С. Д. Ивасишен

МАТРИЦЫ ГРИНА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

КИЕВ
«ВЫЩА ШКОЛА»
1990

Матрицы Грина параболических граничных
С. Д. Ивасишен.— К.: Выща шк., 1990.— 2(
ISBN 5-11-002315-8.

Монография посвящена построению и подробному
дованию матриц Грина общих параболических гра
задач для линейных параболических по Петровскому
уравнений. Матрицы Грина являются ядрами интегр
или интегро-дифференциальных операторов, выра›
решения граничных задач через их правые части. Пос
и исследование свойств матриц Грина граничных зад
уравнений с частными производными являются труд
блемой. Решение ее для практически важного класса
ний и систем параболического типа, излагаемое в моно
нашло разнообразные применения при изучении фи
важных спектральных характеристик операторов (
периодическими и случайными коэффициентами, в
линейных и квазилинейных уравнений, в задачах упра
автоматического регулирования и др.
Для преподавателей, научных работников, асп
и студентов старших курсов.
Библиогр.: 121 назв.

Редакция литературы по математике и физике
Редактор *Л. П. Онищенко*

И $\frac{1602070100-015}{М211(04)-90}$ 63—90

ISBN 5-11-002315-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными возникают во многих разделах математики, естествознания и техники. Они являются объектом долголетних исследований многих авторов. При решении трудных проблем теории граничных задач разработаны мощные методы современного математического анализа. В течение последних 30 лет существенный прогресс был достигнут для линейных задач, в частности для линейных параболических граничных задач.

Одной из центральных проблем теории линейных параболических граничных задач является подробное описание оператора $\mathcal{G}$, обратного к оператору граничной задачи, в том числе всестороннее исследование ядра этого оператора — матрицы Грина.

Эта проблема для случая общих граничных задач возникла в 60-х годах в связи со следующими обстоятельствами. Во-первых, в середине 60-х годов была создана общая теория параболических граничных задач, основным результатом которой является установление эквивалентности алгебраических условий параболичности задачи и ее корректной разрешимости в широких классах гладких функций. Во-вторых, было в основном завершено детальное описание оператора $\mathcal{G}$ в случае задачи Коши для параболических по Петровскому систем уравнений, основанное на всестороннем исследовании фундаментальных матриц решений задачи Коши и которое нашло важные применения. В-третьих, общеизвестна важная роль функций Грина основных граничных задач математической физики в вопросах корректной разрешимости граничных задач, изучения свойств их решений, в спектральной теории эллиптических операторов и в других задачах математической и теоретической физики.

В настоящей книге изложены результаты исследования матриц Грина общих параболических граничных задач, а также эллиптических задач, порожденных рассматриваемыми параболическими задачами. Чтобы по возможности избавиться от громоздких записей и слишком сложных выкладок, изложение ведется для случая параболических по Петровскому систем уравнений первого порядка по временнóй переменной. Кроме того, рассматриваются только цилиндрические области. Результаты, аналогичные изложенным, имеют место для случая произвольных параболических в смысле Петровского систем и нецилиндрических областей определенного типа (см. [36, 47, 50]).

Отметим, что приведенные в книге результаты и методика их получения нашли важные приложения в спектральной теории эллиптических операторов, при математическом обосновании различных спектральных инвариантов, используемых в квантовой механике, при установлении корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах Дини, пространствах растущих функций (в случае ограниченных и растущих коэффициентов уравнений), а также негативных пространствах Гёльдера, при изучении параболических нелокальных граничных задач и задач сопряжения, при обосновании принципа усреднения Н. Н. Боголюбова для решений квазилинейных параболических уравнений, в некоторых задачах автоматического и оптимального управлений и др.

В книге нет возможности изложить какие-либо из указанных выше применений. В § 3 приведен лишь обзор работ, в которых используются результаты изучения матриц Грина.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Эта глава содержит основные обозначения и определения, а также результаты, составляющие содержание шаудеровской теории параболических граничных задач, и необходимые сведения о ядрах интегралов, с помощью которых определяются решения задачи Коши и граничной задачи в простейшем модельном случае.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Список обозначений

$\equiv$ — равно по определению

◀ — начало доказательства, ▶ — конец доказательства

n, m, b — фиксированные натуральные числа

$N \equiv bm$

$r_0 \equiv 2b$

$r_1, \ldots, r_N$ — фиксированные целые числа, причем $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_N \geqslant 0$

$l_0 \equiv \max\{0, r_1 - 2b\}$, $l_0^* \equiv \max\{0, r_1 - 2b + 1\}$

$l_1 \equiv \max\{0, 2b - r_m\}$, $l_1^* \equiv \max\{0, 2b - r_m - 1\}$

$$(j) \equiv \begin{cases} 0, & j = 0, \\ 1, & 1 \leqslant j \leqslant N \end{cases}$$

$[l]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа l

$\delta_{j,k}$ — символ Кронекера; $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ... — точки в $\mathbb{R}^n$

$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $\xi' = (\xi_1, \ldots$

..., ξ_{n-1}), ... — точки в $\mathbb{R}^{n-1}$; через x', y', ξ', ... иногда обозначаются также точки вида $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, $(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$, ...

$(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$, $(\beta, y) = (\beta, y_1, \ldots, y_n)$, $(\tau, \xi) = (\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, ... — точки в $\mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbb{Z}_+^n$ — множество всех n-мерных мультииндексов (точек в $\mathbb{R}^n$ с целыми неотрицательными координатами)

$k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k' = (k_1, \ldots, k_{n-1})$ и $\bar{k} = (k_0, k) = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$ — произвольные элементы множеств $\mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{Z}_+^{n-1}$ и $\mathbb{Z}_+^{n+1}$ соответственно

$\mathbb{Z}_0^n \equiv \{\bar{k}' = (k_0, k') \mid k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, \ k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}\}$

$|k| \equiv k_1 + \cdots + k_n$, $|k'| \equiv k_1 + \cdots + k_{n-1}$, $|\bar{k}| \equiv 2bk_0 + k_1 + \cdots + k_n$ и $|\bar{k}'| \equiv 2bk_0 + k_1 + \cdots + k_{n-1}$, если $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ и $\bar{k}' \in \mathbb{Z}_0^n$

$\bar{k} \leqslant \bar{m}$ означает, что $k_j \leqslant m_j$ для всех j, $0 \leqslant j \leqslant n$, если $\{\bar{k}, \bar{m}\} \subset \mathbb{Z}_+^{n+1}$

$\bar{k} \pm \bar{m} \equiv (k_0 \pm m_0, \ldots, k_n \pm m_n)$, $\bar{k} \pm \bar{m}' \equiv (k_0 \pm m_0, \ldots, k_{n-1} \pm m_{n-1}, k_n)$, $\bar{k} \pm m \equiv (k_0, k_1 \pm m_1, \ldots, k_n \pm m_n)$, $\bar{k} \pm m' \equiv (k_0, k_1 \pm m_1, \ldots, k_{n-1} \pm m_{n-1}, k_n)$, $k \pm m' \equiv (k_1 \pm m_1, \ldots, k_{n-1} \pm m_{n-1}, k_n)$, если $\{\bar{k}, \bar{m}\} \subset \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\bar{m}' \in \mathbb{Z}_0^n$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$

$\mathbb{R}_+^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$

Ω_0 — область в $\mathbb{R}^n$

Ω_1 — граница области Ω_0

T — фиксированное положительное число

$Q_\nu \equiv (0, T] \times \Omega_\nu$

$Q_\nu^{\tau,\beta} \equiv (\tau, \beta] \times \Omega_\nu$

$Q_\nu^\infty \equiv (0, \infty) \times \Omega_\nu$, $Q_\nu^{-\infty} \equiv (-\infty, T] \times \Omega_\nu$

$\Pi^T \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\Pi_+^T \equiv (0, T] \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi_0^T \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^{n-1}$

$\Pi^\infty \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\Pi_+^\infty \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi_0^\infty \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$

$\bar{G}$ — замыкание множества G

$D_t^1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j}^1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$

$D_x^k \equiv D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, $D_{x'}^{k'} \equiv D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_{n-1}}^{k_{n-1}}$, $D_{t,x}^{\bar{k}} \equiv D_t^{k_0} D_x^k$,

$D^{\bar k'}_{t,x'} \equiv D^{k_0}_t D^{k'}_{x'}$, если $x \in \mathbb{R}^n$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, $k' \in \mathbb{Z}^{n-1}_+$, $\bar k \in \mathbb{Z}^{n+1}_+$, $\bar k' \in \mathbb{Z}^n_0$

$\mathbb{C}_{hp}$ — совокупность всех матриц M размера $h \times p$, элементы которых $M_{jk} \in \mathbb{C}$; $\mathbb{C}_{11} \equiv \mathbb{C}$

$|M| \equiv \max\{|M_{jk}| \mid 1 \leqslant j \leqslant h,\ 1 \leqslant k \leqslant p\}$, если $M \in \mathbb{C}_{hp}$

M' — матрица, транспонированная к матрице M

I_h — единичная матрица порядка h либо тождественный оператор в пространстве функций со значениями в $\mathbb{C}_{h1}$

$\mathcal{A} : u \mapsto v$ — оператор $\mathcal{A}$, сопоставляющий функции u функцию v

$\Delta^\tau_t f(t, x) \equiv f(t, x) - f(\tau, x)$, $\Delta^\xi_x f(t, x) \equiv f(t, x) - f(t, \xi)$, $\Delta^{\tau,\xi}_{t,x} f \equiv f(t, x) - f(\tau, \xi)$

$|x| \equiv (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, если $x \in \mathbb{R}^n$

$d(t, x;\ \tau, \xi) \equiv (|t-\tau|^{\frac{1}{b}} + |x-\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ — параболическое расстояние между точками (t, x) и (τ, ξ)

$E_c(t, z) \equiv \exp\{-ct^{-\frac{1}{2b-1}} z^{\frac{2b}{2b-1}}\}$, $c > 0$, $t > 0$, $z \in \mathbb{R}^1$

$\Phi^\lambda_c(t, z) \equiv z^{-\lambda} E_c(t, z)$, $c > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $t > 0$, $z > 0$

$\Phi^\lambda_{c,\gamma}(t, z) \equiv \Phi^\lambda_c(t, z) \exp\{\gamma t\}$, $c > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$, $z > 0$

$k(t, a) \equiv c_0 a (c_0^{2b-1} - a^{2b-1} t)^{-\frac{1}{2b-1}}$, c_0 и a — некоторые положительные числа, $t < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}$

$\Psi(t, x) \equiv \exp\{k(t, a) |x|^{\frac{2b}{2b-1}}\}$, $t < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для функции E_c справедливо неравенство

$$E_c(t-\beta, z_0 - z_1) E_c(\beta - \tau, z_1 - z_2) \leqslant E_c(t - \tau, z_0 - z_2), \tag{1}$$

где t, β, τ, z_0, z_1 и z_2 — любые вещественные числа, причем $\tau < \beta < t$. Неравенство (1) доказывается непосредственным подсчетом (см. [98, с. 40]). Из (1) следуют часто используемые неравенства

$$E_c(t-\beta, d(t, x;\ \beta, y)) E_c(\beta - \tau, d(\beta, y;\ \tau, \xi)) \leqslant \leqslant E_c(t-\tau, d(t, x;\ \tau, \xi)), \quad E_c(t-\beta, |x-y|) \times \times E_c(\beta-\tau, |y-\xi|) \leqslant E_c(t-\tau, |x-\xi|), \tag{2}$$

справедливые для любых $\tau < \beta < t$ и $\{x, y, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$.

Отметим также, что для любых $\tau < t < \left(\frac{c_0}{2b}\right)^{2b-1}$ и $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$E_{c_0}(t-\tau, d(t, x; \tau, \xi)) \Psi(\tau, \xi) \leqslant$$
$$\leqslant E_{c_0}(t-\tau, |x-\xi|) \Psi(\tau, \xi) \leqslant \Psi(t, x). \quad (3)$$

При доказательстве последнего из них используется следующее важное свойство функции k (см. [98, с. 42]):

$$k(t-\tau, k(\tau, a)) = k(t, a), \quad \tau < t < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}. \quad (4)$$

2. Пространства Гёльдера. Будем использовать следующие пространства гёльдеровых функций как ограниченных, так и специальным образом растущих и убывающих при $|x| \to \infty$ (ниже l — нецелое положительное число, а h и p — натуральные числа).

$C^l(\Omega_0)$ и $H^l(Q_0)$ — соответственно пространства непрерывных функций $u: \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{C}_{hp}$ и $v: \overline{Q}_0 \to \mathbb{C}_{kp}$, имеющих непрерывные производные $D_x^k u$, $|k| \leqslant [l]$, $D_{t,x}^{\bar{k}} v$, $|\bar{k}| \leqslant [l]$, и соответственно конечные нормы

$$u|_{\Omega_0}^l \equiv \sum_{|k| \leqslant [l]} \sup_{x \in \overline{\Omega}_0} |D_x^k u(x)| + \sum_{|k|=[l]} \sup_{\substack{\{x,y\} \subset \overline{\Omega}_0 \\ x \neq y}} \frac{|\Delta_x^y D_x^k u|}{|x-y|^{l-[l]}} \quad (5)$$

и

$$\|v\|_{Q_0}^l \equiv \sum_{|\bar{k}| \leqslant [l]} \sup_{(t,x) \in \overline{Q}_0} |D_{t,x}^{\bar{k}} v(t, x)| +$$
$$+ \sum_{|\bar{k}|=[l]} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,y)\} \subset \overline{Q}_0 \\ x \neq y}} \frac{|\Delta_x^y D_{t,x}^{\bar{k}} v(t, x)|}{|x-y|^{l-[l]}} +$$
$$+ \sum_{0 < l-|\bar{k}| < 2b} \sup_{\substack{\{(t,x),(\tau,x)\} \subset \overline{Q}_0 \\ t \neq \tau}} \frac{|\Delta_t^\tau D_{t,x}^{\bar{k}} v(t, x)|}{|t-\tau|^{\frac{1}{2b}(l-|\bar{k}|)}}. \quad (6)$$

$H_{k(\cdot,a)}^l(Q_0)$, $H_c^l(Q_0)$ — пространства функций $v: \overline{Q}_0 \to \mathbb{C}_{hp}$ (Ω_0 — неограниченная область), которые вместе со своими производными $D_{t,x}^{\bar{k}} v$, $|\bar{k}| \leqslant [l]$, непрерывны и для которых конечны соответственно нормы

$$\|v\|_{Q_0,k(\cdot,a)}^l \equiv \sum_{|\bar{k}| \leqslant [l]} \sup_{(t,x) \in \overline{Q}_0} \frac{|D_{t,x}^{\bar{k}} v(t, x)|}{\Psi(t, x)} +$$

$$+\sum_{|\bar{k}|=[l]}\sup_{\substack{\{(t,x),(t,y)\}\subset\bar{Q}_0\\ x\neq y}}\frac{|\Delta_x^y D_{t,x}^{\bar{k}} v(t,x)|}{|x-y|^{l-[l]}(\Psi(t,x)+\Psi(t,y))}+$$

$$+\sum_{0<l-|\bar{k}|<2b}\sup_{\substack{\{(t,x),(\tau,x)\}\subset\bar{Q}_0\\ t\neq\tau}}\frac{|\Delta_t^\tau D_{t,x}^{\bar{k}} v(t,x)|}{|t-\tau|^{\frac{l-|\bar{k}|}{2b}}(\Psi(t,x)+\Psi(\tau,x))}, \quad (7)$$

$$\|v\|_{Q_0,c}^{l}\equiv\sum_{|\bar{k}|\leqslant[l]}\sup_{(t,x)\in\bar{Q}_0}\frac{|D_{t,x}^{\bar{k}} v(t,x)|}{E_c(T_1-t,|x|)}+$$

$$+\sum_{|\bar{k}|=[l]}\sup_{\substack{\{(t,x),(t,y)\}\subset\bar{Q}_0\\ x\neq y}}\frac{|\Delta_x^y D_{t,x}^{\bar{k}} v(t,x)|}{|x-y|^{l-[l]}(E_c(T_1-t,|x|)+E_c(T_1-t,|y|))}+$$

$$+\sum_{0<l-|\bar{k}|<2b}\sup_{\substack{\{(t,x),(\tau,x)\}\subset\\ \subset\bar{Q}_0,\ t\neq\tau}}\frac{|\Delta_t^\tau D_{t,x}^{\bar{k}} v(t,x)|}{|t-\tau|^{\frac{l-|\bar{k}|}{2b}}(E_c(T_1-t,|x|)+E_c(T_1-\tau,|x|))}, \quad (8)$$

где числа c_0 и a из выражения для $k(t,a)$ такие, что $T<\left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}$; $T_1>T$, $c>0$ — некоторые постоянные.

Аналогично для случая неограниченной области Ω_0 $C_{k(0,a)}^{l}(\Omega_0)$, $C_c^l(\Omega_0)$ — пространства функций $u:\bar{\Omega}_0\to\to\mathbb{C}_{hp}$, которые вместе с производными $D_x^k u$, $|k|\leqslant\leqslant[l]$, непрерывны и имеют соответственно конечные нормы

$$|u|_{\Omega_0,k(0,a)}^{l}\equiv\sum_{|k|\leqslant[l]}\sup_{x\in\bar{\Omega}_0}\frac{|D_x^k u(x)|}{\Psi(0,x)}+$$

$$+\sum_{|k|=[l]}\sup_{\substack{\{x,y\}\subset\bar{\Omega}_0\\ x\neq y}}\frac{|\Delta_x^k D_x^k u|}{|x-y|^{l-[l]}(\Psi(0,x)+\Psi(0,y))}, \quad (9)$$

$$|u|_{\Omega_0}^{l}\equiv\sum_{|k|\leqslant[l]}\sup_{x\in\bar{\Omega}_0}\frac{|D_x^k u(x)|}{E_c(T_1,|x|)}+$$

$$+\sum_{|k|=[l]}\sup_{\substack{\{x,y\}\subset\bar{\Omega}_0\\ x\neq y}}\frac{|\Delta_x^y D_x^k u|}{|x-y|^{l-[l]}(E_c(T_1,|x|)+E_c(T_1,|y|))}. \quad (10)$$

Чтобы определить пространства Гёльдера функций, заданных на $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{Q}_1$, предположим, что $\Omega_1 \in C^l$, $l > 1$. Это означает следующее. В каждой своей точке поверхность Ω_1 имеет касательную плоскость. Следовательно, можно рассматривать локальную систему координат с центром в любой точке $y \in \Omega_1$, то есть прямоугольную декартову систему координат $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$, ось $\hat{x}_n$ которой направлена по внутренней нормали к Ω_1 в точке y, а остальные оси лежат в касательной плоскости. Для каждой точки $y \in \Omega_1$ существует такая окрестность O_y, что кусок границы $\Omega_1 \cap O_y$ задается уравнением

$$\hat{x}_n = F(\hat{x}'), \quad \hat{x}' \in B \equiv \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| < d_0\}, \tag{11}$$

в котором $F \in C^l(B)$, $\| F \|_B^l \leqslant C_0$, причем постоянные d_0 и C_0 не зависят от точки y.

Заметим, что локальные координаты $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ с центром в точке $y \in \Omega_1$ связаны с координатами $x_1, \ldots, x_n$ формулами

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^{n} u_{kj}(y)(x_j - y_j), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{12}$$

де $(u_{kj}(y))_{k,j=1}^{n}$ — ортогональная матрица. Рассмотим преобразование

$$\hat{x} \mapsto \bar{x}, \quad \bar{x}_k = \hat{x}_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad \bar{x}_n = \hat{x}_n - F(\hat{x}') \tag{13}$$

и через V обозначим суперпозицию преобразований (12) и (13), так что

$$\bar{x} = V(x), \quad x \in O_y. \tag{14}$$

Преобразование V переводит $\Omega_1 \cap O_y$ в шар B на гиперплоскости $\bar{x}_n = 0$. Это преобразование и координаты $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ назовем *распрямляющими*.

Для $y \in \Omega_1$ положим $S_y \equiv \Omega_1 \cap O_y$ и $\Gamma_y \equiv (0, T] \times S_y$. Рассмотрим функции $u : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{C}_{hp}$ и $v : \overline{Q}_1 \to \mathbb{C}_{hp}$ и введем для них нормы

$$| u |_{\Omega_1}^l \equiv \sup_{y \in \Omega_1} | u |_{S_y}^l, \quad \| v \|_{Q_1}^l \equiv \sup_{y \in \Omega_1} \| v \|_{\Gamma_y}^l,$$

$$\| v \|_{Q_1, k(\cdot, a)}^l \equiv \sup_{y \in \Omega_1} \| v \|_{\Gamma_y, k(\cdot, a)}^l, \tag{15}$$

$$\| v \|_{Q_1, c}^l \equiv \sup_{y \in \Omega_1} \| v \|_{\Gamma_y, c}^l, \quad | u |_{\Omega_1, c}^l \equiv \sup_{y \in \Omega_1} | u |_{S_y, c}^l.$$

Стоящие справа нормы определяются так же, как нормы (5) — (8) и (10), только вместо Ω_0, Q_0, D_x^k и $D_{t,x}^{\bar{k}}$ нужно взять соответственно S_y, Γ_y, $D_{\bar{x}'}^{m'}$, $|m'| = |k|$, и $D_{t,\bar{x}'}^{\bar{m}'}$, $|\bar{m}'| = |\bar{k}|$.

$C^l(\Omega_1)$, $H^l(Q_1)$, $H^l_{k(\cdot,a)}(Q_1)$, $H^l_c(Q_1)$ и $C^l_c(\Omega_1)$ — пространства функций $u:\bar{\Omega}_1 \to \mathbb{C}_{hp}$ и $v:\bar{Q}_1 \to \mathbb{C}_{hp}$, для которых конечны соответствующие нормы из (15).

Отметим, что все определенные выше пространства являются банаховыми.

$H^l_\infty(Q_\nu)$ и $C^l_\infty(\Omega_\nu)$, $\nu = 0, 1$,— объединения соответственно пространств $H^l_c(Q_\nu)$ и $C^l_c(\Omega_\nu)$ по всем $c > 0$.

$\overset{\circ}{H}{}^l(Q_\nu)$ и $\overset{\circ}{H}{}^l_{k(\cdot,a)}(Q_\nu)$, $\nu = 0, 1$, — множества функций соответственно из пространств $H^l(Q_\nu)$ и $H^l_{k(\cdot,a)}(Q_\nu)$, удовлетворяющих условиям

$$D_t^j v|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right]. \tag{16}$$

$\mathring{H}^l(Q_\nu)$, $\mathring{H}^l_c(Q_\nu)$ и $\mathring{H}^l_\infty(Q_\nu)$, $\nu = 0,1$, — множества функций соответственно из пространств $H^l(Q_\nu)$, $H^l_c(Q_\nu)$ и $H^l_\infty(Q_\nu)$, которые удовлетворяют условиям

$$D_t^j v|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2b}\right]. \tag{17}$$

Если l — целое неотрицательное число, то $C^l(\Omega_0)$, $H^l(Q_0)$, $H^l_{k(\cdot,a)}(Q_0)$ и $C^l_{k(0,a)}(\Omega_0)$ — пространства непрерывных вместе со всеми своими производными до порядка l функций, для которых конечны нормы, равные соответственно первым слагаемым из формул (5) — (7) и (9).

Будем использовать еще следующие сокращенные обозначения для введенных выше пространств и норм ($\nu = 0, 1$):

$$C^l(\Omega_\nu) \equiv C^l_\nu, \quad C^l_{k(0,a)}(\Omega_\nu) \equiv C^l_{\nu,k(0,a)}, \quad C^l_c(\Omega_\nu) \equiv C^l_{\nu,c},$$
$$C^l_\infty(\Omega_\nu) \equiv C^l_{\nu,\infty};$$

$$H^l(Q_\nu) \equiv H^l_\nu, \quad H^l_{k(\cdot,a)}(Q_\nu) \equiv H^l_{\nu,k(\cdot,a)};$$
$$\overset{\circ}{H}{}^l(Q_\nu) \equiv \overset{\circ}{H}{}^l_\nu, \quad \overset{\circ}{H}{}^l_{k(\cdot,a)}(Q_\nu) \equiv \overset{\circ}{H}{}^l_{\nu,k(\cdot,a)};$$

$$\overset{\circ}{H}{}^l(Q_\nu) \equiv \overset{\circ}{H}{}^l_\nu, \quad \overset{\circ}{H}{}^l_c(Q_\nu) \equiv \overset{\circ}{H}{}^l_{\nu,c}, \quad \overset{\circ}{H}{}^l_\infty(Q_\nu) \equiv \overset{\circ}{H}{}^l_{\nu,\infty};$$

$$|\cdot|^l_{\Omega_\nu} \equiv |\cdot|^l_\nu, \quad |\cdot|^l_{\Omega_\nu,k(0,a)} \equiv |\cdot|^l_{\nu,k(0,a)}, \quad |\cdot|^l_{\Omega_\nu,c} \equiv |\cdot|^l_{\nu,c},$$

$$\|\cdot\|^l_{Q_\nu} \equiv \|\cdot\|^l_\nu, \quad \|\cdot\|^l_{Q_\nu,k(\cdot,a)} \equiv \|\cdot\|^l_{\nu,k(\cdot,a)}, \quad \|\cdot\|^l_{Q_\nu,c} \equiv \|\cdot\|^l_{\nu,c}.$$

Поскольку будем рассматривать одновременно ограниченные и неограниченные области Ω_0, то ради единообразия записей в случае ограниченных множеств Q_ν и Ω_ν под $H^l_{\nu,k(\cdot,a)}$, $H^l_{\nu,k(\cdot,a)}$, $\overset{\circ}{H}{}^l_{\nu,\infty}$ $(\overset{c}{H}{}^l_{\nu,c})$ и $C^l_{\nu,\infty}$ $(C^l_{\nu,c})$ будем понимать соответственно H^l_ν, H^l_ν, $\overset{\circ}{H}{}^l_\nu$ и C^l_ν.

Если $u = (u_1, \ldots, u_p)$ или $u = (u_1, \ldots, u_p)'$ и $u_j \in H^{l_j}_{\nu_j}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, то будем писать $u \in \prod\limits_{j=1}^{p} H^{l_j}_{\nu_j} \equiv H^{l_1}_{\nu_1} \times \cdots \times H^{l_p}_{\nu_p}$.

3. Постановка параболической граничной задачи и предположения. Рассмотрим параболическую по Петровскому систему m линейных уравнений относительно m неизвестных скалярных функций u_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, коэффициенты которой определены на множестве $\overline{Q}_0$. Такая система имеет вид (см. [81])

$$D_t^{N_\nu} u_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\substack{|\bar{k}| \leqslant 2bN_\mu \\ k_0 < N_\mu}} a^{\nu\mu}_{\bar{k}}(t, x)\, D^{\bar{k}}_{t,x} u_\mu, \quad (t, x) \in \overline{Q}_0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant m, \tag{18}$$

где $N_1, \ldots, N_m$ — фиксированные натуральные числа, а $2b$ — вес, который приписывается переменной t (для любой параболической системы этот вес является непременно четным числом).

Система (18) называется *равномерно параболической по Петровскому* на $\overline{Q}_0$, если существует такая постоянная $\delta > 0$, что p-корни уравнения

$$\det\Big(I_m p^{N_\nu} - \sum_{|\bar{k}| = 2bN_\mu} a^{\nu\mu}_{\bar{k}}(t, x)\, p^{k_0} (i\sigma)^k\Big)^m_{\nu,\mu=1} = 0,$$

в котором $\sigma \in \mathbb{R}^n$, i — мнимая единица, $(i\sigma)^k \equiv (i\sigma_1)^{k_1} \ldots (i\sigma_n)^{k_n}$, удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} p_j(t, x, \sigma) \leqslant -\delta |\sigma|^{2b}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N_1 + \cdots + N_m, \tag{19}$$

для любых $(t, x) \in \overline{Q}_0$ и $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только равномерно параболические по Петровскому системы, называя их просто *параболическими*. К тому же для простоты будем считать, что $N_1 = \ldots = N_m = 1$, и записывать систему (18) в матричном виде

$$Au \equiv A(t, x, D_t, D_x)\, u \equiv$$
$$\equiv D_t^1 u - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t, x)\, D_x^k u = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}_0 \qquad (20)$$

Здесь a_k, $|k| \leqslant 2b$,— квадратные матрицы порядка m, u — матрица-столбец высоты m.

Будем говорить, что дифференциальное выражение A удовлетворяет равномерному условию параболичности с постоянной δ, если соответствующая система (20) является равномерно параболической по Петровскому с постоянной δ в условии (19).

Замечание 1. Непосредственным следствием условия параболичности системы (20) на $\overline{Q}_0$ является условие

$$\det a_k(t, x) \neq 0, \quad k = (0, \ldots, 0, 2b), \quad (t, x) \in \overline{Q}_0.$$

Из него, в частности, вытекает, что производная $D_{x_n}^{2b} u$ от решения системы (20) может быть представлена в виде линейной комбинации производных $D_t^1 u$ и $D_x^k u$ с $|k| \leqslant 2b$ и $k_n < 2b$.

Рассмотрим N дифференциальных выражений с коэффициентами, определенными на замыкании $\overline{Q}_1$ боковой границы Q_1 цилиндра Q_0:

$$B_j \equiv B_j(t, x, D_t, D_x) \equiv \sum_{|\bar{k}| \leqslant r_j} b_{j\bar{k}}(t, x)\, D_{t,x}^{\bar{k}}, \quad (t, x) \in \overline{Q}_1,$$
$$1 \leqslant j \leqslant N, \qquad (21)$$

где $b_{j\bar{k}}$, $|\bar{k}| \leqslant r_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$,— матрицы-строки длины m; N, r_j, $1 \leqslant j \leqslant N$,— целые числа, причем $N \geqslant 1$, $r_j \geqslant 0$. Не нарушая общности, будем считать, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_N$. Положим

$$B \equiv B(t, x, D_t, D_x) \equiv \begin{pmatrix} B_1(t, x, D_t, D_x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_N(t, x, D_t, D_x) \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Поставим следующую граничную задачу: найти функцию $u : Q_0 \to \mathbb{C}_{m1}$, удовлетворяющую в цилиндре Q_0 параболической системе

$$Au = f_0, \qquad (23)$$

на боковой границе Q_1 цилиндра Q_0 граничным условиям

$$B_j u|_{Q_1} = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{24}$$

и на его нижнем основании Ω_0 начальному условию

$$u|_{t=0} = f_{N+1}. \tag{25}$$

Символами $v|_{Q_1}$ и $u|_{t=0}$ здесь и далее обозначены пределы функций v и u на множествах Q_1 и $\{t = 0\}$ соответственно.

Как известно (см. [23, 98, 1, 85]), задача (23) — (25) хорошо поставлена в обычном смысле, если $N = bm$ и граничные выражения B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют условию дополнительности. Сформулируем это условие.

Через A_0, B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$, и B_0 обозначим главные в параболическом смысле части соответствующих выражений из (20) — (22), то есть

$$A_0 \equiv A_0(t, x, D_t, D_x) \equiv I_m D_t^1 - \sum_{|k|=2b} a_k(t, x) D_x^k,$$

$$B_{j0} \equiv B_{j0}(t, x, D_t, D_x) \equiv \sum_{|\bar{k}|=r_j} b_{j\bar{k}}(t, x) D_{t,x}^{\bar{k}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{26}$$

$$B_0 \equiv B_0(t, x, D_t, D_x) \equiv \begin{pmatrix} B_{10}(t, x, D_t, D_x) \\ \dots\dots\dots \\ B_{N0}(t, x, D_t, D_x) \end{pmatrix}.$$

Пусть (t^0, x^0) — произвольно фиксированная точка $\overline{Q}_1$, ν — орт внутренней нормали к Ω_1 в точке x^0. Произвольный вектор $\sigma \in \mathbb{R}^n$ можно однозначно представить в виде $\sigma = \xi + \tau\nu$, где ξ — вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности Ω_1 в точке x^0, τ — вещественный параметр. Обозначим через Γ_{x^0} множество всех точек (p, ξ), для которых $p \in \mathbb{C}$, ξ — касательный вектор к Ω_1 в точке x^0 и удовлетворяются условия $|p| + |\xi|^{2b} > 0$, $\operatorname{Re} p \geqslant -\delta_1 |\xi|^{2b}$ с некоторым $\delta_1 \in (0, \delta)$, где δ — постоянная из условия параболичности для системы (20).

Рассмотрим $\det A_0(t^0, x^0, p, i(\xi + \tau\nu))$ как многочлен по τ. Из условия параболичности вытекает, что при любых $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$ он имеет $N = bm$ корней $\tau_j^+(t^0, x^0, p, \xi)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, с положительной мнимой частью, считая их кратность. Положим

$$A^+(t^0, x^0, p, \xi, \tau) \equiv \prod_{j=1}^{N} (\tau - \tau_j^+(t^0, x^0, p, \xi)),$$

$$C(t^0, x^0, p, \xi, \tau) \equiv$$

$$\equiv B_0(t^0, x^0, p, i(\xi + \tau\nu)) \hat{A}_0(t^0, x^0, p, i(\xi + \tau\nu)),$$

где $\hat{A}_0 = A_0^{-1} \det A_0$. Пусть $C'(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$ — матрица, элементами которой являются остатки от деления элементов матрицы $C(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$, как многочленов по τ, на многочлен $A^+(t^0, x^0, p, \xi, \tau)$. Элементы C'_{jk} матрицы C' запишем в виде

$$C'_{jk}(t^0, x^0, p, \xi, \tau) = \sum_{l=1}^{N} d_{jk}^{(l)}(t^0, x^0, p, \xi)\tau^{l-1}, \quad 1 \leqslant j, k \leqslant N,$$

и рассмотрим матрицу $D(t^0, x^0, p, \xi)$, составленную из коэффициентов $d_{jk}^{(l)}(t^0, x^0, p, \xi)$, $1 \leqslant j, k, l \leqslant N$.

Теперь условие дополнительности можно сформулировать следующим образом: при любых $(t^0, x^0) \in \overline{Q}_1$ и $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$ ранг матрицы $D(t^0, x^0, p, \xi)$ равен N или

$$\sum_{j=1}^{r} |\Delta_j(t^0, x^0, p, \xi)| > 0,$$

где Δ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, — всевозможные миноры порядка N матрицы D.

Если существует такая постоянная $\delta' > 0$, что для любых $(t^0, x^0) \in \overline{Q}_1$ и $(p, \xi) \in \Gamma_{x^0}$, $|p| + |\xi|^{2b} = 1$, справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} |\Delta_j(t^0, x^0, p, \xi)| \geqslant \delta',$$

то говорят, что выполняется равномерное условие дополнительности с постоянной δ'.

Для задачи (23) — (25) будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие А. *Дифференциальные выражения A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют равномерным условиям параболичности с постоянной δ и дополнительности с постоянной δ'.*

Задача (23) — (25), удовлетворяющая условию А, называется *параболической граничной задачей*.

Условие Б$_l$. *Коэффициенты дифференциальных выражений A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, принадлежат соответственно пространствам H_0^l и $H_1^{2b-r_j+l}$, а граница Ω_1 — классу C^{2b+l}, где l — нецелое число, большее числа l_0.*

Замечание 2. При указанных в условии $Б_l$ предположениях о коэффициентах выражения A и границе Ω_1 эти коэффициенты можно продолжить на весь слой $\overline{\Pi}^T$ так, чтобы сохранилась их гладкость и выражение A осталось параболическим (см. [92, с. 106]). Поэтому там, где это необходимо, без всяких оговорок будем считать, что коэффициенты выражения A определены в $\overline{\Pi}^T$ и принадлежат пространству $H^l(\Pi^T)$.

Через m_j обозначим порядок выражения B_j по нормали к нижнему основанию Ω_0 цилиндра Q_0, то есть наивысший порядок производных по t в выражении B_j. Пусть $y \in \Omega_1$ и $n_j(y)$ — наибольший порядок производных по x_n в выражении, получившемся из выражения B_j после перехода в нем к распрямляющим координатам с центром в точке y. Число $n_j \equiv \sup\limits_{y \in \Omega_1} n_j(y)$ назовем порядком выражения B_j по нормали к Q_1, а число $\max\{2bm_j, n_j\}$ — нормальным порядком этого выражения. Будем использовать обозначения

$$m_0 \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant N} m_j, \quad n_0 \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant N} n_j. \tag{27}$$

Все встречающиеся в книге постоянные могут зависеть, если это специально не оговорено, от чисел n, m, b, r_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, l, и T, постоянных d_0 и C_0 из условия на границу Ω_1, постоянных δ и δ' из условий параболичности и дополнительности, а также соответствующих норм коэффициентов выражений A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Часто одинаково будем обозначать различные постоянные, если их величины нам безразличны.

4. Классы функций, зависящих от параметрических точек. Определим еще используемые в книге классы функций (со значениями из $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{ml}$, $\mathbb{C}_{lm}$ или $\mathbb{C}_{mm}$), которые зависят от пары точек (t, x) и (τ, ξ) и могут иметь особенность, когда $(t, x) \neq (\tau, \xi)$. Ниже q, r, s, θ — некоторые числа, причем r, $s > 0$ — нецелые, $\theta \leqslant 0$; ν, $\mu = 0,1$.

$U_{r,s}^{q,\nu,\mu} \equiv U_{r,s}^q(Q_\nu, Q_\mu)$ — класс функций $K(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in \overline{Q}_\nu$, $(\tau, \xi) \in \overline{Q}_\mu$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, которые равны нулю при $t < \tau$ и имеют производные вида $D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\tau,\xi}^{\bar{m}} K$, $|\bar{k}| \leqslant [r]$, $|\bar{m}| \leqslant [s]$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\tau,\xi}^{\bar{m}} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(|\bar{k}|+|\bar{m}|)}(t-\tau, d(t, x; \tau, \xi)), \tag{28}$$

$$|\bar{k}| \leqslant [r], \quad |\bar{m}| \leqslant [s];$$

$$|\Delta^{x(2)}_{x(1)} D^{\bar k}_{t,x^{(1)}} D^{\bar m}_{\tau,\xi} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(r+|\bar m|)}(t-\tau,\ d(t,\ x^*;\ \tau,\ \xi)) \times$$
$$\times |x^{(1)}-x^{(2)}|^{r-[r]},\quad |\bar k|=[r],\quad |\bar m|\leqslant[s]; \tag{29}$$

$$|\Delta^{t_2}_{t_1} D^{\bar k}_{t_1,x} D^{\bar m}_{\tau,\xi} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(r+|\bar m|)}(t_1-\tau,\ d(t_2,\ x;\ \tau,\ \xi)) \times$$
$$\times (t_1-t_2)^{\frac{r-|\bar k|}{2b}},\quad [r]-2b<|\bar k|\leqslant[r],\quad |\bar m|\leqslant[s]; \tag{30}$$

$$|\Delta^{\xi(2)}_{\xi(1)} D^{\bar k}_{t,x} D^{\bar m}_{\tau,\xi^{(1)}} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(|\bar k|+s)}(t-\tau,\ d(t,\ x;\ \tau,\ \xi^*)) \times$$
$$\times |\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{s-[s]},\quad |\bar k|\leqslant[r],\quad |\bar m|=[s]; \tag{31}$$

$$|\Delta^{\tau_2}_{\tau_1} D^{\bar k}_{t,x} D^{\bar m}_{\tau_1,\xi} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(|\bar k|+s)}(t-\tau_2,\ d(t,\ x;\ \tau_1,\ \xi)) \times$$
$$\times (\tau_1-\tau_2)^{\frac{s-|\bar m|}{2b}},\quad |\bar k|\leqslant[r],\quad [s]-2b<|\bar m|\leqslant[s]; \tag{32}$$

$$|\Delta^{x(2)}_{x(1)} \Delta^{\xi(2)}_{\xi(1)} D^{\bar k}_{t,x^{(1)}} D^{\bar m}_{\tau,\xi^{(1)}} K| \leqslant$$
$$\leqslant C\Phi_c^{M_q(r+s)}(t-\tau,\ d(t,\ x^{**};\ \tau,\ \xi^{**}))\,|x^{(1)}-x^{(2)}|^{r-[r]} \times$$
$$\times |\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{s-[s]},\quad |\bar k|=[r],\quad |\bar m|=[s]; \tag{33}$$

$$\Delta^{t_2}_{t_1} \Delta^{\xi(2)}_{\xi(1)} D^{\bar k}_{t_1,x} D^{\bar m}_{\tau,\xi^{(1)}} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(r+s)}(t_1-\tau,\ d(t_2,\ x;\ \tau,\ \xi^*)) \times$$
$$\times (t_1-t_2)^{\frac{r-|\bar k|}{2b}}\,|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{s-[s]},$$
$$[r]-2b<|\bar k|\leqslant[r],\quad |\bar m|=[s]; \tag{34}$$

$$\Delta^{x(2)}_{x(1)} \Delta^{\tau_2}_{\tau_1} D^{\bar k}_{t,x^{(1)}} D^{\bar m}_{\tau_1,\xi} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(r+s)}(t-\tau_2,\ d(t,\ x^*;\ \tau_1,\ \xi)) \times$$
$$\times |x_1-x_2|^{r-[r]}(\tau_1-\tau_2)^{\frac{s-|\bar m|}{2b}},$$
$$|\bar k|=[r],\quad [s]-2b<|\bar m|\leqslant[s]; \tag{35}$$

$$|\Delta^{t_2}_{t_1} \Delta^{\tau_2}_{\tau_1} D^{\bar k}_{t_1,x} D^{\bar m}_{\tau_1,\xi} K| \leqslant C\Phi_c^{M_q(r+s)}(t_1-\tau_2,\ d(t_2,\ x;\ \tau_1,\ \xi)) \times$$
$$\times (t_1-t_2)^{\frac{r-|\bar k|}{2b}}(\tau_1-\tau_2)^{\frac{s-|\bar m|}{2b}},$$
$$[r]-2b<|\bar k|\leqslant[r],\quad [s]-2b<|\bar m|\leqslant[s], \tag{36}$$

где $M_q(\lambda)\equiv\max\{n+2b-q+\lambda,\ 0\}$; $C,\ c>0$; x^*, ξ^*, x^{**}, ξ^{**} — такие точки, что $|x^*-\xi|=\min\limits_{i=1,2}|x^{(i)}-\xi|$, $|x-\xi^*|=\min\limits_{i=1,2}|x-\xi^{(i)}|$, $|x^{**}-\xi^{**}|=\min|x^{(i)}-\xi^{(j)}|$;

$t_1 > t_2$, $\tau_1 > \tau_2$, $t_2 > \tau_1$. Заметим, что в случае $\nu = 1$ в формулах (28) — (36) под $D^{\bar{k}}_{t,x}$ понимается $D^{\bar{m}'}_{t,\bar{x}'}$, $|\bar{m}'| = |\bar{k}|$, где $\bar{x}' = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})$ — распрямляющие координаты точки $x \in \Omega_1$. Аналогичное замечание относится также к случаю $\mu = 1$.

Замечания. 1. В неравенствах (28) — (36) вместо $\Phi_c^{M_q(\lambda)}(t - \tau, d(t, x; \tau, \xi))$ можно ставить $(t-\tau)^{-M_q(\lambda)/2b} E_c(t-\tau, |x-\xi|)$. При этом, очевидно, будет определяться один и тот же класс функций.

2. Если $[r] \geqslant q - n$ или $[s] \geqslant q - n$, то для функций из класса $U^{q,\nu,\mu}_{r,s}$ справедливы неравенства, которые отличаются от неравенств (28) — (36) тем, что $M_q(\lambda)$ заменено на $n + 2b - q + \lambda$. Это следует из оценок (28) — (36) для старших производных и равенств вида

$$D^{\bar{k}}_{t,x} D^{\bar{m}}_{\tau,\xi} K(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t} D^1_\beta D^{\bar{k}}_{\beta,x} D^{\bar{m}}_{\tau,\xi} K(\beta, x; \tau, \xi)\, d\beta,$$

$$|\bar{k}| + 2b \leqslant [r],$$

или

$$D^{\bar{k}}_{t,x} D^{\bar{m}}_{\tau,\xi} K(t, x; \tau, \xi) = -\int\limits_{\tau}^{t} D^1_\beta D^{\bar{k}}_{t,x} D^{\bar{m}}_{\beta,\xi} K(t, x; \beta, \xi)\, d\beta,$$

$$|\bar{m}| + 2b \leqslant [s],$$

справедливых в силу того, что производные от K равны нулю при $t = \tau$ и $x \neq \xi$.

Если нас будут интересовать свойства функций $K(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in \bar{Q}_\nu$, $(\tau, \xi) \in \bar{Q}_\mu$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, только по (t, x), то будем пользоваться классом $U^q_{r,0}(Q_\nu, Q_\mu)$, который в отличие от класса $U^q_{r,s}(Q_\nu, Q_\mu)$ определяется лишь неравенствами (28) — (30), если в них положить $[s] = 0$.

$U^q_{r,s}(Q_\nu, Q_\mu; C_0, c_0)$ — класс функций, обладающих теми же свойствами, что и функции из класса $U^{q,\nu,\mu}_{r,s}$, кроме неравенств (28) — (36), которые заменены следующими неравенствами:

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} D^{\bar{m}}_{\tau,\xi} K| \leqslant C_0 (t-\tau)^{\frac{r+s-|\bar{k}|-|\bar{m}|}{2b}} d^{-\lambda}(t, x; \tau, \xi) \times$$
$$\times E_{c_0}(t-\tau, |x-\xi|), \quad |\bar{k}| \leqslant [r], \quad |\bar{m}| \leqslant [s], \qquad (37)$$

$$|\Delta^{t_2, x^{(2)}}_{t_1, x^{(1)}} D^{\bar{k}}_{t_1, x^{(1)}} D^{\bar{m}}_{\tau,\xi} K| \leqslant C_0 d^{r-[r]}(t_1, x^{(1)}; t_2, x^{(2)}) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} (t_j - \tau)^{\frac{[r]+s-|\bar{k}|-|\bar{m}|}{2b}} d^{-\lambda}(t_j, x^{(j)}; \tau, \xi) \times$$

$$\times E_{c_0}(t_j - \tau, |x^{(j)} - \xi|), \quad |\bar{k}| \leqslant [r], \ |\bar{m}| \leqslant [s], \tag{38}$$

$$|\Delta_{t_1}^{t_2} D_{t_1,x}^{\bar{k}} D_{\tau,\xi}^{\bar{m}} K| \leqslant C_0 |t_1 - t_2|^{\frac{r-|\bar{k}|}{2b}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} (t_j - \tau)^{\frac{s-|\bar{m}|}{2b}} d^{-\lambda}(t_j, x; \tau, \xi) \times$$

$$\times E_{c_0}(t_j - \tau, |x - \xi|), \ |r| - 2b < |\bar{k}| < [r], \ |\bar{m}| \leqslant [s], \tag{39}$$

$$|\Delta_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\tau_2,\xi^{(2)}} D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\bar{m}} K| \leqslant C_0 d^{s-[s]}(\tau_1, \xi^{(1)}; \tau_2, \xi^{(2)}) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} (t - \tau_j)^{\frac{r+[s]-|\bar{k}|-|\bar{m}|}{2b}} d^{-\lambda}(t, x; \tau_j, \xi^{(j)}) \times$$

$$\times E_{c_0}(t - \tau_j, |x - \xi^{(j)}|), \quad |\bar{k}| \leqslant [r], \ |\bar{m}| \leqslant [s], \tag{40}$$

$$|\Delta_{t_1}^{t_2} \Delta_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\tau_2,\xi^{(2)}} D_{t_1,x}^{\bar{k}} D_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\bar{m}} K| \leqslant C_0 |t_1 - t_2|^{\frac{r-|\bar{k}|}{2b}} d^{s-[s]} \times$$

$$\times (\tau_1, \xi^{(1)}; \tau_2, \xi^{(2)}) \sum_{i,j=1}^{2} (t_i - \tau_j)^{\frac{[s]-|\bar{m}|}{2b}} d^{-\lambda}(t_i, x; \tau_j, \xi^{(j)}) \times$$

$$\times E_{c_0}(t_i - t_j, |x - \xi^{(j)}|), \ |r| - 2b < |\bar{k}| < [r], \ |\bar{m}| \leqslant [s], \tag{41}$$

$$|\Delta_{t_1,x^{(1)}}^{t_2,x^{(2)}} \Delta_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\tau_2,\xi^{(2)}} D_{t_1x^{(1)}}^{\bar{k}} D_{\tau_1,\xi^{(1)}}^{\bar{m}} K| \leqslant C_0 d^{r-[r]}(t_1, x^{(1)}; t_2, x^{(2)}) \times$$

$$\times d^{s-[s]}(\tau_1, \xi^{(1)}; \tau_2, \xi^{(2)}) \sum_{i,j=1} (t_i - t_j)^{\frac{[r]+[s]-|\bar{k}|-|\bar{m}|}{2b}} \times$$

$$\times d^{-\lambda}(t_i, x^{(i)}; \tau_j, \xi^{(j)}) E_{c_0}(t_i - \tau_j, |x^{(i)} - \xi^{(j)}|),$$

$$|\bar{k}| \leqslant [r], \ |\bar{m}| \leqslant [s], \tag{42}$$

где $\lambda = n + 2b - q + r + s$.

Далее введем класс функций, которые определены как по основной, так и параметрической точках в замкнутой области $\bar{Q}_0$ и могут иметь особенность лишь тогда, когда параметрическая точка попадает на границу области.

$V_{r,0}^{q,\theta}(Q_0, Q_0)$ — класс функций $K(t, x; \tau, \xi)$, $\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \bar{Q}_0$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, которые непрерывны, равны нулю при $t<\tau$ и имеют производные $D^{\bar{k}}_{t,x}K$, $|\bar{k}|\leqslant [r]$, удовлетворяющие неравенствам, получающимся из неравенств (37) — (39), если в их положить $s=0$, $\bar{m}=0$, $\lambda=n+2b-q+r+\theta$ и в их правые части дописать соответственно множители $\rho^{\theta}_{c}(t-\tau,\ \xi)$, $\rho^{\theta}_{c}(t_l-\tau,\ \xi)$ и $\rho^{\theta}_{c}(t_j-\tau,\ \xi)$, где

$$\rho^{\theta}_{c}(t-\tau,\ \xi)\equiv d^{\theta}(\xi,\ \Omega_1)\,E_c(t-\tau,\ d(\xi,\ \Omega_1)),\tag{43}$$

$d(\xi,\ \Omega_1)$ — расстояние от точки ξ до Ω_1.

$\overline{U}^{\nu,\mu}_{r,s}$ — класс функций, принадлежащих классу $U^{q,\nu,\mu}_{r,s}$ с достаточно большим q, так что в неравенствах (28) — (36) всюду $M_q(\lambda)=0$.

$S^{q,\gamma}_{r,s}(Q^{\pm\infty}_{\nu},\ Q^{\pm\infty}_{\mu})$ и $\overline{S}^{\gamma}_{r,s}(Q^{\pm\infty}_{\nu},\ Q^{\pm\infty}_{\mu})$ — классы функций, для получения определения которых нужно в определении класса $U^{q,\nu,\mu}_{r,s}$ множества Q_ν и Q_μ заменить соответственно множествами $Q^{\pm\infty}_{\nu}$ и $Q^{\pm\infty}_{\mu}$, а в неравенствах (28) — (36) оценочную функцию $\Phi^{M_q(\lambda)}_{c}(t,\ z)$, $t>0$, $z>0$, — функцией $\Phi^{M_q(\lambda)}_{c,\gamma}(t,\ z)$, $t>0$, $z>0$, для класса $S^{q,\gamma}_{r,s}(Q^{\pm\infty}_{\nu},\ Q^{\pm\infty}_{\mu})$ и функцией $E_c(t,\ z)\exp\{\gamma t\}$, $t>0$, $z>0$, для класса $\overline{S}^{\gamma}_{r,s}(Q^{\pm\infty}_{\nu},\ Q^{\pm\infty}_{\mu})$. Отметим, что замечание 2 справедливо для функций из класса $S^{q,\gamma}_{r,s}(Q^{\pm\infty}_{\nu},\ Q^{\pm\infty}_{\mu})$.

§ 2. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

1. Основная теорема. Для общих параболических граничных задач достаточно полно развиты шаудеровская теория и L_p-теория (см. [1, 2, 85, 86, 68]). В рамках этих теорий доказаны теоремы о корректной разрешимости таких задач в пространствах Гёльдера и Соболева — Слободецкого При этом установлены оценки решений, которые являются не только необходимыми, но и достаточными для параболичности граничных задач рассматриваемого вида.

Приведем основные результаты шаудеровской теории для задачи (23) — (25) § 1. Будем предполагать выполненным условие $Б_l$ с фиксированным нецелым $l>l_0$.

Пусть u — решение задачи (23) — (25) § 1 из пространства H^{2b+l}_{0}. Тогда, очевидно,

$$f_j\in H^{2b-r_j+l}_{(j)},\quad 0\leqslant j\leqslant N,\ f_{N+1}\in C^{2b+l}_{t}.\tag{1}$$

Кроме того, при $t = 0$ и $x \in \Omega_1$ функции f_j, $0 \leqslant j \leqslant N + 1$, связаны условиями согласования порядка $\left[\frac{l}{2b} + 1\right]$. Эти условия заключаются в том, что производные $D_t^s u|_{t=0}$, $0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{l}{2b} + 1\right]$, определяемые из системы (23) § 1 и начального условия (25) § 1, удовлетворяют соотношениям, полученным из равенств (24) § 1 следующим образом: в j-м равенстве и в результатах его дифференцирования по t до порядка $\left[\frac{l - r_j}{2b} + 1\right]$ ставится $t = 0$.

Если правые части задачи (23) — (25) § 1 удовлетворяют условиям (1) и условиям согласования порядка $\left[\frac{l}{2b} + 1\right]$, то скажем, что набор функций $f = (f_0, \ldots$ $\ldots, f_{N+1})'$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^l$. В этом пространстве введем норму с помощью равенства

$$\|f\|^l \equiv \sum_{j=0}^{N} \|f_j\|_{(j)}^{2b-r_j+l} + |f_{N+1}|_0^{2b+l}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* Б_l, $l > l_0$. *Тогда справедливы утверждения:*

1) *если задача* (23) — (25) § 1 *параболическая, то если выполнено условие* А, *то для существования единственного решения* $u \in H_0^{2b+l}$ *необходимо и достаточно, чтобы набор* f *правых частей задачи принадлежал пространству* $\mathcal{H}^l$; *при этом существует такая постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* f, *что справедливы неравенства*

$$C^{-1}\|f\|^l \leqslant \|u\|_0^{2b+l} \leqslant C\|f\|^l; \qquad (2$$

2) *если для каждой функции* $u \in H_0^{2b+l}$ *выполняется второе из неравенств* (2), *в котором*

$$f = (Au,\ B_1 u|_{Q_1},\ \ldots,\ B_N u|_{Q_1},\ u|_{t=0})' \qquad (3)$$

и постоянная C *не зависит от* u, *то задача* (23) — (25) § 1 *параболическая.*

Эта теорема является основной в шаудеровской теории. Доказательство ее первого утверждения имеется в работе [85], а второго в работах [2, 68]. При доказательстве достаточности условия $f \in \mathcal{H}^l$ и справедливости второго из неравенств (2) используется понятие регуляризатора параболической граничной задачи. Предложенный в работе [85] способ построения регуляризатора рассмотрим в п. 2, поскольку он будет использоваться в гл. 3.

Следствие. *Пусть s — нецелое число такое, что $l_0 < s \leqslant l$. Введем оператор L_s, сопоставляющий каждой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+s}$ набор функций* (3), *принадлежащий пространству $\mathcal{H}^s$. Из теоремы* 1 *и свойств пространств Гёльдера следует, что при выполнении условий* А *и* $Б_l$ *оператор L_s является изоморфизмом.* В частности, *если условие* $Б_l$ *выполнено для любого $l > l_0$, то L_s есть изоморфизм для каждого $s > l_0$.*

2. Регуляризатор параболической граничной задачи. Пусть числа t_0 и h такие, что $0 \leqslant t_0 < t_0 + h \leqslant T$. В цилиндре $Q_0^{t_0, t_0+h}$ рассмотрим граничную задачу

$$Au = f_0, \quad B_j u\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}} = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad u|_{t=t_0} = 0, \qquad (4)$$

где $f_j \in \overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+l}(Q_{(j)}^{t_0,t_0+h})$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Эту задачу можно истолковать как задачу о решении уравнения

$$Lu = f, \quad f = (f_0, \ldots, f_N)',$$

где L — линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $u \in X$ набор функций $(Au, B_1 u\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}}, \ldots$ $\ldots, B_N u\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}})' \in Y$. Здесь $X \equiv \overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(Q_0^{t_0,t_0+h})$ и $Y \equiv$ $\equiv \prod\limits_{j=0}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+l}(Q_{(j)}^{t_0,t_0+h})$.

Регуляризатором задачи (4) или оператора L называется такой ограниченный оператор $\mathcal{R}: Y \to X$, что

$$L\mathcal{R} = I_{m+N} - \mathcal{V}, \quad \mathcal{R}L = I_m - \mathcal{W}, \qquad (5)$$

где $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — ограниченные операторы в пространствах Y и X соответственно, нормы которых меньше единицы.

Если для оператора L существует регуляризатор $\mathcal{R}$, то L имеет ограниченный обратный оператор, равный

$$L^{-1} = \mathcal{R}(I_{m+N} - \mathcal{V})^{-1} = (I_m - \mathcal{W})^{-1}\mathcal{R}.$$

В работе [85] доказано, что если высота h цилиндра $Q_0^{t_0,t_0+h}$ достаточно мала, то существует регуляризатор задачи (4). Он строится следующим образом.

Будем считать, что

$$h = \varkappa\lambda^{2b}, \qquad (6)$$

где $\varkappa$ и λ — малые параметры, величины которых фиксированы ниже. Рассмотрим две системы множеств $\{\Omega_\nu^{(k)}\}$, $\nu = 1, 2$, покрывающие $\overline{\Omega}_0$, причем $\Omega_1^{(k)} \subset \Omega_2^{(k)} \subset \overline{\Omega}_0$. Множества $\Omega_\nu^{(k)}$ бывают: внутренние и прилегающие к границе. Внутренние множества $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$ являются n-мерными кубами с общим центром $\xi^{(k)} \in \Omega_0$ и ребрами, параллельными координатным осям, причем длина ребер равна соответственно $\frac{a\lambda}{2}$ и $a\lambda$. Если же $\Omega_\nu^{(k)}$, $\nu = 1, 2$, прилегают к границе Ω_1, то они могут быть заданы в локальной системе координат $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ с центром в точке $\xi^{(k)} \in \Omega_1$ неравенствами

$$|\hat{x}_j| \leqslant \frac{\nu a\lambda}{2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant \hat{x}_n - F(\hat{x}') \leqslant \nu a\lambda,$$

где F — функция, определяющая с помощью уравнения (11) § 1 границу Ω_1 в окрестности точки $\xi^{(k)}$, a — не зависящая от λ положительная постоянная. Отметим, что важным свойством множеств $\Omega_\nu^{(k)}$ является то, что кратность покрытия ими $\overline{\Omega}_0$ конечна и не зависит от λ. Будем обозначать через k' номера множеств $\Omega_\nu^{(k)}$ внутренних, а через k'' — прилегающих к границе.

Заметим, что преобразование (14) § 1 переводит множества $\Omega_2^{(k'')}$ в стандартное множество — n-мерный куб $K = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x}_j| \leqslant a\lambda, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \ 0 \leqslant \bar{x}_n \leqslant 2a\lambda\}$, при этом часть границы множества $\Omega_2^{(k'')}$, принадлежащая Ω_1, переходит в $(n-1)$-мерный куб $K' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x}_j| \leqslant a\lambda, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \ \bar{x}_n = 0\}$.

Пусть $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ — бесконечно дифференцируемые на $\overline{\Omega}_0$ функции, обладающие следующими свойствами:

$$0 \leqslant \varphi^{(k)} \leqslant 1, \quad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1^{(k)}, \\ 0, & x \in \overline{\Omega}_0 \setminus \Omega_2^{(k)}, \end{cases}$$

$$\psi^{(k)} = 0 \text{ в } \overline{\Omega}_0 \setminus \Omega_2^{(k)}, \quad \sum_k \varphi^{(k)}(x)\psi^{(k)}(x) = 1,$$

$$|D_x^m \varphi^{(k)}(x)| \leqslant \frac{C_m}{\lambda^{|m|}}, \quad |D_x^m \psi^{(k)}(x)| \leqslant \frac{C_m}{\lambda^{|m|}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n, \ x \in \overline{\Omega}_0. \tag{7}$$

Всюду в дальнейшем $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ обозначает координаты точки x в локальной системе координат с центром в точке $\xi^{(k'')} \in \Omega_1$ (k'' — локальные координаты, они связаны с координатами x формулами (12) § 1, в которых $y = \xi^{(k'')}$), а $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — k''-распрямляющие координаты точки x, то есть координаты, связанные с $\hat{x}$ формулами (13) § 1, а с x — формулой (14) § 1. Через $\Pi^x_{\hat{x}}$ и $\Pi^x_{\bar{x}}$ будем обозначать операторы перехода от координат x к $\hat{x}$ и $\bar{x}$ соответственно, а через $\Pi^{\hat{x}}_x$ и $\Pi^{\bar{x}}_x$ обратные к ним операторы. Примем еще следующие обозначения: $\bar{f}(\bar{x}) \equiv \Pi^x_{\bar{x}} f(x)$, $\bar{f}(t, \bar{x}) \equiv \Pi^x_{\bar{x}} f(t, x)$, $\hat{f}(t, \hat{x}) \equiv \Pi^x_{\hat{x}} f(t, x)$. Очевидно, что $\bar{f}(t, \bar{x}) = \hat{f}(t, \bar{x}', \bar{x}_n + F(\bar{x}'))$.

Пусть A_0 и B_{j0} — главные части выражений A и B_j, определяемые формулами (26) § 1, а $A_1 \equiv A - A_0$, $B_{j1} \equiv B_j - B_{j0}$.

Регуляризатором задачи (4) является оператор $\mathcal{R}$, сопоставляющий набору функций $f = (f_0, \ldots, f_N)' \in Y$ функцию $v \in X$ по формуле

$$v(t, x) = (\mathcal{R}f)(t, x) \equiv \sum_k \psi^{(k)}(x) (\mathcal{R}^{(t_0,k)} f)(t, x), \tag{8}$$

$$(t, x) \in \overline{Q}_0^{t_0, t_0+h}.$$

Здесь $\mathcal{R}^{(t_0,k')} f \equiv v^{(t_0,k')}$ — решение задачи Коши

$$A_0(t_0, \xi^{(k')}, D_t, D_x) v^{(t_0,k')}(t, x) = \varphi^{(k')}(x) f_0(t, x),$$
$$v^{(t_0,k')}(t, x)|_{t=t_0} = 0, \tag{9}$$

где $\xi^{(k')}$ — центр куба $\Omega_2^{(k')}$, а

$$(\mathcal{R}^{(t_0,k'')} f)(t, x) \equiv \Pi^{\bar{x}}_x (\overline{\mathcal{R}}^{(t_0,k'')} f)(t, \bar{x}) \equiv \Pi^{\bar{x}}_x \bar{v}^{(t_0,k'')}(t, \bar{x}).$$

Функция $\bar{v}^{(t_0,k'')}$ является решением граничной задачи

$$\hat{A}_0^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}}) \bar{v}^{(t_0,k'')}(t, \bar{x}) = \bar{\varphi}^{(k'')}(\bar{x}) \bar{f}_0(t, \bar{x}),$$

$$\hat{B}_{j0}^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}}) \bar{v}^{(t_0,k'')}(t, \bar{x})|_{\bar{x}_n=0} = \bar{\varphi}^{(k'')}(\bar{x}', 0) \times$$

$$\times \bar{f}_j(t, \bar{x}'), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad \bar{v}^{(t_0,k'')}(t, \bar{x})|_{t=t_0} = 0, \tag{10}$$

где $\hat{A}_0^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}})$ и $\hat{B}_{j0}^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}})$ — выражения, получающиеся из $A_0(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_x)$ и $B_{j0}(t_0, \xi^{(k'')},$

D_t, D_x) переходом к локальным координатам $\hat{x}$ с центром в точке $\xi^{(k'')} \in \Omega_1$ и последующей автоматической заменой $D_{\hat{x}}$ на $D_{\bar{x}}$.

Первое из равенств (5) равносильно равенствам

$$A\mathcal{R}f = f_0 - \mathcal{V}_0 f, \tag{11}$$

$$B_j\mathcal{R}f\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}} = f_j - \mathcal{V}_j f, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \; f \in Y,$$

где $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_N)'$ — ограниченный оператор в Y, имеющий малую норму, если h достаточно мало. Операторы $\mathcal{V}_j$, $0 \leqslant j \leqslant N$, определяются равенствами

$$\mathcal{V}_0 f \equiv -A_1(t, x, D_x)\mathcal{R}f + \sum_k (\psi^{(k)}A_0(t, x, D_t, D_x) -$$

$$- A_0(t, x, D_t, D_x)\psi^{(k)})\mathcal{R}^{(t_0,k)}f + \sum_k \psi^{(k)}(A_0(t_0, \xi^{(k)}, D_t, D_x) -$$

$$- A_0(t, x, D_t, D_x))\mathcal{R}^{(t_0,k)}f +$$

$$+ \sum_{k''} \psi^{(k'')}\Pi_{\bar{x}}^{x}\{(\hat{A}_0^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- \hat{A}_0^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}} - \operatorname{grad} F \cdot D_{\bar{x}_n}))\overline{\mathcal{R}}^{(t_0,k'')}f\}, \tag{12}$$

$$\mathcal{V}_j f \equiv -B_{j1}(t, x, D_t, D_x)\mathcal{R}f\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}} +$$

$$+ \sum_{k''} (\psi^{(k'')}B_{j0}(t, x, D_t, D_x) -$$

$$- B_{j0}(t, x, D_t, D_x)\psi^{(k'')})\mathcal{R}^{(t_0,k'')}f\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}} +$$

$$+ \sum_{k''} \psi^{(k'')}(B_{j0}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_x) -$$

$$- B_{j0}(t, x, D_t, D_x))\mathcal{R}^{(t_0,k'')}f\,|_{Q_1^{t_0,t_0+h}} +$$

$$+ \sum_{k''} \psi^{(k'')}\Pi_{\bar{x}}^{x}\{(\hat{B}_{j0}^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- \hat{B}_{j0}^{(k'')}(t_0, \xi^{(k'')}, D_t, D_{\bar{x}} - \operatorname{grad} F \cdot D_{\bar{x}_n}))\overline{\mathcal{R}}^{(t_0,k'')}f\,|_{\bar{x}_n=0}\},$$

$$1 \leqslant j \leqslant N.$$

Формула (8) содержит операторы, сопоставляющие правым частям задач (9) и (10) их решения. В эти задачи входят только главные части дифференциальных выражений, коэффициенты которых постоянны. Такие задачи будем называть модельными. Для модельных задач справедливы формулы, выражающие их решения в интегральной форме с помощью фундаментальных матриц решений, ядер Пуассона и однородной матрицы Грина. Эти формулы мы приведем ниже. В них $A_0 \equiv A_0(D_t, D_x)$ и $B_{j0} \equiv B_{j0}(D_t, D_x)$ — дифференциальные выражения, удовлетворяющие условиям параболичности и определяемые формулами (26) § 1, в которых коэффициенты a_k и $b_{j\bar{k}}$ постоянны.

3. Фундаментальная матрица решений модельной задачи Коши. В полупространстве Π^∞ рассмотрим задачу Коши

$$A_0 u = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi. \tag{13}$$

Фундаментальной матрицей решений этой задачи называется такая матрица $Z_0 : \Pi^\infty \to \mathbb{C}_{mm}$, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{ml}$ решение задачи (13) определяется формулой

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x - \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^\infty.$$

Матрицу Z_0 можно определить также как решение в пространстве обобщенных функций задачи Коши

$$A_0 Z_0 = 0, \quad Z_0|_{t=0} = I_m \delta_0, \tag{14}$$

где δ_0 — дельта-функция с носителем в точке $x = 0$.

Как доказано в [98], матрица Z_0 является бесконечно дифференцируемой в Π^∞ функцией, для которой справедливы оценки

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t, x)| \leqslant C_{\bar{k}} t^{-\frac{n+\|\bar{k}\|}{2b}} E_c(t, |x|),$$
$$(t, x) \in \Pi^\infty, \; C_{\bar{k}} > 0, \; c > 0, \; \bar{k} \in \mathbb{Z}^{n+1}_+, \tag{15}$$

а также равенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t, x - \xi)\,d\xi = \delta_{|\bar{k}|,0} I_m, \quad (t, x) \in \Pi^\infty, \; \bar{k} \in \mathbb{Z}^{n+1}_+. \tag{16}$$

С помощью матрицы Z_0 решение задачи Коши

$$A_0 u = f, \quad u|_{t=0} = 0$$

определяется формулой

$$u(t, x) = \int\limits_0 d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^\infty,$$

для каждой непрерывной и ограниченной функции $f : \Pi^\infty \to \mathbb{C}_{m1}$, удовлетворяющей условию Гёльдера по x равномерно на любом компактном подмножестве из Π^∞.

4. **Ядра Пуассона модельной граничной задачи.** Рассмотрим граничную задачу

$$A_0 u(t, x) = f_0(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_+^T,$$

$$B_{j0} u(t, x)|_{x_n=0} = f_j(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi_0^T, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{17}$$

в предположении, что

$$f_0 \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Pi_+^T), \quad f_j \in \overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+l}(\Pi_0^T), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \ l > l_0. \tag{18}$$

Ядрами Пуассона задачи (17) называются такие функции G_j: $\Pi_+^\infty \to \mathbb{C}_{m1}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, что решение задачи **(17)** с $f_0 = 0$ определяется формулой

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^N \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') f_j(\tau, \xi')\, d\xi' \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^N (\mathcal{G}_j f_j)(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_+^T, \ x-\xi' \equiv (x'-\xi', x_n). \tag{19}$$

В пространстве обобщенных функций ядра G_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, являются решениями задач

$$A_0 G_j = 0, \ B_{i0} G_j|_{x_n=0} = \delta_{i,j} \delta_{(0,0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \ G_j = 0, \ t < 0,$$

где $\delta_{(0,0)}$ — дельта-функция с носителем в точке $t = 0$, $x' = 0$.

Полное исследование ядер Пуассона и соответствующих операторов $\mathcal{G}_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, проведено в работах [98, 85], где доказана, в частности, следующая теорема.

Теорема 2. *Ядра G_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями в Π_+^∞. Они представимы в дивергентной форме: для любого $r \in \mathbb{Z}_+^1$ и j, $1 \leqslant j \leqslant N$,*

$$G_j(t, x) = (D_t^1 + a(-\Delta_{x'})^b)^r \, G_j^r(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_+^\infty, \tag{20}$$

где $a > 1$ — некоторая постоянная, $\Delta_{x'} = D^2_{x_1} + \ldots + D^2_{x_{n-1}}$, а для функций G'_j справедливы оценки

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} G^r_j(t, x)| \leqslant C_{\bar{k}} t^{r-1-\frac{n-r_j-1+|\bar{k}|}{2b}} E_c(t, |x|),$$

$$(t, x) \in \Pi^{\infty}_{+}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad r \in \mathbb{Z}^1_{+}, \quad C_{\bar{k}} > 0, \quad c > 0, \quad \bar{k} \in \mathbb{Z}^{n+1}_{+}. \tag{21}$$

Если $f \in \overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+l}(\Pi^T_0)$, $l > l_0$, то $\mathcal{G}_j f \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi^T_{+})$ и

$$\| \mathcal{G}_j f \|^{2b+l}_{\Pi^T_{+}} \leqslant C \| f \|^{2b-r_j+l}_{\Pi^T_0}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{22}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f.

5. Однородная матрица Грина модельной граничной задачи. Чтобы получить формулу для решений задачи (17) с $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, воспользуемся *однородной матрицей Грина* этой задачи. Это такая матрица $G^1_0(t, x - \xi', \xi_n)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}^n_{+}$, что формула

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_{+}} G^1_0(t - \tau, x - \xi', \xi_n) f_0(\tau, \xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv (\mathcal{G}^1_0 f_0)(t, x), \quad (t, x) \in \Pi^T_{+}, \tag{23}$$

определяет решение задачи (17) с $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, для любой достаточно гладкой финитной функции $f_0 : \Pi^T_{+} \to \mathbb{C}_{m1}$.

Матрицу G^1_0 можно определить также как решение в пространстве обобщенных функций задачи

$$A_0 G^1_0 = I_m \delta_{(0,\xi)},$$

$$B_{j0} G^1_0 |_{x_n = 0} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad G^1_0 = 0, \quad t < 0,$$

где $\delta_{(0,\xi)}$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $t = 0$, $x = \xi$.

Теорема 3. *Однородная матрица Грина G^1_0 задачи (17) представима в виде*

$$G^1_0(t, x - \xi', \xi_n) = Z_0(t, x - \xi) - V_0(t, x - \xi', \xi_n), \tag{24}$$

$$t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}^n_{+},$$

где Z_0 — фундаментальная матрица решений задачи Коши (13).

Для матриц G_0^1 и V_0 справедливы оценки

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\xi_n}^{p} G_0^1(t, x-\xi', \xi_n)| \leqslant C_{\bar{k}p} t^{-\frac{n+|\bar{k}|+p}{2b}} E_c(t, |x-\xi|), \quad (25)$$

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\xi_n}^{p} V_0(t, x-\xi', \xi_n)| \leqslant C_{\bar{k}p} t^{-\frac{n+|\bar{k}|+p}{2b}} E_c(t, |x-\xi| + \xi_n),$$

$$t>0,\ \{x, \xi\} \subset \bar{\mathbb{R}}_+^n,\ C_{\bar{k}p}>0,\ c>0,\ \bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1},\ p \in \mathbb{Z}_+^1. \quad (26)$$

Имеет место дивергентное представление, аналогичное (20): *для любого $r \in \mathbb{Z}_+^1$*

$$G_0^1(t, x-\xi', \xi_n) = (D_t^1 + a(-\Delta_{x'})^b)^r G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n), \quad (27)$$

$$t>0,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^n,$$

где матрица G_0^{1r} удовлетворяет оценкам, получающимся из оценок (25) *заменой n на $n-2br$.*

Если наибольший порядок n_0 производных по x_n в выражениях B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$, меньше $2b-1$, то

$$D_{\xi_n}^{p} G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n)|_{\xi_n=0} = 0, \quad t>0,\ x \in \bar{\mathbb{R}}_+^n, \quad (28)$$

$$\xi' \in \mathbb{R}^{n-1},\ 0 \leqslant p \leqslant 2b-n_0-2,\ r \in \mathbb{Z}_+^1.$$

Пусть $f_0 \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Pi_+^T)$, тогда $\mathcal{G}_0^1 f_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$ и

$$B_{j0}(\mathcal{G}_0^1 f_0)|_{x_n=0} = -C_j f_0|_{x_n=0}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad (29)$$

где $C_j \equiv C_j(D_t, D_x)$ — дифференциальное выражение порядка $r_j - 2b$, причем оно не содержит производных по x_n порядка выше $n_j - 2b$ и $C_j = 0$, если $n_j < 2b$, где n_j — наибольший порядок производных по x_n в B_{j0}.

Существует такая постоянная $C>0$, что для всех $f_0 \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Pi_+^T)$

$$\|\mathcal{G}_0^1 f_0\|_{\Pi_+^T}^{2b+l} \leqslant C \|f_0\|_{\Pi_+^T}^{l}. \quad (30)$$

Доказательство этой теоремы приведено в работах [47, 56].

Следствие 1. *Чтобы получить решение задачи* (17) *с $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, нужно, в силу равенств* (29), *к функции* (23) *прибавить решение задачи* (17) *с $f_0 = 0$ и граничными функциями $C_j f_0|_{x_n=0}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. На основании формулы* (19) *таким решением является функция $\sum_{j=1}^{N} \mathcal{G}_j(C_j f_0|_{x_n=0})$. Следовательно, решение указанной* *задачи в предположении, что* $f_0 \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Pi_+^T)$ *имеет вид*

$$u = \mathcal{G}_0^1 f_0 + \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j (C_j f_0 |_{x_n=0}).$$

Отсюда, в силу результатов п. 4, следует, что решением задачи (17), *правые части которой удовлетворяют условиям* (18), *является функция*

$$u = \mathcal{G}_0^1 f_0 + \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j (f_j + C_j f_0 |_{x_n=0}). \qquad (31)$$

Из теорем 2 *и* 3 *следует, что это решение принадлежит пространству* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$ *и для него справедлива оценка*

$$\| u \|_{\Pi_+^T}^{2b+l} \leqslant C \left(\| f_0 \|_{\Pi_+^T}^l + \sum_{j=1}^N \| f_j \|_{\Pi_0^T}^{2b-r_j+l} \right). \qquad (32)$$

Теорема 4. *Всякое решение задачи* (17) *из пространства* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$, $l > l_0$, *представимо в виде* (31). *Для него справедлива оценка* (32).

◀ Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$ является решением задачи (17), тогда f_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют условиям (18). В силу следствия 1 функция (31) есть решение задачи (17), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$. Отсюда и из содержащегося в теореме 1 факта единственности решения следует, что u совпадает с функцией (31). ▶

Следствие 2. *Пусть* $Z_0^{(t_0,k')}$ — *фундаментальная матрица задачи* (9), $G_0^{(t_0,k'')}$ — *однородная матрица Грина задачи* (10), *а* $G_j^{(t_0,k'')}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, — *ее ядра Пуассона. Введем операторы*

$$\mathcal{Z}_0^{(t_0,k')} : g \mapsto \int_{t_0}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_0^{(t_0,k')}(t-\beta, x-y)\, g(\beta, y)\, dy,$$

$$\mathcal{G}_0^{(t_0,k'')} : g \mapsto \int_{t_0}^t d\beta \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(t_0,k'')}(t-\beta, \bar{x}-\bar{y}', \bar{y}_n)\, g(\beta, \bar{y})\, d\bar{y} \qquad (33$$

$$\mathcal{G}_j^{(t_0,k'')} : g \mapsto \int_{t_0}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j^{(t_0,k'')}(t-\beta, \bar{x}-\bar{y}')\, g(\beta, \bar{y}')\, d\bar{y}',$$

$$1 \leqslant j \leqslant N,$$

где $t > t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$.

На основании результатов п. 3—5 для операторов $\mathcal{R}^{(t_0,k')}$ *и* $\overline{\mathcal{R}}^{(t_0,k'')}$ *из формулы* (8) *имеем равенства*

$$\mathcal{R}^{(t_0,k')}f = \mathcal{X}_0^{(t_0,k')}(\varphi^{(k')}f_0),$$

$$\overline{\mathcal{R}}^{(t_0,k'')}f = \mathcal{G}_0^{(t_0,k'')}(\overline{\varphi}^{(k'')}\overline{f}_0) + \sum_{j=1}^{N} \mathcal{G}_j^{(t_0,k'')}(\overline{\varphi}^{(k'')}\overline{f}_j + C_j(D_t, D_{\overline{x}})(\overline{\varphi}^{(k'')}\overline{f}_0)|_{x_n=0}). \quad (34)$$

§ 3. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ ГРИНА

1. Определение матрицы Грина параболической граничной задачи. Рассмотрим задачу (23) — (25) § 1, для которой предположим выполненными условия А и $Б_l$, $l > l_0$. Пусть набор ее правых частей $f = (f_0, \ldots, f_{N+1})' \in \mathcal{H}^s$, $l_0 < s \leqslant l$. Из теоремы 1 § 2 следует, что тогда эта задача имеет единственное решение $u \in H_0^{2b+s}$. Будем изучать вопрос об интегральном представлении таких решений.

Определение 1. *Матрицей Грина задачи* (23) — (25) § 1 *называется такая матрица* $(G_0, \ldots, G_{N+1})$, *что всякое решение* $u \in H_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, *этой задачи представимо в виде*

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j(t, x;\ \tau, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi + \int_{\Omega_0} G_{N+1}(t, x;\ \xi) f_{N+1}(\xi)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{N+1} (\mathcal{G}_j f_j)(t, x), \quad (t, x) \in Q_0. \quad (1)$$

В гл. 4 будет доказано, что при достаточно большом l представление (1) всегда имеет место, но не всегда элементы матриц G_0 и G_{N+1} являются обычными функциями. Все зависит от того, каковы порядки m_j и n_j по нормали выражений B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, определенные в п. 3 § 1. Обычными функциями являются элементы матрицы G_0, когда для любых j $m_j \leqslant 1$ и $n_j < 2b$, а элементы матрицы G_{N+1} — если $m_j = 0$ и $n_j < 2b$. В остальных случаях элементы этих матриц, вообще говоря, содержат слагаемые, которые являются линейными комбинациями производных от дельта-функций, сосредоточенных на Q_1

или Ω_1. При этом в формуле (1) интегралами, ядрами которых являются указанные выше обобщенные функции, обозначаются результаты применения этих обобщенных функций к соответствующим основным.

Для представления решений задачи (23) — (25) § 1 в случае, когда $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, используется однородная матрица Грина.

Определение 2. *Однородной матрицей Грина задачи* (23) — (25) § 1 *называется матриц* $G_0^1(t, x; \tau, \xi)$, $\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \overline{Q}_0$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, *являющаяся решением задачи*

$$AG_0^1 = I_m\delta_{(\tau,\xi)}, \quad B_jG_0^1|_{Q_1} = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant N, \quad G_0^1 = 0, \ t < \tau,$$

где $\delta_{(\tau,\xi)}$ — *дельта-функция, сосредоточенная в то* (τ, ξ).

Однородная матрица Грина строится и исследуетс гл. 3 в случае любого $l > l_0$. Отметим, что матриц может отличаться от матрицы G_0 из определения 1 на гаемые, являющиеся обобщенными функциями, сосредоточенными на Q_1.

2. О матрице Грина задачи Коши. Рассмотрим вопрос о представлении в интегральной форме решени задачи Коши для параболической системы

$$A(t, x, D_t, D_x)\,u(t, x) = f(t, x), \ (t, x) \in \Pi^T,$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Для этого определим *фундаментальную матрицу решений* этой задачи. Так называется матрица $Z(t, x; \tau, \xi$, $\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \overline{\Pi}^T$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, с помощью которой решение задачи

$$Au = 0, \quad u|_{t=\tau} = \varphi$$

для любого $\tau \in [0, T)$ и любой непрерывной и ограниченной функции φ определяется формулой

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t, x) \in (\tau, T] \times \mathbb{R}^n.$$

В работах [98, 27] доказано, что при естественных предположениях о коэффициентах выражения A всякое решение $u \in H^{2b+l}(\Pi^T)$, $l > 0$, задачи (3) представимо в виде

$$u(t, x) = \int_0 d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\ \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^T. \qquad (4)$$

сюда следует, что матрица Грина задачи Коши, то есть атрица, составленная из ядер представления (4), полностью определяется фундаментальной матрицей решений этой задачи.

ожно доказать, что фундаментальная матрица рей Z является решением в пространстве обобщенных ций задачи

$$AZ = I_m \delta_{(\tau, \xi)}, \quad Z = 0,\ t < \tau.$$

остроение и изучение фундаментальных матриц рей проведено в работах [98, 92, 27]. Сформулируем екоторые результаты этого изучения.

Теорема. *Если выражение A равномерно параболикое на $\overline{\Pi}^T$ и его коэффициенты принадлежат пространву H^l (Π^T) с нецелым $l > 0$, то для задачи* (3) *существует фундаментальная матрица решений Z, которая принадлежит классу $U^{2b}_{2b+l,0}(\Pi^T, \Pi^T)$, причем справедливо представление*

$$Z(t, x;\ \tau, \xi) = Z_0(t - \tau, x - \xi;\ \tau, \xi) + W(t, x; \tau, \xi),$$

$$\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \overline{\Pi}^T, \ (t, x) \neq (\tau, \xi), \qquad (5)$$

где $Z_0(t, x; \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi^\infty$,— фундаментальная матрица решений задачи Коши для системы $A_0(\beta, y, D_t, D_x)\, u = 0$ с зафиксированными в точке $(\beta, y) \in \overline{\Pi}^T$ коэффициентами, а

$$W \in U^{2b-[l]+l}_{2b+l,0}(\Pi^T, \Pi^T).$$

Если выражение A равномерно параболическое на $\overline{\Pi}^\infty$ и его коэффициенты принадлежат пространству H^l (Π^∞), то существуют такие положительные постоянные C_1, c_1 и γ_1, что для любых $0 \leqslant \tau < T < \infty$

$$Z \in U^{2b}_{2b+l,0}(\Pi^T, \Pi^T;\ C_1 \exp\{\gamma_1 (T - \tau)\}, c_1). \qquad (6)$$

3. **Литература по матрицам Грина.** Сделаем краткий обзор работ, в которых строятся, изучаются и применяются матрицы Грина параболических граничных задач.

Прежде всего отметим работы Э. Э. Леви [115], М. Жевре [112] и А. Н. Тихонова [90, 91], в которых для граничных задач уравнения теплопроводности построены однородные функции Грина, изучены свойства этих функций и даны их некоторые применения.

Однородная функция Грина первой граничной задачи для общего параболического уравнения второго порядка с гельдеровыми коэффициентами построена В. Погожельским [118] (см. также [111, 57, 92, 68]), второй граничной задачи в случае достаточно гладких коэффициентов — С. Ито [113, 114]. Изучением матрицы Грина первой граничной задачи для параболической по Петровскому системы занимался В. П. Михайлов [79, 80].

Для различных применений важны оценки матрицы Грина и ее производных вплоть до границы области.

Такие оценки в случае первой граничной задачи для параболической системы на плоскости установил В. П. Михайлов [79]. П. Е. Соболевским [83] получены оценки однородной функции Грина и ее производных в случае первой и второй граничных задач для дивергентного параболического уравнения второго порядка, коэффициенты которого зависят лишь от x. Эти оценки использованы им для изучения дробных степеней соответствующих эллиптических операторов [83, 84, 60].

Точные оценки однородной функции Грина и всех ее производных в случае первой граничной задачи для общего параболического уравнения второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в цилиндрической области получены автором этой книги в работе [24], а в нецилиндрической — в работе [28]. В этих работах, используя конструкцию В. Погожельского [118], сначала устанавливается оценка самой функции Грина, а затем с помощью специальных априорных оценок А. Фридмана вплоть до куска границы получаются оценки ее производных [110]. Заметим, что такие же результаты и таким же образом для случая цилиндрической области получены в книге [68]. Точные оценки первых производных однородной функции Грина первой граничной задачи для уравнения теплопроводности установлены также Г. В. Генджояном [9].

Первой работой, посвященной функции Грина общей параболической граничной задачи, является, по-видимому, работа Р. Аримы [105]. В ней для одного параболического уравнения порядка $2b$ в цилиндрической области рассматривается граничная задача с общими граничными условиями, порядки которых меньше $2b$. Для такой задачи строится однородная функция Грина G_0^1 и устанавливаются точные оценки вплоть до границы области самой функции G_0^1 и всех ее производных до порядка $2b - 1$ включительно. Р. Арима использует метод, опирающийся на введение операторов дробного дифференцирования на граничном многообразии. С помощью результатов работы [105] С. Мизохата и Р. Арима [116], используя метод параболического уравнения, нашли асимптотику числа собственных значений самосопряженной эллиптической граничной задачи с нормальными граничными условиями. В последующей работе С. Мизохата [117], используя результаты для функции Грина, изучил распределение собственных значений некоторых несамосопряженных эллиптических граничных задач.

В 1965—1966 гг. автором этой книги и С. Д. Эйдельманом проведено изучение однородной матрицы Грина граничной задачи для параболической по Петровскому системы уравнений первого порядка по t в цилиндрической области. При этом предполагалось, что порядки граничных операторов меньше порядка системы. Результаты этого изучения были доложены на Международном математическом конгрессе в Москве [100] и опубликованы кратко в заметке [25], а в развернутом виде — в статье [102]. Этим работам предшествовала работа [99], в которой получены точные оценки однородной матрицы Грина и всех ее производных для модельной параболической граничной задачи. Для построения и получения оценок однородной матрицы Грина в работах [100, 25, 102] разработан так называемый *метод регуляризатора*. Этот метод в работе [101] применяется для изучения однородной матрицы Грина граничных задач для параболических систем с разрывными коэффициентами на гладких внутренних гиперповерхностях, на которых задаются условия сопряжения. Результаты работ [25, 100—102] обобщаются на случай нецилиндрических областей в работе [8]. В работах [36, 50] метод регуляризатора получает дальнейшее развитие и позволяет установить соответствующие результаты для однородной матрицы Грина задачи с граничными условиями произвольного порядка.

Эти результаты для случая цилиндрической области излагаются в гл. 3 книги.

В 1969 г. вышла работа В. А. Солонникова [87], в которой применяется другой метод построения и получения оценок однородной матрицы Грина параболических граничных задач. Он заключается в подробном изучении решений G_0^ε задачи (2), в которой вместо $\delta_{(\tau,\xi)}$ стоит специальным образом выбранная последовательность гладких функций $\delta_{(\tau,\xi)}^\varepsilon$, аппроксимирующих $\delta_{(\tau,\xi)}$. Основная задача заключается в том, чтобы получить равномерные по ε оценки G_0^ε и осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Указанный метод в статье [87] излагается для параболических по Петровскому систем в случае нецилиндрических областей, при этом порядки граничных условий предполагаются меньшими порядков уравнений системы.

Результаты работ [25, 102, 36] нашли разнообразные применения. Так, в работах [93, 94] они применялись для изучения аналитического продолжения ряда Дирихле общей самосопряженной граничной задачи для эллиптических систем в ограниченной области; в [95, 3, 7] — для нахождения асимптотики числа собственных значений эллиптических задач с растущими коэффициентами в неограниченных областях и эллиптических операторов в ограниченных областях; в [96, 97, 10—12] — для доказательства существования физически важных спектральных инвариантов (плотности состояний, энергии Ферми и др.) эллиптических операторов с почти периодическими и случайными коэффициентами, а также с коэффициентами из некоторой алгебры со средним (трансляционно инвариантной алгебры бесконечно дифференцируемых и ограниченных вместе со всеми своими производными функций, имеющих предельное среднее); в [66, 54] — для установления разрешимости и построения однородной матрицы Грина граничных задач для параболических систем, коэффициенты которых растут с ростом пространственных координат; в [70, 104] — для исследования разрешимости линейных параболических граничных задач в пространствах Дини; в [103] — для изучения применимости принципа усреднения Н. Н. Боголюбова к решению задачи Дирихле и задачи с косой производной для квазилинейных параболических уравнений второго порядка; в [106—109] — для исследования разрешимости и свойств решений квазилинейных параболических граничных задач; в [77] — для доказательства теорем существования и единственности решений квазилинейных стохастических уравнений параболического типа.

Матрицы Грина общих эллиптических граничных задач исследовались разными методами в работах Ю. М. Березанского и Я. А. Ройтберга [5, 6], Ю. П. Красовского [61—63], Х. Трибеля [119], П. Цукермана [121], В. А. Солонникова [88], И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля [59, 60].

В работах [5, 6] с помощью теорем о полном наборе изоморфизмов доказывается существование и изучаются свойства гладкости по совокупности переменных вплоть до границы области однородной функции Грина общей эллиптической задачи с нормальными граничными условиями. Таким же методом в работах [59, 60] исследуется матрица Грина $(G_0, \ldots, G_N)$ эллиптической задачи с граничными условиями, которые могут иметь произвольные порядки и быть псевдодифференциальными. Заметим, что в случае нормальных граничных условий функции G_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, на основании формулы Грина, легко выражаются через функцию G_0.

В работах [61—63] рассматривается общая граничная задача для эллиптического уравнения произвольного порядка с неоднородными граничными условиями, порядки которых меньше порядка уравнения. Для такой задачи строится матрица Грина $(G_0, \ldots, G_N)$, подробно исследуется структура функций G_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, в окрестности их особой точки, изучаются дифференциальные свойства этих функций, устанавливаются точные оценки их производных в замкнутой области, а также приводятся теоремы о действии операторов, ядрами которых являются функции G_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, и операторов, сопряженных к ним. Эти результаты используются в работе [63] для изучения обобщенной разрешимости граничной задачи в негативных пространствах Гёльдера, в [64] — для получения оценок роста производных от решений однородных эллиптических уравнений вблизи границы области и в [65] — для исследования решений граничных задач со степенными особенностями в правых частях.

Используемый Ю. П. Красовским метод построения матрицы Грина состоит в следующем. Матрица Грина, как ядро оператора $\mathcal{G}$, решающего эллиптическую задачу, строится в виде суммы главной части и остатка, причем остаток является гладкой функцией. Построение главной части оператора $\mathcal{G}$ производится с помощью потенциалов, которые можно назвать обобщением на случай общих граничных задач объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоя. При этом ядро главной части оператора $\mathcal{G}$ получается как композиция ядер этих потенциалов. При изучении свойств этого ядра существенно используется доказанная Ю. П. Красовским теорема о композиции ядер, которые могут иметь неинтегрируемые особенности. Ядра указанных выше потенциалов и, следовательно, главные части элементов матрицы Грина строятся с помощью фундаментальных решений и ядер Пуассона специальных модельных задач в полупространстве.

В работе В. А. Солонникова [88] методом, аналогичным методу, использованному в работе [87] для параболического случая, строится однородная матрица Грина общих граничных задач для эллиптических по Дуглису — Ниренбергу систем и устанавливаются точные оценки ее производных как по основным, так и параметрическим переменным.

Отметим, что в работах [100, 25, 102, 36] с помощью результатов исследования однородных матриц Грина параболических граничных задач построены однородные матрицы Грина эллиптических граничных задач, порожденных параболическими, и получены точные оценки всех их производных по основным аргументам. Эти результаты предшествовали отмеченным выше результатам Ю. П. Красовского, В. А. Солонникова, И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля.

В серии работ [29—35, 42—47, 50, 53, 55], публикация которых началась с 1969 г., для параболического случая развивается метод исследования матрицы Грина, предложенный в эллиптическом случае Ю. П. Красовским и называемый далее *методом интегральных операторов*. В этих работах содержатся более общие результаты, чем те, которые получены в эллиптическом случае Ю. П. Красовским. В них не делается никаких ограничений на порядки граничных условий, рассматривается случай системы уравнений. Области, в которых рассматриваются граничные задачи, могут быть как ограниченными, так и неограниченными, цилиндрическими или нецилиндрическими. Результаты исследования матрицы

Грина методом интегральных операторов для случая параболической системы первого порядка по t и цилиндрической области излагаются в гл. 4 книги.

Отметим еще работы М. И. Матийчука [71—76], в которых строятся матрицы Грина задач Дирихле и задач с косой производной для параболических уравнений и систем второго порядка, а также задач для общих параболических систем с граничными операторами равного порядка в случае, когда коэффициенты этих задач принадлежат пространствам Дини и могут быть сингулярными. Построенные матрицы Грина используются для установления корректной разрешимости рассматриваемых задач в пространствах Дини.

Выше шла речь о применениях однородной матрицы Грина. Остановимся еще на работах, в которых применяются результаты изучения полной матрицы Грина параболических граничных задач.

В работах [37, 50] построена и изучена матрица Грина (в том числе установлены точные оценки ее производных, получено разложение ее элементов в сумму слагаемых с последовательно улучшаемыми свойствами) для общих эллиптических граничных задач, порожденных параболическими.

Исследованию корректной разрешимости в пространствах Гёльдера растущих функций общих граничных задач в неограниченных областях для параболических систем с ограниченными коэффициентами посвящены работы [34, 44, 49—51], а с растущими коэффициентами — [40].

В работах [39, 41, 49, 52] получено интегральное представление решений параболической граничной задачи без начальных условий и доказаны теоремы о ее корректной разрешимости в пространствах Гёльдера как ограниченных, так и растущих функций. Кроме того, установлен ряд теорем типа Лиувилля для рассматриваемой граничной задачи.

Работы [30, 32, 38, 48, 55] содержат результаты исследования корректной разрешимости параболических граничных задач в негативных пространствах Гёльдера.

Результаты и методика исследования матриц Грина параболических граничных задач, кроме того, использованы для: построения и изучения свойств матриц Грина параболических нелокальных граничных задач [19—22] и общих задач сопряжения [13—18]; доказательства существования и единственности решений некоторых задач автоматического управления [78]; получения оценок решений параболических граничных задач в весовых пространствах Гёльдера [4, 89]; исследования глобальных решений граничных задач с начальными условиями и без начальных условий для квазилинейиых параболических систем второго порядка [67]; получения представления решений общей параболической граничной задачи, принадлежащих пространству обобщенных функций D' [69]. В работе [120] указано на возможность применения матрицы Грина в теории оптимального управления процессами, описываемыми квазилинейными параболическими уравнениями и системами.

Глава 2

МАТРИЦА ГРИНА МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В главе рассматривается параболическая граничная задача в области Π_{+}^{T}, в которой система уравнений и граничные условия содержат лишь старшие в параболическом смысле члены, а их коэффициенты либо постоянны, либо зависят от некоторых параметров. Выясняется структура матрицы Грина такой задачи, и в случае задачи с параметрами изучается зависимость матрицы Грина от параметров. Затем излагается ряд необходимых для дальнейшего утверждений об ограниченном действии в пространствах Гёльдера операторов следующих типов:

1) интегральных операторов, ядрами которых являются элементы матрицы Грина задачи с параметрами, умноженные на срезающие функции;

2) произведений этих операторов и дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, входящих в систему уравнений и граничные условия;

3) специальных интегральных операторов, с помощью которых в гл. 4 будут строиться сопряженные операторы Грина общих граничных задач.

§ 4. СТРУКТУРА МАТРИЦЫ ГРИНА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1. Модельная задача с нулевыми начальными данными. Рассмотрим параболическую граничную задачу

$$
\begin{gathered}
A_0 u(t, x) = f_0(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{+}^{T}, \\
B_{j0} u(t, x)|_{x_n=0} = f_j(t, x'), \quad (t, x') \in \Pi_0^T, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \qquad (1) \\
u(t, x)|_{t=0} = f_{N+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}_{+}^{n},
\end{gathered}
$$

где A_0 и B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$,— те же дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами, что и в п. 3—5 § 2. Пусть m_j и n_j — наибольшие порядки производных по t и x_n в B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$, а m_0 и n_0 — числа (27) § 1.

В силу теоремы 4 § 2 всякое решение задачи (1) с $f_{N+1}=0$, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$, $l>l_0$, определяется формулой (31) § 2. Запишем эту формулу в другом виде. Для этого преобразуем выражение

$$v(t,x)\equiv\sum_{j=1}^{\nu}\mathcal{G}_j(C_jf_0|_{x_n=0})\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')C_j(D_\tau,D_\xi)f_0(\tau,\xi)|_{\xi_n=0}d\xi'.$$

Учитывая, что $C_j(D_\tau,D_\xi)=\sum\limits_{\nu=0}^{n_j-2b}C_{j\nu}(D_\tau,D_{\xi'})D_{\xi_n}^{\nu}$, где $C_{j\nu}(D_\tau,D_{\xi'})$ — дифференциальное выражение порядка $r_j-2b-\nu$, с помощью интегрирования по частям получаем равенство

$$v(t,x)=\sum_{\nu=0}^{n_0-2b}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}R_\nu(t-\tau,x-\xi')\times$$

$$\times D_{\xi_n}^{\nu}f_0(\tau,\xi)|_{\xi_n=0}d\xi',\tag{2}$$

в котором

$$R_\nu(t,x)\equiv\sum_{j=1}^{N}\theta(n_j-2b-\nu)(C'_{j\nu}(D_t,D_{x'})G'_j(t,x))',$$

$$0\leqslant\nu\leqslant n_0-2b,$$

где

$$\theta(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1, & y\geqslant 0.\end{cases}\tag{3}$$

Если положить

$$G_0^2(t,x-\xi',\xi_n)\equiv 2\sum_{\nu=0}^{n_0-2b}(-1)^\nu R_\nu(t,x-\xi')\delta_0^{(\nu)}(\xi_n),\tag{4}$$

где $\delta_0^{(\nu)}$ — производная порядка ν от дельта-функции, сосредоточенной в точке $\xi_n=0$, то

$$v(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}_+^n}G_0^2(t-\tau,x-\xi',\xi_n)f_0(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, формула (31) § 2 приобретает вид

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t-\tau, x-\xi', \xi_n) f_0(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') f_j(\tau, \xi')\, d\xi', \quad (t, x) \in \Pi_+^T, \tag{5}$$

где $G_0 \equiv G_0^1 + G_0^2$. Заметим, что $G_0^2 = 0$, если $n_0 < 2b$.

2. Общий случай модельной задачи. Пусть u — решение задачи (1) из пространства $H^{2b+l}(\Pi_+^T)$, $l > l_0$. Получим его представление в интегральной форме.

Возьмем бесконечно дифференцируемую функцию $\eta: [0, \infty) \to [0, 1]$, равную нулю на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и единице на $[1, \infty)$ и положим $u_h(t, x) \equiv \eta_h(t) u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{\Pi}_+^T$, где $\eta_h(t) \equiv \eta\left(\frac{t}{h}\right)$, $0 < h < T$. Очевидно, что $u_h \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+l}(\Pi_+^T)$ и

$$A_0 u_h = \eta_h f_0 + \eta_h' u \equiv F_{0h}, \quad u_h|_{t=0} = 0,$$

$$B_{j0} u_h|_{x_n=0} = \eta_h f_j + (B_{j0}(\eta_h u) - \eta_h B_{j0} u)|_{x_n=0} \equiv F_{jh},$$

$$1 \leqslant j \leqslant N.$$

Поэтому в силу теоремы 4 § 2 справедливо представление

$$u_h = \mathcal{G}_0^1 F_{0h} + \sum_{j=1}^{N} \mathcal{G}_j (F_{jh} + C_j F_{0h}|_{x_n=0}). \tag{6}$$

Считая точку $(t, x) \in \Pi_+^T$ фиксированной, а $h \in (0, t)$, перейдем в (6) к пределу при $h \to 0$. При этом слева получим $u(t, x)$. Найдем предел правой части.

Имеем при $h \to 0$

$$\mathcal{G}_0^1(\eta_h f_0) = \mathcal{G}_0^1 f_0 +$$

$$+ \int_0^h d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n)(\eta_h(\tau) - 1) f_0(\tau, \xi)\, d\xi \to \mathcal{G}_0^1 f_0. \tag{7}$$

Аналогично

$$\mathcal{G}_j(\eta_h f_j) \to \mathcal{G}_j f_j, \quad h \to 0, \ 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{8}$$

Учитывая свойства η_h и G_0^1 и интегрируя по частям, получаем

$$\mathcal{G}_0^1(\eta_h' u) = \int\limits_{h/2}^{h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n)\,\eta_h(\tau)\,u(\tau, \xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^1(t-h, x-\xi', \xi_n)\,u(h, \xi)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{h/2}^{h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} D_\tau^1(G_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n)\,u(\tau, \xi))\,\eta_h(\tau)\,d\xi \to$$

$$\to \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} G_0^1(t, x-\xi', \xi_n)\,f_{N+1}(\xi)\,d\xi, \quad h\to 0. \tag{9}$$

Для $v_h \equiv \sum\limits_{j=1}^{N} \mathcal{G}_j(B_{j0}(\eta_h u) - \eta_h B_{j0}u)|_{x_n=0}$ имеем

$$v_h = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{h/2}^{h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi')\,(B_{j0}(\eta_h u) -$$

$$-\eta_h B_{j0}u)(\tau, \xi)|_{\xi_n=0}\,d\xi'. \tag{10}$$

Запишем выражения B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$, в виде

$$B_{j0}(D_\tau, D_\xi) = \sum_{\eta=0}^{m_j} \sum_{\nu=0}^{\bar{n}_j} \beta_{j\eta\nu}(D_{\xi'})\,D_{\xi_n}^{\nu} D_\tau^{m_j-\eta},$$

$$\bar{n}_j \equiv \min\{n_j,\ r_j - 2b(m_j-\eta)\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

тогда

$$B_{j0}(\eta_h u) - \eta_h B_{j0}u =$$

$$= \sum_{\eta=0}^{m_j-1} \sum_{\mu=1}^{m_j-\eta} \sum_{\nu=0}^{\bar{n}_j} C_{m_j-\eta}^{\mu}\,\beta_{j\eta\nu}(D_{\xi'})\,D_{\xi_n}^{\nu} D_\tau^{m_j-\eta-\mu} u D_\tau^{\mu}\eta_h,$$

$$1 \leqslant j \leqslant N,$$

где $C_\alpha^\mu \equiv \dfrac{\alpha!}{\mu!\,(\alpha-\mu)!}$. Проинтегрируем (10) по частям по τ и ξ' столько раз, чтобы не осталось производных при η_h по τ и при u по ξ'. Затем перейдем к пределу при

$h \to 0$. Использовав свойства η_h и G_j, получим

$$\lim_{h\to 0} v_h = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\eta=0}^{m_j-1} \sum_{\mu=0}^{m_j-\eta-1} \sum_{\nu=0}^{\bar{n}_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\beta'_{j\eta\nu}(D_{x'}) D_t^{m_j-\eta-\mu-1} \times$$
$$\times G'_j(t, x-\xi'))' D_\tau^\mu D_{\xi_n}^\nu u(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=0\\ \xi_n=0}} d\xi' \equiv L. \qquad (11)$$

Если $m_j = 0$ для некоторого j, то соответствующий этому индексу член в (11) отсутствует.

Если обозначить

$$M_{\mu\nu}(t, x) \equiv \sum_{j=1}^{N} \sum_{\eta=0}^{m_j-\mu-1} \theta(m_j-\mu-1)\,\theta(\bar{n}_j-\nu) \times$$
$$\times (\beta'_{j\eta\nu}(D_{x'}) D_t^{m_j-\mu-\eta-1} G'_j(t, x))',$$

где θ — функция (3), то выражение L из (11) можно записать в виде

$$L = \sum_{\mu=0}^{m_0-1} \sum_{\nu=0}^{r_1-2b(\mu+1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} M_{\mu\nu}(t, x-\xi') D_\tau^\mu D_{\xi_n}^\nu u(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=0\\ \xi_n=0}} d\xi'.$$

Выразим $D_\tau^\mu u|_{\tau=0}$, $0 \leqslant \mu \leqslant m_0 - 1$, через правые части задачи (1). Поскольку $u|_{\tau=0} = f_{N+1}$, то при $m_0 = 1$

$$L = \sum_{\nu=0}^{r_1-2b} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} M_{0\nu}(t, x-\xi') D_{\xi_n}^\nu f_{N+1}(\xi)|_{\xi_n=0} d\xi',$$

а при $m_0 > 1$

$$L = \sum_{\nu=0}^{r_1-2b} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} M_{0\nu}(t, x-\xi') D_{\xi_n}^\nu f_{N+1}(\xi)|_{\xi_n=0} d\xi' +$$
$$+ \sum_{\eta=0}^{m_0-2} \sum_{\zeta=0}^{r_1-2b(\eta+2)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} M_{\eta+1,\zeta}(t, x-\xi') \times$$
$$\times D_\tau^{\eta+1} D_{\xi_n}^\zeta u(\tau, \xi)\Big|_{\substack{\tau=0\\ \xi_n=0}} d\xi'. \qquad (12)$$

Воспользовавшись системой и начальным условием задачи (1), получим выражение

$$D_\tau^{\eta+1} u(\tau, \xi)|_{\tau=0} = \sum_{\nu=0}^{2b(\eta+1)} \lambda_{\eta\nu}(D_{\xi'}) D_{\xi_n}^\nu f_{N+1}(\xi) +$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{\eta} \sum_{\nu=0}^{2b(\eta-\mu)} \omega_{\eta\mu\nu}(D_{\xi'}) D_\tau^\mu D_{\xi_n}^\nu f_0(\tau, \xi)|_{\tau=0}, \qquad (13)$$

в котором $\lambda_{\eta\nu}$ и $\omega_{\eta\mu\nu}$ — дифференциальные выражения порядков $2b(\eta+1)-\nu$ и $2b(\eta-\mu)-\nu$ соответственно. Подставляя выражение (13) в (12), интегрируя по частям и меняя порядки суммирования, приходим к равенству

$$L=\sum_{\nu=0}^{r_1-2b}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} V_\nu(t,\ x-\xi')\,D^{\nu}_{\xi_n} f_{N+1}(\xi)\,|_{\xi_n=0}\,d\xi' +$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m_0-2}\ \sum_{\nu=0}^{r_1-2b(\mu+2)}\ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} W_{\mu\nu}(t,\ x-\xi')\,D^{\mu}_{\tau}D^{\nu}_{\xi_n}\times$$

$$\times f_0(\tau,\ \xi)\Big|_{\substack{\tau=0\\ \xi_n=0}} d\xi', \qquad (14)$$

в котором

$$V_\nu(t,\ x)\equiv M_{0\nu}(t,\ x)+$$

$$+\sum_{\eta=0}^{m_0-2}\ \sum_{\zeta=\max\{0,\nu+2b(\eta+2)-r_1\}}^{\min\{\nu,2b(\eta+1)\}} (\lambda_{\eta\zeta}(D_{x'})\,M'_{\eta+1,\nu-\zeta}(t,\ x))',$$

$$W_{\mu\nu}(t,\ x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{\eta=\mu}^{m_0-2}\ \sum_{\zeta=\max\{0,2b(\eta+2)+\nu-r_1\}}^{\min\{\nu,2b(\eta-\mu)\}} (\omega'_{\eta\mu\zeta}(D_{x'})\,M'_{\eta+1,\nu-\zeta}(t,\ x))'.$$

Если для $m_0=1$ положить $V_\nu(t,\ x-\xi')\equiv M_{0\nu}(t,\ x-\xi')$, $W_{\mu\nu}(t,x-\xi')\equiv 0$, то можно считать, что (14) справедливо для любого $m_0\geqslant 1$.

Найдем, наконец, предел выражения $\omega_h\equiv\sum\limits_{j=1}^{N}\mathcal{G}_j\times\times(C_jF_{0h}\,|_{x_n=0})$. Вначале его преобразуем к виду (2), затем, используя выражение для F_{0h}, представим следующим образом:

$$\omega_h=\sum_{\nu=0}^{n_0-2b}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t-\tau,\ x-\xi')\,\eta_h(\tau)\times$$

$$\times D^{\nu}_{\xi_n} f_0(\tau,\ \xi)\,|_{\xi_n=0}\,d\xi' +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n_0-2b}\int\limits_{h/2}^{h} d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t-\tau,\ x-\xi')\,\eta'_h(\tau)\,D^{\nu}_{\xi_n}\times$$

$$\times u(\tau,\ \xi)\,|_{\xi_n=0}\,d\xi'\equiv\omega_h^{(1)}+\omega_h^{(2)}. \qquad (15)$$

Для первого слагаемого, очевидно, имеем

$$\lim_{h\to 0} w_h^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n_0-2b} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t-\tau,\ x-\xi') \times$$
$$\times D^\nu_{\xi_n} f_0(\tau,\ \xi)|_{\xi_n=0}\, d\xi'. \qquad (16)$$

Предел второго слагаемого находится так же, как предел $\mathcal{G}_0^{l}(\eta_h' u)$, поэтому

$$\lim_{h\to 0} w_h^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n_0-2b} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t,\ x-\xi')\, D^\nu_{\xi_n} f_{N+1}(\xi)|_{\xi_n=0}\, d\xi'. \quad (17)$$

Из равенств (6) — (9), (11), (14) — (17) следует представление

$$u(t,\ x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0^1(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n)\, f_0(\tau,\ \xi)\, d\xi +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n_0-2b} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t-\tau,\ x-\xi')\, D^\nu_{\xi_n} f_0(\tau,\ \xi)|_{\xi_n=0}\, d\xi' +$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{m_0-2} \sum_{\nu=0}^{r_1-2b(\mu+2)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} W_{\mu\nu}(t,\ x-\xi')\, D^\mu_\tau D^\nu_{\xi_n} f_0 \times$$
$$\times (\tau,\ \xi)\Big|_{\substack{\tau=0\\ \xi_n=0}} d\xi' +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau,\ x-\xi')\, f_j(\tau,\ \xi')\, d\xi' +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0^1(t,\ x-\xi',\ \xi_n)\, f_{N+1}(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{n_0-2b} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_\nu(t,\ x-\xi')\, D^\nu_{\xi_n} f_{N+1}(\xi)|_{\xi_n=0}\, d\xi' +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{r_1-2b} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} V_\nu(t,\ x-\xi')\, D^\nu_{\xi_n} f_{N+1}(\xi)|_{\xi_n=0}\, d\xi', \quad (t,x)\in \Pi^T_+.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$u(t,\ x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, f_0(\tau,\ \xi)\, d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_j(t-\tau,\ x-\xi')\, f_j(\tau,\ \xi')\, d\xi' +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n_+} G_{N+1}(t,\ x;\ \xi)\, f_{N+1}(\tau,\ \xi)\, d\xi, \quad (t,\ x)\in \Pi^T_+$$

где

$$\begin{aligned} G_0(t,\ x;\ \tau,\ \xi) &\equiv G_0^1(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n) + \\ &+ G_0^2(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n) + \\ &+ G_0^3(t,\ \tau,\ x-\xi',\ \xi_n),\quad G_{N+1}(t,\ x;\ \xi) \equiv \\ &\equiv G_0^1(t,\ x-\xi',\ \xi_n) + G_0^2(t,\ x-\xi',\ \xi_n) + \\ &+ G_{N+1}^1(t,\ x-\xi',\ \xi_n). \end{aligned} \tag{18}$$

Матрица G_0^2 определяется равенством (4), а матрицы G_0^3 и G_{N+1}^1 — соответственно формулами

$$G_0^3(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv$$

$$\equiv 4\sum_{\mu=0}^{m_0-2}\ \sum_{\nu=0}^{r_1-2b(\mu+2)} (-1)^{\mu+\nu}\, W_{\mu\nu}(t,\ x-\xi')\, \delta_0^{(\mu)}(\tau)\, \delta_0^{(\nu)}(\xi_n),$$

$$G_{N+1}^1(t,\ x-\xi',\ \xi_n) \equiv$$

$$\equiv 2\sum_{\nu=0}^{r_1-2b} (-1)^{\nu}\, V_\nu(t,\ x-\xi')\, \delta_0^{(\nu)}(\xi_n).$$

Таким образом, матрицей Грина задачи (1) является матрица $(G_0,\ \ldots,\ G_{N+1})$, где G_j, $1\leqslant j\leqslant N$,— ядра Пуассона этой задачи, а G_0 и G_{N+1} определяются формулами (18), причем G_0^2, G_0^3 и G_{N+1}^1 равны нулю, если соответственно $n_0<2b$, $m_0\leqslant 1$ и $m_0=0$. Следовательно, если нормальные порядки всех выражений B_{j0}, $1\leqslant j\leqslant N$, меньше порядка $2b$ выражения A_0, то все элементы матрицы Грина суть обычные функции. В этом случае $G_0=G_0^1$, $G_{N+1}=G_0^1$, где G_0^1 — однородная матрица Грина задачи (1).

§ 5. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ ГРИНА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОЙ ЗАВИСЯТ ОТ ПАРАМЕТРОВ

1. Дифференциальные свойства матрицы Грина по параметрам. Пусть коэффициенты выражений A_0 и B_{j0} зависят от некоторых параметров, а именно: $a_{k'}=$

$= a_k(\beta, y)$, $|k| = 2b$, $b_{j\bar{k}} = b_{j\bar{k}}(\beta, y')$, $|\bar{k}| = r_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, где точка $(\beta, y) \equiv (\beta, y', y_n)$ принадлежит некоторому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, при этом $(\beta, y') \in \Omega'$. Рассмотрим граничную задачу

$$A_0(\beta, y, D_t, D_x)\, u(t, x) = f_0(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_+^T,$$
$$B_{j0}(\beta, y', D_t, D_x)\, u(t, x)|_{x_n=0} = f_j(t, x'),$$
$$(t, x') \in \Pi_0^T, \tag{1}$$
$$1 \leqslant j \leqslant N, \quad u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Будем предполагать выполненными условия параболичности и дополнительности для каждой точки $(\beta, y) \in \Omega$ с постоянными $\delta(\beta, y)$ и $\delta'(\beta, y)$ соответственно, причем будем считать, что для всех $(\beta, y) \in \Omega$ $\delta(\beta, y) \geqslant \delta > 0$ и $\delta'(\beta, y) \geqslant \delta' > 0$. В этом параграфе рассмотрим лишь случай, когда $n_0 < 2b$.

Обозначим через $Z_0(t, x; \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi^\infty$, фундаментальную матрицу решений задачи Коши для системы

$$A_0(\beta, y, D_t, D_x)\, u = 0, \tag{2}$$

через $G_0^1(t, x - \xi', \xi_n; \beta, y)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$,— однородную матрицу Грина, а через $G_j(t, x; \beta, y)$, $t > 0$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, $1 \leqslant j \leqslant N$,— ядра Пуассона задачи (1) Исследуем дифференциальные свойства этих матриц как функций параметров. Поскольку матрица Грина задачи, как выяснено в § 4, полностью определяется однородной матрицей Грина и ядрами Пуассона, то тем самым будут исследованы соответствующие свойства матрицы Грина задачи (1).

Как доказано в [98], свойства коэффициентов системы (2) по параметрам непосредственно переносятся на фундаментальную матрицу решений, поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если коэффициенты системы* (2) *принадлежат пространству* $H^l(\Omega)$ *с нецелым* $l > 0$, *то существуют производные* $D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} Z_0(t, x; \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi^\infty$, $(\beta, y) \in \Omega$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $|\bar{m}| \leqslant [l]$, *для которых справедливы оценки*

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} Z_0(t, x; \beta, y)| \leqslant C_{\bar{k}} t^{-\frac{n+|\bar{k}|}{2b}} E_c(t, |x|), \; |\bar{m}| \leqslant [l],$$

$$|\Delta_y^{y+h} D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} Z_0(t, x; \beta; y)| \leqslant C_{\bar{k}} |h|^{l-[l]} t^{-\frac{n+|\bar{k}|}{2b}} \times$$
$$\times E_c(t, |x|), \ |\bar{m}| = [l], \tag{3}$$
$$|\Delta_\beta^{\beta+h} D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} Z_0(t, x; \beta, y)| \leqslant$$
$$\leqslant C_{\bar{k}} |h|^{\frac{l-|\bar{m}|}{2b}} t^{-\frac{n+|\bar{k}|}{2b}} E_c(t, |x|), \ 0 < l - |\bar{m}| < 2b,$$

где $(t, x) \in \Pi^\infty$, $\{(\beta, y), \ (\beta, y+h), \ (\beta+h, y)\} \subset \Omega$, $C_{\bar{k}} > 0$, $c > 0$.

Чтобы исследовать свойства ядер G_j, а также связанных с ними равенствами (20) § 2 ядер G_j^r, $1 \leqslant j \leqslant N$, $r > 0$, для задачи (1), рассмотрим вначале ядра $\tilde{G}_j^r$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $r \geqslant 0$, для задачи (1) § 4 без параметров и выясним зависимость их от коэффициентов выражений A_0 и B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$. Для этого перенумеруем все эти коэффициенты и обозначим их через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, а всю их совокупность через Λ. Для обозначения зависимости A_0, B_{j0} и $\tilde{G}_j^r$ от Λ будем писать $A_0^{(\Lambda)}$, $B_{j0}^{(\Lambda)}$ и $\tilde{G}_j^r(\cdot; \Lambda)$. Введем постоянную $\Delta(\Lambda) \equiv |\Lambda| + (\delta(\Lambda))^{-1} + (\delta'(\Lambda))^{-1}$, где $\delta(\Lambda)$ и $\delta'(\Lambda)$ — постоянные из условий параболичности и дополнительности.

Лемма 2. *Пусть выражения* $A_0^{(\Lambda^0)}$ *и* $B_{j0}^{(\Lambda^0)}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *удовлетворяют условиям параболичности и дополнительности с постоянной* $\Delta(\Lambda^0)$. *Тогда для* $(t, x) \in \Pi_+^\infty$ *ядра* $\tilde{G}_j^r(t, x; \Lambda)$, $r \geqslant 0$, $\tilde{G}_j^0 \equiv \tilde{G}_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *являются аналитическими функциями от* Λ *при* $|\lambda_i - \lambda_i^0| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant s$, *где* ε *зависит от* $\Delta(\Lambda^0)$, *и для них справедливы оценки*

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_\Lambda^m \tilde{G}_j^r(t, x; \Lambda)| \leqslant C_{\bar{k}m} t^{r-1-\frac{n-r_j-1+|\bar{k}|}{2b}} E_c(t, |x|),$$
$$\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \ m \in \mathbb{Z}_+^s. \tag{4}$$

◀ Сначала заметим, что если $A_0^{(\Lambda^0)}$ и $B_{j0}^{(\Lambda^0)}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют условиям параболичности и дополнительности с постоянными $\delta(\Lambda^0)$ и $\delta'(\Lambda^0)$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, зависящее от $\Delta(\Lambda^0)$, что при $|\lambda_i - \lambda_i^0| \leqslant \varepsilon_0$, $1 \leqslant i \leqslant s$, выражения $A_0^{(\Lambda)}$ и $B_{j0}^{(\Lambda)}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют условиям параболичности и дополнительности с постоянными δ и δ', где $0 < \delta < \delta(\Lambda^0)$, $0 < \delta' < \delta'(\Lambda^0)$, равномерно по Λ.

Чтобы доказать аналитичность ядер $\tilde{G}_j^r$ по Λ, нужно воспользоваться явным выражением (см. [85])

$$\tilde{G}_j^r(t, x; \Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x',\zeta)} d\zeta \times$$
$$\times \int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{pt} \frac{Q_j(p, \zeta, x_n; \Lambda)}{(p+|\zeta|^{2b})^r} dp. \tag{5}$$

Если проследить зависимость Q_j от Λ, то можно установить, что Q_j и их производные по x_n аналитически зависят от Λ и их оценки, доказанные в [85], равномерны по Λ при $|\lambda_i - \lambda_i^0| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant s$, с некоторым $\varepsilon > 0$. Отсюда следуют равномерная по Λ сходимость интегралов (5) и аналитичность по Λ ядер $\tilde{G}_j^r$. Нетрудно усмотреть при этом, что аналитическими для тех же Λ будут и производные $D_{t,x}^{\bar{k}} \tilde{G}_j^r$.

Чтобы получить оценки (4) для $D_\Lambda^{\bar{m}}(D_{t,x}^{\bar{k}} \tilde{G}_j^r)$, воспользуемся тем, что эти производные в центре круга, лежащего в области аналитичности, выражаются через интегралы по границе круга от производных $D_{t,x}^{\bar{k}} \tilde{G}_j^r$, для которых справедливы оценки (21) § 2. ▶

Поскольку $G_j^r(t, x; \beta, y) = \tilde{G}_j^r(t, x; \Lambda(\beta, y))$, то из леммы 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Если коэффициенты выражений A_0 и B_{j0}, $1 \leqslant j \leqslant N$, из (1) принадлежат соответственно пространствам $H^l(\Omega)$ и $H^l(\Omega')$, $l > 0$, то существуют производные $D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} G_j^r(t, x; \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi_+^\infty$, $(\beta, y) \in \Omega$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $|\bar{m}| \leqslant [l]$, $r \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, которые подчиняются неравенствам*

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} G_j^r(t, x; \beta, y)| \leqslant C_{\bar{k}} t^{r-1-\frac{n-r_j-1+|\bar{k}|}{2b}} E_c(t, |x|),$$
$$|\bar{m}| \leqslant [l],$$
$$|\Delta_y^{y+h} D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\beta,y}^{\bar{m}} G_j^r(t, x; \beta, y)| \leqslant C_{\bar{k}} |h|^{l-[l]} t^{r-1-\frac{n-r_j-1+|\bar{k}|}{2b}} \times$$
$$\times E_c(t, |x|), \ |\bar{m}| = [l], \tag{6}$$

$$|\Delta_\beta^{\beta+h} D_{t,x}^{\overline{k}} D_{\beta,y}^{\overline{m}} G_j^r(t, x; \beta, y)| \leqslant C_{\overline{k}} |h|^{\frac{l-|\overline{m}|}{2b}} t^{r-1-\frac{n-r_j-1+|\overline{k}|}{2b}} \times$$

$$\times E_c(t, |x|), \quad 0 < l - |\overline{m}| < 2b, \tag{6}$$

где $(t, x) \in \Pi_+^\infty$, $\{(\beta, y), (\beta, y+h), (\beta+h, y)\} \subset \Omega$, $C_{\overline{k}} > 0$, $c > 0$.

Рассмотрим теперь матрицу G_0^1. В силу теоремы 3 § 2 имеем

$$G_0^1(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y) =$$

$$= (D_t^1 + a(-\Delta_{x'})^b)^r G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y), \tag{7}$$

$$G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y) =$$

$$= Z_0^r(t, x-\xi; \beta, y) - V_0^r(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y). \tag{8}$$

Используя леммы 1 и 3 и повторяя доказательство теоремы 3 § 2, приходим к следующим результатам.

Лемма 4. *При предположениях леммы 3 существуют производные* $D_{t,x}^{\overline{k}} D_{\xi_n}^p D_{\beta,y}^{\overline{m}} G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$, $(\beta, y) \subset \Omega$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $p \in \mathbb{Z}_+^1$, $|\overline{m}| \leqslant [l]$, $r \geqslant 0$, $G_0^{10} \equiv G_0^1$, *для которых справедливы оценки*

$$|D_{t,x}^{\overline{k}} D_{\xi_n}^p D_{\beta,y}^{\overline{m}} G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y)| \leqslant C_{\overline{k}p} t^{r-\frac{n+|\overline{k}|+p}{2b}} \times$$

$$\times E_c(t, |x-\xi|), \quad |\overline{m}| \leqslant [l],$$

$$|\Delta_y^{y+h} D_{t,x}^{\overline{k}} D_{\xi_n}^p D_{\beta,y}^{\overline{m}} G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\overline{k}p} |h|^{l-[l]} t^{r-\frac{n+|\overline{k}|+p}{2b}} E_c(t, |x-\xi|), \quad |\overline{m}| = [l], \tag{9}$$

$$|\Delta_\beta^{\beta+h} D_{t,x}^{\overline{k}} D_{\xi_n}^p D_{\beta,y}^{\overline{m}} G_0^{1r}(t, x-\xi', \xi_n; \beta, y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\overline{k}p} |h|^{\frac{l-|\overline{m}|}{2b}} t^{r-\frac{n+|\overline{k}|+p}{2b}} E_c(t, |x-\xi|), \quad 0 < l - |\overline{m}| < 2b,$$

где $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$, $\{(\beta, y), (\beta, y+h), (\beta+h, y)\} \subset \Omega$, $C_{\overline{k}p} > 0$, $c > 0$. *При этом для матрицы* V_0^r *имеют место оценки, получающиеся из оценок* (9), *если в них* $|x-\xi|$ *заменить на* $|x-\xi| + \xi_n$.

Для матрицы G_0^{1r} *выполняются граничные условия* (28) § 2.

2. Свойства операторов Грина модельной задачи. Приведем леммы об ограниченном действии в пространствах Гёльдера интегральных операторов, ядрами которых являются умноженные на срезающие функции фундаментальная матрица решений задачи Коши для системы (2), однородная матрица Грина и ядра Пуассона задачи (1). Такие операторы называем *операторами Грина*. Кроме того, рассмотрим свойства операторов, являющихся произведениями операторов $A_0(t, x, D_t, D_x)$, $B_{j0}(t, x', D_t, D_x)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, и операторов Грина.

Будем использовать следующие обозначения:

$$K_\nu^+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant \nu d,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 0 \leqslant x_n \leqslant 2\nu d\},$$

$$K_\nu^- \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant \nu d, 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ -2\nu d \leqslant x_n \leqslant 0\},$$

$$K_\nu \equiv K_\nu^+ \cup K_\nu^-, K_\nu' \equiv \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x_i| \leqslant \nu d,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\},$$

$$P_\nu^\pm \equiv \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [0, T],\ x \in K_\nu^\pm\},\ P_\nu \equiv P_\nu^+ \cup P_\nu^-,$$

$$P_\nu' \equiv \{(t, x') \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, T],\ x' \in K_\nu'\},\ \nu = 1,\ 2,$$

где $d > 0$ и $T > 0$ — заданные числа;

$Z_0(t, x; \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi^\infty$, — фундаментальная матрица решений задачи Коши для системы (2), коэффициенты которой принадлежат $H^l(P_2)$;

$G_0^1(t, x-\xi', \xi_n, \beta, y)$, $t > 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$, — однородная матрица Грина задачи (1), в которой коэффициенты выражений $A_0(\beta, y, D_t, D_x)$ и $B_{j0}(\beta, y', D_t, D_x)$ принадлежат соответственно пространствам $H^l(P_2)$ и $H^{2b-r_j+l}(P_2')$, $1 \leqslant j \leqslant N$;

$G_j(t, x; \beta, y')$, $t > 0$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, $1 \leqslant j \leqslant N$, — ядра Пуассона задачи (1), в которой коэффициенты выражений $A_0(\beta, y', D_t, D_x)$ и $B_{j0}(\beta, y', D_t, D_x)$ принадлежат соответственно $H^l(P_2')$ и $H^{2b-r_j+l}(P_2')$, $1 \leqslant j \leqslant N$, где $l > 0$ — достаточно большое нецелое число.

Будем рассматривать операторы

$$\mathcal{Z}_0 : f \mapsto \int_0^t d\tau \int_{K_1} Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\, \zeta(\xi) f(\tau,\ \xi)\, d\xi,$$

$$(t,\ x) \in P_2,$$

$$\mathcal{G}_0^1 : f \mapsto \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} G_0^1(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\ \zeta(\xi) f(\tau, \xi)\, d\xi,$$

$$(t,\ x)\in P_2^+, \tag{10}$$

$$\mathcal{G}_j : f \mapsto \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1'} G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \tau,\ \xi')\,\zeta(\xi',\ 0)\,f(\tau,\ \xi')\,d\xi',$$

$$(t,\ x)\in P_2^+,\ 1\leqslant j\leqslant N,$$

а также операторы

$$\zeta I_m - A_0\mathcal{Z}_0,\ \zeta I_m - A_0\mathcal{G}_0^1,\ \zeta I_1 - B_{j0}\mathcal{G}_j,\ A_0\mathcal{G}_j,$$

$$B_{j0}\mathcal{G}_0^1,\ B_{i0}\mathcal{G}_j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant N,\ i\neq j, \tag{11}$$

где $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю в $\mathbb{R}^n\setminus K_1$, а

$$A_0\mathcal{K} : f \mapsto A_0(t,\ x,\ D_t,\ D_x)(\mathcal{K}f),$$

$$B_{j0}\mathcal{K} : f \mapsto B_{j0}(t,\ x',\ D_t,\ D_x)(\mathcal{K}f)\,|_{x_n=0}.$$

Для дифференциального выражения $L(t,\ x,\ D_t,\ D_x)$ будем использовать обозначение

$$\Delta_{t,x}^{\tau,\xi}L(t,\ x,\ D_t,\ D_x)\equiv L(t,\ x,\ D_t,\ D_x) - L(\tau,\ \xi,\ D_t,\ D_x). \tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha\in(0,\ 1)$. *Для любых* $f\in \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(P_2)$ *имеют место равенства*

$$(A_0\mathcal{Z}_0)f(t,\ x) = (\zeta f)(t,\ x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1} \Delta_{t,x}^{\tau,\xi}A_0(t,\ x,\ D_t,\ D_x)\times$$

$$\times Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)(\zeta f)(\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad (t,\ x)\in P_2, \tag{13}$$

$$(A_0\mathcal{G}_0^1)f(t,\ x) = (\zeta f)(t,\ x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1^+} \Delta_{t,x}^{\tau,\xi}A_0(t,\ x,\ D_t,\ D_x)\times$$

$$\times G_0^1(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)(\zeta f)(\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad (t,\ x)\in P_2^+, \tag{14}$$

а для любых $f\in \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(P_2')$ — *равенства*

$$(B_{j0}\mathcal{G}_j)f(t,x') = (\zeta f)(t,x') + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1'} \Delta_{t,x'}^{\tau,\xi'}B_{j0}(t,x',D_t,D_x)\times$$

$$\times G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \tau,\ \xi')\,|_{x_n=0}(\zeta f)(\tau,\ \xi')\,d\xi',$$

$$(t,\ x')\in P_2',\ 1\leqslant j\leqslant N. \tag{15}$$

◀ Равенства (13) и (14) доказываются аналогично, поэтому докажем только (14). Пусть $P_{2\varepsilon}^{+} \equiv \{(t, x) \in \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varepsilon \leqslant t \leqslant T, |x_i| \leqslant 2d, 1 \leqslant i \leqslant n-1, \varepsilon \leqslant x_n \leqslant 4d\}$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, $0 < h < \varepsilon$ и

$$u_h(t, x) \equiv \int_0^{t-h} d\tau \int_{K_1^+} G_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi)(\zeta f)(\tau, \xi)\, d\xi,$$

$$(t, x) \in P_{2\varepsilon}^{+}.$$

Очевидно, что

$$(\mathcal{G}_0^1 f)(t, x) = \lim_{h\to 0} u_h(t, x), \quad (t, x) \in P_{2\varepsilon}^{+}. \tag{16}$$

Так как $A_0(\tau, \xi, D_t, D_x)\, G_0^{\mathrm{I}}(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi) = 0$ при $t > \tau$, то

$$A_0(t, x, D_t, D_x)\, u_h(t, x) = \int_0^{t-h} d\tau \int_{K_1^+} \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} A_0(t, x, D_t, D_x) \times$$

$$\times G_0^{\mathrm{I}}(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi)(\zeta f)(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{K_1^+} G_0^{\mathrm{I}}(h, x-\xi', \xi_n; t-h, \xi)(\zeta f)(t-h, \xi)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv J_h'(t, x) + J_h''(t, x), \quad (t, x) \in P_{2\varepsilon}^{+}. \tag{17}$$

Из условия Гёльдера для коэффициентов A_0 и оценок (9) следует, что равномерно на $P_{2\varepsilon}^{+}$

$$J_h' \to J_h'|_{h=0}, \quad h \to 0. \tag{18}$$

На основании формулы (8) для $r = 0$, оценок (3), (9) и равенства (16) § 2 для $Z_0(t, x; \beta, y)$ легко убедиться, что равномерно на $P_{2\varepsilon}^{+}$

$$J_h'' \to \zeta f, \quad h \to 0. \tag{19}$$

Из (16) — (19) следует равенство (14) для $(t, x) \in P_{2\varepsilon}^{+}$, а отсюда в силу произвольности ε, и для $(t, x) \in P_2^{+}$.

Для доказательства (15) запишем для $(t, x) \in P_2^{+}$, $x_n > 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, равенства

$$B_{j0}(t, x', D_t, D_x)(\mathcal{G}_j f)(t, x) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{K_1'} B_{j0}(t, x', D_t, D_x)(G_j(t-\tau, x-\xi'; \tau, \xi') -$$

$$-G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \beta,\ y'))\Big|_{\substack{\beta=t\\ y'=x'}}(\zeta f)(\tau,\ \xi')\,d\xi'+$$

$$+B_{j0}(\rho,\ y',\ D_t,\ D_x)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_1'} G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \beta,\ y')\times$$

$$\times(\zeta f)(\tau,\ \xi')\,d\xi'\Big|_{\substack{\beta=t\\ y'=x'}}.$$

В силу оценок (6) в первом слагаемом можно перейти к пределу при $x_n\to 0$ под знаком интеграла, а предел при $x_n\to 0$ второго слагаемого равен $(\zeta\ f)\ (t,\ x')$ на основании свойств ядер Пуассона. Остается заметить, что предел при $x_n\to 0$ подынтегрального выражения первого слагаемого равен подынтегральному выражению из (15), так как

$$B_{j0}(t,\ x',\ D_t,\ D_x)\,G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \beta,\ y')\Big|_{\substack{\beta=t,y'=x'\\ x_n=0}}=$$

$$=B_{j0}(\tau,\ \xi',\ D_t,\ D_x)\,G_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \tau,\ \xi')\big|_{x_n=0}.\quad\blacktriangleright$$

Исследуем действие операторов (10) и (11) в пространствах Гёльдера. Доказательства следующих ниже лемм достаточно громоздкие, в них используется методика оценок, развитая при исследовании свойств параболических потенциалов (см. [98, 27, 85, 68], а также доказательства неравенств (22) и (30) § 2). Леммы 6—12 доказаны в работе [47] для более общей, чем (1), задачи: модельной граничной задачи для параболической системы уравнений произвольного порядка по t. Здесь остановимся лишь на доказательстве леммы 6 и частично лемм 7 и 9. Во всех последующих леммах этого параграфа s обозначает любое нецелое число, удовлетворяющее указанным в этих леммах неравенствам.

Лемма 6. *Оператор* $\mathcal{K}_0$ *ограниченно действует из* $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2)$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}(P_2)$, $0<s\leqslant l$.

◀ Пусть $u\equiv\mathcal{K}_0 f$. Заметим, что достаточно рассмотреть случай $0<s<1$. Действительно, если в интеграле $\mathcal{K}_0 f$ сделаем замену переменных интегрирования с помощью формул $t-\tau=\beta$, $x-\xi=y$, продифференцируем его до порядка $[s]$ и вернемся к прежним переменным интегрирования, то в результате $D_{t,x}^{\bar k}u$, $|\,\bar k\,|\leqslant[s]$, представим в виде линейной комбинации интегралов

$$\int_0^t d\tau \int_{K_1} \tilde{D}^{\bar{m}}_{\tau,\xi} Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\, D^{\bar{k}-\bar{m}}_{\tau,\xi}(\zeta f)(\tau,\ \xi)\, d\xi,$$

$$\bar{m} \leqslant \bar{k}.$$

Здесь и далее $\tilde{D}^{\bar{m}}_{\tau,\xi}$ обозначает дифференцирование по τ и ξ только из последних двух аргументов соответствующей функции. Эти интегралы изучаются так же, как интеграл $\mathscr{Z}_0 f$ при $0 < s < 1$.

Чтобы убедиться в справедливости леммы при $0 < s < 1$, достаточно в предположении, что $f \in \overset{\circ}{H}{}^s(P_2)$, доказать существование производных $D^{\bar{k}}_{t,x}u$, $|\bar{k}| \leqslant 2b$, равенство их нулю при $t = 0$ и оценки

$$|D^{\bar{k}}_{t,x}u(t,\ x)| \leqslant C_0 t^{\frac{2b-|\bar{k}|+s}{2b}\theta(|\bar{k}|-1)}, \quad |\bar{k}| \leqslant 2b, \tag{20}$$

$$|\Delta^{\bar{t},\bar{x}}_{t,x} D^{\bar{k}}_{t,x}u| \leqslant C_0 d_1^s, \quad |\bar{k}| = 2b, \tag{21}$$

$$|\Delta^{\bar{t}}_t D^k_x u(t,\ x)| \leqslant C_0 (\bar{t}-t)^{\frac{2b-|k|+s}{2b}}, \quad 1 \leqslant |k| < 2b, \tag{22}$$

где $\{(t,\ x),\ (\bar{t},\ x),\ (\bar{t},\ \bar{x})\} \subset P_2$, $t \leqslant \bar{t}$, $d_1 \equiv d(t,\ x;\ \bar{t},\ \bar{x})$, $C_0 \equiv C\|f\|^s_{P_2}$, θ — функция (3) § 4.

Для производных от u в точке $(t,\ x) \in P_2$ имеет место формула

$$D^{\bar{k}}_{t,x}u(t,\ x) = \int_0^t d\tau \int_{K_1} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi) \times$$

$$\times \Delta^{t,x}_{\tau,\xi} f\, d\xi + \int_0^t L^{\bar{k}}(t,\ x,\ \tau)\, d\tau f(t,\ x) + \delta_{k_0,1}(\zeta f)(t,\ x),$$

$$1 \leqslant |\bar{k}| \leqslant 2b, \tag{23}$$

где

$$L^{\bar{k}}(t,\ x,\ \tau) \equiv \int_{K_1} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\, d\xi.$$

Прежде чем доказать эту формулу, заметим, что

$$|L^{\bar{k}}(t,\ x,\ \tau)| \leqslant C(t-\tau)^{\frac{s-|\bar{k}|}{2b}}, \quad 0 \leqslant \tau < t, \quad (t,\ x) \in P_2, \tag{24}$$

$$1 \leqslant |\bar{k}| \leqslant 2b.$$

Это следует из представления

$$L^{\bar{k}}(t, x, \tau) = \int_{K_1} \tilde{\Delta}^{t,x}_{\tau,\xi} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\zeta(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t-\tau, x-\xi; \beta, y)\big|_{(\beta,y)=(t,x)} \Delta^x_\xi \zeta\,d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} D^{\bar{k}}_{t,x} Z_0(t-\tau, x-\xi; \beta, y)\big|_{(\beta,y)=(t,x)}\,d\xi\,\zeta(x),$$

равенств (16) § 2 и оценок (3). Здесь и далее $\tilde{\Delta}^{t,x}_{\tau,\xi}$ обозначает взятие разности по τ и ξ только из последних двух аргументов соответствующей функции. Аналогичный смысл имеют обозначения $\tilde{\Delta}^t_\tau$ и $\tilde{\Delta}^x_\xi$.

Докажем формулу (23) лишь для $\bar{k} = (1, 0)$. Для остальных $\bar{k}$ она доказывается аналогично. Пусть $P_{2\varepsilon} \equiv \equiv [\varepsilon, T] \times K_2$, $\varepsilon > 0$. Для $0 < h < \varepsilon$ рассмотрим функцию

$$u_h(t, x) \equiv \int_0^{t-h} d\tau \int_{K_1} Z_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)(\zeta f)(\tau, \xi)\,d\xi,$$

$$(t, x) \in P_{2\varepsilon}.$$

Очевидно, что

$$D^1_t u_h(t, x) =$$

$$= \int_0^{t-h} d\tau \int_{K_1} D^1_t Z_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)(\zeta f)(\tau, \xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{K_1} Z_0(h, x-\xi; t-h, \xi)(\zeta f)(t-h, \xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^{t-h} d\tau \int_{K_1} D^1_t Z_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\zeta(\xi)\,\Delta^{t,x}_{\tau,\xi} f\,d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-h} L^{(1,0)}(t, x, \tau)\,d\tau\, f(t, x) +$$

$$+ \int_{K_1} \tilde{\Delta}^{t,x}_{\tau,\xi} Z_0(h, x-\xi; \tau, \xi)(\zeta f)(\tau, \xi)\,d\xi\,\big|_{\tau=t-h} +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} Z_0(h,\ x-\xi;\ t,\ x)\,\Delta_{t-h,\xi}^{t,x}(\zeta f)\,d\xi+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} Z_0(h,\ x-\xi;\ t,\ x)\,d\xi\,(\zeta f)(t,\ x),\quad (t,\ x)\in P_{2\varepsilon}. \quad (25)$$

С помощью оценок (3) легко проверяется, что первое и второе слагаемые из (25) стремятся равномерно на $P_{2\varepsilon}$ при $h\to 0$ к пределам, равным значениям этих слагаемых при $h=0$, а третье и четвертое слагаемые — к нулю. Так как, в силу (16) § 2, последнее слагаемое равно $(\zeta f)\times\times(t,\ x)$, то отсюда следуют существование производной $D_t^1 u$ и справедливость для нее формулы (23) на $P_{2\varepsilon}$. Ввиду произвольности ε это имеет место и на P_2.

Итак, существуют производные $D_{t,x}^{\bar k}u$, $|\bar k|\leqslant 2b$. Равенство их нулю при $t=0$ непосредственно следует из формулы (23), а неравенства (20) очевидным образом проверяются с помощью оценок (3) и (24). Если $d_1^{2b}\geqslant\frac{t}{2}$, то неравенства (21) прямо следуют из (20). Докажем их для случая, когда $d_1^{2b}<\frac{t}{2}$.

Использовав формулу (23), запишем представление

$$\Delta_{t,x}^{\bar t,\bar x}D_{t,x}^{\bar k}u=$$

$$=\int_0^{t-d_1^{2b}}d\tau\int_{K_1}\Delta_{t,x}^{\bar t,\bar x}D_{t,x}^{\bar k}Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f\,d\xi+$$

$$+\int_{t-d_1^{2b}}^{t}d\tau\int_{K_1}D_{t,x}^{\bar k}Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}f\,d\xi-$$

$$-\int_{t-d_1^{2b}}^{\bar t}d\tau\int_{K_1}D_{\bar t,\bar x}^{\bar k}Z_0(\bar t-\tau,\ \bar x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{\tau,\xi}^{\bar t,\bar x}f\,d\xi+$$

$$+\int_0^{t-d_1^{2b}}\Delta_{t,x}^{\bar t,\bar x}L^{\bar k}(t,\ x,\ \tau)\,d\tau f(t,\ x)+$$

$$+\int_{t-d_1^{2b}}^{t}L^{\bar k}(t,\ x,\ \tau)\,d\tau f(t,\ x)-$$

$$-\int\limits_{t-d_1^{2b}}^{\bar{t}} L^{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{x}, \tau)\,d\tau f(\bar{t}, \bar{x}) + \delta_{k_0,1}\Delta_{t,x}^{\bar{t},\bar{x}}(\zeta f) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{7} J_j, \quad |\bar{k}| = 2b. \tag{26}$$

Для выражений J_j, $1 \leqslant j \leqslant 7$, справедлива оценка (21). Это устанавливается обычным способом с помощью неравенств (3) и (24). Действительно, имеем

$$|J_1| \leqslant C_0 d_1 \int\limits_0^{t-d_1^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left((t-\tau)^{-1-\frac{n+1}{2b}} E_c(t-\tau, |x-\xi|) + \right.$$

$$\left. + (\bar{t}-\tau)^{-1-\frac{n+1}{2b}} E_c(\bar{t}-\tau, |\bar{x}-\xi|)\right) d^s(t, x; \tau, \xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_0 d_1 \int\limits_0^{t-d_1^{2b}} \left((t-\tau)^{-1+\frac{s-1}{2b}} + (\bar{t}-\tau)^{-1+\frac{s-1}{2b}} + \right.$$

$$\left. + d_1^s (\bar{t}-\tau)^{-1-\frac{1}{2b}}\right) d\tau \leqslant C_0 d_1^s,$$

$$|J_2| \leqslant C_0 \int\limits_{t-d_1^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-1-\frac{n}{2b}} E_c(t-\tau, |x-\xi|) \times$$

$$\times d^s(t, x; \tau, \xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \int\limits_{t-d_1^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-1+\frac{s}{2b}} d\tau = C_0 d_1^s,$$

$$|J_6| \leqslant C_0 \int\limits_{t-d_1^{2b}}^{\bar{t}} (\bar{t}-\tau)^{-1+\frac{s}{2b}} d\tau = C_0 (\bar{t}-t+d_1^{2b})^{\frac{s}{2b}} \leqslant$$

$$\leqslant C_0 d_1^s.$$

Аналогично оцениваются J_3, J_4 и J_5, если учесть справедливость неравенства

$$| \Delta_{t,x}^{\bar{t},\bar{x}} L^{\bar{k}} (t, x, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant C d_1 \left((t-\tau)^{-1+\frac{s-1}{2b}} + (\bar{t}-\tau)^{-1+\frac{s-1}{2b}}\right), \ |\bar{k}| = 2b.$$

Оценки (22) доказываются так же, как (21). ▶

Лемма 7. *Оператор* $\mathscr{G}_0^1$ *ограниченно действует из* $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2^+)$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}(P_2^+)$, $0 < s \leqslant l - l_0$.

◀ Воспользуемся представлением (7):

$$G_0^1(t-\tau, \ x-\xi', \ \xi_n; \ \tau, \ \xi) =$$

$$= (D_t^1 + a(-\Delta_{x'})^b)^r G_0^{1r}(t-\tau, \ x-\xi', \ \xi_n; \ \tau, \ \xi) =$$

$$= \sum_{|\bar{m}'|=2br} c_{\bar{m}'} D_{t,x'}^{\bar{m}'} G_0^{1r}(t-\tau, \ x-\xi', \ \xi_n; \ \tau, \ \xi), \qquad (27)$$

где $r = \left[\frac{s}{2b}\right] + 1$. Пусть мультииндекс $\bar{\nu}'$ такой, что $\bar{\nu}' \leqslant \bar{m}'$ и $|\bar{\nu}'|$ принимает наибольшее значение, не превышающее [s]. Заметим, что $|\bar{\nu}'| = [s]$, кроме случая: $\bar{m}' = (r, \ 0)$ и $\frac{[s]}{2b}$ нецелое, в котором $0 < [s] - |\bar{\nu}'| < 2b$.

Подставим (27) в выражение $(\mathscr{G}_0^1 f)(t, \ x)$ и проинтегрируем по частям, в результате это выражение представим в виде линейной комбинации интегралов

$$u^{(\bar{m}',\bar{\mu}',\eta')}(t, \ x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} D_{t,x'}^{\bar{m}'-\bar{\nu}'} \tilde{D}_{\tau,\xi'}^{\bar{\mu}'} G_0^{1r} \times$$

$$\times (t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \ \xi) D_{\xi'}^{\eta'} \zeta(\xi) D_{\tau,\xi'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'-\eta'} f(\tau, \ \xi) \, d\xi,$$

$$(t, \ x) \in P_2^+, \ \bar{\mu}' + \eta' \leqslant \bar{\nu}'. \qquad (28)$$

Эти интегралы имеют производные до порядка $2b + [s]$. При этом производные до порядка $2b + |\bar{\nu}'| - 1$ получаются непосредственным дифференцированием под знаком интеграла, так что справедлива формула

$$D_{t,x}^{\bar{k}} u^{(\bar{m}',\bar{\mu}',\eta')}(t, \ x) = \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} D_{t,x'}^{\bar{k}+\bar{m}'-\bar{\nu}'} \tilde{D}_{\tau,\xi'}^{\bar{\mu}'} G_0^{1r} \times$$

$$\times (t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\, D_{\xi'}^{\eta'}\zeta(\xi)\, D_{\tau,\xi'}^{\bar\nu'-\bar\mu'-\eta'} f(\tau,\ \xi)\, d\xi,$$

$$(t,\ x)\in P_2^+,\ |\bar k|\leqslant 2b+|\bar\nu'|-1. \tag{29}$$

Чтобы убедиться в существовании производных высшего порядка, рассмотрим наиболее трудный случай $\bar\mu'=\eta'=0$. Следует доказать существование производных $D_{t,x}^{\bar k}u^{(\bar m',0,0)}$, $|\bar\nu'|\leqslant|\bar k|-2b\leqslant[s]$. Поскольку возможны лишь два случая: 1) $D_{t,x}^{\bar k+\bar m'-\bar\nu'}=D_{x_i}^1 D_x^\mu$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $|\mu|=2b(r+1)-1$, $|\bar\nu'|=[s]$; 2) $D_{t,x}^{\bar k+\bar m'-\bar\nu'}=D_t^1 D_{t,x}^{\bar\mu}$, $0\leqslant|\bar\mu|-2br\leqslant[s]-|\bar\nu'|$, то достаточно изучить выражения

$$u_1(t,\ x)\equiv D_{x_i}^1\int_0^t d\tau \int_{K_1^+} D_x^\mu G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times(\zeta D_{\tau,\xi'}^{\bar\nu'}f)(\tau,\ \xi)\,d\xi, \tag{30}$$
$$u_2(t,\ x)\equiv D_t^1\int_0^t d\tau\int_{K_1^+} D_{t,x}^{\bar\mu} G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times(\zeta D_{\tau,\xi'}^{\bar\nu'}f)(\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad (t,\ x)\in P_2^+,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

С помощью методики, которая использовалась при доказательстве формулы (23), устанавливаются существование производных (30) и справедливость для них формул

$$u_1(t,\ x)=\int_0^t d\tau\int_{K_1^+}\{D_{x_i}^1 D_x^\mu G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times\zeta(\xi)\,\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}D_{\tau,\xi'}^{\bar\nu'}f+(\tilde\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}D_{x_i}^1 D_x^\mu G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times\zeta(\xi)+D_x^\mu G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ t,\ y)|_{y=x}D_{\xi_i}^1\zeta(\xi))\times$$
$$\times D_{t,x'}^{\bar\nu'}f(t,\ x)\}\,d\xi, \tag{31}$$
$$u_2(t,\ x)=\int_0^t d\tau\int_{K_1^+}\{D_t^1 D_{t,x}^{\bar\mu}G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times\zeta(\xi)\,\Delta_\tau^t D_{\tau,\xi'}^{\bar\nu'}f(\tau,\xi)+\tilde\Delta_\tau^t D_t^1 D_{t,x}^{\bar\mu}G_0^{1r}(t-\tau,x-\xi',\xi_n;\tau,\xi)\times$$

$$\times \zeta(\xi) D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'} f(t, \xi)\} d\xi +$$

$$\times \int_{K_1^+} D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r}(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \beta, \xi)|_{\beta=t} \zeta(\xi) \times$$

$$\times D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'} f(t, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in P_2^+. \tag{32}$$

Таким образом доказывается, что функция $\mathcal{G}_0^1 f$ имеет производные до порядка $2b+[s]$. Из формул (29), (31), (32) и им аналогичных для остальных случаев следует равенство нулю этих производных при $t=0$, а на основании оценок (9) получаем, что они подчиняются требуемым неравенствам.

Для примера найдем необходимые оценки для u_2. Полагая $C_0 = C\|f\|^s_{P_2^+}$ и используя (9), (32) и то, что $|\bar{\mu}| = |\bar{k}| + 2b(r-1) - |\bar{\nu}'|$, $0 \leqslant [s] - |\bar{\nu}'| < 2b$, $|\bar{\nu}'| = \leqslant |\bar{k}| - 2b \leqslant [s]$, $D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'} f = \Delta^0_t D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'} f$, $|\Delta^\tau_t D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'} f| \leqslant C_0 (t - \tau)^{\frac{s-|\bar{\nu}'|}{2b}}$, получаем

$$|u_2(t, x)| \leqslant C_0 \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{\frac{[s]-|\bar{k}|}{2b}} \left((t-\tau)^{\frac{s-[s]}{2b}} + \right.\right.$$

$$\left. + (t-\tau)^{1+\frac{|\bar{\nu}'|-[s]}{2b}}\right) d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}} E_c(t-\tau, |x-\xi|) d\xi +$$

$$\left. + t^{1+\frac{s-|\bar{k}|}{2b}} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2b}} E_c(t, |x-\xi|) d\xi \right\} \leqslant C_0 t^{1+\frac{s-|\bar{k}|}{2b}}.$$

Отсюда так же, как и в лемме 6, при $d_1^{2b} \geqslant \frac{t}{2}$ и $|\bar{k}| = 2b + [s]$ следует неравенство $|\Delta^{\bar{t},\bar{x}}_{t,x} u_2| \leqslant \leqslant C_0 d_1^{s-[s]}$. Для доказательства такого неравенства при $d_1^{2b} < \frac{t}{2}$ пользуемся аналогичным (26) представлением

$$\Delta^{\bar{t},\bar{x}}_{t,x} u_2 = \int_0^{t-d_1^{2b}} d\tau \int_{K_1^+} \{\Delta^{\bar{t},\bar{x}}_{t,x} D^1_t D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r}(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi) \times$$

$$\times (\zeta \Delta^t_\tau D^{\bar{\nu}'}_{\tau,\xi'} f)(\tau, \xi) + \Delta^{\bar{t},\bar{x}}_{t,x} \tilde{\Delta}^t_\tau D^1_t D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r} \times$$

$$\times (t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\,D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'}f(t,\ \xi)\}\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{t-d_1^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{K_1^+} \{D_t^1 D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\times$$

$$\times (\zeta\Delta^t_\tau D^{\bar{\nu}'}_{\tau,\xi'}f)(\tau,\ \xi)+\tilde{\Delta}^t_\tau D^1_t D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r}(t-\tau,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\xi)\times$$

$$\times\zeta(\xi)\,D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'}f(t,\ \xi)\}\,d\xi-\int\limits_{t-d_1^{2b}}^{\bar{t}} d\tau \int\limits_{K_1^+}\{D^1_{\bar{t}} D^{\bar{\mu}}_{\bar{t},\bar{x}} G_0^{1r}\times$$

$$\times(\bar{t}-\tau,\ \bar{x}-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\,(\zeta\Delta^{\bar{t}}_\tau D^{\bar{\nu}'}_{\tau,\xi'}f)(\tau,\ \xi)+$$

$$+\tilde{\Delta}^{\bar{t}}_\tau D^1_{\bar{t}} D^{\bar{\mu}}_{\bar{t},\bar{x}} G_0^{1r}(\bar{t}-\tau,\ \bar{x}-\xi',\ \xi_n;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)+$$

$$+D^{\bar{\nu}'}_{\bar{t},\xi'}f(\bar{t},\ \xi)\}\,d\xi+\int\limits_{K_1^+}\{D^{\bar{\mu}}_{\tau,\bar{x}} G_0^{1r}\times$$

$$\times(\tau,\ \bar{x}-\xi',\ \xi_n;\ t,\ \xi)\Big|_{\tau=\bar{t}-t+d_1^{2b}}\zeta(\xi)\,\Delta^{\bar{t}}_t D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'}f(t,\ \xi)+$$

$$+\Delta^{\bar{t}\,\bar{x}}_{t,x} D^{\bar{\mu}}_{t,x} G_0^{1r}(t,\ x-\xi',\ \xi_n;\ \beta,\ \xi)\big|_{\beta=t}\times$$

$$\times\zeta(\xi)\,\Delta^0_t D^{\bar{\nu}'}_{t,\xi'}f(t,\ \xi)\}\,d\xi. \qquad (33)$$

Слагаемые из (33) оцениваются так же, как слагаемые из (26) и (32). ▶

Лемма 8. *Операторы $\mathcal{G}_j$, $1\leqslant j\leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2')$ в $\overset{\circ}{H}{}^{r_j+s}(P_2^+)$, $0<s\leqslant l-l_0$.*

Лемма 9. *Операторы $\zeta I_m - A_0\mathcal{Z}_0$, $\zeta I_m - A_0\mathcal{G}_0^1$ и $\zeta I_1 - B_{j0}\mathcal{G}_j$, $1\leqslant j\leqslant N$, ограниченно действуют соответственно из $H^s(P_2)$, $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2^+)$ и $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2')$ в $\overset{\circ}{H}{}^{s+1}(P_2)$, $\overset{\circ}{H}{}^{s+1}(P_2^+)$ и $\overset{\circ}{H}{}^{s+1}(P_2')$, $0<s\leqslant l-l_0-1$.*

◀ Рассмотрим только оператор $\zeta I_m - A_0\mathcal{Z}_0$. В силу равенства (13) достаточно изучить функцию

$$u(t,\ x)\equiv\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_1}\Delta^{\tau,\xi}_{t,x}aD^k_x Z_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\times$$

$$\times\zeta(\xi)\,f(\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad (t,\ x)\in P_2. \qquad (34)$$

где a — произвольный коэффициент выражения A_0, а $|k|=2b$.

Докажем лишь существование у функции u производных до порядка $[s]+1$ и получим формулы для этих производных, с помощью которых требуемые оценки устанавливаются обычным путем.

В интеграле (34) сделаем замену $t-\tau=\beta$, $x-\xi=y$, продифференцируем его до порядка $[s]$ и вернемся к старым переменным интегрирования. В результате получим

$$D_{t,x}^{\overline{m}}u(t,\ x)=$$
$$=\sum_{\overline{\nu}+\overline{\mu}+\overline{\eta}=\overline{m}}C_{\overline{m}}^{\overline{\nu},\overline{\mu},\overline{\eta}}\int_0^t d\beta\int_{K_{1x}}\Delta_{t,x}^{t-\beta,x-y}D_{t,x}^{\overline{\nu}}aD_{t,x}^{\overline{\mu}}D_y^k\times$$
$$\times Z_0(\beta,\ y;\ t-\beta,\ x-y)\,D_{t,x}^{\overline{\eta}}(\zeta f)(t-\beta,\ x-y)\,dy=$$
$$=\sum_{\overline{\nu}+\overline{\mu}+\overline{\eta}=\overline{m}}C_{\overline{m}}^{\overline{\nu},\overline{\mu},\overline{\eta}}\int_0^t d\tau\int_{K_1}\Delta_{t,x}^{\tau,\xi}D_{t,x}^{\overline{\nu}}aD_x^k\tilde{D}_{\tau,\xi}^{\overline{\mu}}Z_0\times$$
$$\times(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\,D_{\tau,\xi}^{\overline{\eta}}(\zeta f)(\tau,\ \xi)\,d\xi,$$
$$(t,\ x)\in P_2,\ |\overline{m}|\leqslant[s],\tag{35}$$

где $K_{1x}\equiv\{y\in\mathbb{R}^n\,|\,|y_i-x_i|\leqslant d,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,\quad |y_n-x_n|\leqslant 2d\}$.

Для вычисления производных $D_{t,x}^{\overline{p}}u$, $|\overline{p}|=[s]+1$, поступаем следующим образом. Если $p_0<\frac{[s]+1}{2b}$, то берем выражение (35) для $|\overline{m}|=[s]$. Члены этого выражения, содержащие $D_{t,x}^{\overline{\eta}}f\,(t-\beta,\ x-y)$, $|\overline{\eta}|<[s]$, можно еще один раз продифференцировать по x под знаком интеграла. А члены вида

$$J_1(t,\ x)\equiv\int_0^t d\tau\int_K\Delta_{t,x}^{\tau,\xi}aD_x^kZ_0(t-\tau,\ x-\xi;\ \tau,\ \xi)\times$$
$$\times(\zeta D_{\tau,\xi}^{\overline{\eta}}f)(\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad (t,\ x)\in P_2,\ |\overline{\eta}|=[s],$$

имеют производную по x, которая вычисляется по формуле

$$D_x^1J_1=\int_0^t d\tau\int_{K_1}D_x^1(\Delta_{t,x}^{\tau,\xi}aD_x^kZ_0)\,\zeta\Delta_{\tau,\xi}^{t,x}D_{\tau,\xi}^{\overline{\eta}}f\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1} \{\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a (D_x^k \tilde{D}_\xi^l Z_0 \zeta + D_x^k Z_0 D_\xi^l \zeta) +$$

$$+ \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} D_x^l a D_x^k Z_0 \zeta\} \, d\xi D_{t,x}^{\bar{\eta}} f. \qquad (36)$$

Чтобы получить производную $D_t^{p_0} u$, $p_0 = \frac{[s]+1}{2b}$,

берем представление (35) для $\bar{m} = (m_0, 0)$, $m_0 = p_0 - 1$. Члены, не содержащие производной $D_t^{m_0} f(t-\beta, x-y)$, дифференцируются под знаком интеграла еще один раз по t, а производная по t интеграла

$$J_2(t, x) \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1} \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a D_x^k Z_0 (t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) \times$$

$$\times (\zeta D_\tau^{m_0} f)(\tau, \xi) \, d\xi, \quad (t, x) \in P_2,$$

вычисляется по формуле

$$D_t^l J_2 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1} D_t^l (\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a D_x^k Z_0) \zeta \Delta_\tau^t D_\tau^{m_0} f d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1} (\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a D_x^k \tilde{D}_\tau^l Z_0 \zeta + \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} D_t^l a D_x^k Z_0 \zeta) D_t^{m_0} f d\xi +$$

$$+ \int\limits_{K_1} \Delta_{t,x}^{0,\xi} a D_x^k Z_0 (t, x-\xi; 0, \xi) \zeta \Delta_t^0 D_t^{m_0} f d\xi. \qquad (37)$$

Доказательство формул (36) и (37) аналогичное доказательству формул (23) и (32). ▶

Лемма 10. Операторы $B_{j0}\mathscr{G}_0^l$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2^+)$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+l+s}(P_2')$, $\max\{0, r_j - 2b\} < s \leqslant l - l_0 - 1$.

Лемма 11. Операторы $A_0\mathscr{G}_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2')$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{r_j-2b+l+s}(P_2^+)$, $\max\{0, 2b - r_j - l\} < s \leqslant l - l_0 - 1$.

Лемма 12. Операторы $B_{i0}\mathscr{G}_j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant N$, $i \neq j$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^s(P_2')$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{r_j-r_i+l+s}(P_2')$, $\max\{0, r_i - r_j\} < s \leqslant l - l_0 - 1$.

3. Свойства некоторых операторов, связанных с сопряженными операторами Грина. Сформулируем леммы об ограниченном действии ряда специальных интегральных операторов. Доказательства этих лемм весьма громоздкие, их краткое изложение имеется в работе [47]. Используемая здесь методика подобна той, с помощью которой доказываются леммы из п. 2.

Пусть η — функция из п. 2 § 4. Положим

$$\chi(x-\xi) \equiv 1 - \eta\left(\frac{|x-\xi|}{\rho}\right), \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (38)$$

где $\rho > 0$ считается таким, что для любой точки $\xi \in K_1$ совокупность точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\chi(x-\xi) \neq 0$, принадлежит K_2.

Рассмотрим вначале операторы

$$\mathscr{Z}_0^*: f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2} \chi(x-\xi) \overline{Z}_0'(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) \times$$
$$\times f(t, x)\,dx, \quad (\tau, \xi) \in P_1,$$

$$(\mathscr{G}_0^1)^*: f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(x-\xi) (\overline{G}_0^1)'(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi) \times$$
$$\times f(t, x)\,dx, \quad (\tau, \xi) \in P_1^+,$$

$$\mathscr{G}_j^*: f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(x-\xi) \overline{G}_j'(t-\tau, x-\xi'; \tau, \xi') \times$$
$$\times f(t, x)\,dx, \quad (\tau, \xi') \in P_1', \ 1 \leqslant j \leqslant N,$$

где, как обычно, штрих у матрицы означает транспонирование, а черта над ней — комплексное сопряжение.

Лемма 13. *Операторы* $\mathscr{Z}_0^*$, $(\mathscr{G}_0^1)^*$ *и* $\mathscr{G}_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *ограниченно действуют соответственно из* $\mathring{H}^{\max\{s-2b,0\}} \times (P_2)$, $\mathring{H}^{\max\{s-2b,0\}}(P_2^+)$ *и* $\mathring{H}^{\max\{s-r_j-1,0\}}(P_2^+)$ *в* $\mathring{H}^s(P_1)$, $\mathring{H}^s(P_1^+)$ *и* $\mathring{H}^s(P_1')$, $0 < s \leqslant l - l_0$.

Далее приведем лемму о действии следующих операторов:

$$(I_m - A\mathscr{Z}_0)^*: f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2} \chi(x-\xi) \{(\overline{A}(t, x, D_t, D_x) -$$
$$-\overline{A}_0(\tau, \xi, D_t, D_x)) \overline{Z}_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\}' f(t, x)\,dx,$$
$$(\tau, \xi) \in P_1,$$

$$(I_m - A\mathcal{G}_0^1)^* : f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(x-\xi)\{(\bar{A}(t, x, D_t, D_x) -$$

$$- \bar{A}_0(\tau, \xi, D_t, D_x))\bar{G}_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi)\}' f(t, x)\,dx,$$

$$(\tau, \xi) \in P_2^+, \tag{39}$$

$$(I_1 - B_j\mathcal{G}_j)^* : f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2'} \chi(x'-\xi')(\bar{B}_j(t, x', D_t, D_x) -$$

$$- \bar{B}_{j0}(\tau, \xi', D_t, D_x))\bar{G}_j(t-\tau, x-\xi'; \tau, \xi')|_{x_n=0} \times$$

$$\times f(t, x')\,dx', \quad (\tau, \xi') \in P_1', \ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Здесь A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$,— дифференциальные выражения, главными частями которых являются выражения A_0 и B_{j0}. Предполагаем, что коэффициенты выражений A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, принадлежат соответственно $H^l(P_2)$ и $H^{2b-r_j+s}(P_2')$. Черта над A, A_0, B_j и B_{j0} в формулах (39) означает переход к комплексным сопряжениям в коэффициентах этих выражений.

Лемма 14. *Операторы* $(I_m - A\mathcal{G}_0)^*$, $(I_m - A\mathcal{G}_0^1)^*$ *и* $(I_1 - B_j\mathcal{G}_j)^*$ *ограниченно действуют соответственно из* $\mathring{H}^s(P_2)$, $\mathring{H}^s(P_2^+)$ *и* $\mathring{H}^s(P_2')$ *в* $\mathring{H}^{s+1}(P_1)$, $\mathring{H}^{s+1}(P_1^+)$ *и* $\mathring{H}^{s+1}(P_1')$, $0 < s \leqslant l - l_0 - 1$.

Лемма 15. *Операторы*

$$(B_j\mathcal{G}_0^1)^* : f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{K_2'} \chi(x'-\xi)\{(\bar{B}_j(t, x', D_t, D_x) -$$

$$- \bar{B}_{j0}(\tau, \xi', D_t, D_x))\bar{G}_0^1(t-\tau, x-\xi', \xi_n; \tau, \xi)|_{x_n=0}\}' \times$$

$$\times f(t, x')\,dx', \quad (\tau, \xi) \in P_1^+, \ 1 \leqslant j \leqslant N,$$

ограниченно действуют из $\mathring{H}^s(P_2')$ *в* $\mathring{H}^{2b-r_j+s}(P_1^+)$, $\max\{0, r_j - 2b\} < s \leqslant l - l_0 - \max\{1, 2b - r_j\}$.

Пусть η — функция из п. 2 § 4. Возьмем функцию

$$\eta_h(x_n) \equiv \eta\left(\frac{x_n}{h}\right), \quad x_n \geqslant 0, \ 0 < h < d, \tag{40}$$

и рассмотрим интегралы

$$u_j^h(\tau,\ \xi') \equiv \int\limits_\tau^t dt \int\limits_{K_2^+} \chi(x-\xi')\{(\bar{A}(t,\ x,\ D_t,\ D_x) -$$

$$-\bar{A}_0(\tau,\ \xi',\ D_t,\ D_x))\,\bar{G}_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \tau,\ \xi')\}' \times$$

$$\times\ \eta_h(x_n) f(t,\ x)\,dx, \quad (\tau,\ \xi') \in P_1', \ 1 \leqslant j \leqslant N. \qquad (41)$$

Лемма 16. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^s(P_2^+)$, $\max\{0, 2b-r_j-2\} < s \leqslant l-1+\min\{0,\ 2b-r_j-l_0-1\}$. *Функции* (41) *при* $h \to 0$ *стремятся равномерно на* P_1' *к некоторым пределам* $u_j \in \overset{\circ}{H}{}^{r_j-2b+2+s}(P_1')$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *причем справедливы оценки*

$$\| u_j \|_{P_1'}^{r_j-2b+2+s} \leqslant C \| f \|_{P_2^+}^s, \ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Наконец, рассмотрим интегралы

$$v_{ij}^h(\tau,\ \xi') \equiv \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{K_2'} \{\chi(x-\xi')\,\bar{B}_i(t,\ x',\ D_t,\ D_x) \times$$

$$\times\ \bar{G}_j(t-\tau,\ x-\xi';\ \tau,\ \xi')\}\,|_{x_n=h}\, f(t,\ x')\,dx', \quad (\tau, \xi') \in P_1',$$

$$1 \leqslant i,\ j \leqslant N,\ i \neq j,$$

где h — достаточно малое положительное число.

Лемма 17. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^s(P_2')$, $\max\{0,\ r_i - r_j\} < s \leqslant l-1+\min\{r_i-r_j-l_0,\ 2b-r_i\}$. *Функции* (42) *при* $h \to 0$ *стремятся равномерно на* P_1' *к некоторым пределам* $v_{ij} \in \overset{\circ}{H}{}^{r_j-r_i+1+s}(P_1')$, *для которых справедливы оценки*

$$\| v_{ij} \|_{P_1'}^{r_j-r_i+1+s} \leqslant C \| f \|_{P_2'}^s, \ 1 \leqslant i,\ j \leqslant N,\ i \neq j.$$

Глава 3

ОДНОРОДНАЯ МАТРИЦА ГРИНА ОБЩЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В этой главе для общей параболической граничной задачи с помощью метода, называемого методом регуляризатора, строится однородная матрица Грина и устанавливаются оценки ее производных по основным аргументам. От коэффициентов задачи и границы области требуется такая же гладкость, при которой установлена корректная разрешимость задач рассматриваемого типа в пространствах Гёльдера (см. теорему 1 § 2).

§ 6. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАТОРА ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОРОДНОЙ МАТРИЦЫ ГРИНА

1. Сущность метода регуляризатора. Однородная матрица Грина G_0^1 параболической задачи (23) — (25) § 1 в п. 1 § 3 определена как решение задачи (2) § 3. Используя это определение, а также данное в п. 2 § 3 определение фундаментальной матрицы решений Z задачи Коши для системы (23) § 1, матрицу G_0^1, естественно, искать в виде

$$\begin{gathered} G_0^1(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv Z(t,\ x;\ \tau,\ \xi) - V(t,\ x;\ \tau,\ \xi), \\ \{(t,\ x),\ (\tau,\ \xi)\} \subset \overline{Q}_0,\ (t,\ x) \neq (\tau,\ \xi), \end{gathered} \tag{1}$$

где V для каждой фиксированной точки $(\tau,\ \xi)$ есть решение задачи

$$AV = 0,\ B_jV|_{Q_1} = B_jZ|_{Q_1},\ 1 \leqslant j \leqslant N,\ V|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Поскольку матрица Z достаточно хорошо изучена (см. теорему § 3), то построение и исследование матрицы G_0^1 сводятся к построению и исследованию решения задачи (2).

Если точку $(\tau,\ \xi)$ считать фиксированной в $[0,\ T) \times \Omega_0$, то при выполнении условий А и $Б_l$, $l > l_0$, в силу теоремы 1 § 2 существует единственное решение задачи (2), принадлежащее пространству H_0^{2b+l}. При этом

$V(t, x; \tau, \xi) = 0$ при $t < \tau$, так как этим свойством обладает Z. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы получить точные поточечные оценки матрицы V и ее производных. Для этого нужно иметь эффективный метод построения этой матрицы. Предлагаемый ниже метод использует регуляризатор параболической граничной задачи.

Согласно этому методу, матрицу V сначала строим в цилиндре $Q_0^{\tau,\tau+h}$ малой высоты h, то есть в этом цилиндре, считая точку (τ, ξ) фиксированной в $[0, T) \times \Omega_0$, решаем задачу

$$AV = 0, \quad B_j V|_{Q_1^{\tau,\tau+h}} = B_j Z|_{Q_1^{\tau,\tau+h}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad V|_{t=\tau} = 0. \tag{3}$$

Решение задачи (3) ищем в виде

$$V(t, x; \tau, \xi) \equiv (\mathcal{R}w)(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x) \in Q_0^{\tau,\tau+h}, \quad w = (w_0, \ldots, w_N)', \tag{4}$$

где $\mathcal{R}$ — регуляризатор задачи, описанный в п. 2 § 2. В силу равенств (11) § 2 относительно w получаем уравнение

$$w = \mathcal{V}w + g, \quad g \equiv (0, B_1 Z|_{Q_1^{\tau,\tau+h}}, \ldots, B_N Z|_{Q_1^{\tau,\tau+h}})' \tag{5}$$

или, более подробно,

$$w_0 = \mathcal{V}_0 w, \quad w_j = \mathcal{V}_j w + B_j Z|_{Q_1^{\tau,\tau+h}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{6}$$

Заметим, что операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}_1$ здесь мы определяем формулами (8), (12), (33) и (34) § 2, в которых $t_0 = \tau$.

Если h удовлетворяет условию (6) § 2, где $\varkappa$ и λ достаточно малы, то уравнение (5) решается методом последовательных приближений и его решение определяется рядом

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w^{(s)}, \tag{7}$$

в котором

$$w^{(s)} = \mathcal{V}w^{(s-1)}, \quad s \geqslant 1, \quad w^{(0)} \equiv g. \tag{8}$$

Подставив w в (4), получим требуемое решение V.

В § 8 проведем детальные оценки членов ряда (7) и на их основании получим оценки его суммы. Заметим, что все приближения $w^{(s)}$, $s \geqslant 0$, имеют одинаковый порядок сингулярности и основной трудностью является сохранение требуемых точных оценок всех этих приближений.

Итак, описанным выше путем будет построена матрица V и получены ее оценки пока только при $t \in (\tau, \tau + h]$. Построение же этой матрицы при $t \in (\tau + h, T]$ сводится к проведению конечного числа шагов, аналогичных предыдущему. Но так как в этом случае t и τ разъединены, то есть мы находимся вне особенностей правых частей задачи (2), то последовательные приближения не будут иметь особенностей и поэтому их исследовать значительно проще.

При проведении оценок последовательных приближений будем иметь дело с функциями, которые зависят от основной и параметрической точек и могут иметь особенности лишь тогда, когда параметрическая точка попадает на границу области. Эти свойства функций будут описываться в терминах принадлежности к определенным функциональным классам, которые будут введены в следующем пункте. Классы определяются таким образом, чтобы при проведении оценок последовательных приближений иметь возможность тщательно следить за постоянными в этих оценках, особенно за постоянными в показателе экспоненты.

2. О классах функций, используемых в гл. 3. Кроме классов функций, введенных в п. 4 § 1, в этой главе будут использоваться специальные классы, которые мы здесь определим.

Вначале отметим, что при предположении о границе Ω_1, содержащемся в условии $Б_l$, и достаточно малом λ справедливы неравенства (см. [102])

$$\frac{1}{2} d(t, x; \beta, y) \leqslant d(t, \bar{x}; \beta, \bar{y}) \leqslant 2d(t, x; \beta, y), \tag{9}$$

$$E_{c_1}(t-\beta, d(t, x; \beta, y)) \leqslant E_{c_0}(t-\beta, d(t, \bar{x}; \beta, \bar{y})) \leqslant \\ \leqslant E_c(t-\beta, d(t, x, \beta, y)), \tag{10}$$

где $t > \beta$, x, y — любые точки из $\Omega_2^{(k'')}$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ — их k''-распрямляющие координаты; $c_0 > 0$, $c_1 \equiv 2^{2b/(2b-1)}c_0$, $c \equiv 2^{-2b/(2b-1)}c_0$. Далее будем считать λ выбранным так, чтобы выполнялись неравенства (9).

Пусть q, r, θ, c, τ и τ_1 — некоторые числа, причем $r > 0$ нецелое, $c > 0$, $\theta \leqslant 0$, $0 \leqslant \tau < \tau_1 \leqslant T$. Пусть далее $\{\Omega_2^{(k)}\}$ — система множеств, а $\{\varphi^{(k)}\}$ — соответствующая система функций, которые определены в п. 2 § 2. Положим $\Omega_0^\tau \equiv \{(\tau, \xi) \mid \xi \in \Omega_0\}$, $Q_{\tau,t}^{(k)} \equiv (\tau, t] \times \Omega_2^{(k)}$.

Говорим, что функция $w(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in Q_\nu^{\tau,\tau_1}$, $(\tau, \xi) \in \Omega_0^\tau$, со значениями из $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{lm}$, $\mathbb{C}_{ml}$ или $\mathbb{C}_{mm}$ принадлежит классу $W_{r,c}^{q,\theta}(Q_\nu^{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$, $\nu = 0, 1$, если она непрерывна и имеет производные $D_{t,x}^{\overline{m}} w$, $|\overline{m}| \leqslant [r]$, удовлетворяющие неравенствам

$$|D_{t,x}^{\overline{m}} w| \leqslant C(t-\tau)^{\frac{r-|\overline{m}|-\theta}{2b}} d^{-n-q-r}(t, x; \tau, \xi) \times \\ \times E_c^\theta(t, x; \tau, \xi), \quad |\overline{m}| \leqslant [r], \tag{11}$$

$$|\Delta_{t_1,x^{(1)}}^{t_2,x^{(2)}} D_{t_1,x^{(1)}}^{\overline{m}} w| \leqslant C d^{r-[r]}(t_1, x^{(1)}; t_2, x^{(2)}) \times \\ \times \sum_{j=1}^{2} (t_j-\tau)^{\frac{[r]-|\overline{m}|-\theta}{2b}} d^{-n-q-r}(t_j, x^{(j)}; \tau, \xi) \times \\ \times E_c^\theta(t_j, x^{(j)}; \tau, \xi), \quad |\overline{m}| \leqslant [r], \tag{12}$$

$$|\Delta_{t_1}^{t_2} D_{t_1,x}^{\overline{m}} w| \leqslant C|t_1-t_2|^{\frac{r-|\overline{m}|}{2b}} \sum_{j=1}^{2} (t_j-\tau)^{-\frac{\theta}{2b}} \times \\ \times d^{-n-q-r}(t_j, x; \tau, \xi) E_c^\theta(t_j, x; \tau, \xi), \\ [r]-2b < |\overline{m}| < [r], \tag{13}$$

где

$$E_c^\theta(t, x; \tau, \xi) \equiv E_c(t-\tau, |x-\xi|)\rho_c^\theta(t-\tau, \xi), \tag{14}$$

а $\rho_c^\theta(t-\tau, \xi)$ определено формулой (43) § 1.

Кроме этого, если $\nu = 0$ и $q + \theta = 2b$, то функция w удовлетворяет условию: для любых k

$$|I^{(k)}(w)(t, \tau, \xi)| \equiv \left| \iint_{Q_1^{(k)}} \varphi^{(k)}(y) w(\beta, y; \tau, \xi) d\beta dy \right| \leqslant \\ \leqslant C\rho_c^0(t-\tau, \xi), \quad t \in (\tau, \tau_1], \ \xi \in \Omega_0, \tag{15}$$

где $Q_1^{(k)} \equiv \left\{(\beta, y) \in Q_{\tau,t}^{(k)} \mid d(\beta, y; \tau, \xi) \leqslant \frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\right\}$.

Если $\nu = 1$ и $q + \theta \geqslant 2b - 1$, то предполагается, что для любых k'' справедливо представление

$$\Pi_x^{\overline{x}'} w(t, x; \tau, \xi) \equiv \overline{w}(t, \overline{x}'; \tau, \xi) =$$

$$= \sum_{|\bar\mu'|\leqslant M} D^{\bar\mu'}_{t,\bar x'} \bar\omega_{\bar\mu'}(t, \bar x'; \tau, \xi), \quad t\in(\tau, \tau_1],$$

$$x\in(\Omega_1 \cap \Omega_2^{(k'')}), \ \xi\in\Omega_0, \ M\geqslant q+\theta-2b+1. \tag{16}$$

Функции $\bar\omega_{\bar\mu'}$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^{\bar\nu'}_{t,\bar x'}\bar\omega_{\bar\mu'}(t, \bar x'; \tau, \xi)| \leqslant Cd^{-n-2b+p+1-|\bar\nu'|}(t, x; \tau, \xi)\times$$
$$\times E^0_c(t, x; \tau, \xi), \ \bar\nu'\leqslant\bar\mu', \ |\bar\mu'|\leqslant M, \ p\equiv\max\{0, \ |\bar\mu'|-$$
$$-q-\theta+2b-1\}, \tag{17}$$

и при любых $|\bar\mu'|\leqslant q+\theta-2b+1$, $|\eta|\leqslant 2b+[l]$, $t\in(\tau, \tau_1]$, $(\tau, \xi)\in\Omega_0^\tau$ имеет место оценка

$$|J^{(k'')}(\bar\omega_{\bar\mu'})(t, \tau, \xi)|\equiv$$
$$\equiv\left|\iint_{S_1'} D^{\eta}_{\bar y}\bar\varphi^{(k'')}(\bar y', 0)\,\bar\omega_{\bar\mu'}(\beta, \bar y'; \tau, \xi)\,d\beta d\bar y'\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\lambda^{-|\eta|}\rho^\theta_c(t-\tau, \xi), \tag{18}$$

где S_1' — образ множества $\Big\{(\beta, y)\in[\tau, t]\times(\Omega_1\cap\Omega_2^{(k'')})$ $d(\beta, y; \tau, \xi)\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\Big\}$ при преобразовании (14) § 1.

Введем еще классы $W^\theta_{r,c}(Q^{\tau_1,\tau_2}_\nu, \Omega^\tau_0)$, $\tau<\tau_1<\tau_2\leqslant T$, $\nu=0, 1$. Они состоят из непрерывных функций $w(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x)\in Q^{\tau_1,\tau_2}_\nu$, $(\tau, \xi)\in\Omega^\tau_0$, имеющих производные $D^{\bar m}_{t,x}w$, $|\bar m|\leqslant[r]$, которые удовлетворяют неравенствам, отличающимся от неравенств (11) — (13) тем, что в них степени $t-\tau$, $t_j-\tau$, $d(t, x; \tau, \xi)$, $d(t_j, x^{(j)}; \tau, \xi)$ и $d(t_j, x; \tau, \xi)$ заменены единицей.

Множества функций из этих классов, удовлетворяющих условиям $D^\mu_t w|_{t=\tau_1}=0$, $0\leqslant\mu\leqslant\left[\frac{r}{2b}\right]$, будем обозначать через $\overset{\circ}{W}{}^\theta_{r,c}(Q^{\tau_1,\tau_2}_\nu, \Omega^\tau_0)$. Заметим, что для функций из этих множеств справедливы неравенства

$$|D^{\bar m}_{t,x}w(t, x; \tau, \xi)|\leqslant C(t-\tau_1)^{\frac{r-|\bar m|}{2b}}E^\theta_c(t, x; \tau, \xi),$$
$$|\bar m|\leqslant[r]. \tag{19}$$

Нормой $\|w\|$ функции w из соответствующего класса будем называть наибольшую из точных нижних граней постоянных C, с которыми справедливы все неравенства, входящие в определение данного класса. Если может возникнуть недоразумение, то норму будем снабжать соответствующим индексом.

В заключение отметим следующие очевидные утверждения:

1) Если $w \in W^{q,\theta}_{r,c_1}(Q_\nu^{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$, $\tau_1 < T$, и $w \in W^\theta_{r,c_1}(Q_\nu^{\tau_1,T}, \Omega_0^\tau)$, то $w \in W^{q,\theta}_{r,c}(Q_\nu^{\tau,T}, \Omega_0^\tau)$, $0 < c < c_1$.

2) Если $w \in W^{0,\theta}_{r,c}(Q_0^{\tau,T}, \Omega_0^\tau)$ при любом $\tau \in [0, T)$ и $w = 0$ при $t < \tau$, то $w \in V^{2b,\theta}_{r,0}(Q_0, Q_0)$ (этот класс определен в п. 4 § 1).

§ 7. ЛЕММЫ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

1. Формулировка лемм. Приведем леммы об операторах $\mathscr{Z}_0^{(t_0,k')}$, $\mathscr{G}_0^{(t_0,k'')}$ и $\mathscr{G}_j^{(t_0,k'')}$, определенных формулами (33) § 2. Эти операторы участвуют в определении регуляризатора (см. (8) и (34) § 2), причем они там действуют на функции, умноженные на специальные срезающие функции. Нам необходимо изучить действие таких операторов в классах функций, определенных в п. 2 § 6.

Введем обозначения

$$\mathscr{Z}_0^{(t_0,k')}(\varphi^{(k')}w)(t, x; \tau, \xi) \equiv \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{\Omega_2^{(k')}} Z_0^{(t_0,k')}(t-\beta, x-y)\times$$

$$\times \varphi^{(k')}(y)\, w(\beta, y; \tau, \xi)\, dy \equiv u^{(t_0,k')}(t, x; \tau, \xi), \qquad (1)$$

$$\mathscr{G}_0^{(t_0,k'')}(\overline{\varphi}^{(k'')}\overline{w})(t, \overline{x}; \tau, \xi) \equiv \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{K} G_0^{(t_0,k'')}(t, \overline{x}; \beta, \overline{y}) \times$$

$$\times \overline{\varphi}^{(k'')}(\overline{y})\, \overline{w}(\beta, \overline{y}; \tau, \xi)\, d\overline{y} \equiv \overline{u}^{(t_0,k'')}(t, \overline{x}; \tau, \xi), \qquad (2)$$

$$\mathscr{G}_j^{(t_0,k'')}(\overline{\varphi}_\eta^{(k'')}\overline{w})(t, \overline{x}; \tau, \xi) \equiv \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{K'} G_j^{(t_0,k'')}(t-\beta, \overline{x}-\overline{y}') \times$$

$$\times \overline{\varphi}_\eta^{(k'')}(\overline{y}')\, \overline{w}(\beta, \overline{y}'; \tau, \xi)\, d\overline{y}' \equiv \overline{v}_{j\eta}^{(t_0,k'')}(t, \overline{x}; \tau, \xi),$$

$$1 \leqslant j \leqslant N, \qquad (3)$$

где K и K' определены в п. 2 § 2, $G_0^{(t_0,k'')}(t, \overline{x}; \beta, \overline{y}) \equiv \equiv G_0^{(t_0,k'')}(t-\beta, \overline{x}-\overline{y}', \overline{y}_n)$, $\overline{\varphi}_\eta^{(k'')}(\overline{y}') \equiv D_{\overline{y}}^{\eta}\overline{\varphi}^{(k'')}(\overline{y})|_{\overline{y}_n=0}$, $|\eta| \leqslant \max\{0, r_j - 2b\}$.

Поскольку модуль якобиана преобразования (14) § 1 равен единице, то формулы (1) и (2) можно объединить записью

$$(\mathcal{H}^{(t_0,k)}w)(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv \iint\limits_{Q^{(k)}_{t_0,t}} H^{(t_0,k)}(t,\ x;\ \beta,\ y)\,\varphi^{(k)}(y) \times$$
$$\times\, w(\beta,\ y;\ \tau,\ \xi)\,d\beta dy \equiv u^{(t_0,k)}(t,\ x;\ \tau,\ \xi), \qquad (4)$$

где

$$H^{(t_0,k)}(t,\ x;\ \beta,\ y) \equiv \begin{cases} Z_0^{(t_0,k')}(t-\beta,\ x-y), & k=k', \\ \Pi^x_{\bar{x}}\Pi^y_{\bar{y}}G_0^{(t_0,k'')}(t,\ \bar{x};\ \beta,\ \bar{y}), & k=k'', \end{cases} \qquad (5)$$

а $Q^{(k)}_{t_0,t}$ определено в п. 2 § 6.

Введем еще обозначения

$$\mathcal{H}^{(t_0,k'')}_{j\eta}w \equiv \Pi^x_{\bar{x}}\mathcal{G}_j^{(t_0,k'')}(\overline{\varphi_\eta^{(k'')}}\overline{w}) \equiv \Pi^x_{\bar{x}}\bar{v}^{(t_0,k'')}_{j\eta} \equiv v^{(t_0,k'')}_{j\eta}. \qquad (6)$$

Из оценок (15), (21) и (25) § 2 с помощью очевидных неравенств

$$(t-\tau)^{-\frac{m}{2b}}E_c(t-\tau,\ |x-\xi|) \leqslant Cd^{-m}(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \times$$
$$\times\, E_{c_0}(t-\tau,\ d(t,\ x;\ \tau,\ \xi)) \leqslant$$
$$\leqslant Cd^{-m}(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\,E_{c_0}(t-\tau,\ |x-\xi|),$$
$$m \geqslant 0,\ 0 < c_0 < c, \qquad (7)$$

легко получить, что ядра $Z_0^{(t_0,k')}$, $G_0^{(t_0,k'')}$, $G_{1j}^{(t_0,k'')}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, интегралов (1) — (3) как функции соответственно $(t,\ x)$ и $(\beta,\ y)$, $(t,\ \bar{x})$ и $(\beta,\ \bar{y})$, $(t,\ \bar{x})$ и $(\beta,\ \bar{y}')$, принадлежат следующим классам:

$$Z_0^{(t_0,k')} \in U^{2b}_{r,s}(\Pi^T,\ \Pi^T;\ C_0,\ c_0),$$
$$G_0^{(t_0,k'')} \in U^{2b}_{r,s}(\Pi^T_+,\ \Pi^T_+;\ C_0,\ c_0), \qquad (8)$$
$$G_j^{(t_0,k'')} \in U^{r_j+1}_{r,s}(\Pi^T_+,\ \Pi^T_0;\ C_0,\ c_0),\ 1 \leqslant j \leqslant N,$$

где r и s — любые нецелые положительные числа. Заметим, что постоянные C_0 и c_0, вообще говоря, зависят от r и s, но в дальнейшем утверждения (8) будут использоваться лишь при конечном числе значений r и s, поэтому под C_0 и c_0 будем понимать постоянные, с которыми справедливы утверждения (8) при всех значениях r и s, встречающихся далее.

В этом параграфе предполагаем, что граница $\Omega_1 \in C^{2b+l}$, $l > l_0$; $h \equiv \varkappa\lambda^{2b}$, где $\varkappa \leqslant 1$, а параметр λ таков, как указано в п. 2 § 6; $\theta \leqslant 0$ — произвольное число.

Лемма 1. *Если* $w \in W^{2b,\theta}_{l,c_1}(Q_0^{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$, $\tau_1 \equiv \min\{\tau + h, T\}$, *то* $\mathcal{H}^{(\tau,k)}w \in W^{0,\theta}_{2b+l,c}(Q^{(k)}_{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$ *и* $\|\mathcal{H}^{(\tau,k)}w\| \leqslant C\|w\|$. *Здесь* $c \equiv \min\{c_1, 2^{-2b/(2b-1)}c_0\}$, *где* c_0 — *постоянная из* (8); *постоянная* C *зависит лишь от тех параметров, которые перечислены в конце п.* 3 § 1.

Лемма 2. *Если* $w \in W^{r_j-|\eta|,\theta}_{2b-r_j+|\eta|+l,c_1}(Q_1^{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$, $|\eta| \leqslant \max\{0, r_j - 2b\}$, $\tau_1 \equiv \min\{\tau + h, T\}$, *то* $\mathcal{H}^{(\tau,k'')}_{j\eta}w \in W^{0,\theta}_{2b+l,c}(Q^{(k'')}_{\tau,\tau_1}, \Omega_0^\tau)$ *и* $\|\mathcal{H}^{(\tau,k'')}_{j\eta}w\| \leqslant C\|w\|$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *где постоянные* c *и* C *такие же, как в лемме* 1.

Лемма 3. *Пусть* $\tau < \tau_1$ *и* $\tau_2 \equiv \min\{\tau_1 + h, T\}$. *Операторы* $\mathcal{H}^{(\tau_1,k)}$ *и* $\mathcal{H}^{(\tau_1,k'')}_{j\eta}$ *действуют соответственно из* $\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{l,c_1}(Q_0^{\tau_1,\tau_2}, \Omega_0^\tau)$ *и* $\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{2b-r_j+|\eta|+l,c_1}(Q_1^{\tau_1,\tau_2}, \Omega_0^\tau)$ *в* $\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{2b+l,c} \times (Q^{(k)}_{\tau_1,\tau_2}, \Omega_0^\tau)$ *и* $\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{2b+l,c}(Q^{(k'')}_{\tau_1,\tau_2}, \Omega_0^\tau)$, *при этом* $\|\mathcal{H}^{(\tau_1,k)}w\| \leqslant C\|w\|$ *и* $\|\mathcal{H}^{(\tau_1,k'')}_{j\eta}w\| \leqslant C\|w\|$. *Здесь* j, η, c *и* C *такие же, как в леммах* 1 *и* 2.

В следующих пунктах докажем только леммы 1 и 2. Лемма 3 доказывается так же, но с очевидными изменениями, связанными с тем, что функции w в данном случае не имеют особенностей и для них справедливы неравенства (19) § 6.

Чтобы избежать громоздких записей, в п. 2 и 3 будем опускать оба верхних индекса у $Z_0^{(\tau,k')}$, $G_0^{(\tau,k'')}$, $G_j^{(\tau,k'')}$, $\bar{v}_{j\eta}^{(\tau,k'')}$, $\mathcal{H}_{j\eta}^{(\tau,k'')}$, индексы k и k'' у $\varphi^{(k)}$, $\bar{\varphi}^{(k'')}$, $\bar{\varphi}_\eta^{(k'')}$ и индекс τ у $\mathcal{H}^{(\tau,k)}$, $H^{(\tau,k)}$, $u^{(\tau,k)}$, $\bar{u}^{(\tau,k')}$. Кроме того, будем пользоваться следующими обозначениями:

$$P \equiv (t, x),\ P^0 \equiv (t^0, x^0),\ \bar{P} \equiv (t, \bar{x}),\ \bar{P}' \equiv (t, \bar{x}');$$

$$Q \equiv (\tau, \xi),\ \bar{Q} \equiv (\tau, \bar{\xi}),\ \bar{Q}' \equiv (\tau, \bar{\xi}');$$

$$R \equiv (\beta, y),\ \bar{R} \equiv (\beta, \bar{y}),\ \bar{R}' \equiv (\beta, \bar{y}');$$

$$dR \equiv d\beta dy,\ d\bar{R} \equiv d\beta d\bar{y},\ d\bar{R}' \equiv d\beta d\bar{y}';$$

$$|PR| \equiv d(t, x;\ \beta, y),\ |\bar{P}\bar{R}| \equiv d(t, \bar{x};\ \beta, \bar{y}),$$

$$|\bar{P}\bar{R}'| \equiv d(t, \bar{x};\ \beta, \bar{y}'),$$

$$|\bar{P}'\bar{R}'| \equiv d(t, \bar{x}'; \beta, \bar{y}'); \quad \gamma \equiv (t-\tau)^{\frac{1}{2b}}.$$

В результате формулы (4), (2) и (3) для $u^{(\tau,k)}$, $\bar{u}^{(\tau,k'')}$ и $\bar{v}_{j\eta}^{(\tau,k'')}$ примут вид

$$u^{(k)}(P; Q) \equiv \iint\limits_{Q_{\tau,t}^{(k)}} H^{(k)}(P; R)\,\varphi(y)\,\omega(R; Q)\,dR, \tag{9}$$

$$\bar{u}^{(k'')}(\bar{P}; Q) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{K} G_0(\bar{P}, \bar{R})\,\bar{\varphi}(\bar{y})\,\bar{\omega}(\bar{R}; Q)\,d\bar{y}, \tag{10}$$

$$\bar{v}_{j\eta}(\bar{P}; Q) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{K'} G_j(\bar{P}-\bar{R}')\,\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\,\bar{\omega}(\bar{R}'; Q)\,d\bar{y}'. \tag{11}$$

2. Доказательство леммы 1. Поскольку функции $u^{(k')}$ и $\bar{u}^{(k'')}$ являются решениями параболических систем из (9) и (10) § 2, то производные от $u^{(k)}$ по t можно выразить через производные от $u^{(k)}$ по x и производные от $\varphi\omega$. Поэтому достаточно оценить лишь производные $D_x^m u^{(k)}$, $|m| \leqslant 2b + [l]$.

Из (8) и предположения о границе Ω_1 с помощью неравенств (9) и (10) § 6 следует, что

$$\begin{gathered} H^{(k)} \in U^{2b}_{2b+l,l-[l]}(Q^{(k)}_{\tau,\tau_1}, \tilde{Q}^{(k)}_{\tau,\tau_1}; C, c_2), \\ \tilde{Q}^{(k)}_{\tau,\tau_1} \equiv (\tau, \tau_1] \times \tilde{\Omega}^{(k)}_2, \quad c_2 \equiv 2^{-2b/(2b-1)} c_0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\tilde{\Omega}_2^{(k)}$ — окрестность множества $\Omega_2^{(k)}$, которая при $k = k'$ берется любой, а при $k = k''$ такой, чтобы она принадлежала области определения преобразования (14) § 1, переводящего $\Omega_2^{(k'')}$ в куб K.

Оценим вначале производные $D_x^m u^{(k)}(P)$, $P \in Q^{(k)}_{\tau,\tau_1}$, $|m| \leqslant 2b$. Для этого область интегрирования в (9) разобьем на три части: $Q^{(k)}_{\tau,t} = Q_1^{(k)} \cup Q_2^{(k)} \cup Q_3^{(k)}$, где $Q_1^{(k)} \equiv \equiv \left\{R \in Q^{(k)}_{\tau,t} \,\middle|\, |RQ| \leqslant \frac{\gamma}{2}\right\}$, $Q_2^{(k)} \equiv \left\{R \in Q^{(k)}_{\tau,t} \,\middle|\, |PR| \leqslant \frac{\gamma}{2}\right\}$. При этом особенности ядра и функции ω окажутся разделенными. Отметим, что рассуждения достаточно провести для случая, когда $\xi \in \tilde{\Omega}_2^{(k)}$. Если же $\xi \bar{\in} \tilde{\Omega}_2^{(k)}$, то, выбирая достаточно малым $\varkappa$ и используя то, что $\gamma^{2b} \leqslant$

$\leqslant \tau_1 - \tau \leqslant h = \varkappa\lambda^{2b}$, $Q_1^{(k)}$ будет пусто и оценка упростится.

Имеем

$$D_x^m u^{(k)}(P;\ Q) = \iint\limits_{Q_1^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\omega(R,\ Q)\,dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P \omega(R;\ Q)\,dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,dR\,\omega(P;\ Q) +$$

$$+ \iint\limits_{Q_3^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\omega(R;\ Q)\,dR \equiv \sum_{i=1}^{4} E_i. \qquad (13)$$

Отметим, что здесь дифференцирование проводится по формулам, определяющим старшие производные от интегралов типа объемных параболических потенциалов.

Оценим E_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Используя (12) и то, что $\omega \in W_{l,c_1}^{2b,\theta}(Q_0^{\tau,\tau_1},\ \Omega_0^{\tau})$, при $\theta < 0$ имеем

$$|E_1| + |E_2| \leqslant C\|\omega\| \Bigg\{ \iint\limits_{Q_1^{(k)}} (t-\beta)^{1+\frac{l-|m|}{2b}} |PR|^{-n-2b-l} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\beta,\ |x-y|)\,|RQ|^{-n-2b-\theta} E_{c_1}^{\theta}(R;\ Q)\,dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k)}} (t-\beta)^{1-\frac{|m|}{2b}} |PR|^{-n-2b+l-[l]} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\beta,\ |x-y|)\left((\beta-\tau)^{\frac{[l]-\theta}{2b}} |RQ|^{-n-2b-l} \times\right.$$

$$\left.\times E_{c_1}^{\theta}(R;\ Q) + (t-\tau)^{\frac{[l]-\theta}{2b}} |PQ|^{-n-2b-l} E_{c_1}^{\theta}(P;\ Q)\right) dR \Bigg\}. \qquad (14)$$

При $R \in Q_1^{(k)}$ имеем

$$|PR| \geqslant |PQ| - |RQ| \geqslant |PQ| - \frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{1}{2}|PQ|,$$

а для $R \in Q_2^{(k)}$ аналогично получаем, что $|RQ| \geqslant \geqslant \frac{1}{2}|PQ|$.

Используя эти неравенства, а также вытекающее из (2) и (43) § 1 и (14) § 6 неравенство

$$E_{c_2}(t-\beta,\ |x-y|)\, E_{c_1}^{\theta}(R;\ Q) \leqslant E_c^{\theta}(P;\ Q),$$
$$c \equiv \min\{c_1,\ c_2\}, \tag{15}$$

получаем

$$|E_1| + |E_2| \leqslant C\|\omega\|\gamma^{2b+l-|m|}|PQ|^{-n-2b-l} E_c^{\theta}(P;\ Q) \times$$
$$\times\left(\iint\limits_{Q_1^{(k)}} |RQ|^{-n-2b-\theta} dR + \gamma^{-l+[l]-\theta} \iint\limits_{Q_2^{(k)}} |PR|^{-n-2b+l-[l]} dR\right),$$

откуда следует оценка

$$|E_1| + |E_2| \leqslant C\|\omega\|\gamma^{2b+l-|m|-\theta}|PQ|^{-n-2b-l} E_c^{\theta}(P;\ Q). \tag{16}$$

так как последние интегралы не превышают соответственно $C\gamma^{-\theta}$ и $C\gamma^{l-[l]}$. Действительно, оценим, например, первый из них. Введя в нем замену переменных интегрирования с помощью формул $(\beta - \tau)^{1/2b} = z_0$, $y_j - \xi_j = z_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $|z|^2 \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} z_j^2$, и затем переходя к сферическим координатам, получим

$$\iint\limits_{Q_1^{(k)}} |RQ|^{-n-2b-\theta} dR \leqslant C \iint\limits_{\{|z| \leqslant \gamma/2\}} |z|^{-n-2b-\theta} |z_0|^{2b-1} dz \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_0^{\gamma/2} \rho^{-1-\theta} d\rho = C\gamma^{-\theta}.$$

Если $\theta = 0$, то E_2 оцениваем точно так же, как при $\theta < 0$, а E_1 представляем в виде

$$E_1 = \iint\limits_{Q_1^{(k)}} \Delta_R^Q D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\, \varphi(y)\, \omega(R;\ Q)\, dR +$$
$$+ D_x^m H^{(k)}(P;\ Q) \iint\limits_{Q_1^{(k)}} \varphi(y)\, \omega(R;\ Q)\, dR$$

и аналогично предыдущему получаем

$$|E_1| \leqslant C\|w\| \left\{ \iint\limits_{Q_1^{(k)}} ((t-\beta)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}} |PR|^{-n-2b-l} \times \right.$$

$$\times E_{c_2}(t-\beta,\ |x-y|) + \gamma^{2b+[l]-|m|} |PQ|^{-n-2b-l} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\tau,\ |x-\xi|)) |RQ|^{-n-2b+l-[l]} E^0_{c_1}(R;\ Q)\, dR +$$

$$+ \gamma^{2b+l-|m|} |PQ|^{-n-2b-l} E_{c_2}(t-\tau,\ |x-\xi|) \times$$

$$\left. \times \rho^0_{c_1}(t-\tau,\ \xi) \right\} \leqslant C\|w\| \gamma^{2b+l-|m|} |PQ|^{-n-2b-l} E^0_c(P;\ Q).$$

Чтобы получить оценку (16) для E_3, достаточно доказать неравенство

$$E_3^0 \equiv \left| \iint\limits_{Q_2^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\, \varphi(y)\, dR \right| \leqslant C\gamma^{2b-|m|}. \qquad (17)$$

Для $|m| < 2b$ оценка (17) сразу следует из (12). Пусть $|m| = 2b$. При $k = k'$ интегрированием по частям сбрасываем одну производную с Z_0 и результат оцениваем с помощью (7) § 2 и (8). Так, если $D_x^m = D^1_{x_i} D^p_x$, $|p| = 2b-1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$E_3^0 = \left| -\iint\limits_{Q_2^{(k')}} D^1_{y_i} D^p_x Z_0(P-R)\, \varphi(y)\, dR \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_{Q_2^{(k')}} D^p_x Z_0(P-R)\, D^1_{y_i}\varphi(y)\, dy - \int\limits_{\Gamma} D^p_x Z_0(P-R)\, \varphi(y) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\alpha_i(R)\, d\Gamma \right| \leqslant C\left(\frac{h^{\frac{1}{2b}}}{\lambda} + \gamma^{-n-2b+1} \int\limits_{\Gamma} |\cos\alpha_i(R)|\, d\Gamma \right) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{h^{\frac{1}{2b}}}{\lambda} + \gamma^{-n-2b+1} \int\limits_{\{d^{(i)} \leqslant \gamma/2\}} d\beta\, dy^{(i)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C(\varkappa^{\frac{1}{2b}} + 1) \leqslant C. \qquad (18)$$

Здесь $\Gamma \equiv \left\{ R \in Q_{\tau,t}^{(k')} \,\middle|\, |PR| = \frac{\gamma}{2} \right\}$, $\alpha_j(R)$ — угол между внешней нормалью к Γ в точке R и осью y_i, $d^{(i)} \equiv \equiv d(t, x^{(i)}; \beta, y^{(i)})$, $x^{(i)} \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

При $k = k''$ достаточно доказать, что

$$\left| \iint_{S_2} D_x^m G_0(\bar{P}; \bar{R}) \bar{\varphi}(\bar{R}) \, d\bar{R} \right| \leqslant C, \quad |m| = 2b, \tag{19}$$

где S_2 — образ $Q_2^{(k'')}$ при переходе от y к k''-распрямляющим координатам $\bar{y}$. Если $m_n < 2b$, то в интеграле из (19) одну производную по $\bar{x}'$ интегрированием по частям можно перевести от G_0 к $\bar{\varphi}$ и с помощью (7) § 2 и (8) так же, как в случае $k = k'$, получить оценку (19). Если же $m_n = 2b$, то, используя систему, решением которой является матрица G_0, на основании замечания 1 из п. 3 § 1 производную $D_{x_n}^{2b} G_0$ можно выразить через $D_{t,x}^{\bar{p}} G_0$, $|\bar{p}| = 2b$, $p_n < 2b$, а интегралы с такими ядрами уже легко оцениваются. Отметим, что здесь и далее мы пользуемся оценками производных от $\bar{\varphi}$, которые в силу оценок (7) § 2 и формул перехода к распрямляющим координатам имеют вид

$$|D_{\bar{y}}^{\nu} \bar{\varphi}(\bar{y})| \leqslant \frac{C}{\lambda^{|\nu|}}, \quad \bar{y} \in K, \quad |\nu| \leqslant 2b + [l]. \tag{20}$$

Наконец, с помощью (12), условия леммы и неравенства (15) имеем

$$|E_4| \leqslant C \|w\| \gamma^{2b+2l-|m|-\theta} \iint_{Q_3^{(k)}} |PR|^{-n-2b-l} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\tau, |x-y|) |RQ|^{-n-2b-l} E_{c_1}^{\theta}(R; Q) \, dR \leqslant$$

$$\leqslant C \|w\| \gamma^{2b+2l-|m|-\theta} \iint_{Q_3^{(k)}} |PR|^{-n-2b-l} |RQ|^{-n-2b-l} dR.$$

Но так как

$$\iint_{Q_3^{(k)}} [\, |PR|^{-n-2b-l} |RQ|^{-n-2b-l}] \, dR =$$

$$= \iint_{Q_3^{(k)} \cap \{|PR| \leqslant |PQ|/2\}} [\cdot] \, dR + \iint_{Q_3^{(k)} \cap \{|PR| > |PQ|/2\}} [\cdot] \, dR \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(|PQ|^{-n-2b-l}\iint\limits_{\{\gamma/2<|z|\leqslant|PQ|/2\}}|z|^{-n-1-l}dz+$$

$$+|PQ|^{-n-2b-l}\iint\limits_{\{|z|>\gamma/2\}}|z|^{-n-1-l}dz\Big)\leqslant C|PQ|^{-n-2b-l}\gamma^{-l},$$

то отсюда получаем для E_4 оценку (16).

Итак, установлены оценки

$$|D_x^m u^{(k)}(P;\ Q)|\leqslant C\|w\|\gamma^{2b+l-|m|-\theta}|PQ|^{-n-2b-l}E_c^{\theta}(P;\ Q),$$

$$P\in Q_{\tau,\tau_1}^{(k)},\quad Q\in\Omega_0^{\tau},\quad |m|\leqslant 2b. \tag{21}$$

Оценим приращение производных $D_x^m u^{(k)}$, $|m|\leqslant 2b$. Пусть P и P^0 — произвольно фиксированные точки из $Q_{\tau,\tau_1}^{(k)}$, причем $t<t^0$, и пусть $\delta\equiv|PP^0|$. Если $\delta\geqslant\frac{\gamma}{4}$, то из (21) сразу следует оценка

$$|\Delta_P^{P^0}D_x^m u^{(k)}|\leqslant C\|w\|\delta^{l-[l]}(\gamma^{2b+[l]-|m|-\theta}|PQ|^{-n-2b-l}\times$$

$$\times E_c^{\theta}(P;\ Q)+(t^0-\tau)^{1+\frac{[l]-|m|-\theta}{2b}}|P^0Q|^{-n-2b-l}E_c^{\theta}(P^0;\ Q)). \tag{22}$$

Установим оценку (22) в случае $\delta<\frac{\gamma}{4}$. Для этого, как и раньше, область интегрирования представим в виде $Q_{\tau,t}^{(k)}=Q_1^{(k)}\cup Q_2^{(k)}\cup Q_3^{(k)}$, а затем из $Q_2^{(k)}$ выделим его часть $Q_{2\delta}^{(k)}\equiv\{R\in Q_2^{(k)}\mid |PR|\leqslant 2\delta\}$.

Итак, сначала запишем представление

$$\Delta_P^{P^0}D_x^m u^{(k)}=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\iint\limits_{Q_1^{(k)}}\Delta_P^{P^0}D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,w(R;\ Q)\,dR,$$

$$I_2\equiv\iint\limits_{Q_2^{(k)}}D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P w(R;\ Q)\,dR-$$

$$-\iint\limits_{Q_2^{(k)}}D_{x^0}^m H^{(k)}(P^0;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^{P^0}w(R;\ Q)\,dR+$$

$$+\iint\limits_{Q_2^{(k)}}D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,dR\,w(P;\ Q)-$$

$$-\iint\limits_{Q_2^{(k)}} D_{x^0}^m H^{(k)}(P^0;\ R)\,\varphi(y)\,dR w(P^0;\ Q),$$

$$I_3 \equiv \iint\limits_{Q_3^{(k)}} \Delta_P^{P^0} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,w(R;\ Q)\,dR.$$

Оценка (22) для I_1 доказывается так же, как оценка (16) для E_1. При $\theta < 0$ ее получаем непосредственно, а при $\theta = 0$ I_1 представляем в виде

$$I_1 = \iint\limits_{Q_1^{(k)}} \Delta_P^{P^0} \Delta_R^Q D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,w(R;\ Q)\,dR +$$

$$+ \Delta_P^{P^0} D_x^m H^{(k)}(P,\ Q) \iint\limits_{Q_1^{(k)}} \varphi(y)\,w(R;\ Q)\,dR,$$

откуда аналогично предыдущему получаем

$$|I_1| \leqslant C\|w\|\delta^{l-[l]}\Biggl\{\iint\limits_{Q_1^{(k)}} ((t-\beta)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}}\,|PR|^{-n-2b-2l+[l]} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\beta,\ |x-y|) + \gamma^{2b+[l]-|m|}\,|PQ|^{-n-2b-2l+[l]} \times$$

$$\times E_{c_2}(t-\tau,\ |x-\xi|) + (t^0-\beta)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}} \times$$

$$\times |P^0R|^{-n-2b-2l+[l]}\,E_{c_2}(t^0-\beta,\ |x^0-y|) +$$

$$+ (t^0-\tau)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}}\,|P^0Q|^{-n-2b-2l+[l]}\,E_{c_2}(t^0-\tau,\ |x^0-\xi|))\times$$

$$\times |RQ|^{-n-2b+l-[l]}\,E_{c_1}^0(R;\ Q)\,dR + (\gamma^{2b+[l]-|m|} \times$$

$$\times |PQ|^{-n-2b-l}\,E_{c_2}(t-\tau,\ |x-\xi|) + (t^0-\tau)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}} \times$$

$$\times |P^0Q|^{-n-2b-l} E_{c_2}(t^0-\tau,\ |x^0-\xi|))\,\rho_{c_1}^0(t-\tau,\ \xi)\Biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C\|w\|\delta^{l-[l]}\{\gamma^{2b+[l]-|m|}\,|PQ|^{-n-2b-2l+[l]}\,E_c^0(P;\ Q) +$$

$$+ (t^0-\tau)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}}\,|P^0Q|^{-n-2b-2l+[l]} E_c^0(P^0;\ Q)) \times$$

$$\times \iint\limits_{Q_1^{(k)}} |RQ|^{-n-2b+l-[l]}\,dR + (\gamma^{2b+[l]-|m|}\,|PQ|^{-n-2b-l}\,E_c^0 \times$$

$$\times (P;\ Q) + (t^0 - \tau)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}} \,|\,P^0Q\,|^{-n-2b-l} E_c^0(P^0;\ Q))\} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\omega\|\,\delta^{l-[l]}\,(\gamma^{2b+[l]-|m|}\,|\,PQ\,|^{-n-2b-l} E_c^0(P;\ Q) +$$

$$+ (t^0 - \tau)^{1+\frac{[l]-|m|}{2b}} \,|\,P^0Q\,|^{-n-2b-l} E_c^0(P^0;\ Q)).$$

Перейдем к оценке I_2. Представим I_2 в виде

$$I_2 = \iint\limits_{Q_{2\delta}^{(k)}} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P \omega(R;\ Q)\,dR -$$

$$- \iint\limits_{Q_{2\delta}^{(k)}} D_{x^0}^m H^{(k)}(P^0;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^{P^0} \omega(R;\ Q)\,dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k)} \setminus Q_{2\delta}^{(k)}} \Delta_P^{P^0} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P \omega(R;\ Q)\,dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k)}} \Delta_P^{P^0} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,dR\,\omega(P;\ Q) +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{2\delta}^{(k)}} D_{x^0}^m H^{(k)}(P^0;\ R)\,\varphi(y)\,dR\,\Delta_P^{P^0} \omega(P;\ Q) \equiv \sum_{i=1}^{5} I_2^{(i)}.$$

Интегралы $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(2)}$ оцениваются так же, как E_2, только нужно учесть, что для $R \in Q_{2\delta}^{(k)}$ $|\,P^0R\,| \leqslant |\,PR\,| + |\,PP^0\,| \leqslant 3\delta$, а $\iint\limits_{Q_{2\delta}^{(k)}} |\,PR\,|^{-n-2b+l-[l]}\,dR \leqslant C\delta^{l-[l]}$.

В случае $k = k'$, используя для Z_0 формулу (8) с $r = [l] + \alpha$, $l - [l] < \alpha < 1$, аналогично тому, как оценивалось E_2, получаем

$$|\,I_2^{(3)}\,| \leqslant C\|\omega\|\,\delta^\alpha \Big\{\gamma^{2b+[l]-|m|-\theta}\,|\,PQ\,|^{-n-2b-l} E_c^\theta(P;\ Q) \times$$

$$\times \Bigg(\iint\limits_{Q_2^{(k')} \setminus Q_{2\delta}^{(k')}} |\,PR\,|^{-n-2b-\alpha+l-[l]} dR +$$

$$+ \iint\limits_{Q_2^{(k')} \setminus Q_{2\delta}^{(k')}} |\,P^0R\,|^{-n-2b-\alpha}\,|\,PR\,|^{l-[l]} dR\Bigg) +$$

$$+(t^0-\tau)^{1+\frac{[l]-|m|-\theta}{2b}}|P^0Q|^{-n-2b-l}E_l^{\theta}(P^0;\ R)\times$$

$$\left.\times\iint\limits_{Q_2^{(k')}\setminus Q_{2\delta}^{(k')}}|P^0R|^{-n-2b-\alpha}|PR|^{l-[l]}dR\right\},$$

откуда следует оценка (22), так как

$$\iint\limits_{Q_2^{(k')}\setminus Q_{2\delta}^{(k')}}|PR|^{-n-2b-\alpha+l-[l]}dR\leqslant C\int\limits_{2\delta}^{\infty}\rho^{l-[l]-\alpha-1}d\rho=$$

$$=C\delta^{l-[l]-\alpha},$$

$$\iint\limits_{Q_2^{(k')}\setminus Q_{2\delta}^{(k')}}|P^0R|^{-n-2b-\alpha}|PR|^{l-[l]}dR\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_{\delta}^{\infty}\rho^{l-[l]-\alpha-1}d\rho+\delta^{l-[l]}\int\limits_{\delta}^{\infty}\rho^{-\alpha-1}d\rho\right)=C\delta^{l-[l]-\alpha}.$$

Для получения оценки $I_2^{(3)}$ в случае $k=k''$ заметим, что

$$D_x^mH^{(k)}(P;\ R)=\sum_{|\nu|\leqslant|m|}f_\nu(x)K_\nu(P;\ R),\qquad(23)$$

где f_ν определяются производными от функции F до порядка $|m|$, они ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $l-[l]$, а $K_\nu(P;\ R)\equiv\Pi_{\bar x}^{x}\Pi_{\bar y}^{y}\times\times D_{\bar x}^{\nu}G_0(\bar P;\ \bar R)$. В силу (8) $K_\nu\in U_{\alpha,\alpha}^{2b-|\nu|}(Q_{\tau,\tau_1}^{(k'')},\ \tilde Q_{\tau,\tau_1}^{(k'')};\ C,\ c_2)$ с любым $\alpha\in(0,\ 1)$. Используя (23), запишем

$$I_2^{(3)}=\sum_{|\nu|\leqslant|m|}\left(\Delta_x^{x^0}f_\nu\iint\limits_{Q_2^{(k'')}\setminus Q_{2\delta}^{(k'')}}K_\nu(P;R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P\omega(R;Q)\,dR+\right.$$

$$\left.+f_\nu(x^0)\iint\limits_{Q_2^{(k'')}\setminus Q_{2\delta}^{(k'')}}\Delta_P^{P^0}K_\nu(P;\ R)\,\varphi(y)\,\Delta_R^P\omega(R;\ Q)\,dR\right).$$

Первый интеграл из выражения под знаком суммы оценивается так же, как E_2, а второй — как $I_2^{(3)}$ при $k=k'$.

Чтобы доказать оценку (22) для $I_2^{(4)}$ и $I_2^{(5)}$, достаточно убедиться в справедливости неравенств

$$\left| \iint\limits_{Q_2^{(k)}} \Delta_P^{P^0} D_x^m H^{(k)}(P;\ R)\,\varphi(y)\,dR \right| \leqslant C\delta^{l-[l]}\gamma^{2b-l+[l]-|m|},$$

$$\left| \iint\limits_{Q_{2\delta}^{(k)}} D_{x^0}^m H^{(k)}(P^0;\ R)\,\varphi(y)\,dR \right| \leqslant C\delta^{2b-|m|}.$$

Доказательство этих неравенств аналогично доказательству неравенства (17).

Поскольку интеграл I_3 оценивается аналогично E_4, то оценку (22) можно считать доказанной.

Оценим производные $D_x^m u^{(k)}$, $0 < |m| - 2b \leqslant [l]$. Для этого получим их специальное представление. Пусть P — произвольно фиксированная точка из $Q_{\tau,\tau_1}^{(k)}$. Рассмотрим функцию $u^{(k)}(t,\ z;\ Q)$ для z из окрестности точки x, которая лежит внутри $\Omega_0^{(k)}$ и для которой $|z - x| \leqslant \frac{\gamma}{4}$, и представим ее в виде

$$u^{(k)}(t,\ z;\ Q) = \sum_{i=1} \iint\limits_{Q_i^{(k)}} H^{(k)}(t,\ z;\ R)\,\varphi(y)\,\omega(R;\ Q)\,dR, \tag{24}$$

где $Q_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$,— те же, что и в (13). Первое и третье слагаемые допускают дифференцирование по z под знаком интеграла для всех рассматриваемых точек z, в том числе и $z = x$. Получающиеся при этом интегралы оцениваются так же, как E_1 и E_4. Наибольшую трудность представляет изучение функции

$$D_z^m v^{(k)}(t,\ z;\ Q)\,|_{z=x} \equiv D_z^m \iint\limits_{Q_2^{(k)}} H^{(k)}(t,\ z;\ R)\,\varphi(y)\,\omega \times$$

$$\times (R;\ Q)\,dR\,|_{z=x},\quad P \in Q_{\tau,\tau_1}^{(k)},\quad Q \in \Omega_0^{\tau}.$$

При дифференцировании $v^{(k)}$ в случае $k = k'$ можно перевести интегрированием по частям $|m| - 2b$ производных от $H^{(k)}$ к $\varphi\omega$ и результат записать в виде

$$D_z^m v^{(k)}(t,\ z;\ Q)\,|_{z=x} =$$

$$= \iint\limits_{Q_2^{(k')}} D_x^p Z_0(P - R) \sum_{\mu+\nu=m-p} C_{\mu\nu} D_y^{\mu}\varphi(y)\,\Delta_R^P D_y^{\nu}\omega \times$$

$$\times (R;\ Q)\,dR + \sum_{\mu+\nu=m-p} C_{\mu\nu} \iint\limits_{Q_2^{(k')}} D_x^p Z_0(P-R)\, D_y^{\mu}\varphi(y) \times$$

$$\times\, dR D_x^{\nu} w(P;\ Q) - \sum_{\mu+\nu<m-p} \int\limits_{\Gamma} D_x^{p+\mu} Z_0(P-R)\, D_y^{\nu} \times$$

$$\times\, (\varphi(y)\, w(R;\ Q)) \cos\alpha_i(R)\, d\Gamma, \tag{25}$$

где $p < m$, $|p| = 2b$, а Γ и $\alpha_i(R)$ — те же, что и в (18). Первые два слагаемые из (25) оцениваются так же, как E_2 и E_3, а оценка последнего очевидна.

В случае $k = k''$ получить формулу для $D_z^m v^{(k'')}|_{z=x}$, удобную для дальнейших оценок, значительно труднее, потому что нельзя, вообще говоря, так непосредственно переводить производные от $H^{(k'')}$ к φw. Заметим, что поскольку

$$v^{(k'')}(t,\ z;\ Q) = \Pi_z^{\bar z} \bar v(t,\ \bar z;\ Q),$$

$$\bar v(t,\ \bar z;\ Q) \equiv \iint\limits_{S_2} G_0(t,\ \bar z;\ \bar R)\, \bar\varphi(\bar y)\, \bar w(\bar R;\ Q)\, d\bar R,$$

где S_2 уже встречалось в (19), то достаточно получить оценки производных $D_{\bar z}^m \bar v|_{\bar z=\bar x}$, $0 < |m| - 2b \leqslant [l]$. При получении формулы для этих производных функция $\bar v$ приближается специальной последовательностью так, чтобы при оценках сохранялся тип соответствующих экспонент.

Введем последовательность функций

$$\bar v^{(r)}(t,\ \bar z;\ Q) \equiv \sum_{i=0}^{r} \iint\limits_{S_{2i}} G_0(t,\ \bar z;\ \bar R)\, \bar\varphi(\bar y)\, \bar w(\bar R;\ Q)\, d\bar R \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_{S_2^{(r)}} G_0(t,\ \bar z;\ \bar R)\, \bar\varphi(\bar y)\, \bar w(\bar R;\ Q)\, d\bar R, \tag{26}$$

$$(t,\ \bar z) \in S_2, \quad Q \in \Omega_0^{\tau}, \quad r \geqslant 0,$$

где $S_{2i} \equiv \{\bar R \in S_2 \mid \beta \in (t_i,\ t_{i+1}]\}$, $t_i = t - 2^{-i}(t - t_0)$, $i \geqslant 0$, t_0 — наименьшее значение первой координаты точки $\bar R \in S_2$; $S_2^{(r)} \equiv \bigcup_{i=0}^{r} S_{2i}$. Очевидно, что $\bar v^{(r)} \to \bar v$, $r \to \infty$ и

$$D_{\bar z}^m \bar v^{(r)} = \iint\limits_{S_2^{(r)}} D_{\bar z}^m G_0 \bar\varphi \bar w\, d\bar R.$$

Используя систему, решением которой является G_0, и то, что G_0 является функцией от разностей $t - \beta$ и $\bar z' - \bar y'$, на основании замечания 1 из п. 3 § 1 получаем выражение

$$D_{\bar z}^m G_0(t, \bar z; \bar R) = \sum_{\{\bar\nu \mid |\bar\nu| = |m|, \nu_n < 2b\}} a_{m\bar\nu} D_{t,\bar z}^{\bar\nu} G_0(t, \bar z; \bar R) =$$

$$= \sum_{\{\bar\nu \mid |\bar\nu| = |m|, \nu_n < 2b\}} (-1)^{\nu_0 + |\nu'|} a_{m\bar\nu} D_{\bar R'}^{\bar\nu'} D_{\bar z_n}^{\nu_n} G_0(t, \bar z; \bar R), \quad (27)$$

где числа $a_{m\bar\nu}$ определяются коэффициентами системы из (10) § 2.

Пусть мультииндекс $\bar\mu'$ таков, что $\bar\mu' \leqslant \bar\nu'$ и $|\bar\mu'|$ принимает наибольшее значение, не превышающее $[l]$. Используя выражение (27) и свойства φ, с помощью интегрирования по частям получаем

$$D_{\bar z}^m \bar v^{(r)} = \sum_{\{\bar\nu \mid |\bar\nu| = |m|, \nu_n < 2b\}} a_{m\bar\nu} \Biggl\{ J_{\bar\nu}^{(r)} -$$

$$- \sum_{0 < \eta' \leqslant \mu'} \int_{\Gamma_2^{(r)}} D_{t,\bar z}^{\bar\nu - \eta'} G_0 D_{\bar y'}^{\zeta'} (\bar\varphi \bar w) \cos \alpha_i \, d\Gamma_2^{(r)} -$$

$$- \sum_{\eta_0 = 1}^{\mu_0} \int_{\Gamma_2^{(r)}} D_t^{\nu_0 - \eta_0} D_{\bar z}^{\bar\nu - \bar\mu'} G_0 D_\beta^{\eta_0 - 1} D_{\bar y'}^{\bar\mu'} (\bar\varphi \bar w) \cos \alpha_0 \, d\Gamma_2^{(r)} -$$

$$- \sum_{\eta_0 = 1}^{\mu_0} \int_{K_{r+1}} D_t^{\nu_0 - \eta_0} D_{\bar z}^{\bar\nu - \bar\mu'} G_0 D_\beta^{\eta_0 - 1} D_{\bar y'}^{\bar\mu'} (\bar\varphi \bar w) \, d\bar y \Bigr|_{\beta = t_{r+1}} \Biggr\}, \quad (28)$$

где

$$J_{\bar\nu}^{(r)} = \iint_{S_2^{(r)}} D_{t,\bar z}^{\bar\nu - \bar\mu'} G_0 D_{\bar R'}^{\bar\mu'} (\bar\varphi \bar w) \, d\bar R, \quad (29)$$

$\Gamma_2^{(r)}$ — «кривая» часть границы $S_2^{(r)}$, то есть та ее часть, которая является образом множества $\left\{ R \in Q_2^{(k'')} \mid \times \times \mid PR \mid = \frac{\gamma}{2} \right\}$ при переходе к k''-распрямляющим координатам; K_{r+1} — часть границы $S_2^{(r)}$, принадлежащая гиперплоскости $\beta = t_{r+1}$; α_i и α_0 — углы между внешней нормалью к $\Gamma_2^{(r)}$ в точке $\bar R$ и соответственно осями y_i и β; мультииндекс ζ' таков, что $D_{\bar y'}^{\eta'} = D_{\bar y_i}^{1} D_{\bar y'}^{\zeta'}$.

Преобразуем интеграл (29). При $|\bar{\nu}| - |\bar{\mu}'| \leqslant 2b$ имеем

$$J_{\bar{\nu}}^{(r)} = \sum_{\eta' \leqslant \mu'} C_{\mu'\eta'} \left(\iint\limits_{S_2^{(r)}} D_{t,\bar{z}}^{\bar{\nu}-\bar{\mu}'} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} \Delta_{\bar{R}}^{t,\bar{z}} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} d\bar{R} + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{S_2^{(r)}} D_{t,\bar{z}}^{\bar{\nu}-\bar{\mu}'} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} d\bar{R} D_{t,\bar{z}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega}(t, \bar{z};\, Q) \right), \tag{30}$$

а если $|\bar{\nu}| - |\bar{\mu}'| > 2b$, что возможно только тогда, когда $\bar{\nu}' - \bar{\mu}' = (1,\ 0)$, $0 < \nu_n < 2b$, $[l] - 2b < |\bar{\mu}'| < [l]$, то запишем

$$J_{\bar{\nu}}^{(r)} = \sum_{\eta' \leqslant \mu'} C_{\mu'\eta'} \iint\limits_{S_2^{(r)}} D_t^1 D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}}^{\eta'} \bar{\varphi} D_{\bar{R}}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} d\bar{R} =$$

$$= \sum_{\{\eta' \leqslant \mu' \,|\, |\eta'| \geqslant |\mu'| + 2b - [l]\}} C_{\mu'\eta'} \left(\iint\limits_{S_2^{(r)}} D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} D_\beta^1 D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} d\bar{R} - \right.$$

$$- \int\limits_{\Gamma_2^{(r)}} D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} D_{\bar{R}}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} \cos \alpha_0 d\Gamma_2^{(r)} -$$

$$\left. - \int\limits_{K_{r+1}} D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} d\bar{y} \Big|_{\beta = t_{r+1}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r} \sum_{\{\eta' \leqslant \mu' \,|\, |\eta'| < |\bar{\mu}'| + 2b - [l]\}} C_{\mu'\eta'} \left(\iint\limits_{S_{2i}} D_t^1 D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} \times \right.$$

$$\left. \times \Delta_\beta^{t_i} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} d\bar{R} + \iint\limits_{S_{2i}} D_t^1 D_{\bar{z}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta} \bar{\varphi} \left(D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{\omega} \Big|_{\beta = t_i} \right) d\bar{R} \right). \tag{31}$$

Далее преобразуем последние интегралы из (30) и (31), обозначив их соответственно через $\tilde{J}_{\bar{\nu}}^{(r)}$ и $\tilde{J}_{\bar{\nu}i}^{(r)}$. Интеграл $\tilde{J}_{\bar{\nu}}^{(r)}$ преобразовывать нужно только в случае, когда $|\bar{\nu}| - |\bar{\mu}'| = 2b$. Поскольку в этом случае $D_{t,\bar{z}}^{\bar{\nu}-\bar{\mu}'}$ равно D_t^1 или $D_{\bar{z}_j}^1 D_{\bar{z}}^{\zeta}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $|\zeta| = 2b - 1$, то интегрированием по частям можно сбросить с G_0 производную по t или $\bar{z}_j$. Предполагая, что имеет место второй случай, получаем

$$\tilde{J}^{(r)}_{\bar\nu}=\iint\limits_{S_2^{(r)}} D^{\bar\zeta}_{\bar z}G_0D^{1}_{\bar y_j}D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi d\bar R-\int\limits_{\Gamma_2^{(r)}} D^{\bar\zeta}_{\bar z}G_0D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi\cos\alpha_i d\Gamma_2^{(r)}. \quad (32)$$

С помощью интегрирования по частям имеем

$$\tilde{J}^{(r)}_{\bar\nu i}=-\int\limits_{\Gamma_{2i}} D^{\nu_n}_{\bar z_n}G_0D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi\,(D^{\bar\mu'-\bar\eta'}_{\bar R'}\bar w\,|_{\beta=t_i})\cos\alpha_0 d\Gamma_{2i}+$$

$$+\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\int\limits_{K_{i+j}} D^{\nu_n}_{\bar z_n}G_0\,|_{\beta=t_{i+j}}D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi\,(D^{\bar\mu'-\bar\eta'}_{\bar R'}\bar w\,|_{\beta=t_i})\,d\bar y, \quad (33)$$

где Γ_{2i} — «кривая» часть границы S_{2i}, а K_i — та часть границы S_{2i}, которая принадлежит гиперплоскости $\beta=t_i$.

Подставив интегралы (32) и (33) соответственно в (30) и (31), а последние результаты в равенство (28), перейдем в (28) к пределу при $r\to\infty$. Правая часть равенства (28) сходится равномерно по $\bar z$ из некоторой окрестности точки $\bar x$ к определенному пределу. Следовательно, этот предел совпадает с $D^{m}_{\bar z}\bar v$. Взяв его при $\bar z=\bar x$, получим искомую формулу:

$$D^{m}_{\bar x}\bar v=\sum_{\{\bar\nu\,|\,|\bar\nu|=|m|,\nu_n<2b\}} a_{m\bar\nu}\Bigg\{J_{\bar\nu}-$$

$$-\sum_{0<\eta'\leqslant\mu'}\int\limits_{\Gamma_2} D^{\bar\nu-\eta'}_{\bar P}G_0D^{\bar\zeta'}_{\bar y'}(\bar\varphi\bar w)\cos\alpha_i d\Gamma_2-$$

$$-\sum_{\eta_0=1}^{\mu_0}\int\limits_{\Gamma_2} D^{\nu_0-\eta_0}_{t}D^{\nu-\mu'}_{\bar x}G_0D^{\eta_0-1}_{\beta}D^{\mu'}_{\bar y'}(\bar\varphi\bar w)\cos\alpha_0 d\Gamma_2-$$

$$-\sum_{|\bar\eta|=|\bar\nu|-2b} a_{\bar\nu\bar\eta}D^{\bar\eta}_{\bar P}(\bar\varphi\bar w)\Bigg\}, \quad (34)$$

где $J_{\bar\nu}\equiv\lim\limits_{r\to\infty}J^{(r)}_{\bar\nu}$, при этом в случае, когда $|\bar\nu|-|\bar\mu'|=2b$,

$$J_{\bar\nu}=\sum_{\eta'\leqslant\mu'}\Bigg\{\iint\limits_{S_2} D^{\bar\nu-\bar\mu'}_{\bar P}G_0D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi\Delta^{\bar P}_{\bar R}D^{\bar\mu'-\eta'}_{\bar R'}\bar w d\bar R+$$

$$+\Bigg(\iint\limits_{S_2} D^{\bar\zeta}_{\bar x}G_0D^{1}_{\bar y_j}D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi d\bar R-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_2} D^{\bar\zeta}_{\bar x}G_0D^{\bar\eta'}_{\bar y'}\bar\varphi\cos\alpha_i d\Gamma_2\Bigg)D^{\bar\mu'-\eta'}_{\bar P'}\bar w\Bigg\}, \quad (35)$$

а если $|\bar{\nu}| - |\bar{\mu}'| > 2b$, то

$$J_{\bar{\nu}} = \sum_{\{\eta' \leqslant \mu' \,|\, |\eta'| \geqslant |\bar{\mu}'| + 2b - [l]\}} C_{\mu'\eta'} \left(\iint\limits_{S_2} D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} \times \right.$$

$$\times D_\beta^1 D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w} d\bar{R} - \int\limits_{\Gamma_2} D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w} \cos \alpha_0 d\Gamma_2 -$$

$$\left. - D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} (D_{\bar{x}'}^{\eta'} \bar{\varphi} D_{\bar{P}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w}) \right) + \sum_{\{\eta' \leqslant \mu' \,|\, |\eta'| < |\bar{\mu}'| + 2b - [l]\}} C_{\mu\eta'} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left(\iint\limits_{S_{2i}} D_t^1 D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} \Delta_\beta^{t_i} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w} d\bar{R} - \right. \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma_{2i}} D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} (D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w} |_{\beta = t_i}) \cos \alpha_0 d\Gamma_{2i} \right) +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{K_i} (D_{\bar{x}_n}^{\nu_n} G_0 D_{\bar{y}'}^{\eta'} \bar{\varphi} \Delta_\beta^{t_{i-1}} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'-\eta'} \bar{w} |_{\beta = t_i} d\bar{y} \right\}. \qquad (36)$$

Последняя сумма из фигурных скобок в (34) является значением при $\bar{z} = \bar{x}$ предела последней суммы из фигурных скобок в (28). В силу теоремы 3 § 2 $G_0(t, \bar{z}; \bar{R}) = Z_0(t - \beta, \bar{z} - \bar{y}) - V_0(t, \bar{z}; \bar{R})$, где Z_0 — фундаментальная матрица решений задачи Коши для системы из (10) § 2, а оценки V_0 содержат множитель $E_c(t - \beta, |\bar{z} - \bar{y}| + \bar{y}_n) \leqslant E_{c-\varepsilon}(t - \beta, |\bar{z} - \bar{y}| + \bar{y}_n) E_\varepsilon \times (t - \beta, \bar{z}_n)$, $0 < \varepsilon < c$. Поэтому для точек $\bar{z}$ из некоторой окрестности U_δ точки $\bar{x}$ радиуса $\delta > 0$ (δ берем настолько малым, чтобы $U_{3\delta}$ лежало внутри K) получим

$$\int\limits_{K_{r+1}} D_t^{\nu_0 - \eta_0} D_{\bar{z}}^{\nu - \eta'} V_0 D_\beta^{\eta_0 - 1} D_{\bar{y}'}^{\mu'} (\bar{\varphi}\bar{w}) d\bar{y} |_{\beta = t_{r+1}} \to 0, \quad r \to \infty.$$

Далее пусть χ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $U_{3\delta}$, равная единице в $U_{2\delta}$. Выразив с помощью системы, решением которой является Z_0, производные Z_0 по t через ее производные по $\bar{z}$, запишем представление

$$\sum_{\eta_0=1}^{\mu_0} \int\limits_{K_{r+1}} D_t^{\nu_0 - \eta_0} D_{\bar{z}}^{\nu - \mu'} Z_0 D_\beta^{\eta_0 - 1} D_{\bar{y}'}^{\mu'} (\bar{\varphi}\bar{w}) d\bar{y} |_{\beta = t_{r+1}} =$$

$$= \sum_{\eta_0=1}^{\mu_0} \sum_{\{\zeta \mid |\zeta| = |\bar{\nu}| - |\mu'| - 2b\eta_0\}} b_{\bar{\nu}\zeta} \left\{ \int_{U_{3\delta}} (-D_{\bar{y}})^{\zeta} Z_0(t-\beta, \bar{z}-\bar{y}) \times \right.$$

$$\times \chi(\bar{y}) D_{\bar{y}'}^{\mu'} (\bar{\varphi}(\bar{y}) D_\beta^{\eta_0-1} \bar{w}(\bar{R}; Q))\, d\bar{y}\, |_{\beta=t_{r+1}} +$$

$$+ \int_{K_{r+1} \setminus U_{2\delta}} D_{\bar{z}}^{\zeta} Z_0(t-\beta, \bar{z}-\bar{y})(1-\chi(\bar{y})) \times$$

$$\left. \times D_{\bar{y}'}^{\mu'} (\varphi(\bar{y}) D_\beta^{\eta_0-1} \bar{w}(\bar{R}; Q))\, d\bar{y}\, |_{\beta=t_{r+1}} \right\}.$$

Для $\bar{z} \in U_\delta$ предел последнего интеграла при $r \to \infty$ равен, очевидно, нулю. В первом интеграле интегрированием по частям сбросим с Z_0 все производные (при этом интегралы по границе $U_{3\delta}$ равны нулю в силу свойства функции χ) и перейдем к пределу при $r \to \infty$, считая $\bar{z} \in U_\delta$. На основании того, что

$$\lim_{\beta \to t} \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t-\beta, \bar{z}-\bar{y}) f(\bar{y})\, d\bar{y} = f(\bar{z}), \quad \bar{z} \in \mathbb{R}^n,$$

в пределе получим выражение, значение которого при $\bar{z} = \bar{x}$ совпадает с соответствующим слагаемым последней суммы из фигурных скобок в (34).

Аналогично появляются выражения в (36), не содержащие интегралов.

Теперь нужно провести оценки выражений из (34) — (36). Это делается с помощью методики, использованной выше для случая $|m| \leqslant 2b$. Остановимся кратко лишь на оценке выражения из фигурных скобок в формуле (36), которое обозначим через $J'_{\bar{\nu}}$.

Используя (8) для G_0, оценки w и неравенства (20), получаем

$$|J'_{\bar{\nu}}| \leqslant C\|w\| \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \iint_{S_{2i}} (t-\beta)^{1+\frac{|l|-|m|}{2b}} |\bar{P}\bar{R}|^{-n-2b-|l|+|\bar{\mu}'|} \times \right.$$

$$\times E_{c_0}(t-\beta, |\bar{x}-\bar{y}|)(\beta-t_i)^{\frac{l-|\bar{\mu}'|}{2b}} (\beta-\tau)^{-\frac{\theta}{2b}} \times$$

$$\times |R_i Q|^{-n-2b-l} E_{c_1}^{\theta}(R; Q)\, d\bar{R} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{2i}} (t-\beta)^{1-\frac{\nu_n}{2b}} |\bar{P}\bar{R}|^{-n-2b} E_{c_0}(t-\beta, |\bar{x}-\bar{y}|) \times$$

$$\times (t_i - \tau)^{\frac{l - |\mu'| - \theta}{2b}} |R_i Q|^{-n-2b-l} E^{\theta}_{c_1}(R;\ Q) |\cos\alpha_0| \, d\Gamma_{2i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_{K_i} (t - t_i)^{1 - \frac{\nu_n}{2b}} |\bar{P}\bar{R}_i|^{-n-2b} E_{c_0}(t - t_i, |\bar{x} - \bar{y}|) \times$$

$$\left. \times (t_i - t_{i-1})^{\frac{l - |\bar{\mu}'|}{2b}} (t_i - \tau)^{-\frac{\theta}{2b}} |R_{i-1} Q|^{-n-2b-l} E^{\theta}_{c_1}(R_i;\ Q) \, d\bar{y} \right\},$$

$$R_i \equiv (t_i, y), \quad \bar{R}_i \equiv (t_i, \bar{y}).$$

Отсюда в силу неравенств (9) и (10) § 6, неравенства (15) и того, что для $\beta \in (t_i, \ t_{i+1}]$ $\beta - t_i \leqslant t - \beta \leqslant \leqslant |PR|^{2b}$, $t - \beta \leqslant t - t_i$; $t_i - t_{i-1} = t - t_i$; $\nu_n = = |m| - |\bar{\mu}'| - 2b$;

$$\sum_{i=0}^{\infty} \iint_{S_{2i}} \ldots \, d\bar{R} = \iint_{S_2} \ldots \, d\bar{R}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{2i}} \ldots \, d\Gamma_{2i} = \int_{\Gamma_2} \ldots \, d\Gamma_2,$$

имеем

$$|J'_{\bar{\nu}}| \leqslant C \|w\| \gamma^{2b + [l] - |m| - \theta} |PQ|^{-n-2b-l} E^{\theta}_c(P;\ Q) \times$$

$$\times \left(\iint_{S_2} |PR|^{-n-2b+l-[l]} \, d\bar{R} + \gamma^{2b+l-[l]} \int_{\Gamma_2} |PR|^{-n-2b} \times \right.$$

$$\left. \times |\cos\alpha_0| \, d\Gamma_2 + \sum_{i=1}^{\infty} (t - t_i)^{\frac{\varepsilon}{2b}} \int_{K_i} |\bar{P}\bar{R}_i|^{-n+l-[l]-\varepsilon} d\bar{y} \right),$$

$$0 < \varepsilon < l - [l].$$

Из этого неравенства следует оценка

$$|J'_{\bar{\nu}}| \leqslant C \|w\| \gamma^{2b + l - |m| - \theta} |PQ|^{-n-2b-l} E^{\theta}_c(P;\ Q),$$

так как для $\bar{R} \in \Gamma_2$ $|PR| = \frac{\gamma}{2}$ и справедливы неравенства

$$\iint_{S_2} |PR|^{-n-2b+l-[l]} \, d\bar{R} = \iint_{Q_2^{(k'')}} |PR|^{-n-2b+l-[l]} \, dR \leqslant C\gamma^{l-[l]},$$

$$\int_{\Gamma_2} |\cos\alpha_0| \, d\Gamma_2 \leqslant \int_{\{|\bar{x} - \bar{y}| \leqslant C\gamma\}} d\bar{y} = C\gamma^n, \qquad (37)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(t-t_i)^{\frac{\varepsilon}{2b}}\int_{K_i}|\overline{P}\overline{R}_i|^{-n+l-[l]-\varepsilon}\,d\bar{y}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}2^{-\frac{\varepsilon i}{2b}}(t-t_0)^{\frac{\varepsilon}{2b}}\int_{\{|\bar{x}-\bar{y}|\leqslant C\gamma\}}|\bar{x}-\bar{y}|^{-n+l-[l]-\varepsilon}d\bar{y}\leqslant$$

$$\leqslant C\gamma^{l-[l]}\sum_{i=1}^{\infty}2^{-\frac{\varepsilon l}{2b}}=C\gamma^{l-[l]}.$$

Для завершения доказательства леммы нужно еще оценить приращения производных $D_x^m u^{(k)}$ по P для $0<|m|-2b\leqslant[l]$ и дополнительно приращения по t для $[l]-2b<|m|-2b<[l]$. Для этого нужно на основании формул (24), (25), (34) — (36) так же, как в случае $|m|\leqslant 2b$, получить представления этих приращений. Оценки выражений из таких представлений аналогичны оценкам соответствующих выражений в случае $|m|\leqslant 2b$ и приведенной выше оценке $J'_{\bar{v}}$.

3. Доказательство леммы 2. Доказательство во многом подобно доказательству леммы 1. Здесь также достаточно рассмотреть лишь производные от $\mathcal{H}_{j\eta}w$ по x. В силу формулы (6) и предположения о границе Ω_1, достаточно оценить производные

$$D_{\bar{x}}^m\bar{v}_{j\eta}(\overline{P};\,Q),\quad \overline{P}\in(\tau,\tau_1]\times K,\quad \xi\in\tilde{\Omega}_0^{(k'')},\quad |m|\leqslant 2b+[l].$$

Область интегрирования в (11) представим, подобно предыдущему, в виде

$$[\tau,t]\times K'=S_1'\cup S_2'\cup S_3',$$

$$S_1'\equiv\left\{\overline{R}'\in[\tau,t]\times K'\mid d(\beta,V^{-1}(\bar{y}',0);\ \tau,\xi)=|RQ|\leqslant\frac{\gamma}{2}\right\},$$

$$S_2'\equiv\left\{\overline{R}'\in[\tau,t]\times K'\mid d(\beta,V^{-1}(\bar{y}',0);\ \tau,\xi)=|PR|\leqslant\frac{\gamma}{2}\right\},$$

где V^{-1} — преобразование, обратное к преобразованию (14) § 1. Для $\bar{x}\in K$, $\bar{x}_n>0$, $\xi\in\tilde{\Omega}_0^{(k'')}$ имеем равенство

$$D_{\bar{x}}^m\bar{v}_{j\eta}(\overline{P};\,Q)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\iint_{S_i'}D_{\bar{x}}^m G_j(\overline{P}-\overline{R}')\,\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\,\bar{w}(\overline{R}';\,Q)\,d\overline{R}'\equiv\sum_{i=1}^{3}L_i.\quad(38)$$

Оценим L_i, $i=1, 2, 3$, используя (8) для G_j, предположение леммы о w, неравенства (9) и (10) § 6, неравенство (15) и оценку

$$|D^{\nu'}_{\bar y'}\bar\varphi_\eta(\bar y')| \leqslant \frac{C}{\lambda^{|\eta|+|\nu'|}}, \quad \bar y' \in K', \quad |\nu'| \leqslant 2b+|l|-|\eta|, \tag{39}$$

которая следует из определения $\bar\varphi_\eta$ и оценки (20).

Если $r_j-2b-|\eta|+\theta<-1$, то, применяя для G_j утверждение (8) с $r=2b+\max\{0, r_j-2b+1\}+l$, получаем

$$|L_1| \leqslant C\|w\|\lambda^{-|\eta|}\iint\limits_{S_1'}(t-\beta)^{\frac{r-|m|}{2b}}|\bar P\bar R'|^{-n-2b+r_j+1-r}\times$$

$$\times E_{c_0}(t-\beta, |\bar x-\bar y'|)|RQ|^{-n-r_j+|\eta|-\theta}E^\theta_{c_1}(R; Q)\,d\bar R' \leqslant$$

$$\leqslant C\|w\|\lambda^{-|\eta|}\gamma^{r-|m|}|PQ|^{-n-2b+r_j+1-r}E^\theta_c(P; Q)\times$$

$$\times\iint\limits_{S_1'}|RQ|^{-n-r_j+|\eta|-\theta}\,d\bar R'.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством $|RQ| \geqslant |\bar R'\bar Q'|$, введем в нем замену переменных интегрирования по формулам $(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}=z_0$, $\bar y'-\bar\xi'=z'$, $z\equiv(z_0, z')$, и перейдем к сферическим координатам; тогда получим

$$\iint\limits_{S_1'}|RQ|^{-n-r_j+|\eta|-\theta}\,d\bar R' \leqslant$$

$$\leqslant C\iint\limits_{\{|z|\leqslant\gamma/2\}}|z|^{-n-r_j+|\eta|-\theta}|z_0|^{2b-1}\,dz \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{\gamma/2}\rho^{2b-r_j+|\eta|-\theta-2}\,d\rho = C\gamma^{2b-r_j+|\eta|-\theta-1}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае справедлива оценка

$$|L_1| \leqslant C\|w\|\gamma^{2b+l-|m|-\theta}|PQ|^{-n-2b-l}E^\theta_c(P; Q). \tag{40}$$

Пусть теперь $r_l-2b-|\eta|+\theta \geqslant -1$. Воспольвуемся представлением (16) § 6 для $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(\bar{R}';\ Q) = \sum_{|\bar{\mu}'|\leqslant M} D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'}\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q),$$

где $M \geqslant r_l - 2b - |\eta| + \theta + 1$. Интегрированием по частям в интеграле L_1 переведем все производные от $\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}$ к $G_l\bar{\varphi}_\eta$. В результате для L_1 получим выражение, аналогичное соответствующим выражениям из п. 2 и представляющее собой линейную комбинацию интегралов вида

$$L_1^{(1)} = \iint\limits_{S_1'} D_{\bar{P}}^{\bar{\xi}} G_l(\bar{P} - \bar{R}')\, D_{\bar{y}'}^{\nu'}\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\,\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q)\, d\bar{R}',$$

$$\bar{\zeta} \equiv \bar{\mu}' + m - \nu', \quad \nu' \leqslant \mu';$$

$$L_1^{(2)} \equiv \int\limits_{\Gamma_1'} D_x^{\zeta} G_l(\bar{P} - \bar{R}')\, D_{\bar{y}'}^{\varkappa'}\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\, D_{\bar{R}'}^{\bar{\chi}'}\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q) \times$$

$$\times \cos\alpha_l(\bar{R}')\, d\Gamma_1',$$

$$\zeta \equiv m + \nu' - \varkappa', \ \bar{\chi}' \equiv (\mu_0, \chi'),\ \varkappa' \leqslant \nu' < \mu',\ \chi' < \mu' - \nu';$$

$$L_1^{(3)} \equiv \int\limits_{\Gamma_1'} D_{\bar{P}}^{\bar{\zeta}} G_l(\bar{P} - \bar{R}')\, D_{\bar{y}'}^{\nu'}\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\, D_\beta^{\mu_0-\nu_0-1}\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q) \times$$

$$\times \cos\alpha_0(\bar{R}')\, d\Gamma_1',$$

$$\bar{\zeta} \equiv (\nu_0,\ m' + \mu' - \nu',\ m_n), \quad \nu' \leqslant \mu', \quad \nu_0 < \mu_0,$$

где $\Gamma_1' \equiv \left\{\bar{R}' \in [\tau,\ t] \times K' \mid d(V^{-1}(\bar{R}');\ Q) = \frac{\gamma}{2}\right\}$ — «кривая» часть границы S_1', $\alpha_l(\bar{R}')$ и $\alpha_0(\bar{R}')$ — углы между внешней нормалью к Γ_1' в точке $\bar{R}'$ и соответственно осями $\bar{y}_i$ и β, $|\bar{\mu}'| \leqslant M$.

Оценим интеграл $L_1^{(1)}$ при $|\bar{\mu}'| \doteq r_l - 2b - |\eta| + \theta + 1$. Для этого представим его в виде

$$L_1^{(1)} = \iint\limits_{S_1'} (D_{\bar{P}}^{\bar{\zeta}} G_j(\bar{P} - \bar{R}') - D_{\bar{N}}^{\bar{\zeta}} G_j(\bar{N} - \bar{Q}')) \times$$

$$\times D_{\bar{y}'}^{\nu'}\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\,\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q)\, d\bar{R}' +$$

$$+ D_{\bar{N}}^{\bar{\zeta}} G_j(\bar{N} - \bar{Q}') \iint\limits_{S_1'} D_{\bar{y}'}^{\nu'}\bar{\varphi}_\eta(\bar{y}')\,\bar{\omega}_{\bar{\mu}'}(\bar{R}';\ Q)\, d\bar{R}',$$

где $\overline{N} \equiv (t, \overline{x}', |\overline{x}_n - \overline{\xi}_n|)$. С помощью неравенств (17) и (18) § 6 аналогично предыдущему имеем

$$|L_1^{(1)}| \leqslant C \|w\| \gamma^{2b+[l]-|m|-\theta} \left\{ \iint\limits_{S_1'} (|\overline{P}\overline{R}'|^{-n-2b-l} \times \right.$$

$$\times E_{c_0}(t-\beta, |\overline{x}-\overline{y}'|) + |\overline{N}\overline{Q}'|^{-n-2b-l} \times$$

$$\times E_{c_0}(t-\tau, |\overline{x}-\overline{\xi}|) |\overline{R}'\overline{Q}^0|^{l-[l]} |RQ|^{-n-2b+1} \times$$

$$\times E_{c_1}^{\theta}(R; Q)\, d\overline{R}' + \gamma^{l-[l]} |\overline{N}\overline{Q}'|^{-n-2b-l} \times$$

$$\left. \times E_{c_0}(t-\tau, |\overline{x}-\overline{\xi}|)\, \rho_{c_1}^{\theta}(t-\tau, \xi) \right\},$$

$$\overline{Q}^0 \equiv (\tau, \overline{\xi}', \overline{x}_n - |\overline{x}_n - \overline{\xi}_n|).$$

Замечая, что $|\overline{N}\overline{Q}'| = |\overline{P}\overline{Q}|$ и $|\overline{R}'\overline{Q}^0| \leqslant |\overline{R}'\overline{Q}| \leqslant C|RQ|$, получаем оценку (40) для $L_1^{(1)}$.

Такая же оценка для интегралов $L_1^{(2)}$ и $L_1^{(3)}$ получит... если воспользоваться оценками G_j, неравенствами (... § 6 и тем, что

$$\int\limits_{\Gamma_1'} |\cos\alpha_i(\overline{R}')|\, d\Gamma_1' \leqslant \int\limits_{\{|\overline{R}^{(i)}\overline{Q}^{(i)}| \leqslant C\gamma\}} d\overline{R}^{(i)} \leqslant C\gamma^{2b+n-2},$$

$$\int\limits_{\Gamma_1'} |\cos\alpha_0(\overline{R}')|\, d\Gamma_1' \leqslant \int\limits_{\{|\overline{x}'-\overline{y}'| \leqslant C\gamma\}} d\overline{y}' \leqslant C\gamma^{n-1}, \quad (\ldots$$

где $\overline{R}^{(i)} \equiv (\beta, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{i-1}, \overline{y}_{i+1}, \ldots, \overline{y}_{n-1})$, $\overline{Q}^{(i)} \equiv (\tau, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{i-1}, \overline{\xi}_{i+1}, \ldots, \overline{\xi}_{n-1})$.

Интеграл L_3 оценивается аналогично интегралу E_4 из п. 2. С помощью оценок G_j и $\widetilde{w}$, неравенств (9) и (10) § 6 и неравенств (15) и (39) имеем

$$|L_3| \leqslant C \|w\| \gamma^{2b+2l-|m|+\delta-\theta+1} E_c^{\theta}(P; Q)\, L_0, \tag{42}$$

где $\delta \equiv \max\{0, 2b - r_j - 1\}$, а

$$L_0 \equiv \iint\limits_{S_3'} [|PR|^{-n-2b-\delta-l} |RQ|^{-n-2b-l}]\, d\overline{R}' =$$

$$= \iint\limits_{S_3' \cap \{|PR| \leqslant |PQ|/2\}} [\cdot]\, d\overline{R}' + \iint\limits_{S_3' \cap \{|PR| > |PQ|/2\}} [\cdot]\, d\overline{R}' \equiv$$

$$\equiv L_0^{(1)} + L_0^{(2)}. \tag{43}$$

Поскольку в $L_0^{(1)}$ $|RQ| \geqslant \frac{1}{2}|PQ|$, а в $L_0^{(2)}$ $|PR| \geqslant \geqslant \frac{1}{2}|PQ|$, то

$$
\begin{gathered}
L_0^{(1)} \leqslant C|PQ|^{-n-2b-l} \times \\
\times\Big(\gamma^{-2l+[l]-\delta-1} \int\limits_{\{|\bar{P}'\bar{R}'|\leqslant\gamma/2\}} |\bar{P}'\bar{R}'|^{-n-2b+l-[l]+1}\, d\bar{R}' + \\
+ \int\limits_{\{|\bar{P}'\bar{R}'|>\gamma/2\}} |\bar{P}'\bar{R}'|^{-n-2b-\delta-l}\, d\bar{R}'\Big) \leqslant \\
\leqslant C|PQ|^{-n-2b-l}\gamma^{-l-\delta-1}, \\
L_0^{(2)} \leqslant C|PQ|^{-n-2b-\delta-l} \times \\
\times\Big(\gamma^{-2l+[l]-1} \int\limits_{\{|\bar{R}'\bar{Q}'|\leqslant\gamma/2\}} |\bar{R}'\bar{Q}'|^{-n-2b+l-[l]+1}\, d\bar{R}' + \\
+ \int\limits_{\{|\bar{R}'\bar{Q}'|>\gamma/2\}} |\bar{R}'\bar{Q}'|^{-n-2b-l} d\bar{R}'\Big) \leqslant \\
\leqslant C|PQ|^{-n-2b-\delta-l}\gamma^{-l-1}.
\end{gathered} \tag{44}
$$

(42) — (44) следует для L_3 оценка (40).

Оценим L_2. Будем пользоваться представлением (20) 2, из которого следует, что

$$
G_j(\bar{P}-\bar{R}') = \sum_{|\bar{\nu}'|=2bp} c_{\bar{\nu}'} D_{P'}^{\bar{\nu}'} G_j^p(\bar{P}-\bar{R}'), \tag{45}
$$

где

$$
G_j^p \in U_{r,s}^{2bp+r_j+1}(\Pi_+^T, \Pi_0^T;\ C_0, c_0) \tag{46}
$$

с любыми неотрицательными целым p и нецелыми r и s. Постоянные C_0 и c_0, вообще говоря, зависят от p, но так как (46) будем использовать при конечном числе значений p, то зависимость C_0 и c_0 от p учитывать не будем, считая, что в (46) C_0 и c_0 — те же постоянные, что и в (8).

Пусть мультииндекс $\bar{\mu}'$ таков, что $\bar{\mu}' \leqslant \bar{\nu}'$ и $|\bar{\mu}'|$ принимает наибольшее значение, не превышающее $2b - r_j + |\eta| + [l]$. Использовав формулу (45) с $p = \left[\frac{|m|-r_j}{2b}\right] + 1$ при $|m| \geqslant r_j$ и $p = 0$ при $|m| < r_j$, аналогично тому, как была получена формула (28) находим

$$L_2 = \sum_{|\bar{\nu}'|=2bp} c_{\bar{\nu}'} (L_2^{(1)} - L_2^{(2)} - L_2^{(3)}), \tag{47}$$

$$L_2^{(1)} \equiv \iint\limits_{S_2'} D_{\bar{P}}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'+m} G_j^p D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'} (\overline{\varphi_\eta \bar{w}})\, d\bar{R}',$$

$$L_2^{(2)} \equiv \sum_{0<\varkappa'\leqslant\mu'} \int\limits_{\Gamma_2'} D_{\bar{P}}^{\bar{\nu}'+m-\varkappa'} G_j^p D_{\bar{y}'}^{\chi'} (\overline{\varphi_\eta \bar{w}}) \cos\alpha_l\, d\Gamma_2',$$

$$L_2^{(3)} \equiv \sum_{\varkappa_0=1}^{\mu_0} \int\limits_{\Gamma_2'} D_l^{\nu_0-\varkappa_0} D_{\bar{x}}^{m+\nu'-\mu'} G_j^p D_\beta^{\varkappa_0-1} D_{\bar{y}'}^{\mu'} (\overline{\varphi_\eta \bar{w}}) \cos\alpha_0\, d\Gamma_2',$$

где Γ_2' — «кривая» часть границы S_2', а мультииндекс χ' в $L_2^{(2)}$ такой, что $D_{\bar{y}'}^{\varkappa'} = D_{y_l}^{1} D_{\bar{y}'}^{\chi'}$.

Выражения $L_2^{(2)}$ и $L_2^{(3)}$ оцениваются так же, как интегралы $L_1^{(2)}$ и $L_1^{(3)}$, поэтому рассмотрим лишь $L_2^{(1)}$. Чтобы оценить этот интеграл, нужно получить для него представления, аналогичные (30) — (36). Расписав вначале $D_{\bar{R}'}^{\bar{\mu}'} (\overline{\varphi_\eta \bar{w}})$ по формуле Лейбница, представим $L_2^{(1)}$ в виде линейной комбинации интегралов

$$\iint\limits_{S_2'} D_{\bar{P}}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'+m} G_j^p D_{\bar{y}'}^{\mu'-\varkappa'} \bar{\varphi}_\eta D_\beta^{\mu_0} D_{\bar{y}'}^{\varkappa'} \bar{w}\, d\bar{R}', \quad \varkappa' \leqslant \mu'. \tag{48}$$

Исследуем интеграл (48) при $\varkappa' = \mu'$, который обозначим через $L_2^{(0)}$.

Если $|\bar{\mu}'| > |m| - r_j$, то $L_2^{(0)}$ оценивается непосредственно с помощью оценок G_j^p и $\bar{w}$, так как в этом случае $D_{\bar{P}}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'+m} G_j^p$ имеет интегрируемую особенность. Пусть $|\bar{\mu}'| \leqslant |m| - r_j$, что может быть лишь тогда, когда $|\bar{\nu}'| = 2bp > 2b - r_j + |\eta| + [l]$. Здесь возможны два случая: 1) $|\bar{\mu}'| = 2b - r_j + |\eta| + [l]$; 2) $0 < 2b - r_j + |\eta| + [l] - |\bar{\mu}'| < 2b$, $\bar{\nu}' - \bar{\mu}' = (1, 0)$.

В случае 1) нужно образовать приращение по $\bar{R}'$ производных от $\bar{w}$ и интеграл в дополнительном слагаемом преобразовать с помощью интегрирования по частям (см. аналогичные преобразования в (30) и (32)). В случае

2) $L_2^{(0)}$ запишем в виде

$$L_2^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \iint\limits_{S'_{2i}} D_t^1 D_{\overline{x}}^m G_j^p \overline{\varphi}_\eta \Delta_\beta^{t_i} D_{\overline{R}'}^{\overline{\mu}'} \overline{\omega} d\overline{R}' +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \iint\limits_{S'_{2i}} D_t^1 D_{\overline{x}}^m G_j^p \overline{\varphi}_\eta (D_{\overline{R}'}^{\overline{\mu}'} \overline{\omega}\,|_{\beta=t_i})\, d\overline{R}',$$

где $S'_{2i} \equiv \{\overline{R}' \in S'_2 \mid \beta \in (t_i,\ t_{i+1}]\}$, а t_i, $i \geqslant 0$,— те же, что в п. 2. Интегрируя по частям во втором слагаемом, окончательно получаем

$$L_2^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \iint\limits_{S'_{2i}} D_t^1 D_{\overline{x}}^m G_j^p \overline{\varphi}_\eta \Delta_\beta^{t_i} D_{\overline{R}'}^{\overline{\mu}'} \overline{\omega} d\overline{R}' +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{K'_i} (D_{\overline{x}}^m G_j^p \overline{\varphi}_\eta \Delta_\beta^{t_i - 1} D_{\overline{R}'}^{\overline{\mu}'} \overline{\omega})\,|_{\beta=t_i} d\overline{y}' -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma'_{2i}} D_{\overline{x}}^m G_j^p \overline{\varphi}_\eta (D_{\overline{R}'}^{\overline{\mu}'} \overline{\omega}\,|_{\beta=t_i}) \cos \alpha_0 d\Gamma'_{2i}. \qquad (49)$$

Здесь Γ'_{2i} — «кривая» часть границы S'_{2i}, а K'_i — та ее часть, которая лежит в гиперплоскости $\beta = t_i$.

Слагаемые из (49) оцениваются так же, как соответствующие слагаемые выражения $J'_{\overline{v}}$, стоящего в фигурных скобках формулы (36).

Таким образом устанавливаются оценки производных от $v_{/\eta}$. Оценки приращений этих производных получаются таким же путем, как в п. 2.

§ 8. ОЦЕНКИ ОДНОРОДНОЙ МАТРИЦЫ ГРИНА И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Оценки матрицы V и ее производных в цилиндре малой высоты. Найдем оценки однородной матрицы Грина задачи (23) — (25) § 1. Как было отмечено в п. 1 § 6, для этого достаточно установить оценки матрицы V из формулы (1) § 6. Построение матрицы V в цилиндре $Q_0^{\tau, \tau+h}$ сводится к решению системы (6) § 6. При достаточно малом h решение этой системы определяется рядом (7) § 6. Поэтому сначала получим оценки членов этого ряда и на их основании изучим свойства его суммы. Отсюда, в силу формулы (4) § 6, будут следовать (с учетом лемм 1 и 2 § 7) свойства матрицы V.

Через C и c в дальнейшем обозначаются постоянные, которые могут зависеть лишь от параметров, перечисленных в конце п. 3 § 1. Когда их величины для нас существенны, будем обозначать различные такие постоянные через C_i и c_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Оценим члены $w^{(s)} = (w_0^{(s)}, \ldots, w_N^{(s)})'$ ряда (7) § 6, где $w_0^{(0)} \equiv 0$, $w_j^{(0)} \equiv B_j Z |_{Q_1^{\tau, \tau+h}}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, а $w^{(s)}$ при $s \geqslant 1$ определяются формулой (8) § 6. Будем считать, что h удовлетворяет условию (6) § 2, где λ выбрано пока так, как указано в п. 2 § 6.

Докажем, что

$$w_j^{(0)} \in W_{2b-r_j+l, c_1}^{r_j, \theta} (Q_1^{\tau, \tau+h}, \Omega_0^{\tau}), \quad \| w_j^{(0)} \| \leqslant C_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{1}$$

где

$$\theta = \min \{0, [l] - 2l_0^* + 1\}. \tag{2}$$

Для этого нужно установить для $w_j^{(0)}$ оценки (11) — (13) § 6 с $r = 2b - r_j + l$, $q = r_j$ и при $r_j - 2b + \theta + 1 \geqslant \geqslant 0$ доказать справедливость дивергентного представления (16) § 6. Требуемые оценки для $w_j^{(0)}$ непосредственно следуют из оценок фундаментальной матрицы решений Z (см. теорему § 3) и предположения о коэффициентах выражения B_j, содержащегося в условии Б$_l$. Заметим, что эти оценки справедливы при любом $\theta \leqslant 0$.

Получим для $w_j^{(0)}$ представление (16) § 6. В k''-распрямляющих координатах $w_j^{(0)}$ имеет вид

$$\overline{w}_j^{(0)} (t, \overline{x}'; \tau, \xi) = \sum_{|\overline{m}| \leqslant r_j} \tilde{\beta}_{j\overline{m}} (t, \overline{x}') D_{t, \overline{x}}^{\overline{m}} \overline{Z} (t, \overline{x}; \tau, \xi) |_{\overline{x}_n = 0}, \tag{3}$$

$$t \in (\tau, \tau + h], \quad \overline{x}' \in K', \quad \xi \in \Omega_0,$$

где функции $\tilde{\beta}_{j\overline{m}}$ определяются коэффициентами выражения B_j и производными от функции F до порядка r_j. В силу предположения о коэффициентах B_j и границе Ω_1 $\tilde{\beta}_{j\overline{m}} \in H^{2b-r_j+l} ([\tau, \tau + h] \times K')$. В формулу (3) входят производные от $\overline{Z}$ по $\overline{x}_n$, вообще говоря, высокого порядка. Чтобы избавиться от них, воспользуемся тем, что Z, как функция t, x, является решением параболической системы. Поэтому $\bar{Z}$, как функция t, $\bar{x}$, будет также решением параболической системы (при достаточно малом λ). Из этой системы, на основании замечания 1 из п. 3 § 1, можно получить выражение

$$D^{2b}_{\bar{x}_n}\bar{Z} = \sum_{\{\bar{m} \mid |\bar{m}| \leqslant 2b,\, m_n < 2b\}} \alpha_{\bar{m}} D^{\bar{m}}_{t,\bar{x}}\bar{Z}, \quad \alpha_{\bar{m}} \in H^l([\tau, \tau + h] \times K).$$

Пользуясь им, все входящие в формулу (3) производные от $\bar{Z}$ по $\bar{x}_n$ порядка выше $2b - 1$ выразим через $D^{\bar{m}}_{t,\bar{x}}\bar{Z}$ с $m_n < 2b$. В результате получим выражение

$$\bar{\omega}^{(0)}_j(t, \bar{x}'; \tau, \xi) =$$
$$= \sum_{\{\bar{m} \mid |\bar{m}| \leqslant r_j,\, m_n < 2b\}} \beta_{j\bar{m}}(t, \bar{x}') D^{\bar{m}}_{t,\bar{x}}\bar{Z}(t, \bar{x}; \tau, \xi)\big|_{\bar{x}_n = 0}, \qquad (4)$$
$$t \in (\tau, \tau + h], \quad \bar{x}' \in K', \quad \xi \in \Omega_0,$$

в котором $\beta_{j\bar{m}} \in H^{2b - r_j + l}([\tau, \tau + h] \times K')$.

Выражение (4) теперь нужно записать в виде (16) § 6. Заметим, что функции, стоящие под знаком производных в (16) § 6, могут иметь порядок особенности не выше, чем производные порядка $2b - 1$ от $\bar{Z}$. Следовательно, преобразовывая формулу (4), внутри при $\bar{Z}$ можно оставить не более чем $2b - 1$ производных, остальные же производные (до порядка $r_j - 2b + 1$) нужно вынести вне. Чтобы это можно было сделать, функции $\beta_{j\bar{m}}$ должны иметь достаточную гладкость. Как отмечено выше, они имеют производные до порядка $2b - r_j + [l]$. Если $r_j - 2b + 1 \leqslant 2b - r_j + [l]$, что имеет место при $\theta = 0$, этой гладкости $\beta_{j\bar{m}}$ достаточно. Если же $0 < 0$, то у $\beta_{j\bar{m}}$ может не хватить гладкости (на порядок, не превышающий $-\theta$). Поэтому приходится оставлять при $\bar{Z}$ больше чем $2b - 1$ производных и при этом пользоваться оценками, содержащими в знаменателе степени расстояния точки ξ до границы Ω_1.

Итак, будем преобразовывать формулу (4). Вначале запишем $D^{\bar{m}}_{t,\bar{x}}\bar{Z} = D^{\bar{\nu}'}_{t,\bar{x}'}(D^{\bar{\xi}}_{t,\bar{x}}\bar{Z})$, где $\bar{\xi} = \bar{m} - \bar{\nu}'$, а мультииндекс $\bar{\nu}'$ таков, что $\bar{\nu}' \leqslant \bar{m}'$ и $|\bar{\nu}'|$ принимает наибольшее значение, не превышающее $|\bar{m}| - 2b + \theta + 1$.

Очевидно, что $0 \leqslant |\bar{m}| - 2b + \theta + 1 - |\bar{\nu}'| < 2b$ и, если $|\bar{\nu}'| < |\bar{m}| - 2b + \theta + 1$, то $\bar{\zeta} = (m_0 - \nu_0,\ 0,\ m_n)$. Применяя формулу дифференцирования произведения, получаем

$$\beta_{j\bar{m}} D_{t,\bar{x}}^{\bar{m}} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0} =$$

$$= \sum_{\bar{\mu}' \leqslant \bar{\nu}'} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} \left(C_{\bar{\nu}'\bar{\mu}'} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'} \beta_{j\bar{m}} D_{t,\bar{x}}^{\bar{\zeta}} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0}\right). \tag{5}$$

Если $|\bar{\nu}'| < |\bar{m}| - 2b + \theta + 1$, то эту формулу преобразуем далее следующим образом:

$$\beta_{j\bar{m}} D_{t,\bar{x}}^{\bar{m}} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0} =$$

$$= \sum_{\substack{\{\bar{\mu}' \leqslant \bar{\nu}' \mid |\bar{\mu}'| \geqslant |\bar{\nu}'| + \\ +4b - |\bar{m}| - \theta - 1\}}} \{D_t^1 D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} (C_{\bar{\nu}'\bar{\mu}'} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'} \beta_{j\bar{m}} D_t^{m_0-\nu_0-1} \times$$

$$\times D_{\bar{x}_n}^{m_n} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0}) - D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} (C_{\bar{\nu}'\bar{\mu}'} D_t^1 D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'} \beta_{j\bar{m}} D_t^{m_0-\nu_0-1} \times$$

$$\times D_{\bar{x}_n}^{m_n} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0})\} + \sum_{\substack{\{\bar{\mu}' \leqslant \bar{\nu}' \mid |\bar{\mu}'| < |\bar{\nu}'| + \\ +4b - |\bar{m}| - \theta - 1\}}} \{D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} (C_{\bar{\nu}'\bar{\mu}'} \Delta_t^{\tau} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'} \beta_{j\bar{m}} \times$$

$$\times D_t^{m_0-\nu_0} D_{\bar{x}_n}^{m_n} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0}) + D_t^1 D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} (C_{\bar{\nu}'\bar{\mu}'} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'-\bar{\mu}'} \beta_{j\bar{m}}\,|_{t=\tau} \times$$

$$\times D_t^{m_0-\nu_0-1} D_{\bar{x}_n}^{m_n} \bar{Z}\,|_{\bar{x}_n=0})\}. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в (4) и поменяв порядок суммирования, получим формулу

$$\bar{\omega}_j^{(0)}(t, \bar{x}';\ \tau, \xi) = \sum_{|\bar{\mu}'| \leqslant M} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} \bar{\omega}_{j\bar{\mu}'}^{(0)}(t, \bar{x}';\ \tau, \xi), \tag{7}$$

$$t \in (\tau, \tau + h], \quad \bar{x}' \in K', \quad \xi \in \Omega_0, \quad M \geqslant r_j - 2b + \theta + 1.$$

В силу оценок Z и свойств функций $\beta_{j\bar{m}}$, $|\bar{m}| \leqslant r_j$, имеют место неравенства

$$|D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\nu}'} \bar{\omega}_{j\bar{\mu}'}^{(0)}(t, \bar{x}'; \tau, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 d^{-n-2b+p+1-|\bar{\nu}'|}(t, x;\ \tau, \xi)\, E_{c_1}^{\theta}(t, x;\ \tau, \xi), \tag{8}$$

$$\bar{\nu}' \leqslant \bar{\mu}', \ |\bar{\mu}'| \leqslant M, \ p \equiv \max\{0, |\bar{\mu}'| - r_j + 2b - \theta - 1\}.$$

Нужно еще доказать для $\overline{w}^{(0)}_{j\overline{\mu}'}$ справедливость оценки (18) § 6:

$$|J^{(k'')}(\overline{w}^{(0)}_{j\overline{\mu}'})(t, \tau, \xi)| \leqslant C_1\lambda^{-|\eta|}\rho^{\theta}_{c_1}(t-\tau, \xi), \qquad (9)$$

$$t \in (\tau, \tau+h], \quad \xi \in \Omega_0, \quad |\overline{\mu}'| \leqslant r_j - 2b + \theta + 1,$$
$$|\eta| \leqslant 2b + [l].$$

Из формул (5) — (7) видно, что функции $\overline{w}^{(0)}_{j\overline{\mu}'}$, $|\overline{\mu}'| \leqslant \leqslant r_j - 2b + \theta + 1$, являются линейными комбинациями производных вида $D^{\overline{m}}_{t,\overline{x}}\overline{Z}\,|_{\overline{x}_n=0}$, $|\overline{m}| \leqslant 2b - \theta - 1$, $m_n < < 2b$, с коэффициентами, которые определяются производными от функций $\beta_{j\overline{m}}$. Поэтому, учитывая формулу (5) § 3 и пользуясь условием Гёльдера для производных от $\beta_{j\overline{m}}$, можно получить представление $\overline{w}^{(0)}_{j\overline{\mu}'} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$, где $\overline{w}_1$ является линейной комбинацией производных $D^{\overline{m}}_{t,\overline{x}}\overline{Z}_0\,|_{\overline{x}_n=0}$, $|\overline{m}| \leqslant 2b - \theta - 1$, $m_n < 2b$, с не зависящими от t, $\overline{x}'$ коэффициентами, а для $\overline{w}_2$ справедлива оценка

$$|\overline{w}_2(t, \overline{x}'; \tau, \xi)| \leqslant Cd^{-n-2b+1+l-[l]}(t, x; \tau, \xi)\, E^{\theta}_{c_1}(t, x; \tau, \xi).$$

В силу этого оценка (9) будет доказана, если установить такую же оценку для $J^{(k'')}(D^{\overline{m}}_{t,\overline{x}}\overline{Z}_0\,|_{\overline{x}_n=0})$, $|\overline{m}| = = 2b - \theta - 1$, $m_n < 2b$. Напомним, что в обозначениях, принятых в п. 2 § 2,

$$\overline{Z}_0(t, \overline{x}; \tau, \xi) = \Pi^{\xi}_{\hat{\xi}}\hat{Z}_0(t-\tau, \hat{x}-\hat{\xi}; \tau, \hat{\xi}) =$$

$$= \Pi^{\xi}_{\hat{\xi}}\hat{Z}_0(t-\tau, \overline{x}'-\overline{\xi}', \overline{x}_n + F(\overline{x}') - \xi_n; \tau, \hat{\xi}).$$

Если $m_n < 2b - 1$ или же $m_n = 2b - 1$, но $\theta < 0$, то интегрированием по частям в $J^{(k'')}(D^{\overline{m}}_{t,\overline{x}}\overline{Z}_0\,|_{\overline{x}_n=0})$ сбросим одну производную по β или $\overline{y}'$ с $\overline{Z}_0$ и результат оценим аналогично тому, как оценивались соответствующие интегралы в § 7.

Пусть $m_n = 2b - 1$, а $\theta = 0$. Чтобы получить требуемую оценку для $J^{(k'')}(D^{2b-1}_{\overline{x}_n}\overline{Z}_0\,|_{\overline{x}_n=0})$, запишем представление

$$J^{(k'')}\left(D_{\overline{x}_n}^{2b-1}\overline{Z}_0\big|_{\overline{x}_n=0}\right)(t,\tau,\xi)=$$

$$=\iint\limits_{S_1'} D_{\overline{y}}^{\eta}\overline{\varphi}^{(k'')}(\overline{y}',0)\left(\int\limits_{-\infty}^{0} D_{\overline{y}_n}^{2b}\overline{Z}_0(\beta,\overline{y};\ \tau,\xi)\,d\overline{y}_n\right)d\beta d\overline{y}'=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{S_1^{(i)}} D_{\overline{y}}^{\eta}\overline{\varphi}^{(k'')}(\overline{y}',0)\,D_{\overline{y}_n}^{2b}\overline{Z}_0(\beta,\overline{y};\ \tau,\xi)\,d\beta d\overline{y}\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{2}J_i(t,\tau,\xi),\quad t\in(\tau,\tau+h],\quad (\tau,\xi)\in\Omega_0^{\tau}.$$

Здесь $S_1^{(1)}\equiv\left\{(\beta,\overline{y})\in S_1'\times\overline{\mathbb{R}}_-^1\,|\,d(\beta,y;\ \tau,\xi)\geqslant\frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\right\}$, где через y обозначены точки с k''-локальными координатами

$$\hat{y}'=\overline{y}',\quad \hat{y}_n=\overline{y}_n+F(\overline{y}'),\quad \overline{y}'\in K',\quad \overline{y}_n\in\overline{\mathbb{R}}_-^1,\qquad (10)$$

а $S_1^{(2)}\equiv(S_1'\times\overline{\mathbb{R}}_-^1)\setminus S_1^{(1)}$, $\mathbb{R}_-^1\equiv\{x\in\mathbb{R}^1\,|\,x<0\}$. Используя оценки Z_0, неравенство (20) § 7 и то, что точки y с k''-локальными координатами (10) при $\overline{y}_n\in\mathbb{R}_-^1$ лежат вне области Ω_0, получаем

$$|J_1(t,\tau,\xi)|\leqslant\frac{C}{\lambda^{|\eta|}}\iint\limits_{S_1^{(1)}}(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}d^{-n-2b-1}(\beta,y;\ \tau,\xi)\times$$

$$\times E_{c_1}(\beta-\tau,|y-\xi|)\,d\beta d\overline{y}\leqslant\frac{C}{\lambda^{|\eta|}}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\rho_{c_1}^0(t-\tau,\xi)\times$$

$$\times\iint\limits_{\left\{|z|\geqslant\frac{1}{2}(t-\tau)^{1/2b}\right\}}|z|^{-n-2}dz=\frac{C}{\lambda^{|\eta|}}\rho_{c_1}^0(t-\tau,\xi).$$

Чтобы оценить J_2, воспользуемся тем, что $\overline{Z}_0$, как функция β, $\overline{y}$, является решением параболической системы. Поэтому производная $D_{\overline{y}_n}^{2b}\overline{Z}_0$ линейно выражается через производные $D_{\beta,\overline{y}}^{\overline{m}}\overline{Z}_0$, $|\overline{m}|\leqslant 2b$, $m_n<2b$. Для интегралов J_2, в которых вместо $D_{\overline{y}_n}^{2b}\overline{Z}_0$ стоят последние производные, легко получить требуемую оценку с помощью интегрирования по частям (см. п. 2 § 7).

Перейдем теперь к оценке $w_j^{(1)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Для этого вначале оценим $v^{(\tau,k)} \equiv \mathcal{R}^{(\tau,k)} w^{(0)}$ (операторы $\mathcal{R}^{(\tau,k)}$ определены в (34) § 2). Так как $w_0^{(0)} = 0$, то $v^{(\tau,k')} = 0$, а $v^{(\tau,k'')} = \sum_{j=1}^{N} \Pi_{\bar{x}}^{x} \mathcal{G}_j^{(\tau,k'')} (\bar{\varphi}^{(k'')} |_{\bar{x}_n=0} \bar{w}_j^{(0)})$. В силу (1) и леммы 2 § 7

$$v^{(\tau,k'')} \in W_{2b+l,c_2}^{0,\theta} (Q_{\tau,\tau+h}^{(k'')}, \Omega_0^{\tau}), \tag{11}$$

где θ — число (2), $c_2 \equiv \min\{c_1, 2^{-2b/(2b-1)} c_0\}$, c_0 — то же, что в § 7. Поскольку $w_0^{(1)} = \mathcal{V}_0 w^{(0)}$, то из формулы (12) § 2 для $\mathcal{V}_0$ видно, что $w_0^{(1)}(t, x; \tau, \xi)$ представляет собой линейную комбинацию выражений вида

$$\sum_{k''} a_m(t, x) D_x^{\nu} \psi^{(k'')}(x) D_x^{m-\nu} v^{(\tau,k'')}(t, x; \tau, \xi),$$

$$|m| \leqslant 2b, \quad \nu \leqslant m, \text{ причем } \nu > 0 \text{ при } |m| = 2b;$$

$$\sum_{k''} \psi^{(k'')}(x) \Delta_{l,x}^{\tau,\xi^{(k'')}} a_m D_x^m v^{(\tau,k'')}(t, x; \tau, \xi), \quad |m| = 2b; \tag{12}$$

$$\sum_{k''} \psi^{(k'')}(x) \Pi_{\bar{x}}^{x} \{(\tilde{a}_{mi}(\tau, \xi^{(k'')}; \bar{x}') D_{\bar{x}_i}^{1} F(\bar{x}') D_{\bar{x}}^{m} +$$
$$+ \tilde{a}_{\nu}(\tau, \xi^{(k'')}; \bar{x}') D_{\bar{x}}^{\nu}) \bar{v}^{(\tau,k'')}(t, \bar{x}; \tau, \xi),$$
$$|m| = 2b, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad |\nu| \leqslant 2b-1,$$

где a_m — коэффициенты системы (23) § 1, а $\tilde{a}_{mi}$ и $\tilde{a}_{\nu}$ — функции, определяемые значениями этих коэффициентов в точке $(\tau, \xi^{(k'')})$ и производными от функции F.

Оценим выражения (12), воспользовавшись свойствами функций $\psi^{(k'')}$, оценками, вытекающими из (11), условиями Б_l и (6) § 2. Поскольку справедливы неравенства

$$|D_x^{\nu} \psi^{(k'')} D_x^{m-\nu} v^{(\tau,k'')}(t, x; \tau, \xi)| \leqslant$$
$$\leqslant C(t-\tau)^{\frac{l-\theta}{2b}} d^{-n-2b-l}(t, x; \tau, \xi) E_{c_2}^{\theta}(t, x; \tau, \xi) \lambda^{-|\nu|} \times$$
$$\times (t-\tau)^{1-\frac{|m|-|\nu|}{2b}};$$

$$\lambda^{-|\nu|}(t-\tau)^{1-\frac{|m|-|\nu|}{2b}} \leqslant \lambda^{-|\nu|} (\varkappa^{\frac{1}{2b}} \lambda)^{2b-|m|+|\nu|} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \lambda, & |m| \leqslant 2b-1, \\ \varkappa^{\frac{1}{2b}}, & |m| = 2b, \ \nu > 0; \end{cases}$$

$$|\Delta_{t,x}^{\tau,\xi^{(k'')}} a_m| \leqslant C d^{l-[l]}(t, x;\ \tau, \xi^{(k'')}) \leqslant C\lambda^{l-[l]}, \quad x \in \Omega_2^{(k'')};$$

$$|D_{\bar{x}_i}^1 F(\bar{x}')| = |\Delta_{\bar{x}'}^0 D_{\bar{x}_i}^1 F(\bar{x}')| \leqslant C|\bar{x}'| \leqslant C\lambda,$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

то получим для выражений (12) и, следовательно, для $w_0^{(1)}$ оценки (11) — (13) § 6, в которых вместо C, c, r и q стоят соответственно $C\Lambda \equiv C(\lambda^{l-[l]} + \varkappa^{\frac{1}{2b}})$, c_2, l, и $2b$. Если еще, кроме того, при $\theta = 0$ для любого k установить справедливость неравенства

$$|I^{(k)}(w_0^{(1)})(t, \tau, \xi)| \leqslant C\Lambda\rho_{c_2}^0(t-\tau, \xi), \qquad (13)$$
$$t \in (\tau, \tau+h], \quad \xi \in \Omega_0,$$

где $I^{(k)}(w)$ определено в (15) § 6, то отсюда будет следовать, что $w_0^{(1)} \in W_{l,c_2}^{2b,\theta}(Q_0^{\tau,\tau+h}, \Omega_0^{\tau})$ и $\|w_0^{(1)}\| \leqslant C\Lambda$.

Докажем неравенство (13). Используя то, что $w_0^{(1)}(t, x;\ \tau, \xi)$ есть линейная комбинация выражений вида (12), с помощью (11) получаем представление

$$w_0^{(1)}(t, x;\ \tau, \xi) = \tilde{w}_0^{(1)}(t, x;\ \tau, \xi) +$$
$$+ \sum_{l''} \psi^{(l'')}(x) \sum_{|m|=2b} \Big\{ \Delta_{\tau,\bar{\xi}}^{\tau,\xi^{(l'')}} a_m D_x^m v^{(\tau,l'')}(t, x;\ \tau, \xi) +$$
$$+ \Pi_{\bar{x}}^{x} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{mi}(\tau, \xi^{(l'')};\ \bar{\bar{x}}') D_{\bar{x}_i}^1 F(\bar{\bar{x}}') D_{\bar{\bar{x}}}^m \bar{\bar{v}}^{(\tau,l'')}(t, \bar{\bar{x}};\ \tau, \xi) \Big\}, \quad (14)$$

где

$$|\tilde{w}_0^{(1)}(t, x;\ \tau, \xi)| \leqslant C(1 + \varkappa^{\frac{1-l+[l]}{2b}} \lambda^{[l]-l}) \times$$
$$\times d^{-n-2b+l-[l]}(t, x;\ \tau, \xi) E_{c_2}^0(t, x;\ \tau, \xi), \qquad (15)$$

две черты означают переход к l''-распрямляющим координатам, а $\bar{\xi}$ — ближайшая к ξ точка множества $\Omega_2^{(k'')}$.

В силу (14) и (15) имеем

$$|I^{(k)}(w_0^{(1)})(t, \tau, \xi)| \leqslant C(1 + \varkappa^{\frac{1-l+[l]}{2b}} \lambda^{[l]-l}) \rho_{c_2}^0(t-\tau, \xi) \times$$
$$\times \iint_{Q_1^{(k)}} d^{-n-2b+l-[l]}(\beta, y;\ \tau, \xi)\, d\beta dy +$$

$$+\sum_{l''}\sum_{|m|=2b}\left|\iint\limits_{Q_1^{(k)}}\varphi^{(k)}(y)\,\psi^{(l'')}(y)\left\{\Delta_{\tau,\tilde\xi}^{\tau,\xi^{(l'')}}a_m D_y^m v^{(\tau,l'')}(\beta,y;\ \tau,\xi)+\right.\right.$$

$$+\Pi_{\bar{\bar y}}^{y}\sum_{i=1}^{n-1}\tilde a_{mi}(\tau,\xi^{(l'')};\ \bar{\bar y}')\times$$

$$\left.\left.\times D_{\bar{\bar y}_i}^{1}F(\bar{\bar y}')\,D_{\bar{\bar y}}^{m}\bar{\bar v}^{(\tau,l'')}(\beta,\bar{\bar y};\ \tau,\xi)\right\}d\beta dy\right|. \qquad (16)$$

Первое слагаемое правой части (16), очевидно, оценивается через

$$C\left(1+\varkappa^{\frac{1-l+[l]}{2b}}\lambda^{[l]-l}\right)(t-\tau)^{\frac{l-[l]}{2b}}\rho_{c_2}^{0}(t-\tau,\ \xi)\leqslant$$

$$\leqslant C\Lambda\rho_{c_2}^{0}(t-\tau,\ \xi).$$

Оценим интеграл из второго слагаемого, при этом рассмотрим самый трудный случай: $k=k''$. Обозначим рассматриваемый интеграл в этом случае через I'' и запишем его в виде

$$I''=\iint\limits_{S_1}\bar\varphi^{(k'')}(\bar y)\,\bar\psi^{(l'')}(\bar y)\left\{\Delta_{\tau,\tilde\xi}^{\tau,\xi^{(l'')}}a_m\Pi_y^{\bar y}D_y^m v^{(\tau,l'')}(\beta,y;\ \tau,\xi)+\right.$$

$$\left.+\Pi_{\bar{\bar y}}^{\bar y}\sum_{i=1}^{n-1}\tilde a_{mi}(\tau,\xi^{(l'')};\ \bar{\bar y}')\,D_{\bar{\bar y}_i}^{1}F(\bar{\bar y}')\,D_{\bar{\bar y}}^{m}\bar{\bar v}^{(\tau,l'')}(\beta,\bar{\bar y};\ \tau,\xi)\right\}d\beta d\bar y, \qquad (17)$$

где одна черта, как и раньше, означает переход к k''-распрямляющим координатам,

$$S_1\equiv\left\{(\beta,\bar y)\in[\tau,t]\times K\,|\,d(\beta,V^{-1}(\bar y);\ \tau,\xi)=\right.$$

$$\left.=d(\beta,y;\ \tau,\xi)\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\right\}.$$

Заметим, что $\bar y$ и $\bar{\bar y}$ для $y\in\Omega_2^{(k'')}\cap\Omega_2^{(l'')}$ связаны между собой формулами $\bar{\bar y}=V_1(\bar y)$, $\bar y=V_1^{-1}(\bar{\bar y})$, в которых функции V_1 и V_1^{-1} имеют ту же гладкость, что и функция F, и в силу свойств F их нормы ограничены постоянными, не зависящими от k'' и l''. Очевидно, что модуль якобиана преобразования V_1 равен единице.

Преобразуем подынтегральное выражение в (17). Сначала имеем

$$\Pi_y^{\bar{y}} D_y^m v^{(\tau, l'')}(\beta, y;\ \tau, \xi) = \sum_{\mu \leqslant m} b_{m\mu}(\bar{y})\, D_{\bar{y}}^{\mu} \bar{v}^{(\tau, l'')}(\beta, V_1(\bar{y});\ \tau, \xi),$$

$$\Pi_{\bar{y}}^{\bar{\bar{y}}} D_{\bar{y}}^{m} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}(\beta, \bar{\bar{y}};\ \tau, \xi) = \sum_{\mu \leqslant m} c_{m\mu}(\bar{y})\, D_{\bar{y}}^{\mu} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}(\beta, V_1(\bar{y});\ \tau, \xi), \tag{18}$$

где функции $b_{m\mu}$ и $c_{m\mu}$ определяются функциями V_1, F и их производными. Используя (17) и (18), получаем

$$I'' = \sum_{\mu \leqslant m} \iint_{S_1} \overline{\varphi}^{(k'')}(\bar{y})\, \overline{\psi}^{(l'')}(\bar{y}) \Big\{ \Delta_{\tau, \tilde{\xi}}^{\tau, \xi^{(l'')}} a_m b_{m\mu}(\bar{y}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{mi}(\tau, \xi^{(l'')};\ \bar{\bar{y}}')\, D_{\bar{y}_i}^{1} F(\bar{\bar{y}}')\, c_{m\mu}(\bar{y}') \Big\} \times$$

$$\times D_{\bar{y}}^{\mu} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}(\beta, V_1(\bar{y});\ \tau, \xi)\, d\beta d\bar{y}. \tag{19}$$

В силу определения функций $\tilde{a}_{mi}$, $b_{m\mu}$ и $c_{m\mu}$, свойств функции F и неравенств $|\Delta_{\tau, \tilde{\xi}}^{\tau, \xi^{(l'')}} a_m| \leqslant C|\xi - \xi^{(l'')}|^{l-[l]} \leqslant C\lambda^{l-[l]}$, $|D_{\bar{y}_i}^{1} F(\bar{\bar{y}}')| \leqslant C\lambda$, выражение из фигурных скобок в (19) оценивается через $C\lambda^{l-[l]}$, а его производные — через C.

Слагаемые из (19), для которых $|\mu| < 2b$, оцениваются через правую часть (13), если для $D_{\bar{y}}^{\mu} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}$ воспользоваться оценкой, вытекающей из (11). Если же $|\mu| = 2b$, но $\mu_n < 2b$, то одну производную по $\bar{y}'$ можно сбросить с $\bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}$ и результат оценить аналогично предыдущему случаю. При $\mu_n = 2b$ пользуемся следующим обстоятельством: поскольку $\bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}(\beta, \bar{\bar{y}};\ \tau, \xi)$ как функция β, $\bar{\bar{y}}$ является решением параболической системы, то и $\bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}(\beta, V_1(\bar{y});\ \tau, \xi)$ как функция β, $\bar{y}$ есть решение некоторой параболической системы, вследствие чего $D_{\bar{y}_n}^{2b} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}$ может быть линейно выражено через $D_{\beta, \bar{y}}^{\bar{\nu}} \bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}$, $|\bar{\nu}| \leqslant 2b$, $\nu_n < 2b$. Проведя оценки интегралов с такими производными от $\bar{\bar{v}}^{(\tau, l'')}$ так же, как и в предыдущих случаях, установим требуемую оценку слагаемых из (19). Доказательство неравенства (13), таким образом, закончено.

Рассмотрим $w_j^{(1)}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Нужно доказать, что $w_j^{(1)} \in W_{2b-r_j+l,c_2}^{r_j,\theta}(Q_1^{\tau,\tau+h}, \Omega_0^\tau)$ и $\|w_j^{(1)}\| \leqslant C\Lambda$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Неравенства (11) — (13) § 6 с $r = 2b - r_j + l$ и $q = r_j$ для $w_j^{(1)}$ доказываются так же, как соответствующие неравенства для $w_0^{(1)}$. Остановимся кратко на доказательстве справедливости для $w_j^{(1)}$ при $r_j - 2b + \theta + 1 \geqslant 0$ представления (16) § 6.

Ограничимся рассмотрением только одного слагаемого из выражения для $w_j^{(1)} = \mathcal{V}_j w^{(0)}$, а именно

$$u^{(\tau,l'')} \equiv \psi^{(l'')} \Delta_{\tau,\xi(l'')}^{t,x} b_{j\bar{k}} D_{t,x}^{\bar{k}} v^{(\tau,l'')} \Big|_{Q_1^{\tau,\tau+h}},$$

где $b_{j\bar{k}}$ — коэффициент выражения B_{j0}, $|\bar{k}| = r_j$, номер l'' такой, что $\Omega_2^{(l'')} \cap \Omega_2^{(k'')} \neq \varnothing$.

Записав $u^{(\tau,l'')}$ в l''-распрямляющих координатах и исключив производные от $\bar{v}^{(\tau,l'')}$ по $\bar{x}_n$ порядка выше $2b - 1$ так же, как это делали для $w_j^{(0)}$, получим следующее выражение, аналогичное (4):

$$\bar{u}^{(\tau,l'')}(t, \bar{x}'; \tau, \xi) = \sum_{\{\bar{m} \mid |\bar{m}| \leqslant r_j, m_n < 2b\}} \beta_{j\bar{m}}(t, \bar{x}') \times$$

$$\times D_{t,\bar{x}}^{\bar{m}} \bar{v}^{(\tau,l'')}(t, \bar{x}; \tau, \xi)\big|_{\bar{x}_n=0}, \quad t \in (\tau, \tau+h], \quad \bar{x}' \in K', \quad \xi \in \Omega_0.$$

Это выражение с помощью преобразований, проведенных выше для $w_1^{(0)}$, можно представить в виде

$$\bar{u}^{(\tau,l'')}(t, \bar{x}'; \tau, \xi) = \sum_{|\bar{\mu}'| \leqslant M} D_{t,\bar{x}'}^{\bar{\mu}'} \bar{u}_{\bar{\mu}'}^{(\tau,l'')}(t, \bar{x}'; \tau, \xi),$$

$$t \in (\tau, \tau+h], \quad \bar{x}' \in K', \quad \xi \in \Omega_0, \quad M \geqslant r_j - 2b + \theta + 1.$$

Оценка (8) с $C_1 = C\Lambda$ и $c_1 = c_2$ для $\bar{u}_{\bar{\mu}'}^{(\tau,l'')}$ устанавливается с помощью оценок (11) и свойств функций $\beta_{j\bar{m}}$, вытекающих из их определения, условия $Б_l$ и оценок (7) § 2.

Чтобы доказать для $\bar{u}_{\bar{\mu}'}^{(\tau,l'')}$ неравенство (9) с $C_1 = C\Lambda$ и $c_1 = c_2$, нужно рассуждать так же, как для $w_j^{(0)}$. При этом доказательство сведется к установлению неравенства

$$|J^{(k'')}(D_{t,\bar{x}}^{\bar{m}} \bar{v}^{(\tau,l'')}\big|_{\bar{x}_n=0})(t, \tau, \xi)| \leqslant C\lambda^{-|\eta|} \rho_{c_2}^{\theta}(t-\tau, \xi),$$

$$t \in (\tau, \tau+h], \quad \xi \in \Omega_0, \quad |\bar{m}| = 2b - \theta - 1, \quad m_n < 2b$$

Рассмотрим самый трудный случай: $m_n = 2b - 1$, $\theta = 0$. Имеем

$$J^{(k'')}\left(D^{2b-1}_{\bar{x}_n}\bar{v}^{(\tau,l'')}\big|_{\bar{x}_n=0}\right)(t, \tau, \xi) =$$

$$= \iint\limits_{S_1'} \int\limits_{2a\lambda}^{0} D^{1}_{\bar{y}_n}\left(D^{\eta}_{\bar{y}}\bar{\varphi}^{(k'')}(\bar{y})\, D^{2b-1}_{\bar{y}_n}\bar{v}^{(\tau,l'')}(\beta, \bar{y};\ \tau, \xi)\right) d\beta d\bar{y}. \quad (20)$$

Здесь использовано то, что $D^{\eta}_{\bar{y}}\bar{\varphi}^{(k'')}\big|_{\bar{y}_n=2a\lambda} = 0$, где a — постоянная из определения $\Omega_2^{(k'')}$ (см. п. 2 § 2). Выражение (20) является суммой двух слагаемых. Слагаемое, содержащее $D^{2b-1}_{\bar{y}_n}\bar{v}^{(\tau,l'')}$, оцениваем сразу с помощью оценок $\bar{v}^{(\tau,l'')}$, поскольку интеграл по $\bar{y}$ n-мерный. Второе слагаемое содержит $D^{2b}_{\bar{y}_n}\bar{v}^{(\tau,l'')}$ и его так же, как при доказательстве (9), сначала представляем в виде суммы интегралов по $S_1^{(1)} \equiv \left\{(\beta,\ \bar{y}) \in S_1' \times [0,\ 2a\lambda] \mid d \times \times (\beta,\ y;\ \tau,\ \xi) \geqslant \frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}\right\}$ и $S_1^{(2)} = (S_1' \times [0,\ 2a\lambda]) \setminus S_1^{(1)}$. Первый из этих интегралов оцениваем сразу с помощью оценок $\bar{v}^{(\tau,l'')}$, а во втором производную $D^{2b}_{\bar{y}_n}\bar{v}^{(\tau,l'')}$ линейно выражаем через производные $D^{\bar{m}}_{\beta,\bar{y}}\bar{v}^{(\tau,l'')}$, $|\bar{m}| = 2b$, $m_n < 2b$, и интегралы с такими производными оцениваем так же, как в п. 2 § 7 оценивались аналогичные интегралы.

Таким образом, установлено, что

$$w_j^{(1)} \in W^{r_j,\theta}_{2b-r_j+l,c_2}(Q^{\tau,\tau+h}_{(j)}, \Omega_0^{\tau}), \quad \|w_j^{(1)}\| \leqslant C_2\Lambda, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Последовательно проведя оценки $w_j^{(s)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, для $s = 2, 3, \dots$ аналогично случаю $s = 1$, убедимся, что

$$w_j^{(s)} \in W^{r_j,\theta}_{2b-r_j+l,c_2}(Q^{\tau,\tau+h}_{(j)}, \Omega_0^{\tau}), \quad 0 \leqslant j < N, \qquad (21)$$

причем существует такая не зависящая от s постоянная $C_3 > 0$, что

$$\|w_j^{(s)}\| \leqslant C_2 C_3^{s-1}\Lambda^s, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad s \geqslant 1. \qquad (22)$$

Если же $\varkappa$, λ и, следовательно, h и Λ выбрать достаточно малыми, то из (21) и (22) вытекает сходимость рядов

$$\sum_{s=0}^{\infty} w_j^{(s)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N,$$

равномерная на $Q_{(j)}^{\tau+\varepsilon, \tau+h}$ для любого $\varepsilon \in (0, h)$, а для их сумм w_j следующий результат:

$$w_j \in W_{2b-r_j+l, c_2}^{r_j, \theta}(Q_{(j)}^{\tau, \tau+h}, \Omega_0^\tau), \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{23}$$

Используя (23), а также (4) § 6, леммы 1 и 2 § 7, свойства функций $\psi^{(k)}$ и границы Ω_1, получаем

$$V \in W_{2b+l, c_2}^{0, \theta}(Q_0^{\tau, \tau+h}, \Omega_0^\tau). \tag{24}$$

2. Случай цилиндра любой высоты. Получим оценки матрицы V и ее производных при $t \in (\tau + h, \ T]$, которые в сочетании с результатами п. 1, а также п. 2 § 3 дадут требуемые оценки матрицы Грина G_0^1 при $\tau < t \leqslant T$.

Положим $\tau_1 \equiv \tau + \frac{h}{2}$, $\eta_{\tau_1, h}(t) \equiv \eta\left(\frac{3}{h}(t - \tau_1)\right)$, $t \geqslant \tau_1$, где η — функция из п. 2 § 4. Введем вспомогательную функцию $\omega^{\tau_1}(t, \ x; \ \tau, \ \xi) \equiv \eta_{\tau_1, h}(t) V(t, \ x; \ \tau, \ \xi)$, $(t, \ x) \in Q_0^{\tau_1, T}$, $\xi \in \Omega_0$. Очевидно, что

$$A\omega^{\tau_1} = \eta'_{\tau_1, h} V \equiv g_0^{\tau_1}, \quad B_j \omega^{\tau_1}|_{Q_1^{\tau_1, T}} = \eta_{\tau_1, h} B_j Z|_{Q_1^{\tau_1, T}} +$$

$$+ (B_j(\eta_{\tau_1, h} V) - \eta_{\tau_1, h} B_j V)|_{Q_1^{\tau_1, T}} \equiv g_j^{\tau_1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

$$\omega^{\tau_1}|_{t=\tau_1} = 0. \tag{25}$$

Поэтому на основании теоремы о единственности решения граничной задачи функцию ω^{τ_1} можно получить как решение задачи (25). Поскольку в силу свойств функции $\eta_{\tau_1, h}$ $g_j^{\tau_1} = 0$, $0 \leqslant j \leqslant N$, при $t \leqslant \tau_1 + \frac{h}{6}$ и $g_0^{\tau_1} = 0$, $g_j^{\tau_1} - \eta_{\tau_1, h} B_j Z|_{Q_1^{\tau_1, T}} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, при $t \geqslant \tau_1 + \frac{h}{3}$, то на основании (24), оценок Z, условия Б_l заключаем, что

$$g_j^{\tau_1} \in \overset{\circ}{W}{}_{2b-r_j+l, c_2}^{\theta}(Q_{(j)}^{\tau_1, T}, \Omega_0^\tau), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Для задачи (25) в цилиндре $Q_0^{\tau_1, \tau_1+h_0}$ малой высоты h_0 можно провести те же рассуждения, которые проводились выше для задачи (3) § 6 в цилиндре $Q_0^{\tau, \tau+h}$, только здесь вместо лемм 1 и 2 § 7 нужно пользоваться леммой 3 § 7 и брать $w_j^{(0)} = g_j^{\tau_1}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Если это сделаем, то получим, что существует единственное решение $\omega^{\tau_1} \in \overset{o}{W}{}^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau_1,\tau_1+h_0}, \Omega_0^{\tau})$ задачи (25). Так как $\omega^{\tau_1} = V$ при $t \geqslant \tau_1 + \frac{h}{3}$, то отсюда и из (24) следует, что $V \in W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau_1,\tau_1+h_0}, \Omega_0^{\tau})$. Заметим, что в силу условий А и $Б_l$ выбор h_0 не зависит от τ_1.

Рассматривая теперь функцию $\omega^{\tau_2}(t, x; \tau, \xi) \equiv \equiv \eta_{\tau_2,h_0}(t) V(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in Q_0^{\tau_2,T}$, $\xi \in \Omega_0$, $\tau_2 \equiv \tau_1 + \frac{h_0}{2}$, и решая для нее задачу, аналогичную (25), получаем, что $V \in W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau_1,\tau_2+h_0}, \Omega_0^{\tau})$. Рассуждая таким же образом и дальше, с помощью конечного числа шагов дойдем до T и установим, что $V \in W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau_1,T}, \Omega_0^{\tau})$. Отсюда и из (24), в силу утверждения 1) из п. 2 § 6, следует, что $V \in W^{0,\theta}_{2b+l,c}(Q_0^{\tau,T}, \Omega_0^{\tau})$, $0 < c < c_2$. А так как здесь τ — произвольное число из $[0, T)$ и $V = 0$ при $t < \tau$, то в силу утверждения 2) из п. 2 § 6 из предыдущего можно заключить, что $V \in V^{2b,\theta}_{2b+l,0}(Q_0, Q_0)$.
Все изложенное выше резюмируется следующей теоремой.

Теорема 1. Если выполнены условия А и $Б_l$, $l > l_0$, то у задачи (23) — (25) § 1 существует единственная однородная матрица Грина G_0^1, представимая в виде (1) § 6, где $Z \in U^{2b}_{2b+l,0}(Q_0, Q_0)$, $V \in V^{2b,\theta}_{2b+l,0}(Q_0, Q_0)$, $\theta = \min\{0, [l] - 2l_0^* + 1\}$, и, следовательно, при $\theta = 0$ $G_0^1 \in U^{2b}_{2b+l,0}(Q_0, Q_0)$.

Таким образом, при $\theta = 0$ для прозводных $D^{\bar{k}}_{t,x} G_0^1(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \bar{\Omega}_0$, $|\bar{k}| \leqslant 2b + [l]$, справедливы оценки

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} G_0^1| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+|\bar{k}|}{2b}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\},$$

$$|\bar{k}| \leqslant 2b + [l],$$

$$|\Delta_x^{x^0} D^{\bar{k}}_{t,x} G_0^1| \leqslant C|x - x^0|^{l-[l]}(t-\tau)^{-1-\frac{n+l}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c\frac{|x^* - \xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}, \quad |\bar{k}| = 2b + [l],$$

$$|x^* - \xi| \equiv \min\{|x - \xi|, |x^0 - \xi|\}, \tag{26}$$

$$|\Delta_t^{t^0} D_{t,x}^{\bar{k}} G_0^1| \leqslant C(t-t^0)^{1+\frac{l-|\bar{k}|}{2b}} (t^0-\tau)^{-1-\frac{n+l}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^q}{(t-\tau)^{q-1}}\right\}, \quad 0<2b+l-|\bar{k}|<2b,$$

$$\tau<t^0<t,$$

где C, $c>0$, $q\equiv\frac{2b}{2b-1}$. При этом для V имеют место оценки, получающиеся из оценок (26) заменой $|x-\xi|$ и $|x^*-\xi|$ соответственно на $|x-\xi|+d(\xi, \Omega_1)$ и $|x^*-\xi|+d(\xi, \Omega_1)$. Если же $\theta<0$, то для Z справедливы оценки (26), а для V — оценки, отличающиеся от оценок V при $\theta=0$ лишь дополнительным множителем $(t-\tau)^{-\frac{\theta}{2b}} d^\theta(\xi, \Omega_1)$ в их правых частях.

3. Оценки однородной матрицы Грина в цилиндре бесконечной высоты. В цилиндре Q_0^∞ рассмотрим граничную задачу

$$Au=f_0, \quad B_j u|_{Q_1^\infty}=f_j, \quad 1\leqslant j\leqslant N, \quad u|_{t=0}=f_{N+1}. \quad (27)$$

Предположим, что выражения A и B_j, $1\leqslant j\leqslant N$, удовлетворяют на $\bar{Q}_0^\infty$ равномерным условиям параболичности и дополнительности и их коэффициенты принадлежат соответственно пространствам $H^l(Q_0^\infty)$ и $H^{2b-r_j+l}(Q_1^\infty)$, $l>l_0$. Пусть $\Omega_1\in C^{2b+l}$. Для однородной матрицы Грина G_0^1 задачи (27) можно получить оценки в цилиндре Q_0^∞. Для этого нужно выяснить, как зависят постоянные из оценок G_0^1 в цилиндре Q_0 от его высоты T.

Как отмечено в п. 2 § 3, матрица Z принадлежит классу (6) § 3 при любом $T>0$. Используя это, проследим получение оценок матрицы V, выясняя при этом, как зависят постоянные из этих оценок от T. Ниже C_i, c_i и γ_i — постоянные, не зависящие от T, причем $C_i>1$, $c_i>0$ и $\gamma_i>0$.

В силу (6) § 3, лемм 1 и 2 § 7 имеем

$$\|V\|_{W^{0,\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau,\tau+h},\Omega_0^\tau)}\leqslant C_2\exp\{\gamma_1(T-\tau)\}. \quad (28)$$

Аналогично получаем

$$\|V\|_{W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q_0^{\tau_1,\tau_1+h_0},\Omega_0^\tau)}\leqslant C_3\exp\{\gamma_1(T-\tau)\}\equiv M. \quad (29)$$

В силу (6) § 3 и (29) имеем неравенства

$$\| g_j^{\tau_2} \|_{W^{\theta}_{2b-r_j+l,c_2}(Q^{\tau_2,T}_{(j)},\Omega^{\tau}_0)} \leqslant C_4 M, \quad 0 \leqslant j \leqslant N,$$

а с их помощью находим

$$\| \omega^{\tau_2} \|_{\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q^{\tau_2,\tau_2+h_0}_0,\Omega^{\tau}_0)} \leqslant C_5 C_4 M,$$

откуда и из (29) следует, что

$$\| V \|_{W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q^{\tau_1,\tau_2+h_0}_0,\Omega^{\tau}_0)} \leqslant C_6 M, \quad C_6 \equiv C_4 \ldots$$

Продолжая рассуждать так дальше, получаем

$$\| V \|_{W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q^{\tau_1,\ \tau_k+h_0}_0,\Omega^{\tau}_0)} \leqslant C_6^{k-1} M, \quad \tau_k \equiv \tau_1 + \frac{k-1}{2} h_0,$$

откуда следует неравенство

$$\| V \|_{W^{\theta}_{2b+l,c_2}(Q^{\tau_1,T}_0,\Omega^{\tau}_0)} \leqslant C_6^m M \leqslant C_7 \exp\{\gamma_2 (T-\tau)\}, \quad (30)$$

где $m \equiv [2(T-\tau_1)/h_0] + 1$, $C_7 \equiv C_3 C_6$, $\gamma_2 \equiv \gamma_1 + \frac{2}{h_0} \ln C_6$.

Используя утверждение (6) § 3, неравенства (28) и (30), а также определение соответствующих классов функций, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть выражения A, B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, и граница Ω_1 удовлетворяют условиям, приведенным в начале пункта. Тогда существуют такие положительные постоянные C, c и γ, что для производных $D^{\bar{k}}_{t,x} G^1_0 (t, x; \tau, \xi)$ и $D^{\bar{k}}_{t,x} V(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leqslant \tau < t < \infty$, $\{x, \xi\} \subset \bar{\Omega}_0$, $|\bar{k}| \leqslant 2b + [l]$, справедливы оценки, отличающиеся от оценок, приведенных в теореме 1, дополнительным множителем $\exp\{\gamma (t-\tau)\}$ в их правых частях.*

4. О представлении решений граничной задачи с помощью однородной матрицы Грина. Пусть $\theta = 0$. Рассмотрим функцию

$$v(t, x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G^1_0 (t, x; \tau, \xi) f_0 (\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0. \quad (31)$$

С помощью определения матрицы G^1_0 легко доказать, что для любой функции $f_0 \in H^{\alpha}_0$, $0 < \alpha < 1$, функция v является решением системы (23) § 1 и $v|_{t=0} = 0$. Предельным переходом под знаком интеграла при $r_j < 2b$ можно также получить, что

$$B_j v|_{Q_1} = 0. \qquad (32)$$

Если же $r_j \geqslant 2b$, то применять B_j и переходить к пределу под знаком интеграла, вообще говоря, невозможно. Для финитных функций $f_0 \in H_0^\alpha$ равенство (32) всегда имеет место. Если не предполагать финитности f_0, то справедлив следующий результат: для $f_0 \in H_0^{l_0+\alpha}$

$$B_j v|_{Q_1} = C_j f_0|_{Q_1},$$

где C_j — дифференциальное выражение, порядок которого не превышает $r_j - 2b$, причем $C_j = 0$, когда порядок выражения B_j по нормали к Q_1 $n_j < 2b$.

Этот результат доказан в книге [56] для модельной задачи. Аналогично (в малом) он может быть доказан в общем случае, но для этого нужно изучить свойства однородной матрицы Грина по параметрическим переменным. В гл. 4 другим методом при несколько большем требовании о гладкости данных задачи будет получено представление решений с помощью матрицы Грина и тем самым будет установлен результат, аналогичный сформулированному выше.

Рассмотрим еще функцию

$$w(t, x) \equiv \int_{\Omega_0} G_0^1(t, x;\ 0, \xi) f_{N+1}(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0. \qquad (33)$$

Из определения G_0^1 следует, что для любой функции $f_{N+1} \in C_0^0$ функция (33) является решением задачи (23)—(25) § 1 с $f_j = 0$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A и Б$_l$, $l > l_0$. *Для любых* $f_0 \in H_0^\alpha$, $f_{N+1} \in C_0^0$ *при* $r_1 < 2b$ *и любых финитных* $f_0 \in H_0^\alpha$, $f_{N+1} \in C_0^0$ *(при* $\theta = 0$ *финитность* f_{N+1} *не обязательна), когда* $r_1 \geqslant 2b$, *функция* $u \equiv v + w$, *где* v *и* w *определены формулами* (31) *и* (33), *является решением задачи* (23) — (25) § 1 *с* $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$.

Заметим, что утверждение теоремы справедливо, когда f_0 удовлетворяет лишь условию Дини по x. Это легко следует из предыдущих результатов для матрицы G_0^1 и свойств объемного потенциала, ядром которого является фундаментальная матрица решений Z (см. [98]).

Глава 4

МАТРИЦА ГРИНА ОБЩЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Эта глава посвящена построению и исследованию свойств матрицы Грина общей параболической граничной задачи. Используемый здесь метод, называемый *методом интегральных операторов,* дает возможность изучить структуру матрицы Грина, установить точные оценки ее производных как по основным, так и параметрическим аргументам, исследовать операторы Грина и операторы, сопряженные к ним. Этот метод требует большей гладкости коэффициентов задачи и границы области, чем метод регуляризатора в гл. 3, и с его помощью удается получить значительно больше информации.

§ 9. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ О МАТРИЦЕ ГРИНА

1. Параболические ядра и их композиции. Пусть r и s — нецелые положительные числа, а ν и μ — числа, равные 0 или 1. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{K} : H^r_\mu \to H^s_\nu$. *Ядром* этого оператора (*параболическим ядром*) называется функция $K(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in \overline{Q}_\nu$, $(\tau, \xi) \in \overline{Q}_\mu$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, равная нулю при $t < \tau$ и такая, что

$$(\mathcal{K}f)(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_\mu} K(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q}_\nu, \qquad (1)$$

для произвольной функции $f \in H^r_\mu$, обращающейся в нуль в окрестности точки (t, x), если $(t, x) \in \overline{Q}_\mu$. Значения функции K могут принадлежать $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{1m}$, $\mathbb{C}_{m1}$ или $\mathbb{C}_{mm}$.

Пусть $\mathcal{K}$ — линейный оператор, область определения $D(\mathcal{K})$ которого принадлежит H^0_μ, а область значений — H^0_ν. *Сопряженным* к этому оператору назовем такой линейный оператор $\mathcal{K}^* : \mathring{H}^r_{\nu,\infty} \to \mathring{H}^s_{\mu,\infty}$, что для любых

$f \in D(\mathcal{K})$ и $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{r}_{\nu,\infty}$ справедливо равенство

$$(\mathcal{K}f, \varphi)_\nu = (f, \mathcal{K}^*\varphi)_\mu. \tag{2}$$

Здесь

$$(u, v)_\lambda \equiv \int_0^T dt \int_{\Omega_\nu} u'(t, x)\,\bar{v}(t, x)\,dx, \tag{3}$$

где, как и раньше, штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение. Напомним, что в случае ограниченных множеств Q_ν и Q_μ под $\overset{\circ}{H}{}^{r}_{\nu,\infty}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{s}_{\mu,\infty}$ понимаются соответственно пространства $\overset{\circ}{H}{}^{r}_{\nu}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{s}_{\mu}$.

Далее нам понадобятся теоремы о композиции параболических ядер, имеющих, вообще говоря, неинтегрируемые особенности. Такие теоремы доказаны в работе [46]. Приведем их формулировку.

Теорема 1. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют соответственно ядра $K_{\mathcal{A}} \in U^{q,\nu,\eta}_{p,s'}$ и $K_{\mathcal{B}} \in U^{q',\eta,\mu}_{p',s}$, где ν, η, μ — числа, равные 0 или 1; p, p', s, s' — нецелые положительные числа, причем $p' = p - q + \eta$, $s' = s - q' + \eta$. Пусть, далее, операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$ ограниченно действуют соответственно из $\underset{\circ}{H}{}^{p'}_{\eta}$, $\underset{\circ}{H}{}^{h}_{\mu}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{s'}_{\eta}$ в $\underset{\circ}{H}{}^{p}_{\nu}$, $\underset{\circ}{H}{}^{p'}_{\eta}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{s}_{\mu}$, где $h > 0$ — какое-то нецелое число. При этом предполагается, что оператор $\mathcal{B}^*$ действует из $\overset{\circ}{H}{}^{s'}_{\eta,\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{s}_{\mu,\infty}$ и $n > 1$. Тогда оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$ имеет ядро $K \in U^{q+q'-\eta,\nu,\mu}_{p,s}$.*

Замечание 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 выполняются следующие условия: $\mu = 0$ и

$$D^{\overline{m}}_{\tau,\xi} K_{\mathcal{B}}(t, x; \tau, \xi)\,|_{\xi \in \Omega_1} = 0, \quad |\overline{m}| \leqslant s_0, \quad (t, x) \neq (\tau, \xi) \in Q_1, \tag{4}$$

$$D^{\overline{m}}_{\tau,\xi} (\mathcal{B}^* f)\,|_{Q_1} = 0, \quad |\overline{m}| \leqslant s_0, \quad f \in \overset{\circ}{H}{}^{s'}_{\eta}, \tag{5}$$

где $s_0 \leqslant [s]$, то для ядра K справедливы равенства

$$D^{\overline{m}}_{\tau,\xi} K(t, x; \tau, \xi)\,|_{\xi \in \Omega_1} = 0, \quad |\overline{m}| \leqslant s_0, \quad (t, x) \neq (\tau, \xi) \in Q_1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть ядра K_1 и K_2 принадлежат соответственно классам $U^{q,\nu,\eta}_{p,s'}$ и $U^{q',\eta,\mu}_{p',s}$, причем q —*

$-[p]-\eta>0$ *и* $q'-[s]-\eta>0$. *Тогда ядро*

$$K(t, x;\ \tau, \xi)=\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\Omega\eta} K_1(t, x;\ \beta, y)\, K_2(\beta, y;\ \tau, \xi)\, dy,$$

$$(t, x)\in\overline{Q}_{\nu},\quad (\tau, \xi)\in\overline{Q}_{\mu},\quad (t, x)\neq(\tau, \xi),$$

принадлежит классу $U_{p,s}^{q+q'-\eta,\nu,\mu}$.

Замечание 2. Нетрудно доказать, что если ядро оператора имеет интегрируемую особенность, то он допускает обычное представление с помощью этого ядра. Точнее: пусть ограниченный оператор $\mathscr{K}$: $\overset{\circ}{H}{}^{h}_{\mu}\to\overset{\circ}{H}{}^{r}_{\nu}$, $0<h<r$, имеет ядро $K\in U_{r,s}^{q,\nu,\mu}$, причем $q-\mu\geqslant 1$, тогда для любой функции $f\in\overset{\circ}{H}{}^{h}_{\mu}$ справедливо равенство (1).

2. Основные результаты. Докажем справедливость представления (1) § 3 для решений задачи (23) — (25) § 1 и исследуем свойства ядер этого представления, образующих матрицу Грина данной задачи. Для этого вначале рассмотрим задачу с нулевыми начальными данными

$$Au=f_0,\quad B_j u\,|_{Q_1}=f_j,\quad 1\leqslant j\leqslant N,\quad u\,|_{t=0}=0, \tag{7}$$

где $f_j\in\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+l}$, $0\leqslant j\leqslant N$. Здесь прежде всего исследуем случай, когда порядки выражений B_j, $1\leqslant j\leqslant N$, по нормали к Q_1 меньше порядка системы, то есть когда $n_0<2b$, где число n_0 определено в (27) § 1. Для этого случая справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* А *и* Б_l, $l>2l_0+l_0^*+l_1+l_1^*+2$, *и пусть* $n_0<2b$. *Тогда для задачи* (7) *существует единственная матрица Грина* $(G_0, \ldots, G_N)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) $G_j\in U_{r,s_j}^{r_j+(j),0,(j)}$, $0\leqslant j\leqslant N$, *где* $r\equiv 2b+l-l_0-l_1$, $s_j\equiv l-2b+r_j+(j)-l_0-l_0^*$;

2) *имеет место представление*

$$G_j=\sum_{\nu=0}^{p} g_j^{(\nu)}+R_j^{(p)},\quad 0\leqslant j\leqslant N, \tag{8}$$

в котором $g_j^{(\nu)}\in U_{r,s_j}^{r_j+(j)+\lambda,0,(j)}$, $R_j^{(p)}\in\overline{U}_{r,s_j}^{0,(j)}$, *где* $\lambda\equiv\min\{\nu, 2[l]-3l_0-l_0^*-l_1-l_1^*-1\}$;

3) *для тех точек* (t, x) *и* (τ, ξ), *для которых опреде-*

лены $G_j(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, *справедливы равенства*

$$A(t, x, D_t, D_x) G_j(t, x; \tau, \xi) = 0,$$
$$B_i(t, x, D_t, D_x) G_j(t, x; \tau, \xi)|_{Q_1} = 0, \qquad (9)$$
$$0 \leqslant j \leqslant N, \quad 1 \leqslant i \leqslant N;$$

4) *если* $n_0 \leqslant 2b - 2$, *то имеют место равенства*

$$D_\xi^k G_0(t, x; \tau, \xi)|_{(\tau, \xi) \in Q_1} = 0, \quad (t, x) \in Q_0,$$
$$|k| \leqslant \min\{[l] - l_0 - l_0^*, 2b - n_0 - 2\}. \qquad (10)$$

Доказательство этой теоремы приводится в § 10 и п. 1—3 § 11. Здесь кратко наметим только его схему. Все рассмотрение проводится для $n > 1$. Приведенные в теореме результаты для $n = 1$ легко получаются из соответствующих результатов для $n = 2$ с помощью метода спуска.

Построение матрицы Грина начинается с конструирования оператора Грина $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_N)$ задачи (7), то есть оператора, действующего из $\prod\limits_{j=0}^{N} \overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\bullet}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, и удовлетворяющего равенству

$$L\mathcal{G} = I_{m+N}, \qquad (11)$$

где $L : u \mapsto (Au, B_1 u|_{Q_1}, \ldots, B_N u|_{Q_1})'$.

Главная часть оператора $\mathcal{G}$ строится из операторов g_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, ядра которых конструируются из фундаментальных матриц решений, однородных матриц Грина и ядер Пуассона специальных модельных задач. Операторы g_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, должны быть такими, чтобы

$$Lg^{(0)} = I_{m+N} - \mathcal{H}, \quad g^{(0)} \equiv (g_0, \ldots, g_N), \qquad (12)$$

где $\mathcal{H}$ — ограниченный оператор, имеющий, вообще говоря, плохое ядро, но некоторая его степень $\mathcal{H}^{p+1}$ имеет регулярное ядро.

Оператор $\mathcal{G}$ ищется в виде

$$\mathcal{G} = g^{(0)}\mathcal{V}. \qquad (13)$$

В силу равенства (12) оператор $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию $\mathcal{V} = I_{m+N} + \mathcal{H}\mathcal{V}$, откуда

$$\mathcal{V} = I_{m+N} + \mathcal{H} + \mathcal{H}^2 + \cdots + \mathcal{H}^p + \mathcal{R}'. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\mathcal{G} = \sum_{\nu=0}^{p} g^{(\nu)} + \mathcal{R}^{(p)}, \qquad (15)$$

где $\mathcal{g}^{(\nu)} \equiv \mathcal{g}^{(0)}\mathcal{H}^{\nu}$, а $\mathcal{R}^{(p)}$ удовлетворяет уравнению

$$L\mathcal{R}^{(p)} = \mathcal{H}^{p+1}. \tag{16}$$

Таким образом, исследование оператора $\mathcal{G}$ и его ядра — матрицы Грина — сводится, в первую очередь, к исследованию операторов $\mathcal{g}^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 0$. Это исследование для $\nu = 0$ проводится в § 10, а для $\nu \geqslant 1$ — в п. 1 § 11.

Матрица Грина задачи (7) в случае, когда $n_0 \geqslant 2b$, строится на основании теоремы 3, так как этот случай, сводится к уже рассмотренному в этой теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* А *и* Б_l *с тем же* l, *что и в теореме* 3, *и пусть* $n_0 \geqslant 2b$. *Тогда любое решение* $u \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, *задачи* (7) *представляется в виде*

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t, x;\ \tau, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} R_k(t, x;\ \tau, \xi)\, D_\xi^k f_0(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0, \tag{17}$$

и матрицей Грина этой задачи является матрица $(G_0, \ldots$ $\ldots, G_N)$, *где*

$$G_j = G_j^1 + \delta_{j,0} G_0^2, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{18}$$

Здесь $(G_0^1, \ldots, G_N^1)$ — *матрица Грина задачи типа* (7) *с* $n_0 < 2b$, *обладающая описанными в теореме* 3 *свойствами;* $R_k \in U_{r, s_0+|k|+1}^{2b+|k|+1, 0, 1}$, $|k| \leqslant n_0 - 2b$, *где* r *и* s_0 — *те же, что и в теореме* 3; *элементы матрицы* G_0^2 *представляют собой линейные комбинации производных от дельта-функций, сосредоточенных на* Q_1. *Более полные сведения о матрице* G_0^2 *приведены в* п. 4 § 11.

Основной результат гл. 4 для общей граничной задачи (23) — (25) § 1 содержит следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* А *и* Б_l, $l >$ $> \max\{2l_0 + \overset{*}{l}_0 + l_1 + \overset{*}{l}_1 + 2,\ 2b + l_0 + \overset{*}{l}_0\}$, *и* m_0, n_0 — *числа из* (27) § 1. *Тогда для любого решения* $u \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, *задачи* (23) — (25) § 1 *имеет место представление*

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t, x;\ \tau, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+\sum_{|k|\leqslant n_0-2b}\int_0^t d\tau\int_{\Omega_1} R_k(t, x;\ \tau, \xi)\, D_\xi^k f_0(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+\sum_{\{\bar{k}\,|\,|\bar{k}|\leqslant r_1-4b,\, k_0\leqslant m_0-2\}}\int_{\Omega_1} W_{\bar{k}}(t, x;\ 0, \xi)\, D_{\tau,\xi}^{\bar{k}} f_0(\tau, \xi)\,|_{\tau=0}\, d\xi +$$

$$+\int_{\Omega_0} G_0^1(t, x;\ 0, \xi)\, f_{N+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\sum_{|k|\leqslant n_0-2b}\int_{\Omega_1} R_k(t, x;\ 0, \xi)\, D_\xi^k f_{N+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\sum_{|k|\leqslant r_1-2b}\int_{\Omega_1} V_k(t, x;\ 0, \xi)\, D_\xi^k f_{N+1}(\xi)\, d\xi, \quad (t, x)\in Q_0, \tag{19}$$

в котором $(G_0^1, \ldots, G_N^1)$ — *матрица Грина из теоремы* 4; *функции* $R_k(t, x;\ \tau, \xi)$, $V_k(t, x;\ \tau, \xi)$ *и* $W_{\bar{k}}(t, x;\ \tau, \xi)$, $(t, x)\in Q_0$, $(\tau, \xi)\in Q_1$, *принадлежат соответственно классам* $U_{r,s_0+|k|+1}^{2b+|k|+1,0,1}$ *и* $U_{r,s_0+2b+|\bar{k}|+1}^{4b+|\bar{k}|+1,0,1}$, *где числа* r *и* s_0 — *те же, что и в теореме* 3, *причем* $R_k = 0$ *при* $n_0 < 2b$, $V_k = 0$ *при* $m_0 = 0$ *и* $W_{\bar{k}} = 0$ *при* $m_0 \leqslant 1$. *Для тех значений аргументов, при которых определены функции* R_k, V_k *и* $W_{\bar{k}}$, *справедливы равенства*

$$AM = 0,\quad B_j M\,|_{Q_1} = 0,\quad 1\leqslant j\leqslant N,$$

где M — *любая из этих функций.*

Матрицей Грина задачи (23) — (25) § 1 является матрица $(G_0, \ldots, G_{N+1})$, где

$$\begin{aligned} G_j &\equiv G_j^1 + \delta_{j,0}(G_0^2 + G_0^3), \quad 0\leqslant j\leqslant N,\\ G_{N+1} &\equiv (G_0^1 + G_0^2)\,|_{\tau=0} + G_{N+1}^1. \end{aligned}\tag{20}$$

Матрицы G_0^2, G_0^3 и G_{N+1}^1 определяются формулами (26) и (35) § 11. Элементы всех этих матриц являются линейными комбинациями производных от дельта-функций, сосредоточенных на Q_1 или Ω_1.

В следующей теореме даются оценки элементов матрицы Грина в цилиндрах бесконечной высоты.

Теорема 6. *Пусть выражения* A *и* B_j, $1\leqslant j\leqslant N$, *удовлетворяют на* $\overline{Q}_0^{\pm\infty}$ *равномерным условиям параболичности и дополнительности и пусть коэффициенты этих выражений принадлежат соответственно пространствам* $H^l(Q_0^{\pm\infty})$ *и* $H^{2b-r_j+l}(Q_1^{\pm\infty})$, *а* $\Omega_1\in C^{2b+l}$, *где число* l

такое же, как и в теореме 3. Тогда функции $g_j^{(\nu)}$, $R_j^{(\varphi)}$ из формулы (8) *и G_j^1, R_k из представления* (17) *принадлежат следующим классам:*

$$g_j^{(\nu)} \in S_{r,s_j}^{r_j+(j)+\lambda,\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_{(j)}^{\pm\infty}), \quad R_j^{(\varphi)} \in \overline{S}_{r,s_j}^{\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_{(j)}^{\pm\infty}),$$

$$G_j^1 \in S_{r,s_j}^{r_j+(j),\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_{(j)}^{\pm\infty}), \quad R_k \in S_{r,s_0+|k|+1}^{2b+|k|+1,\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_1^{\pm\infty}).$$

Если же выражения A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют указанным выше условиям с тем же l, что и в теореме 5, *то, кроме того, функции $W_{\bar{k}}$ и V_k из представления* (19) *принадлежат соответственно классам*

$$S_{r,s_0+2b+|\bar{k}|+1}^{4b+|\bar{k}|+1,\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_1^{\pm\infty}) \quad \text{и} \quad S_{r,s_0+|k|+1}^{2b+|k|+1,\gamma}(Q_0^{\pm\infty}, Q_1^{\pm\infty}).$$

Здесь и выше числа r, s_j и λ — те же, что и в теореме 3, *а γ — некоторое положительное число.*

Теорема 6 доказывается в п. 6 § 11.

В § 12 приводятся теоремы о действии операторов Грина в пространствах Гёльдера как ограниченных, так и растущих функций, изучаются сопряженные операторы Грина. На основании этого изучения доказывается параболичность задачи, сопряженной к задаче с нормальными граничными условиями.

Применению результатов по матрицам Грина параболических граничных задач к построению и изучению матриц Грина соответствующих эллиптических задач, содержащих параметр с достаточно большой вещественной частью, посвящен § 13.

§ 10. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

1. Определение основных операторов и свойства их ядер. Определим операторы, с помощью которых строится главная часть оператора Грина задачи (7) § 9. Начнем с операторов g_j, $0 \leqslant j \leqslant N$.

Пусть $\{\Omega_\nu^{(k)}\}$, $\nu = 1, 2,$— системы множеств из п. 2 § 2, покрывающие множество $\overline{\Omega}_0$, а $\{Q_\nu^{(k)} \equiv [0, T] \times \Omega_\nu^{(k)}\}$, $\nu = 1, 2,$— соответствующие системы множеств, покрывающие множество $\overline{Q}_0$. Будем считать число λ, входящее в определение этих множеств, таким, чтобы число $d \equiv \frac{a\lambda}{2}$ было достаточно малым. Пусть $\{\zeta^{(k)}\}$ — разложение единицы, соответствующее покрытию $\{\Omega_1^{(k)}\}$, то есть функции $\zeta^{(k)}$ бесконечно дифференцируемы и такие, что

$$\sum_k \zeta^{(k)}(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}_0, \quad \operatorname{supp} \zeta^{(k)} \subset \Omega_1^{(k)}. \tag{1}$$

Пусть, далее, χ — функция, определенная формулой (38) § 5, в которой ρ выбрано так, чтобы для любой точки $\xi \in \Omega_1^{(k)}$ совокупность тех точек $x \in \overline{\Omega}_0$, для которых $\chi(x - \xi) \neq 0$ при $k = k'$ и $\chi(\bar{x} - \bar{\xi}) \neq 0$ при $k = k''$, принадлежала $\Omega_2^{(k)}$.

Здесь и далее мы используем обозначения из п. 2 § 2 и п. 2 § 5. Ниже $A^{(k'')}$ и $B_j^{(k'')}$ — выражения, получающиеся из выражений A и B_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, после k''-распрямляющего преобразования (14) § 1; A_0, $A_0^{(k'')}$ и $B_{j0}^{(k'')}$ — главные части соответственно выражений $A, A^{(k'')}$ и $B_j^{(k'')}$, а $A_1 \equiv A - A_0$, $A_1^{(k'')} \equiv A^{(k'')} - A_0^{(k'')}$ и $B_{j1}^{(k'')} \equiv B_j^{(k'')} - B_{j0}^{(k'')}$.

Определим функцию g_0 с помощью равенства

$$g_0(t, x;\ \tau, \xi) \equiv \sum_{k'} \chi(x - \xi) Z_0^{(k')}(t, x;\ \tau, \xi)\, \zeta^{(k')}(\xi) +$$

$$+ \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} \Pi_{\bar{\xi}}^{\xi} (\chi(\bar{x} - \bar{\xi})\, G_0^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}))\, \zeta^{(k'')}(\xi),$$

$$\{(t, x), (\tau, \xi)\} \subset \overline{Q}_0, \quad (t, x) \neq (\tau, \xi). \tag{2}$$

Здесь $Z_0^{(k')}(t, x;\ \tau, \xi) \equiv Z_0^{(k')}(t - \tau, x - \xi;\ \tau, \xi)$, $G_0^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}) \equiv G_0^{(k'')}(t - \tau, \bar{x} - \bar{\xi}', \bar{\xi}_n;\ \tau, \bar{\xi})$, где $Z_0^{(k')}(t, x;\ \beta, y)$, $(t, x) \in \Pi^\infty$, — фундаментальная матрица решений задачи Коши для системы $A_0(\beta, y, D_t, D_x)\, u = f_0$ с зафиксированными в точке $(\beta, y) \in [0, T] \times \Omega_1^{(k')}$ коэффициентами, а $G_0^{(k'')}(t, \bar{x} - \bar{\xi}', \bar{\xi}_n;\ \beta, \bar{y})$, $t > 0$, $\{\bar{x}, \bar{\xi}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^n$, — однородная матрица Грина задачи

$$\begin{gathered} A_0^{(k'')}(\beta, \bar{y}, D_t, D_{\bar{x}})\, u = \bar{f}_0, \\ B_{j0}^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}})\, u|_{\bar{x}_n = 0} = \bar{f}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad u|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что из условия дополнительности для выражений A и B_j следует выполнение этого условия для выражений $A^{(k'')}$ и $B_j^{(k'')}$, если их коэффициенты зафиксированы в одной и той же точке $(\beta, \bar{y}')$. В задаче (3) коэффициенты $A_0^{(k'')}$ и $B_{j0}^{(k'')}$ зафиксированы в разных точках. Легко заметить, что если эти точки достаточно близки, то условие дополнительности будет выполняться. Точки $(\beta, \bar{y})$ и $(\beta, \bar{y}')$ будут близкими, если число d достаточно мало. Считаем d настолько малым, чтобы для задачи (3) выполнялось условие дополнительности для любой точки $(\beta, \bar{y}) \in P_2^+$.

Введем еще функции g_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, с помощью равенств

$$g_j(t, x;\ \tau, \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi_x^{\bar{x}} \Pi_{\xi}^{\bar{\xi}} \left(\chi(\bar{x} - \bar{\xi}')\, G_j^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}')\right) \zeta^{(k'')}(\xi),$$

$$(t, x) \in \bar{Q}_0, \quad (\tau, \xi) \in \bar{Q}_1, \quad (t, x) \neq (\tau, \xi), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{4}$$

где $G_j^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}') \equiv G_j^{(k'')}(t - \tau, \bar{x} - \bar{\xi}';\ \tau, \bar{\xi}')$; $G_j^{(k'')}(t, \bar{x};\ \beta, \bar{y}')$, $t > 0$, $\bar{x} \in \bar{\mathbb{R}}_+^n$, $1 \leqslant j \leqslant N$, — ядра Пуассона задачи

$$\begin{gathered} A_0^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}})\, u = \bar{f}_0, \\ B_{j0}^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}})\, u\,|_{\bar{x}_n=0} = \bar{f}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad u\,|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 1. $g_j \in U_{2b+l, l-l_0}^{r_j+(j), 0, (j)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. *Если* $n_0 \leqslant 2b - 2$, *то справедливы равенства*

$$D_\xi^k g_0(t, x;\ \tau, \xi)\,|_{(\tau, \xi) \in Q_1} = 0, \quad (t, x) \in Q_0, \tag{6}$$
$$|k| \leqslant \min\{[l] - l_0,\ 2b - n_0 - 2\}.$$

◀ Утверждения леммы легко проверить с помощью формул (2) и (4), лемм 1—4 § 5, условия $Б_l$, определения классов $U_{r,s}^{q,\nu,\mu}$ и неравенств (7) § 7. ▶

С помощью функций (2) и (4) определим операторы

$$\mathcal{g}_j\colon f \mapsto \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} g_j(t, x;\ \tau, \xi)\, f(\tau, \xi)\, d\xi, \tag{7}$$
$$(t, x) \in Q_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{g}^{(0)} \equiv (\mathcal{g}_0, \ldots, \mathcal{g}_N)$ и применим к нему оператор L из (11) § 9. В результате получим равенство (12) § 9, где

$$\mathcal{H} \equiv (\mathcal{H}_{ij})_{i,j=0}^N,$$

$$\mathcal{H}_{ij} \equiv \begin{cases} I_m - A\mathcal{g}_0 & \text{при } i = j = 0; \\ -A\mathcal{g}_j & \text{при } i = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant N; \\ -B_i\mathcal{g}_j & \text{при } i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant N,\ 0 \leqslant j \leqslant N; \\ I_1 - B_j\mathcal{g}_j & \text{при } i = j,\ 1 \leqslant j \leqslant N. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь Ag_j: $f \mapsto A(g_j f)$, $B_i g_j$: $f \mapsto B_i(g_j f)|_{Q_1}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

Для получения ядер операторов (8) вначале рассмотрим результаты применения A и B_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, к ядрам g_j, $0 \leqslant j \leqslant N$.

В силу определения фундаментальной матрицы решений, однородной матрицы Грина и ядер Пуассона имеем равенства

$$
\begin{gathered}
A_0(\tau, \xi, D_t, D_x) Z_0^{(k')}(t, x; \tau, \xi) = I_m \delta_{(\tau,\xi)}(t, x),\\
A_0^{(k'')}(\beta, \bar{y}, D_t, D_{\bar{x}}) G_0^{(k'')}(t-\tau, \bar{x}-\bar{\xi}', \xi_n; \beta, \bar{y}) =\\
= I_m \delta_{(\tau,\xi)}(t, \bar{x}),\\
B_{i0}^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}}) G_0^{(k'')}(t-\tau, \bar{x}-\bar{\xi}', \xi_n; \beta, \bar{y})|_{\bar{x}_n=0} = 0,\\
A_0^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}}) G_j^{(k'')}(t-\tau, \bar{x}-\bar{\xi}'; \beta, \bar{y}') = 0, \qquad (9)\\
B_{i0}^{(k'')}(\beta, \bar{y}', D_t, D_{\bar{x}}) G_j^{(k'')}(t-\tau, \bar{x}-\bar{\xi}'; \beta, \bar{y}')|_{\bar{x}_n=0} =\\
= \delta_{i,j}\delta_{(\tau,\bar{\xi}')}(t, \bar{x}'), \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N.
\end{gathered}
$$

Используя формулы (2), (4), свойства функций $\zeta^{(k)}$, χ и равенства (9), получаем

$$
\begin{gathered}
Ag_0 = I_m \delta_{(\tau,\xi)} - H_{00}, \quad B_i g_0|_{Q_1} = -H_{i0},\\
Ag_j = -H_{0j}, \quad B_i g_j|_{Q_1} = \delta_{i,j}\delta_{(\tau,\xi)} - H_{ij}, \qquad (10)\\
1 \leqslant i, j \leqslant N,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
H_{00}(t, x; \tau, \xi) \equiv -\sum_{k'} \{(A(t, x, D_t, D_x)\chi(x-\xi) -\\
-\chi(x-\xi)A(t, x, D_t, D_x)) + \chi(x-\xi)(A(t, x, D_t, D_x) -\\
- A_0(\tau, \xi, D_t, D_x))\} Z_0^{(k')}(t, x; \tau, \xi)\zeta^{(k')}(\xi) -\\
-\sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x}\Pi_{\bar{\xi}}^{\xi}\{((A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}})\chi(\bar{x}-\bar{\xi}) -\\
-\chi(\bar{x}-\bar{\xi})A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}})) +\\
+\chi(\bar{x}-\bar{\xi})(A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}}) - A_0^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}, D_t, D_{\bar{x}}))) \times\\
\times G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})\}\zeta^{(k'')}(\xi), \qquad (11)\\
H_{i0}(t, x; \tau, \xi) \equiv -\sum_{k''} \Pi_{\bar{x}'}^{x}\Pi_{\bar{\xi}}^{\xi}\{((B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})\chi(\bar{x}-\bar{\xi}) -\\
-\chi(\bar{x}-\bar{\xi})B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})) +
\end{gathered}
$$

$$+\chi(\bar{x}-\bar{\xi})\,(B_i^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}})-$$

$$-B_{i0}^{(k'')}(\tau,\bar{\xi}',D_t,D_{\bar{x}})))\,G_0^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi})\,|_{\bar{x}_n=0}\}\,\zeta'^{(k'')}(\xi), \quad (12)$$

$$H_{0j}(t,x;\ \tau,\xi)\equiv-\sum_{k''}\Pi_{\bar{x}}^{x}\Pi_{\bar{\xi}'}^{\xi}\{((A^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}})\,\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')-$$

$$-\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\,A^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}}))+$$

$$+\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\,(A^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}})-$$

$$-A_0^{(k'')}(\tau,\bar{\xi}',D_t,D_{\bar{x}})))G_j^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi}')\}\,\zeta^{(k'')}(\xi), \quad (13)$$

$$H_{ij}(t,x;\ \tau,\xi)\equiv-\sum_{k''}\Pi_{\bar{x}'}^{x}\Pi_{\bar{\xi}'}^{\xi}\{((B_i^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}})\,\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')-$$

$$-\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\,B_i^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}}))+$$

$$+\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\,(B_i^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}})-$$

$$-B_{i0}^{(k'')}(\tau,\bar{\xi}',D_t,D_{\bar{x}})))\,G_j^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi}')\,|_{\bar{x}_n=0}\}\,\zeta^{(k'')}(\xi), \quad (14)$$

$$1\leqslant i,\ j\leqslant N.$$

Лемма 2. $H_{ij}\in U_{2b-r_j+l,\,l-l_0}^{r_j-r_i+1+(j),(i),(j)}$, $0\leqslant i,\ j\leqslant N$. *Если* $n_0\leqslant 2b-2$, *то справедливы равенства*

$$D_\xi^k H_{i0}(t,x;\ \tau,\xi)\,|_{(\tau,\xi)\in Q_1}=0,\quad (t,x)\in\bar{Q}_{(i)}, \qquad (15)$$
$$(t,x)\neq(\tau,\xi)\in Q_1,\quad 0\leqslant i\leqslant N,$$
$$|k|\leqslant\min\{[l]-l_0,\ 2b-n_0-2\}.$$

◀ Утверждения леммы легко доказать, если воспользоваться формулами (11) — (14), леммами 1—4 § 5 и условием Б_l. ▶

Отметим, что из определения операторов g_j, $0\leqslant j\leqslant N$, формул (10), (11), (14) и леммы 5 § 5 следуют равенства

$$(Ag_0)\,f(t,x)=f(t,x)-\int_0^t d\tau\int_{\Omega_0}H_{00}(t,x;\ \tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi,$$
$$(t,x)\in\bar{Q}_0\quad f\in \overset{\circ}{H}{}_0^{\alpha},$$
$$(B_jg_j)\,f(t,x)= \qquad (16)$$
$$=f(t,x)-\int_0^t d\tau\int_{\Omega_1}H_{jj}(t,x;\ \tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi,$$
$$(t,x)\in\bar{Q}_1,\quad f\in \overset{\circ}{H}{}_1^{\alpha},\quad 1\leqslant j\leqslant N,\quad 0<\alpha<1,$$

Из равенств (8), (10) и (16) видно, что ядрами операторов $\mathcal{H}_{ij}$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant N$, являются функции H_{ij}, $0 \leqslant i$, $j \leqslant N$.

Обозначим через $\mathcal{H}^{\nu} \equiv (\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})_{i,j=0}^{N}$ ν-ю степень матрицы $\mathcal{H}$. Операторы $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu+1)}$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$, могут быть получены по формулам

$$\mathcal{H}_{ij}^{(\nu+1)} = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{H}_{ik}\mathcal{H}_{kj}^{(\nu)}, \quad \mathcal{H}_{ij}^{(1)} \equiv \mathcal{H}_{ij}, \tag{17}$$

$$0 \leqslant i, \quad j \leqslant N, \quad \nu \geqslant 1.$$

Введем операторы $g_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$, посредством равенств

$$g_j^{(\nu)} \equiv \sum_{i=0}^{N} g_i \mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad \nu \geqslant 1, \tag{18}$$

и положим

$$g^{(\nu)} \equiv (g_0^{(\nu)}, \ \ldots, \ g_N^{(\nu)}), \quad \nu \geqslant 1. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$g^{(\nu)} = g^{(0)}\mathcal{H}^{\nu}, \quad \nu \geqslant 1. \tag{20}$$

Свойства ядер операторов $g_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, описаны в лемме 1 для $\nu = 0$, а для $\nu \geqslant 1$ они будут исследованы в п. 1 § 11.

2. Леммы о действии основных операторов. Приведем леммы о действии операторов, определенных в п. 1. Во всех леммах этого и следующего пунктов s обозначает любое нецелое число, удовлетворяющее указанным в этих леммах неравенствам.

Лемма 3. *Операторы g_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $r_l - 2b < s \leqslant l - 2b + r_l - l_0$.*

◀ Пусть $u_j \equiv g_j f$, $0 \leqslant j \leqslant N$. На основании равенств (2), (4), (7) и того, что модуль якобиана преобразования (14) § 1 равен 1, имеем

$$u_0(t, x) = \sum_{k'} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1^{(k')}} \chi(x-\xi) Z_0^{(k')}(t, x; \tau, \xi)(\zeta^{(k')} f)(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{k''} \Pi_x^{\bar{x}} \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} \chi(\bar{x} - \bar{\xi}) G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})(\bar{\zeta}^{(k'')} \bar{f})(\tau, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} =$$

$$= \sum_{k'} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1^{(k')}} (\chi(x-\xi)-1)\, Z_0^{(k')}(t, x;\ \tau, \xi)\,(\zeta^{(k')}f$$

$$+ \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} \int_0^t d\tau \int_{K_1^{+}} (\chi(\bar{x}-\bar{\xi})-1)\, G_0^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi})\,(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}$$

$$+ \sum_{k'} (\mathcal{Z}_0^{(k')}f)(t, x) + \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} (\mathcal{G}_0^{(k'')}f)(t$$

$$u_j(t, x) = \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} \int_0^t d\tau \int_{K_1'} \chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\, G_j^{(k'')}(t$$

$$\times (\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}_1)(\tau, \bar{\xi}')\, d\bar{\xi}' = \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} \int_0^t d\tau \int_{K_1'} (\chi(x-$$

$$\times G_j^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}')\,(\bar{\zeta}^{(k'')}f_1)\cdot$$

$$+ \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} (\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f}_1)(t, \bar{x}), \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

где

$$(\mathcal{Z}_0^{(k')}f)(t, x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1^{(k')}} Z_0^{(k')}(t, x;\ \tau, \xi)\,(\zeta$$

$$(\mathcal{G}_0^{(k'')}\bar{f})(t, \bar{x}) \equiv \int_0^t d\tau \int_{K_1^{+}} G_0^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi})\,(\bar{\zeta}^{(k'')}f)(\tau$$

$$(\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f})(t, \bar{x}) \equiv \int_0^t d\tau \int_{K_1'} G_j^{(k'')}(t, \bar{x};\ \tau, \bar{\xi}')\,(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f})\ldots$$

$$1 \leqslant j \leqslant N,$$

а

$$\bar{f}_1(\tau, \bar{\xi}') \equiv \bar{f}(\tau, \bar{\xi}')\, F_1(\bar{\xi}'), \quad F_1(\bar{\xi}') \equiv (1 + |\mathrm{grad}$$

Здесь F — функция из уравнения (11) § 1 для
цы Ω_1.

Поскольку $\chi(x-\xi) = 1$ для близких между
точек x и ξ, то ядра интегралов из (21), содержащ

ность $\chi - 1$, не имеют особенностей, поэтому дифференцирование этих интегралов можно провести непосредственно под знаком интеграла и необходимые оценки производных сразу получаются из оценок $Z_0^{(k')}$ и $G_j^{(k'')}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, содержащихся в леммах 1—4 § 5. Свойства интегралов (22) приведены в леммах 6—8 § 5. Использовав их, получим, что $u_j \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, и имеют место соответствующие оценки. ▶

Лемма 4. Операторы $\mathscr{H}_{ij}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i+1+s}$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1 - 1$.

◀ Удобнее доказывать, что $\mathscr{H}_{ij}$ ограниченно действует из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{r_j-r_i+1+s}$, $\max\{0, r_i - r_j\} < s \leqslant l - l_0 - 1$. Ясно, что отсюда следует утверждение леммы, если вспомнить определение чисел l_0 и l_1.

Пусть вначале $i = j = 0$. В силу (11) для $(t, x) \in Q_0$ имеем

$$(\mathscr{H}_{00}f)(t, x) = \sum_{k'} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1^{(k')}} \{\chi(x-\xi) A(t, x, D_t, D_x) -$$

$$- A(t, x, D_t, D_x)\chi(x-\xi) + (1-\chi(x-\xi))(A(t, x, D_t, D_x) -$$

$$- A_0(\tau, \xi, D_t, D_x))\} Z_0^{(k')}(t, x; \tau, \xi)(\zeta^{(k')}f)(\tau, \xi)\, d\xi -$$

$$- \sum_{k'} A_1(t, x, D_t, D_x)(\mathscr{Z}_0^{(k')}f)(t, x) -$$

$$- \sum_{k'} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1^{(k')}} \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} A_0(t, x, D_t, D_x) Z_0^{(k')}(t, x; \tau, \xi) \times$$

$$(\zeta^{(k')}f)(\tau, \xi)\, d\xi + \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} \{\chi(\bar{x}-\bar{\xi}) A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}})\chi(\bar{x}-\bar{\xi}) + (1-\chi(\bar{x}-\bar{\xi})) \times$$

$$\times (A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}}) - A_0^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}, D_t, D_{\bar{x}}))\} \times$$

$$\times G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f})(\tau, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} -$$

$$- \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x} A_1^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}})(\mathscr{G}_0^{(k'')}\bar{f})(t, \bar{x}) -$$

$$-\sum_{k''}\Pi_{\bar{x}}^{x}\int_{0}d\tau\int_{K_1^+}\Delta_{t,\bar{x}}^{\tau,\bar{\xi}}A_0^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}})\times$$

$$\times G_0^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi})(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f})(\tau,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}, \qquad (24)$$

где использовано обозначение (12) § 5.

Интегралы из первого и четвертого слагаемых суммы (24) содержат производные от χ или же разность $1-\chi$, поэтому их ядра не имеют особенности и оценки этих интегралов получаются непосредственно с помощью оценок (3) и (9) § 5. Свойства операторов $\mathcal{Z}_0^{(k')}$ и $\mathcal{G}_0^{(k'')}$ приведены в леммах 6 и 7 § 5, а интегралов из третьего и шестого слагаемых — в лемме 9 § 5. Воспользовавшись утверждениями этих лемм, получим, что $\mathcal{H}_{00}f\in \overset{\circ}{H}{}_0^{1+s}$ и справедлива соответствующая оценка.

Точно так же доказывается лемма для случая $i=j$, $1\leqslant j\leqslant N$.

Пусть теперь $i\neq j$. На основании формул (4), (7) и (8) имеем

$$(\mathcal{H}_{0j}f)(t,x)=\sum_{k''}\Pi_{\bar{x}}^{x}\left\{\int_0^t d\tau\int_{K_1'}A^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}})\times\right.$$

$$\times((1-\chi(\bar{x}-\bar{\xi}'))\,G_j^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi}'))(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}_1)(\tau,\bar{\xi}')\,d\bar{\xi}'-$$

$$\left.-A_1^{(k'')}(t,\bar{x},D_t,D_{\bar{x}})(\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f}_1)(t,\bar{x})-(A_0^{(k'')}\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f}_1)(t,\bar{x})\right\},$$

$$(t,x)\in Q_0,\quad 1\leqslant j\leqslant N, \qquad (25)$$

где $\mathcal{G}_j^{(k'')}$, $1\leqslant j\leqslant N$,— операторы из (22), а функция $\bar{f}_1$ определена в (23).

Аналогично получаем равенства

$$(\mathcal{H}_{i0}f)(t,x)=\sum_{k''}\Pi_{\bar{x}'}^{x}\left\{\int_0^t d\tau\int_{K_1^+}B_i^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}})\times\right.$$

$$\times((1-\chi(\bar{x}-\bar{\xi}))\,G_0^{(k'')}(t,\bar{x};\ \tau,\bar{\xi}))\big|_{\bar{x}_n=0}(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f})(\tau,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}-$$

$$\left.-B_{i1}^{(k'')}(t,\bar{x}',D_t,D_{\bar{x}})(\mathcal{G}_0^{(k'')}\bar{f})\big|_{\bar{x}_n=0}-(B_{i0}^{(k'')}\mathcal{G}_0^{(k'')}\bar{f})(t,\bar{x}')\right\},$$

$$(\mathcal{H}_{ij}f)(t, x) = \sum_{k''} \Pi^{x}_{\bar{x}'} \left\{ \int_0^t d\tau \int_{K_1'} B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) \times \right.$$

$$\times ((1 - \chi(\bar{x} - \bar{\xi}))\, G_j^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}'))|_{\bar{x}_n=0} (\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}_1)(\tau, \bar{\xi}')\, d\bar{\xi}' -$$

$$\left. - B_{i1}^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})(\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f}_1)|_{\bar{x}_n=0} - (B_{i0}^{(k'')}\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f}_1)(t, \bar{x}') \right\},$$

$$(t, x) \in Q_1, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N, \quad i \neq j, \tag{26}$$

где $B_{i0}^{(k'')}\mathcal{G}_j^{(k'')}\colon\ \bar{f} \mapsto B_{i0}^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})(\mathcal{G}_j^{(k'')}\bar{f})|_{\bar{x}_n=0}$.

Как и при $i = j = 0$, утверждение леммы для $i \neq j$ следует из формул (25) и (26), если для оценок интегралов, содержащих разность $1 - \chi$, использовать оценки (6) и (9) § 5, а для операторов $\mathcal{G}_j^{(k'')}$, $A_0^{(k'')}\mathcal{G}_i^{(k'')}$, $B_{i0}^{(k'')}\mathcal{G}_j^{(k'')}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant N$,— леммы 7—12 § 5.

Лемма 5. *Операторы $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i+\nu+s}$ при $l_0 + 1 < \nu + s \leqslant \leqslant l - l_0 - l_1$, $\nu \geqslant 1$, $s > l_0$.*

◀ Доказательство проведем методом математической индукции по ν, $1 \leqslant \nu \leqslant [l] - 2l_0 - l_1$. При $\nu = 1$ утверждение леммы 5 совпадает с утверждением леммы 4. Предположим, что утверждение леммы 5 справедливо при $\nu \leqslant [l] - 2l_0 - l_1 - 1$. Подчиним число $s > l_0$ условию $l_0 + 1 < \nu + s \leqslant l - l_0 - l_1 - 1$ и рассмотрим произведения $\mathcal{H}_{ik}\mathcal{H}_{kj}^{(\nu)}$, $0 \leqslant k \leqslant N$. Согласно предположению, оператор $\mathcal{H}_{kj}^{(\nu)}$ ограниченно действует из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(k)}^{2b-r_k+\nu+s}$, а на основании леммы 4 оператор $\mathcal{H}_{ik}$ переводит $\overset{\circ}{H}{}_{(k)}^{2b-r_k+\nu+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i+\nu+1+s}$ и ограничен. Отсюда следует, в силу формулы (17), что оператор $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu+1)}$ ограниченно действует из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i+\nu+1+s}$, если $\nu + 1$ и s подчинены условию $l_0 + 1 < \nu + 1 + s \leqslant l - l_0 - l_1$. ▶

Лемма 6. *Операторы $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, при $\nu \geqslant \geqslant [l] - 2l_0 + l_1$ ограниченно действует из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+l_0-[l]+l}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i-l_0-l_1+l}$.*

◀ Доказательство также проведем методом математической индукции по ν. При $\nu=[l]-2l_0-l_1$ имеем утверждение леммы 5. Пусть утверждение леммы 6 справедливо для $\nu>[l]-2l_0-l_1$, докажем его для $\nu+1$. Оператор $\mathcal{H}_{kj}^{(\nu)}$, согласно предположению, ограниченно действует из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+l_0-[l]+l}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(k)}^{2b-r_k-l_0-l_1+l}$, а $\mathcal{H}_{ik}$ на основании леммы 4 — из $\overset{\circ}{H}{}_{(k)}^{2b-r_k-l_0-l_1-1+l}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(i)}^{2b-r_i-l_0-l_1+l}$. Отсюда и из формулы (17) вытекает требуемое утверждение для оператора $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu+1)}$. ▶

Лемма 7. *Операторы $g_j^{(\nu)}$, $0\leqslant j\leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ в $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+\nu+s}$ при $l_0+1<\nu+s\leqslant l-l_0-l_1$, $\nu\geqslant 1$, $s>l_0$ и из $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+l_0-[l]+l}$ в $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b-l_0-l_1+l}$ при $\nu\geqslant[l]-2l_0-l_1$.*

◀ Утверждение следует из формул (18) и лемм 3, 5 и 6. ▶

3. Операторы, сопряженные к основным. Построим операторы, сопряженные к операторам, рассмотренным в п. 1, и докажем леммы об их действии в пространствах Гёльдера.

Рассмотрим сначала операторы

$$g_j^*: f\mapsto u_j(\tau,\xi)\equiv\int_\tau^T dt\int_{\Omega_0}\overline{g}_j'(t,x;\ \tau,\xi)f(t,x)\,dx,$$
$$(\tau,\xi)\in Q_{(j)},\quad 0\leqslant j\leqslant N,$$

где, как и раньше, штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение.

Лемма 8. *Операторы g_j^*, $0\leqslant j\leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}_{0,\infty}^{s-2b}$ в $\overset{\circ}{H}{}_{(j),\infty}^{r_j-2b+(j)+s}$, $2b<s\leqslant l-l_0+2b-r_j-(j)$, и являются сопряженными к операторам g_j, $0\leqslant j\leqslant N$.*

◀ Вначале докажем, что

$$u_j\in\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{r_j-2b+(j)+s}\ \text{ и }\ \|u_j\|_{(j)}^{r_j-2b+(j)+s}\leqslant C\|f\|_0^{s-2b},\quad 0\leqslant j\leqslant N. \tag{27}$$

Если $\xi\in\Omega_1^{(k_0)}\cap\overline{\Omega}_{(j)}$, то в формулах (2) и (4) отличны от нуля лишь те слагаемые, которые соответствуют померам k множеств $\Omega_1^{(k)}$, пересекающихся с множеством $\Omega_1^{(k_0)}$. Совокупность этих номеров обозначим через $\mathbb{N}_0$. В силу определения функции χ слагаемое с номером $k \in \mathbb{N}_0$, как функция x, равно нулю вне $\Omega_2^{(k)}$. Учитывая это, для $(\tau, \xi) \in Q_1^{(k_0)} \cap Q_{(j)}$ получаем формулы

$$u_0(\tau, \xi) = \sum_{k' \in \mathbb{N}_0} \zeta^{(k')}(\xi) \int_\tau^T dt \int_{\Omega_2^{(k')}} \chi(x - \xi)(\bar{Z}_0^{(k')})' \times$$

$$\times (t, x; \tau, \xi) f(t, x)\, dx + \sum_{k'' \in \mathbb{N}_0} \zeta^{(k'')}(\xi) \Pi_{\xi}^{\bar{\xi}} \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(\bar{x} - \bar{\xi}) \times$$

$$\times (\bar{G}_0^{(k'')})'(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}) \bar{f}(t, \bar{x})\, d\bar{x}, \tag{28}$$

$$u_j(\tau, \xi) = \sum_{k'' \in \mathbb{N}_0} \zeta^{(k'')}(\xi) \Pi_{\xi'}^{\xi} \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(\bar{x} - \bar{\xi}')(\bar{G}_j^{(k'')})' \times$$

$$\times (t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}') \bar{f}(t, \bar{x})\, d\bar{x}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

где черта лишь над $Z_0^{(k')}$ и $G_j^{(k'')}$ означает комплексное сопряжение.

Для интегралов из (28) воспользуемся леммой 13 § 5, тогда получим, что $u_j \in \overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}(Q_1^{(k_0)} \cap Q_{(j)})$ и справедливы неравенства

$$\| u_j \|^{r_j - 2b + (j) + s}_{Q_1^{(k_0)} \cap Q_{(j)}} \leqslant C \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \| f \|^{s - 2b}_{Q_2^{(k)}}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{29}$$

Ввиду произвольности k_0 отсюда следует (27).

Утверждения (27) совпадают с утверждениями леммы для случая ограниченной области Ω_0, так как в этом случае $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j), \infty} \equiv \overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j)}$. Когда область Ω_0 и ее граница не ограничены, то в силу определения пространство $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j), \infty}$ состоит из тех функций пространства $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j)}$, которые специальным образом стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Для доказательства леммы в этом случае нужно еще доказать, что для $f \in \overset{\circ}{H}{}^{s - 2b}_{0, c}$ справедливы оценки

$$\| u_j \|^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j), c'} \leqslant C \| f \|^{s - 2b}_{0, c} \equiv C_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{30}$$

где $c > 0$ — любая, а $c' > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от c.

Из того, что $f \in \overset{\circ}{H}{}^{s-2b}_{0,c}$, следуют для любых $\{(t, x), (t, y), (\beta, x)\} \subset Q_0$ неравенства

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 E_c(T_1 - t, |x|), \quad |\bar{k}| \leqslant [s] - 2b,$$

$$|\Delta^y_x D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 |x - y|^{s-[s]} (E_c(T_1 - t, |x|) + $$
$$+ E_c(T_1 - t, |y|)), \quad |\bar{k}| = [s] - 2b, \tag{31}$$

$$|\Delta^\beta_t D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 |t - \beta|^{\frac{s-2b-|\bar{k}|}{2b}} (E_c(T_1 - t, |x|) +$$
$$+ E_c(T_1 - \beta, |x|)), \quad 0 \leqslant [s] - 2b - |\bar{k}| < 2b.$$

Заметим, что в силу определения множеств $\Omega^{(k)}_\nu$, $\nu = 1, 2$, для всех точек $\xi \in \Omega^{(k_0)}_1$ и $x \in \Omega^{(k)}_2$, $k \in \mathbb{N}_0$, справедливо неравенство $|x - \xi| \leqslant a_0$, причем a_0 не зависит от k_0.

Оценим правую часть неравенств (29). Считая $(\tau, \xi) \in Q^{(k_0)}_1 \cap Q_{(j)}$, с помощью (31) для $\{(t, x), (t, y), (\beta, x)\} \subset Q^{(k)}_2$ получаем неравенства

$$|D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|), \quad |\bar{k}| \leqslant [s] - 2b,$$

$$|\Delta^y_x D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|) |x - y|^{s-[s]},$$
$$|\bar{k}| = [s] - 2b,$$

$$|\Delta^\beta_t D^{\bar{k}}_{t,x} f(t, x)| \leqslant C_0 E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|) |t - \beta|^{\frac{s-2b-|\bar{k}|}{2b}},$$
$$0 \leqslant [s] - 2b - |\bar{k}| < 2b,$$

так как $T_1 - t \leqslant c_0(T_1 - \tau)$, $c_0 > 0$, $|\xi|^q \leqslant (|x| + |x - \xi|^q) \leqslant (|x| + a_0)^q \leqslant 2^q (|x|^q + a_0^q)$, $q \equiv \frac{2b}{2b-1}$, для любых $(t, x) \in Q^{(k)}_2$ и $(\tau, \xi) \in Q^{(k_0)}_1$. Из этих неравенств следует, что

$$\|f\|^{s-2b}_{Q^{(k)}_2} \leqslant C_0 E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{32}$$

На основании (29) и (32) для любых $\{(\tau, \xi), (\tau, y),$

$(\beta, \xi)\} \subset Q_1^{(k_0)} \cap Q_{(j)}$ имеем неравенства

$$|D^{\bar{k}}_{\tau,\xi} u_j(\tau, \xi)| \leqslant C_0 E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|), \ |\bar{k}| \leqslant r_j - 2b + (j) + [s],$$

$$|\Delta^y_\xi D^{\bar{k}}_{\tau,\xi} u_j(\tau, \xi)| \leqslant C_0 |\xi - y|^{s-[s]} (E_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|) + E_{c'}(T_1 - \tau, |y|)), \ |\bar{k}| = r_j - 2b + (j) + [s],$$

$$|\Delta^\beta_\tau D^{\bar{k}}_{\tau,\xi} u_j(\tau, \xi)| \leqslant C_0 |\tau - \beta|^{\frac{r_j - 2b + (j) + s - |\bar{k}|}{2b}} (E_{c'} \times (T_1 - \tau, |\xi|) + E_{c'}(T_1 - \beta, |\xi|)), \ 0 \leqslant r_j - 2b + (j) + [s] - |\bar{k}| < 2b, \ 0 \leqslant j \leqslant N,$$

в которых при $j \geqslant 1$ под $D^{\bar{k}}_{\tau,\xi}$ понимается $D^{\overline{m}'}_{\tau,\xi'}$, $|\overline{m}'| = |\bar{k}|$. Из этих неравенств вытекают оценки

$$\|u_j\|^{r_j - 2b + (j) + s}_{Q_1^{(k_0)} \cap Q_{(j)}, c'} \leqslant C_0, \ 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Ввиду произвольности k_0 отсюда получаем оценки (30).

То, что оператор $\mathcal{G}_j^*$ является сопряженным к оператору $\mathcal{G}_j$ в смысле, указанном в п. 1 § 9, непосредственно проверяется с помощью изменения порядка интегрирования. ▶

Рассмотрим теперь операторы

$$\mathcal{H}^*_{jj} : f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{\Omega_{(j)}} \overline{H}'_{jj}(t, x; \tau, \xi) f(t, x)\, dx, \ (\tau, \xi) \in Q_{(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Лемма 9. Операторы $\mathcal{H}^*_{jj}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\mathring{H}^s_{(j),\infty}$ в $\mathring{H}^{s+1}_{(j),\infty}$, $0 < s \leqslant l - l_0 - 1$, и являются сопряженными к операторам $\mathcal{H}_{jj}$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

◀ Лемма доказывается аналогично лемме 8, при этом используются формулы (11), (14) и лемма 14 § 5. ▶

Перейдем к построению и исследованию операторов, сопряженных к операторам $\mathcal{H}_{ij}$, $i \neq j$. Вначале рассмотрим операторы

$$\mathcal{H}^*_{i0} : f \mapsto \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \overline{H}'_{i0}(t, x; \tau, \xi) f(t, x)\, dx, \ (\tau, \xi) \in Q_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Лемма 10. Операторы $\mathcal{H}_{i0}^{*}$, $1\leqslant i\leqslant N$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^{s}_{1,\infty}$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_l+s}_{0,\infty}$, $\max\{0,\ r_i-2b\}<s\leqslant\leqslant l-l_0-\max\{1,\ 2b-r_i\}$, *и являются сопряженными к операторам* $\mathcal{H}_{i0}$, $1\leqslant i\leqslant N$.

◀ Используя формулы (12), для $(\tau,\ \xi)\in Q_1^{(k_0)}$ и $1\leqslant i\leqslant\leqslant N$ получаем представление

$$(\mathcal{H}_{i0}^{*}f)(\tau,\ \xi)=$$

$$=\sum_{k''\in\mathbb{N}_0}\zeta^{(k'')}(\xi)\Pi_{\xi}^{\xi}\int\limits_{\tau}^{T}dt\int\limits_{K_2'}\{(\chi(\bar{x}-\bar{\xi})\overline{B}_i^{(k'')}(t,\ \bar{x}',\ D_t,\ D_{\bar{x}})-$$

$$-\overline{B}_i^{(k'')}(t,\ \bar{x}',\ D_t,\ D_{\bar{x}})\chi(\bar{x}-\bar{\xi}))\overline{G}_0^{(k'')}(t,\ \bar{x};\ \tau,\ \bar{\xi})|_{\bar{x}_n=0}\}'\times$$

$$\times\bar{f}_1(t,\ \bar{x}')\,d\bar{x}'-\sum_{k''\in\mathbb{N}_0}\zeta^{(k'')}(\xi)\Pi_{\xi}^{\xi}\int\limits_{\tau}^{T}dt\int\limits_{K_2'}\chi(\bar{x}'-\bar{\xi})\times$$

$$\times\{(\overline{B}_i^{(k'')}(t,\ \bar{x}',\ D_t,\ D_{\bar{x}})-\overline{B}_{i0}^{(k'')}(\tau,\ \bar{\xi}',\ D_t,\ D_{\bar{x}}))\times$$

$$\times\overline{G}_0^{(k'')}(t,\ \bar{x};\ \tau,\ \bar{\xi})|_{\bar{x}_n=0}\}'\bar{f}_1(t,\ \bar{x}')\,d\bar{x}'. \qquad (33)$$

Здесь и далее черта над $B_i^{(k'')}$, $B_{i0}^{(k'')}$, $A^{(k'')}$ и $A_0^{(k'')}$ обозначает переход к комплексным сопряжениям в коэффициентах этих выражений.

С помощью (33) так же, как и в лемме 8, устанавливается первая часть утверждения леммы 10, при этом используется лемма 15 § 5.

Докажем, что оператор $\mathcal{H}_{i0}^{*}$ есть сопряженный к оператору $\mathcal{H}_{i0}$, а именно: для любых $f\in H_0^r$ и $\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^{s}_{1,\infty}$, $l_0<<r\leqslant l-l_0-l_1-1$, $\max\ \{0,\ r_i-2b\}<s\leqslant l--l_0-\max\{1,\ 2b-r_i\}$, справедливо равенство

$$(\mathcal{H}_{i0}f,\ \varphi)_1=(f,\ \mathcal{H}_{i0}^{*}\varphi)_0. \qquad (34)$$

Когда $r_i<2b$, то равенство (34) сразу получается, если в его левой части поменять порядок интегрирования.

Пусть $r_i\geqslant 2b$ и η_h — функция, определенная формулой (40) § 5. Рассмотрим интеграл

$$(\mathcal{H}_{i0}^{h}f)(t,\ x)\equiv\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}H_{i0}^{h}(t,\ x;\ \tau,\ \xi)f(\tau,\ \xi)\,d\xi,\ (t,\ x)\in Q_1, \qquad (35)$$

где

$$H_{i0}^h(t, x; \tau, \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}'}^{x} \Pi_{\bar{\xi}}^{\xi} \{(\chi(\bar{x}-\bar{\xi}) B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) \chi(\bar{x}-\bar{\xi})) G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})|_{\bar{x}_n=0} \times$$

$$\times \eta_h(\bar{\xi}_n) + \chi(\bar{x}'-\bar{\xi})(B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- B_{i0}^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}, D_t, D_{\bar{x}})) G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})|_{\bar{x}_n=0} \eta_h(\bar{\xi}_n)\} \zeta^{(k'')}(\xi). \tag{36}$$

Очевидно, что $H_{i0}^h \to H_{i0}$ при $h \to 0$.

С помощью (35) имеем

$$(\mathcal{H}_{i0}^h f, \varphi)_1 =$$

$$= \int_0^T dt \int_{\Omega_1} \left(\int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} f'(\tau, \xi)(H_{i0}^h)'(t, x; \tau, \xi)\, d\xi \right) \overline{\varphi}(t, x)\, dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$(\mathcal{H}_{i0}^h f, \varphi)_1 = (f, \mathcal{H}_{i0}^{h*}\varphi)_0, \tag{37}$$

где

$$(\mathcal{H}_{i0}^{h*}\varphi)(\tau, \xi) \equiv \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} (\overline{H}_{i0}^h)'(t, x; \tau, \xi)\, \varphi(t, x)\, dx, \ (\tau, \xi) \in Q_0.$$

Перейдем в равенстве (37) к пределу при $h \to 0$. Его правая часть, как легко заметить, стремится к $(f, \mathcal{H}_{i0}^*\varphi)_0$. Если доказать, что

$$\lim_{h\to 0} (\mathcal{H}_{i0}^h f, \varphi)_1 = (\mathcal{H}_{i0} f, \varphi)_1, \tag{38}$$

то отсюда будет следовать требуемое равенство (34).

Для доказательства (38) воспользуемся формулой

$$(\mathcal{H}_{i0}^h f)(t, x) = \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}'}^{x} \left\{ \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} B_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) \times \right.$$

$$\times ((1-\chi(\bar{x}-\bar{\xi})) G_0^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}))|_{\bar{x}_n=0} (\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f})(\tau, \bar{\xi}) \times$$

$$\times \eta_h(\bar{\xi}_n)\, d\bar{\xi} - B_{i1}^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})(\mathcal{G}_0^{(k'')}(\bar{f}\eta_h))(t, \bar{x})|_{\bar{x}_n=0} -$$

$$\left. - ((B_{i0}^{(k'')} \mathcal{G}_0^{(k'')})(\bar{f}\eta_h))(t, \bar{x}') \right\}, \ (t, x) \in Q_1.$$

Слагаемые суммы, стоящей в фигурных скобках, при $h \to 0$ стремятся к соответствующим слагаемым из равенства (26) для $\mathcal{H}_{i0}f$ равномерно по $(t, \bar{x}')$. Это утверждение очевидно для первого слагаемого, а для остальных его легко установить, если проследить доказательство леммы 10 § 5 для оператора $B_{i0}^{(k'')}\mathcal{G}_0^{(k'')}$ и аналогичное доказательство для оператора из второго слагаемого.

Из высказанного утверждения следует, что при $h \to 0$ $\mathcal{H}_{i0}^h f$ стремится к $\mathcal{H}_{i0}f$ равномерно по (t, x) из любой конечной части границы Q_1. Заметим, кроме того, что на Q_1 функции $\mathcal{H}_{i0}^h f$, $0 < h < d$, равномерно по h ограничены. Этого достаточно для доказательства (38). ▶

Построим операторы, сопряженные к $\mathcal{H}_{0j}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Для этого рассмотрим функции

$$u_j^h(\tau, \xi) \equiv \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} (\overline{H}_{0j}^h)'(t, x; \tau, \xi)\,\varphi(t, x)\,dx, \quad (\tau, \xi) \in Q_1,$$

$$1 \leqslant j \leqslant N, \tag{39}$$

где

$$H_{0j}^h(t, x; \tau, \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi_{\bar{x}}^{x}\Pi_{\bar{\xi}'}^{\xi} \{((\chi(\bar{x} - \bar{\xi}')\,A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}}) -$$

$$- A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}})\,\chi(\bar{x} - \bar{\xi}')) -$$

$$- \chi(\bar{x} - \bar{\xi}')\,(A^{(k'')}(t, \bar{x}, D_t, D_{\bar{x}}) - A_0^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}', D_t, D_{\bar{x}}))) \times$$

$$\times\, G_j^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}')\,\eta_h(\bar{x}_n)\}\,\zeta^{(k'')}(\xi),$$

η_h — та же функция, что и в (36).

Лемма 11. *Пусть* $1 \leqslant j \leqslant N$ *и* $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{s}_{0,c}$, $\max\{0, 2b - r_j - 2\} < s \leqslant l - 1 + \min\{0, 2b - r_j - l_0 - 1\}$. *Тогда функция* u_j^h *при* $h \to 0$ *стремится равномерно на любом ограниченном подмножестве множества* Q_1 *к пределу* u_j, *принадлежащему пространству* $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + 2 + s}_{1,c'}$ *с некоторым* $c' > 0$, *причем справедливо неравенство*

$$\| u_j \|^{r_j - 2b + 2 + s}_{1,c'} \leqslant C \| \varphi \|^{s}_{0,c}.$$

◀ При $(\tau, \xi) \in Q_1^{(k_0'')} \cap Q_1$ и $1 \leqslant j \leqslant N$ имеем

$$u_j^h(\tau, \xi) = \sum_{k'' \in \mathbb{N}_0} \zeta^{(k'')}(\xi)\,\Pi_{\bar{\xi}'}^{\xi} \left\{ \int_\tau^T dt \int_{K_2^+} ((\chi(\bar{x} - \bar{\xi}') \times \right.$$

$$\times \overline{A}^{(k'')}(t, \overline{x}, D_t, D_{\overline{x}}) - \overline{A}^{(k'')}(t, \overline{x}, D_t, D_{\overline{x}})\chi(\overline{x}-\overline{\xi}')) \times$$
$$\times \overline{G}_j^{(k'')}(t, \overline{x}; \tau, \overline{\xi}'))' \eta_h(\overline{x}_n)\overline{\varphi}(t, \overline{x})\, d\overline{x} -$$
$$-\int_\tau^T dt \int_{K_2^+} \chi(\overline{x}-\overline{\xi}')((\overline{A}^{(k'')}(t, \overline{x}, D_t, D_{\overline{x}}) -$$
$$-\overline{A}_0^{(k'')}(\tau, \overline{\xi}', D_t, D_{\overline{x}}))\overline{G}_j^{(k'')}(t, \overline{x}; \tau, \overline{\xi}'))' \eta_h(\overline{x}_n) \times$$
$$\left.\times\ \overline{\varphi}(t, \overline{x})\, d\overline{x}\right\}. \tag{40}$$

В первом интеграле из фигурных скобок и в интегралах, получающихся после его дифференцирования, можно переходить к пределу при $h \to 0$ под знаком интеграла. Второй же интеграл в силу леммы 16 § 5 равномерно стремится к пределу, свойства которого описаны в этой лемме. Поэтому u_j^h стремится к некоторому пределу u_j равномерно на $Q_1^{(k_0'')} \cap Q_1$, при этом $u_j \in \overset{\circ}{H}{}^{r_j-2b+2+s}(Q_1^{(k_0'')} \cap Q_1)$ и справедливо неравенство

$$\| u_j \|^{r_j-2b+2+s}_{Q_1^{(k_0'')} \cap Q_1} \leqslant C \sum_{k'' \in \mathbb{N}_0} \| \varphi \|^s_{Q_2^{(k'')}}.$$

Отсюда с помощью рассуждений, аналогичных при доказательстве леммы 8, следует утверждение леммы 11. ▶

Замечание. Из формулы (40) и доказательства леммы 16 § 5 легко получить, что $| u_j^h(\tau, \xi) | \leqslant CE_{c'}(T_1 - \tau, |\xi|)$, $(\tau, \xi) \in Q_1$, $0 < h < d$, $1 \leqslant j \leqslant N$.

Определим операторы

$$\mathcal{H}_{0j}^* : \varphi \mapsto \lim_{h\to 0} \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} (\overline{H}_{0j}^h)'(t, x; \tau, \xi)\varphi(t, x)\, dx,$$
$$(\tau, \xi) \in Q_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{41}$$

Лемма 12. *Операторы $\mathcal{H}_{0j}^*$, $1 \leqslant j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^s_{0,\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{r_j-2b+2+s}_{1,\infty}$, $\max\{0, 2b - r_j - 2\} < s \leqslant l - 1 + \min\{0, 2b - r_j - l_0 - 1\}$, и являются сопряженными к операторам $\mathcal{H}_{0j}$, $1 \leqslant j \leqslant N$.*

◀ Первая часть утверждения леммы следует из леммы 11. Докажем, что для любых $f \in H_1^r$ и $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^s_{0,\infty}$, где $\max\{0,$

$2b - r_j\} < r \leqslant l - l_0 - 1$, $\max\{0,\ 2b - r_j - 2\} < s \leqslant \leqslant l - 1 + \min\{0,\ 2b - r_j - l_0 - 1\}$, имеют место равенства

$$(\mathcal{H}_{0j} f,\ \varphi)_0 = (f,\ \mathcal{H}^*_{0j}\varphi)_1,\quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{42}$$

На основании (39) получаем

$$(f,\ u^h_j)_1 = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\Omega_1} f'(\tau,\ \xi) \left(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} (H^h_{0j})'(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \times \right.$$

$$\left. \times \bar\varphi(t,\ x)\, dx \right) d\xi = (\mathcal{H}^h_{0j} f,\ \varphi)_0,\quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{43}$$

где

$$(\mathcal{H}^h_{0j} f)(t,\ x) \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_1} H^h_{0j}(t,\ x;\ \tau,\ \xi) f(\tau,\ \xi)\, d\xi,\quad (t,\ x) \in Q_0.$$

Используя (41), лемму 11 и замечание к ней, перейдем в (43) к пределу при $h \to 0$, в результате получим (42). ▶

Построим, наконец, операторы, сопряженные к операторам $\mathcal{H}_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant N$. Рассмотрим функции

$$v^h_{ij}(\tau,\ \xi) \equiv \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_1} \overline{H}^h_{ij}(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, \varphi(t,\ x)\, dx, \tag{44}$$

$$(\tau,\ \xi) \in Q_1,\quad i \neq j,\quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N,$$

где

$$H^h_{ij}(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv -\sum_{k''} \Pi^x_{\bar x'} \Pi^\xi_{\bar\xi'} \{ B^{(k'')}_i (t,\ \bar x',\ D_t,\ D_{\bar x}) \times$$

$$\times (\chi(\bar x - \bar\xi')\, G^{(k'')}_j (t,\ \bar x;\ \tau,\ \bar\xi'))\big|_{\bar x_n = h} \} \zeta^{(k'')}(\xi), \tag{45}$$

h — достаточно малое положительное число.

Лемма 13. *Пусть $i \neq j$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant N$, и $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^s_{1,c}$, $\max\{0,\ r_i - r_j\} < s \leqslant l - 1 + \min\{r_i - r_j - l_0,\ 2b - r_i\}$. Тогда функция v^h_{ij} при $h \to 0$ стремится равномерно на любом ограниченном подмножестве множества Q_1 к пределу $v_{ij} \in \overset{\circ}{H}{}^{r_j - r_i + 1 + s}_{1,c'}$, $c' > 0$, для которого имеет место оценка*

$$\| v_{ij} \|^{r_j - r_i + 1 + s}_{1,c'} \leqslant C \| \varphi \|^s_{1,c}.$$

◀ Доказательство аналогично доказательству леммы

11. Здесь вместо формулы (40) имеет место формула

$$v_{ij}^h(\tau, \xi) = \sum_{k''\in\mathbb{N}_0} \zeta^{(k'')}(\xi)\, \Pi_{\xi'}^{\xi} \left\{ \int_\tau^T dt \int_{K_2'} (\chi(\bar{x} - \bar{\xi}')\, \bar{B}_i^{(k'')} \times \right.$$

$$\times (t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) - \bar{B}_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}})\, \chi(\bar{x} - \bar{\xi}')) \times$$

$$\times \bar{G}_j^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}')|_{\bar{x}_n = h}\, \bar{\varphi}_1(t, \bar{x}')\, d\bar{x}' -$$

$$- \int_\tau^T dt \int_{K_2'} \chi(\bar{x} - \bar{\xi}')\, \bar{B}_i^{(k'')}(t, \bar{x}', D_t, D_{\bar{x}}) \times$$

$$\left. \times \bar{G}_j^{(k'')}(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi}')|_{\bar{x}_n = h}\, \bar{\varphi}_1(t, \bar{x}')\, d\bar{x}' \right\}, \quad \bar{\varphi}_1(t, \bar{x}') \equiv$$

$$\equiv \bar{\varphi}(t, \bar{x}')\, F_1(\bar{x}'),$$

а вместо леммы 16 § 5 используется лемма 17 § 5. ▶

Введем теперь операторы

$$\mathcal{H}_{ij}^* : \varphi \mapsto \lim_{h\to 0} \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \bar{H}_{ij}^h(t, x; \tau, \xi)\, \varphi(t, x)\, dx,$$

$$(\tau, \xi) \in Q_1, \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant N.$$

Лемма 14. *Операторы $\mathcal{H}_{ij}^*$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^s_{1,\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - r_i + l + s}_{1,\infty}$, $\max\{0, r_i - r_j\} < s \leqslant l - 1 + \min\{r_i - r_j - l_0, \ 2b - r_i\}$, и являются сопряженными к операторам $\mathcal{H}_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant N$.*

◀ Утверждение леммы о действии операторов $\mathcal{H}_{ij}^*$ непосредственно вытекает из леммы 13. Поэтому достаточно доказать лишь, что для любых $f \in H_1^r$ и $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^s_{1,\infty}$, где $\max\{0, r_i - r_j\} < r \leqslant l - l_0 - 1$, $\max\{0, r_i - r_j\} < s \leqslant l - 1 + \min\{r_i - r_j - l_0, 2b - r_i\}$, справедливы равенства

$$(\mathcal{H}_{ij} f, \varphi)_1 = (f, \mathcal{H}_{ij}^* \varphi)_1, \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant N. \tag{46}$$

Аналогично тому, как было получено (43), находим

$$(f, v_{ij}^h)_1 = (\mathcal{H}_{ij}^h f, \varphi)_1, \tag{47}$$

$$(\mathscr{H}^h_{ij}f)(t,\ x)\equiv\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_1} H^h_{ij}(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\,f(\tau,\ \xi)\,d\xi,\ (t,\ x)\in Q_1,$$
$$i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant N.$$

На основании равенства (45) имеем

$$(\mathscr{H}^h_{ij}f)(t,\ x)=-\sum_{k''}\Pi^x_{\bar{x}'}\Big\{B_i^{(k'')}(t,\ \bar{x}',\ D_t,\ D_{\bar{x}})\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_1'}\chi\times$$
$$\times(\bar{x}-\bar{\xi}')\,G_j^{(k'')}(t,\ \bar{x};\ \tau,\ \bar{\xi}')\,(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}_1)(\tau,\ \bar{\xi}')\,d\bar{\xi}'\,\Big|_{\bar{x}_n=h}\Big\},$$
$$(t,\ x)\in Q_1,$$

откуда с помощью определения операторов g_j и $\mathscr{H}_{ij}$ получаем, что при $h\to 0$

$$(\mathscr{H}^h_{ij}f)(t,\ x)\to-\sum_{k''}\Pi^x_{\bar{x}'}\Big\{B_i^{(k'')}(t,\ \bar{x}',\ D_t,\ D_{\bar{x}})\times$$
$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_1'}\chi(\bar{x}-\bar{\xi}')\,G_j^{(k'')}(t,\ \bar{x};\ \tau,\ \bar{\xi}')\,(\bar{\zeta}^{(k'')}\bar{f}_1)\times$$
$$\times(\tau,\ \bar{\xi}')\,d\bar{\xi}'\,\Big|_{\bar{x}_n=0}\Big\}=-(B_ig_jf)(t,\ x)=(\mathscr{H}_{ij}f)(t,\ x)\qquad(48)$$

равномерно по $(t,\ x)$ из любого ограниченного подмножества множества Q_1.

Используя лемму 13, утверждение (48) и то, что множества $\{|\ v^h_{ij}\ |\}$ и $\{|\ \mathscr{H}^h_{ij}f\ |\}$ равномерно по h ограничены функциями из соответствующих пространств, перейдем в равенствах (47) к пределу при $h\to 0$ и в результате получим (46). ▶

Из лемм 9, 10, 12 и 14 вытекает следующая лемма.

Лемма 15. *Операторы $\overset{*}{\mathscr{H}}_{ij}$, $0\leqslant i,\ j\leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^{r_i-2b+(i)-1-p+l}_{(i),\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{r_j-2b+(j)-p+l}_{(j),\infty}$, $l_0+l_0^*\leqslant p\leqslant[l]-l_1^*-1$, и являются сопряженными к операторам $\mathscr{H}_{ij}$, $0\leqslant i,\ j\leqslant N$.*

Операторы, сопряженные к операторам $\mathscr{H}^{(\nu+1)}_{ij}$ и $g^{(\nu)}_j$, $0\leqslant i,\ j\leqslant N,\ \nu\geqslant 1$, определяются равенствами

$$(\mathscr{H}^{(\nu+1)}_{ij})^*\equiv\sum_{k=0}^N(\mathscr{H}^{(\nu)}_{kj})^*\,\overset{*}{\mathscr{H}}_{ik},\ (\mathscr{H}^{(1)}_{ij})^*\equiv\overset{*}{\mathscr{H}}_{ij},\qquad(49)$$

$$(g_j^\nu)^* \equiv \sum_{i=0}^{N} (\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^* g_i^*, \ (g_j^{(0)})^* \equiv g_j^*, \ 0 \leqslant i, \ j \leqslant N, \ \nu \geqslant 1. \tag{50}$$

Лемма 16. Операторы $(\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^*$, $0 \leqslant i$, $j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^{r_i - 2b + (i) - l_0 - l_0^* - \rho + l}_{(i),\infty}$ $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) - l_0 - l_0^* + l}_{(j),\infty}$, $\rho \equiv \min\{\nu, [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*\}$.

◀ Используем метод математической индукции. Утверждение леммы для $\nu = 1$ следует из леммы 15. Если предположим справедливость леммы для $\nu < [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*$, то с помощью формулы (49) и леммы 15 легко проверим, что оно справедливо для $\nu + 1$ и, следовательно, для всех $\nu \leqslant [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*$. Используя это, так же докажем, что оно имеет место для любых $\nu > [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*$. ▶

Лемма 17. Операторы $(g_j^{(\nu)})^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^{s-2b}_{0,\infty}$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j),\infty}$, $\max\{2b, l_1^*\} < s \leqslant l - l_0 - l_0^*$.

◀ Утверждение леммы вытекает из равенств (50), леммы 8 и того, что операторы $(\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^*$, $\nu \geqslant 1$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^{r_i - 2b + (i) + s}_{(i),\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{r_j - 2b + (j) + s}_{(j),\infty}$, $l_1^* < s \leqslant l - l_0 - l_0^*$. Последнее легко получить из равенств (49) и леммы 15 индукцией по ν. ▶

Замечания 1. Из доказательства лемм 8—17 следует, что все операторы g_j^*, $\mathcal{H}_{ij}^*$, $(\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^*$ и $(g_j^{(\nu)})^*$ ограниченно действуют также в соответствующих пространствах лишь ограниченных функций и именно для этих операторов справедливы утверждения лемм 8 и 15—17, если все встречающиеся в этих леммах пространства заменить такими же пространствами только без индекса ∞.

2. Если $n_0 \leqslant 2b - 2$, то из доказательства лемм 9, 10 и 16 легко получить на основании равенств (28) § 2, что для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^{s}_{(i),\infty}$, $s = r_i - 2b + (i) - l_0 - l_0^* - \rho - l$, $\rho \equiv \min\{\nu, [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*\}$, справедливы равенства

$$D_\xi^k ((\mathcal{H}_{i0}^{(\nu)})^* f) |_{Q_1} = 0,$$
$$0 \leqslant i \leqslant N, \ \nu \geqslant 0, \ |k| \leqslant \min\{[l] - l_0 - l_0^*, 2b - n_0 - 2\}. \tag{51}$$

§ 11. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МАТРИЦЫ ГРИНА

1. Ядра операторов $g_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$. Исследуем ядра операторов, определенных формулами (18) § 10. Для этого сначала изучим свойства ядер операторов $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$. Ниже r, s_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, и λ — числа из теоремы 3 § 9.

Лемма 1. Операторы $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$, *имеют ядра* $H_{ij}^{(\nu)} \in U_{r-r_i, s_j}^{r_j-r_i+(j)+\lambda,(i),(j)}$.

◀ Воспользуемся методом математической индукции. Утверждение леммы для $\nu = 1$ вытекает из леммы 2 § 10. Предположим, что оно справедливо для всех $\nu \leqslant \bar{\nu}$, и докажем его для $\nu = \bar{\nu} + 1$. Для этого запишем представление

$$\mathcal{H}_{ij}^{(\bar{\nu}+1)} = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{H}_{ik}^{(\lambda_1)} \mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)}, \tag{1}$$

где $\lambda_1 \equiv \bar{\nu} + 1 - \lambda_2$, $\lambda_2 \equiv \min\{\bar{\nu}, [l] - l_0 - l_0^* - l_1^*\}$, и применим теорему 1 § 9 к каждому слагаемому суммы (1). В обозначениях этой теоремы полагаем $\mathcal{A} = \mathcal{H}_{ik}^{(\lambda_1)}$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)}$, $\nu = (i)$, $\eta = (k)$, $\mu = (j)$, $p = r - r_i$, $s = s_j$, $q = r_k - r_i + (k) + \lambda_1'$, $\lambda_1' \equiv \min\{\lambda_1, [l] - 2l_0 - l_1 - 1\}$, $q' = r_j - r_k + (j) + \lambda_2$, $p' = p - q + (k)$, $s' = s - q' + (k)$, h равно $2b - r_j - l_0 - l_1 - \lambda_1' - \lambda_2 + l$ при $\lambda_2 < [l] - 2l_0 - l_1$ и $2b - r_j + l_0 - [l] + l$ при $\lambda_2 \geqslant [l] - 2l_0 - l_1$.

Проверим выполнение условий теоремы 1 § 9. Согласно леммам 5, 6 и 16 § 10, операторы $\mathcal{H}_{ik}^{(\lambda_1)}$, $\mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)}$ и $(\mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)})^*$ ограниченно действуют соответственно из $H_{(k)}^{p'}$, $\mathring{H}_{(j)}^{h}$ и $\mathring{H}_{(k),\infty}^{s'}$ в $\mathring{H}_{(i)}^{p}$, $\mathring{H}_{(k)}^{p'}$ и $\mathring{H}_{(j),\infty}^{s}$, при этом в силу замечания 1 из п. 3 § 10 оператор $(\mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)})^*$ ограниченно действует также из $\mathring{H}_{(k)}^{s'}$ в $\mathring{H}_{(j)}^{s}$. Далее, согласно предположению, операторы $\mathcal{H}_{ik}^{(\lambda_1)}$ и $\mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)}$ имеют ядра, принадлежащие соответственно классам $U_{p,s'}^{q,(i),(k)}$ и $U_{p',s}^{q',(k),(j)}$.

Из теоремы 1 § 9 следует, что k-е слагаемое из (1) имеет ядро, принадлежащее классу $U_{p,s}^{q+q'-(k),(i),(j)}$. Поскольку $\lambda_1' + \lambda_2 = \min\{\bar{\nu} + 1, 2[l] - 3l_0 - l_0^* - l_1 - l_1^* - 1\}$, то отсюда получаем требуемое утверждение.

Лемма 2. Пусть $l > 2l_0 + l_0^* + l_1 + l_1^* + 2$. *Тогда операторы* $\mathcal{H}_{ij}^{(m\rho)}$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant N$, $\rho \equiv [l] - l_0 + 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *имеют ядра* $H_{ij}^{(m\rho)} \in U_{r-r_i, s_j}^{r, r-r_i+(j)+m\rho,(i),(j)}$.

◀ Доказательство проведем с помощью метода математической индукции по m. Утверждение леммы 2 для $m = 1$ следует из леммы 1. Пусть оно справедливо для всех $m \leqslant \bar{m}$. Докажем, что тогда оно справедливо для $m = \bar{m} + 1$.

Воспользуемся формулой

$$\mathcal{H}_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)} = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{H}_{ik}^{(\bar{m}\rho)} \mathcal{H}_{kj}^{(\rho)}.$$

Согласно лемме 1, оператор $\mathcal{H}_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)}$ имеет ядро $H_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)} \in U_{r-r_i, s_j}^{r, r-r_i+(j)+\lambda,(i),(j)}$, $\lambda \equiv \min\{\bar{m}\rho + \rho,\ 2[l] - 3l_0 - l_0^* - l_1 - l_1^* - 1\}$, а, согласно предположению, операторы $\mathcal{H}_{ik}^{(\bar{m}\rho)}$ и $\mathcal{H}_{kj}^{(\rho)}$ имеют соответственно ядра

$$H_{ik}^{(\bar{m}\rho)} \in U_{r-r_i, s_k}^{r_k-r_i+(k)+\bar{m}\rho,(i),(k)} \quad \text{и} \quad H_{kj}^{(\rho)} \in U_{r-r_k, s_j}^{r, r-r_k+(j)+\rho,(k),(j)}.$$

Так как все эти ядра могут иметь только интегрируемую особенность, то в силу замечания 2 из п. 1 § 9 для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^{h}_{(j)}$ справедливо равенство

$$(\mathcal{H}_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)} f)(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} H_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \int_0^t d\beta \int_{\Omega_{(k)}} H_{ik}^{(\bar{m}\rho)}(t, x; \beta, y) \left(\int_0^{\beta} d\tau \int_{\Omega_{(j)}} H_{kj}^{(\rho)}(\beta, y; \tau, \xi) \times \right.$$
$$\left. \times f(\tau, \xi)\, d\xi \right) dy = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} \left(\sum_{k=0}^{N} \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\Omega_{(k)}} H_{ik}^{(\bar{m}\rho)}(t, x; \beta, y) \times \right.$$
$$\left. \times H_{kj}^{(\rho)}(\beta, y; \tau, \xi)\, dy \right) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_{(i)},$$

откуда

$$H_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)}(t, x; \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{N} \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\Omega_{(k)}} H_{ik}^{(\bar{m}\rho)}(t, x; \beta, y) \times$$
$$\times H_{kj}^{(\rho)}(\beta, y; \tau, \xi)\, dy, \quad (t, x) \in \bar{Q}_{(i)}, \quad (\tau, \xi) \in \bar{Q}_{(j)},$$
$$(t, x) \neq (\tau, \xi). \tag{2}$$

К каждому слагаемому суммы (2) применим теорему 2 § 9, полагая в ней $K_1 = H_{ik}^{(\bar{m}\rho)}$, $K_2 = H_{kj}^{(\rho)}$, $\nu = (i)$, $\eta = (k)$, $\mu = (j)$, $p = r - r_i$, $p' = r - r_k$, $s = s_k$, $s' = s_j$, $q = r_k - r_i + (k) + \bar{m}\rho$, $q' = r_j - r_k + (j) + \rho$. Неравенства $q - [p] - \eta > 0$ и $q' - [s] - \eta > 0$ выполняются в силу условия $\rho = [l] - l_0 + 1$. На основании теоремы 2 § 9 получаем, что $H_{ij}^{(\bar{m}\rho+\rho)}$ принадлежит классу $U_{r-r_i, s_j}^{r_j - r_i - (j) + (\bar{m}+1)\rho, (i), (j)}$. ▶

Лемма 3. *Операторы* $g_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, *имеют ядра* $g_j^{(\nu)} \in U_{r, s_j}^{r_j + (j) + \lambda, 0, (j)}$.

◀ Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Для $\nu = 0$ утверждение настоящей леммы выводим из леммы 1 § 10. Вместо формулы (1) используем формулу

$$g_j^{(\bar{\nu}+1)} = \sum_{k=0}^{N} g_k^{(\lambda_1)} \mathcal{H}_{kj}^{(\lambda_2)}$$

и в теореме 1 § 9 полагаем $\mathcal{A} = g_k^{(\lambda_1)}$, $\nu = 0$, $p = r$, $q = r_k + (k) + \lambda_1'$, а $\mathcal{B}$, η, μ, s, q', p', s' и h — те же, что и в лемме 1. Проверку выполнения условий теоремы 1 § 9 осуществляем с помощью лемм 5—7 и 16 § 10 и леммы 1. ▶

2. Операторы $\mathcal{G}^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 0$, и их свойства. Рассмотрим задачу (7) § 9, которую сокращенно запишем в виде

$$Lu = f, \quad f = (f_0, \ldots, f_N)'. \tag{3}$$

Введем операторы $\mathcal{G}^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 0$, с помощью равенств

$$\mathcal{G}^{(\nu)} = (\mathcal{G}_0^{(\nu)}, \ldots, \mathcal{G}_N^{(\nu)}), \quad \mathcal{G}_j^{(\nu)} \equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} g_j^{(\mu)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad \nu \geqslant 0. \tag{4}$$

В силу (19) § 10 и (4) можно записать представление

$$\mathcal{G}^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} g^{(\mu)}, \quad \nu \geqslant 0. \tag{5}$$

Используя (12) § 9, (20) § 10 и (5), легко убедиться в том, что для любого $\nu \geqslant 0$ справедливо равенство

$$L\mathcal{G}^{(\nu)} = I_{m+N} - \mathcal{H}^{\nu+1}. \tag{6}$$

Лемма 4. *Операторы* $\mathcal{G}_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$ *в* $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$, *и имеют ядра*

$$G_j^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} g_j^{(\mu)} \in U_{r,s_j}^{r_j+(j),0,(j)}. \qquad (7)$$

◀ Утверждения следуют из лемм 3 и 7 § 10, леммы 3 и равенств (4). ▶

На основании следующей леммы с помощью операторов $\mathcal{G}_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, выделяются главные части решений задачи (3).

Лемма 5. *Предположим, что в задаче* (3) $n_0 < 2b$. *Пусть* u *— решение этой задачи, принадлежащее пространству* $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s < l$. *Тогда для любого* $\nu \geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$u = u^{(\nu)} + v^{(\nu)}, \qquad (8)$$

в котором

$$u^{(\nu)}(t, x) \equiv \sum_{j=0}^{N} (\mathcal{G}_j^{(\nu)} f_j)(t, x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^{(\nu)}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0, \qquad (9)$$

а $v^{(\nu)}$ *— решение задачи*

$$Lv^{(\nu)} = \varphi^{(\nu)}, \quad \varphi^{(\nu)} \equiv \mathcal{H}^{\nu+1} f, \qquad (10)$$

$$\varphi^{(\nu)} = (\varphi_0^{(\nu)}, \ldots, \varphi_N^{(\nu)})', \quad \varphi_i^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{N} \mathcal{H}_{ij}^{(\nu+1)} f_j, \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

◀ Если $u \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, то $f_j \in \overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+s}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Отсюда на основании леммы 4 получаем, что $\mathcal{G}_j^{(\nu)} f_j \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. В силу (6) имеем $Lu^{(\nu)} = L\mathcal{G}^{(\nu)} f = f - \mathcal{H}^{\nu+1} f$. Но так как $f = Lu$, то $L(u - u^{(\nu)}) = \mathcal{H}^{\nu+1} f$, то есть $v^{(\nu)} = u - u^{(\nu)}$ является решением задачи (10). Представление (9) получаем на основании того, что оператор $\mathcal{G}_j^{(\nu)}$ в силу леммы 4 имеет ядро $G_j^{(\nu)}$. ▶

Заметим, что функция $u^{(\nu)}$, как видно из доказательства леммы 5, имеет ту же гладкость, что и решение u, а функция $v^{(\nu)}$ более гладкая. Действительно, пусть $s = l_0 - [l] + l$. Тогда, в силу лемм 5 и 6 § 10, $\varphi_j^{(\nu)} \in$

$\in \overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j+\nu+1+s}$ при

$$\nu < [l] - 2l_0 - l_1 \text{ и } \varphi_j^{(\nu)} \in \overset{\circ}{H}{}_{(j)}^{2b-r_j-2l_0-l_1+[l]+s}$$

при $\nu \geqslant [l] - 2l_0 - l_1$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Поэтому на основании следствия из п. 1 § 2 для $v^{(\nu)}$, как решения задачи (10), получаем, что $v^{(\nu)} \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+\nu+1+s}$ при $\nu < [l] - 2l_0 - l_1$ и $v^{(\nu)} \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+[l]-2l_0-l_1+s}$ при $\nu \geqslant [l] - 2l_0 - l_1$. Таким образом, в представлении (8) слагаемое $u^{(\nu)}$ является главной частью решения в указанном выше смысле.

3. Матрица Грина граничной задачи с нулевыми начальными данными и $n_0 < 2b$. Пусть u — решение задачи (7) § 9 с $n_0 < 2b$, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$. В силу леммы 5 его можно записать в виде (8), где функция $u^{(\nu)}$ определяется формулой (9). Получим представление в интегральной форме функции $v^{(\nu)}$ для достаточно большого ν.

На основании леммы 2 операторы $\mathcal{H}_{ij}^{(m\rho)}$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, $\rho = [l] - l_0 + 1$, $m = 1, 2, \ldots$, имеют ядра $H_{ij}^{(m\rho)} \in \in U_{r-r_i, s_j}^{r_j-r_i+(j)+m\rho,(i),(j)}$. Пусть m_0 — наименьшее целое число такое, что $m_0\rho > n + 2b + 2l - 2l_0 - l_0^* - l_1$. Положим $p \equiv m_0\rho - 1$. Тогда, в силу определения классов $U_{r,s}^{q,(i),(j)}$ и $\overline{U}_{r,s}^{(i),(j)}$, получаем, что $H_{ij}^{(p+1)} \in \overline{U}_{r-r_i, s_j}^{(i),(j)}$.

Определим теперь ядра $R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi)$, $(t, x) \in Q_0$, $(\tau, \xi) \in Q_{(j)}$, $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, как решения задач

$$\begin{gathered} A(t, x, D_t, D_x) R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi) = H_{0j}^{(p+1)}(t, x; \tau, \xi), \\ B_i(t, x, D_t, D_x) R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi)\big|_{Q_i} = H_{ij}^{(p+1)}(t, x; \tau, \xi), \\ 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad (11) \\ R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi)\big|_{t=\tau} = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant N, \end{gathered}$$

где точка $(\tau, \xi) \in Q_{(j)}$ считается параметрической. С помощью методики, использованной в гл. 3, нетрудно доказать, что решения $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, задач (11) принадлежат классам $\overline{U}_{r, s_j}^{0,(j)}$.

Из определения ядер $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, следует, что функция

$$v^{(p)}(t, x) \equiv \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in Q_0, \qquad (12)$$

является решением задачи (7) § 9, в правых частях которой вместо f_j стоит $\varphi_j^{(p)} = \sum_{i=0}^{N} \mathcal{H}_{ji}^{(p+1)} f_i$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

В силу равенств (8), (9) при $\nu = p$ и (12) получаем, что решение u задачи (7) § 9 с $n_0 < 2b$ представимо в виде

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} (G_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi) + R_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi)) \times$$
$$\times f_j(\tau, \xi) d\xi, \ (t, x) \in Q_0.$$

Отсюда следует, что матрица $(G_0, \ldots, G_N)$, где

$$G_j \equiv G_j^{(p)} + R_j^{(p)}, \ 0 \leqslant j \leqslant N, \qquad (13)$$

является матрицей Грина задачи (7) § 9 в рассматриваемом случае.

Итак, матрица Грина задачи (7) § 9 с $n_0 < 2b$ построена. Из единственности решений этой задачи следует единственность ее матрицы Грина, а из представлений (4), (13) и лемм 3, 4 — ее свойства 1) и 2), приведенные в теореме 3 § 9. Равенства (9) § 9 легко получить, исходя из определения матрицы Грина.

Докажем равенства (10) § 9. В силу (6) § 10 равенства вида (10) § 9 справедливы для $g_0^{(0)} \equiv g_0$. Докажем, что они имеют место для $g_0^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$. Сначала отметим, что такого вида равенства справедливы для ядер $H_{i0}^{(\nu)}$ операторов $\mathcal{H}_{i0}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$. При $\nu = 1$ это утверждение верно на основании равенств (15) § 10. Для любого $\nu > 1$ оно доказывается методом математической индукции, использованным при доказательстве леммы 1. При этом нужно пользоваться замечанием 1 из п. 1 § 9 и свойствами операторов $(\mathcal{H}_{i0}^{(\nu)})^*$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, отмеченными в замечании 2 из п. 3 § 10. Имея равенства вида (10) § 9 для $H_{i0}^{(\nu)}$, $0 \leqslant i \leqslant N$, $\nu \geqslant 1$, аналогично с помощью индукции доказывается справедливость равенств вида (10) § 9 для $g_0^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$. Отсюда, используя

(7), получаем, что такие же равенства имеют место для ядер $G_0^{(p)}$. Таким же свойством обладает ядро $R_0^{(p)}$ как единственное решение задачи (11), правые части которой удовлетворяют условиям вида (10) § 9. Из этого и (13) вытекает справедливость равенств (10) § 9 для G_0.

В предыдущих рассуждениях мы пользовались теоремой 1 § 9, которая доказана в [46] при условии $n > 1$. Для завершения доказательства теоремы 3 § 9 следует рассмотреть еще случай $n = 1$. Ниже установим связь между матрицами Грина задачи (7) § 9 при $n = 1$ и $n = 2$. С помощью этой связи все приведенные в теореме 3 § 9 свойства матрицы Грина для $n = 1$ непосредственно следуют из соответствующих свойств для $n = 2$.

Итак, рассмотрим задачу (7) § 9 при $n = 1$ и сопоставим ей в области $Q_0 \times \mathbb{R}^1$ трехмерного пространства точек (t, x, y) следующую граничную задачу:

$$A(t, x, D_t + (-D_y)^{2b}, D_x)\, u = f_0,$$

$$B_j(t, x, D_t + (-D_y)^{2b}, D_x)\, u|_{Q_1 \times \mathbb{R}^1} = f_j, \quad 1 \leqslant$$

$$\leqslant j \leqslant N, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{14}$$

где f_j зависит только от $(t, x) \in Q_{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Если задача (7) § 9 параболическая, то легко проверить, что параболической является и задача (14).

Пусть функции $G_j(t, x, y; \tau, \xi, \eta)$, $(t, x, y) \in \overline{Q}_0 \times \mathbb{R}^1$, $(\tau, \xi, \eta) \in \overline{Q}_{(j)} \times \mathbb{R}^1$, $(t, x, y) \neq (\tau, \xi, \eta)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, образуют матрицу Грина задачи (14). Поскольку коэффициенты задачи (14) не зависят от y, то нетрудно проверить, что $G_j(t, x, y; \tau, \xi, \eta) = G_j(t, x; \tau, \xi; y - \eta)$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

Возьмем решение $u \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, задачи (7) § 9. Очевидно, оно является также решением задачи (14). Поэтому справедлива формула

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{Q_{(j)}^{0,t}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} G_j(t, x; \tau, \xi; y - \eta) f_j(\tau, \xi)\, d\tau d\xi d\eta =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{Q_{(j)}^{0,t}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} G_j(t, x; \tau, \xi; y)\, dy \right) f_j(\tau, \xi)\, d\tau d\xi, \quad (t, x) \in Q_0,$$

из которой следует, что функции

$$G_j(t, x; \tau, \xi) \equiv \int_{R^1} G_j(t, x; \tau, \xi; y)\,dy, \quad (t, x) \in \overline{Q}_0,$$

$$(\tau, \xi) \in \overline{Q}_{(j)}, \quad (t, x) \neq (\tau, \xi), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \qquad (15)$$

образуют матрицу Грина задачи (7) § 9 для $n = 1$. Таким образом, формулами (15) устанавливается связь между матрицами Грина задач (7) § 9 и (14) при $n = 1$.

4. Случай $n_0 \geqslant 2b$. Покажем, что этот случай сводится к предыдущему, и на основании этого докажем теорему 4 § 9.

Пусть $\{\Omega_1^{(k)}\}$ — рассмотренное в п. 1 § 10 покрытие множества $\overline{\Omega}_0$, а $\{\zeta^{(k)}\}$ — соответствующее ему разложение единицы. Очевидно, что $\{\Omega_1^{(k'')}\}$ образует покрытие границы Ω_1.

Пусть номер j таков, что $n_j \geqslant 2b$. Считая $x \in \Omega_1^{(k'')}$, в равенствах $A(t, x, D_t, D_x)\,u(t, x) = f_0(t, x)$ и $B_j(t, x, D_t, D_x)\,u(t, x)\,|_{Q_1} = f_j(t, x)$ сделаем замену переменных с помощью формулы (14) § 1. В результате получим равенства

$$A^{(k'')}(t, \overline{x}, D_t, D_{\overline{x}})\,\overline{u}(t, \overline{x}) = \overline{f}_0(t, \overline{x}), \qquad (16)$$

$$B_j^{(k'')}(t, \overline{x}', D_t, D_{\overline{x}})\,\overline{u}(t, \overline{x})\,|_{\overline{x}_n=0} = \overline{f}_j(t, \overline{x}'). \qquad (17)$$

С помощью (16) в равенстве (17) исключим производные от $\overline{u}$ по $\overline{x}_n$ порядка, большего $2b - 1$. Тогда, учитывая то, что

$$B_j(t, x, D_t, D_x)\,u\,|_{Q_1} = \sum_{k''} \zeta^{(k'')}(x)\,\Pi_x^{\overline{x}} B_j^{(k'')}(t, \overline{x}', D_t, D_{\overline{x}}) \times$$

$$\times\,\overline{u}\,\Big|_{\overline{x}_n=0},$$

получим равенство

$$B_j(t, x, D_t, D_x)\,u\,|_{Q_1} = B_j'(t, x, D_t, D_x)\,u\,|_{Q_1} -$$

$$- C_j(t, x, D_t, D_x)\,f_0\,|_{Q_1} = f_j.$$

Порядок выражений B_j' и C_j равны r_j и $r_j - 2b$, а их порядки по нормали к Q_1 не превышают $2b - 1$ и $n_j - 2b$ соответственно. Если $n_j < 2b$, то положим $B_j' \equiv B_j$ и $C_j \equiv 0$.

Итак, задача (7) § 9 с $n_0 \geqslant 2b$ сводится к задаче

$$Au = f_0, \quad B_j' u\,|_{Q_1} = f_j + C_j f_0\,|_{Q_1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad u\,|_{t=0} = 0, \qquad (18)$$

которая рассмотрена в п. 3.

Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$,— решение задачи (7) § 9 и, следовательно, задачи (18), тогда оно представимо в виде

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi + v(t, x),$$
$$v(t, x) \equiv \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j^1(t, x; \tau, \xi)\, C_j(\tau, \xi, D_\tau, D_\xi) \times$$
$$\times f_0(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0, \tag{19}$$

где $(G_0^1, \ldots, G_N^1)$ — матрица Грина задачи (18), построенная в п. 3. Чтобы записать эту формулу в виде (17) § 9, преобразуем $v\,(t,\ x)$. Имеем

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k''} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j^1(t, x; \tau, \xi)\, \zeta^{(k'')}(\xi) \times$$
$$\times C_j(\tau, \xi, D_\tau, D_\xi) f_0(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Сделаем в этих интегралах замену переменных интегрирования с помощью формулы (14) § 1. Обозначим через $C_j^{(k'')}$ выражение, в которое переходит выражение C_j при преобразовании (14) § 1. Его можно записать в виде

$$C_j^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}', D_\tau, D_{\bar{\xi}}) = \sum_{\mu=0}^{n_j-2b} C_{j\mu}^{(k'')}(\tau, \xi', D_\tau, D_{\bar{\xi}'}) D_{\bar{\xi}_n}^{\mu},$$

где порядок выражения $C_{j\mu}^{(k'')}$ не превышает $r_j - 2b - \mu$. После указанной замены переменных формула (20) приобретает вид

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k''} \int_0^t d\tau \int_{K_1'} \bar{G}_j^1(t, x; \tau, \bar{\xi}')\, (\bar{\zeta}^{(k'')} F_1)(\xi') \times$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{n_j-2b} C_{j\mu}^{(k'')}(\tau, \bar{\xi}', D_\tau, D_{\bar{\xi}'}) D_{\bar{\xi}_n}^{\mu} \bar{f}_0(\tau, \xi)\big|_{\bar{\xi}_n=0}\, d\bar{\xi}',$$

откуда после интегрирования по частям получаем

$$v(t, x) = \sum_{k''} \int_0^t d\tau \int_{K_1} \sum_{\mu=0}^{n_0-2b} R_\mu^{(k'')}(t, x; \tau, \bar{\xi}')\, D_{\bar{\xi}_n}^{\mu} \times$$
$$\times \bar{f}_0(\tau, \bar{\xi})\big|_{\bar{\xi}_n=0} F_1(\bar{\xi}')\, d\bar{\xi}'. \tag{21}$$

Здесь

$$R_{\mu}^{(k'')}(t,\ x;\ \tau,\ \bar{\xi}') \equiv \sum_{j=1}^{N} \theta(n_j - 2b - \mu)\{(C_{j\mu}^{(k'')})^* \times$$

$$\times (\tau,\ \bar{\xi}',\ D_\tau,\ D_{\bar{\xi}'})((\bar{G}_j^1)'(t,\ x;\ \tau,\ \bar{\xi}')\,\bar{\zeta}^{(k'')}(\bar{\xi}')\}',$$

$$0 \leqslant \mu \leqslant n_0 - 2b, \qquad (22)$$

где $(C_{j\mu}^{(k'')})^*$ — выражение, сопряженное в смысле Лагранжа к выражению $C_{j\mu}^{(k'')}$; функции θ и F_1 определены соответственно в (3) § 4 и (23) § 10. Возвращаясь в интегралах (21) к переменной интегрирования ξ, учитывая равенство

$$D_{\bar{\xi}_n}^{\mu} \bar{f}_0 \big|_{\bar{\xi}_n=0} = \sum_{|k|=\mu} d_{\mu,k}^{(k'')} D_{\xi}^{k} f_0 \big|_{Q_1} \qquad (23)$$

и полагая

$$R_k(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi_{\bar{\xi}'}^{\xi} R_{|k|}^{(k'')}(t,\ x;\ \tau,\ \bar{\xi}')\, d_{|k|,k}^{(k'')}, \qquad (24)$$

получаем, что $v(t,\ x)$ принимает вид последнего слагаемого из (17) § 9. Из формул (22), (24) и теоремы 3 § 9 следует принадлежность функции R_k указанному в теореме 4 § 9 классу.

Заметим, что формулу (21) можно записать в виде

$$v(t,\ x) = \sum_{k''} \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} 2 \sum_{\mu=0}^{n_0-2b} R_{\mu}^{(k'')}(t,\ x;\ \tau,\ \bar{\xi}')(-1)^{\mu} \times$$

$$\times\ \delta_0^{(\mu)}(\bar{\xi}_n)\bar{f}_0(\tau,\ \bar{\xi})\,d\bar{\xi} = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0^2(t,\ x;\ \tau,\ \xi) f_0(\tau,\ \xi)\,d\xi,$$

$$(25)$$

где

$$G_0^2(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k''} \Pi_{\bar{\xi}}^{\xi} \left\{ 2 \sum_{\mu=0}^{n_0-2b} (-1)^{\mu} R_{\mu}^{(k'')}(t,\ x;\ \tau,\ \bar{\xi}')\,\delta_0^{(\mu)}(\bar{\xi}_n) \right\}. \qquad (26)$$

В силу (25) формула (17) § 9 приобретает вид

$$u(t,\ x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j(t,\ x;\ \tau,\ \xi) f_j(\tau,\ \xi)\,d\xi,\ (t,\ x) \in Q_0.$$

$$(27)$$

где для G_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, справедлива формула (18) § 9, в которой G_0^2 определяется формулой (26). Из (22) и теоремы 3 § 9 следует, что

$$\Pi^{\xi}_{\xi'} R_\mu^{(k'')} \in U^{2b+\mu+1}_{r, s_0+\mu+1}(Q_0, Q_1^{(k'')} \cap Q_1), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant n_0 - 2b.$$

5. Общий случай. Докажем теорему 5 § 9. Пусть u — решение задачи (23) — (25) § 1, принадлежащее $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$. Для получения его представления поступим так же, как в п. 2 § 4. Рассмотрим функцию $u_h(t, x) \equiv \eta_h(t)\, u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{Q}_0$, которая принадлежит $\overset{\circ}{H}{}_0^{2b+s}$ и удовлетворяет условиям

$$Au_h = \eta_h f_0 + \eta_h' u \equiv F_{0h}, \quad B_j u_h|_{Q_1} = \eta_h f_j + (B_j(\eta_h u) -$$
$$- \eta_h B_j u)|_{Q_1} \equiv F_{jh}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad u_h|_{t=0} = 0.$$

На основании предыдущих результатов справедливо представление

$$u_h(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t, x; \tau, \xi)\, F_{jh}(\tau, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} R_k(t, x; \tau, \xi)\, D_\xi^k F_{0h}(\tau, \xi)\, d\xi \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=0}^{N} (\mathcal{G}_j^1 F_{jh})(t, x) + (\mathcal{R} F_{0h})(t, x), \quad (t, x) \in Q_0, \qquad (28)$$

где $R_k = 0$, если $n_0 < 2b$. Перейдем в (28) к пределу при $h \to 0$, тогда получим, что $u(t, x)$ равно пределу правой части. Найдем этот предел.

Очевидно, что

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{G}_j^1(\eta_h f_j) = \mathcal{G}_j^1 f_j, \quad \lim_{h \to 0} \mathcal{R}(\eta_h f_0) = \mathcal{R} f_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \quad (29)$$

В силу свойств функции η_h и того, что $\{\zeta^{(k'')}\}$ — разложение единицы, соответствующее покрытию $\{\Omega_1^{(k'')}\}$ множества Ω_1, для $v_h^0 \equiv (\mathcal{G}_0^1(\eta_h' u))(t, x)$, $v_h \equiv \sum\limits_{j=1}^{N} (\mathcal{G}_j^1(B_j(\eta_h u) -$ $- \eta_h B_j u)|_{Q_1})(t, x)$ и $w_h \equiv (\mathcal{R}(\eta_h' u))(t, x)$ имеем формулы

$$v_h^0 = \int_{h/2}^{h} d\tau \int_{\Omega_0} G_0^1(t, x; \tau, \xi)\, \eta_h'(\tau)\, u(\tau, \xi)\, d\xi,$$

$$v_h = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k''} \int_{h/2}^{h} d\tau \int_{K_1'} \overline{G}_j^1 (t,\ x;\ \tau,\ \overline{\xi}') (\overline{\zeta}^{(k'')} F_1)(\overline{\xi}') \times$$

$$\times\, (B_j^{(k'')} (\eta_h \overline{u})' - \eta_h B_j^{(k'')} \overline{u}) \big|_{\overline{\xi}_n = 0}\, d\overline{\xi}',$$

$$w_h = \int_{h/2}^{h} d\tau \int_{\Omega_1} \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} R_k (t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, \eta_h' (\tau)\, D_\xi^k u (\tau,\ \xi)\, d\xi.$$

Записывая представление

$$B_j^{(k'')} (\tau,\ \overline{\xi}',\ D_\tau,\ D_{\overline{\xi}}) = \sum_{\eta=0}^{m_j} \sum_{\nu=0}^{\overline{n}_j} \overline{\beta}_{j\eta\nu} (\tau,\ \overline{\xi}',\ D_{\overline{\xi}'})\, D_{\overline{\xi}_n}^{\nu} D_\tau^{m_j - \eta},$$

$$\overline{n}_j \equiv \min \{n_j,\ r_j - 2b\,(m_j - \eta)\},\quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

интегрируя по частям и переходя к пределу при $h \to 0$, так же, как в п. 2 § 4, получаем

$$\lim_{h \to 0} v_h^0 = \int_{\Omega_0} G_0^1 (t,\ x;\ 0,\ \xi)\, f_{N+1} (\xi)\, d\xi, \tag{30}$$

$$\lim_{h \to 0} w_h = \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_{\Omega_1} R_k (t,\ x;\ 0,\ \xi)\, D_\xi^k f_{N+1} (\xi)\, d\xi, \tag{31}$$

$$\lim_{h \to 0} v_h = \sum_{\mu=0}^{m_0 - 1} \sum_{\nu=0}^{r_1 - 2b(\mu+1)} \sum_{k''} \int_{K_1'} M_{\mu,\nu}^{(k'')} (t,\ x;\ 0,\ \overline{\xi}') \times$$

$$\times\, D_\tau^{\mu} D_{\overline{\xi}_n}^{\nu} \overline{u} (\tau,\ \overline{\xi}) \Big|_{\tau=0,\, \overline{\xi}_n = 0} F_1 (\overline{\xi}')\, d\overline{\xi}'. \tag{32}$$

Здесь

$$M_{\mu,\nu}^{(k'')} (t,\ x;\ 0,\ \overline{\xi}') \equiv \sum_{j=1}^{N} \sum_{\eta=0}^{m_j - \mu - 1} \theta (m_j - \mu - 1)\, \theta (\overline{n}_j - \nu) \times$$

$$\times\, (-D_\tau)^{m_j - \mu - \eta - 1} \{\overline{\beta}_{j\eta\nu}^*) (\tau,\ \overline{\xi}',\ D_{\overline{\xi}'}) ((\overline{G}_j^1)' (t,\ x;\ \tau,\ \overline{\xi}') \times$$

$$\times\, \overline{\zeta}^{(k'')} (\overline{\xi}'))\}' \big|_{\tau=0},$$

где $\overline{\beta}_{j\eta\nu}^*$ — выражение, сопряженное в смысле Лагранжа к выражению $\overline{\beta}_{j\eta\nu}$.

Правую часть равенства (32) преобразуем так же, как выражение L в п. 2 § 4. Вместо формулы (13) § 4 используем следующую формулу, получающуюся с помощью равенства (16):

$$D_\tau^{\eta+1} D_{\overline{\xi}_n}^{\zeta} \overline{u} (\tau,\ \overline{\xi}) \big|_{\tau=0,\, \overline{\xi}_n = 0} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2b(\eta+1)+\zeta} \lambda_{\eta\zeta\nu}(\bar{\xi}', D_{\bar{\xi}'}) D^{\nu}_{\xi_n} \bar{f}_{N+1}(\bar{\xi})\big|_{\xi_n=0} +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{\eta} \sum_{\nu=0}^{2b(\eta-\mu)+\zeta} \omega_{\eta\zeta\mu\nu}(\bar{\xi}', D_{\bar{\xi}'}) D^{\mu}_{\tau} D^{\nu}_{\xi_n} \bar{f}_0(\tau, \bar{\xi})\big|_{\tau=0, \xi_n=0},$$

где $\lambda_{\eta\zeta\nu}$ и $\omega_{\eta\zeta\mu\nu}$ — дифференциальные выражения порядков $2b(\eta+1)+\zeta-\nu$ и $2b(\eta-\mu)+\zeta-\nu$ соответственно.

В результате преобразований с помощью равенства (23) придем к формуле

$$\lim_{h\to 0} v_h = \sum_{\substack{\{\bar{k} \mid |\bar{k}| \leqslant r_1-4b,\\ k_0 \leqslant m_0-2\}}} \int_{\Omega_1} W_{\bar{k}}(t, x; 0, \xi) D^{k}_{\tau,\xi} f_0(\tau, \xi)\big|_{\tau=0}\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant r_1-2b} \int_{\Omega_1} V_k(t, x; 0, \xi) D^{k}_{\xi} f_{N+1}(\xi)\, d\xi, \qquad (33)$$

в которой

$$W_{\bar{k}}(t, x; 0, \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi^{\xi}_{\bar{\xi}'} W^{(k'')}_{k_0,|k|}(t, x; 0, \bar{\xi}')\, d^{(k'')}_{|k|,k},$$

$$W^{(k'')}_{\mu,\nu}(t, x; 0, \bar{\xi}') \equiv \theta(m_0-2)\,\theta(m_0-2-\mu) \times$$

$$\times \sum_{\eta=\mu}^{m_0-2} \sum_{\zeta=\max\{0,\nu-2b(\eta-\mu)\}}^{r_1-2b(\eta+2)} \{\overset{*}{\omega}_{\eta\zeta\mu\nu}(\bar{\xi}', D_{\bar{\xi}'}) (M^{(k'')}_{\eta+1,\zeta})' \times$$

$$\times (t, x; 0, \bar{\xi}')\}';$$

$$V_k(t, x; 0, \xi) \equiv \sum_{k''} \Pi^{\xi}_{\bar{\xi}'} V^{(k'')}_{|k|}(t, x; 0, \bar{\xi}')\, d^{(k'')}_{|k|,k},$$

$$V^{(k'')}_{\nu}(t, x; 0, \bar{\xi}') \equiv M^{(k'')}_{0,\nu}(t, x; 0, \bar{\xi}') +$$

$$+ \theta(m_0-2) \sum_{\eta=0}^{m_0-2} \sum_{\zeta=\max\{0,\nu-2b(\eta+1)\}}^{r_1-2b(\eta+2)} \{\overset{*}{\lambda}_{\eta\zeta\nu}(\bar{\xi}', D_{\bar{\xi}'}) (M^{(k'')}_{\eta+1,\zeta})' \times$$

$$\times (t, x; 0, \bar{\xi}')\}'.$$

Из равенств (28) — (33) следует представление (19) § 9, в котором функции R_k, $W_{\bar{k}}$ и V_k определяются формулами (24) и (34).

Представление (19) § 9 можно записать в виде (1) § 3, где функции G_j, $0 \leqslant j \leqslant N+1$, определяются формулами (20) § 9, G^2_0 — равенством (26), а G^3_0 и G^1_{N+1} — формулами

$$G^3_0(t, x; \tau, \xi) \equiv$$

$$\equiv 4\sum_{k''}\Pi^{\xi}_{\bar\xi}\left(\sum_{\mu=0}^{m_0-2}\sum_{\nu=0}^{r_1-2b(\mu+2)}(-1)^{\mu+\nu}W^{(k'')}_{\mu,\nu}(t,x;0,\bar\xi')\times\right.$$

$$\left.\times\,\delta_0^{(\mu)}(\tau)\,\delta_0^{(\nu)}(\bar\xi_n)\right),$$

$$\dot G^1_{N+1}(t,x;\xi)\equiv \tag{35}$$

$$\equiv 2\sum_{k''}\Pi^{\xi}_{\bar\xi}\left(\sum_{\nu=0}^{r_1-2b}(-1)^{\nu}V^{(k'')}_{\nu}(t,x;0,\bar\xi')\,\delta_0^{(\nu)}(\bar\xi_n)\right).$$

Из формул (24), (34) и теоремы 3 § 9 вытекает, что функции R_k, V_k и $W_{\bar k}$ обладают приведенными в теореме 5 § 9 свойствами, функции $\Pi^{\xi}_{\bar\xi}R^{(k'')}_{\nu}$ и $\Pi^{\xi}_{\bar\xi}V^{(k'')}_{\nu}$ принадлежат классу $U^{2b+\nu+1}_{r,s_0+\nu+1}(Q_0,Q_1^{(k'')}\cap Q_1)$, а функция $\Pi^{\xi}_{\bar\xi}W^{(k'')}_{\mu,\nu}$ — классу $U^{2b(\mu+2)+\nu+1}_{r,s_0+2b(\mu+1)+\nu+1}(Q_0,Q_1^{(k'')}\cap Q_1)$.

6. Оценки матрицы Грина в цилиндрах бесконечной высоты. Докажем теорему 6 § 9. Для определенности рассмотрим случай области Q_0^{∞}.

Пусть $T>0$ — некоторое число, а числа q, r, s, ν и μ — те же, что в п. 4 § 1. Через $S^{q,\varphi(T-\tau)}_{r,s}(Q_\nu^{0,T},Q_\mu^{0,T})$ и $\bar S^{\varphi(T-\tau)}_{r,s}(Q_\nu^{0,T},Q_\mu^{0,T})$ обозначим классы функций $K(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x)\in\bar Q_\nu^{0,T}$, $(\tau,\xi)\in\bar Q_\mu^{0,T}$, $(t,x)\neq(\tau,\xi)$, равных нулю при $t<\tau$ и имеющих производные $D^{\bar k}_{t,x}D^{\bar m}_{\tau,\xi}K$, $|\bar k|\leqslant[r]$, $|\bar m|\leqslant[s]$, которые удовлетворяют неравенствам, получающимся из неравенств (28) — (36) § 1 заменой оценочной функции $\Phi_c^{Mq^{(\lambda)}}(t-\tau,z)$ соответственно функциями $\Phi_c^{Mq^{(\lambda)}}(t-\tau,z)\,\varphi(T-\tau)$ и $E_c(t-\tau,z)\,\varphi(T-\tau)$, $t>\tau\geqslant 0$, $z>0$, где $\varphi(T-\tau)>0$; постоянные C и c в этих неравенствах не зависят от T.

Достаточно доказать теорему 6 § 9 для случая задачи с нулевыми начальными данными и $n_0<2b$. В этом случае $G_j=G_j^1$, $0\leqslant j\leqslant N$. Чтобы доказать принадлежность G_j классу $S^{r_j+(j),\gamma}_{r,s_j}(Q_0^{\infty},Q_{(j)}^{\infty})$, достаточно установить, что для любого $T>0$

$$G_j\in S^{r_j+(j),\,\exp\{\gamma(T-\tau)\}}_{r,s}(Q_0^{0,T},Q_{(j)}^{0,T}),\quad 0\leqslant j\leqslant N. \tag{36}$$

Итак, в цилиндре $Q_0^{0,T}$ рассмотрим задачу (7) § 9 с $n_0<2b$. Нужно проследить для этой задачи, как зависят постоянные из оценок ядер $g_j^{(\nu)}$, $R_j^{(p)}$ и, следовательно, G_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, от T.

Из формул (2), (4), (11) — (14) § 10 и условий теоремы 6 § 9 непосредственно вытекает, что с некоторым $\rho > 0$

$$g_j \in S_{2b+l,l-l_0}^{r_j+(j),(T-\tau)^\rho}(Q_0^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T}),$$

$$H_{ij} \in S_{2b-r_j+l,l-l_0}^{r_j-r_i+1+(j),(T-\tau)^\rho}(Q_{(i)}^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T}), \tag{37}$$

$$0 \leqslant i,\ j \leqslant N.$$

Легко проследить, что в предположениях теоремы 6 § 9 нормы операторов $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$, $\mathcal{G}_j^{(\nu)}$, $(\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^*$ и $(\mathcal{G}_j^{(\nu)})^*$ могут зависеть от T только степенным образом. Из этого и (37) следует, что ядра операторов $\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)}$ и $\mathcal{G}_j^{(\nu)}$ принадлежат следующим классам:

$$H_{ij}^{(\nu)} \in S_{r-r_i,s_j}^{r_j-r_i+(j)+\lambda,(T-\tau)^{\rho_1}}(Q_{(i)}^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T}),$$

$$g_j^{(\nu)} \in S_{r,s_j}^{r_j+(j)+\lambda,(T-\tau)^{\rho_1}}(Q_0^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T}),\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant N,\ \nu \geqslant 1, \tag{38}$$

где $\rho_1 > 0$ — постоянная, зависящая, вообще говоря, от ν. Это утверждение доказывается на основании теоремы 1 § 9. Анализ доказательства этой теоремы показывает, что если ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обладают оценками, в которых постоянные C степенным образом зависят от T, а нормы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}^*$ зависят от T также степенным образом, то ядро оператора $\mathcal{A}\mathcal{B}$ обладает оценками, зависящими от T таким же образом. Заметим, что фактически здесь всюду получается степенная зависимость от $T - \tau$.

Ядра $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, являются решениями задач (11), в которых на основании (38) $H_{ij}^{(p+1)} \in \overline{S}_{r-r_i,s_j}^{(T-\tau)^{\rho_1}}(Q_{(i)}^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T})$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant N$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в п. 3 § 8, устанавливается, что $R_j^{(p)} \in \overline{S}_{r,s_j}^{\exp\{\gamma(T-\tau)\}}(Q_0^{0,T}, Q_{(j)}^{0,T})$, $\gamma > 0$, $0 \leqslant j \leqslant N$. Отсюда и из (38) вытекает (36).

§ 12. ТЕОРЕМЫ О ДЕЙСТВИИ ОПЕРАТОРОВ ГРИНА И ОПЕРАТОРОВ, К НИМ СОПРЯЖЕННЫХ. НОРМАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Операторы Грина в пространствах ограниченных функций. Оператором Грина задачи (23) — (25) § 1 назовем оператор

$$\mathcal{G} : (f_0, \ldots, f_{N+1})' \mapsto \sum_{j=0}^{N+1} \mathcal{G}_j f_j, \tag{1}$$

где $\mathcal{G}_j$, $0 \leqslant j \leqslant N+1$,— операторы из формулы (1) § 3.

Из теоремы 5 § 9 следует, что

$$\mathcal{G}_j : f_j \mapsto \mathcal{G}_j^1 f_j + \delta_{j,0} \Bigg\{ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \mathcal{R}_k (D_x^k f_0 |_{Q_1}) +$$

$$+ \sum_{\substack{\{\bar{k} \mid |\bar{k}| \leqslant r_1 - 4b,\\ k_0 \leqslant m_0 - 2\}}} \mathcal{W}_{\bar{k}} \big(D_{t,x}^{\bar{k}} f_0 |_{\substack{t=0\\ x \in \Omega_1}} \big) \Bigg\}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{2}$$

$$\mathcal{G}_{N+1} : f_{N+1} \mapsto \int_{\Omega_0} G_0^1 (t, x; 0, \xi) f_{N+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_{\Omega_1} R_k (t, x; 0, \xi) D_\xi^k f_{N+1}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant r_1 - 2b} \mathcal{V}_k (D_x^k f_{N+1} |_{\Omega_1})(t, x), \quad (t, x) \in Q_0, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{G}_j^1 : f \mapsto \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1 (t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \ (t, x \text{ [illegible]} \tag{4}$$

$$\mathcal{R}_k : f \mapsto \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} R_k (t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0, \tag{5}$$

$$\mathcal{W}_{\bar{k}} : f \mapsto \int_{\Omega_1} W_{\bar{k}} (t, x; 0, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0, \tag{6}$$

$$\mathcal{V}_k : f \mapsto \int_{\Omega_1} V_k (t, x; 0, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0. \tag{7}$$

Для операторов (4) справедливо представление

$$\mathcal{G}_j^1 = \sum_{\nu=0}^{p} \mathcal{g}_j^{(\nu)} + \mathcal{R}_j^{(p)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{8}$$

в котором $\mathcal{R}_j^{(p)}$ — оператор с ядром $R_j^{(p)}$, являющимся решением задачи (11) § 11.

Пусть $s > 0$ — нецелое число и $\mathcal{H}^s$ — пространство, определенное в п. 1 § 2.

Теорема 1. *При выполнении условий теоремы* 5 § () *оператор* $\mathcal{G}$ *ограниченно действует из* $\mathcal{H}^s$ *на* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_0$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$.

◀ Утверждение теоремы справедливо в силу следствия из теоремы 1 § 2 и того, что решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_0$ задачи (23) — (25) § 1, как доказано в п. 5 § 11, представимо в виде $u = \mathcal{G}f$. ▶

Замечание. Для задачи (7) § 9 с $n_0 < 2b$ из теоремы 1 следует, что операторы $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j^1$, $0 \leqslant j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+s}_{(j)}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_0$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$. Этот результат также получается из представления (8), лемм 3 и 7 § 10 и свойств ядер $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$.

2. Операторы Грина в пространствах растущих функций. Исследуем действие оператора Грина задачи (7) § 9 для случая бесконечной области Ω_0 в пространствах $\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,k(\cdot,a)}$, $\nu = 0, 1$. Функция $k(\cdot, a)$, характеризующая тип возможного роста, имеет вид

$$k(t, a) \equiv c_0 a \left(c_0^{2b-1} - a^{2b-1} t\right)^{-\frac{1}{2b-1}}, \quad 0 \leqslant t < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}. \tag{9}$$

Здесь c_0 и a являются фиксированными постоянными, причем $c_0 < c_1$, где c_1 — наименьшая среди постоянных c из оценок элементов матрицы Грина задачи (7) § 9 при $n_0 < 2b$ и задачи (18) § 11 при $n_0 \geqslant 2b$, а постоянная a считается выбранной так, чтобы $\left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1} > T$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А *и* $Б_l$ *с таким же* l, *как в теореме* 3 § 9. *Тогда операторы* $\mathcal{G}_j$, $0 \leqslant j \leqslant N$, *для задачи* (7) § 9 *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+s}_{(j),k(\cdot,a)}$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_{0,k(\cdot,a)}$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$.

◀ Утверждение теоремы достаточно доказать для операторов $\mathcal{G}_j^1$, $0 \leqslant j \leqslant N$, так как при $n_0 < 2b$ $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j^1$, а при $n_0 \geqslant 2b$, в силу (19) § 11,

$$\mathcal{G}_j f_j = \mathcal{G}_j^1 f_j + \delta_{j,0} \sum_{l=0}^{N} \mathcal{G}_l^1 (C_l(t, x, D_t, D_x) f_0 |_{\Omega_1}).$$

Из формулы (8) следует, что изучение $\mathcal{G}_j^{\bullet}$ сводится к изучению операторов $g_j^{(\nu)}$ и $\mathcal{R}_j^{(p)}$. В силу свойств ядер $R_j^{(p)}$ операторы $\mathcal{R}_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, ограниченно действуют из $\overset{\circ}{H}{}^{0}_{(j),k(\cdot,a)}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_{0,k(\cdot,a)}$. Действительно, для $f \in \overset{\circ}{H}{}^{0}_{(j),k(\cdot,a)}$ с помощью неравенства (3) § 1 имеем

$$|D_{t,x}^{\bar{k}}(\mathcal{R}_j^{(p)}f)(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|^0_{(j),k(\cdot,a)} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} E_c(t-\tau, |x-\xi|)\,\Psi(\tau, \xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|^0_{(j),k(\cdot,a)}\,\Psi(t, x) \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} E_{c-c_0}(t-\tau, |x-\xi|)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|^0_{(j),k(\cdot,a)}\,\Psi(t, x), \quad (t, x) \in Q_0, \quad |\bar{k}| \leqslant 2b+[s].$$

Отсюда и из аналогичных оценок приращений по t и x для старших производных от $\mathcal{R}_j^{(p)}f$ следует неравенство

$$\|\mathcal{R}_j^{(p)}f\|^{2b+s}_{0,k(\cdot,a)} \leqslant C\|f\|^0_{(j),k(\cdot,a)}.$$

Утверждение о действии в пространствах растущих функций операторов $g_j^{(\nu)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $0 \leqslant \nu \leqslant p$, доказывается с помощью следующей леммы так же, как с помощью лемм 3 и 4 § 10 доказывалось соответствующее утверждение для этих операторов в пространствах ограниченных функций в п. 2 § 10.

Лемма. Операторы g_i *и* $\mathcal{H}_{ij}$, $0 \leqslant i$, $j \leqslant N$, *ограниченно действуют соответственно из* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+s}_{(j),k(\cdot,a)}$ *и* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+s'}_{(j),k(\cdot,a)}$ *в* $\overset{\circ}{H}{}^{2b+s}_{0,k(\cdot,a)}$ *и* $\overset{\circ}{H}{}^{2b-r_i+1+s'}_{(i),k(\cdot,a)}$, $r_j - 2b < s \leqslant l - l_0 - 2b + r_j$, $l_0 < s' \leqslant l - l_0 - l_1 - 1$.

◀ Как в леммах 3 и 4 § 10, будем исходить из представлений (21) и (24) — (26) § 10 и аналогичного представления для операторов $\mathcal{H}_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Для оценки интегралов из этих представлений используется эквивалентность расстояний $d(t, x; \tau, \xi)$ и $d(t, \bar{x}; \tau, \bar{\xi})$, где $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ — распрямляющие координаты соответственно точек x и ξ. При этом предполагается, что имеют место неравенства (10) § 6, из которых, в частности, следует неравенство

$$E_{c_1}(t-\tau, |\bar{x}-\bar{\xi}|) \leqslant CE_{c_0}(t-\tau, |x-\xi|), \quad c_1 \equiv 2^{\frac{2b}{2b-1}}c_0. \tag{10}$$

Используется также то, что из $f\in H^{s}_{\nu,k(\cdot,a)}$, $\nu=0,\ 1$, для $\bar f\equiv\Pi^{\bar x}_{x}f$ (при $\nu=1$ вместо $\bar x$ нужно писать $\bar x'$) следуют неравенства

$$|D^{\bar k}_{t,\bar x}\bar f|\leqslant C\|f\|^{s}_{\nu,k(\cdot,a)}\Psi(t,x),\quad |\bar k|\leqslant[s],$$

$$|\Delta^{\bar y}_{\bar x}D^{\bar k}_{t,\bar x}\bar f|\leqslant C\|f\|^{s}_{\nu,k(\cdot,a)}(\Psi(t,x)+\Psi(t,y))\,|\bar x-\bar y|^{s-[s]},$$

$$|\bar k|=[s],$$

$$|\Delta^{\tau}_{t}D^{\bar k}_{t,\bar x}\bar f|\leqslant C\|f\|^{s}_{\nu,k(\cdot,a)}(\Psi(t,x)+\Psi(\tau,x))\,|t-\tau|^{\frac{s-|\bar k|}{2b}},\qquad (11)$$

$$[s]-2b<|\bar k|\leqslant[s].$$

Слагаемые из указанных выше представлений для операторов $\mathcal{G}_j$ и $\mathcal{H}_{ij}$, содержащие разность $\chi-1$ или производные от χ, оцениваются непосредственно с помощью оценок соответствующих ядер и неравенств (10) и (11), а также неравенства (3) § 1 таким же образом, каким оценивалось выражение $\mathcal{R}^{(p)}_{i}f$. Оценки остальных слагаемых основаны на свойствах операторов $\mathcal{Z}^{(k')}_{0}$, $\mathcal{G}^{(k'')}_{j}$, $A^{(k'')}_{0}\mathcal{G}^{(k'')}_{i}$, $B^{(k'')}_{i0}\mathcal{G}^{(k'')}_{j}$, $1\leqslant i\leqslant N$, $0\leqslant j\leqslant N$, $i\neq j$, а также операторов, сопоставляющих функциям f и $\bar f$ соответственно функции

$$\int_0^t d\tau\int_{\Omega_1^{(k')}}\Delta^{\tau,\xi}_{t,x}A_0(t,x,D_t,D_x)\,Z^{(k')}_0(t,x;\tau,\xi)\,(\zeta^{(k')}f)(\tau,\xi)\,d\xi,$$

$$(t,x)\in Q^{(k')}_2,$$

$$\int_0^t d\tau\int_{K_1^{+}}\Delta^{\tau,\bar\xi}_{t,\bar x}A^{(k'')}_0(t,\bar x,D_t,D_{\bar x})\,G^{(k'')}_0(t,\bar x;\tau,\bar\xi)\,(\bar\zeta^{(k'')}\bar f)(\tau,\bar\xi)\,d\bar\xi,$$

$$\int_0^t d\tau\int_{K_1'}\Delta^{\tau,\bar\xi'}_{t,\bar x'}B_{i0}(t,\bar x',D_t,D_{\bar x})\,G^{(k'')}_i(t,\bar x;\tau,\bar\xi')\big|_{\bar x_n=0}\times$$

$$\times(\bar\zeta^{(k'')}\bar f)(\tau,\bar\xi')\,d\bar\xi',\quad (t,\bar x)\in\Pi^{T}_{+},\quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

Обозначим эти операторы через $\mathcal{A}_1,\ \ldots,\ \mathcal{A}_q$.

Леммы 6—12 § 5 утверждают, что операторы $\mathcal{A}_\nu$, $1\leqslant\leqslant\nu\leqslant q$, ограниченно действуют в соответствующих пространствах Гёльдера ограниченных функций. Чтобы доказать аналогичное утверждение в случае пространств растущих функций, для которых справедливы неравенства типа (11), нужно воспользоваться полученными при доказательстве лемм 6—12 § 5 выражениями для производных от $\mathcal{A}_\nu f$ и $\bar{\mathcal{A}}_\nu f$, $1 \leqslant \nu \leqslant q$, и оценить интегралы из этих выражений с помощью неравенств (10) и (11) и неравенства (3) § 1. При этом интегралы, содержащие значения производных от f или $\bar{f}$ в точках (t, ξ), $(t, \bar{\xi})$ или $(t, \bar{\xi}')$, следует предварительно преобразовать к специальному виду. Используемую методику оценок изложим на примере интегралов (34) § 5 и

$$\int_0^t d\tau \int_{K_1^+} G_0(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \tau, \bar{\xi})(\bar{\zeta}\bar{f})(\tau, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}, \quad (t, \bar{x}) \in \Pi_+^T, \qquad (12)$$

где $\quad G_0(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \tau, \bar{\xi}) \equiv G_0^{(k'')}(t-\tau, \bar{x}-\bar{\xi}', \bar{\xi}_n; \tau, \bar{\xi}),$

$$\bar{\zeta}(\bar{\xi}) \equiv \Pi_{\xi}^{\bar{\xi}} \zeta^{(k'')}(\xi).$$

Производные от интеграла (34) § 5 определяются формулами (35) — (37) § 5. Интегралы из первых двух формул оцениваются непосредственно с помощью неравенств (3) из § 1 и 5. Например, оценка $D_x^1 J_1$ из (36) § 5 в предположении, что $f \in \overset{\circ}{H}{}^{s}_{k(\cdot,a)}(\Pi^T)$, получается следующим образом:

$$|D_x^1 J_1| \leqslant C_0 \Big\{ \int_0^t d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-1} E_c(t-\tau, |x-\xi|) \times$$

$$\times ((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}} + |x-\xi|^{\alpha})(\Psi(\tau, \xi) + \Psi(t, x))\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-1} E_c(t-\tau, |x-\xi|)\, d\xi\, \Psi(t, x) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \{(t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}-1} E_{c-c_0}(t-\tau, |x-\xi|) +$$

$$+ (t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-1} E_c(t-\tau, |x-\xi|)\}\, d\xi\, \Psi(t, x) \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \Psi(t, x)\, t^{\frac{\alpha}{2b}}.$$

Здесь и далее $C_0 \equiv C \| f \|^s_{\Pi^T, k(\cdot, a)}$, $\alpha \equiv s - [s]$.

Оценивать таким же образом интегралы из формулы (37) § 5 для $D_t^1 J_2$ нельзя, так как в эти интегралы входят значения производных от f в точке (t, ξ), которые при оценке дадут множитель $\Psi(t, \xi)$, а он не свертывается с $E_{c_0}(t-\tau, |x-\xi|)$ так, чтобы в результате получился необходимый множитель $\Psi(t, x)$. Преобразуем формулу (37) § 5 к такому виду, в котором всюду можно применять неравенство (3) § 1 и в результате получить множитель $\Psi(t, x)$.

Вначале формулу (37) § 5 запишем в виде

$$D_t^1 J_2 = \int_0^t d\tau \int_{K_1} D_t^1 L(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_\tau^t f_0(\tau, \xi)\,d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{K_1} L_0(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\,f_0(t, \xi)\,d\xi + \\ + \int_{K_1} L(t, x; 0, \xi)\,\zeta(\xi)\,f_0(t, \xi)\,d\xi, \tag{13}$$

где $f_0(\tau, \xi) \equiv D_\tau^{m_0} f(\tau, \xi)$,

$$L(t, x; \tau, \xi) \equiv \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a D_x^k Z_0(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi),$$

$$L_0(t, x; \tau, \xi) \equiv (\Delta_{t,x}^{\tau,\xi} D_t^1 a + \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} a \tilde{D}_\tau^1)\,D_x^k Z_0 \times \\ \times (t-\tau, x-\xi; \tau, \xi), \tag{14}$$

причем

$$D_t^1 L(t, x; \tau, \xi) = -D_\tau^1 L(t, x; \tau, \xi) + L_0(t, x; \tau, \xi). \tag{15}$$

Полагая $t_i \equiv (1-2^{-i})\,t$, $i \geqslant 0$, и используя то, что $\int_0^t [\cdot]\,d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\cdot]\,d\tau$, с помощью (13) получаем

$$D_t^1 J_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} D_t^1 L(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi)\,d\xi + \right. \\ + \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} D_t^1 L(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_i}^{t} f_0(t_i, \xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} L_0(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\, f_0(t, \xi)\, d\xi\Bigg\} +$$

$$+\int_{K_1} L(t, x; 0, \xi)\,\zeta(\xi)\, f_0(t, \xi)\, d\xi.$$

Используя равенство (15), проинтегрируем по частям второй интеграл из фигурных скобок и после простых преобразований придем к формуле

$$D_t^1 J_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \Bigg\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} D_t^1 L(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} L_0(t, x; \tau, \xi)\,\zeta(\xi)\, f_0(t_i, \xi)\, d\xi +$$

$$+\int_{K_1} L(t, x; t_{i+1}, \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_{i+1}}^{t_i} f_0(t_{i+1}, \xi)\, d\xi\Bigg\}. \qquad (16)$$

С помощью формул (14), (16), оценок (3) § 5 и того, что $f \in \overset{\circ}{H}{}^{s}_{k(\cdot, a)}(\Pi^T)$, имеем

$$|D_t^1 J_2| \leqslant C_0 \sum_{i=0}^{\infty} \Bigg\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-2} E_c(t-\tau, |x-\xi|) \times$$

$$\times (\tau - t_i)^{1-\frac{1-\alpha}{2b}} (\Psi(\tau, \xi) + \Psi(t_i, \xi))\, d\xi +$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}-1} E_c(t-\tau, |x-\xi|)\,\Psi(t_i, \xi)\, d\xi +$$

$$+\int_{K_1} (t - t_{i+1})^{-\frac{n-1}{2b}-1} (t_{i+1} - t_i)^{1-\frac{1-\alpha}{2b}} E_c(t - t_{i+1}, |x-\xi|) \times$$

$$\times (\Psi(t_{i+1}, \xi) + \Psi(t_i, \xi))\, d\xi\Bigg\}.$$

Поскольку $\tau - t_i \leqslant t - \tau \leqslant t - t_i$ для $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$ и $t - t_{i+1} = t_{i+1} - t_i = 2^{-i-1} t$, то

$$|D_t^1 J_2| \leqslant C_0 \sum_{i=0}^{\infty} \Bigg\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}-1} E_{c-c_0} \times$$

$$\times (t-\tau, |x-\xi|)(E_{c_0}(t-\tau, |x-\xi|)\Psi(\tau, \xi) +$$

$$+ E_{c_0}(t-t_i, |x-\xi|)\Psi(t_i, \xi))\,d\xi +$$

$$+ (2^{-i-1}t)^{\frac{\alpha}{2b}} \int_{K_1} (t-t_{i+1})^{-\frac{n}{2b}} E_{c-c_0}(t-t_{i+1}, |x-\xi|) \times$$

$$\times (E_{c_0}(t-t_{i+1}, |x-\xi|)\Psi(t_{i+1}, \xi) +$$

$$\left. + E_{c_0}(t-t_i, |x-\xi|)\Psi(t_i, \xi))\,d\xi \right\},$$

откуда после использования неравенства (3) § 1 получаем

$$|D_t^1 J_2| \leqslant C_0 \Psi(t, x) \left\{ \int_0^t d\tau \int_{K_1} (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} E_{c-c_0} \times \right.$$

$$\times (t-\tau, |x-\xi|)\,d\xi + \sum_{i=0}^{\infty} (2^{-i-1}t)^{\frac{\alpha}{2b}} \int_{K_1} (t-t_{i+1})^{-\frac{n}{2b}} \times$$

$$\left. \times E_{c-c_0}(t-t_{i+1}, |x-\xi|)\,d\xi \right\} \leqslant C_0 \Psi(t, x)\, t^{\frac{\alpha}{2b}}. \tag{17}$$

Итак, установлена требуемая оценка для $D_t^1 J_2$ и, следовательно, для интеграла (34) § 5. Нужно еще провести оценки приращений старших производных от этого интеграла. Остановимся лишь на оценке приращений $D_t^1 J_2$.

Если $|x^0 - x|^{2b} \geqslant \frac{t}{2}$ и $t^0 - t \geqslant \frac{t}{2}$, то из (17) следует, что

$$\begin{aligned} &|\Delta_{x^0}^x D_t^1 J_2| \leqslant C_0 |x^0 - x|^{\alpha} (\Psi(t, x^0) + \Psi(t, x)), \\ &|\Delta_{t^0}^t D_{t^0}^1 J_2| \leqslant C_0 (t^0 - t)^{\frac{\alpha}{2b}} (\Psi(t^0, x) + \Psi(t, x)). \end{aligned} \tag{18}$$

Докажем справедливость этих неравенств, когда соответственно $|x^0 - x|^{2b} < \frac{t}{2}$ и $t^0 - t < \frac{t}{2}$. Для этого с помощью (16) запишем представления

$$\Delta_{x^0}^x D_t^1 J_2 = I_1^0 + I_2(t, x^0) - I_2(t, x) + I_3^0, \tag{19}$$

$$\Delta_{t^0}^t D_{t^0}^1 J_2 = I_0 + I_1^1 + I_2(t^0, x) - I_2(t, x) + I_3^1, \tag{20}$$

где

$$I_0 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} d\tau \int_{K_1} D_{t^0}^1 L(t^0, x; \tau, \xi)\, \zeta(\xi)\, \Delta_\tau^{t_i^0} f_0(\tau, \xi)\, d\xi + \right.$$

$$+\int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} d\tau \int_{K_1} L_0(t^0, x;\ \tau,\ \xi)\,\zeta(\xi)\, f_0(t_i^0, \xi)\, d\xi +$$

$$\left. + \int_{K_1} L(t^0, x;\ t_{i+1}^0,\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_{i+1}^0}^{t_i^0} f_0(t_{i+1}^0, \xi)\, d\xi \right\},$$

$$I_1^0 \equiv \sum_{i=0}^{r} \int_{t_i}^{t'_{i+1}} d\tau \int_{K_1} \{\Delta_{x^0}^{x} D_t^1 L(t, x^0;\ \tau,\ \xi)\,\Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi) +$$

$$+ \Delta_{x^0}^{x} L_0(t, x^0;\ \tau,\ \xi)\, f_0(t_i, \xi)\}\,\zeta(\xi)\, d\xi,$$

$$I_1^1 \equiv \sum_{i=0}^{r} \int_{t_i}^{t'_{i+1}} d\tau \int_{K_1} \{\Delta_{t^0}^{t} D_{t^0}^1 L(t^0, x;\ \tau,\ \xi)\,\Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi) +$$

$$+ \Delta_{t^0}^{t} L_0(t^0, x;\ \tau,\ \xi)\, f_0(t_i, \xi)\}\,\zeta(\xi)\, d\xi,$$

$$I_2(t, x) \equiv \sum_{i=r}^{\infty} \int_{t''_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} \{D_t^1 L(t, x;\ \tau,\ \xi)\,\Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi) +$$

$$+ L_0(t, x;\ \tau,\ \xi)\, f_0(t_i, \xi)\}\,\zeta(\xi)\, d\xi,$$

$$I_3^0 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \int_{K_1} \Delta_{x^0}^{x} L(t, x^0;\ t_{i+1},\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_{i+1}}^{t_i} f_0(t_{i+1}, \xi)\, d\xi,$$

$$I_3^1 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \int_{K_1} \Delta_{t^0}^{t} L(t^0, x;\ t_{i+1},\ \xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_{i+1}}^{t_i} f_0(t_{i+1}, \xi)\, d\xi.$$

В этих формулах $t_i^0 \equiv t^0 - 2^{-i}(t^0 - t)$; $t_i \equiv (1 - 2^{-i})\,t$, $i \geqslant 0$; число r такое, что $t_r < t - \delta \leqslant t_{r+1}$; $t'_{i+1} \equiv \min\{t_{i+1},\ t - \delta\}$, $t''_i \equiv \max\{t_i,\ t - \delta\}$, где $\delta \equiv |x^0 - x|^{2b}$ для представления (19) и $\delta \equiv t^0 - t$ для представления (20).

Оценим каждое из слагаемых формул (19) и (20). Оценка

$$|I_0| \leqslant C_0 \Psi(t^0, x)\,\delta^{\frac{\alpha}{2b}} \tag{21}$$

устанавливается так же, как оценка (17). Аналогично имеем

$$|I_2(t, x)| \leqslant C_0 \sum_{i=r}^{\infty} \int_{t_i''}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} \{(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-2} (\tau - t_i)^{1-\frac{1-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times (\Psi(\tau, \xi) + \Psi(t_i, \xi))(t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}-1} \Psi(t_i, \xi)\} \times$$

$$\times E_c(t-\tau, |x-\xi|)\, d\xi \leqslant C_0 \Psi(t, x) \int_{t-\delta}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}-1} \times$$

$$\times \int_{K_1} E_{c-c_0}(t-\tau, |x-\xi|)\, d\xi \leqslant C_0 \Psi(t, x)\, \delta^{\frac{\alpha}{2b}}.$$

Оценим выражение I_1^0. В силу (14) и неравенс. § 5 в случае, когда $a \in H^{2b+\alpha}(P_2)$, имеем

$$|\Delta_{x^0}^x D_l^1 L(t, x^0; \tau, \xi)| \leqslant C(\delta^{\frac{1}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-2} + \delta^{\frac{\alpha}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-\ldots}$$

$$\times (E_c(t-\tau, |x^0-\xi|) + E_c(t-\tau, |x-\xi|)),$$

$$|\Delta_{x^0}^x L(t, x^0; \tau, \xi)| \leqslant C\delta^{\frac{1}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-1} \times$$

$$\times (E_c(t-\tau, |x^0-\xi|) + E_c(t-\tau, |x-\xi|)),$$

$$\Delta_{x^0}^x L_0(t, x; \tau, \xi) = \Delta_{x^0}^x D_l^1 a(t, x^0)(-1)^{|k|} D_\xi^k Z_0 \times$$

$$\times (t-\tau, x^0-\xi; t, x^0) + L_1(t, x, x^0; \tau, \xi),$$

$$|L_1(t, x, x^0; \tau, \xi)| \leqslant C(\delta^{\frac{1}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2b}} +$$

$$+ \delta^{\frac{\alpha}{2b}} (t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-1}) (E_c(t-\tau, |x^0-\xi|) +$$

$$+ E_c(t-\tau, |x-\xi|)).$$

Используя (23) — (25), получаем

$$|I_{11}^0| \equiv \left| \sum_{i=0}^{r} \int_{t_i}^{t_{i+1}'} d\tau \int_{K_1} \{\Delta_{x^0}^x D_l^1 L(t, x^0; \tau, \xi)\, \Delta_\tau^{t_i} f_0(\tau, \xi) + \right.$$

$$\left. + L_1(t, x, x^0; \tau, \xi) f_0(t_i, \xi)\} \zeta(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sum_{i=0}^{r} \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int_{K_1} \{(\delta^{\frac{1}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-2} + \delta^{\frac{\alpha}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2b}-1}) \times$$

$$\times (\tau - t_i)^{1-\frac{1-\alpha}{2b}} (\Psi(\tau,\xi)+\Psi(t_i,\xi)) + (\delta^{\frac{1}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2b}} +$$

$$+\delta^{\frac{\alpha}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2b}-1})\,\Psi(t_i,\xi)\}\,(E_c(t-\tau,|x^0-\xi|)+$$

$$+E_c(t-\tau,|x-\xi|))\,d\xi \leqslant C_0(\Psi(t,x^0)+\Psi(t,x))\times$$

$$\times\left\{\delta^{\frac{1}{2b}}\int_0^{t-\delta}(t-\tau)^{-1-\frac{1+\alpha}{2b}}d\tau + \delta^{\frac{\alpha}{2b}}\int_0^{t-\delta}(t-\tau)^{-\frac{1-\alpha}{2b}}d\tau +\right.$$

$$\left.+\int_0^{t-\delta}(t-\tau)^{-1+\frac{1}{2b}}d\tau\right\} \leqslant C_0(\Psi(t,x^0)+\Psi(t,x))\,\delta^{\frac{\alpha}{2b}}.$$

авшийся из I_1^0 интеграл проинтегрируем по частям и чим; в результате получим оценку

$$|I_1^0 - I_{11}^0| \leqslant C_0\Psi(t,x^0)\,\delta^{\frac{\alpha}{2b}}.$$

оследних оценок следует, что

$$|I_1^0| \leqslant C_0(\Psi(t,x^0)+\Psi(t,x))\,\delta^{\frac{\alpha}{2b}}. \qquad (26)$$

Чтобы оценить выражение I_3^0, представим его в виде

$$= \sum_{i=0}^{r-1}\int_{K_1}\Delta_{x^0}^{x} L(t,x^0;t_{i+1},\xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta_{t_{i+1}}^{t_i} f_0(t_{i+1},\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{i=r}^{\infty}\int_{K_1} L(t,x^0;t_{i+1},\xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta^{t_i}_{t_{i+1}}f_0(t_{i+1},\xi)\,d\xi -$$

$$-\sum_{i=r}^{\infty}\int_{K_1} L(t,x;t_{i+1},\xi)\,\zeta(\xi)\,\Delta^{t_i}_{t_{i+1}}f_0(t_{i+1},\xi)\,d\xi.$$

для оценки первого слагаемого используем (24), а двух остальных — оценку L:

$$|I_3^0| \leqslant C_0(\Psi(t,x^0)+\Psi(t,x))\times$$

$$\times\left(\delta^{\frac{1}{2b}}\sum_{i=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)^{-\frac{1-\alpha}{2b}} + \sum_{i=r}^{\infty}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{\alpha}{2b}}\right).$$

Поскольку $t_r < t-\delta \leqslant t_{r+1}$, то $t - t_{r+1} \leqslant \delta \leqslant t - t_r$, а в силу определения t_i $t_{i+1}-t_i = 2^{r-i-1}(t-t_r)$ при

$i \leqslant r-1$ и $t_{i+1}-t_i = 2^{r-i}(t-t_{r+1})$ при $i \geqslant r$, поэтому

$$\sum_{i=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)^{-\frac{1-\alpha}{2b}} \leqslant \delta^{-\frac{1-\alpha}{2b}} \sum_{i=0}^{r-1}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2b}}\right)^i,$$

$$\sum_{i=r}^{\infty}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{\alpha}{2b}} \leqslant \delta^{\frac{\alpha}{2b}} \sum_{i=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{\alpha}{2b}}\right)^i$$

и, следовательно,

$$|I_3^0| \leqslant C_0(\Psi(t, x^0)+\Psi(t, x))\,\delta^{\frac{\alpha}{2b}}. \tag{27}$$

Выражения I_1^1 и I_3^1 оцениваются так же, как I_1^0 и I_3^0. Из (19) — (22), (26),(27) и аналогичных оценок I_1^1 и I_3^1 вытекают неравенства (18).

Рассмотрим интеграл (12). Такого типа интеграл рассматривался при доказательстве леммы 7 § 5. Достаточно показать, как оцениваются функции u_1 и u_2 из (31) и (32) § 5. Эти функции для интеграла (12) имеют вид

$$u_1(t, \bar{x}) = \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} \{D^1_{\bar{x}_i} D^{\text{u}}_{\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \tau, \bar{\xi})\, \Delta^{t,\bar{x}}_{\tau,\bar{\xi}} \bar{f}_0 \bar{\zeta}(\bar{\xi}) -$$

$$-(\Delta^{\tau,\bar{\xi}}_{\beta,\bar{y}} D^1_{\bar{x}_i} D^{\text{u}}_{\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \beta, \bar{y})\,|_{\beta=t,\bar{y}=\bar{x}}\, \bar{\zeta}(\bar{\xi}) -$$

$$- D^{\text{u}}_{\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; t, \bar{y})\,|_{\bar{y}=\bar{x}} D^1_{\bar{\xi}_i} \bar{\zeta}(\bar{\xi}))\, \bar{f}_0(t, \bar{x})\}\, d\bar{\xi},$$

$$u_2(t, \bar{x}) = \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} \{D^1_t D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \tau, \bar{\xi})\, \Delta^t_\tau \bar{f}_0(\tau, \bar{\xi}) -$$

$$- \Delta^{\tau,\bar{\xi}}_{\beta,\bar{y}} D^1_t D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \beta, \bar{y})\,|_{\substack{\beta=t\\ \bar{y}=\bar{\xi}}}\, \bar{f}_0(t, \bar{\xi})\}\, \bar{\zeta}(\bar{\xi})\, d\bar{\xi} +$$

$$+ \int_{K_1^+} D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r(t, \bar{x}, \bar{\xi}; \beta, \bar{\xi})\,|_{\beta=t}\, \bar{\zeta}(\bar{\xi})\, \bar{f}_0(t, \bar{\xi})\, d\bar{\xi},$$

$$\bar{f}_0(\tau, \bar{\xi}) \equiv D^{\bar{\nu}'}_{\tau,\bar{\xi}'} \bar{f}(\tau, \bar{\xi}), \quad (t, \bar{x}) \in P_2^+.$$

Считая $f \in \overset{\circ}{H}{}^s_{0,k(\cdot,a)}$, с помощью неравенств (3) § 1, (9) § 5, (10) и (11) получаем

$$|u_1(t, \bar{x})| \leqslant C\|f\|^s_{0,k(\cdot,a)} \int_0^t d\tau \int_{K_1^+} (E_c(t-\tau, |\bar{x}-\bar{\xi}|)\,\Psi(\tau, \xi) +$$

$$+E_c(t-\tau, |\bar{x}-\bar{\xi}|)\,\Psi(t, x))\,(t-\tau)^{-\frac{n+\alpha}{2b}-1}\,d\bar{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|f\|^{s}_{0,k(\cdot,a)}\,\Psi(t, x)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{K_1^+} E_{c-c_1}(t-\tau, |\bar{x}-\bar{\xi}|)\times$$

$$\times (t-\tau)^{-\frac{n+\alpha}{2b}-1}\,d\bar{\xi} \leqslant C\,\|f\|^{s}_{0,k(\cdot,a)}\,\Psi(t, x)\,t^{\frac{\alpha}{2b}}.$$

Выражение $u_2(t, \bar{x})$ содержит значения производных от $\bar{f}$ в точке $(t, \bar{\xi})$, поэтому при его непосредственной оценке не получим необходимого множителя $\Psi(t, x)$. Здесь имеем такую же ситуацию, как при оценке $D_t^1 J_2$. Поэтому преобразуем $u_2(t, \bar{x})$ к виду

$$u_2(t, \bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int\limits_{K_1^+} D_t^1 D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r \times\right.$$

$$\times (t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \tau, \bar{\xi})\,\bar{\zeta}(\bar{\xi})\,\Delta_\tau^{t_i}\bar{f}_0(\tau, \bar{\xi})\,d\bar{\xi} -$$

$$-\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} d\tau \int\limits_{K_1^+} \Delta^{\tau,\bar{\xi}}_{\beta,\bar{y}} D_t^1 D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r(t-\tau, \bar{x}, \bar{\xi}; \beta, \bar{y})\Big|_{\substack{\beta=t\\ \bar{y}=\bar{\xi}}}\times$$

$$\times\,\bar{\zeta}(\bar{\xi})\,\bar{f}_0(t_i, \bar{\xi})\,d\bar{\xi} + \int\limits_{K_1^+} D^{\bar{\mu}}_{t,\bar{x}} G_0^r(t-t_{i+1}, \bar{x}, \bar{\xi}; \beta, \bar{\xi})\big|_{\beta=t}\times$$

$$\left.\times\,\bar{\zeta}(\bar{\xi})\,\Delta^{t_i}_{t_{i+1}}\bar{f}_0(t_{i+1}, \bar{\xi})\,d\bar{\xi}\right\},$$

где числа t_i, $i \geqslant 0$,— те же, что и в формуле (16). Члены этого выражения оцениваются так же, как члены (16), только здесь дополнительно используется неравенство (10). ▶

3. Сопряженные операторы Грина. Исследуем операторы, сопряженные к операторам, из которых состоит оператор Грина задачи (23) — (25) § 1. Сначала рассмотрим операторы

$$(\mathcal{G}_j^1)^*: g \mapsto \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} (\bar{G}_j^1)'(t, x; \tau, \xi)\,g(t, x)\,dx,$$

$$(\tau, \xi) \in Q_{(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{28}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение.

Из формул (8) § 9 для G_j^1, $0 \leqslant j \leqslant N$, и определения операторов $(g_j^{(\nu)})^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\nu \geqslant 0$, вытекает, что

$$(\mathcal{G}_j^1)^* = \sum_{\nu=0}^{p} (g_j^{(\nu)})^* + (\mathcal{R}_j^{(p)})^*, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{29}$$

где

$$(\mathcal{R}_j^{(p)})^* : g \mapsto \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} (\overline{R}_j^{(p)})'(t, x; \tau, \xi)\, g(t, x)\, dx,$$

$$(\tau, \xi) \in Q_{(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{30}$$

Пусть $s > 0$ — нецелое, а r — целое число, меньшее s. Через $\mathring{H}_0^{s,r}$, $\mathring{H}_{0,c}^{s,r}$ и $\mathring{H}_{0,\infty}^{s,r}$ обозначим пространства, которые при $r < 0$ совпадают с соответствующими пространствами без индекса r, а при $0 \leqslant r < s$ являются их подпространствами, элементы которых вместе со своими производными до порядка r равны нулю на Q_1.

Используя формулы (28), (29), лемму 17 § 10, замечание 1 из п. 3 § 10, свойства ядер $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, и равенства (10) § 9, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 § 9. *Тогда операторы* $(\mathcal{G}_j^1)^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, *ограниченно действуют из* $\mathring{H}_0^{s-2b}$ $(\mathring{H}_{0,\infty}^{s-2b})$ *в* $\mathring{H}_0^{s,2b-n_0-2}$ $(\mathring{H}_{0,\infty}^{s,2b-n_0-2})$ *при* $j = 0$ *и в* $\mathring{H}_1^{r_j-2b+1+s}$ $(\mathring{H}_{1,\infty}^{r_j-2b+1+s})$ *при* $j \geqslant 1$, $\max\{2b, l_1^*\} < s \leqslant l - l_0 - l_0^*$.

С помощью свойств ядер G_j^1, $0 \leqslant j \leqslant N$, легко проверить, что операторы (28) являются сопряженными к операторам (4).

Пусть $\Gamma(t, x, D_x)$ — дифференциальное выражение порядка $\gamma \leqslant 2b - 1$, коэффициенты которого определены на Q_1, а их значения лежат в $\mathbb{C}_{lm}$. Построим и исследуем операторы $(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, сопряженные к операторам

$$\Gamma\mathcal{G}_j^1 : f \mapsto \Gamma(t, x, D_x)(\mathcal{G}_j^1 f)|_{Q_1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

В силу равенств (18) § 10 и (8) имеем

$$(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^* = (\Gamma g_j)^* + \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i=0}^{N} (\mathcal{H}_{ij}^{(\nu)})^* (\Gamma g_i)^* + (\Gamma\mathcal{R}_j^{(p)})^*,$$

$$0 \leqslant j \leqslant N. \tag{31}$$

Здесь

$$(\Gamma\mathcal{R}_j^{(p)})^* ; g \mapsto \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_1} (\overline{\Gamma}(t, x, D_x)\, \overline{R}_j^{(p)}(t, x; \tau, \xi))' \times$$

$$\times g(t, x)\, dx, \quad (\tau, \xi) \in Q_{(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{32}$$

а операторы $(\Gamma\mathcal{G}_j)^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, строятся и исследуются так же, как и операторы $\overset{*}{\mathcal{H}}_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $i \neq j$, в п. 3 § 10. Если это исследование провести, затем с его помощью для второго слагаемого из (31) повторить рассуждения из доказательства леммы 17 § 10, а для операторов (32) использовать свойства ядер $R_j^{(p)}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, то получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 5 § 9 и коэффициенты выражения* $\Gamma(t, x, D_x)$ *принадлежат пространству* $H_1^{2b-\gamma+l}$. *Тогда операторы* $(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^*$, $0 \leqslant j \leqslant N$, *ограниченно действуют из* $\mathring{H}_1^{\gamma-2b+1+s} \times (\mathring{H}_{1,\infty}^{\gamma-2b+1+s})$ *в* $\mathring{H}_0^{s,2b-n_0-2}\,(\mathring{H}_{0,\infty}^{s,2b-n_0-2})$ *при* $j = 0$ *и в* $\mathring{H}_1^{r_j-2b+1+s}\,(\mathring{H}_{1,\infty}^{r_j-2b+1+s})$ *при* $j \geqslant 1$, $2b < s \leqslant l - l_0 - l_0^*$.

Отметим, что при $\gamma < r_j$ имеем

$$(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^* : g \mapsto \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_j} (\overline{\Gamma}(t, x, D_x)\, \overline{G}_j^1(t, x; \tau, \xi))'\, g(t, x)\, dx,$$

$$(\tau, \xi) \in Q_{(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь операторы

$$\overset{*}{\mathcal{R}}_k : g \mapsto \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \overline{R}_k'(t, x; \tau, \xi)\, g(t, x)\, dx, \quad (\tau, \xi) \in Q_1,$$

$$\overset{*}{\mathcal{W}}_{\bar{k}} : g \mapsto \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \overline{W}_{\bar{k}}'(t, x; 0, \xi)\, g(t, x)\, dx, \quad \xi \in \Omega_1, \tag{34}$$

$$\overset{*}{\mathcal{V}}_k : g \mapsto \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \overline{V}_k'(t, x; 0, \xi)\, g(t, x)\, dx, \quad \xi \in \Omega_1,$$

сопряженные к операторам (5) — (7). Вместе с ними будем рассматривать также операторы

$$(\Gamma\mathcal{R}_k)^* : g \mapsto \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_1} (\overline{\Gamma}(t, x, D_x)\, \overline{R}_k(t, x; \tau, \xi))'\, g(t, x)\, dx,$$

$$(\tau, \xi) \in Q_1,$$

$$(\Gamma\mathcal{W}_{\bar k})^*: g \mapsto \int_0^T dt \int_{\Omega_1} (\bar\Gamma(t, x, D_x)\, \overline{W}_{\bar k}(t, x; 0, \xi))' \times$$
$$\times\, g(t, x)\, dx, \quad \xi \in \Omega_1, \tag{35}$$
$$(\Gamma\mathcal{V}_k)^*: g \mapsto \int_0^T dt \int_{\Omega_1} (\bar\Gamma(t, x, D_x)\, \overline{V}_k(t, x; 0, \xi))' \times$$
$$\times\, g(t, x)\, dx, \quad \xi \in \Omega_1.$$

Использовав выражения (24) и (34) § 11, получим следующие формулы для операторов (34):

$$\mathcal{R}_k^* g = \sum_{k''} \Pi_{\xi'}^{\xi} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \theta(n_j - 2b - |k|)(\overline{C}_{j|k|}^{(k'')})^* (\tau, \bar\xi', D_\tau, D_{\bar\xi'}) \times \right.$$
$$\left. \times\, (\Pi_{\xi}^{\bar\xi'}((\mathcal{G}_j^1)^* g)\, \bar\zeta^{(k'')}) \right\} d_{|k|,k}^{(k'')},$$

$$\mathcal{W}_{\bar k}^* g = \sum_{k''} \Pi_{\xi'}^{\xi} \left\{ \theta(m_0 - 2)\, \theta(m_0 - 2 - k_0) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\eta=k_0}^{m_0-2} \sum_{\zeta=\max\{0, |k|-2b(\eta-k_0)\}}^{r_1-2b(\eta+2)} \bar\omega_{\eta\zeta k_0 |k|}^* (\bar\xi', D_{\bar\xi'})\, (\mathcal{M}_{\eta+1,\zeta}^{(k'')})^* g \right\} d_{|k|,k}^{(k'')},$$

$$\mathcal{V}_k^* g = \sum_{k''} \Pi_{\xi'}^{\xi} \left\{ (\mathcal{M}_{0,|k|}^{(k'')})^* g + \theta(m_0 - 2) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\eta=0}^{m_0-2} \sum_{\zeta=\max\{0, |k|-2b(\eta+1)\}}^{r_1-2b(\eta+2)} \bar\lambda_{\eta\zeta |k|}^* (\bar\xi', D_{\bar\xi'})\, (\mathcal{M}_{\eta+1,\zeta}^{(k'')})^* g \right\} d_{|k|,k}^{(k'')},$$

где

$$(\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(k'')})^* g = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\eta=0}^{m_j-\mu-1} \theta(m_j - \mu - 1)\, \theta(\bar n_j - \nu) \times$$
$$\times\, (-D_\tau)^{m_j-\mu-\eta-1}\, \bar\beta_{j\eta\nu}^* (\tau, \bar\xi', D_{\bar\xi'})\, (\Pi_{\xi}^{\bar\xi'}((\mathcal{G}_j^1)^* g)\, \bar\zeta^{(k'')})|_{\tau=0}.$$

Для операторов (35) справедливы такие же формулы лишь с той разницей, что в них вместо $(\mathcal{G}_j^1)^*$ стоит $(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^*$.

Из этих формул и теорем 3 и 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *При выполнении условий теоремы 4 операторы* (34) *ограниченно действуют из* $\overset{\circ}{H}{}_{0,\infty}^{s-2b}$ *соответственно в* $\overset{\circ}{H}{}_{1,\infty}^{|k|+1+s}$, $C_{1,\infty}^{2b+|\bar k|+1+s}$ и $C_{1,\infty}^{|k|+1+s}$, *а операторы*

(35) — *из* $\overset{\circ}{H}{}^{\gamma-2b+1+s}_{1,\infty}$ *соответственно в* $\overset{\circ}{H}{}^{|k|+1+s}_{1,\infty}$, $C^{2b+|k|+1+s}_{1,\infty}$ *и* $C^{|k|+1+s}_{1,\infty}$, $2b < s \leqslant l - l_0 - l_0^*$.

Используя теоремы 1, 3—5 и определение операторов (1) — (7), (28) — (35), легко проверить справедливость для любых $f = (f_0, \ldots, f_{N+1})' \in \mathcal{H}^s$, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$, и $g \in \overset{\circ}{H}{}^r_{0,\infty}$, $\max\{0, \quad l_1^* - 2b\} < r \leqslant l - l_0 - l_0^* - 2b$, равенства

$$(\mathcal{G}f, g)_0 = \sum_{j=0}^{N} (f_j, (\mathcal{G}_j^1)^* g)_{(j)} + \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} (D_\xi^k f_0|_{Q_1}, \overset{*}{\mathcal{R}}_k g)_1 +$$

$$+ \sum_{|\bar{k}| \leqslant r_1 - 2b} [D^{\bar{k}}_{\tau,\xi} f_0|_{\substack{\tau=0,\\ \xi\in\Omega_1}}, \overset{*}{\mathcal{W}}_{\bar{k}} g]_1 + [f_{N+1}, (\mathcal{G}_l^1)^* g|_{\tau=0}]_0 +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} [D_\xi^k f_{N+1}|_{\Omega_1}, \overset{*}{\mathcal{R}}_k g|_{\tau=0}]_1 +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant r_1 - 2b} [D_\xi^k f_{N+1}|_{\Omega_1}, \overset{*}{\mathcal{V}}_k g]_1, \qquad (36)$$

а для тех же f и любых $g \in \overset{\circ}{H}{}^{\gamma+1+r}_{1,\infty}$, $0 < r \leqslant l - l_0 - l_0^* - 2b$, — равенства отличающегося от равенства (36) тем, что в нем $(\mathcal{G}f, g)_0$, $(\mathcal{G}_j^1)^*$, $\overset{*}{\mathcal{R}}_k$, $\overset{*}{\mathcal{W}}_{\bar{k}}$ и $\overset{*}{\mathcal{V}}_k$ заменены соответственно на $(\Gamma\mathcal{G}f, g)_1$, $(\Gamma\mathcal{G}_j^1)^*$, $(\Gamma\mathcal{R}_k)^*$, $(\Gamma\mathcal{W}_{\bar{k}})^*$ и $(\Gamma\mathcal{V}_k)^*$. В этих равенствах $(u, v)_\nu$, $\nu = 0, 1$, определены в (3) § 9, а

$$[u, v]_\nu \equiv \int_{\Omega_\nu} u'(x)\,\bar{v}(x)\,dx, \quad \nu = 0,1. \qquad (37)$$

Ввиду формулы (36) операторы (28) и (34) естественно назвать *сопряженными операторами Грина* рассматриваемой задачи.

Замечание. В теоремах 3—5 утверждается, что сопряженные операторы Грина для случая неограниченной области Ω_0 действуют в пространствах с индексом ∞. При этом из приведенных в п. 3 § 10 доказательств следует, что все рассмотренные в теоремах 3—5 операторы действуют из пространств с индексом c в пространства с индексом c', где $0 < c' < c$. Если же при доказательстве лемм 8—11 § 10 для случая неограниченной области Ω_0 проводить оценки более точно, то можно убедиться, что сопряженные операторы Грина фактически действуют в пространствах с одним и тем же индексом c, если $0 < c < c_1$, где c_1 — постоянная, о которой шла речь в п. 2

4. Нормальные граничные задачи и некоторые свойства их матриц Грина. Рассмотрим один частный случай задачи (23) — (25) § 1. Для этого по аналогии с эллипти ческим случаем (см. [82]) введем понятие нормальной матрицы граничных выражений

$$B(t, x, D_x) = \begin{pmatrix} B_1(t, x, D_x) \\ \cdots\cdots \\ B_N(t, x, D_x) \end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Матрицей Дирихле будем называть матрицу с $2N$ строками, которую перестановкой строк можно привести к виду

$$D(t, x, D_x) = \begin{pmatrix} D_1(t, x, D_x) \\ \cdots\cdots \\ D_{2b}(t, x, D_x) \end{pmatrix}, \quad D_j(t, x, D_x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{|k| \leqslant j-1} d_{jk}(t, x) D_x^k, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2b.$$

Здесь d_{jk} — квадратная матрица порядка m, причем $\det D_{j0}(t, x, \nu) \neq 0$ для любых $(t, x) \in Q_1$, где $D_{j0}(t, x, \sigma) \equiv \sum_{|k|=j-1} d_{jk}(t, x)\sigma^k$, а ν — орт внутренней нормали к Ω_1 в точке x.

Если матрицу (38) можно дополнить новыми строками до матрицы Дирихле, то эту матрицу, а также задачу

$$A(t, x, D_t, D_x)\, u = f_0, \quad B_j(t, x, D_x)\, u\,|_{Q_1} = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

$$u\,|_{t=0} = f_{N+1}, \qquad (39)$$

назовем *нормальной*.

Предположение о нормальности матрицы B и существовании для A сопряженного в смысле Лагранжа выражения A^* позволяет поставить сопряженную задачу

$$A^*(\tau, \xi, D_\tau, D_\xi)\, v = g_0, \quad B_j^*(\tau, \xi, D_\xi)\, v\,|_{Q_1} = g_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

$$v\,|_{\tau=T} = g_{N+1} \qquad (40)$$

и записать для любых $u \in H_0^{2b}$ и $v \in H_{0,\infty}^{2b}$ формулу Грина

$$(Au, v)_0^{t_0, t_1} + \sum_{j=1}^{N} (B_j u, C_j^* v)_1^{t_0, t_1} + [u, v]_0^{t_0} =$$

$$= (u, A^* v)_0^{t_0, t_1} + \sum_{j=1}^{N} (C_j u, B_j^* v)_1^{t_0, t_1} + [u, v]_0^{t_1}, \qquad (41)$$

где B_j, C_j, B_j^* и C_j^* — определенные на Q_1 дифференциальные выражения соответственно порядков r_j, m_j, r_j^*

и $\overset{*}{m}_j$, причем $r_j + \overset{*}{m}_j = m_j + \overset{*}{r}_j = 2b - 1$, а

$$(u, v)_{\nu}^{t_0, t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} d\beta \int_{\Omega_\nu} u'(\beta, y)\,\bar{v}(\beta, y)\,dy,$$

$$[u, v]_0^{t_\nu} \equiv \int_{\Omega_0} u'(t_\nu, y)\,\bar{v}(t_\nu, y)\,dy,\ \nu = 0, 1,\ 0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T.$$

Поскольку для нормальной граничной задачи (39) $n_0 < 2b$ и $m_0 = 0$, то все элементы ее матрицы Грина $(G_0, \ldots, G_{N+1})$ являются обычными функциями, причем $G_0 = G_0^1$, где G_0^1 — однородная матрица Грина задачи (39).

Теорема 6. *Если задача* (39) *нормальная и для нее выполнены условия* А *и* $Б_l$, $l > \max\{2l_1 + 1, 2b\}$, *то сопряженная задача* (40) *также нормальная и обратно параболическая (параболическая по отношению к переменной —* τ).

◀ Нормальность задачи (40) устанавливается так же, как в [82] для эллиптического случая. Очевидно, что выражение A^* является обратно параболическим, то есть превращается в параболическое при введении новой независимой переменной вместо $-\tau$. Остается доказать, что для задачи (40) выполняется условие дополнительности. В силу теоремы 1 § 2 для этого достаточно убедиться в том, что для любого решения $v \in H_0^{2b+s}$ задачи (40) справедлива оценка

$$\|v\|_0^{2b+s} \leqslant C\left(\|g_0\|_0^s + \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_1^{2b - \overset{*}{r}_j + s} + |g_{N+1}|_0^{2b+s}\right). \quad (42)$$

Установим эту оценку для любого нецелого числа $s \in (0, l - 2b]$ и тем самым закончим доказательство теоремы.

Пусть $v \in H_0^{2b+s}$ — решение задачи (40). Рассмотрим функцию $v_0 \in H_0^{2b+s}$ такую, что

$$\|v_0\|_0^{2b+s} \leqslant C\left(\|g_0\|_0^s + |g_{N+1}|_0^{2b+s}\right) \quad (43)$$

и функция $w \equiv v - v_0$ является решением задачи

$$A^*(\tau, \xi, D_\tau, D_\xi)\,w = h_0, \quad B_j^*(\tau, \xi, D_\xi)\,w|_{Q_1} = h_j,$$
$$1 \leqslant j \leqslant N, \quad w|_{\tau=T} = 0, \quad (44)$$

где $h_0 \in \overset{\circ}{H}{}^s_0$, $h_j \in \overset{\circ}{H}{}_1^{2b-r_j^*+s}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, и

$$\|h_0\|_0^s \leqslant C\left(\|g_0\|_0^s + |g_{N+1}|_0^{2b+s}\right),$$

$$\|h_j\|_1^{2b-r_j^*+s} \leqslant C\left(\|g_0\|_0^s + \|g_j\|_1^{2b-r_j^*+s} + |g_{N+1}|_0^{2b+s}\right), \quad (45)$$
$$1 \leqslant j \leqslant N.$$

Функцию v_0 можно построить так же, как аналогичные функции строились в [85] при сведении общей граничной задачи к задаче с нулевыми начальными данными.

Если в формуле (41) положить $t_0 = \tau$, $t_1 = T$, $u(\beta, y) = G_0^1(\beta, y; \tau - \varepsilon, \xi)$, $\varepsilon > 0$, и $v(\beta, y) = w(\beta, y)$, использовать (28), (33), (44) и свойства G_0^1, приведенные в теоремах 1 § 8 и 3 § 9, и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, то получим формулу

$$w = (\mathscr{G}_0^1)^* h_0 + \sum_{j=1}^{N} (C_j \mathscr{G}_0^1)^* h_j.$$

Отсюда с помощью теорем 3 и 4 следует оценка

$$\|w\|_0^{2b+s} \leqslant C\left(\|h_0\|_0^s + \sum_{j=1}^{N} \|h_j\|_1^{2b-r_j^*+s}\right). \quad (46)$$

На основании неравенств (43), (45), (46) и того, что $v = w + v_0$, получаем оценку (42). ▶

Приведем некоторые свойства матрицы Грина нормальной граничной задачи. Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 6 и выражения A^*, B_j^*, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяют условию Б$_l$, $l > 0$. В силу теоремы 1 § 8 у задачи (40) существует однородная матрица Грина $G_0^*(\tau, \xi; t, x)$, $\{(\tau, \xi), (t, x)\} \subset \overline{Q}_0$, $(\tau, \xi) \neq (t, x)$, обладающая описанными в этой теореме свойствами.

1°. Однородная матрица Грина G_0^1 обладает свойством нормальности: для любых $\{(\tau, \xi), (t, x)\} \subset \overline{Q}_0$, $(\tau, \xi) \neq (t, x)$,

$$G_0^*(\tau, \xi; t, x) = (\overline{G}_0^1)'(t, x; \tau, \xi). \quad (47)$$

◀ Чтобы это доказать, нужно в формуле (41) положить $t_0 = \tau$, $t_1 = t$, $u(\beta, y) = G_0^1(\beta, y; \tau - \varepsilon, \xi)$, $v(\beta, y) = G_0^*(\beta, y; t + \varepsilon, x)$, $\varepsilon > 0$, и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. ▶

2°. Для любых функций $u \in H_0^{2b}$ и точек $(t, x) \in Q_0^{t_0, T}$

справедливо представление

$$u(t, x)=\int_{t_0}^{t} d\beta \int_{\Omega_0} G_0^1(t, x;\ \beta, y)\, A(\beta, y, D_\beta, D_y)\, u(\beta, y)\, dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} d\beta \int_{\Omega_1} (\overline{C}_j^*(\beta, y, D_y)\,(\overline{G}_0^1)'(t, x;\ \beta, y))'\, B_j(\beta, y, D_y)\times$$

$$\times u(\beta, y)\, dy+\int_{\Omega_0} G_0(t, x;\ t_0, y)\, u(t_0, y)\, dy. \qquad (48)$$

◀Представление (48) получим, если в формуле (41) положим $t_1=t$, $v(\beta, y)=G_0^*(\beta, y;\ t+\varepsilon, x)$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, а затем воспользуемся равенством (47).▶

3°. Справедлива формула свертки

$$G_0^1(t, x;\ \tau, \xi)=\int_{\Omega_0} G_0^1(t, x;\ \beta, y)\, G_0^1(\beta, y;\ \tau, \xi)\, dy,$$

$$0 \leqslant \tau<\beta<t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0.$$

◀Эта формула следует из представления (48), если в нем положить $t=\beta$, $u(t, x)=G_0^1(t, x;\ \tau, \xi)$.▶

Замечание. Из формулы (48) вытекает, что матрица Грина нормальной параболической граничной задачи полностью определяется ее однородной матрицей Грина.

§ 13. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЦ ГРИНА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ

1. Матрица Грина общей эллиптической граничной задачи, порожденной параболической. С помощью установленных в теореме 6 § 9 оценок элементов матрицы Грина параболической граничной задачи в цилиндре Q_0^∞ построим и исследуем матрицу Грина соответствующей эллиптической задачи, содержащей комплексный параметр λ с достаточно большой вещественной частью.

Рассмотрим стационарную параболическую граничную задачу

$$(A^0(x, D_x)+(D_t^1+\lambda) I_m)\, u(t, x)=f_0(t, x), \quad (t, x) \in Q_0^\infty,$$

$$B_j^0(x, D_x)\, u(t, x)\big|_{Q_1^\infty}=f_j(t, x), \quad (t, x) \in Q_1^\infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

$$u(t, x)\big|_{t=0}=f_{N+1}(x), \quad x \in \Omega_0, \qquad (1)$$

где

$$A^0(x, D_x) \equiv \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(x) D_x^k, \quad B_j^0(x, D_x) \equiv \sum_{|k| \leqslant r_j} b_{jk}(x) D_x^k,$$

а λ — заданное комплексное число, выбор которого будет указан ниже.

Задаче (1) соответствует следующая эллиптическая задача:

$$\begin{aligned} &(A^0(x, D_x) + \lambda I_m) v(x) = f_0(x), \quad x \in \Omega_0, \\ &B_j(x, D_x) v(x)|_{\Omega_1} = f_j(x), \quad x \in \Omega_1, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что для этой задачи условие дополнительности выполняется в усиленном смысле.

Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие $\mathbf{B}_l$. $\{a_k \,|\, |k| \leqslant 2b\} \subset C_0^l$, $\{b_{jk} \,|\, |k| \leqslant r_j\} \subset C_1^{2b-r_j+l}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $\Omega_1 \in C^{2b+l}$, *l — достаточно большое нецелое число.*

Получим представление в интегральной форме решений задачи (2). Для этого сначала рассмотрим решение $u \in H_0^{2b+s}$, $l_0 < s \leqslant l$, задачи (1) с $\lambda = 0$. На основании теоремы 5 § 9 для него справедливо представление (19) § 9, которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t-\tau, x, \xi) f_j(\tau, \xi)\, d\xi + \\ + \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} R_k(t-\tau, x, \xi) D_\xi^k f_0(\tau, \xi)\, d\xi + \\ + \int_{\Omega_0} G_0^1(t, x, \xi) f_{N+1}(\xi)\, d\xi + \\ + \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_{\Omega_1} R_k(t, x, \xi) D_\xi^k f_{N+1}(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in Q_0. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу теоремы 6 § 9

$$\begin{aligned} &G_j^1 \in S_{r, s_j}^{r_j + (j), \gamma}(Q_0^\infty, Q_{(j)}^\infty), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ &R_k \in S_{r, s_0 + |k| + 1}^{2b + |k| + 1}(Q_0^\infty, Q_1^\infty), \quad |k| \leqslant n_0 - 2b, \end{aligned} \tag{4}$$

откуда с учетом замечания 2 из п. 4 § 1 вытекают оценки

$$|D_{t,x}^{\bar{k}} D_\xi^m G_j^1(t-\tau, x, \xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\eta} \exp\{\gamma(t-\tau)\} \times$$

$$\times E_c(t-\tau, |x-\xi|), \quad |\bar{k}| \leqslant [r], \quad |m| \leqslant [s_j],$$

$$|\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} D_{t,x^{(1)}}^{\bar{k}} D_\xi^m G_j^1(t-\tau, x^{(1)}, \xi)| \leqslant C|x^{(1)}-x^{(2)}|^\alpha \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\eta-\frac{\alpha}{2b}} \exp\{\gamma(t-\tau)\} E_c(t-\tau, |x^*-\xi|),$$

$$|\bar{k}| = [r], \quad |m| \leqslant [s_j], \tag{5}$$

$$|\Delta_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} D_{t,x}^{\bar{k}} D_{\xi^{(1)}}^m G_j^1(t-\tau, x, \xi^{(1)})| \leqslant C|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^\alpha \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\eta-\frac{\alpha}{2b}} \exp\{\gamma(t-\tau)\} E_c(t-\tau, |x-\xi^*|),$$

$$|\bar{k}| \leqslant [r], \quad |m| = [s_j],$$

$$|\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \Delta_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} D_{t,x^{(1)}}^{\bar{k}} D_{\xi^{(1)}}^m G_j^1(t-\tau, x^{(1)}, \xi^{(1)})| \leqslant C|x^{(1)}-x^{(2)}|^\alpha \times$$

$$\times |\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^\alpha (t-\tau)^{-\eta-\frac{2\alpha}{2b}} \exp\{\gamma(t-\tau)\} \times$$

$$\times E_c(t-\tau, |x^{**}-\xi^{**}|), \quad |\bar{k}| = [r], \ |m| = [s_j],$$

где $\eta \equiv \frac{1}{2b}(n + r_j - 2b + (j) + |\bar{k}| + |m|)$, $\alpha \equiv l - [l]$, $C > 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$, и аналогичные оценки для R_k.

Пусть v — решение задачи (2), принадлежащее пространству C_0^{2b+s}, $l_0 < s \leqslant l$. Легко заметить, что функция $u(t, x) \equiv \exp\{\lambda t\} v(x)$, $(t, x) \in Q_0^\infty$, является решением задачи (1) с $\lambda = 0$, $f_j(t, x) \equiv \exp\{\lambda t\} f_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, и $f_{N+1}(x) = v(x)$. Поэтому для u справедлива формула (3), с помощью которой получаем выражение

$$v(x) = \sum_{j=0}^N \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t-\tau, x, \xi; \lambda) f_j(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} R_k(t-\tau, x, \xi; \lambda) D_\xi^k f_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{\Omega_0} G_0^1(t, x, \xi; \lambda) \ (\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_{\Omega_1} R_k(t, x, \xi; \lambda) D_\xi^k v(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega_0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} G_j^1(t, x, \xi; \lambda) &\equiv \exp\{-\lambda t\} G_j^1(t, x, \xi), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \\ R_k(t, x, \xi; \lambda) &\equiv \exp\{-\lambda t\} R_k(t, x, \xi), \quad |k| \leqslant n_0 - 2b. \end{aligned} \tag{7}$$

Выражение (6) справедливо при любом $t > 0$. Поэтому естественно перейти в нем к пределу при $t \to \infty$. Далее докажем, что если λ считать выбранным так, чтобы

$$\delta_\lambda \equiv (\operatorname{Re}\lambda - \gamma)^{\frac{1}{2b}} > 0 \qquad (8)$$

(при таком λ функции (7) экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$), то этот предельный переход возможен и приводит к формуле

$$v(x) = \sum_{j=0}^{N} \int_{\Omega_{(j)}} \Phi_j^1(x, \xi; \lambda) f_j(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant n_0 - 2b} \int_{\Omega_1} \Psi_k(x, \xi; \lambda) D_\xi^k f_0(\xi)\, d\xi, \quad x \in \Omega_0, \qquad (9)$$

в которой

$$\Phi_j^1(x, \xi; \lambda) \equiv \int_0^\infty G_j^1(t, x, \xi; \lambda)\, dt, \quad 0 \leqslant j \leqslant N,$$

$$\Psi_k(x, \xi; \lambda) \equiv \int_0^\infty R_k(t, x, \xi; \lambda)\, dt, \quad |k| \leqslant n_0 - 2b. \qquad (10)$$

Формулу (9) можно записать в виде

$$v(x) = \sum_{j=0}^{N} \int_{\Omega_{(j)}} \Phi_j(x, \xi; \lambda) f_j(\xi)\, d\xi, \quad x \in \Omega_0,$$

где

$$\Phi_j(x, \xi; \lambda) \equiv \Phi_j^1(x, \xi; \lambda) + \delta_{j,0}\Phi_0^2(x, \xi; \lambda), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \qquad (11)$$

$$\Phi_0^2(x, \xi; \lambda) \equiv \sum_{k''} \Pi_\xi^{\bar\xi} \left(2 \sum_{\mu=0}^{n_0-2b} \overline{\Psi}_\mu^{(k'')}(x, \bar\xi'; \lambda)\, \delta_0^{(\mu)}(\bar\xi_n)\right). \qquad (12)$$

Здесь использованы обозначения из п. 4 § 11.

Итак, матрица $(\Phi_0, \ldots, \Phi_N)$ есть матрица Грина задачи (2).

Чтобы описать свойства элементов матрицы Грина, введем класс $\Pi_{r,s}^q(\Omega_0, \Omega_\nu; \delta)$, $\nu = 0, 1$, функций $K(x, \xi)$, $x \in \overline{\Omega}_0$, $\xi \in \overline{\Omega}_\nu$, $x \neq \xi$, которые непрерывны и имеют производные вида $D_x^k D_\xi^m K$, $|k| \leqslant [r]$, $|m| \leqslant [s]$, удовлетворяющие неравенствам

$$|D_x^k D_\xi^m K| \leqslant C\omega_r^{\hat{}}(\delta |x - \xi|;\ n - q + |k| + |m|),$$

$$|k| \leqslant [r], \quad |m| \leqslant [s], \tag{13}$$

$$|\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} D_{x^{(1)}}^k D_\xi^m K| \leqslant C\omega_c^\delta(\delta \min_{i=1,2} |x^{(i)} - \xi|;\ n - q + r + $$
$$+ |m|)|x^{(1)} - x^{(2)}|^{r-[r]}, \quad |k| = [r],\ |m| \leqslant [s], \tag{14}$$

$$|\Delta_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} D_x^k D_{\xi^{(1)}}^m K| \leqslant C\omega_c^\delta(\delta \min_{i=1,2} |x - \xi^{(i)}|;\ n - q + $$
$$+ |k| + s)|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{s-[s]}, \quad |k| \leqslant [r], \quad |m| = [s], \tag{15}$$

$$|\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \Delta_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}} D_{x^{(1)}}^k D_{\xi^{(1)}}^m K| \leqslant C\omega_c^\delta(\delta \min_{i,j=1,2} |x^{(i)} - \xi^{(j)}|;$$
$$n - q + r + s)|x^{(1)} - x^{(2)}|^{r-[r]}|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{s-[s]},$$
$$|k| = [r],\ |m| = [s], \tag{16}$$

где

$$\omega_c^\delta(\rho;\ p) \equiv \delta^p \exp\{-c\rho\} \times \begin{cases} 1, & p < 0, \\ 1 + |\ln \rho|, & p = 0, \\ \rho^{-p}, & p > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если $[s] = 0$ и имеют место только неравенства (13) и (14), то соответствующий класс функций обозначим через $\Pi_{r,0}^q(\Omega_0,\ \Omega_\nu;\ \delta)$.

Класс $\overline{\Pi}_{r,s}(\Omega_0,\ \Omega_\nu;\ \delta)$ определяется так же, как $\Pi_{r,s}^q(\Omega_0,\ \Omega_\nu;\ \delta)$, только в неравенствах (13) — (16) вместо $n - q + |k| + |m|$, $n - q + r + |m|$, $n - q + |k| + s$ и $n - q + r + s$ стоит $-2b$.

В следующем пункте нам понадобится еще класс $\tilde{\Pi}_r^{q,\theta}(\Omega_0,\ \Omega_0;\ \delta)$, состоящий из функций $K(x,\ \xi)$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0$, $x \neq \xi \in \Omega_1$, которые непрерывны и имеют производные $D_x^k K$, $|k| \leqslant [r]$, удовлетворяющие неравенствам

$$|D_x^k K| \leqslant C d^\theta(\xi,\ \Omega_1) \times$$
$$\times\ \omega_c^\delta(\delta(|x - \xi| + d(\xi,\ \Omega_1));\ n - q + |k| + \theta),\ |k| \leqslant [r], \tag{18}$$

$$|\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} D_{x^{(1)}}^k K| \leqslant C|x^{(1)} - x^{(2)}|^{r-[r]} d^\theta(\xi,\ \Omega_1) \times$$
$$\times\ \omega^\delta(\delta(\min_{i=1,2} |x^{(i)} - \xi| + d(\xi,\ \Omega_1));\ n - q + r + \theta),$$
$$|k| = [r]. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия* A *и* B_l, $l \geqslant 2l_0 + l_0^* + l_1 + l_1^* + 2$. *Тогда у задачи* (2) *с* λ, *удовлетворяющим условию* (8), *существует единственная матрица Грина* $(\Phi_0, \ldots, \Phi_N)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *для* Φ_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, *имеет место формула* (11), *в которой* Φ_j^1 *и* Φ_0^2 *определяются формулами* (10) *и* (12), *при этом* $\Phi_0^2 = 0$, *если* $n_0 < 2b$;

2) $\Phi_j^1 \in \Pi_{r,s_j}^{r_j+(j)}(\Omega_0, \Omega_{(j)};\ \delta_\lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, $\Pi_{\xi=\xi'} \overline{\Psi}_\mu^{(k'')} \in \Pi_{r,s_0+\mu+1}^{2b+\mu+1}(\Omega_0, \Omega_1^{(k'')} \cap \Omega_1;\ \delta_\lambda)$, $0 \leqslant \mu \leqslant n_0 - 2b$, *где* r *и* s_j — *числа из теоремы* 3 § 9, *а* δ_λ — *из условия* (8);

3) *справедливо представление*

$$\Phi_j^1 = \sum_{\nu=0}^{p} \varphi_j^{(\nu)} + \rho_j^{(p)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{20}$$

$$\varphi_j^{(\nu)} \in \Pi_{r,s_j}^{r_j+(j)+\lambda}(\Omega_0, \Omega_{(j)};\ \delta_\lambda), \quad \rho_j^{(p)} \in \overline{\Pi}_{r,s_j}(\Omega_0, \Omega_{(j)};\ \delta_\lambda),$$

где число λ — *то же, что в теореме* 3 § 9;

4) *если* $n_0 \leqslant 2b - 2$, *то*

$$\begin{gathered} D_\xi^k \Phi_0(x, \xi;\ \lambda)|_{\xi \in \Omega_1} = 0, \quad x \in \Omega_0, \\ |k| \leqslant \min\{[s_0],\ 2b - n_0 - 2\}; \end{gathered} \tag{21}$$

5) *операторы*

$$f \mapsto v_j(x) \equiv \int\limits_{\Omega_{(j)}} \Phi_j^1(x, \xi;\ \lambda) f(\xi)\, d\xi, \quad x \in \Omega_0,\ 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{22}$$

ограниченно действуют из $C_{(j)}^{2b-r_j+s}$ *в* C_0^{2b+s}, $l_0 < s \leqslant l - l_0 - l_1$.

◀ Будем использовать для доказательства этой теоремы следующую лемму.

Лемма. *Для интеграла*

$$I \equiv \int\limits_0^\infty \exp\left\{-c_0 \frac{r^q}{t^{q-1}} - \delta^{2b} t\right\} t^{-\frac{p}{2b}}\, dt, \quad r > 0,$$

$$c_0 > 0, \quad \delta > 0, \quad q \equiv \frac{2b}{2b-1},$$

справедлива оценка

$$I \leqslant C\omega_c^\delta(\delta r,\ p - 2b), \quad c > 0. \tag{23}$$

Докажем эту лемму. В интеграле I сделаем замену переменной интегрирования по формуле $\tau = \delta^{2b} t$ и результат запишем в виде

$$I = \delta^{p-2b} \left(\int_0^1 \exp\left\{ -c_0 \frac{(\delta r)^q}{\tau^{q-1}} - \tau \right\} \tau^{-\frac{p}{2b}} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty \exp\left\{ -c_0 \frac{(\delta r)^q}{\tau^{q-1}} - \tau \right\} \tau^{-\frac{p}{2b}} d\tau \right) \equiv \delta^{p-2b} (I_1 + I_2). \quad (24)$$

Используя то, что функция $\varphi(\tau) = -c_0 (\delta r)^q \tau^{1-q} - \tau$, $\tau \in (0, \infty)$, имеет при $\tau = (c_0(q-1))^{\frac{1}{q}} \delta r$ максимум, равный $\varphi_{\max} \equiv -2b(c_0(q-1))^{\frac{1}{q}} \delta r$, получаем

$$I_1 \leqslant \exp\left\{ -\frac{1}{2} \varphi_{\max} \right\} \int_0^1 \exp\left\{ -\frac{c_0 (\delta r)^q}{2\tau^{q-1}} \right\} \tau^{-\frac{p}{2b}} d\tau,$$

$$I_2 \leqslant C \exp\left\{ -\frac{1}{2} \varphi_{\max} \right\}. \quad (25)$$

В силу леммы 7.1 из [98] имеем

$$\int_0^1 \exp\left\{ -\frac{c_0 (\delta r)^q}{2\tau^{q-1}} \right\} \tau^{-\frac{p}{2b}} d\tau \leqslant \begin{cases} C, & p < 2b, \\ C + C\,|\ln(\delta r)|, & p = 2b, \\ C(\delta r)^{2b-p}, & p > 2b. \end{cases} \quad (26)$$

Из (24) — (26) легко следует неравенство (23). Лемма доказана.

Как видно из рассуждений, проведенных перед формулировкой теоремы 1, для доказательства существования и единственности матрицы Грина задачи (2), а также справедливости для нее формул (11) и (12) достаточно доказать, что из (6) при $t \to \infty$ следует формула (9).

Из оценок (5) и аналогичных оценок для R_k сначала с помощью леммы вытекают неравенства

$$|\Phi_l^1(x, \xi; \lambda)| \leqslant C\omega_c^{\delta_\lambda}(\delta_\lambda |x-\xi|;\ n - r_l - (l)),$$

$$\Psi_k(x, \xi; \lambda)| \leqslant C\omega_c^{\delta_\lambda}(\delta_\lambda |x-\xi|;\ n - 2b - |k| - 1),$$

$$\left|\int\limits_t^\infty G_j^1(\tau, x, \xi; \lambda)\,d\tau\right| \leqslant C\omega_c^{\delta_\lambda}(\delta_\lambda|x-\xi|; n-r_j-(j)) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\delta_\lambda^{2b}t\right\},$$
$$\left|\int\limits_t^\infty R_k(\tau, x, \xi; \lambda)\,d\tau\right| \leqslant C\omega_c^{\delta_\lambda}(\delta_\lambda|x-\xi|; n-2b-$$
$$-|k|-1)\exp\left\{-\frac{1}{4}\delta_\lambda^{2b}t\right\}, \quad 0\leqslant j\leqslant N, \quad |k|\leqslant n_0-2b,$$

а затем с их учетом следует, что интегралы из (9) имеют смысл при любых $f_j \in C_{(j)}^{2b-r_j+s}$, $0\leqslant j\leqslant N$, и после перехода к пределу при $t\to\infty$ из (6) получается формула (9).

Докажем свойства 2) — 5) матрицы Грина. С помощью утверждений (4), формул (7) и (8), определения классов $S_{r,s}^{q,\gamma}(Q_0^\infty, Q_\nu^\infty)$ и $\Pi_{r,s}^q(\Omega_0, \Omega_\nu; \delta)$ и леммы легко заключить, что Φ_j^1, $0\leqslant j\leqslant N$, принадлежат классам, указанным в свойстве 2), а $\Psi_k \in \Pi_{r,s_0+|k|+1}^{2b+|k|+1}(\Omega_0, \Omega_1; \delta_\lambda)$, $|k|\leqslant n_0-2b$. Поскольку $\overline{\Psi}_\mu^{(k'')}$ выражаются через Ψ_k, то отсюда следует и утверждение свойства 2) для $\overline{\Psi}_\mu^{(k'')}$. Представление (20) с отмеченными в 3) свойствами $\varphi_j^{(\nu)}$ и $\rho_j^{(p)}$ непосредственно следует из формулы (8) § 9, отмеченных в теореме 6 § 9 свойств $g_j^{(\nu)}$ и $R_j^{(p)}$ и леммы. Равенства (21) являются следствиями равенств (10) § 9, (7), (10) и (11).

Чтобы доказать свойство 5), возьмем фиксированное число $T>0$ и бесконечно дифференцируемую функцию $\zeta:(0,\infty)\to\mathbb{R}^1$ такую, что $\zeta(\tau)=0$ для $\tau\leqslant\frac{T}{4}$ и $\zeta(\tau)=1$ для $\tau\geqslant\frac{T}{2}$. Используя равенства (10), представим функцию v_j из (22) в виде

$$v_j(x) = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\Omega_{(j)}} G_j^1(T-\tau, x, \xi; \lambda)\,\zeta(\tau) f(\xi)\,d\xi +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{T/2} d\tau \int\limits_{\Omega_{(j)}} G_j^1(T-\tau, x, \xi; \lambda)(1-\zeta(\tau)) f(\xi)\,d\xi \equiv$$
$$\equiv u_j'(x) + u_j''(x), \quad x\in\Omega_0.$$

Функция u_j' является значением при $t = T$ функции

$$(\mathscr{G}_j^1(\zeta f))(t, x) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(j)}} G_j^1(t-\tau, x, \xi; \lambda)\,\zeta(\tau) f(\xi)\,d\xi,$$
$$(t, x) \in Q_0.$$

Но так как $\zeta f \in \overset{\circ}{H}{}^{2b-r_j+s}_{(j)}$, то на основании замечания из п. 1 § 12 имеем

$$\|\mathscr{G}_j^1(\zeta f)\|_0^{2b+s} \leqslant C\,\|\zeta f\|_{(j)}^{2b-r_j+s},$$

откуда следует неравенство

$$|u_j'|_0^{2b+s} \leqslant C\,|f|_{(j)}^{2b-r_j+s}.$$

Такое же неравенство для u_j'' получается непосредственно с помощью оценок G_j^1, вытекающих из (5) и (7). ▶

2. Однородная матрица Грина эллиптической граничной задачи, порожденной параболической. На основании результатов гл. 3 при более слабых, чем в п. 1, предположениях о гладкости коэффициентов задачи построим и исследуем однородную матрицу Грина $\Phi_0^1(x, \xi; \lambda)$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0$, $x \neq \xi$, задачи (2), под которой в соответствии с определением 2 из п. 1 § 3 понимаем решение задачи

$$\begin{aligned}
&(A^0(x, D_x) + \lambda I_m)\,\Phi_0^1 = I_m \delta_\xi,\\
&B_j^0(x, D_x)\,\Phi_0^1|_{\Omega_1} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.
\end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $G_0^1(t-\tau, x, \xi)$, $t > \tau \geqslant 0$, $\{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0$,— однородная матрица Грина задачи (1) с $\lambda = 0$. Легко проверить, что матрица

$$G_0^1(t-\tau, x, \xi; \lambda) \equiv \exp\{-\lambda(t-\tau)\}\,G_0^1(t-\tau, x, \xi),$$
$$t > \tau \geqslant 0, \quad \{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0, \tag{28}$$

является однородной матрицей Грина задачи (1) с любым λ. Далее будем считать λ выбранным так, чтобы выполнялось условие (8), в котором γ — постоянная из теоремы 2 § 8.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия* A *и* B_l, $l > l_0$. *Тогда однородная матрица Грина зада-*

чи (2) *определяется формулой*

$$\Phi_0^1(x, \xi; \lambda) \equiv \int_0^\infty G_0^1(t, x, \xi; \lambda)\,dt, \quad \{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0, \ x \neq \xi, \tag{29}$$

и справедливо представление

$$\Phi_0^1(x, \xi; \lambda) = \Gamma(x, \xi; \lambda) - W(x, \xi; \lambda),$$
$$\{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0, \ x \neq \xi, \tag{30}$$

где Γ — *фундаментальная матрица решений системы*

$$A^\circ(x, D_x)v + \lambda v = f_0, \tag{31}$$

$$\Gamma \in \Pi_{2b+l,0}^{2b}(\Omega_0, \Omega_0; \delta_\lambda), \quad W \in \tilde{\Pi}_{2b+l}^{2b,\theta}(\Omega_0, \Omega_0; \delta_\lambda),$$

$\theta \equiv \min\{0, [l] - 2l_0^* + 1\}$, *и, следовательно, при* $\theta = 0$ $\Phi_0^1 \in \Pi_{2b+l,0}^{2b}(\Omega_0, \Omega_0; \delta_\lambda)$.

◀Используя представление (1) § 6 и равенство (28), для матрицы (29) имеем

$$\Phi_0^1(x, \xi; \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z(t, x, \xi)\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t, x, \xi)\,dt \equiv$$
$$\equiv \Gamma(x, \xi; \lambda) - W(x, \xi; \lambda), \ \{x, \xi\} \subset \overline{\Omega}_0, \quad x \neq \xi.$$

Отсюда на основании теоремы 2 § 8 и леммы из п. 1 следует, что матрицы Γ и W принадлежат указанным в теореме классам.

Матрица Γ, как установлено в книге [98], является фундаментальной матрицей решений системы (31). Поэтому для доказательства того, что Φ_0^1 — однородная матрица Грина задачи (2), достаточно убедиться в справедливости равенств

$$(A^0(x, D_x) + \lambda I_m) W(x, \xi; \lambda) = 0, \tag{32}$$

$$B_j^0(x, D_x)\Phi_0^1(x, \xi; \lambda)|_{\Omega_1} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \ \xi \in \Omega_0. \tag{33}$$

Докажем равенство (32). В силу свойств V при $t > 0$ имеем

$$(I_m(D_t^1 + \lambda) + A^0(x, D_x))(\exp\{-\lambda t\} V(t, x, \xi)) = 0.$$

Поэтому

$$0 = \int_\varepsilon^M (I_m(D_t^1 + \lambda) + A^0(x, D_x))(e^{-\lambda t} V(t, x, \xi))\,dt =$$

$$= (e^{-\lambda t} V(t, x, \xi))\Big|_{t=\varepsilon}^{t=M} + (A^0(x, D_x) + \lambda I_m) \times$$
$$\times \int_{\varepsilon}^{M} e^{-\lambda t} V(t, x, \xi)\, dt \to (A^0(x, D_x) + \lambda I_m) W(x, \xi; \lambda),$$
$$\varepsilon \to 0, \ M \to \infty.$$

Равенства (33) также легко доказываются с помощью формул

$$B_j^0(x, D_x) G_0^1(t, x, \xi)|_{\Omega_1} = 0, \quad t > 0, \ 0 \leqslant j \leqslant N. \ \blacktriangleright$$

3. Оценки ядер дробных отрицательных степеней эллиптического оператора. С помощью методики, использованной в п. 1 и 2, устанавливаются также точные оценки ядер Грина дробных отрицательных степеней эллиптического оператора, соответствующего задаче (2) с $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Эти ядра определяются формулами (см. [58])

$$\Phi_0^\beta(x, \xi; \lambda) \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} G_0^1(t, x, \xi; \lambda)\, dt,$$
$$\{x, \xi\} \subset \bar{\Omega}_0, \ x \neq \xi, \ 0 < \beta < 1.$$

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и* $\theta = 0$, *то* $\Phi_0^\beta \in \Pi_{2b+l,0}^{2b\beta}(\Omega_0, \Omega_0; \delta_\lambda)$, $0 < \beta < 1$.

Заметим, что если коэффициенты задачи (2) и граница Ω_1 более гладкие, чем предполагается в теореме 3, то для ядер Φ_0^β при $n_0 < 2b$ можно получить представления, аналогичные (20).

Пользуясь теоремой 3 и этим замечанием, можно доказать различные утверждения о действии дробных степеней эллиптического оператора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук.— 1964.— Т. 19, № 3.— С. 53—161.
2. *Агранович М. С., Сухорутченко В. В.* О необходимости алгебраических условий параболичности нестационарных задач // Математические заметки.— 1967.— Т. 2, № 6.— С. 615—625
3. *Баимов Ш. К.* Свойства собственных значений и собственных функций общей несамосопряженной эллиптической краевой задачи в неограниченной области // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т. 14, № 4.— С. 724—727.
4. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гёльдера и некоторые их приложения // Математический сб.— 1979.— Т. 110, № 2.— С. 163—188.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— К. : Наук. думка, 1965.— 798 с.
6. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1967.— Т. 19, № 5.— С. 3—32.
7. *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* Спектральная асимптотика эллиптического оператора в ограниченной области // Функц. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19. № 2.— С. 67—69.
8. *Веренич І. І., Івасишен С. Д.* Матриця Гріна загальних однорідних параболічних крайових задач у нециліндричних областях // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1970.— № 12.— С. 1063—1066.
9. *Генджоян Г. В.* Некоторые оценки функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1966.— Т. 1, № 4. — С. 238—269.
10. *Гусев А. И.* Плотность состояний и другие спектральные инварианты самосопряженных эллиптических операторов со случайными коэффициентами // Математический сб.— 1977.— Т. 104, № 2.— С. 207—226.
11. *Гусев А. И.* Плотность состояний самосопряженных эллиптических операторов со случайными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, № 3.— С. 72—73.
12. *Гусев А. И.* О спектре самосопряженных эллиптических операторов с коэффициентами из некоторой алгебры со средним // Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика.— 1980.— № 3.— С. 3—6.
13. *Дринь М. М., Ивасищен С. Д.* Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И. Г. Петровскому системы с разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 11.— С. 7—10.

14. *Дринь М. М.* О матрицах Грина эллиптических задач сопряжения, порожденных параболическими / Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1984.—17 с.—Деп. в УкрНИИНТИ 13.03.84, № 476Ук—Д84.
15. *Дринь М. М., Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических задач сопряжения / Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1984.— 95 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 07.02.85, № 252Ук—85Деп.
16. *Дринь М. М., Ивасишен С. Д.* Операторы Грина параболических задач сопряжения / Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1985.— 37 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 22.07.85, № 1451Ук—85Деп.
17. *Дринь М. М.* Операторы Грина параболических задач сопряжения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— К., 1985.— 16 с.
18. *Дринь М. М.* О нормальной параболической задаче сопряжения // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики: Сб. науч. тр.— К., 1986.— С. 55—57.
19. *Дубровская А. П.* О функциях Грина нелокальных стационарных параболических и порожденных ими эллиптических задач // Сб. науч. статей по прил. функц. анализа.— Воронеж, 1975.— С. 41—52.
20. *Дубровская А. П.* Исследование некоторых нелокальных граничных задач: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— К., 1977.— 15 с.
21. *Дубровская А. П.* О матрицах Грина нелокальных параболических граничных задач // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частн. производными, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского.— М., 1978.— С. 301—302.
22. *Дубровская А. П.* Об операторах Грина нелокальной параболической граничной задачи // Операторные методы в дифференц. уравнениях.— Воронеж, 1979.— С. 40—45.
23. *Загорский Т. Я.* Смешанная задача для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.— Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1961.— 115 с.
24. *Ивасишен С. Д.* Оценки производных функции Грина первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Тез. докл. XXII науч. сес. Секц. физ. и мат. наук.— Черновцы, 1966.— С. 124—126.
25. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Оценки матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 172, № 6.— С. 1262—1265.
26. *Івасишен С. Д., Лавренчук В. П.* Про розв'язність задачі Коші та деяких крайових задач для загальних параболічних систем у класі зростаючих функцій // Доп. АН УРСР.— 1967.— № 4.— С. 299—303.
27. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $2\vec{b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— К., 1968.— № 1.— С. 3—175.
28. *Ивасишен С. Д.* Оценки функции Грина однородной первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Укр. мат. журн.— 1969.— Т. 21, № 1.— С. 15—27.
29. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина неоднородной параболической граничной задачи // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 187, № 4.— С. 730—733.
30. *Івасишен С. Д.* Узагальнені розв'язки параболічних крайових задач // Матеріали ювілейної конференції молодих науков-

ців Буковини з проблем природничих наук.— Чернівці, 1970.— С. 14—17.
31. *Ивасишен С. Д.* Изучение матрицы Грина общей неоднородной параболической граничной задачи // Методы функц. анализа в граничных задачах математической физики.— К., 1971.— С. 5—74.
32. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических задач с нормальными граничными условиями // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 197, № 2.— С. 261—264.
33. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина общей неоднородной параболической задачи с граничными условиями любого порядка // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 206, № 4.— С. 796—799.
34. *Івасишен С. Д.* Інтегральні зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1973.— № 7.— С. 596—599.
35. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина полупространственных модельных параболических граничных задач.— К., 1976.— 51 с.— (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 76—15).
36. *Ивасишен С. Д.* Об исследовании матрицы Грина параболических граничных задач с однородными граничными условиями произвольного порядка методом регуляризатора // Математический сб.— К. : Наук. думка, 1976.— С. 202—207.
37. *Ивасишен С. Д.* О матрицах Грина общих эллиптических граничных задач, порожденных параболическими // Укр. мат. журн.— 1977.— Т. 29, № 4.— С. 519—526.
38. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гёльдера // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1977.— № 5.— С. 396—400.
39. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т. 14, № 2.— С. 361—363.
40. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* О корректной разрешимости общих граничных задач для параболических систем с растущими коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1978.— Т. 30, № 1.— С. 100—106.
41. *Ивасишен С. Д.* О теоремах Лиувилля для решений параболических граничных задач // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 12.— С. 1071—1075.
42. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина общих граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частн. производными, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского.— М., 1978.— С. 315—316.
43. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем.— К., 1978.— 52 с.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78—2).
44. *Ивасишен С. Д.* О матрицах Грина общих параболических граничных задач и некоторых их применениях // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 34, № 4.— С. 163—164.
45. *Ивасишен С. Д.* О матрицах Грина общих граничных задач для произвольных параболических по И. Г. Петровскому систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 12.— С. 982—985.

46. *Ивасишен С. Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн.— 1980.— Т. 32, № 1.— С. 35—45.
47. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида // Математический сб.— 1981.— Т. 114, № 1, 4.— С. 110—166, 523—565.
48. *Ивасишен С. Д.* Об обобщенных решениях параболических граничных задач // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, № 4.— С. 220.
49. *Ивасишен С. Д.* Некоторые применения матриц Грина общих параболических граничных задач // Граничные задачи математической физики: Сб. науч. тр.— К., 1981.— С. 43—44.
50. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— К., 1981.— 33 с.
51. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах растущих функций // Укр. мат. журн.— 1982.— Т. 34, № 1.— С. 25—30.
52. *Ивасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— Т. 34, № 5.— С. 547—552.
53. *Івасишен С. Д.* Про нормальну параболічну крайову задачу // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка.— 1983.— Вип. 25.— С. 77—82.
54. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* О матрице Грина параболических граничных задач с растущими коэффициентами // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр.— К., 1983.— С. 81—89.
55. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гёльдера // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 3.— С. 470—481.
56. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 72 с.— (Современные достижения математики и ее приложений.)
57. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук.— 1962.— Т. 17, № 3.— С. 3—141.
58. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.*— М. : Наука, 1966.— 499 с.
59. *Коваленко И. А., Ройтберг Я. А.* О функции Грина общей эллиптической граничной задачи с псевдодифференциальными граничными условиями // Укр. мат. журн.— 1971.— Т. 23, № 6.— С. 772—777.
60. *Коваленко И. А., Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Функция Грина неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу // Укр. мат. журн.— 1978.— Т. 30, № 5.— С. 664—668.
61. *Красовский Ю. П.* Исследование потенциалов, связанных с краевыми задачами для эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1967.— Т. 31, № 3.— С. 587—640.
62. *Красовский Ю. П.* Выделение особенности у функций Грина // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— Т. 31, № 5.— С. 977—1010.
63. *Красовский Ю. П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— Т. 33, № 1.— С. 109—137.

64. *Красовский Ю. П.* Оценки роста производных решений однородных эллиптических уравнений вблизи границы // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 184. № 3.— С. 534—537.
65. *Красовский Ю. П.* Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— Т. 35, № 1.— С. 202—209.
66. *Лавренчук В. П.* Загальні крайові задачі для параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1968.— № 3.— С. 238—242.
67. *Лавренчук В. П., Матийчук М. И.* Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейной параболической системы и задача без начальных условий // Укр. мат. журн.— 1982.— Т. 34, № 6.— С. 710—717.
68. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
69. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн.— 1986.— Т. 38, № 6. — С. 795—798.
70. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О граничных задачах для параболических и эллиптических уравнений второго порядка в пространствах Дини // Докл. АН СССР.—1971.— Т. 198, № 3.— С. 533—536.
71. *Матійчук М. І.* Задача Коші й основні задачі матфізики для параболічних систем з розривними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1973.— № 5.— С. 409—412.
72. *Матийчук М. И.* О корректной разрешимости задачи с косой производной для параболических уравнений в пространствах Дини // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 209, № 3.— С. 551—554.
73. *Матийчук М. И.* Задача Дирихле и Неймана для параболических уравнений с оператором Бесселя в пространствах Дини // Математическая физика.—К., 1973.—№ 14.—С. 113—118.
74. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задачи Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Укр. мат. журн.— 1974.— Т. 26, № 3.— С. 328—337.
75. *Матійчук М. І.* Про В-параболічну задачу з крайовими операторами рівного порядку в просторах Діні — Гельдера // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1974.— № 4.— С. 302—305.
76. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам // Дифференц. уравнения.— 1974.— Т. 10, № 8.— С. 1463—1477; 1975.— Т. 11, № 7.— С. 1293—1303.
77. *Махно С. Я.* Граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных//Теория случайн. процессов.—К.,1984.— Вып. 12.— С. 48—56.
78. *Миронова В. В.* О существовании и единственности решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1975.— Т. 27, № 5.— С. 691—695.
79. *Михайлов В. П.* О смешанной задаче для параболической системы на плоскости // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 126, № 6.— С. 1199—1202.

80. *Михайлов В. П.* Решение смешанной задачи для параболической системы методом потенциалов // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 132, № 2.— С. 291—294.
81. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М. : Наука, 1986.— 500 с.
82. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Математический сб.— 1969.— Т. 78, № 3.— С. 446—472.
83. *Соболевский П. Е.* Оценки функции Грина уравнений в частных производных второго порядка параболического типа // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 138, № 2.— С. 313—316.
84. *Соболевский П. Е.* О функциях Грина любых (в частности, целых) степеней эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 142, № 4.— С. 804—807.
85. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1965.— Т. 83.— С. 3—162.
86. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1967.— Т. 102.— С. 137—160.
87. *Солонников В. А.* О матрицах Грина для параболических краевых задач // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1969.— Т. 14.— С. 256—287.
88. *Солонников В. А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1970.— Т. 110.— С. 107—145; 1971.— Т. 116.— С. 181—216.
89. *Солонников В. А., Хачатрян А. Г.* Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гёльдеровских нормах // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1980.— Т. 147.— С. 147—155.
90. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Математический сб.— 1935.— Т. 42, № 2.— С. 199—215.
91. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1972.— 724 с.
92. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
93. *Шаталов В. Е., Шишмарев И. А.* О рядах Дирихле для эллиптических операторов // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 182, № 6.— С. 1280—1282.
94. *Шаталов В. Е., Шишмарев И. А.* Аналитическое продолжение рядов Дирихле эллиптической граничной задачи // Дифференц. уравнения.— 1970.— Т. 6, № 9, 10.— С. 1652—1672, 1844 — 1850.
95. *Шмулевич С. Д.* О распределении собственных значений оператора самосопряженной эллиптической краевой задачи в неограниченной области // Докл. АН СССР.— 1969.—Т. 189, № 5.—С. 959—962.
96. *Шубин М. А.* Плотность состояний самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— М., 1977.— № 3.— С. 243—275.

97. *Шубин М. А.* Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 34, № 2.— С. 95—135.
98. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
99. *Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д.* Оцінки похідних матриці Гріна параболічної крайової задачі в півпросторі // Доп. АН УРСР.— 1966.— № 7.— С. 846—850.
100. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Оценки производных матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тез. Междунар. конгр. математиков. Секция 7.— М., 1966.— С. 62—63.
101. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Матрица Грина однородной параболической граничной задачи для систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1968. Т. 183, № 4.— С. 797—800.
102. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1970.— Т. 23.— С. 179—234.
103. *Эйдельман С. Д., Сирченко З. Ф.* О применении принципа усреднения для решения некоторых параболических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1973.— Т. 25, № 5.— С. 62' 631.
104. *Эйдельман С. Д., Матийчук М. И.* Применение метода Х к решению однородных параболических граничных зада Математическая физика.— К., 1974.— № 15.— С. 171—176.
105. *Arima R.* On general boundary value problem for parabolic equations // J. Math. Kyoto Univ.— 1964.— Vol. 4, № 1.— P. 207—243.
106. *Ďurikovič V.* An initial-boundary value problem for quasilinear parabolic systems of higher order // Ann. Polon. Math.— 1974.— Vol. 30, № 2.— P. 145—164.
107. *Ďurikovič V.* On a nonlineary stationary parabolic boundary value problem // Acta fac. rerum natur. Univ. comen. Math.— 1979.— N 35.— P. 55—76.
108. *Ďurikovič V.* Non-linear stationary parabolic boundary v problems in an infinite cylinder // Ann. Polon. Math.— 197 Vol. 36, № 2.— P. 139—152.
109. *Ďurikovič V.* A nonlinear elliptic boundary value problem generated by a parabolic problem // Acta math. Univ. comen.— 1984.— № 44—45.— P. 225—235.
110. *Friedman A.* Boundary estimates for second order parabolic equations and their applications // J. Math. and Mech.— 1958. Vol. 7, № 5.— P. 771—791.
111. *Friedman A.* Parabolic equations of the second order // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— Vol. 93, N 3.— P. 509—530.
112. *Gevrey M.* Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique // J. Math. Pures Appl. Ser. 6.— 1913.— Vol. 9.— P. 305—471.
113. *Itô S.* A boundary value problem of partial differential equation of parabolic type // Duke Math. J.— 1957.— Vol. 24.— P. 299—312.
114. *Itô S.* Fundamental solutions of parabolic differential equation and boundary value problems // Japan J. Math.— 1957.— Vol. 27.— P. 55—102.

115. *Levi E. E.* Sull'equazioni del calori // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 3.— 1907—1908.— Vol. 14.— P. 276—317.
16. *Mizohata S., Arima R.* Propriétés asymptotiques des valeurs propres des opérateurs elliptiques autoadjoints // J. Math. Kyoto Univ.— 1964.— Vol. 4, № 1.— P. 245—254.
17. *Mizohata S.* Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques // J. Math. Kyoto Univ.— 1965.— Vol. 4, № 3.— P. 399—428.
18. *Pogorzelski W.* Etude d'une fonction de Green et du probléme aux limites pour l'equation parabolique normale // Ann. Polon. Math.— 1958.— Vol. 4, № 3.— P. 288—307.
19. *Triebel H.* Eigenschaften Greenschen Funtionen nichtselbstadjunqierter algemeiner elliptischer Operatoren // Studia Math.— 1968.— Bd. 30, № 3.— S. 339—353.
20. *Wolfersdorf L. V.* Maximum principle for control processes governed by mildly nonlinear parabolic equations // Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Tech.— 1977.— № 1.— P. 273—291.
21. *Zuckerman P.* Inequalities for derivatives of Green's functions of general coercive elliptic boundary value problems. Doct. diss. N. J. Univ., 1968, 42 p.// Dissert Abstrs.— 1969.— Vol. B 29, №11.— P. 4288—4289.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Ивасишен Степан Дмитриевич

МАТРИЦЫ ГРИНА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Обложку оформил художник *С. И. Райхлин*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *Н. Ю. Морозова*
Корректор *И. П. Берус*

ИБ № 13923

Сдано в набор 20.02.89. Подписано в печать 25.12.89. БФ 03229. Формат $84 \times 108/_{32}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,5. Усл. кр.-отт. 10,71. Уч.-изд. л. 10,15. Тираж 1000 экз. Изд. № 8524. Заказ № 2568. Цена 2 р.

Издательство «Выща школа». 2[illegible]054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, ул. Довженко, 3, в Харьковской городской типографии №16, ул. Университетская, 16. Зак. 405.