизнь в геометрию Вейля (см. Г о р е л и к Г.Е. Космология Дирака в историко-научном контексте // Поль Дирак и физика XX века. — М.: Наука, 1989).

**) См. ниже комментарий к статье "Геометрия и физика".

теории относительности в геометрии XX века. Можно пожалеть, что Вейль "удержался от искушения" рассказать о геометрии единых теорий поля (тем более, что он упоминает "нуклоны, мезоны и т.п."). Интересно было бы узнать как виделись ему события бурных 20-х годов двадцать лет спустя и видел ли он перспективы геометризации калибровочной симметрии.

ИНЕРЦИЯ И КОСМОС. ДИАЛОГ (*Massenträgheit und Kosmos. Ein Dialog*)

Опубликовано в *Die Naturwissenschaften*. — 1924. — Bd 12. — S. 197 — 204.

1. Напомним, что в работе Эйнштейна 1917 года, в которой родилась релятивистская космология, "факт" малости скоростей звезд считался "самым важным из всего, что нам известно о распределении материи".

2. Подразумевается оценка, сделанная де Ситтером.

Теория относительности как стимул математического исследования (*Relativity theory as a stimulus in mathematical research*)

Опубликовано в *Proceedings of the American Philosophical Society*. — 1949. — V. 93. — P. 535—541.

ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА. (*Geometrie und Physik*)

Опубликовано в *Die Naturwissenschaften* — 1931. — Bd 19. — S. 49—58.

1. Понятие непрерывности самих координат в пространстве-времени физически трудно считать первичным. В случае евклидовой, знакоопределенной метрики непрерывность, топология извлекаются из метрической структуры: близки те точки, расстояние между которыми близко. В случае релятивистской, знакоопределенной метрики (интервала) соотношение топологической и метрической структур не так просто (обсуждение см. в кн. Г о р е л и к Г.Е. *Размерность пространства: историко-методологический анализ*. — М.: Изд-во МГУ, 1983, и более популярно: Г о р е л и к Г.Е. *Почему пространство трехмерно?* — М.: Наука, 1982).

2. Понятие выделенности здесь явно нацелено на определение инерциальных систем отсчета в СТО. Однако можно говорить и о чисто геометрической выделенности, — скажем, совокупность всех сферических (или всех декартовых) систем координат. В ОТО возможно только геометрическое понимание выделенности.

3. Принцип наблюдаемости, который здесь имеется в виду, хоть и восходит к эйнштейновской СТО, впоследствии для самого Эйнштейна не был "основным принципом теории познания".

4. Хотя гуманитарные корни, разумеется, питали физическое мировоззрение Ньютона, в данном случае вряд ли они играли большую роль, чем знаменитый опыт с ведром.

5. Вейль кроме радиуса электрона $r_e = e^2/mc^2$ пользовался еще гравитационным радиусом электрического заряда e : $r_{eg} = eG^{1/2}/c^2 = 10^{-20} r_e$.

6. Нётеровская взаимосвязь законов сохранения и симметрий (инвариантности) имеет ясную и хорошо определенную форму в СТО. В ОТО ситуация не так проста.

7. Нынешнее понимание взаимосвязи атомистики и космологии, которая заключается в совпадении больших чисел ($\sim 10^{40}$), опирается на антропный принцип и выглядит совсем не фантастически, хотя и совсем по иной причине, чем подозревалось Вейлсом в 1931 г.

СОВПАДЕНИЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В КОСМОЛОГИИ XX ВЕКА

Взаимоотношение микрокосмоса и Космоса, взаимосвязь микромира и мегамира издавна была предметом размышлений философа, поэта, естествоиспытателя. Микро- и мегамишталбы определяютс, конечно, уровнем развития науки и соответствуют наименьшему и наибольшему масштабам, доступным изучению в данный период. С ньютоновской эпохи до настоящего времени диапазон экспериментально изучаемых явлений расширился по пространственным масштабам примерно на десять порядков в обе стороны. Со временем менялся смысл, который можно было вложить в слова "микромир" и "мегамир", менялось представление о взаимосвязях этих миров. Установление новых взаимоотношений такого рода приводило к скачкообразным изменениям области освоенной человеком действительности и это ощущалось не только в физике, но и в философском истолковании мира. Примеры хорошо известны: обнаруженное единство небесной и земной механики, доставленная спектральным анализом возможность изучать физически звезды, расширение Вселенной. Однако все же эти взаимосвязи имели частичный или инструментальный характер. Что же касается взаимоотношения микромира и мегамира в целом, то это оставалось уделом лишь философических умозрений — вплоть до конца второго десятилетия XX века. Именно тогда обнаружился первый физический факт, явно, количественно выражающий эту взаимосвязь.

К открытию этого физического факта самое непосредственное отношение имел признанный уже математик и начинающий физик-теоретик Герман Вейль.

Космологические и микрофизические параметры. Факт, о котором идет речь, еще относительно недавно воспринимался как "необъясненная эмпирическая связь метagalактических параметров с микрофизическими константами" [1, с. 496]. Это эмпирическое соотношение до сих пор еще не включено подлинным образом в физическую теорию, однако стало исходным пунктом для столь различных направлений, как гипотеза изменяемости гравитационной константы и антропный принцип. Первое направление ассоциируется с проблемой постоянства физических констант вообще. Второе направление неожиданным образом, на новой основе и в совершенно новой форме, привело к возрождению антропоцентрического взгляда на Вселенную.

Несмотря на то, что связь микро- и мегапараметров долгое время считалась эмпирическим фактом, ее выявление теснейшим образом сопряжено с событиями в самой высокой теоретической физике. Однако прежде чем обратиться к рассмотрению обстоятельств рождения нового факта, кратко представим его современное положение, явно демонстрирующее его эмпирическую природу.

Самый большой объект, изучаемый в настоящее время физикой, — Вселенная как целое — описывается всего несколькими параметрами, основные из которых (и единственные измеряемые с удовлетворительной точностью) — усредненная плотность массы (или энергии) ρ и параметр Хаббла H , характеризующий темп расширения Вселенной (для не слишком удаленных друг от друга скоплений галактик связывающий скорость их удаления друг от друга v и расстояние между ними r простым соотношением $v = Hr$). Итак, ρ и H — *измеряемые* мегалоскопические параметры: $\rho \approx 10^{-31}$ г/см³, $H \approx 2 \cdot 10^{-18}$ с⁻¹. К величинам, характерным для мегамишталбов, можно отнести также гравитационную постоянную G и скорость света c .

В качестве параметров, характерных для микрофизики, можно взять массу элементарной частицы m (имеющаяся здесь неопределенность в несколько порядков несущественна, как будет ясно из дальнейшего; для определенности будем иметь в виду массу электрона), элементарный заряд e , постоянную Планка $\hbar$, а также скорость света c .

Таким образом, мегафизику представляют величины H , ρ , G , c , а микрофизику — m , e , $\hbar$, c .

Поскольку обсуждаемая связь в настоящее время не извлекается из какой-либо физической теории, то претензии к недостаточной стройности формулировок неуместны. Если в 20-е годы набор величин для микромира m , e , $\hbar$ был бы вполне понятен, то в наше время выделение электромагнитного взаимодействия далеко не очевидно. Почему бы, например, не привлечь характеристики слабого и сильного взаимодейст-

вий? Впрочем, в настоящее время, когда господствует идеал единой теории фундаментальных взаимодействий, этот аргумент не выглядит столь грозно, как, скажем, лет тридцать назад.

Подлинными объектами теоретического рассмотрения могут быть, разумеется, только безразмерные константы, не зависящие от произвола в выборе системы единиц измерения. Среди безразмерных констант составленных из

$$H, \rho, G, m, e, \hbar, c \quad (1)$$

обращают на себя внимание независимые комбинации, равные необычайно большим числам порядка 10^4 . Одну такую величину можно получить, сравнивая электромагнитное взаимодействие ("типичное" для микромира) и гравитационное (характерное для мегамасштабов);

$$Q_1 = e^2/Gm^2 = 4 \cdot 10^{42} \approx 10^{40}. \quad (2)$$

Другую можно составить, взяв отношение характерных для микро- и мегамасштабов значений расстояний: так называемый радиус Вселенной $R = c/H$ и классический радиус электрона $r_e = e^2/mc^2$

$$Q_2 = R/r_e = 3 \cdot 10^{40} \approx 10^{40}, \quad (3)$$

Близость независимых безразмерных величин $Q_{1,2}$ к огромному числу $\sim 10^{40}$:

$$Q_1 \approx Q_2 \approx 10^{40}, \quad (4)$$

и называется *совпадением больших чисел*. Независимость величин Q_i означает здесь, что из существующих физических теорий нельзя получить связь между ними. Таким образом, совпадение больших чисел оказывается "чисто" эмпирическим фактом, не включенным в теорию (кавычки здесь призваны напомнить, что называть чисто эмпирическими такие величины, как средняя плотность Вселенной и скорость ее расширения, стало возможным только в наше просвещенное время).

Поскольку в соотношение (3) входит хаббловский параметр H , можно было бы подумать, что о совпадении больших чисел стало известно только после 1929 г., после того, как был открыт сам закон Хаббла. Однако это не так. О совпадении больших чисел заговорили еще в начале 20-х годов, особенно громко – А. Эддингтон. Чтобы понять это загадочное на первый взгляд обстоятельство, придется обратиться к истории релятивистской космологии, с которой неразрывно связана история "больших чисел".

Первые шаги релятивистской космологии. Релятивистская космология родилась в работе Эйнштейна 1917 г. [2], где была предложена первая космологическая модель, основанная на общей теории относительности. Вселенная в этой модели описывалась двумя параметрами, не зависящими от времени и пространственных координат, – радиусом пространственной кривизны R и плотностью вещества во Вселенной ρ . Для Эйнштейна модель эта не была чисто теоретической конструкцией. Наиболее существенные ее свойства – однородность, изотропность, статичность – Эйнштейн считал экспериментально обоснованными. Статичность обосновывалась наблюдательным фактом: "Самое важное из всего, что нам известно из опыта о распределении материи, заключается в том, что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света" [2, с. 608]. Эйнштейн не указывал, какой конкретный экспериментальный материал он имел в виду, но роль, которую для него играл этот факт, видна уже из того, что в 11-страничной статье он упоминается семь раз.

Условие статичности привело Эйнштейна к необходимости обобщить уравнения поля ОТО введением космологической константы Λ :

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} - \Lambda g_{ik}, \quad (5)$$

к предположению замкнутости пространства и к соотношению

$$1/R^2 = \kappa \rho / 2 = \Lambda, \quad (6)$$

связывающему величины R и ρ .

Сам Эйнштейн не предпринял попытки оценить величины R и ρ на основе астрономического наблюдательного материала: "Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний" [2, с. 612].

Первым это сделал де Ситтер в том же 1917 г. в статье [3]. На основании астрономических данных он получил первые в истории релятивистской космологии количественные оценки для радиуса R — единственного, по существу, параметра, определяющего свойства космологической модели.

Количественные оценки были двух типов: чисто геометрические следствия кривизны (например, для распространения света) и оценки плотности, с которой в силу (6) однозначно связана кривизна.

Де Ситтер использовал несравненно более обширный астрономический материал, чем единственный "факт неподвижности звезд", упоминавшийся в статье Эйнштейна. Де Ситтер учитывал уже галактическую структуру Вселенной (хотя и называл ее лишь "очень вероятной"), размеры и массы нашей Галактики и даже незадолго до того обнаруженное смещение спектральных линий у трех галактик ("спиральных туманностей"). Любопытно, что он использовал и результаты работы К. Шварцшильда 1900 г., в которой сопоставлением астрономических данных и предположения о кривизне пространства (разумеется, на дорелятивистской основе) давались оценки снизу на радиус кривизны, например, из условия, что поглощение света на пути "вокруг мира" от обратной стороны Солнца должно сделать ее невидимой (в пространственно замкнутой Вселенной всякий объект может наблюдаться в двух противоположных направлениях).

Особенно интересной была, конечно, оценка радиуса кривизны сверху. Эта оценка получилась из оценки средней плотности вещества во Вселенной. Используя имеющиеся в то время данные о звездной плотности в центре нашей Галактики, оценку ее размеров Каптейном (~ 10 кпк) и принимая, что межгалактические расстояния порядка размеров нашей Галактики, де Ситтер получает для плотности

$$\rho > 10^{-27} \text{ г/см}^3 \quad (7)$$

и соответственно в силу (5) для радиуса кривизны

$$R < 10^{27} \text{ см.} \quad (8)$$

В предположении пространственной замкнутости оценки R снизу, полученные из условия невидимости обратной стороны Солнца, дают $R > 4 \cdot 10^{24}$ см, а из достаточной малости угловых размеров "спиральных туманностей" в предположении, что они имеют линейные размеры порядка нашей Галактики, $R > 10^{25}$ см.

Хотя де Ситтер подчеркивает очень большую неопределенность всех этих оценок, он все же считает, что "их близость весьма замечательна и не могла бы ожидаться априори" [3, р. 26].

Так появились первые количественные, основанные на реальных наблюдательных данных параметры, претендующие на описание Вселенной в целом: "радиус Вселенной"

$$R \sim 10^{27} \text{ см} \quad (9)$$

и ее плотность

$$\rho \sim 10^{-27} \text{ г/см}^3. \quad (10)$$

Любопытно отметить, что, несмотря на радикальное отличие современных космологических представлений от модели Эйнштейна (сейчас понятие "радиус Вселенной" вовсе не обязательно предполагает замкнутость пространства), современные оценки R и ρ отличаются от (9), (10) лишь на несколько порядков.

Итак, уже в 1917 г. могло быть замечено фактическое совпадение больших чисел, однако тогда этот факт не был "санкционирован" никакой теорией.

Эмпирический факт, обнаруженный математиком. Шаг, приведший к обнаружению "совпадения больших чисел", сделал Г. Вейль, развивая свою единую теорию поля 1918 г. [4]. Таким образом, от наблюдательной астрономии мы переходим к

теоретической физике и даже к слишком теоретической физике, поскольку теория Вейля так и не выросла из состояния "проекта теории" — математической конструкции, не сопоставимой с экспериментом. Это, однако, вовсе не обрекло ее на физическую бесплодность: с помощью теории Вейля возникла концепция калибровочной симметрии, столь важная для современной физики.

В теории Вейля исходным пунктом стал вопрос о пространственно-временных эталонах, или масштабах. Конечно, уже и эйнштейновская общая теория относительности (на обобщение которой претендовала теория Вейля) включала в себя предположение об эталонах, состоящее в том, что основной объект ОТО — интервал — должен сопоставляться с экспериментом с помощью определенных эталонов длины, сделанных, например, из твердых тел или световых сигналов. При этом в ОТО имеется принципиальная возможность однозначно сравнивать длины интервалов, измеренные в разных точках пространства-времени.

Вейль предложил в духе принципа близкодействия требовать однозначной сравнимости длин лишь для каждой точки пространства-времени в отдельности. Это привело его к геометрии, которая, обобщая риманову, описывает свойства пространства-времени не только десятью величинами $g_{ik}(x)$, но еще и четырьмя величинами $\varphi_i(x)$, которым можно было отвести роль вектор-потенциала электромагнитного поля. При этом в теории Вейля, кроме произвольных координатных преобразований, рассматривалось еще и так называемое калибровочное, или масштабное преобразование

$$g'_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \varphi'_i = \varphi_i + \partial_i \lambda,$$

где $\lambda(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат. Такое преобразование интерпретировалось как изменение масштаба, изменение эталона длины (который в этой теории должен был выбираться в каждой точке пространства-времени), так как $ds'^2 = \lambda ds^2$.

Инвариантность относительно масштабных преобразований (конформная инвариантность) — определяющий принцип теории Вейля. Однако этот принцип привел Вейля к уравнениям поля, которые не переходили в уравнения Эйнштейна в соответствующем пределе, когда $\varphi_i = 0$ (линейный по кривизне лагранжиан $\mathcal{R}\sqrt{g}$, приводящий к уравнениям Эйнштейна, не является масштабно инвариантным, поэтому Вейль в качестве лагранжиана взял квадрат тензора (вейлевской) кривизны $\mathcal{R}^i_{jkl} \mathcal{R}^{jkl} \sqrt{g}$). Оправдывая это обстоятельство, Вейль в статье 1918 г. заметил:

"Но и действительно, крайне маловероятно, чтобы уравнения Эйнштейна для гравитационного поля выполнялись строго, и прежде всего потому, что входящая в них гравитационная постоянная совершенно не вписывается в ряд других естественных констант, так что гравитационные радиусы заряда и массы электрона оказываются, например, совершенно иного порядка величины, чем радиус самого электрона (они меньше последнего, первый в 10^{20} , а второй в 10^{40} раз)" [4, с. 525].

Здесь Вейль почти повторяет свое замечание из статьи 1917 г. [5], написанной еще в рамках ОТО. Получив решение для электрически заряженной "точечной" массы (которое сейчас называют решением Рейснера-Нордстрема), Вейль ввел длины $r_{gm} = Gm/c^2$ (гравитационный радиус массы m), $r_{ge} = e\sqrt{G}/c^2$ (гравитационный радиус электрического заряда e). Сравнивая эти длины с "радиусом электрона" $r_e = e^2/mc^2$, он замечает, что для электрона $r_{ge}/r_e = 10^{20}$, и указывает, что полученное решение едва ли может быть использовано для понимания физики атома, поскольку влияние гравитационного поля заряда становится заметным для электрона только на расстоянии порядка $r_{ge} \sim 10^{-33}$ см [5, S. 145].

В 1918 г. Вейль также замечает, что "в самом общем случае в мировой области, где [скаляр кривизны] $\mathcal{R} \neq 0$, можно путем соответствующего выбора произвольной единицы длины получить $\mathcal{R} = \text{const} = \pm 1$ " [4, с. 524].

Развитие этих замечаний, видимо, и побудило Вейля в работе 1919 г. [6] впервые обратить внимание на "совпадение больших чисел". Произошло это так.

Наиболее слабым пунктом теории Вейля с точки зрения физики было отсутствие физической интерпретации для процедуры "выбора произвольной единицы длины", различной в разных точках пространства-времени (именно этот пункт вызвал критичес-

кое замечание Эйнштейна, которое, впрочем, не имело количественной формы, видимо, поэтому не смогло убедить Вейля [4, с. 525, 526]). Хотя вопрос об эталонах всегда был важен для физики, но реально используемые эталоны, масштабы предполагались в наивысшей возможной степени стабильными. Ничего похожего на произвольное, пространственно-временное изменение масштабов в физике не существовало. Конечно, определенный произвол в выборе эталонов был, но он имел "разовый", глобальный (в пространстве-времени) характер. Поэтому, введя столь большой произвол в калибровку масштабов и считая этот произвол подлинной реализацией принципа близкодействия (в отличие от "половинчатого и непоследовательного" [4, с. 527] эйнштейновского подхода), Вейль вынужден был каким-то образом от этого же произвола и избавляться, чтобы можно было говорить об экспериментальной проверке его теории.

Найти действительно решение этой проблемы Вейлю так и не удалось, однако поиски решения привели его к физическим величинам размерности длины, которые могли бы рассматриваться как фундаментальные характерные масштабы. Но в 1918 г., как мы видели, сопоставление величин r_{ge} , r_{gm} и r_e понадобилось Вейлю "только" для обоснования того, что эйнштейновская теория гравитации не может быть фундаментом атомной физики.

В 1919 г. в статье [6] Вейль предложил новый вариант единой теории, обобщающей ОТО и основанной на введенной им геометрии (геометрии Вейля). Лагранжиан новой теории по-прежнему был квадратичен по кривизне, но уже по скаляру кривизны; максвелловский лагранжиан уже не возникал прежним непринужденным образом — как слагаемое в квадрате вейлевского тензора кривизны, а просто добавлялся "руками". И этот лагранжиан Вейль посредством искусственных манипуляций приводит к квазиэйнштейновскому виду. Для этого он, беря вариацию действия, на промежуточной стадии выкладок пользуется свободной в выборе масштаба и устанавливает калибровку требованием, чтобы скаляр (вейлевской) кривизны был везде равен некоторой константе. При этом он приходит к вариационному принципу, который содержит эйнштейновскую часть (вместе с органически присутствующим космологическим членом), максвелловскую часть, но еще и немаксвелловское слагаемое — квадрат самого вектор-потенциала $\varphi_i \varphi^i$ ("простейшее выражение, рассматривавшееся в теории Ми" [6, с. 122], — теории, претендовавшей на единое полевое описание электрона и электромагнитного поля).

Тем самым в новом варианте теории и уравнения Максвелла, и уравнения Эйнштейна "испорчены". Однако согласно Вейлю противоречия с экспериментом (в первую очередь электромагнитного характера, конечно) здесь нет, поскольку немаксвелловская добавка входит в уравнения с очень малым коэффициентом, порядка $1/R^2$, где R — радиус Вселенной (при этом Вейль, видимо, подразумевает связь между величиной космологической постоянной и радиусом Вселенной $\Lambda \sim 1/R^2$, которая выполняется для космологической модели Эйнштейна). На этом пути Вейль приходит к единице заряда, гравитационный радиус которой $G^{1/2}e/c^2$ порядка радиуса Вселенной. Указывая, что у него единица электричества, а также единица действия имеют "космическую величину", он выделяет курсивом слова: "„Космологический" фактор, который прежде Эйнштейном добавлялся к его теории специально, у нас содержится уже в исходных принципах" [6, с. 124].

Таким образом, в работе Вейля 1919 г. появляется существенная космологическая направленность, которой не было в предыдущей, и здесь к микроскопическим величинам r_e , r_{ge} , r_{gm} добавляется мегаскопическая величина — радиус Вселенной R . И именно в этой работе при обсуждении "проблемы материи" Вейль, по-видимому, впервые отмечает "факт, состоящий в том, что для электрона имеются безразмерные числа, порядок величины которых чрезвычайно отличается от единицы; таково отношение радиуса электрона к гравитационному радиусу его массы, которое равно по порядку величины 10^{40} ; отношение радиуса электрона к мировому радиусу может быть такого же порядка величины" [6, с. 129]. Речь здесь идет о соотношении

$$\frac{r_e}{r_{gm}} \left(= \frac{e^2/mc^2}{Gm/c^2} = \frac{e^2}{Gm^2} \right) \approx \frac{R}{r_e}, \quad (11)$$

т.е. о "совпадении больших чисел". Но в статье Вейля нет ни упоминания конкретной

численной величины R , ни ссылок на работы, в которых эта величина фигурирует, хотя, судя по соотношению (11), Вейль имеет в виду $R \sim 10^{27}$ см, т.е. оценку де Ситтера. В 1923 г. в связи с тем же фактом Вейль пишет о величине "мирового радиуса" 10^9 световых лет ($\sim 10^{27}$ см) [7, с.323].

Трудно с уверенностью сказать, что именно Вейль в статье [6] впервые обнаружил факт "совпадения больших чисел". Исходя из того, что Вейль пишет об этом факте как-то вскользь, нельзя исключить, что он был уже известен (возможно, только в устной форме и как курьез) в окружении Вейля и до его статьи. Но во всяком случае этот факт не мог родиться до астрономических оценок радиуса Вселенной, сделанных де Ситтером в 1917 г.

При чтении статьи Вейля 1919 г. может даже возникнуть впечатление, что соотношение (11) *следует* из теории. Однако на самом деле теория Вейля тогда (как и позже) не достигла состояния, в котором ее можно было бы сопоставить с наблюдательными данными, и соотношение (11) было лишь *созвучно* вейлевским идеям. Да и в этом созвучии некоторые ноты вызывают сомнение. В частности, конкретная величина радиуса Вселенной R , подразумеваемая в (11), была получена де Ситтером в рамках эйнштейновской космологии, и вопрос о том, может ли этот результат быть перенесен в теорию Вейля, оставался открытым.

Еще более сомнителен путь, которым Вейль от своего исходного лагранжиана, квадратичного по кривизне и потому порождающего уравнения поля *четвертого* порядка, пришел к уравнениям *второго* порядка и к своим "электронно-космологическим" выводам. Соответствующие физико-математические манипуляции так и не получили надеждающего математического обоснования. Не случайно Дирак, вернувшись спустя полвека к геометрии Вейля, ввел дополнительное скалярное поле, с помощью которого составил масштабно инвариантный лагранжиан, линейный по кривизне и приводящий, следовательно, к уравнениям второго порядка [8].

Но несмотря на указанные обстоятельства, соотношение (11) вместе с идеями Вейля воспринимались как намеки на возможность чрезвычайно общего физического подхода, включающего и микрофизику, и космологию. А наиболее активный приверженец этого подхода Эддингтон считал, что "совпадение больших чисел" можно получить из теории Вейля: "Теория [Вейля] (...) дает объяснение того, почему гравитационная сила так ничтожно мала в сравнении с электрической силой. (...) Теория приводит к заключению, что отношение гравитационного радиуса к электрическому должно быть величиной того же порядка, что и отношение последнего к радиусу кривизны мира. Это бы значило, что радиус пространства должен быть порядка $6 \cdot 10^{29}$ см. (...) это немного больше, чем дают предварительные подсчеты де Ситтера, но лежит в пределах возможного" [9, с. 177].

Когда на основе идей Вейля не удалось создать жизнеспособную теорию, Эддингтон перешел к другим теоретическим конструкциям. Но главным мотивом для него осталось единство микро- и мегафизики, а наименее спекулятивным его аргументом было соотношение (11).

После того как стала ясной неизбежность нестатической космологии, "радиус Вселенной" R перестал быть жестко связанным с замкнутой космологической моделью. Получаемый из наблюдений параметр Хаббла H определяет характерное космологическое расстояние $R = c/H$ независимо от конкретной космологической модели.

Само "совпадение больших чисел" осталось в силе, поскольку хаббловский радиус $R = c/H$ оказался близким к эйнштейновскому радиусу мира, оцененному де Ситтером. Однако изменение смысла R означало, что эта величина — функция времени $R(t)$, а не данная раз и навсегда константа, характеризующая мироздание. Это подрывало надежду на существование некой универсальной связи между этим мегаскопическим параметром и микроскопическими параметрами. Таким образом, "совпадение больших чисел" стало эмпирическим соотношением, в гораздо меньшей степени, чем прежде, зависящим от теоретических спекуляций; но при этом оно приобрело еще более загадочный характер. Действительно, совпадающими оказались два больших числа, одно из которых с точки зрения существующей теории постоянно (e^2/Gm^2), а другое зависит от времени ($R(t)/r$):

$$Q_1 = Q_2(t).$$

(12)

Для интерпретации так понимаемого "совпадения больших чисел" было предложено два совершенно различных подхода. Первый, начавшийся с заметки Дирака 1937 г. [10], был нацелен на поиски новой физической теории, в которой величина $Q_1 = e^2/Gm^2$ зависела бы от времени $Q_1 = Q_1(t)$ таким образом, чтобы соотношение $Q_1(t) = Q_2(t)$ выполнялось всегда. Поскольку Дирак всю зависимость от времени в Q_1 отнес к гравитационной константе $G = G(t)$, то речь должна была идти о создании новой теории гравитации, существенным образом привязанной к космологии, поскольку гравитационная константа должна быть однозначно связана с космологическими параметрами H и ρ .

Вторая интерпретация совпадения (12), возникшая на два десятилетия позже первой, не предполагает, по существу, никаких изменений в физике. Соотношение (12) рассматривается как уравнение, определяющее некоторый момент времени, а именно современную эпоху. Интерпретация этой выделенности возрождает — на новом уровне и в новой форме — антропоцентрический взгляд на Вселенную и приводит к вопросам, одна только формулировка которых на физическом языке является еще не решенной задачей.

Новый антропоцентризм в космологии. Антропоцентрический подход к "совпадению больших чисел" берет свое начало с работ Р. Дикке 1957 и 1961 гг. [11, 12].

Теоретические представления Дикке существенно не отличались. В статье [11] царствует сомнение в надежной экспериментальной подтвержденности ОТО. Автор считает, что принцип эквивалентности не действует для слабых взаимодействий (так он называет гравитационное и "фермиевское" взаимодействия). Как следствие, он выдвигает предположение о зависимости констант этих взаимодействий от времени и места. На этой основе он пытается строить новую теорию гравитации как проявление электромагнетизма с переменными электрической и магнитной проницаемостями вакуума. "Совпадение больших чисел" Дикке считает свидетельством переменности гравитационной константы. И только мимоходом предлагает объяснение огромной величины совпадающих чисел: "возраст вселенной, 'сейчас'", не случаен, а обусловлен биологическими факторами", потому что если бы постоянная тонкой структуры была в прошлом немного меньше или больше ее нынешней величины, то звезды (светимость которых пропорциональна этой постоянной в большой степени) были бы еще или стали уже холодными, что сделало бы невозможным существование человека.

И только в 1961 г. в [12] Дикке выдвинул физически достаточно определенное антропоцентрическое объяснение "совпадения больших чисел": поскольку для жизни необходимы элементы тяжелее водорода ("для того, чтобы сделать физиков, требуется углерод"), которые образуются в звездах, то эпоха человека определяется временем жизни звезд главной последовательности. Это время Дикке выразил через физические константы, что в сущности означало совпадение больших чисел.

Хотя сейчас антропоцентрический подход к совпадению больших чисел считается альтернативой гипотезы переменности физических констант, у самого Дикке эти две идеи пересекались.

Следует отметить, что антропоцентрический мотив появился в новой физике в связи с флуктуационной космологической гипотезой Больцмана. При обсуждении этой гипотезы в космологии 30–40-х годов выдвигались (с тем, правда, чтобы быть опровергнутыми) вполне определенные формулировки: огромная космологическая флуктуация является необходимой предпосылкой существования наблюдателя, т.е. подходящих условий для жизни человека [13].

Несмотря на все физические рассуждения, дающие антропоцентрическую интерпретацию различным физическим свойствам нашей Вселенной, антропный принцип в сущности принадлежит пока не физике, а метафизике (в первоначальном смысле этого слова). К обычно рассматриваемым связям познающего субъекта и познаемого объекта этот принцип добавляет их генетическую связь: в том случае, когда объект представляет собой Вселенную, субъект, чтобы познавать этот объект, должен прежде всего иметь возможность быть порожденным этим объектом, или: *наша* Вселенная такова, как она есть, потому что в ней могли появиться *мы*.

Сказанное не означает, что антропный принцип лежит совершенно вне физики. Он поддерживает, например, надежду ввести в физическую космологию некую Сверх-вселенную, состоящую из множества вселенных, среди которых есть и наша, оказавшаяся в состоянии породить человечество.

"Никто, конечно не станет считать подобные [космологические] умозрения ни важными открытиями, ни, тем более, как это делали древние философы, высшей целью науки. Однако законно ли высмеивать их как нечто совершенно бессмысленное — в этом можно сомневаться. Кто знает, не расширяют ли они круг наших представлений и, делая мышление более гибким, не способствуют ли познанию действительности?" — так писал Больцман [14] о своей флуктуационной гипотезе, имеющей в сущности антропоцентрический характер. В наше время появилось гораздо больше оснований считать, что подобные умозрения делают мышление более гибким и способствуют познанию действительности.

И совершенно ясно, что физико-математическое мышление XX века своей гибкостью в значительной мере обязано Герману Вейлю.

Литература

1. Зельманов А.Л. Космология // Физический энциклопедический словарь. — М., 1962. — Т. 2. — С. 491–501.
2. Эйнштейн А. Вопросы космологии в общей теории относительности // Собр. науч. трудов. — М., 1965. — Т. 1. — С. 601–612.
3. De Sitter W. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences // MNRAS. — 1971. — Vol. 78. — p. 3.
4. Вейль Г. Гравитация и электричество // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М., 1979. — С. 513–527.
5. Weyl H. Zur Gravitations theorie // Ann. Phys. — 1917. — Bd 54. — S. 117.
6. Weyl H. Eine neue Erweiterung der Relativitats theorie // Ann. Phys. — 1919. — Bd. 59. — S. 101.
7. Weyl H. Raum. Zeit. Materie. — В., 1923.
8. Dirac P. Long-range forces and broken symmetries // Proc. Roy. Soc. L.A. — 1973. — Vol. 333. — P. 403.
9. Эддингтон А. Пространство, время и тяготение. — Одесса, 1923.
10. Dirac P. The cosmological constants // Nature. — 1937. — Vol. 139. — P. 323.
11. Dicke R. Principle of equivalence and the weak interactions // Rev. Mod. Phys. — 1957. — Vol. 29. — P. 355; Gravitation without a principle of equivalence // Ibid. P. 363.
12. Dicke R. Dirac's cosmology and Mach's principle // Nature. — 1961. — Vol. 192. — P. 440.
13. Горелик Г.Е., Френкель В.Я. Матвей Петрович Бронштейн. — М., 1989. § 5.5.
14. Больцман Л. Избранные труды. — М., 1984. — С. 329.

Г.Е. Горелик

ЧАСТЬ III

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО (David Hilbert and his mathematical work)

Опубликовано в Bull. Amer. Math. Soc. — 1944. — V. 50 — P. 612–654 (Ges. Abh., Bd 4) через год после кончины Гильберта. Лучший очерк его жизни и математических достижений. Многие из направлений, развивавшихся Гильбертом, нашли отражение в его проблемах (см. комментированные издания: Mathematical developments arising from Hilbert problems // Proc. Symp. Pure Math. — Providence (Rhode Island), 1976. — V. 28. — P. 1–2; Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969). В настоящее время в издательстве "Наука" подготавливаются двухтомные "Избранные труды" Гильберта в серии "Классики науки".

1. См. Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. — Bd 3. — 2 Aufl. — Berlin: Springer, 1970.
2. "Обзор теории чисел" (нем.).
3. Высокомерие, спесь (исп.).
4. Содружество наук (лат.).
5. В тридцатые годы нашего столетия.
6. Hilbert D. Mathematische Problemen // Gött. Nachr. — 1900. — P. 253–297, (русский перевод: Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969. — С. 13.
7. Там же, с. 20–21.
8. Там же, с. 63–64.
9. Русский перевод: Гильберт Д. Основания геометрии. — М.: Гостехиздат, 1948.
10. Готовится русский перевод во 2-м томе "Избранных трудов".
11. Русские переводы: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1, 2. — М.: Гостехиздат, 1951; Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. — М.: ИЛ, 1947; Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: ОНТИ, 1936 (2-е изд. — М.: Наука, 1981); Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1982; Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. — М.: Наука, 1982.
12. Проблема состоит в вычислении кольца инвариантов через его образующие и соотношения между ними.
13. Вычисление сизигий на современном языке означает построение свободной резольвенты идеала соотношений как модуля над кольцом многочленов. Отсутствие избыточности означает минимальность резольвенты.
14. См. русский перевод: вандер Варден Б.Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.
15. Гильбертов подход к задаче явного нахождения инвариантов был переизложен в работе Dieudonne J., Carrell J. Invariant Theory. Old and New. — N.Y., 1971. (русский перевод в кн. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. — М.: Мир, 1974). В работе Гильберта имеется неконструктивный элемент. Пытаясь его убрать, Дьедонне и Керрол совершили ошибку, которая была обнаружена В.Л. Поповым. Ему же принадлежит окончательное решение проблемы конструктивного построения инвариантов (см. Porov V.L. // Asterisque. — 1981. — Т. 87–88. — S. 303–334).
16. Тем самым (лат.).
17. Контрпример был найден М.Нагатой в 1958 г. для случая коммутативной унитарной группы. Однако, окончательный ответ на сформулированный выше вопрос до сих пор не получен.
18. "Основания геометрии" (нем.).

19. Калибровочная мера, эталон меры (нем.).
20. Эта аналогия неоднократно использовалась впоследствии, например И.Р. Шафаревичем в его доказательстве общего закона взаимности (1949 г.) или в доказательстве Г.Фалтингсом гипотезы Морделла о рациональных точках на алгебраических кривых (1983 г.).
21. Ныне имеются как чисто алгебраические изложения (Artin E., Tate J. *Class Field Theory*. — Harvard, 1961), так и более аналитические (Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Мир, 1972).
22. Здесь имеется в виду отсутствие неабелева обобщения теории полей классов. Несмотря на ряд интересных результатов и идей последнего времени (описание 1-расширений, программа Р. Ленгленда), эта проблема в алгебре остается нерешенной. Наиболее глубоким имеющимся результатом является решение И.Р. Шафаревичем в 1954 г. задачи, обратной задаче теории Галуа для разрешимых групп.
23. Имеются в виду гильбертовы модулярные функции (см. v.d. Geer. *Hilbert Modular Surfaces*. — Berlin: Springer, 1988).
24. Наоборот (лат.).
25. Исчисление отрезков (нем.).
26. Кризис оснований (нем.).
27. Раз и навсегда избавиться от вопросов обоснования "математики" (нем.).
28. Т.е. логические формулы, построенные по правилам формальной арифметики.
29. До бесконечности (лат.).
30. Теория доказательств (нем.).
31. Более подробно о взглядах Вейля на теорему Гёделя можно узнать из его работы, приведенной в прим. 13 к статье "О символизме математики и математической физики".
32. История этого развития изложена в кн. Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 484—488.
33. В том числе и у самого Вейля. См. Weil H. *Geodesic Fields in the Calculus of variables for multiple integrals*//Ann. Math. — 1935. — V. 36. — P. 607—629.
34. Обзор сделанного Гильбертом в физике дал также М. Борн (см. Борн М. Размышления и воспоминания физика. — М.: Наука, 1977. — С. 24—35).
35. Современные исследования выявили тесные связи Гильберта и Эйнштейна в период создания общей теории относительности (см. Earman J., Glymour C. *Einstein and Hilbert: two months in the history of general relativity*//Arch. Hist. Exact. Sci. — 1978. — V. 19. — P. 291—308). Содержащийся здесь анализ переписки Гильберта и Эйнштейна в ноябре 1915 г. воспроизведен в кн.: Визин В.П. Релятивистская теория тяготения. — М.: Наука, 1981. — С. 324—326). В этой же книге детально сравниваются работы Эйнштейна и Гильберта 1915 г., в которых они разными способами вывели уравнения общей теории относительности.

ФЕЛИКС КЛЕЙН И ЕГО МЕСТО В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СОВРЕМЕННОСТИ (Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart)

Опубликовано в *Naturwissenschaften* — 1930. — Bd 18. — S. 4—11 (Ges. Abh., Bd. 3).
Язык Вейля в этой речи представляет исключительные трудности для перевода. Поэтому другой вариант перевода, содержащийся в кн.: Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984, может быть небезынтересен для читателя.

1. Здесь говорится о новом здании Математического института, которое служит той же цели и по сей день.
2. См. Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.: Наука, 1989.
3. Klein F. *Über die Theorie des Kreisels*, Bd 1—4. — Leipzig: Teubner, 1898.— 1910.
4. Klein F., *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*. — Leipzig: Teubner, 1882.

5. В оригинале: *Cott als ewig Vollendeter und Werdender*. Это высказывание, избранное Вейлем для иллюстрации своей мысли, близко представлениям патристики о соотношении времени и вечности (см., например, у Николая Кузанского: "... в вечности твоего замысла всякая временная последовательность совпадает в одном и том же *теперь* вечности"; Николай Кузанский. Сочинения, т. 2. — М.: Мысль, 1980. — С. 55). Похожие образы встречаются у позднего Гёте ("... и мнится нам покоем в Боге вся мировая толча"). Взгляды обоих мыслителей на мир весьма интересовали Вейля. Представление о мире как созданном и одновременно непрерывно создаваемом очень характерно для многих философских и мифологических систем, см., например, Флоренский П.А. Столп и утверждение истины. — М., 1914. — С. 336–338.

6. Spengler O. *Untergang des Abendlandes*. München — Bd. 1. — 1920; Bd. 2. — München, 1922 (русский перевод: Шпенглер О. Закат Европы, т. 1. — М.; Пг., 1923).

7. Cassirer E. *Philosophie der Symbolischen Formen*. — Bd 1–3. — Berlin, 1923–1929.

8. Frank E. *Plato und sogennanten Pythagoraer*. — Halle (Saale), 1923; Speiser A. *Klassische Stücke der Mathematik*. — Zürich, 1925.

9. Graeser W. *Bachs Kunst der Fuge* — *Bach-Jahrbuch*, 1982. Здесь имеется в виду не восстановление текста, а выяснение внутренней структуры произведения, см. Швейцер А. Иоганн Себастьян Бах. — М.: Музыка, 1965.

10. См. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа) // Об основаниях геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956. — С. 399. Историческая обстановка, в которой появилась Эрлангенская программа, описана в кн. Визгин В.П. Эрлангенская программа и физика. — М.: Наука, 1975.

11. Jordan C. *Traité des substitutions et des équations algébriques*. — Paris, 1870.

12. Klein F., *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grades*. — Leipzig, 1984 (русский перевод: Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. — М.: Наука, 1989). Симфония, о которой говорит Вейль, включает ныне единую классификацию таких разных объектов, как платоновы тела, особенности алгебраических поверхностей, линейные отображения, группы Кокстера, порожденные отражениями (см. H a z e w i n k e l M. and others. The ubiquity of Coxeter—Dynkin diagrams (an introduction to the A — D — E problem) // *Nieuw Arch. Wisk.* — 1977. — V. 25. — P. 257–307).

13. Eichstadt в переводе с немецкого означает Дубград. Quercupolitans — перевод с немецкого на латынь.

14. Исполнительская мощь (англ.).

15. Твердая, резко очерченная (англ.)

16. Мягкая, расплывчатая (англ.)

17. Grenzkreistheorem — речь идет о существовании униформизации компактной римановой поверхности с помощью дискретной группы в единичном круге. См. Клейн Ф., Указ. соч., с. 427–428.

18. То есть преобразование вида $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$, где σ — автоморфизм основного поля.

19. См. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. — М.: Мир, 1974, гл. 3.

20. Этот вопрос весьма интересовал Вейля. См. его статью "Основные черты физического мира. Форма и эволюция" и комментарии к ней в кн. Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 345–360, 491.

21. В оригинале "absoluten Gebildes". Ясное изложение описываемых здесь идей Кэли и Клейна см. в дополнении Г. Поина в кн. Спрингер Т. Теория инвариантов. — М.: Мир, 1981.

22. Согласно этому принципу, например, квадратичная форма от трех переменных представляется как определитель симметрической матрицы второго порядка, коэффициенты которой суть линейные формы. Историю вопроса см. Клейн Ф. Указ. соч., с. 165. Геометрическое описание см. в обзоре: Тюрин А.Н. О пересечении квадратик/УМН. — 1975. — Т. 30. — С. 51–99.

23. В оригинале Übertragungslehre. Имеется в виду теория связностей.

24. Теперь с этим вряд ли можно согласиться. См. прим. 20 к статье "Давид Гильберт и его математическое творчество".

25. См. прим. 22 к статье "Давид Гильберт и его математическое творчество".

АНРИ ПУАНКАРЕ (Henri Poincaré)

Этот непосредственный отклик на скоропостижную смерть Пуанкаре летом 1912 г. показывает отношение молодого Вейля к своему великому коллеге. Опубликовано в *Math. — naturwiss. Bl.* — 1912. — Bd 9. — S. 161–163 (*Ges. Abh., Bd. 1*). На русском языке имеется книга: Пуанкаре А. Избранные труды, т. 1–3. — М.: Наука 1971–1974. Основные философские произведения Пуанкаре в кн. Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1989. О влиянии наследия Пуанкаре на развитие математики XX века см. очерки, собранные в 3-м томе "Избранных трудов". с. 664–714 и *Mathematical Heritage of Henri Poincaré // Proc. Semp. Pure Math.* — Providence (R.I.), 1983. — V. 39, 40.

1. См. Пуанкаре А. Ценность науки. — М., 1906. Следующее издание смогло появиться лишь в 1983 г. (в указанной выше книге "О науке").

2. 1912 г.

3. Русские переводы работ по топологии и дискретным группам содержатся, соответственно, во 2-м и 3-м томах "Избранных трудов".

4. Перевод см. в "Избранных трудах", т. 1 и 2.

5. Заметим, что Вейль ничего не пишет о вкладе Пуанкаре в физику.

ЭММИ НЁТЕР (Emmy Noether)

Речь, произнесенная во время траурной церемонии после внезапной кончины Э. Нётер весной 1935 г. Опубликовано в *Scr. Math.* — 1935. V. 3. — P. 201–220 (*Ges. Abh., Bd. 3*). О жизни и окружении Э. Нётер см. также: Рид К. Гильберт — М.: Наука, 1977. *Emmy Noether in Bryn Mawr.* — Berlin: Springer, 1983.

1. 1935 г.

2. Его приезд в Томск не покажется столь удивительным, если вспомнить, что в то время там еще работал известный алгебраист Ф.Э. Молин, исследования которого по конечномерным алгебрам были продолжены затем Э. Нётер. Вместе с Ф. Нётером в Томск приехал также Б. Бергман, известный своими работами по теории аналитических функций в ограниченных областях (см. Круликовский Н.Н. История развития математики в Томске. — Томск, 1967, гл. 2). После 1937 г. следы Ф. Нётера теряются. В то же время Бергман покинул Томск, а во время войны его работы стали появляться в бразильских журналах.

3. Роль Клебша в создании алгебраической геометрии до сих пор мало оценена. См. о нем *Shafarevich I.R., Zum 150. Geburtstag von Alfred Clebsch // Math. Ann.* — 1983. — Bd 266. — S. 135–140.

4. По когтям узнают льва (*лат.*).

5. Эта аналогия весьма занимала самого Вейля. См. его работы, указанные в прим. 5 в кн. Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984.

6. См. основополагающую работу Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи // *Вариационные принципы механики.* — М., 1959. — С. 611–630.

7. Леонард Нельсон (1882–1927) — немецкий философ и психолог. На страницах диалогов Гейзенберга "Часть и целое" Г. Герман появляется как участника дискуссии о взаимоотношениях квантовой механики и философии Канта (*Heisenberg W., Physics and Beyond.* — N.Y., 1972, ch 10; // русский перевод: Проблема объекта в современной науке. — М., 1980. — С. 97–108). Любопытно сопоставить, с одной стороны, приведенное ниже Вейлем описание революционного порыва, и с другой, открытое неприятие теми же людьми квантовой механики, описанное Гейзенбергом. Дело в том, что при всей своей революционности, квантовая механика возвращает нас к взгляду на мир, отвергнутому наукой Нового времени.

8. См. Александров П.С. Памяти Эмми Нётер // УМН. 1936. — Вып. 2. — С. 255–265; Страницы автобиографии // УМН. — 1979. — Т. 34. — С. 219–249; 1980. — Т. 35. — С. 241–278.

9. Об их отношениях, а также о пребывании Э. Нётер в Москве, см.: Краткое жизнеописание Л.С. Понтрягина, составленное им самим // УМН. — 1978. — Т. 33. — С. 7–21.

10. Женский колледж в г. Брин Мор, штат Пенсильвания, США.

11. То есть как знак, не имеющий заранее заданного значения. Вейль неоднократно пользовался этим понятием. См. о нем прим. 18 в кн. Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 504–505.

12. Эта же идея лежит в основе всеобщей характеристики Лейбница. См. также прим. 10 к статье "О символизме в математике и математической физике".

13. Одна из комнат Математического института в Гёттингене носит несколько двусмысленное название *der Noethertraum*.

ПАНЕГИРИК (ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ) (*Encomium (Wolfgang Pauli)*)

Написано по случаю присуждения Паули (1900–1958) Нобелевской премии по физике за 1946 г. и опубликовано в *Science*. — 1946. — V. 103. P. 216–218. (*Ges. Abh.*, Bd. 4). Среди русских изданий работ Паули имеются: Паули В. Труды по квантовой теории. — Т. 1. — М.: Наука, 1975; Т. 2. — М.: Наука, 1977; Паули В. Физические очерки. — М.: Наука, 1975. О Паули см. Richter S. Wolfgang Pauli. — Aarau, 1979; Heisenberg W. Physics and Beyond. — N.Y., 1972, а также юбилейное издание: Теоретическая физика XX века. — М.: ИЛ, 1962, ставшее увы посмертным.

1. Перевод 2-го изд.: Паули В. Теория относительности. — М.: Наука, 1983.

2. Историю раннего периода становления квантовой механики см. в кн. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. — М.: Наука, 1985 и Нендгу J. The Creation of Quantum Mechanics and the Bohr — Pauli Dialogue. — Dordrecht: Reidel, 1984.

3. Убедиться в справедливости последнего утверждения можно, сравнив изложение формализма теории операторов в кн. Паули В. Общие принципы волновой механики // Труды по квантовой теории. — М.: Наука, 1975 и, скажем, в кн. Дирак П. Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.

4. С тех пор их число только увеличивалось: загадка солнечных нейтрино, вопрос о массе покоя, см. сб. Neutrinos. — Berlin: Springer, 1988.

5. Русский перевод см. в кн. Паули В. Труды по квантовой теории. — М.: Наука, 1975.

6. См. еще незаконченное издание: Pauli W. Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a. — Teil 1 (1919–1929). — Berlin: Springer, 1979; Teil 2 (1930–1939). — Berlin: Springer, 1985.

7. См. обсуждение этого вопроса в кн. Heisenberg W. Physics and Beyond. — N.Y., 1972, ch. 13–16. Интересно, что Паули — один из очень немногих физиков, живших во время войны в США и не принимавших участия в создании атомной бомбы.

8. Философские взгляды Паули, как впрочем и других физиков первой половины XX века, мало известны как физикам, так и философам. См. об этих взглядах статьи близких Паули людей: Гейзенберг В. Шаги за горизонт. — М.: Прогресс, 1987. — С. 283–289; Fierz M. Naturwissenschaft und Geschichte. — Basel: Birkhäuser, 1988 и современного историка науки: Laurikainen K.V. Beyond the Atom. The Philosophical Thought of Wolfgang Pauli. — Berlin: Springer, 1988.

КАРТАН О ГРУППАХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (*Cartan on groups and differential geometry*)

Работы Эли Картана (1869–1951), одного из создателей современной дифференциальной геометрии и групп Ли, тесно связаны с исследованиями Вейля. В публикуемой рецензии (*Bull. Amer. Math. Soc.* 1938. — V. 44. — P. 602–604; *Ges. Abh.*, Bd 4) на курс лекций Картана, несмотря на ее специальный характер, Вейль находит место и для своего изложения "метода подвижного репера", и для выражения своего отношения к французской школе геометров. Сравнение вкладов Вейля и Картана в теорию

групп Ли см. В о г е л А. Hermann Weyl and Lie groups // Hermann Weyl. 1885–1985. — Berlin: Springer, 1986. — P. 53–82.

1. См. русский перевод в кн. К а р т а н Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М.: Изд-во МГУ, 1963.

ОГЛЯДЫВАЯСЬ НАЗАД: ЦЮРИХ В 30-е ГОДЫ (Ruckblick auf Zurich aus dem Jahr 1930)

Опубликовано в Schweiz. Hochschulzeitung. — 1955. — Bd 28. — S. 180–184. (Ges. Abh., Bd 4).

1. Якоб Бурхардт (1818–1897) — швейцарский историк, автор трудов по истории культуры Италии и в частности знаменитой книги "Культура Италии в эпоху Возрождения" (1860 г.).

2. Созерцательная жизнь (лат.).

3. Леопольд Ранке (1795–1886) — немецкий историк, профессор Берлинского университета в 1825–1871 гг., автор работ по истории Западной Европы XVI–XVII вв.

УНИВЕРСИТЕТЫ И НАУКА В ГЕРМАНИИ (Universities and Science in Germany)

Опубликовано в The Mathematics Student (Madras, India). — March — June 1953. — V. 21, N 1–2. — P. 1–26. (Aes. Abh., Bd. IV). Эта апология немецкого университетского образования как почвы немецкой науки, да и всей немецкой культуры, представляет не только исторический интерес. Уровень преподавания, скажем, математики во времена Вейля можно почувствовать, обратившись к его докладу "Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания в математике" (наст. изд.), предназначенному для преподавателей гимназии.

1. Куно Фишер (1824–1907) — немецкий историк философии, с 1872 по 1906 гг. был профессором Гейдельбергского университета. Автор "Истории новой философии" в 6 томах.

2. Поль Пенлеве (1863–1933) — французский математик и государственный деятель, профессор Коллеж де Франс с 1897 г., премьер-министр в 1917 и 1925 гг., в разные годы министр просвещения, военный министр, министр авиации.

3. Макс Вебер (1864–1920) — немецкий социолог, историк и экономист, известен исследованиями экономики Древнего мира, Средних веков и Нового времени. Ему принадлежит концепция о решающем значении Реформации для возникновения капиталистических отношений.

4. В настоящее время население ФРГ составляет 60 млн. человек, а население ГДР — 17 млн. Количество же студентов резко увеличилось по сравнению с довоенным уровнем. Среди крупнейших университетов — Мюнстерский (более 30 тыс. студентов), Боннский (более 20 тыс.). Десять–пятнадцать тыс. студентов — величина, обычная для немецких университетов. Кроме старых университетов, после войны (в 50-е гг.) появилось много новых (например, ставший весьма известным университет в Билефельде). Впрочем, теперь в стране раздаются голоса о чрезмерном количестве студентов.

5. Надежды Вейля сбылись. Благодаря усилиям таких ученых, как М. Планк, В. Гейзенберг, О. Ган, и поддержке таких политиков, как К. Аденауер, после войны началось возрождение немецкой науки (см. об этом Heisenberg W. Physics and Beyond. — N.Y., 1972. — P. 200–204, 218–220; Heiman A. Planck. — Hamburg, 1973. — S. 122–128). На смену довоенному Обществу Кайзера Вильгельма (о нем Вейль подробно пишет ниже) было создано Общество Макса Планка, ставившее своей целью создание научно-исследовательских институтов академического типа в самых разных областях науки, от этологии (институт в Мюнхене, основанный К. Лоренцем

в 50-х гг.) до математики (институт в Бонне под руководством Ф. Хирцебруха, открытый в 1982 г.) После войны немецкие ученые получили 6 Нобелевских премий по физике, 6 по химии, 5 по биологии.

6. *Lehrfreiheit* (нем.) – свобода выбора профессора чему обучать. *Lernfreiheit* (нем.) – свобода выбора студентом чему обучаться.

7. Высшие школы (училища) (нем.).

8. В оригинале – Pompeu. Гней Помпей (106–48) – римский плоководец и политический деятель.

9. Подобный опережающий рост студенчества характерен и для послевоенной Германии (см. выше прим. 4).

10. Первое, второе, третье место (лат.).

11. Король математиков (лат.).

12. Затронутый здесь вопрос может рассматриваться с разных точек зрения. См. К л е й н Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989; Ф л о р е н с к и й П.А. О символах бесконечности // Новый путь. – 1904. – № 9 (Собр. соч., т. 1. – М.: Мысль (в печати)); Г а ч е в Г. Национальные образы мира. – М.: Советский писатель, 1988.

13. "Собрание латинских слов" (лат.).

14. О послевоенном развитии см. выше прим. 5.

15. Мировоззрение (нем.).

16. Среди ученых, работавших в нацистской Германии, были такие крупные математики, как Х. Хассе, Э. Витт, О. Тайхмюллер, К. Штейн, М. Эйхлер, М. Дойринг, Э. Гекке. Подробнее о влиянии нацизма на научную жизнь см. S c h a p p a c h e r N. Auswirkungen des Nationalsozialismus auf die mathematische Forschung im Deutschland. – Bonn, 1988. –

А.Н. Паршин

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель 261
Августин 68
Авраам 337
Адамар 361
Аденауэр 383
Аккерман 245, 378
Александров 41, 283, 381
Алкивиад 245
Аллендёрфер 193
Аристид 243, 245
Аристотель 8, 23, 194, 309, 344, 360
Артин 41, 226, 229, 233, 269, 282, 284, 291
Архимед 13, 20, 162, 238, 361
Бажанов 356, 357
Банкрофт 319
Баргман 185
Бах 258, 380
Бахтин 336
Беатриче 67
Беккер К.Г. 312, 320
Беккер О. 69, 347
Белл 68, 69
Бер 331
Берг 335
Бергман 381
Бергсон 155
Бернайс 88, 220, 245, 283, 284, 365, 378
Бернулли (семейство) 274
Бернулли Д. 247, 248
Бернулли Я. 62
Бессель 250
Бёк 320
Бибербах 220
Биркгофф Г. 361
Биркгофф Дж. 252, 261
Бирюков 4, 331, 338, 359
Блюменталь 220, 236, 237
Больц 254
Больцман 255
Бонн Э. 284
Бонне 192, 193
Бопп 320
Бор Г. 252, 261
Бор Н. 73, 254, 293, 294
Борель 147, 353
Борн 283, 293, 329, 379
Бохер 252
Бояи 271
Брагина 361
Брауэр 58, 61, 64–66, 87, 90, 241–243, 246, 262, 277, 282, 290, 321, 339, 342, 343, 346, 352, 354–356
Брентано 46, 47, 347, 363
Бридель 41
Брилль 275
Бройль де 293
Булгаков 358
Бурбаки 339, 362
Буркхардт 303, 305, 383
Бэр 353
Ванситарт 320
Варден ван дер 37, 38, 220, 269, 282, 362, 378
Варинг 219, 236
Васильев А.В. 356
Васильев Н.А. 356, 357
Вебер Г. 236, 275
Вебер М. 308, 383
Веблен 189, 208, 211, 226, 239, 240
Веддерберн 268, 289, 291
Вейерштрасс 31, 32, 35, 109, 147, 219, 268, 269, 271, 275, 347
Вейль А. 193, 329, 339, 361, 379
Вейль И.Ф. – И. 284, 328, 329, 331
Вейль Г. 90, 94, 181, 189, 252, 255, 284, 327–337, 338–359, 360–383
Вейль Л. 327

- Вейль М. 328, 329
 Вейль Э. (Г.) (урожденная Йозеф) 328, 329, 331
 Вейль — Дик 327
 Вернадский 345
 Веронезе 238
 Верфель 330
 Верхарн 330
 Вигнер 193
 Виет 7, 60
 Визгин 379, 380
 Вильгельм II 307, 323, 383
 Виндельбанд 77
 Вине Г. 237
 Винтнер 253
 Витгенштейн 56, 365
 Витт 282, 284, 384
 Вольтерра 247
 Вольф Х. 310, 311
 Вольф Ф.А. 320
 Вундт 347

 Гайзер 302
 Галилей 7, 18, 20, 47, 71, 74, 125, 173, 174, 196, 198, 361
 Галуа 184, 227, 229, 232–236, 254, 259, 260, 264, 267, 277, 290, 328, 379
 Гамильтон 255
 Ган 331, 383
 Гарнак 323
 Гаудемит 295
 Гаусс 47, 185, 187, 192, 193, 199, 208, 216, 230, 231, 256, 257, 261, 293, 301, 320
 Гегель 311, 320
 Гейзенберг 210, 211, 253, 293–295, 321, 327, 331, 364, 381–383
 Гейне 147
 Гекке 236, 384
 Гельмгольц 43, 48, 57, 66, 240
 Гельфанд 185
 Гензель 229, 230, 275
 Генсен 91, 246
 Георг II 310
 Гераклит 71
 Германн Г. 280, 282, 381
 Герц 273
 Гессе Г. 305
 Гёдель 23, 65, 83, 89, 91, 246, 321, 330, 335, 364
 Гёльдерлин 182, 306, 330
 Гёте 262, 305, 311, 327, 330, 380
 Ги 41
 Гильберт 23, 32, 38, 43, 54–58, 61, 64–66, 69, 75, 77, 80, 89–91, 214–256, 268, 273, 275–280, 283, 286, 288, 302, 321, 328, 336, 338, 343, 352, 354, 355, 362, 365, 378, 379, 380
 Гитлер 306, 325, 331
 Гливенко 357
 Гоббс 74
 Гопкинс 277
 Гордан 224, 260, 274–279
 Горелик 376, 377
 Грезер 258
 Грелль 282
 Гримм (братья) 320
 Грин 251
 Гроссман М. 186
 Гротендик 362
 Гульга 348
 Гумбольдт А. фон 311
 Гумбольдт В. фон 56, 311, 312, 318, 320
 Гурвиц 38, 215, 225, 250, 252
 Гурса 252
 Гуссерль 46–49, 51, 52, 77, 93, 333, 334, 346, 351, 357, 363
 Гюйгенс 20, 59, 74

 Дайсон 364
 Данилевский 335
 Данилов 3, 331
 Данте 67
 Данциг ван 189
 Дарбу 153, 259
 Дедекин 17, 38, 41, 66, 78, 81–83, 85, 86, 89, 105, 109, 124, 126, 128, 146, 155, 226, 241, 268, 275, 286, 288, 289, 291, 321
 Дезарг 237–239
 Декарт 8, 52, 59, 70, 74, 238, 342
 Демель 330
 Демокрит 58, 73, 333
 Джеммер 382
 Джефферсон 311
 Диксон 268, 289–291
 Дионисий Ареопагит 364
 Диофант 60
 Дильтей 77, 296
 Дирак 187, 194, 198, 205, 209–211, 255, 267, 293, 295
 Дирихле 25, 35, 36, 108, 147, 219, 253, 254, 272, 275, 291
 Доброхотова 361
 Дойринг 282, 384
 Дриш 71
 Дьедонне 339, 378, 380

 Евдокс 17, 82, 83
 Евклид 20, 27, 28, 43, 47, 201, 211, 237, 309

Жордан 153, 259

Заремба 253

Зариский 275

Зеелигер 176

Зееман 209, 294

Зибенбман 362

Зигель 283

Зоммерфельд 293

Зюс 240

Зюсс В. 331

Иаков 337

Исаак 337

Иуда 357

Йозеф Э. 328

Казнер 13

Калуца 208

Кант 42, 43, 45, 46, 72, 73, 76, 77, 195,
217, 311, 320, 333, 340, 346, 363, 381

Кантор 17, 78, 91, 109, 111, 126, 153,
215, 321

Капп 45

Каратеодори 153, 254

Каркленд 319

Кардеман 251

Карнап 336, 338, 350

Картан А. 339

Картан Э. 187, 190, 191, 193, 194,
297–302, 382, 383

Кассирер 57, 70, 71, 77, 78, 258, 333,
346, 350

Келдыш 354, 355

Келлер 45, 330

Кельвин 321

Кеплер 68, 74, 263, 309, 334

Керекьярто фон 240

Керрол Дж. 378

Кёбе 39, 254, 261

Кёстлер 339

Кёте 282

Кирби 362

Кларк 211

Клебш 259, 274–276

Клейман 362

Клейн О. 208

Клейн Ф. 6, 24, 26, 40, 41, 182, 184–186,
189–191, 193, 215, 216, 238, 256–270,
271, 277, 279, 283, 299, 302, 343,
350, 358, 362, 379, 380

Кнауф 284

Кнезер 252

Ковалевская 292

Колмогоров 357

Кон – Фоссен 255, 378

Конт 350

Коркина 331

Кох фон 247, 248

Коши 29, 35, 36, 86, 145, 146, 155, 286

Кристоффель 191

Кронекер 29, 41, 215, 224, 226, 228,
236, 242, 268, 286, 347

Круликовский 381

Круль 282

Куайн 89, 350

Куммер 226, 227, 228, 233, 236

Курант 252, 254, 280, 283, 328, 378

Кьеркегор 52, 333, 363

Кэли 223, 224, 238, 266, 380

Кюве 72

Лагерь 272

Лагранж 226

Ладыженская 3

Ланге 45, 363

Ландау Э. 261, 283

Ландсберг 275

Лаплас 72

Ласкер 226, 288, 289

Лауэ фон 321

Лахман 320

Лебег 153, 250, 251, 254, 352

Леви Э.Э. 251

Леви – Чивита 186, 188, 191, 201, 206,
208, 238

Левицкий 282

Лейбниц 7, 8, 44, 52, 54, 57, 58, 62, 65,
66, 183, 211, 262, 310, 320, 322,
327, 333, 358, 360, 364, 365

Леметр 376

Ленглендс 379

Леннес 240

Лере 302

Лефшец 37, 275

Ли С. 193, 194, 225, 240, 259, 281, 298,
301

Ли Т.Д. 361

Линдеман 180

Линней 72

Литлвуд 236, 261

Ло Ф. 320

Лобачевский 271

Локк 74

Лондон 210

Лоренц 184, 185, 187, 196, 198, 200

Лоренц 383

Лузин 337, 352, 353, 354–357

Любичев 325

Маколей 226

Максвелл 203, 210, 255, 321

Мамфорд 362

- Манн Т. 330
 Марков 357, 361
 Матфей 54
 Мах 8, 45, 170, 172, 175, 176, 179, 350
 Медикус 46, 363
 Мейер К.Ф. 303
 Мейтнер 323
 Меркатор 195
 Мёбиус 184, 189, 269
 Ми 194, 255
 Мизнер 361
 Милле 274
 Милль Дж.Ст. 347, 350
 Минковский 25, 184, 185, 200, 215, 216, 228, 254, 255
 Минц 4, 366–374
 Миттаг–Леффлер 215
 Молин 289
 Момзен 320
 Мор Г. 198
 Морделл 379
 Морс 254
 Мур Р.Л. 240
 Мур Э.Г. 239, 240, 286

 Нагата 378
 Наймарк 185
 Наполеон 312
 Нейгебауэр 283
 Нейман К. 247
 Нейман фон Дж. 69, 88, 245, 253, 281, 330, 338
 Нейрат 350
 Нельсон 280, 381
 Нётер М. 32, 38, 274, 275, 278, 288
 Нётер Ф. 274, 279
 Нётер Э. 41, 223, 226, 268, 274–292, 360, 381, 382
 Николай Кузанский 65, 66, 358, 380
 Никомах Геразский 365
 Ницше 278, 330, 333
 Ноак 55
 Нобель 293
 Новиков 354, 355
 Новоселов 354
 Нордхайм 69
 Ньютон 18, 43, 47, 58, 59, 72, 74, 170, 172, 173, 195, 196, 198, 201, 321, 363, 364

 Огурцов 4, 362, 363
 Ортега-и-Гассет 77, 320, 328, 345
 Оруэлл 339
 Оскар II 273

 Павел 49, 338
 Папп 237

 Паршин 4, 327–337, 362, 365, 384
 Паскаль 62, 337
 Паттерсон 4
 Паули 199, 209–211, 292–297, 327, 329, 330, 334, 336, 337, 382
 Паш 237
 Пеано 238, 286
 Пенлеве 308, 383
 Пер Гюнт 296
 Пётр 52
 Пикар 252
 Пирс Б. 21, 342
 Пирс Ч. 342
 Пифагор 44, 67, 92, 168, 186
 Планк 294, 321, 323, 331, 393
 Платон 68, 258, 360, 364
 Племель 252
 Плотин 53, 334
 Плюккер 189, 257, 259
 Поля 26
 Поляни 349
 Помпей 313, 384
 Понтрягин 283, 381
 Попов 378, 380
 Портман 335
 Прандтль 321
 Прокл 334
 Птолемей 309
 Пуанкаре 40, 41, 45, 91, 126, 127, 189, 247, 248, 254, 261, 270, 273, 352, 353, 381
 Пушкин 345

 Радош 271
 Рам де 192
 Райдемайстер 76–78
 Райков 331
 Ранке 305, 320, 383
 Рассел 78, 82, 84, 86, 90, 97, 126, 241, 246, 333, 334, 336, 338, 343, 352, 359
 Редже 361
 Резерфорд 321
 Реймон 41, 55
 Реммерт 4
 Рентген 321
 Рид 381
 Риман 31–33, 35, 40, 43, 44, 47, 153, 186, 188, 190, 191, 198, 199, 202, 211, 216, 228, 238, 252, 254, 260, 261, 265, 267, 268, 272, 275, 277, 301, 361, 363
 Рисс 250, 251
 Риччи 186
 Ришар 95, 110, 111
 Рох 35, 361

 Сепир 364

- Сильвестр 224, 277
 Ситтер де 178, 179, 376
 Скотт 334
 Сноу 327
 Сократ 42, 43
 Соловьев В.С. 348–351, 358
 Спенсер 350
 Спиноза 21, 361
 Спрингер 362, 380
 Стеклов 250
 Стилътес 252
 Стокс 192
 Стоун 253
 Схода 282
 Схоутен 189

 Тайхмюллер 384
 Такаги 229, 235
 Тамаркин 252
 Тейлор Т. 364
 Теон Смирнский 365
 Тёплиц 251, 328
 Тзен 282, 284
 Тимофеев – Ресовский 349
 Тирринг 175, 176
 Томас Дж.М. 189
 Томас Т. 189
 Томсон 25, 35, 36
 Тонелли 254
 Торн 361
 Тюрин 380

 Уайтхед 240, 246, 342
 Уилер 361
 Уленбек 295
 Уорф 364

 Фалтингс 379
 Фарадей 321
 Фано 239
 Фейербах 45, 358
 Ферма 29, 105, 127, 227
 Филон 68
 Фирц 335
 Фиттинг 282
 Фихте 46, 49–54, 97, 311, 333, 336, 340, 346, 347, 357, 358, 363
 Фишер К. 308, 383
 Фишер Э. 250, 279
 Флекснер 307, 311, 312, 315, 317–319
 Флоренский 337, 339, 345, 349–351, 358, 380
 Фок 211
 Фосслер 56
 Франк Дж. 283, 293
 Франк Ф. 350
 Франк Э. 258

 Фреге 66, 78, 79, 81, 85, 86, 89, 90, 94, 125, 126, 241, 339, 347
 Фредгольм 247, 248, 251, 273
 Френкель 88
 Фридман 376
 Фридрихс 253
 Фробениус 193, 194, 225, 227, 232, 289
 Фукидид 320
 Фуко 170
 Фукс Д.Б. 331
 Фукс И.Л. 271
 Фурнье д'Альбе 176
 Фуртвенглер 229
 Фурье 185, 247, 249, 250
 Фютер 236

 Хаар 328
 Хайдеггер 51, 76, 333
 Харди 236, 261
 Харт 307, 312, 313, 316, 317
 Хассе 220, 229, 282, 283, 290, 291, 384
 Хатчинсон 218
 Хаусдорф 240
 Хеллинггер 220, 251
 Хельцер 282
 Хильб 252
 Хирцебрух 384
 Ходасевич 345
 Ходж 252
 Холл 307
 Хольмгрен 247
 Хопф 41
 Хофман 208
 Христос 50

 Цейтен 37
 Цермело 88–90, 126, 127, 242

 Чеботарев 226
 Черн 189, 192, 193
 Чернышевский 358
 Чжень 189
 Чирнгаузен 27

 Шанин 357
 Шарлье 176
 Шатуновский 356
 Шафаревич 361, 362, 379
 Шван 239
 Шварц Г.А. 31, 247, 248, 268, 273
 Шварц Л. 339
 Швейцер 73, 380
 Шевалле (друг Галуа) 73, 380
 Шевалле К. 229, 231, 329, 339, 362
 Шестаков 339
 Шестов 348, 358

- Шиллер 311
Шлик 350
Шмейдлер 281
Шмидт 220, 249, 251, 282
Шпайзер 12, 258
Шпенглер 258, 380
Шпрингер 76
Шрайер 226
Шрёдингер 209, 210, 253, 255, 267, 293, 294, 321, 327, 329, 334
Штайнер 266
Штейн 332, 384
Штейниц 41, 268, 286, 291
Штолль 332
Штуди 182, 193
Шуберт 37
Шур И. 194, 283, 290, 291
Шур Ф. 237
Эддингтон 68, 119, 204, 206, 208, 212, 255
Эйзенхарт 189
Эйзенштейн 232
Эйлер 36, 183, 279
Эйнштейн 11, 44, 47, 77, 170, 174, 176, 178, 180, 181, 184–186, 198, 199, 201–204, 206, 208, 212, 254, 255, 266, 301, 321, 330, 334, 376, 377, 379
Эйхлер 384
Экхарт 53, 54, 320, 332, 336, 340, 346, 359, 363
Эллиот 55, 327
Эль Кид 330
Энгварт 347
Эрдманн 347
Юнг А. 193
Юнг К.Г. 334
Юшкевич 356
Якоби 261
Ясперс 56, 333

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3

Часть I

ПОЗНАНИЕ И ОСМЫСЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ	6
ТОПОЛОГИЯ И АБСТРАКТНАЯ АЛГЕБРА КАК ДВА СПОСОБА ПОНИМАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ	24
ПОЗНАНИЕ И ОСМЫСЛЕНИЕ (ВОСПОМИНАНИЕ О ПЕРЕЖИТОМ)	41
О СИМВОЛИЗМЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	55
ЕДИНСТВО ЗНАНИЯ	70
МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА. КРАТКИЙ ОБЗОР, СЛУЖАЩИЙ В КАЧЕСТВЕ ПРЕДИСЛОВИЯ К РЕЦЕНЗИИ НА "ФИЛОСОФИЮ БЕРТРАНА РАССЕЛА"	78
I. Сведение математики к теории типов: логический аппарат	78
II. Два примера	81
III. С уровнями или без уровней? Конструктивная и аксиоматическая точки зрения	82
IV. Мир Рассела	84
V. Конструктивный компромисс	85
VI. Интуиционистская математика Брауэра	87
VII. Аксиоматика по Цермело; множества и классы	88
VIII. Полная формализация и проблема непротиворечивости. Пессимистические выводы	89

КОНТИНУУМ. КРИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОСНОВАНИЯМ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА	93
Предисловие	93
Содержание	95

Глава I

Множество и функция (Анализ образования математических понятий)	96

Логическая часть

§ 1. Свойство, отношение, существование	96
§ 2. Принципы образования сложных суждений	99
§ 3. Логическое следование. Аксиоматический метод	102

Математическая часть

§ 4. Множества	106
§ 5. Натуральные числа. Антиномия Ришара	110
§ 6. Итерация математического процесса. Circulus vitiosus в анализе	112
§ 7. Принцип подстановки и принцип итерации.	117
§ 8. Окончательная формулировка оснований. Введение идеальных элементов.	121
Заключительные замечания.	125

Глава II

Понятие числа и континуум (Основания исчисления бесконечно малых).	128

§ 1. Числа натуральные и числа количественные	128
§ 2. Дроби и рациональные числа	133
§ 3. Действительные числа	139
§ 4. Числовые последовательности. Принцип сходимости	145
§ 5. Непрерывные функции.	148
§ 6. Наглядно представляемый и математический континуум	153
§ 7. Величины. Меры.	160
§ 8. Кривые и поверхности	163

Часть II**РАСКРЫТИЕ МИРА**

ИНЕРЦИЯ И КОСМОС. ДИАЛОГ	170
I. И все-таки она вертится!	170
II. Космология	175
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КАК СТИМУЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИС- СЛЕДОВАНИЯ	182
ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА	194

Часть III**ВЕЛИКИЕ МАСТЕРА**

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО	214
Теория инвариантов	220
Алгебраические числовые поля.	226
Аксиоматика.	237
Интегральные уравнения.	247
Физика.	254
ФЕЛИКС КЛЕЙН И ЕГО МЕСТО В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СОВРЕМЕННОСТИ	256
АНРИ ПУАНКАРЕ	270
ЭММИ НЁТЕР	274
ПАНЕГИРИК (ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ)	292
КАРТАН О ГРУППАХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.	297
ОГЛЯДЫВАЯСЯ НАЗАД: ЦЮРИХ В 30-Е ГОДЫ.	302
УНИВЕРСИТЕТЫ И НАУКА В ГЕРМАНИИ.	306
<i>А.Н. Паршин.</i> ГЕРМАН ВЕЙЛЬ – МАТЕМАТИК, МЫСЛИТЕЛЬ, ЧЕЛОВЕК	327
<i>Б.В. Бирюков.</i> "СВЕТ НЕ ВНЕ МЕНЯ, А ВО МНЕ".	338
КОММЕНТАРИИ	360
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	393