А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ СОВЕТ
ФИЛОСОФСКИХ (МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ) СЕМИНАРОВ
ПРИ ПРЕЗИДИУМЕ АН СССР

Методологический анализ оснований математики

Ответственный редактор
доктор философских наук М.И. ПАНОВ

МОСКВА "НАУКА" 1988

ББК 15.1
М 54

Рецензенты:
доктор философских наук В.И. Мог, кандидат
философских наук В.Я.Перминов

М 54 Методологический анализ оснований математики / Ф.Китчер, В.Я.Перминов, Б.И.Федоров и др. - М.: Наука, 1988.-175 с.
ISBN 5-02-008094-2

Книга представляет собой первую в отечественной литературе коллективную монографию, посвященную проблеме методологии обоснования современной математики. Работа дает целостное представление о причинах, приведших к третьему кризису оснований математики. Критически анализируются воззрения ведущих западных математиков (Рассел, Гильберт, Брауэр), а также философов (Витгенштейн, Гуссерль, Лакатос), создавших различные концепции философии математики.

Для специалистов в области философии наук, логиков, методологов.

М $\frac{0302020100 - 392}{042(02) - 88}$ 11-1988-IV ББК 15.1

ISBN 5-02-008094-2

В В Е Д Е Н И Е

Предлагаемая на суд читателей книга продолжает серию публикаций (выпускаемых Центральным советом философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР) по методологическим и социально-экономическим проблемам развития и применения математики: "Методологические проблемы интуиционистской математики" (М., 1984); "Методологические проблемы развития и применения математики" (М., 1985); "Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы" (М., 1986); "Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты" (М., 1987); "Современная математика: методологические и мировоззренческие проблемы" (М., 1987); "Методологический анализ математических теорий" (М., 1987). В "портфеле" Центрального совета имеются также рукописи "Методологические аспекты развития интуиционистской и конструктивной математики" и "Западная философия математики сегодня", которые предполагается издать до конца нынешнего десятилетия.

Особенностью данной работы является то, что в ней широко представлены зарубежные авторы. Профессор университета Сан-Пауло (Бразилия) Ньютон Да Коста и Лейла Пюга предоставили для публикации рукопись статьи, посвященной анализу идей нашего соотечественника Н.А.Васильева. Благожелательная позиция издательства **"Univ. Minnesota press"** позволила опубликовать статью профессора Филиппа Китчера (США). Столь же любезен был и профессор Дж.Фанг, главный редактор международного журнала по философии современной математики **"Philosophia Mathematica"**, давший согласие на перевод статьи профессора Сандерса Мак-Лейна. В книге помещены также переводы статьи профессора Дагфинна Фоллесдаля (Норвегия) и классической работы Давида Гильберта "Аксиоматическое мышление", входящей во все (или большинство) антологий по философии математики. Ее перевод на русский язык будет безусловно интересен для советского читателя. Хотелось бы особо поблагодарить профессора Ирвинга Анеллиса (заместителя главного редактора журнала **"Philosophia Mathematica"**), личные контакты с которым во многом сделали возможным выход этой книги.

Планировался перевод одной из работ Л.Э.Я.Брауэра, но более целесообразно посвятить произведениям основоположника интуиционизма специальный том, снабженный солидными комментариями. А в данной книге помещена только статья, посвященная анализу одной малоисследованной проблемы из биографии выдающегося голландского ученого.

Центральный совет философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР совместно с Институтом истории естествознания и техники АН СССР, Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова и Советом философских (методологических) семинаров при Обнинском горкоме КПСС провели в г. Обнинске два Всесоюзных симпозиума, посвященных закономерностям и современным тенденциям развития математики (первый – в сентябре 1985 г., а второй – в сентябре 1987 г.). В мае 1989 г. в г. Обнинске будет проведен третий Всесоюзный симпозиум по этой проблематике. Отличительной чертой обнинских симпозиумов является то, что в их работе принимают участие математики, специалисты по основаниям математической науки, историки математики, философы и методологи, исследующие различные аспекты развития и применения математического знания. И вполне естественно, что и на страницах предлагаемой на суд читателя книги многие из них выступают в качестве авторов.

Особой благодарности заслуживают ученые, взявшие на себя труд перевести на русский язык предлагаемые работы зарубежных авторов: В.А.Бажанов, Г.А.Барабашев, А.А.Кириллов-младший, В.Н.Переверзев, В.Я.Перминов. Научно-вспомогательную работу выполнила И.В.Захарова.

Филипп Китчер

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ НАТУРАЛИЗМ [x]

Фактически все дискуссии по "философии математики" в нашем веке были сконцентрированы на задаче построения оснований математики. Нет сомнения в том, что работа в этом направлении во многих случаях была полезной для математики. Действительно, развитие логики как важной части математики многим обязано пионерским работам ученых, которые надеялись выявить основание математики. Однако почти в той же мере является очевидным, что глобальные программы обоснования математики не достигли своих главных целей. Математические результаты, которые были здесь достигнуты, представляются скорее обычной частью математики, чем исходным пунктом, на котором могло бы быть построено все ее здание.

В этой ситуации уместно задать вопрос, созвучный вопросу Дедекинда, стоящему в заглавии его книги, что есть философия математики и чем она может быть. Многие работающие математики и историки математики категорично и без церемоний ответят на первую часть вопроса: для них это предмет, известный в той же мере своей бесполезностью, как и претенциозной строгостью, созданный при поверхностном внимании к малой части нетипичных областей математики и с полным пренебрежением к тому, на что большинство математиков тратит свое основное время. Цель моего настоящего очерка состоит в том, чтобы попытаться ответить на вторую часть вопроса, предоставив другим споры по поводу всевозможных ответов на первую его часть. Я намерен показать, что существуют доводы за то, чтобы отвергнуть обосновательную ориентацию в философии математики, и что, поступая таким образом, мы получаем образ математики, который позволяет поднять другие, и, на мой взгляд, более интересные философские проблемы. В контексте этих проблем я попытаюсь наметить контуры натуралистской философии математики, которая, как я надеюсь, окажется приемлемой для математиков и историков математики.

---

[x] Kitcher Ph. Mathematical naturalism // Ed. K. Esprey, Ph. Kitcher. History and Philosophy of modern Mathematics. Minneapolis: Univ. Minn.press, 1987. Пер. с англ. В.Я. Перминова.

1. Эпистемологические предпосылки

Поиски обоснования для части математики могут иметь тот же смысл, что и поиски обоснования для некоторой проблематичной части эмпирической теории. В истории математики были периоды, когда математики сознательно ставили перед собой задачу прояснить понятия, предшествующее использование которых граничило с парадоксами, или систематизировать результаты, взаимные связи которых только смутно чувствовались. Исследование Вейерштрассом понятия сходимости и выдвинутое Лагранжем объяснение успеха созданной им техники для решения квадратных и кубических уравнений - первые примеры указанных форм математической активности. Но глобальные обосновательные программы выходят за пределы такого рода местных проектов интеллектуального прояснения [1].

Философия математики, сориентированная на ее обоснование, несет в себе скрытые допущения априористской теории познания. Если математика не рассматривается как априорная наука, тогда обосновательные программы должны цениться лишь в той мере, в какой они позволяют разрешить внутренние затруднения математики. Как только мы отказываемся от априористских допущений, исчезают всякие основания для предположения о том, что должна существовать некоторая первая математика, некоторая особая дисциплина, на базе которой может быть построено все остальное.

Математический априоризм был традиционно популярным, популярным в такой степени, что, казалось, не было причин прояснять и защищать его, поскольку он противопоставлялся простейшей версии эмпирицизма. Априоризм выступает в двух разновидностях. Консервативные априористы утверждают, что не существует возможности получения математического знания без использования некоторых специальных процедур: никто не может претендовать на знание теоремы, если он не выполнил соответствующих процедур для получения знания аксиом (прояснение через платоновскую интуицию, конструирование в чистой интуиции; фиксация значений терминов по соглашению или что-нибудь в этом роде) и не осуществил непрерывной цепи выводов, ведущей от аксиом к теореме. Фреге в расцвете своей деятельности - пример консервативного априориста. В отличие от этого либералы не настаивают на абсолютной невозможности постижения математической истины без обращения к указанным процедурам. Они предполагают лишь, что всякое знание, как бы оно ни было получено, должно быть в конце концов обосновано через использование априорных процедур и что математическое знание окончательно оправдывается через проведение подлинных доказательств.

---

[1] Этот переход очевиден в работе Фреге, который отмечает во введении к [1], что он "чувствовал обязанным идти назад, скорее, чем вперед, к логическому обоснованию нашей науки, чем может быть большинству математиков покажется необходимым" [1. С. X]. Его постоянный довод состоит в том, что без успешного завершения проекта, которое он предпринял, математика имеет не более чем "эмпирическую определенность" [Там же]. Позднее он утверждал, что достижения XIX столетия в определении главных понятий анализа неизбежно привели к аналогичному прояснению понятий арифметики натуральных чисел. Тем, которые спрашивали, почему это так, Фреге предлагал то же самое эпистемологическое противопоставление, подчеркивая, что математика предпочитает "доказательство, где оно возможно, всякому подтверждению через индукцию" [1. С. 1-2]. Для более детального анализа эпистемологических мотивов Фреге и его влияния на философию математики см. [2].

Эмпирицисты и натуралисты [2] расходятся с обеими версиями априоризма, ставя вопрос о существовании или. по крайней мере допустимости предполагаемых априористами особых процедур. Поскольку мы можем воспринимать процедуры, к которым в туманной форме обращается априористская эпистемология, эти процедуры не могут производить знание, независимое от нашего опыта. Платоновская или конструктивистская интуиция, определения, основанные на соглашениях, в той мере, в которой они полезны вообще, дают нам знание только на фоне благоприятного опыта, который подтверждает их наличие. С натуралистической точки зрения aприористы искажают эпистемологический статус черт знания, к которым они взывают, предполагая, что процессы, аналогичные эвристическим аргументам или мысленному эксперименту ученого-естественника, способны оправдать веру, какова бы она ни была.

Этот контраст можно подчеркнуть, рассмотрев то, как Цермело ввел свои теоретико-множественные аксиомы [3]. Для консервативного априориста до 1905 г. не было теоретико-множественного знания, а следовательно, и никакого знания анализа, арифметики или какой-либо другой части математики до тех пор, пока чисто кумулятивная иерархия понятий не возникла в сознании Цермело. Либералы могут ослабить это жесткое суждение о доцермеловском невежестве, но они останутся верными взгляду, что математическое знание претерпело драматическую транформацию, когда "чисто эмпирические" оправдания греков, Ферма, Ньютона, Эйлера, Гаусса, Коши и Вейерштрасса привели в конце концов в первом десятилетии нашего века. к подлинному доказательству.

Математический натурализм противопоставляет обеим этим позициям другое философское толкование. Цермеловское знание аксиом, которые он ввел, основывалось на признании возможности систематизации имеющейся совокупности утверждений о множествах, утверждений, уже использованных явно или неявно в рассуждениях о действительных числах. Цермело предположил, что эти уже принятые утверждения должны быть выводимы из принципов, которые он отобрал как основные. Такое оправдание принципов совершенно аналогично поведению ученых в эмпирической науке, которые вводят новую совокупность эмпирических принципов на том основании, что они способны объяснить результаты, достигнутые предшествующей работой в данной области.

Строго говоря, можно принять такую схему введения аксиом Цермело и без принятия математического натурализма. Может быть, имеются люди, которые верят, что Цермело мог принять аксиомы теории множеств через признание их способности систематизировать предшествующие математические результаты, но что его последователи поступали иначе. Их сознание было просветлено красотой ку-

---

[2] В [3] я развил антиаприористскую философию математики, которую назвал эмпирицизмом. Однако эта позиция отличается от большинства подходов, которые называют себя эмпирицизмом, в нескольких существенных отношениях, и я сейчас предпочитаю наименование "натурализм" и для точки зрения, которую я защищал в книге, и для ее уточнения, представленного в данном очерке. Я надеюсь, что изменение ярлыка поможет моим читателям-математикам избежать неясностей моей ранней терминологии. Я благодарен Феликсу Броудеру за то, что он убедил меня, что выбор этой ранней терминологии был "философским фетишем".

[3] Этот пример был использован в аналогичных целях Хилари Патнемом в [4].

мулятивной иерархии. Математические натуралисты рассматривают такую перспективу как иллюзорную. Не только познание аксиом у самого Цермело может быть понято на том пути, который я предложил, но в форме, которую я опишу более детально ниже, тот же самый тип оправдания неизбежен для всех, кто придет после него.

Однако и это заключение может быть допущено без принятия натурализма. Имеется промежуточная позиция, привлекавшая одно время Рассела и Уайтхеда (см. [5]), согласно которой наше познание принципов теории множеств базируется на нашем знании арифметики, хотя при этом сами принципы арифметики рассматриваются как данные априори. Математическая интуиция, конвенциональные определения и т.п., как предполагается, дают нам априорное познание постулатов Пеано и всех теорий, которые мы можем вывести из них; однако мы устанавливаем аксиомы теории множеств через усмотрение того, что они достаточны для систематизации постулатов Пеано.

Математический натурализм настаивает здесь на жесткой последовательности. Выступая против процедур, к которым обращается априористская теория математики, он не допускает, что эти процедуры достаточны сами по себе для оправдания какого-либо математического верования у какого-либо математика в прошлом или настоящем. Я всюду пытался указать причины принимаемого отказа от различных форм интуиций и схватывания смыслов, на которые традиционно опираются выводы априористов, как правило, без каких-либо ясных эпистемологических комментариев [4].

Здесь я предложу только общую схему аргументации. Многие люди без колебаний допускают, что математики знают утверждения, которые они пишут на доске, в книгах и статьях. Может быть, имеются также и те, которые думают о практике написания математических символов как о бессодержательной формальной игре и чувствуют тошноту при разговорах о "математическом знании". Однако даже для тех, кто одобряет эту последнюю позицию, должен быть ясен аналог эпистемической концепции оправдания математики. Практика написания символов может быть хорошей или плохой, полезной или бесполезной, но наше общее убеждение состоит в том, что математическое сообщество имеет некоторое оправдание того направления деятельности, которым она следует.

В этом случае, как кажется, должен быть также и математический аналог между знанием и гипотезой (или необоснованной верой). Иногда профессиональный математик начинает с гипотезы и заканчивает утверждением некоторого знания. Иногда совсем некомпетентные люди делают правильную догадку. Если два приятеля, знающие теорию чисел настолько, чтобы понять некоторые известные проблемы, решили разделиться в альтернативах так, что один считает, что гипотеза Гольбаха истинна, а другой, что она ложна, и т.д., то это само по себе не обеспечит скачка в математическом знании. Математическое познание, подобно познанию вообще, требует большего, чем просто веры в истину. (Подобное

---

[4] См. [3. Гл. 1-4] . Одна часть моей аргументации состоит в том, что само понятие априорного знания нуждается в предварительном прояснении. Может быть, тезис об априорности математического знания пользуется доверием только вследствие того факта, что само понятие априорности обычно остается столь смутным, что есть возможность принять эвристические средства за средства априорного познания.

же различение может быть проведено и с точки зрения того подхода, который рассматривает математические утверждения как бессодержательные. Я буду здесь игнорировать этот подход и оставляю заинтересованному читателю посмотреть, как приведенный выше аргумент должен быть развит применительно к этому случаю).

Очевидный путь различения математического знания и простой истинной веры - это предположить, что некто только тогда знает математическое утверждение, когда он имеет непреложные свидетельства за его истинность, обычно, хотя и не всегда, то, что математики считают доказательством [5]. Но эта непреложность должна начинаться где-то, и философия математики должна нам указать, где. Если мы сведем непреложность утверждений к непреложности принятых аксиом для некоторой части математики, тогда мы должны спросить, как этот некто знает эти аксиомы.

Почти во всех случаях имеется простой ответ на вопрос о том, как человек знакомится с аксиомами. Они пишутся на доске, обнаруживаются в книгах, навязываются авторитетами и запечатлеваются в памяти ученика. Но натуралистическая эпистемология математики отрицает то, что аксиомы становятся нашим знанием потому, что мы знакомимся с ними указанными путями. Априористы предлагают нам картину индивидов, отбрасывающие прочь средства, которые они первоначально использовали для приобретения веры в аксиомы, и идущих к познанию этих аксиом некоторым особым путем. В этом пункте мы должны задать ряд вопросов. Что представляют собой эти специальные способы приобретения знания? Как они функционируют? Способны ли они дать знания, независимые от процессов, через которые вера в него была первоначально приобретена? Одна линия натуралистической аргументации состоит в проверке этих возможностей и в демонстрации того, что на эти вопросы нельзя ответить на пути, совместимом с априоризмом [6].

Имеется, однако, второй, более простой путь защитить натуралистическую философию математики. Рассмотрим специальные случаи, а именно, те эпизоды, в

---

5 Разумеется, того, что логики считают доказательством, не существует. Полные выводы с экспликацией всех шагов неприемлемы, за исключением случаев в особо элементарных частях математики. Более того, серьезный эпистемологический вопрос состоит в том, что бы такие выводы могли дать нам, если бы мы их имели.

6 См.: Там же . Я думаю, что лучший ответ для априориста состоит в том, чтобы заявить, что условия, которые я рассматриваю как необходимые для априорного познание, слишком стеснительны, и этот ответ был предложен несколькими людьми, наиболее определенно - Чарльзом Парсонсом в [6]. Как правильно подчеркивает Парсонс, мои аргументы против априоризма зависят от условия, что процедуры, которые осуществляют априори подтверждающую функцию, не имеют отношения к нашему опыту. Таким образом, априоризм может быть спасен через отказ от этого условия. Но, как мне кажется, это предположение уязвимо в двух отношениях. Во-первых, если априорные процедуры могут быть подорваны непрележными фактами опыта, тогда это должно означать, что опыт играет некоторую позитивную роль, когда указанные процедуры реально функционируют, чтобы оправдать наши верования. Таким образом, наше априорное познание должно было бы быть зависимым от нашего опыта. Чтобы преодолеть эту трудность, нужно, кажется, настаивать на асимметрии: упрямые факты могут играть негативную роль, но благоприятный опыт не оказывает никакого позитивного влияния. В настоящее время я не вижу, как такая асимметрия могла бы быть ясно выражена и защищена. Во-вторых, как кажется, имеется много процедур в естественных науках - мысленные эксперименты Галилея и Эйнштейна, к примеру, которые также охватывались бы понятием "априорное познание", если отбросить указанное условие, неприятное для априориста. Следовательно, я не думаю, что имеется много возможностей защиты "априоризма" через отказ от этого условия.

которых новые аксиомы или понятия вводятся и принимаются математическим сообществом. Натуралисты рассматривают такие эпизоды как совокупную очевидность, достаточную для того, чтобы показать, что модификация математики через принятие новых аксиом или понятий должна приносить некоторый прогресс в математическом познании. Порой используемые здесь аргументы будут сложными, научные аргументы в пользу новой теоретической идеи вообще сложны - и страницы, на которых новаторы обосновывают полезность своих предложений, не состоят просто из эпистемологически излишней риторики. В конкурирующей картине история математики населена событиями, в которых индивиды озаряются новыми идеями, не имеющими никакого особого отношения к предшествующему состоянию дисциплины.

Чтобы оценить новизну и важность натурализма, рассмотрим осуществленное Коши введение алгебраического понятия предела в определениях понятия сходимости, непрерывности и производной. Если мы предположим, что утверждения Коши были основаны на некотором особом априорном видении, тогда уместно спросить, почему это видение не было присуще его предшественникам, многие из которых рассматривали возможность использования понятия предела для уточнения основных положений дифференциального исчисления. Мы, как кажется, принуждаем себя использовать аналогию с превосходством силы визуального различения: именно Коши имел большую силу математической интуиции, так как увидел то, что Лакруа, Лагранж, Уиллер, Деламбер, Эйлер, Маклорен, Лейбниц и Ньютон не видели. Эта искусственная трактовка не только не является необходимой, но она совершенно недостаточна для того, чтобы оправдать структуру аргументации в работах Коши по дифференциальному исчислению. "Курс анализа" показывает, как алгебраическое понятие предела может быть использовано, чтобы переформулировать сомнительные рассуждения в исчислении и таким образом подготовить путь для решения важнейших проблем. Коши не приглашает своих последователей интуитивно схватывать правильность его новых установок. Он показывает с достаточными подробностями, в каком смысле они полезны для совершенствования математической практики [7].

Эта вторая линия аргументации предвосхищает тему, которую я буду разрабатывать в следующем разделе. Математический натурализм предлагает образ математики, который оправдывается ее историческим развитием. Априоризм представляется привлекательным, поскольку единственный приемлемый его соперник выступает в форме примитивного эмпирицизма Д.Ст.Милля [8]. Я утверждаю, что мы можем выйти за пределы этой пары неадекватных альтернатив через признание того, что математическое познание есть результат исторического развития.

2. Роль истории

Математическое знание не строится каждым поколением заново. В процессе

---

[7] Более детальное изложение см.:[3. Гл. 10] . Другие важные стороны этого эпизода изложены в [7] .

[8] Однако Милль был не так наивен, как некоторые его критики (особенно Фреге) пытались это представить. Более благоприятная оценка его взглядов дана в [8, 9]

обучения молодые математики воспринимают идеи, принятые предшествующим поколением. Если они начинают творческую работу в математике, то они могут изменить этот комплекс идей в такой мере, что это скажется в обучении ими их последователей. Подобно другим областям науки, математика строит новое знание на том, что уже достигнуто. Для философа математики, как и для философа науки, решающий вопрос состоит в том, чтобы идентифицировать те модификации в системе знания, которые ведут к новой системе знания.

Мы можем теперь наметить в общих чертах натуралистический образ математики. Наша постоянная система математических верований оправдана ее отношением к предшествующей системе верований; эта предшествующая совокупность верований оправдана ее отношением к еще более ранней системе. Разумеется, эта цепь должна быть где-то закончена. Здесь, может быть, мы открываем тип математики, относительно которого Миллль был прав, - систему рудиментарного математического знания, в котором люди убеждаются посредством чувственного опыта в ситуациях, где они манипулируют своей средой (к примеру, через оперирование небольшими группами предметов). То, что натурализм должен показать - это то, что современное математическое познание произведено из этого примитивного состояния посредством цепи рациональных переходов [9].

Наша предварительная задача состоит в том, чтобы смутные разговоры о "состояниях математического познания" заменить более точным образом единства математических изменений. Проблема формально параллельна той, которая стоит

---

[9] Здесь следует упомянуть два немаловажных обстоятельства. Во-первых, поскольку цепь является довольно длинной, кажется ошибочным подчеркивать эмпирический характер обоснования. Действительно, вроде бы можно допустить, что корни примитивного математического познания могут лежать так глубоко в предыстории, что наше первое математическое знание оказывается ровесником первому знанию, выраженному в суждениях, вообще. Таким образом, как мы представляем начало эволюции человеческого мышления (или мышления гоминид, или примитивного мышления) от состояния, в котором не было никакого знания в суждениях, к состоянию, в котором некоторые наши предки сформулировали определенные предложения, элементы математического знания могли возникнуть вместе с первыми элементами систем представления. Конечно, это выглядит чрезвычайно спекулятивно, но это должно служить нам напоминанием о том, что главная заслуга натуралистического подхода к математическому знанию состоит в понимании изменения в математическом познании; хотя натуралист заявляет, что математическое знание возникло в некоторого рода реакциях на среду, разумно предположить, что здесь имеется несколько возможностей и что этот аспект натуралистической теории познания является (для данного момента, а может быть и навсегда) малодоступным для разработки. (Я обязан Томасу Куну плодотворным обсуждением этого момента).

Во-вторых, для натуралиста нет необходимости верить, что все переходы, которые имели место в истории математики, были рациональными. Здесь могут быть временные ошибки в аргументах, которые математики приводят сначала при введении новых идей, также и доводы, на которые они указывают, могут быть неадекватными. Такие ошибки никак не входят в сферу нашего внимания, ведь позднее указываются верные доводы, и, значит, первоначальные мы можем понимать как эпизод, в результате которого математическая практика развивается некоторое время в форме, не имеющей оправдания, до настоящего оправдания, которое подготавливает основу для дальнейших переходов. Следовательно, возможно отклонение цепи рациональных межпрактических переходов от реального развития событий. Кажется вероятным, что именно это произошло в случае введения комплексных чисел, где первоначальные соображения за расширение языка математики были не очень строгими. Однако эйлеровское доказательство плодотворности нового языка в конечном итоге обеспечило непреложные мотивы для модификации, и "рациональная реконструкция", соответствующая натуралистической эпистемологии, будет отклоняться от хронологии, трактуя эйлеровский переход как существенное звено в цепи оправдания и игнорируя аргументы, первоначально выдвинутые Бомбелли.

перед философом, проясняющим рост научного знания, и решение ее тоже аналогично. В обоих случаях, как я понимаю, мы должны описать рост знания в терминах изменений в многомерном единстве - практике, которая состоит из нескольких различных компонентов [10]. Каждое поколение передает своим последователям свою собственную практику. В каждом поколении практика модифицируется посредством творческой работы в данной области. Если результат представляет собой новое знание, новая практика возникает из старой посредством рационального межпрактического перехода (rational interpractice transition).

Для того чтобы начать анализ, предположим, что математическая практика имеет пять компонентов: язык, используемый работающими математиками; множество утверждений, принятых этими математиками; множество вопросов, которые они рассматривают в качестве важных и еще не решенных; множество рассуждений, которые они используют для оправдания принятых положений; и множество математических взглядов, содержащих идеи о том, как следует делать математику, классификацию математических дисциплин и т.д. Я утверждаю, что мы можем рассматривать историю математики как последовательность изменений в математической практике, большая часть которых рациональна [11], и что современная математическая практика может быть связана с примитивной, эмпирически обоснованной практикой, цепью межпрактических переходов, каждый из которых рационален [12].

Вероятно, легче различить компоненты математической практики через рассмотрение иного, чем наше собственное, сообщества математиков. В качестве иллюстрации моего схематического изложения можно рассмотреть практику британского сообщества математиков около 1700 г., т.е. непосредственно после того, как ньютоновское дифференциальное исчисление стало доступным публике [13]. Это сообщество имело язык, в котором отсутствовали многие понятия, имеющиеся в современной математике, но который вместе с тем содержал понятия, которые мы уже не используем. Ньютоновские понятия флюксии, числа, ряда и функции имели, я думаю, иное содержание, чем то, которое вкладывают в них сегодня, хотя современные понятия подобны ньютоновским в определенных отношениях. Бри-

---

[10] Тот же самый подход полезен и для понимания проблем роста научного знания. Я рассмотрел два особенно важных случая в [10, 11]

[11] Строго говоря, не обязательно допускать рациональность большинства или даже каких-либо больших межпрактических переходов, которые действительно происходили в истории математики. Все, что здесь необходимо допустить, это то, что не имеющие оправдания скачки позднее оправдываются через накопление аргументов, поддерживающих практику, которая проистекает из этих скачков. В действительности, я думаю, что модификации практики в истории математики обычно делаются на основании разумных соображений, и, следовательно, я предполагаю такую трактовку текста. Однако вследствие того, что этот пункт истолковывался неправильно, представляется ценным сменить акцент одного заключения в замечании 10: натурализм, который я предлагаю, допускает различие между открытием и оправданием и не совершает здесь генетической ошибки.

[12] Часть этой работы сделано в [3. Гл. 10].

[13] Для исчерпывающего разъяснения того, как математические идеи Ньютона стали известны его современникам, см.: [12].

танские математики того времени принимали широкую совокупность утверждений о свойствах касательных к кривым, площадей под кривыми, движений тел и сумм бесконечных рядов. Многие из этих утверждений могут быть переведены в результаты, которые мы должны сегодня принять, хотя некоторые из предположений о бесконечных суммах приводят нас в недоумение. Математики ставили перед собой проблемы обоснования аналогичных утверждений для широкого класса кривых и траекторий; они не одобряли (как делали это сторонники Лейбница, их современники) общих вопросов о нахождении канонических алгебраических представлений для интегралов от произвольных функций или для сумм бесконечных рядов; проблемы, возникшие в алгебре, выводились за ее пределы и интерпретировались в терминах геометрии и кинематики. Члены сообщества были готовы оправдывать некоторые свои утверждения через представление геометрических доказательств, которые они рассматривали в качестве строгих синтетических демонстраций в стиле традиционной геометрии, но в некоторых случаях они были принуждены прибегать к рассуждениям, которые апеллировали к бесконечностям. Из-за существующих метаматематических взглядов рассуждения этого рода были отнюдь не идеальными. В ньютоновской концепции математики фундаментальными математическими дисциплинами являются геометрия и кинематика, и существует серьезная задача, состоящая в том, чтобы показать, как инфинитезимальные рассуждения могут быть переделаны или заменены рассуждениями в собственно геометрическом стиле.

Центральная часть натуралистического подхода к математическому знанию будет состоять в определении условий, при которых переход от одного вида практики к другому сохраняет оправдание. Как я неоднократно пытался показать (см. [3. Гл. 10]), только что описанная ньютонова практика могла быть связана с практикой математиков, занятых анализом в конце XIX в. серией переходов, каждый из которых должен быть признан рациональным. Но важно признать, что мои первые попытки в прояснении натурализма в отношении к этому примеру были несовершенными с точки зрения предъявления полной картины рациональных межпрактических переходов в математике. Мы можем оценить рациональность в развитии математического знания посредством описания эпизодов из истории математики в таком плане, который делает ясным их соответствие переходам в опытной науке (и в нашей повседневной смене убеждений), которые мы считаем рациональными. Теория рационального в математике (или более точно – в росте математики) должна развиваться через выявление принципов, которые лежат в основе интуитивных суждений, делая ясными основные условия, на которых покоится рациональность такого рода переходов.

Выявление связи между переходами в истории математики и переходами в истории естествознания дает нам возможность говорить о редукции эпистемологии математики к эпистемологии опытной науки. В обоих случаях важно различать два главных типа переходов. Первый тип оправдывает изменения в некотором компоненте (или компонентах) предшествующей практики только на основе состояния самой этой практики. Я буду называть такие переходы внутренними. Модификации второго типа, внешние переходы, обязаны своей рациональностью чему-то, находящемуся вне предшествующего состояния математики, некоторому новому опыту со стороны тех, кто производит изменения в других областях исследований. Есть соблазн думать, что естественные науки изменяются посредством внешних переходов и только через них и что математика растет исключительно на основе внутренних переходов. Это мнение должно быть отброшено. Теоретические науки часто изменяются в драматических попытках разрешить напряжения в преобладающей практике - вспомним первоначальные попытки Коперника разрешить проблему планет или развитие популяционной генетики в начале 30-х годов нашего века. С другой стороны, развитие математики иногда стимулируется развитием других наук или даже обычным опытом. Приведем лишь один пример: исследования в анализе в начале XIX в. были радикально изменены под влиянием проблем теоретической физики. Ниже я буду говорить о важности внешних переходов в математике более детально.

Правильная догадка, которая лежит в основе привлекательного, но упрощенного тезиса, состоит в том, что в действительности имеет место континуум случаев. Некоторые области знания развиваются преимущественно через внешние переходы, другие растут главным образом посредством внутренних. То, что обычно называется "чистой математикой", лежит на одном конце континуума; прикладные науки (к примеру, металлургия) лежат на другом. Мы должны понять тот факт, что здесь имеются различия в степени, не делая при этом ошибочного предположения о различиях в принципе.

Поскольку внутренние переходы, очевидно, важны для математики, полезно рассмотреть некоторые главные образцы математических изменений, исследовать, как они согласуются со схемой, которую я нарисовал, и посмотреть, как они экземплифицируются в истории математики. Нерешенные проблемы, приобретая существенную значимость, часто становятся стимулом для дальнейшего оформления некоторой ветви математики. Чтобы решить эти проблемы вводится новый язык, новые утверждения и новые способы рассуждений. Вновь изобретенный язык (по крайней мере в некоторых случаях) первоначально плохо понимается. Новый стиль рассуждения может казаться таинственным, и могут возникать обоснованные сомнения по поводу истинности новых утверждений. Однако, когда дело принимает хороший оборот, эти неясности в конце концов устраняются и совокупность ответов неожиданно систематизируется на принципах, которые соответствуют преобладающим метаматематическим критериям. В этом плане мы можем легко понять и основания, на которых возникают новые математические вопросы: как только введен новый язык или разрешены старые проблемы, становится рациональной попытка поставить новые, часто более общие, вопросы.

Можно обсудить много известных примеров, каждый из которых может рассматриваться в качестве внутреннего межпрактического перехода. Декартовское введение понятий аналитической геометрии было мотивировано способностью новых понятий и методов рассуждения дать ответы на геометрические вопросы, ответы, которые, по общему мнению, были правильными и более общими, чем ответы, полученные предшествующими математиками. Хотя язык дифференциального исчисления Лейбница представлялся таинственным, его защитники могли указывать на то, как это делал маркиз Лопиталь, что он позволяет им решить проблемы, "к которым прежде никто не осмеливался подступиться". Понятия, использованные Лагранжем, которые мы можем понимать теперь как предварение теоретико-групповых идей, были оправданы их способностью установить порядок в пестрой коллекции методов решения кубических и квадратных уравнений, которые были выработаны предшествующими поколениями математиков.

В каждом случае новое продвижение порождало новые проблемы. После Декарта стало рациональным искать технику для выражения сложных кривых алгебраическими уравнениями и для вычисления "функций" кривых [14]. Использованием бесконечных рядов Ньютон и Лейбниц породили целую серию математических вопросов. Какой ряд соответствует данной функции? Какова сумма данного бесконечного ряда? Этот процесс порождения вопросов иллюстрирует общий образец, который повторился бесчетное число раз в истории теории функций: если даны две схемы для представления функции, то можно спросить, как они соотносятся, в обычном случае через нахождение канонических представлений в хорошо обоснованных понятиях для функций, которые определены некоторым новым методом. Подобным же образом комбинация двух открытий в теории уравнений - доказательство неразрешимости в радикальных уравнениях 5-й степени и гауссовское доказательство, что циклическое уравнение $x^p - 1 = 0$ разрешимо, когда p - простое, привела к вопросу Галуа: "При каких условиях уравнение разрешимо в радикалах?"

Все эти эпизоды могут быть представлены в соответствии со схемой, которую я наметил, и если это осуществить, то межпрактические переходы можно признать рациональными. Этого достаточно для редукции эпистемологии математики к эпистемологии опытных наук. Но это только первый шаг к завершенной натуралистической эпистемологии. В конечном счете наши уверенные суждения о рациональности должны поддерживаться принципами, которые объясняют рациональность в переходах, которые мы одобряем. Вместо ответа скептику с использованием выявления деталей эпизода и обращений типа: "Смотрите! Разве не видите Вы, что то, что происходит, когда Галуа ставит эту проблему или когда Лейбниц вводит это рассуждение, происходит совершенно подобно тому, что происходит в большом числе ситуаций эмпирического исследования?"- мы должны стремиться к тому, чтобы идентифицировать эпистемически важные черты этих ситуаций и объединить их в общей теории рациональных межпрактических переходов, в теории, которая охватит как математику, так и эмпирическую науку.

Когда мы понимаем проблему и наши реальные возможности обсуждать ее в этом плане, мы должны понимать, что в настоящее время нет перспективы для объяснения трудных случаев. Рассмотрим современную ситуацию в обосновании теории множеств. (Теория множеств заслуживает того, чтобы быть предметом исследования для философов математики, даже если она не единственный такой предмет. Имеется несколько различных предложений для расширения стандартной совокупности теоретико-множественных аксиом. В идеале натуралистическая философия математики должна дать нам возможность разрешить ситуацию, выбрать, какая из альтернатив, если она вообще имеет место, должна быть реализована в теории множеств[15].

---

[14] Первоначальное происхождение понятия функции - геометрическое. Функции кривых - это такие вещи, как подкасательные, поднормали, радиусы, кривизны и т.д.

[15] Возможно, что математика должна рационально изменяться через одобрение более чем одной теории, так что должны быть альтернативные теории множеств, так же как есть альтернативные геометрии.

Если моя натуралистическая редукция философии математики правильна, тогда эта проблема определена, но, однако, не разрешена [16].

Математический натурализм, таким образом, устанавливает программу философского исследования. Априористы не стремятся найти ее, так как они предполагают, что подлинные источники математического знания лежат где-то в другом месте (но при удаче натуралистический вызов может побудить их быть более точными в указании, где именно). Однако даже те, кто присоединяется ко мне в критике априоризма, могут утверждать, что натурализм ошибочен, ибо они могут испытывать серьезные затруднения в понимании рациональности математики - или из-за скептицизма относительно рациональности опытных наук, или вследствие убеждения, что условия, которые определяют рациональность в опытных науках, отсутствуют в математике. Такой оппонент говорит: "Натуралистическая реконструкция математического познания должна состоять в особом изложении эпизодов из истории математики, в изложении, предназначенном для того, чтобы дать нам уверенное представление об инновативных идеях больших математиков". Но почему знание мы должны считать конечным продуктом? Что содержится в этих переходах такое, что позволяет нам удостаивать их названием рациональных? Даже если бы мы имели определенное множество принципов, которое оправдывали бы образцы межпрактических переходов, по отношению к которым эта характеристика принята, то обязанностью натуралиста должно было быть еще объяснить, почему эти образцы получили преимущественный эпистемический статус.

Здесь налицо сплетение проблем, среди которых и родственный юмовскому вопрос об основаниях методологических принципов. В конце этого очерка я попытаюсь поставить эти проблемы, показав, что они могут помочь нам прояснить натуралистическую установку и получить некоторые интересные и неожиданные выводы.

3. Виды рациональности

Тот, кто выдвигает теории роста научного знания, должен решить две главные проблемы. Первая из них, проблема прогресса, требует установления условий, при которых в данной области исследований осуществляется прогресс. Вторая проблема, проблема рациональности, требует установить условия, при которых данная область науки развивается рационально. Каждый согласится с тем, что эти проблемы тесно связаны. Для области знания, которая развивается рационально, переходы между состояниями исследований в различное время должны предлагать те, кто делает эти переходы наиболее приемлемой стратегией для осуществления прогресса. Рациональность, как отмечалось несчетным числом философов, состоит в соответствии средств и целей. Наши обычные суждения о ра-

---

[16] Пенелопа Мedди оспаривает, что натуралистический подход к математическому знанию может дать нам возможности решать современные проблемы в основаниях теории множеств (см.: [13]). Я думаю, что она ожидает здесь слишком многого. Первоначальная задача натуралистической эпистемологии, предпринятая в [3], - интегрировать математическое познание в натуралистических понятиях. Последующий проект должен дать достаточно детализированную концепцию научной методологии, допустимую для разрешения трудных случаев. Последнее представляет собой обширную проблему характеризации научной рациональности.

циональности в дискуссиях о научных изменениях или росте знания неявно предполагают, что эти цели имеют эпистемический характер. Когда мы приписываем рациональность некоторому сообществу ученых в прошлом, мы рассматриваем, как люди в их ситуации должны действовать лучше всего, чтобы достичь тех целей, которыми направлялось все исследование, и признаем соответствие между тем, что действительно делалось, и нашим предполагаемым идеалом.

Итак, я начну с общего тезиса, который одинаково приложим как к математике, так и к опытным наукам. Межпрактические переходы считаются рациональными постольку, поскольку они максимизируют шансы на достижение целей исследования. Понятие рациональности, которое я обсуждаю, абсолютно. Я предполагаю, что имеются некоторые цели, которые доминируют в контексте исследования, отличные от целей, которые служат лишь в качестве придорожных камней на пути к еще более далеким целям. В чем состоят эти цели? Кто (или что) устанавливает возможность достижения их? Каким путем можно максимизировать шансы? Наконец, имеются ли специальные математические цели, или математика только служит нам в наших попытках достичь решения более общих задач?

Следуя Канту, я принимаю, что имеются цели рационального исследования и что быть рациональным исследователем - значит быть существом, которое стремится достичь этих целей [17]. Цель, которую я выделяю в качестве окончательной, состоит в достижении истины и в приобретении понимания. Если Вы спросите математика, почему определенный стиль доказательства принимается всеми или почему определенная систематизация математического знания принята, то Вам, скорее всего, скажут, что данный образец доказательства соответствует нашей задаче получения истинных следствий и что предпочтенный способ аксиоматизации обеспечивает понимание структуры математической теории, которую она систематизирует. Подобные же ответы можно ожидать, если мы поставим вопрос о ценности определенных математических понятий или о необходимости некоторых математических вопросов: первые помогают нам понять взаимосвязи во множестве математических утверждений, последние говорят о пробелах в нашем понимании. Но если мы зададим вопрос о том, почему мы заинтересованы в истинных заключениях или в понимании, мы можем ответить только, что истина и понимание представляют собой цели исследования.

Цели рационального исследования не единственные наши цели и, следовательно, они не полностью определяют рациональное развитие математики. Наши цели включают также задачу обеспечения благосостояния настоящих и будущих членов нашего общества (и, может быть, представителей других видов тоже), сохранение свободы и справедливого социального порядка и т.п. Связи между ростом науки и этими практическими целями обычно незаметны и косвенны, а связи с математикой еще более опосредованы, и тем не менее, если необходимо оправдать исследование конкретной совокупности математических проблем, мы можем ответить, что эти проблемы возникли в контексте определенного исследования в эмпирических науках. Исследование в эмпирических науках, в свою очередь, могло быть мотивировано стремлением к рациональным целям эмпирического знания - к большему пониманию некоторых сторон универсума, скажем структуры

---

17 Здесь я придерживаюсь интерпретации Канта, которую я развил в [14]. Я должен заметить, что моя интерпретация является еретической, поскольку я отбрасываю априористскую линию в кантовском мышлении.

материи или тайн в поведении животных. Оно также может быть оправдано своим вкладом в практический проект обеспечения постоянной доставки пищи для группы людей или улучшение передачи информации или ресурсов в мире. Наконец, этот практический проект, в свою очередь, может быть прямо связан с нашими непосредственными практическими задачами.

Мое разграничение целей рационального исследования и практических целей явно имеет отношение к предыдущему различению внутренних и внешних рациональных межпрактических переходов. Более точно, внутренний межпрактический переход рационален благодаря достижению целей рационального исследования в математике. Внешний межпрактический переход рационален благодаря достижению им целей рационального исследования в некоторой другой области знания, или некоторых практических целей [18].

Когда мы рассматриваем рациональность в математике и в науке как проблему соответствия средств целям, тогда становится очевидным, что суждения о рациональности крайне неопределенны. Я хочу различить четыре главных смысла.

1. Индивидуальная эпистемическая рациональность: индивид эпистемически рационален, когда он организует практику так, чтобы максимизировать вероятность достижения своих эпистемических целей.

2. Индивидуальная общая рациональность: индивид рационален вообще, когда он организует практику так, чтобы максимизировать вероятность достижения полной совокупности своих целей.

3. Эпистемическая рациональность сообщества: сообщество эпистемически рационально, когда распределение практики внутри его максимизирует вероятность того, что сообщество достигнет в конце концов своих эпистемических целей.

4. Всеобщая рациональность сообщества: сообщество рационально вообще, когда распределение практики внутри его максимизирует вероятность того, что сообщество в конце концов достигнет полной совокупности своих целей.

Я утверждаю, что эти понятия рациональности совершенно различны и что важно знать, какое из них мы имеем в виду, прежде чем говорить об исследовании рациональности в математике или каких-либо других науках [19].

Чтобы понять различие между перспективами индивида и сообщества, рассмотрим следующий пример. Работающие в науке ищут ответы на определенные вопросы, в отношении к которым применимы различные методы. Рассматривая возможное решение для каждого индивидуального ученого, мы быстро приходим к заключению, что если имеется один метод, который по общему признанию с большей вероятностью может привести к решению, то каждый ученый должен избрать этот метод. Однако, если все методы в общем сравнимы, тогда, с точки зрения сообщества,

---

[18] Разумеется, внешние переходы могут породить новые ветви математики, которые затем подчиняются внутренним межпрактическим переходам. Если верить популярным анекдотам о Паскале и Эйлере, то теория вероятностей и топология могли возникнуть таким путем.

[19] Здесь, очевидно, можно провести большое число дальнейших различий, ибо мы можем наметить различные подходы к достижению максимизации. Это особенно ясно в случаях, когда наши задачи допускают степени, так что мы можем сопоставлять максимизацию ожидаемой ценности с минимизацией риска потери определенной ценности и т.д. Я игнорирую такие детали для целей настоящего обсуждения.

имеет место некоторая сделка. Каждый индивид должен предпочесть ситуацию, при которой он относился бы к сообществу, в котором используется полный набор методов. Следовательно, с точки зрения членов общества, рациональный переход от первоначальной ситуации должен быть таким, чтобы общество раскалывалось на подгруппы, каждая из которых однородна в отношении метода исследования. Интуиция подсказывает, что цели сообщества могут быть лучше достигнуты, если некоторые из его членов действуют против своих собственных эпистемических интересов [20].

Хотя, как может показаться, изложенные соображения имеют мало общего с ростом математического знания, они дают нам возможность устранить важный тип расхождений среди историков и философов математики. Рассмотрим различные исследовательские стратегии, реализуемые британскими и континентальными математиками в годы после диспута о приоритете между Ньютоном и Лейбницем [21]. Лейбницианцы твердо стояли за использование алгебраической техники, они существенно расширили круг проблем анализа и отложили задачу строгого обоснования своих понятий и методов. Их позиция нашла ясное выражение не только в призыве Лейбница к своим последователям расширять сферу его методов, не беспокоясь слишком много о том, что могут значить эти весьма темные алгебраические маневры, но также и в принятии результатов, относящихся к бесконечным рядам, которые новое поколение математиков должно было отбросить как ошибочные [22]. Поскольку задача обоснования новой математики существовала, лейбницианцы, как кажется, должны были думать, что истинный путь для прояснения их понятий и рассуждений должен появиться на базе усовершенствования новой техники. В ретроспективе мы можем сказать, что их уверенность была оправдана.

Напротив, последователи Ньютона были глубоко обеспокоены значениями символов, которые они использовали в решении геометрических и кинематических проблем. В своих математических работах они отказывались признавать вопросы и методы рассуждения, которые не выражались в геометрических терминах, и сосредоточили свое внимание на проблеме изобретения ясных и убедительных демонстраций элементарных правил дифференцирования и интегрирования. Некоторые идеи, которые были выдвинуты в их работах, в конечном итоге стали центральными в анализе и в его реконструкции, предложенной Коши [23].

---

[20] Я думаю, что в случаях этого типа может быть показано, что рассмотрение практических интересов индивидов обнаруживает, что оптимум для сообщества достигается с большей вероятностью, если индивиды мотивируются неэпистемическими факторами. Другими словами, необходимым условием для эпистемической рациональности сообщества может быть отказ некоторых индивидов от индивидуальной эпистемической рациональности. Однако, возможно, что эти индивиды вообще рациональны. Нечто подобное утверждалось Куном (см. [15]).

[21] Краткое изложение см в [3. Гл. 10] , а более детальное в [16] .

[22] Особенно ясным примером является выработанный в дискуссии среди лейбницианцев "результат", что $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2$ (см. [17]).

[23] Важными фигурами в этой последовательности являются Бенджамин Робинс, Колин Маклорен и Симон Уиллер. Пример Маклорена дает ясный контраст с континентальной традицией. Сравнивая "Трактат о флюксиях" с любым томом эйлеровских работ по анализу, мы видим двух талантливых (хотя и не одинаково талантливых) математиков, занятых разработкой совершенно различных проблем. Маклорен снова и снова возвращается к вопросу нахождения объяснений для основных правил ньютоновского исчисления. Эйлер обосновывает богатые результаты, относящиеся к интегралам, рядам, проблемам максимизации и т.д., и почти не обращает внимания на основные алгоритмы дифференцирования и интегрирования.

Теперь мы зададим вопрос: "Какое из этих направлений, если таковое вообще было, было рациональным?" Прежде чем давать ответ, важно осознать различения, проведенные выше. Когда мы требуем индивидуалистической оценки рациональности соперничающих межпрактических переходов, мы, как кажется, вовлекаем себя в трудный анализ затрат и прибылей. В первом приближении мы можем рассматривать обе группы математиков как нацеленные на два типа эпистемических задач: увеличение количества ответов на вопросы и понимание этих ответов, понятий, которые они содержат, и методов, посредством которых они получены. Ньютонианцы в первую очередь подчеркивали необходимость ясности, считая, что надежность результатов в решении проблем будет обоснована тогда, когда понятие и рассуждение хорошо осмыслены. Лейбницианцы предполагали, что средства прояснения возникнут как раз тогда, когда будет исследовано широкое поле проблем. Каждая традиция связана с риском. Каковы ожидаемые затраты и прибыли?

Те, которые так же, как я, нелегко приписывают рациональность одной традиции и отрицают ее у другой, имеют первую очевидную оценку ситуации. Они могут предположить, что указанные альтернативные стратегии первоначально были так близки в плане объективной ценности, что было совершенно разумно реализовать каждую из них. Следовательно, не может быть никакого осуждения ни ранних ньютонианцев, ни ранних лейбницианцев. Ни одна из групп не вела себя иррационально. Однако это предположение неудовлетворительно как безусловное, ибо его трудно применить к оценке дальнейшего развития ньютоновской традиции после того, как стало очевидным, что "континентальный" подход, идущий от Лейбница и Бернулли, обеспечил достижение решения большого числа проблем, которые рассматривались в качестве важных также и ньютонианцами (проблемы, которые нелегко интерпретировались в геометрических и кинематических терминах, хотя техника, используемая для их решения, не допускала такой интерпретации). Более того, историки, которые любят подчеркивать роль социальных факторов в развитии науки, отметят, и совершенно справедливо, что национальная гордость британских математиков и наследие спора о приоритете в разработке исчисления играли важную роль в продолжающейся оппозиции к континентальной математике.

Я полагаю, что мы можем понять, почему британские математики упорно настаивали на использовании ограниченных и часто темных геометрических аргументов, если мы признаем широкий набор целей, за достижение которых они боролись. Среди этих целей было и упрочение известности и оригинальности британской математики, и мы можем понять, что эта цель стала особенно важной после принятия ганноверского наследника и после остроумного вызова, брошенного Беркли, основаниям ньютоновского исчисления [24]. Более того, прежде чем сожалеть о факте, что некоторые последователи Ньютона в 1740 и 1750 гг. были захвачены такими неэпистемическими интересами, как национальная гордость, мы должны взвесить ту возможность, что ограничение разнообразия точек зрения (чего шовинизм иногда может достичь) может способствовать достижению эпистемических целей сообщества. Цель - способствовать принятию истины и пониманию - в математическом сообществе как целом. была в конце концов достигнута

[24] Вызов, сделанный Беркли в "Аналисте" (см. [18]), получил несколько ответов. Некоторые из них были заведомо несостоятельными (к примеру, очерк Джеймса Джурина), другие же помогли прояснить некоторые важные идеи Ньютона (работа Маклорена, и, еще более, статьи Бенджамина Робинса).

в XIX в. вследствие того, что обе традиции сохранились живыми в XVIII в. Если, как я подозреваю, одна из этих традиций поддерживалась тем, что некоторые математики были стимулированы неэпистемическими интересами, тогда, может быть, мы должны предусмотреть возможность того, что отклонение от индивидуальной эпистемической рациональности свидетельствует о наличии установки в сообществе ученых, которая способствует достижению эпистемической рациональности сообщества. Рациональное сообщество ученых будет искать пути эксплуатации общей индивидуальной рациональности в интересах максимизации шансов на то, что сообщество реализует свои эпистемические цели [25].

Если мы ограничим себя понятием индивидуальной эпистемической рациональности и будем искать ее повсюду в истории математики (и в науке вообще), поиски рациональности в такой истории сведутся к виговской попытке распределить золотые звезды и черные ярлыки. Общая форма межпрактического перехода более сложна, чем мы могли себе представить, и историография математики должна отразить эту сложность. Мы должны понять, что сообщество математиков первоначально распределяется на несколько внутренне однородных групп, которые реализуют различную практику. В некоторых случаях требования, выдвигаемые членами этих групп, будут несовместимыми (ньютонианцы против лейбницианцев, Кронекер и его ученики против Дедекинда и Кантора, агрессивные конструктивисты против математиков-классиков). В других случаях они будут просто различными. Межпрактический переход может изменять практику группы, структуру группы или то и другое вместе. Такие межпрактические переходы могут быть рассмотрены в плане обсуждения: a) максимизируют ли они шансы, что ученые, которые участвуют в них, достигнут реализации своих индивидуальных эпистемических целей; b) максимизируют ли они шансы, что эти ученые достигнут реализации полной совокупности своих целей при условии что некоторые эпистемические цели принесены в жертву неэпистемическим целям; c) максимизируют ли они шансы на то, что сообщество реализует свои эпистемические цели; d) максимизируют ли они шансы на то, что сообщество реализует свою полную совокупность целей, в случае, если эпистемические цели будут принесены в жертву неэпистемическим. Кроме того, в отношении к каждому из этих случаев мы можем сосредоточиться на эпистемических целях, которые имеют внутриматематический характер, или посмотреть, вовлечены ли сюда также задачи других сфер исследования и где (b) и (c) имеют место одновременно, мы можем исследовать установки (institutions) внутри математического целого, которые способствуют достижению эпистемических целей сообщества за счет индивидуальных.

Я намеревался подчеркнуть большое разнообразие вопросов, которые возникают в истории математики, как только мы принимаем натуралистическую точку зрения, которую я наметил и которую мы расширили посредством дифференциации понятия рационализации. Насколько мне известно, эти вопросы фактически остаются без ответа практически для всех существенных переходов в истории математики.

---

[25] Ясно, что это просто часть долгой и сложной истории. Цель ее изложения здесь состоит в том, чтобы показать, что упрощенная историография не навязывается нам размышлением о рациональности математических изменений (я благодарен Лорейн Дестон за некоторые глубокие замечания, которые поставили передо мной проблему: обязывают ли меня мои описания рациональности математиков прошлого к истории Вигга (см.: [19]).

4. Цели исследования

Я не пытался пока дать ответ на вопрос об эпистемических целях исследования. Неясность провоцирует новые вопросы. Являются ли эти эпистемические цели внутренне присущими математике? И если да, то что они из себя представляют? Другими словами, что мы считаем прогрессом в математике? Как эпистемические цели математики, если они есть, соотносятся с эпистемическими целями других областей исследования и с неэпистемическими (практическими) целями? Эти вопросы важны для натуралистической философии математики. Я постараюсь показать, что они связаны с вопросами, которые должны волновать историков математики и даже профессиональных математиков.

Сравним парадигмальные случаи внутреннего и внешнего межпрактических переходов. В первом случае представим себе, что группа математиков вводит новое понятие или новую аксиому с единственной целью - улучшить понимание имеющихся математических фактов. В последнем - предположим, что математики решили обратить особое внимание на методы решения сложных дифференциальных уравнений, имеющих важные приложения, или усовершенствовать широкоиспользуемую технику приближений, которая позволяет решить практические проблемы в рамках допустимых ошибок. В том и другом случае мы можем одобрить переход из-за его вклада в достижение некоторой цели. Однако такое одобрение совместимо с критикой с более общих позиций. Этот переход может быть воспринят как нарушение равновесия между нашими эпистемическими и практическими (или, более точно, экстраматематическими) целями: успех в понимании был достигнут ценой отказа от достижения более важных задач, а забота о практических приложениях заслонила более важные эпистемические интересы.

Новая история математики показывает, что критика может идти как по первому, так и по второму пути. Критики поствейерштрассового анализа (и программ преподавания на математическом отделении Кембриджа, на которые он оказывал влияние в течение почти всего нашего века) могли допускать, что внимание к решению усложненных проблем, включающих специальные функции (введенных в математику из-за их значения для определенных проблем физики)[26], отвлекает от углубленного понимания фундаментальных теорем. Критики современной математики могут утверждать, что привычка достижения максимальной общности и включение классических результатов в возможно более широкий контекст ведет к накоплению стерильных исследований, которые могли бы быть оставлены в пользу проектов, более тесно связанных с задачами естествознания и повседневной жизни.

Чтобы сформулировать эти вопросы более определенным образом, мы нуждаемся в решении проблемы прогресса в математике. Мы должны знать эпистемические задачи, к которым стремится математика. Начнем с либеральной концепции прогресса. Согласно этой концепции, мы должны различать эпистемическую и прагматическую оценки. Мы прогрессируем, пока мы увеличиваем сумму знания любым путем. Может быть, некоторые приобретения более полезны для продвижения к полной совокупности наших целей, но это является чисто практическим вопросом.

---

[26] См. [20] , где даются некоторые превосходные примеры влияния физических проблем на анализ конца XIX в.

Либеральная концепция предполагает, что наше одобрение обоих парадигмальных случаев не должно сдерживаться критицизмом. Чтобы понять, может ли быть поддержана такая позиция, нужно выяснить, какие тезисы онтологии математики согласуются с натуралистическим подходом. Имеется вариант онтологического платонизма, который согласуется с почти всеми моими требованиями к математическому познанию. Согласно этому варианту, математическое познание начинается в доисторические времена со схватывания тех структур, которые заключены в повседневных физических явлениях. В простейшей версии – мы воспринимаем свойства небольших конкретных множеств (т.е. множеств, элементами которых являются физические объекты) [27]. Математика развивается через систематическое исследование абстрактных сфер, для которых наш рудиментарный чувственный опыт дает первоначальную опору. Эти исследования поправляются дальнейшим опытом, через использование математики в эмпирических науках и через попытки объяснить и систематизировать совокупность результатов, которые получены. Платонисты могут легко принять мои рассуждения о рациональных межпрактических переходах, рассматривая их как исходный пункт в признании других аспектов в сфере абстрактных объектов.

Математические натуралисты, которые являются также и платонистами, могут с готовностью привести различие прагматических и эпистемических оценок. Задача математика – начертить карту платоновских небес, а приобретение всякой "географической" информации обеспечивает прогресс [28]. В некоторых случаях (включение классических результатов в абстрактный и в высшей степени общий контекст) мы можем узнавать об абстрактных свойствах этих небес, которые имеют мало ценности для наших путешествий по земле. В других случаях (открытие техники решения специальных классов дифференциальных уравнений) мы можем узнать детали, обладающие полезностью, но меньшей общей значимостью. Пока мы продолжаем накоплять истины, вопрос о прогрессе не стоит.

Но я думаю, что можно поставить под сомнение либеральный взгляд на прогресс, даже внутри платоновской перспективы. Те, кто истолковывает естественные науки как стремящиеся к истине, не допускают, что всякое накопление истин составляет научный прогресс: незначительные истины обычно не учитываются [29]. Таким образом, моя позиция не в том, что натуралистический платонизм принуждает нас принять либеральную концепцию прогресса, но в том, что платонизм представляет собой один из путей выработки либеральной концепции. Однако я хочу бросить более радикальный вызов. Я утверждаю, что мы должны отвергнуть платонистский взгляд на онтологию математики, заменив его картиной, не допускающей различия между прагматической и эпистемической оценками, на котором зиждется либеральная концепция.

Многие причины неудовлетворенности платонизмом известны. Чем гарантируется ссылка на математический объект? Каким образом ощущения обеспечивают нас знанием о таких объектах? Хотя эти вопросы могут быть смягчены допущени-

---

[27] См. [21] . Родственные взгляды были разработаны в [22] .

[28] Географическая аналогия идет от Фреге, см. [1. С. 108] .

[29] Это пункт, который был подчеркнут Карлом Поппером (см., к примеру, [23], в попперовской традиции это ведет к известным проблемам конструирования меры правдоподобности (для обзора см. [24] и [25]), которая может быть преодолена, если мы отбросим чары идей, что исследование в смысле важности есть всегда исследование в смысле общности. Но это сюжет для другого случая.

ем, что мы первоначально ссылаемся на конкретные множества и познаем их, но и тогда остается таинственным, как мы в конце концов приобретаем способность оперировать абстрактными множествами и познавать их [30]. Другое сомнение возникает в контексте натуралистического истолкования математического знания. Подобно другим теоретическим реалистам, платонисты должны объяснить, каким образом наша способность систематизировать совокупность результатов обеспечивает базис для веры в существование непосредственно непознаваемых сущностей. Непросто понять, каким образом догадка Лагранжа о возможности сохранения определенных выражений инвариантными в перестановке корней должна конструировать признание существования до сих пор неизвестных математических объектов, а именно групп.

Общая проблема понимания исторических переходов, которые представляются обнаружением обитателей платоновских небес, возникает с умноженной силой, когда мы рассматриваем особый тип межпрактических переходов, обычный в математике: разрешение очевидной несовместимости через переинтерпретацию альтернатив. Когда математики установили, что неевклидовы геометрии непротиворечивы, традиционный язык геометрии был перестроен. С платоновской точки зрения были открыты новые объекты - неевклидовы геометрии и их конституэнты. Напротив, разрешение несовместимости в опытных науках часто происходит через устранение ранее принятых сущностей. Революция в химии не привела к одновременному допущению теории горения Лавуазье и теорий горения другого типа.

Переоценка последнего примера может способствовать конвенционалистскому убеждению, что математика состоит в выведении следствий из произвольно выбранных соглашений и что история математики раскрывает становление конвенций, которые интересовали математиков прошлого. Это крайняя реакция на западню платонизма. Межпрактические переходы обычно содержат необходимые модификации предшествующих понятий, способов рассуждения, проблем и утверждений. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти онтологию математики, которая позволит нам избежать предположения, что практика изменяется в соответствии с прихотью момента, не следуя при этом тому, что эти изменения состоят лишь в раскрытии истины о платоновских небесах.

Я всегда утверждал, что эта проблема может быть разрешена, если мы будем понимать математику как идеализированную науку о человеческих операциях [31]. Предмет математики в конечном итоге - способ, которым человеческое существо структурирует мир путем или операций грубых, физических, или операций мысленных. Мы получаем идеализированную науку о человеческих физических

---

[30] Так, к примеру, вывод, предложенный Медди в [21], представляется в лучшем случае достаточным, чтобы раскрыть, каким образом мы способны оперировать конкретными множествами и познавать их. Не совсем ясно, как это знание может дать нам основу познания абстрактных объектов, где больше нет причинного взаимодействия с предполагаемыми объектами. Так, если мы даже допустим, что наше причинное отношение к объекту обеспечивает нас базой для познания множества, единственный элемент которого - сам этот объект, то трудно понять, как мы получаем подобную основу, когда рассматриваем множество, которое не имеет конкретных объектов в качестве элементов.

[31] Эта глава часто истолковывалась неверно, и я был принужден заменить один вид идеальных объектов (идеальные тела) на другой (множества). Но я взял на себя труд подчеркнуть, что идеальные тела существуют не в большей степени, чем такие вещи, как идеальные газы. И в теории идеальных газов, и в математике мы рассказываем сказки, предназначенные для того, чтобы осветить устойчи-

и интеллектуальных операциях через рассмотрение всех путей, посредством которых мы можем собрать и упорядочить конституэнты нашего мира при условии освобождения от ограничений времени, энергии и способностей. Один из способов сформулировать содержание этой науки состоит в том, чтобы понять математику как совокупность отчетов о действиях идеального субъекта, которому мы приписываем особые возможности структурировать окружающий нас мир.

Это утверждение преодолевает конвенционализм наложением ограничений на представления, которые мы выдвигаем, когда осуществляем прогресс в математике. Некоторые представления элементарной математики достигают своей эпистемической цели прямой систематизацией операций, которые оказывается возможным совершить с физическими объектами (или мысленными представителями таких объектов). Другие достигают эпистемической цели, отвечая на вопросы, которые возникают из представлений, достигших эпистемической цели, или систематизируя результаты, полученные внутри концепций, которые достигли эпистемической цели. В конечном итоге здесь должна быть связь с операциями в окружающем мире. Тем не менее, было бы неправильным думать о всей структуре математики как о попытке систематизировать и прояснить указанные операции, которые зафиксированы в начальных представлениях о предмете, ибо в некотором существенном смысле, математика производит свое собственное содержание. Новые формы математических обозначений не только дают нам возможность систематизировать математические утверждения, которые уже получены, и расширить сферу их действия, но также и выполнить новые операции или исследовать возможности, которые способен осуществить некто, освобожденный от определенных физических ограничений. Такое расширение нашей деятельности, как мне кажется, произошло с развитием обозначений для представления морфизмов на группах и для конструирования множеств от множеств. В обоих случаях обозначения являются основой для итерации операций, которые мы не можем без них осуществить [32].

Это положение (которое я буду называть натуралистическим конструктивизмом) разрешает трудности платонизма. Теперь не возникает вопроса о надежной ссылке на какие-то другие сущности, кроме непроблематичных, а именно на операции, которые мы совершаем или признаем возможным совершить, а также и вопроса о достижении таких сущностей через чувственное познание. Переходы, совершающиеся в истории математики, рассматриваются как непосредственная ценность: она состоит во введении понятий, утверждений, проблем и способов рассуждений как частей конструкций, помогающих нам понять операции, которые мы способны совершить в нашем мире; в некоторых случаях активность выработки этих конструкций сама производит новые типы операций, которые становятся предметом исследования для следующего поколения математиков. Наконец, примеры, в которых очевидное несоответствие разрешается через переинтерпретацию,- это

вые факты хаотической реальности. Я надеюсь, что мой упор на идее рассказывания сказок предупредит всякие недоразумения в этом пункте.

[32] См. [3. С. 128–129] . Важно понять, что некоторые формы конструктивной активности человека состоят в достижении представления объектов - как тогда, когда в соответствии с некоторым образцом, мы классифицируем объекты в мысли. Мое утверждение состоит в том, что использование различных типов математических обозначений, предназначенных описывать свойства различных конструкций, делает возможным новую конструктивную активность. Таким образом, мы имеем конструктивные операции, которые итерируются иногда к совершенно головокружительной сложности, через использование обозначений.

случаи, в которых прояснение того, что достигнуто, получается через включение в ряд альтернатив того, что представлялось единственно возможной конструкцией.

Натуралистический конструктивизм интересным образом пересматривает понятия оправдания и истины. Сказать, что математическое утверждение истинно - это выдвинуть утверждение о силах, которые приписываются идеальному субъекту (или, в более общем плане, выдвинуть утверждение об эффекте, который данное утверждение производит в теории, о которой, собственно, идет речь). Значение слова "собственно" сводится здесь к тому, что в границах развития рационального математического исследования наша математическая практика содержит это утверждение. Истина есть то, что рациональное исследование произведет в результате.

Мы теперь можем понять, почему натуралистический конструктивизм устраняет различие между прагматической и эпистемической оценками. Под "пределом развития рационального математического исследования" мы подразумеваем состояние, к которому математика стремится, если мы позволяем нашей полной совокупности исследований идти своим путем и руководствоваться процедурами, предназначенными максимизировать шансы на достижение наших целей. Поскольку нет никакого независимого понятия математической истины, единственная эпистемическая цель для математики - это понимание достигнутых математических результатов. Математика развивается автономно через попытки систематизировать всевозможные требования о наших возможностях упорядочивать и соединять, которые были достигнуты раньше (включая те, которые сделались возможными для нас благодаря активности самой математики), и она неизбежно зависит от других наук и от практических проблем материала, на котором ей предстоит работать. Иначе мы можем сказать, что цель математики состоит в том, чтобы внести систему и понимание в физические и интеллектуальные операции, которые мы считаем важными для реализации, так что объем и содержание математики в конечном итоге диктуется нашими практическими интересами и эпистемическими целями других наук.

Если это так, то эпистемическая оценка в математике неизбежно включает прагматическое рассмотрение. Не только законно реформировать здание математики на основе того, что она не отвечает нашим прагматическим целям, но даже и бессмысленно защищать такую математику, так как она - "бесполезное знание". Только один тип бесполезного знания имеет право на существование в математике: это утверждения, которые сами по себе не имеют практических выходов, но способствуют пониманию практически важных результатов. Это не значит, что Харди ошибался, когда прославлял бесполезность результатов теории чисел. Но если он был прав, то должна быть цепь состояний математической практики, достигающая завершения в рафинированных абстракциях теории чисел, начинающаяся с материала истинного практического значения, и такая, что каждый ее член служит для прояснения предыдущего.

Математический прогресс, короче говоря, состоит в конструировании систематических и идеализированных представлений об операциях, которые люди находят полезными для организации собственного опыта. Некоторые из этих операций представляют собой примитивные манипуляции, с которых начинаются элементарные арифметика и геометрия. Другие операции впервые осуществляются путем развития математических обозначений и затем используются как средство для научной организации некоторых сфер опыта. Но нет никакого независимого понимания математической истины и математического прогресса, которое стоит отдельно от рационального направления исследований и достижения математических целей, как эпистемических, так и неэпистемических.

Теперь я могу сделать радикальный вывод. Эпистемическое оправдание здания математики должно показать, что вся совокупность полученных нами утверждений способствует либо целям науки, либо практическим целям. Если часть этих утверждений может быть устранена без потери понимания и полезности, то мы не имеем эпистемического оправдания для ее сохранения. Если имеется различие между математикой как искусством и математикой как познавательным орудием, именно здесь оно должно быть проведено [33]. Проведение этого различия должно быть результатом развития полной теории рациональных межпрактических переходов как в математике, так и в эмпирических науках.

5. Перспективы

В "Природе математического знания" я сосредоточил внимание на внутренних переходах и на индивидуальной эпистемической рациональности. Мой замысел состоял в том, чтобы показать, что имеют место важные и непризнанные закономерности развития математики и что эти закономерности лежат в основе нашего познания тех положений философии, которые часто рассматривались в качестве оснований математического познания. Теперь я думаю, что позиция, которую я тогда занимал, была в нескольких отношениях слишком консервативной.

Во-первых, требуют большего внимания внешние межпрактические зависимости. Как я утверждал выше, математика зависима от других наук и от нашей практической заинтересованности в понятиях, которые используются при конструировании математических образов. Неверно было бы думать, что систематизация какой-либо ветви математики может происходить вне путей, которыми родственные области связаны с внешними требованиями. Гамильтон думал, что обобщение утверждений о комплексных числах должно быть необходимо продуктивным проектом. В конечном итоге сфера исследований, в которой он работал, была решительно изменена в результате попыток подойти к понятиям с точки зрения проблем математической физики. Векторная алгебра и анализ предложили перспективу, с точки зрения которой длинные выводы трудных свойств кватерионов оказались ненужными [34].

Во-вторых, история математики, подобно истории других наук, нуждается в

---

[33] Математики иногда обыгрывают идею, что математика есть искусство или подобие искусства. Одно из следствий моей натуралистической эпистемологии в том, что она дает возможность понять, в чем значение этой идеи и как она может быть применена к различным частям математики.

[34] Так как кватернионы вышли сейчас из моды, то может показаться, что этот пример не подкрепляет мои утверждения. Однако то, что теперь делается с кватернионами, совершенно отлично от того, что делал Гамильтон. Для Гамильтона кватернионы должны были использоваться в том же плане, в котором до этого использовались действительные и комплексные числа. Достаточно указать только на один пример, где Гамильтон ставит задачу определения логарифма кватерниона. Насколько мне известно, эти соображения далеки от контекста настоящего обсуждения.

рассмотрении как с точки зрения индивидуальной перспективы, так и с позиций перспективы сообщества. Мы должны задавать вопросы не только о причинах, вследствие которых люди изменяют свои взгляды, но и о формах, в которых сообщество использует наши особенности, чтобы вести нас к целям, которые мы в другом случае упустили бы. Как я уже отмечал, реализация более чем одной исследовательской программы продвигает эпистемические проекты сообщества, несмотря на тот факт, что это требует от некоторых членов сообщества действий, противоречащих их индивидуальным эпистемическим интересам. В этой связи уместно рассмотреть вопрос о том, имеется ли в математике достаточно побудительных мотивов для поощрения разнообразия.

В-третьих, наличествуют серьезные проблемы баланса в достижении эпистемических и неэпистемических целей. Я приводил аргументы за то, что непросто отличить вопросы "научной политики" от вопросов эпистемологии, когда имеем дело с такой наукой, как математика. Важной частью эпистемологии математики должно быть рассмотрение относительной важности математического понимания и выявление методов, которые способствуют достижению наших экстраматематических (включая практические) проектов.

Эти выводы, вероятно, не будут популярными, ибо они противоречат имиджу чистоты, который доминирует в современном понимании математики и в философии математики прошлого. Я признаю их, так как я исхожу из последовательного натуралистического рассмотрения математического познания и я верю, что нет никакой приемлемой альтернативы натуралистической эпистемологии математики. Эти выводы должны корректироваться, углубляться или отбрасываться посредством взаимодополняющих исследований.

Первое из этих исследований должно состоять в попытке дать философское уточнение понятий рациональности и прогресса в опытных науках. Доводы, содержащиеся в заключительных разделах данной статьи, побуждают двигаться к детальному представлению наших эпистемических целей, путей, на которых межпрактические переходы способствуют этим целям, и типов установок, которые могут играть важную роль в оформлении целей сообщества. Если мои утверждения, выдвинутые выше, правильны, тогда проблемы эпистемологии математики сводятся к вопросам философии науки, к вопросам, которые я пытался здесь сформулировать в предварительном виде.

Второй проект относится больше к истории науки. Как я уже отмечал, фактически все множество вопросов о росте математического знания остается без ответа почти для всех основных переходов в истории математики. Я хочу подтвердить эту мысль указанием на два примера, иллюстрирующих, как мне кажется, некоторые из исторических тем, которые я рекомендую и которые наталкивают на различения, выявленные в предыдущем обсуждении.

Философы математики рутинерски концентрируют свое внимание на возникновении теории множеств и современной логики в первых десятилетиях нашего века. Этот исторический эпизод важен, но, по моему мнению, он гораздо менее важен, чем факторы современного развития. Часть (но только часть) их возникла со статьей Дедекинда (особенно с дополнений к лекциям Дирихле по теории чисел), окрепли в результате работы Иётер и ее коллег и окончательно сформировались с публикацией "Современной алгебры" Ван дер Вардена. В этом процессе математика была радикально изменена и ее проблемы были трансформированы. Если мы должны оценить путь, идти по которому математика нашего столетия побуждалась внутренними изменениями, тогда не может быть лучшей модели для нашего изучения, чем эволюция, в которой родословная, начатая Дедекиндом, образует одну существенную ветвь.

Этот пример важен не только потому, что он выявляет переход, в котором реализуется совсем новый идеал математического понимания, идеал, который показывает нашу способность отождествлять частные результаты, касающиеся чисел пространств, функций и т.д., как специальные случаи абстрактной структуры. Проникновение в такие переходы важно и для защиты натуралистического подхода, который я изложил, от распространенной критики. "Натурализм, - говорят критики, - вполне уместен для математики до двадцатого века, но в наше время эта наука вошла в стадию зрелости и трансформировалась" [35]. Я исхожу из того, что исторические реконструкции, которые я дал для возникновения понятия абстрактной группы, и значительно более детально - для становления основных понятий анализа в XIX столетии, удовлетворительны, но если это так, тогда можно показать, как основные модификации математической практики были достигнуты на основе коллизий внутри предшествующей практики, как такие коллизии вели к появлению новых проблем, как новые проблемы были решены через использование новых понятий и методов рассуждения, как малопонятные рассуждения и понятия были наконец систематизированы на базе аксиом и определений. Нет очевидного обоснования того, что развитие современной математики должно идти иначе, и естественно предположить, что каждое преуспевающее поколение исследователей считает себя приведшим дисциплину к зрелости. Тем не менее критики выявляют пункт, требующий обсуждения, когда они обращают внимание на увеличение различий между современными исследованиями и математикой XIX в., и совершенно законно поставить вопрос о том, могут ли быть переходы в математике XX в. поняты в том же плане, как примеры теории групп и классического анализа.

Возьмем простое изложение фрагмента истории. В десятом добавлении к лекциям Дирихле Дедекинд предпринимает попытку ввести новый общий и ясный путь переформулировки некоторых результатов Куммера об "идеальных числах". Часть его стратегии состояла в том, чтобы рассмотреть совокупности элементов в области натуральных чисел и определить аналог умножения, когда один из сомножителей не элемент этой области, но определенного рода совокупность. Так мы можем понять теоретико-множественные конструкции как признанные в математике из-за их способности систематизировать классы результатов, которые или уже выделены в обсуждении важных проблем теории чисел.

Но простота этой версии чрезмерна. Как показал Гарольд Эдвардс, имели место серьезные дебаты относительно того, был ли метод Дедекинда предложен в качестве объяснительной систематизации (и расширения) теории идеальных чисел (см. [26]). Кроникер предложил другую версию, свободную от теоретико-множественных конструкций и, кроме того, избегающую окольных путей, к которым при-

---

[35] Таков общий отклик математиков, которые прочитали [3] . Как я попытаюсь показать ниже, эти неудовольствия кажутся мне очень важными, и их справедливость может быть установлена только через комбинирование усложненного понимания современной математики с изощренным пониманием философских и исторических проблем. Здесь, я думаю, необходимость сотрудничества очевидна.

нуждал подход Дедекинда [36]. Так почему методы Дедекинда нашли сторонников и в конечном итоге победили? Здесь мы должны взглянуть на многообразие путей, в которых мышление о различных типах абстрактных структур начало проявлять свою полезность в математике XIX в. Я предполагаю, что более реалистическая версия рационального принятия понятия идеала (или, в более общей форме, идеи определения аналогов операций на элементах, состоящих из совокупности элементов) нуждается в рассмотрении путей, которыми родственные понятия доказывали свою полезность в совершенно различных подразделах математики [37].

Это только гипотеза. Я предлагаю ее исключительно для того, чтобы опровергнуть убеждение в том, что совершенно непонятно, как натуралистический подход, который я использовал для понимания переходов, имеющих место в анализе от Ньютона и Лейбница до конца XIX в.,может хотя бы как-то способствовать пониманию становления современной математики. Критики, которые утверждают, что невозможно, чтобы, к примеру, алгебра XX в. была продуктом последовательности межпрактических переходов того типа, который я описал, ошибаются. Соответствует ли определенная последовательность рациональных межпрактических переходов, которые моя схема допускает, актуальному историческому развитию - это другой вопрос, вопрос детального исторического исследования.

Сопоставим этот пример со случаями, которые приходят на ум в связи со следующим. Несомненно, что практика в некоторых областях математики до XX в. развивалась под существенным влиянием ситуации в естественных науках, в особенности в физике. Продолжается ли этот процесс в наше время? Сразу возникает желание обратиться к стандартным примерам. Первый - это развитие теории катастроф, с ее истоками в попытках исследования некоторых аспектов биологических и социальных систем. Второй - это работа Трауба и его помощников по установлению надежности **error-prone** алгоритмов. Третий, и, может быть, наиболее впечатляющий - это исследования периодического равновесия и "хаоса", начатые Фейгенбаумом и нашедшие свое завершение в идентификации новых "фундаментальных констант" (см. [29, 30, 31]. В каждом из этих примеров математика используется в новом плане применительно к практическим и научным проблемам. Интересный вопрос состоит в том, обеспечивают ли указанные новые работы базу для модификации математической практики.

Вспомним парадигму анализа XIX в. Исследование Фурье уравнения диффузии привело к проблемам, которые не могли быть разрешены в рамках анализа его времени. В трактовке Коши центральные понятия анализа были переопределены и прояснены таким образом, чтобы дать средства для ответа на новые вопросы. Консерваторы могут заявить, что современные положения, на которые я сослался, совершенно отличны от указанной парадигмы. Все, что сделали Тома, Трауб и

---

[36] Об аргументе Дедекинда, см. [27] . (Принципиальный для нас пассаж находится на с. 268-69).

[37] В своей представительной речи в Миннеаполисе Гаррет Биркгафф говорил о вплетении нитей в "ковер математики". Мне кажется, что имеется большое число случаев в истории математики, в которых одна область математической практики модифицировалась в ответ на изменения другой, и что ускорение развития математического поля может идти теми же путями, которыми возникают новые поля, модифицирующие друг друга и синтезирующиеся. О некоторых стимулирующих попытках раскрыть эти процессы в конкретных случаях см. [28] .

Фейгенбаум, состоит в том, чтобы привлечь наше внимание к до сих пор не предвиденным путям развития принятых идей. Другие могут увидеть в этих (или других) современных достижениях основу для введения новых понятий, которые радикально изменят математическую практику.

Кто прав? Здесь снова вопрос может быть решен только детальным историческим исследованием. Но важно понять, что здесь имеется больной вопрос, вопрос, родственный обсуждениям, в которых пессимистически настроенные математики проводят время за чашкой кофе, в многочисленных институтах во всех концах мира. Вырождается ли область исследований, если она развивается в сухих абстракциях, которые не служат никаким познавательным целям? Или, находится ли она в упадке потому, что математика больше не королева, но, самое большее, служанка науки (или, еще хуже, инженерии)? С моей точки зрения на математическое познание, эти обычные жалобы ставят центральную (и запущенную) проблему философии математики. Где точка равновесия между эпистемической целью понимания уже достигнутой математики и целями, поставленными перед нами опытными науками и нашими практическими нуждами? Разрушает ли современная практика это равновесие? Я пытался здесь сконструировать рамки, в которых историки, философы и математики могут сотрудничать, чтобы ответить на эти вопросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frege G. Grundlagen: The Foundations of arithmetic. Oxford, 1959.
2. Kitcher Ph. Frege's epistemology // Philos. Review. N 88 (1979). P. 235-262.
3. Kitcher Ph. The nature of mathematical knowledge. N. Y , 1983.
4. Pathnem H. What is mathematical truth // Pathnem H. Collected papers. Vol. "Mathematics: matter and method". Cambridge, 1976.
5. Russel B., Whitehead N.A. Principia Mathematica. Cambridge, 1976. Vol. 1.
6. Parsons Ch. Review of 3 // Philos.Rev. N 95 (1986). P. 129-137.
7. Grabiner J. The Origins of Cauchy's rigorous calculus. Cambridge (Mass.), 1981.
8. Cessler Gl. Frege, Mill and the foundation of arithmetic //J. Philos. N 77 (1980). P. 65-79.
9. Kitcher Ph. Arithmetic for the Millan // Philos. Stud., N 37 (1980). P. 215-236.
10. Kitcher Ph. 1953 and all that: a tale of two Science // Philos. Rev. N 93 (1984). P. 335-373.
11. Kitcher Ph. Darvin's achievement // Reason and rationality in science. Wash. (D.C.), 1985. P. 127-189.
12. Westfall R.S. Never at rest. Cambridge, 1980.
13. Maddy P. Review of 3 // Philos. Sci. N 52 (1985). P. 312-314.
14. Kitcher Ph. Kant's philosophy of science // Self and nature in Kant's philosophy. Ithaca (N.Y.), 1984. P. 185-215.
15. Kuhn T. Objectivity, value judgment and theory choice // Essential Tension. Chicago, 1977. P. 320-39.
16. Gratton-Guinness I. The development of the foundation of analysis from Euler to Rieman. Cambridge (Mass.), 1970.

17. Leibniz. Mathematische Schriften. 5 Vol's. Halle, 1849 - 1863; Vol. 4.S. 388; Vol. 5. S. 382

18. Works of George Berkeley. Vol. 4. d., 1950.
19. Deston L. Review of 3 // Isis. N 75 (1984). P. 717-721.
20. Cooke R. The mathematics of Sonya Kovalevskaya. N. Y., 1984.
21. Maddy P. Perception and mathematical intuition // Philos. Review. N 89 (1980). P. 163-196.
22. Resnik M. Mathematics as a science of patterns: Ontology // Nous, N 15 (1981). P. 529-550.
23. Поппер К. Логика научного исследования // Поппер К. Логика и рост научного знания. М., 1983. С. 33-236.
24. Niiniluoto I. Scientific progress // Synthese, N 45 (1980). P. 427-462.
25. Newton-Smith W. The rationality of science. L., 1981. Chap. 2, 8.
26. Edwards H.M. The genesis of ideal theory // Arch. Hist. Exact Sci., N 23 (1980). P. 321-378.
27. Dedekind U.W.R. Sur la theorie des nombres entiers algebriques // Gessamelte Mathematische Werke. Vieweg, 1932. Vol. 3.
28. Grosholz E. Decarte's unification of algebra and geometry // Descaries. Mathematics and physics. L., 1982.
29. Thom R. Structural stability and morphogenesis. N.Y., 1975.
30. Traub G.F., Wozniakowski H. Information and computation // Adv. Comp. N 23 (1984). P. 23-92.
31. Feigenbaum M. Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Science (Summer 1980). P. 3-27.

В.Я.Перминов

О "МАТЕМАТИЧЕСКОМ НАТУРАЛИЗМЕ" Ф.КИТЧЕРА

Филипп Китчер (род. 1947) - современный американский философ, известный многими статьями по философии и истории математики. Основная его работа - "Природа математического знания", опубликованная в 1983 г., - вызвала большой интерес и получила много откликов в философской литературе. Данная статья Китчера, как это видно из ее текста и примечаний, имеет программный характер: автор ставит своей задачей в более систематической форме выразить идеи, высказанные им в книге, в определенной степени их углубить, а также облечь в более адекватную терминологическую форму. В частности, он заменяет общее название своей концепции, выбирая термин "натурализм" вместо термина "эмпирицизм", который использовался в книге.

Математический натурализм, который Китчер выдвигает в качестве новой философии математики, более соответствующей, по его мнению, как современному состоянию математики, так и ее истории, сводится к следующим основным положениям:

1. Философия математики должна основываться на истории математики. (Автор находится здесь под влиянием современных философов науки, занимающихся

методологической реконструкцией роста знания, прежде всего - Куна).

2. Философия математики должна быть редуцирована к философии опытного знания; она должна исходить из схем развития знания, общих как для математика, так и для опытных наук.

3. Философия математики, как и философия науки вообще, должна быть освобождена от априоризма. Должна быть отвергнута обосновательная ориентация философии математики как связанная с априоризмом.

4. Внутренние цели математики следует рассматривать в контексте эпистемических задач других наук и задач практики.

5. В качестве основного понятия для адекватной философии математики должно быть взято понятие математической практики, которая содержит такие компоненты, как язык, систему утверждений, способы рассуждений, нерешенные вопросы, методология и т.п.

6. В истории математики необходимо признать наличие первой (рудиментарной) математики, которая фиксирует в своих утверждениях идеализированные представления о реальных или мысленных операциях человека, возникающих в его реакциях на воздействие окружающей среды.

7. Рост математики характеризуется рациональными переходами от одного состояния математической практики к другому. Задача философии математики состоит в том, чтобы показать, что современное состояние математики возникло из первоначального посредством цепи рациональных межпрактических переходов.

8. Действительным содержанием математики являются идеализированные представления о человеческих операциях. Это относится не только к рудиментарной математике. Предмет современной математики отличается от первоначального только наличием операций более высокого уровня, которые связаны с исходными и могут быть рационально объяснены через них в своей необходимости (идея натуралистического конструктивизма).

В начале нашего века в развитии философии математики преобладало формалистское воззрение, резко отделявшее математическое знание от опытного как знание, имеющее особые источники происхождения, особые формы развития и особые средства оправдания. В 50 - 60-х гг. появилась реакция на эти воззрения, в особенности в эмпирицизме И.Лакатоса, который поставил под сомнение само понятие математической строгости и необходимость особых путей обоснования для математики. Натурализм Китчера может быть понят как попытка занять некую среднюю позицию между формализмом и радикальным эмпирицизмом: Китчер, как кажется, не ставит под сомнение понятие математической строгости и специфику математики в этом отношении, но, с другой стороны, настаивает на сближении этих двух отраслей знания по их целям, способам оправдания и средствам методологического анализа.

Идеи Китчера во многом совпадают с установками диалектического материализма, который традиционно рассматривает математику как науку, развивающуюся в контексте практики и безусловно направляемую в своем развитии задачами других наук и техники. Пафос Китчера, состоящий в необходимости отказа от мистификации математики, в рассмотрении ее развития в контексте общих научных задач, в отказе от имиджа "чистоты" математики, совершенно созвучен общим положениям марксистской теории познания, основанной на понятии практики. Нельзя не признать своевременности и важности основной задачи, которую ставит Китчер: понять развитие математики с точки зрения ее методологического единства с опытными науками. Схемы рационального развития математического знания, несомненно, во многом должны быть аналогичны схемам опытных наук, ибо математика также развивается в диалектике факта и объяснения, несмотря на то что математические факты имеют особый статус.

Математика как наука, несомненно, имеет свою специфику, т.е. такие особенности в строении и развитии, которые нельзя объяснить на основе методологических принципов, имеющих общенаучное значение. Математический факт – это не эмпирический факт, обоснование в математике не тождественно обоснованию в опытных науках. Слабые места в философии математики Китчера, на наш взгляд, проистекают из этого пункта, из некоторого пренебрежения к специфике математического знания. Можно указать в этой связи на следующие моменты:

1. Критикуя преимущественную ориентацию философии математики на проблемы обоснования, Китчер занимает другую крайнюю позицию: он отвергает эту ориентацию. Конечно, философы занимаются не своим делом, когда они стремятся разрабатывать логические средства обоснования математики, но нетрудно видеть, что в этом плане существуют глубокие философские проблемы, которые еще ждут своего решения. Это проблемы интуиции, математического факта, достоверности доказательства, природы логических норм, математического существования и т.д. Представляется маловероятным, что эти проблемы можно разрешить в рамках общих концепций развития или на основе концепции рациональных переходов. Философия математики, если брать ее в полном объеме, имеет по крайней мере три основания: логику, историю науки и общую теорию познания, которая опирается на представления об активности и целях субъекта. Философия математики, основанная на истории и обосновании схем роста, как бы она ни была важна, не заключает в себе всего спектра аргументации, необходимого для понимания природы математического знания. Ориентация на обоснование, несомненно, остается важной и никак не устраняется появлением интереса к рациональной реконструкции развития математики.

2. Представляется излишне категоричным также и тезис о включении философии математики в философию науки. Разумеется, определенное соподчинение здесь существует и существуют методологические требования, охватывающие как математику, так и опытные науки. Однако очевидны и глубокие различия. В эмпирических науках не существует законченных тезисов и рассуждений – в математике они, несомненно, есть. Отсюда особая кумулятивность математического знания. В эмпирическом знании нет тезисов типа 2 + 2 = 4, которые несомненно связаны с особого рода интерсубъективной интуицией, а не являются просто индуктивными обобщениями или соглашениями. Сами возможности абстрагирования от реальных ограничений, которые лежат в основе математических идеализаций, несравненно более широки, чем те, которые допускаются при образовании понятий в эмпирических науках. Именно эти моменты представляются центральными, если мы хотим понять специфику математики как науки, а это нельзя сделать на базе эпистемологических принципов, имеющих общее значение. Философия науки должна быть направлена на ее методологию, а если это так, то в ее основе должно лежать то, что специфично для этой науки.

3. Критикуя априоризм, Китчер, на наш взгляд (по крайней мере, в данной статье), выбирает довольно слабую его версию, несостоятельность которой почти очевидна. Конечно, верно, что и Коши и Цермело ввели свои понятия не на основе априорной интуиции, а ввиду их полезности для систематизации имеющих-

ся результатов и для решения задач. Но дело не в аксиомах, которые несомненно вторичны, а в математических фактах, и это последнее более соответствует пониманию математического априоризма у Канта, Шопенгауэра или Гуссерля. Почему мы убеждены, что 2 + 2 = 4 или что диаметр делит площадь круга пополам? Можно попытаться логически доказать эти факты. Но, во-первых, мы не уйдем от принятия без доказательства других такого же рода очевидностей. А во-вторых, дело здесь совсем не в логике: многие из нас, весьма вероятно, отвергли бы любое логическое рассуждение, которое не подтвердило бы этих фактов, т.е. они в некотором смысле выше логики. Данность исходных фактов математики невозможно объяснить в рамках какой-либо методологии эмпирического знания или в рамках логики. В конце концов и объяснение аксиом, которые предпринимает Китчер, исходит из факта непреложности имеющейся совокупности фактов, которые предстоит систематизировать. Анализ истоков этой непреложности неизбежно приводит, на наш взгляд, к определенной реабилитации идей априоризма. Конечно, вряд ли можно реабилитировать математический априоризм из логической структуры языка, как это делает Хинтикка. Здесь необходимы, скорее всего, соображения, проистекающие из общего учения о нормативности сознания, о статусе его универсальных норм. Во всяком случае, маловероятно, чтобы адекватная философия математики могла быть построена без учета идей традиционной рационалистической философии, в частности без реабилитации идеи аподиктической интуиции и априоризма в той или другой его форме.

4. Наконец, можно высказать ряд замечаний о трактовке Китчером предмета математики. Не вызывает сомнений то положение, что исходные математические идеализации связаны с операциями деятельности. Эта точка зрения, как известно, обосновывалась в работах Ж.Пиаже. Китчер, однако, идет дальше: он утверждает, что содержание современной математики некоторым образом определено исходным: современная математика лишь обогатила себя производными операциями (операциями от операций и т.д.), и, таким образом, она также может быть понята как наука об идеализированных операциях, "как совокупность отчетов о действиях идеального субъекта, которому мы приписываем особые возможности структурировать окружающий нас мир", причем эти идеализированные операции могут быть в конечном итоге обоснованы на базе исходных, как их рациональное обобщение (идея натуралистического конструктивизма).

На наш взгляд, Китчер не избежал здесь излишнего эмпиристского уклона в трактовке содержания математики. Примем то положение, что предметные и мыслительные операции человека привели к образованию исходных математических идеализаций. Нетрудно, однако, понять, что математическая теория возникла здесь не вследствие важности учения об операциях как таковых, но вследствие того, что здесь впервые обнаружилась возможность создания дедуктивной системы, особого рода взаимосвязанной сетки понятий. И математические теории образовывались всюду, где обнаруживалась возможность такой логической организации понятий, безотносительно к их содержанию, независимо от того, шла ли речь о человеческих операциях или о чем-то совершенно другом. Другими словами, в основе развития математики лежит не принцип преемственности по какому-либо содержанию (предмету), но только принцип возможности дедуктивной системы. Попытки определить математику по некоторому внешнему содержанию (учение о пространстве, времени, порядке и т.п.) всегда оказывались ограниченными. Никакая унифицированная онтология математики, на наш взгляд, невозможна, и понятие операций также не может быть положено в основу такой онтологии.

Конечно, любая математическая теория, поскольку она основана на некоторых преобразованиях, может быть понята как наука об идеализированных операциях. Но в таком случае все человеческое знание - это знание об операциях. Для обоснования натуралистического конструктивизма надо показать, что операции любой современной математической теории некоторым образом производны от исходных операций упорядочения и собирания и что математика при любом своем развитии не теряет своей ориентации на прояснение этих исходных операций, т.е. то, что она остается онтологически единой, ограниченной определенным аспектом человеческой деятельности. Такое предположение, на наш взгляд, не может быть обосновано. Математические теории едины только в плане логической организации и в своей функции - транслировать истину.

Сделанные замечания имели своей целью показать, что концепция Китчера также допускает альтернативы и нуждается в дальнейшем усовершенствовании. Но это отнюдь не оценка статьи или концепции в целом. Особенность работ Китчера состоит в том, что в них поднимается множество действительно интересных проблем и чтение их (в том числе и данной статьи) будет полезным и стимулирующим, вне зависимости от того, в каком направлении эти проблемы будут в конце концов разрешены.

Б.И.Федоров

ИДЕИ Б.БОЛЬЦАНО О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ НАУКИ

В творческом наследии выдающегося мыслителя первой половины XIX в. Бернарда Больцано методологические вопросы анализа оснований математики занимали значительное место. Еще обучаясь на теологическом факультете, в 1804 г. он публикует свою первую научную работу "Размышление о некоторых предметах элементарной геометрии", в которой пытается дать доказательство постулата о параллельных с одновременным выяснением точного смысла отношения подобия.

Математические идеи Больцано предвосхитили более поздние открытия в области арифметической теории иррациональных чисел, аксиоматизации как метода построения научных теорий, привели к формированию основ теории множеств. Из математических работ при жизни Больцано были опубликованы: "К более обоснованному изложению математики" (1810), "Биномиальная теорема" (1816), "Чисто аналитическое обоснование теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения" (1817), "Три проблемы: спрямления, вычисления площадей и объемов без рассмотрения бесконечно малого и без допущения Архимеда и любого другого нестрогого предложения" (1817). В 1842-43 гг. им были опубликованы "Попытка объективного обоснования учения о сложении сил" и "Опыт объективного обоснования учения о трех измерениях пространства". В 1851 г., после смерти Больцано, его ученик Ф.Пржигонский опубликовал написанную в 1847 г. работу "Парадоксы бесконечного". Только в 1881 г. прозвучала первая высокая оценка математического наследия Больцано. В "Математических анналах"

О.Штольц в статье "Значение Б.Больцано в истории инфинитезимального исчисления" впервые устанавливает приоритет Больцано в решении проблем, связываемых обычно с именами Коши и Вейерштрасса. В 1920 г. впервые увидела свет знаменитая работа Больцано "Учение о функциях", написанная им в 1831 г. Соответственно в 1931 и 1948 гг. были опубликованы рукописи 1844 г.: "Теория чисел" и "Геометрические сочинения". Больцано обосновал и ввел в обиход многие математические понятия, доказал ряд важнейших теорем математического анализа: понятие "актуальной" бесконечности, понятие "плотности" множества точек прямой, понятия "отрезок", счетное, несчетное, собственно-бесконечное множество, определение функции и ее непрерывности, теорему о верхней границе множества, о сходимости рядов и т.д. Он дал первый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, подошел вплотную к пониманию плотности множества, на полстолетия опередил Г.Грассмана в индуктивном методе обоснования арифметики натуральных чисел, поставил вопрос о логико-философском обосновании математики.

В разработке методологических проблем главное внимание Больцано уделял анализу принципов "изложения науки". Наука, по мнению Больцано, как известная человечеству часть истин из области "истин-в-себе", должна характеризоваться двумя основными моментами: во-первых, методами нахождения или открытия нового знания и обоснования его истинности и, во-вторых, принципами изображения (изложения) добытого знания в соответствующих книгах ("учебниках") с целью его наиболее полного и легкого усвоения, а также эффективного использования в практической жизни людей. В понимании первого момента Больцано считал себя продолжателем идей и задач эвристики, нашедших свое отражение в трудах Декарта, Паскаля, логики Пор-Рояля и Лейбница. Но если в анализе эвристических методов у Больцано не было недостатка в предшественниках, то в вопросах разработки принципов изложения науки дело обстояло иначе. Лишь у схоластов и в логике Пор-Рояля можно обнаружить использование отдельных элементов мнемоники или риторики при изложении научного содержания. По существу же систематические исследования в этой области были впервые начаты Больцано, оставаясь уникальными по систематичности и глубине обсуждаемых вопросов до сих пор.

Существовавшая до Больцано традиция в понимании науки уделяла в основном внимание развитию онтологического статуса научного знания. Больцано же стремится четко разграничить процесс и результат (содержание) научного мышления, делая объективированную форму последнего предметом особого исследования своей новой логики - наукоучения. Он обращает внимание на существовавшее со времен Ренессанса понятие "система" и находит в нем смешение двух элементов - науки как таковой и способов ее изложения (построения, изображения) в собственном учебнике. Науку как таковую, или "науку-в-себе", Больцано определяет в четвертом томе "Наукоучения" как совокупность определенного вида истин, которые таковы, что известная значительная часть их заслуживает быть изображенной в отдельной книге и в случае необходимости быть связанной с множеством других полезных предложений для их понимания и доказательства, чтобы они получили наибольшую силу убедительности и постижимости. Науку как совокупность истин он считает неизменной во времени, поскольку основное ее содержание определяется вневременным миром идеальных сущностей - "истинами-в-себе" (подробнее об этом см. [I. С. 10-22]). Вместо понятия "система" он вводит в употребление понятие "учебник", связанное с изложением науки и изменяющееся во времени и пространстве в зависимости от того, каким образом осуществляется изложение и кого оно касается. Учебник каждой науки должен, по мнению Больцано, рассматриваться в четырех основных аспектах: как последовательность взаимосвязанных высказываний; как целостная система истин; как описание способов расположения научного материала; как порядок "объективных" зависимостей между истинами науки.

Особенность больцановского понимания науки заключается в соотнесенности истин-в-себе и их изображения в учебнике. С одной стороны, наука как совокупность истин-в-себе полностью отличается от своего изображения, существующего в форме действительного, реального учебника. Как часть мира истин-в-себе наука независима от каждого конкретного своего изображения. Можно говорить о разных учебниках одной науки,подобно тому как существуют различные формально-аксиоматические способы изложения одной и той же теории. Но с другой стороны, обнаруживается существенная связь между "наукой-в-себе" и ее изображением, поскольку, согласно Больцано, множество истин-в-себе называется наукой лишь в том случае, когда известная их часть заслуживает быть изложенной в учебнике и использованной для блага людей.

Отходя от существовавшей до него традиции в понимании внутренней цели науки, направленной на совершенствование научного метода, и внешней, касающейся использования ее для нужд общества, Больцано подчиняет любой вид научной деятельности стремлению к всеобщему благу как долгу человека. Познание мира выступает для него как осознание этого долга, а счастье - как совпадение долга и желаний индивида. Поэтому в основание "Наукоучения" Больцано был положен главный методологический принцип - принцип всеобщего блага, согласно которому вопрос о том, заслуживает ли известная нам часть истин быть изображенной в собственном учебнике, является вопросом этики. В своем "Наукоучении" он уделяет много внимания разработке вопросов, связанных с формированием практических результатов использования учебников науки. Примером учебника подобного рода Больцано считал "Топику" Аристотеля, а наиболее близкими себе идеями в понимании цели науки - взгляды Спинозы, излагаемые в "Трактате об усовершенствовании разума".

Согласно Больцано, нельзя объединить истины в самостоятельную науку (в своем учебнике) лишь на основании их сходства по содержанию (например, истины юридические и морально-этические) или только потому, что они относятся к одному предмету (например, человек может быть объектом исследования в юридических науках, в антропологии и т.д.). В то же время Больцано предупреждает, что нельзя абсолютизировать и сам факт различия истин по содержанию или по предмету. Между науками возможны различные виды отношений. Взаимосвязь наук может осуществляться субъективно - когда знание одной из них используется в другой, но существует и объективная связь, например связь между теорией чисел и математическим анализом. Истины, по Больцано, должны группироваться в отдельную науку на основании анализа свойств той области, которую мы ставим своей задачей изучить.

В своем "Наукоучении" Больцано не приводит классификации наук, не считает необходимым дать разделение всех наук на теоретические (априорные) и эмпирические (опытные). Аналогом такого разделения служит у Больцано различение между чисто понятийными и наглядными истинами. Первые, согласно Больцано, никогда не могут обосновываться вторыми. К теоретическим наукам он относит прежде всего чистую метафизику и математику, а к опытным - историю и естествознание. Они должны отличаться и по способу изображения в учебниках. Наряду с истинами опытными и теоретическими Больцано говорит о возможности использования так называемых "смешанных" истин, которые включают в свое содержание как чистые понятия, так и наглядные представления.

Мир истин-в-себе выступает у Больцано постоянной возможностью для образования отдельных наук, составляя единство всех наук в истине, поскольку знание отождествляется им с истиной. Но главным, определяющим моментом единства самих истин выступают у Больцано связи их между собой, носящие чисто логический характер и позволяющие определять форму и степень зависимости одних истин от других. Без этих общих отношений логической зависимости между истинами невозможна, как считает Больцано, ни общая логика, ни наука вообще, поскольку "объективные" логические связи позволяют из небольшого числа "основных" чисто понятийных истин получать все другие, в том числе и опытные. Идею единства науки, основанную на единстве или "одинаковости" логических закономерностей для каждой конкретной науки, он пытается развить путем анализа и описания методов изложения (изображения) наук в учебнике. При этом Больцано ссылается на Декарта и Лейбница как на своих предшественников в решении данной проблемы. Идеей единства науки он как бы предвосхищает один из главных принципов позитивизма - принцип методологического монизма, или единого научного метода во всех науках. Но одновременно он признает и необходимость разных методов исследования объекта каждой конкретной науки. Он лишь настаивает на едином методе изображения (изложения) результатов исследования, поскольку форма теоретического выражения результата для всех наук одна - истина, аналог которой для Больцано всегда присутствует в мире истин-в-себе. Общий метод изложения теоретического содержания каждой науки в учебнике (расположение основных положений, объяснения, доказательства или обоснования истин) опирается на существование общих логических связей у различных предложений. Анализу этих связей Больцано посвятил три тома из своего четырехтомного сочинения "Наукоучение. Опыт обстоятельного, большей частью нового изложения логики с постоянным вниманием к прежним авторам".

Больцано не выделял какую-либо науку в качестве методологического образца для других, хотя нередко подчеркивал особое значение математики, видя в ней реальное воплощение идеала строгости и точности выражения знания. В то же время у него можно выделить ряд общих условий "собственно научности" для того или иного знания. К числу таких условий он относит: (1) возможность материальной (знаковой) выразимости результатов исследования; (2) наличие соответствующих доказательств или подтверждений научных положений; (3) возможность получения (выведения) новых следствий из научных положений; (4) возможность изменения (или критического пересмотра) содержания знания в соответствии с новыми результатами исследований или новыми следствиями; (5) наличие практической пользы знания, определяемой в духе принципа всеобщего блага. В рамках этих общих условий как своеобразного критерия научности знания в "Наукоучении" осуществляется детализация требований, предъявляемых к изображению (изложению) наук в учебниках.

Теоретическое знание Больцано оценивает как более значимое, чем эмпирическое. Он даже считает необходимым при "строго научном изложении" стремиться выводить знание только из чисто понятийных, теоретических положений (истин). Как известно, это требование получило свое дальнейшее развитие в феноменологии Э.Гуссерля как признание абсурдности попыток обосновать или опровергнуть идею с помощью фактов. Относительную устойчивость методов и приемов познания он вслед за Больцано превращает в абсолют, на котором основывает теоретические схемы познавательной деятельности субъекта.

Принципы изложения науки вступают у Больцано в действие лишь после того, как из общей области известных человечеству истин выделен определенный их подкласс, составляющий содержание конкретной науки. В этом смысле каждая наука предстает в виде готового знания, конечной совокупности предложений. Идеи Больцано по изложению наук в учебниках тесно связаны с тем направлением современной методологии, где предметом изучения оказываются понятия и методы самой науки, сфера их применимости, обоснованность научных результатов, осмысление достижений науки в аспекте развития общечеловеческой и философской культуры. Выделением класса предложений, говорящих о положениях конкретной науки, Больцано фактически проводит различение между языком-объектом и метаязыком, в котором фиксируются основные виды логических отношений между предложениями учебника. При этом важнейшей задачей метаисследования оказывается выявление точного логического смысла истин науки и преобразования их взаимной связи в духе максимального приближения к причинно-следственной зависимости, которой у Больцано соответствует отношение "объективного" следствия [1. С. 81-87].

Раскрытие содержания конкретной науки Больцано начинает с разделения всех предложений учебника на главные, вспомогательные и случайные. Является ли то или иное предложение главным, зависит как от отношения его содержания к основному содержанию конкретной науки, так и от субъективных целей его использования, например, в построении доказательства. Больцано как бы предупреждает об относительности предлагаемого разделения предложений. И все же по отношению к содержанию науки главными выступают те предложения, которые, во-первых, являются чисто понятийными (теоретическими) истинами и, во-вторых, не могут быть отнесены к содержанию какой-либо другой науки, поскольку прямо и непосредственно касаются предмета "своей" науки. Главные предложения, согласно Больцано, в большинстве своем должны быть самоочевидными или по крайней мере представленными в учебнике таким образом, чтобы читатель был убежден в их истинности. Главных предложений науки может быть несколько, но предпочтение должно отдаваться предложениям более общим по объему их логического субъекта.

К числу вспомогательных предложений учебника Больцано относит те, которые способствуют повышению степени уверенности в истинности как главных предложений, так и всего содержания конкретной науки. Поэтому оказывается, что в состав учебника могут включаться предложения, истинность которых полностью еще не установлена. Виды вспомогательных предложений существенным образом зависят от субъективных целей. Например, с разной степенью уверенности должно преподноситься содержание науки для того или иного класса читателей (школьникам, студентам, научным сотрудникам и т.д.). К числу вспомогательных могут относится как предложения теоретические, так и эмпирические, а также смешанные.

К случайным Больцано относит предложения, с помощью которых "оправдывается" выбор области истин данной науки, описываются отношения ее с другими областями знания, история возникновения науки, способы применения ее результатов в человеческой практике, устанавливается ее общечеловеческая ценность и т.д. С помощью случайных предложений так же описываются в учебнике различные указания, пояснения, примеры, наставления, обозрения и т.п. Всего в "Наукоучении" Больцано выделяет I9 типов случайных предложений.

Дальнейший анализ принципов изложения науки приводит Больцано к рассмотрению вопроса о составных частях учебника, т.е. к выяснению формальных признаков, которым должна удовлетворять наука как совокупность истинных положений. В этом смысле важнейшим элементом учебника выступают основоположения. В самом широком смысле основоположением всех наук, как отмечалось, Больцано считает высший нравственный принцип, олицетворяющий идею всеобщего добра и блага для всех людей. В узком же смысле основоположениями, или основными предложениями, каждой науки выступают аксиомы или постулаты, на которые "опирается" ее содержание или из которых оно "объективно" следует. Основоположения могут быть предложениями одного из трех вышеуказанных видов: главными, вспомогательными или случайными. В первом случае оно является главным среди главных предложений науки и должно выражать "единство всего ее содержания". Примером могут служить те законы, которые необходимо постоянно учитывать при развертывании содержания данной науки в целом (например, законы сохранения в физических теориях). Здесь следует отметить, что Больцано различает основоположения относительно содержания науки и относительно субъективного использования в доказательствах. В последнем случае основоположение выступает в роли вспомогательного предложения, поскольку способствует обоснованию истинности других предложений. В зависимости от субъективных целей использования основоположение может выступить и в роли случайного предложения.

Требуя, чтобы все основоположения были только истинными предложениями, Больцано не признает все же за ними обязательного статуса таких истин, которые не имеют своих оснований истинности в других истинах. Исключение составляет лишь высший нравственный принцип. Основоположения могут иметь максимально общий характер, но при этом быть следствиями из других истин. Их главное назначение состоит в концентрации содержания конкретного знания, в выражении единства положений конкретной науки, поэтому они не обязательно должны быть самоочевидными.

Особое место среди множества методов научных исследований и изложения науки в учебнике, подробно проанализированных Больцано, занимают вопросы, связанные с пониманием сущности, места и роли различных видов доказательств и обоснований, используемых в научной практике. Именно эти вопросы составляют основу логической проблематики в методологии Больцано.

В одной из первых своих работ по математике Больцано утверждал, что доказательства в науке должны быть не уверениями, а обоснованиями, т.е. изложением тех "объективных" оснований, на которые опирается доказываемая истина. Например, он замечал, что доказательство истины, верной для всех величин, а не только пространственных, не может опираться на истину, верную лишь для пространственных величин. Позже, в "Наукоучении", формулируя требования, которым должно удовлетворять строго научное изложение в учебнике,- (I) легкость восприятия содержания науки, (2) быстрое отыскание её отдельных положений, (3) удобство запоминания основного содержания, (4) целесообразное использование в практической деятельности, (5) выработка убежденности в истинности положений науки, (6) доказательность и обоснованность истин науки - Больцано считает наиболее важными последние два требования, по отношению к которым все остальные выполняют в определенном смысле вспомогательную функцию.

Доказательства должны основываться на предложениях, которые уже приняты за истинные с определенной степенью уверенности. Из них необходимо сделать вывод доказываемого положения. При этом вывод должен строиться на основе одного из трех типов отношений: выводимости или объективного следования (см. [1. С. 63-70, 78-81]).

Ставя теоретическое знание по значимости в науке выше эмпирического, Больцано приходит к выводу, что "чисто понятийные" истины можно использовать в доказательствах с большей степенью уверенности, чем опытные. При этом он различает уверенность и убежденность. Последнюю он сводит к требованию найти "первые" основополагающие истины, которые могут служить отправным пунктом строгого доказательства. Эти "первые" истины не имеют оснований ни в каких других истинах. На примере геометрии Евклида он показывает, что в качестве системы основных истин (аксиом) могут выбираться те или иные предложения, которые служат созданию убежденности или уверенности относительно других предложений этой науки. Здесь главное состоит в том, чтобы исходные предложения были абсолютно достоверны. В зависимости от выбора той или иной системы аксиом (одинаково достоверных) одна и та же истина будет иметь в каждой системе свое доказательство. Мотивы выбора доказательства во многом субъективны: они зависят от воли автора учебника, от того, какому классу читателей предназначен учебник, от уровня подготовки читателя и т.д. Во всяком случае, как считает Больцано, поскольку они выступают в доказательстве в качестве посылок, то необходимо, чтобы степень уверенности в них была бы не меньшей, чем в следующих из них положениях. Если истинность основоположений не самоочевидна, то требование полной достоверности должно быть распространено на используемые для их получения посылки и в конечном счете необходимо дойти до истин, которые приняты за полностью достоверные. Требование полной достоверности основоположений науки является базисным, т.е., в свою очередь, основополагающим в "Наукоучении". Идеала убежденности в процессе доказательства можно достичь, согласно Больцано, при полной системе основных чисто понятийных истин, которые могут быть признаны за непосредственно очевидные. Тогда доказываемые на их основе теоремы имели бы абсолютную степень достоверности, поскольку вывод с логической необходимостью гарантирует "перенос" достоверности основных положений на теоремы. Больцано убежден, что среди множества истин-в-себе относительно каждой науки обязательно имеется такая полная система ее основных непосредственно истинных положений, прежде всего он склонен предполагать это относительно такой науки, как математика. В то же время сам Больцано не построил ни одной системы в соответствии с идеалом требования убежденности. У него нельзя найти точного ответа на вопрос о том, можно ли достичь этой полной системы основных непосредственно очевидных положений конкретной науки. Лишь однажды, в работе по основаниям геометрии, он отметил, что для этой науки подобная система пока еще не получена.

Наряду с требованием убежденности в истинности основных положений каждой науки Больцано предлагает "проникнуть в объективную связь" между истинами. Иначе говоря, при изложении науки необходимо решить вопрос о том, является ли та или иная истина науки основной и каковы ее объективные основания. В отличие от требования убежденности в достоверности исходных истин доказательства, последнее требование не выступает в "Наукоучении" как обязательно выполнимое при изложении каждой науки в каждом учебнике. Во-первых, не для каждого класса читателей существует необходимость знать эти объективные основания. Во-вторых, и это наиболее важно, объективные основания многих истин могут быть нам просто неизвестны, и лишь в дальнейшем будут обнаруживаться в реальном процессе познания. Незнание объективных оснований каждой конкретной истины не исключает принятия отдельных из них в качестве абсолютно достоверных в доказательствах.

Критикуя древнегреческих ученых за понимание научного знания как чего-то полностью завершенного, где каждая истина обнаруживает собственное обоснование, поскольку относительно любого научного факта известно не только "что" он есть, но и "почему" он такой, а не иной, Больцано отмечал, что указать объективные связи истин в любом научном сочинении было бы вряд ли возможно. Он рассматривает это требование скорее как идеал строго научного изложения, которое, может быть, впервые только и делает науку собственно наукой. В то же время Больцано отмечал, что ни одна наука, в том числе и математика, такого идеала не достигла. Требование указания объективных связей истин, максимально приближенных к причинно-следственным, при изложении наук в учебнике Больцано в определенном смысле рассматривает как философское, поскольку образующаяся в доказательствах цепочка "оснований-следствий" позволяет относительно каждой истины ответить на вопрос "почему?", указать причину, ее породившую. Требование об объективных связях истин является, по существу, первой попыткой изучения гносеологического аспекта процедуры доказательства. Больцано связал этот аспект с выявлением причинной зависимости между истинами, с таким отношением между ними, которое соответствует "положению дел в действительности". Здесь можно видеть преодоление интуитивно-психологической трактовки доказательства, классическим примером которой выступает доказательство теорем в "Началах" Евклида.

Анализ требования выявления объективных связей между истинами как идеала изложения науки позволяет объяснить своеобразную неприязнь Больцано к использованию непрямых (косвенных) доказательств. Он отводит им место лишь в разделе "примеров" учебника. В недавно обнаруженной рукописи Больцано "Анти-Евклид" можно увидеть, как он пытался перевести все косвенные доказательства теорем Евклида в прямые. Непрямые доказательства, согласно Больцано, хотя и убеждают, но не позволяют проникнуть в "почему" относительно доказываемой истины, в объективную связь ее с другими истинами конкретной науки. Эти доказательства по структуре своей не могут содержать объективных оснований, и потому в принципе могут быть не обоснованиями, построенными на отношении объективного следования, но лишь доказательствами, построенными на отношении выводимости.

Больцано считает, что при "строго научном" изложении знания в учебнике непрямые доказательства должны быть полностью исключены. Если каждое больцановское объективное обоснование должно быть обязательно прямым и притом единственным доказательством, то нельзя утверждать, что всякое прямое доказательство является в то же время и обоснованием доказываемого положения. Для одного и того же предложения могут иметься несколько прямых доказательств, среди которых находится и единственное объективное обоснование.

Требование единственного прямого доказательства, выступающего в качестве объективного обоснования, в "строго научном" изложении в учебнике Больцано считает самым основным. Он называет его "первым правилом" своего "истинно хорошего метода" изложения науки в учебнике. Правила больцановского учения о методе лежат в русле тех требований, которые обнаруживаются у Аристотеля, Петра Рамуса, Декарта, Лейбница. В своих математических работах и в "Наукоучении" он часто ссылается на "Вторую Аналитику", на критику П.Рамусом метода Евклида, на принципы научного изложения в логике Пор-Рояля, на отдельные идеи Декарта и Лейбница. Но если "первое правило" метода у предшественников Больцано лишь в общей абстрактной форме, то у него самого оно получает впервые своеобразное логическое завершение в разработке отношения следования, лежащего в основе доказательства как объективного обоснования.

"Второе правило" метода "строго научного" изложения состоит в требовании использовать в доказательствах лишь "однородные" понятия, т.е. видовые понятия в пределах одного (логического) рода, лежащего в основе доказываемого положения. Использование "чуждых" понятий приводит к неоправданным и нежелательным "петлям" и "окольным путям" в доказательстве, не способствует в конечном счете установлению связи доказываемого положения со своими объективными основаниями. Довольно часто нарушение этого правила происходит, как показал Больцано, при доказательстве теоремы Пифагора. Нередко, например, смешивают понятия движения с геометрическими понятиями. Поэтому он отвергает определение окружности через апроксимацию вписанного и описанного многоугольников, считает, что не следует выводить истины арифметики, алгебры или анализа из положений, которые принадлежат прикладной их части - геометрии. Так называемые чужеродные понятия могут использоваться лишь в примерах, способствующих объяснению содержания науки, но не в обоснованиях истин.

В "третьем правиле" метода выражается требование, чтобы следствия или заключения не были предложениями менее сложными и более общими,чем их основания или посылки. Иначе говоря, при "строго научном" изложении науки нужно переходить от общего к особенному и от простого к сложному. Доказательства в теоретических науках должны состоять лишь из таких истин, которые не сложнее, чем сама доказываемая истина, поскольку чисто понятийные истины не могут быть проще по своему составу, чем их частные или полные основания. Вопрос о том, какая из истин является более простой или более сложной, возникает, согласно Больцано, лишь в том случае, когда необходимо определить, какая из них выступает основанием ("причиной") или частичным основанием другой.

В своих ранних математических работах Больцано придерживался мнения, что общие предложения должны предшествовать особенным, что последние в строго научном изложении должны выводиться или следовать из первых. Он также считает, что в тех случаях, когда истина следует из своего объективного основания, то последнее должно быть положением более общим по объему субъекта, определяющего объем всего предложения в целом. Однако в "Наукоучении" Больцано рассматривает пример из геометрии, где обнаруживается, что основание более общей истины лежит в истине особенной. Объективным основанием общего положения о том, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $2(n-2)$ прямых угла, является, по Больцано, особенная истина, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Здесь он предполагает, что доказательство общего положения осуществляется путем разложения многоугольника на треугольники с использованием в доказательстве особенной истины. Этот пример вряд ли можно признать удачным. Ведь вполне резонно можно считать объективным основанием положения о внутренних углах треугольника общее утверждение о том, что сумма внешних углов n-угольника равна четырем прямым. И все же основной тенденцией в понимании взаимосвязи между общим и особенным у Больцано остается предшествование первого второму.

Последнее "четвертое правило" строго научного изложения истин в учебнике связано у Больцано с пониманием отношения объективного следования в духе точной выводимости. Правило требует, чтобы в соответствии с отношением объективного следования из возможно меньшего числа посылок как оснований можно было получать максимально большое число заключений как следствий. Здесь предполагается, что истины - объективные основания некоторого положения - представляют собой более простую совокупность, из которых данное положение выводимо или следует, т.е. посылки не должны быть сложнее, чем выводимые из них заключения. Иначе говоря, если во всех выводах сам процесс вывода будет осуществляться лишь на основе отношения следования в больцановском смысле (приближенном к причинно-следственной зависимости), то получаемое заключение не должно быть проще посылок. Часть мысленно объединенного множества истин, в котором господствует лишь объективная зависимость между ними, как считает Больцано, всегда будет меньше той части, в которой наряду с отношением объективного следования допускается и отношение выводимости между истинами.

Требование - из меньшего числа посылок (аксиом) получать максимально большое число заключений (теорем) - относится не только к каждому отдельному выводу в "строго научном" изложении. Оно распространяется, по существу, на систему всех используемых в науке истин как требование использования отношения следования в качестве главного организующего принципа. Та система аксиом с точки зрения "строго научного" изложения должна быть лучшей, которая не только минимальна по числу их, но и является единственно возможной. Здесь у Больцано обнаруживается попытка выделить единственный образ конкретного вида знания из множества его возможных изображений (аксиоматизаций). Критерием выделения оказывается отношение следования (аналог причинно-следственной зависимости) как основной вид связи между истинами. Очевидно, Больцано был одним из первых в истории науки, кто попытался обосновать возможность "единственного изложения" конкретной области знания путем указания минимальной системы объективных оснований (аксиом), из которых образуется все основное содержание данной науки.

Хотя Больцано не оставил после себя ни одного сочинения, в котором бы полностью были реализованы требования "строго научного" изложения, он все же пытался использовать указанный метод. Своеобразной областью применения в этом отношении выступала для него прежде всего математика. Он считал, что удовлетворить требованиям метода может, вероятно, такая часть математики, как арифметика натуральных чисел. Уже в элементарной геометрии он видел трудности воплощения метода "строго научного" изображения, поскольку большинство ее доказательств нацелены лишь на создание достоверности и не являются поэтому обоснованиями в его понимании.

В строго научном изложении, как полагал Больцано, нуждаются в первую очередь основания математики, полное преобразование которой должно начаться с "обоснованного изложения ее оснований". Ее "первые предложения" пока не могут быть названы основными, поскольку они не выполняют функцию объективных оснований ("причин") по отношению к другим, но являются некоторыми допущениями, на которые опираются математические доказательства, чтобы создавать уверенность, но не убежденность у читателя в истинности получаемых научных положений. "Новое" построение математики было для Больцано делом, которому он посвятил всю свою жизнь, но которое он так и не завершил. Проблема остается актуальной и сегодня. "Гносеологическое и логическое обоснование понятия натурального числа или, лучше сказать, всего того, что признается минимальным исходным базисом математики, вероятно, будет одновременно означать и решение проблемы математической причины" [2. С. 66].

Отношение объективного следования между истинами Больцано рассматривал как организующий идеал в построении систем научного знания. Понимание же этого отношения как собственно методологической проблемы сводится, очевидно, к решению вопроса о том, как отношение выводимости, при котором посылки выступают объективными основаниями заключений, отличать от отношения выводимости вообще. Сам Больцано предполагал, что объективные связи между истинами существуют независимо от познания их людьми. Но уже в математических примерах обнаруживается, что эта связь между истинами не является столь строгой. Поэтому, очевидно, если действительно использовать понятие следования в дедуктивных выводах, то лежащее в его основе понятие объективного обоснования необходимо реконструировать, приблизив к понятию формального доказательства. Можно с уверенностью предположить, что необходимость подобной реконструкции понимал и сам Больцано. Об этом убедительно свидетельствуют те методологические требования к "строго научному" изложению, которые были сформулированы им в третьем и четвертом правилах "хорошего" метода. За всем этим угадывается стремление Больцано выявить такой критерий необходимой связи между положениями науки, который бы выражал независимость этих связей от случайных способов познания истин каждой конкретной науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Б.И. Логика Бернарда Больцано. Л., 1980. С. 10-22.
2. Аракелян Г.Б. О доказательстве в математике. Ереван, 1979. С. 66.

Е.А.Зайцев

КОНЦЕПЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЖ.ПЕАНО

1. Введение

На рубеже XIX - XX вв. логики обращались к теории определений. В творчестве Дж.Пеано эта тема занимает особое место. Почти в каждой работе, близкой к "Формуляру математики", - а это целая серия исследований 1889 - 1908 гг. - Дж.Пеано так или иначе касается проблем теории определений. Даже резкий спад математической и логической активности после 1900 г. не сказался на его интересе к предмету. В серии работ 1911, 1915-17, 1921 гг. Дж.Пеано вновь обращается к анализу используемых в математике определений. А за год до смерти, в 1931 г., он предлагает эту тему Л.Джеймонату, начинавшему тогда свою научную карьеру.

Концепция определения, конечно, не оставалась у Пеано одной и той же. Изменения, которые произошли в логике более чем за тридцать лет, что он работал в этой области, сказались на подходе Дж.Пеано к проблеме. Надо также иметь в виду, что и в рамках одного периода его взгляды не всегда были последовательны. Это связано с критической направленностью творчества Дж.Пеано, а также с трудностью проблемы, которая и в современной логике не решается однозначно.

Темой нашей работы является концепция определения и ее генезис в логике Дж.Пеано. Мы постараемся понять, как, почему и в каком историческом контексте складывался и менялся подход Дж.Пеано к этой проблеме. При изложении мы будем, по мере возможности, избегать формализмов. Дело в том, что адекватный перевод логики Пеано на язык современных формальных систем - это отдельная достаточно сложная тема. Словесный же перевод его формул заставил бы нас значительно расширить объем статьи. Поэтому мы ограничиваемся здесь исследованием общих вопросов, понимание которых не связано прямо с изложением соответствующих формализмов.

2. Два подхода к понятию определения

В математической логике есть две точки зрения на определения. Первая, которую обычно связывают с именами А.Н.Уайтхеда и Б.Рассела, выражена в "**Principia Mathematica** " (см. [1. С. 11, 94]). В резюме польского логика Ч.Лейевского она выглядит так:

1. Определения не являются предложениями. Они не истинны и не ложны.
2. Определения не принадлежат системе и теоретически излишни.
3. Определения относятся к символам, а не к тому, что представлено символами.
4. Определения есть сокращенные записи.
5. Знак " = ... **Df** ", который используется для выражения определения, не эквивалентен никакой связке логики предикатов.
6. Определяемое имеет то же значение, что и определяющее [2. С. 190].

При таком подходе определения понимаются как сокращения. Определяемые символы здесь не являются символами языка-объекта. Они автоматически устранимы; каждое высказывание, содержащее эти символы, есть, на самом деле, предложение, высказывающееся о сокращаемых символах. При таком подходе процедура определения относится целиком к метатеоретическому уровню и не затрагивает структуры языка-объекта. Последний не расширяется за счет введения новых символов, а теория - за счет новых аксиом.

Другой подход к определениям, который характерен для Ст.Лесневского и школы Д.Гильберта, состоит в том, что определениями называют аксиомы, имеющие вид равенства или эквивалентности. Эта точка зрения хорошо иллюстрируется следующими словами Д.Гильберта и П.Бернайса: "С помощью явного определения может быть введен какой-либо новый индивидный символ, предикатный символ или знак математической функции. Такое введение в формализм обычно производится при помощи какой-либо специальной аксиомы, которая в случае индивидного символа или знака математической функции имеет вид некоторого равенства, а в случае предикатного символа - некоторой эквивалентности; при этом в левой части определения стоит вводимый символ... а в правой части стоит не содержащее вводимого символа выражение, такое, что входящее в него свободные переменные совпадают с переменными, входящими в левую часть" [3. С. 357-358] .

При таком подходе определения понимаются как процедуры, вводящие в язык-объект новые символы. Эти символы в принципе ничем не отличаются от базисных неопределяемых символов. В отличие от первого подхода здесь за счет введения нового символа происходит расширение языка-объекта. Проблема устранимости в ряде случаев становится нетривиальной.

Различие двух подходов можно проиллюстрировать на примере лейбницевского принципа равенства [1]. Этот принцип может быть выражен, как сокращение, в виде

(1) $x = y . =. \varphi x \supset_{\varphi} \varphi y \quad Df.$,

где " = ... Df " понимается как один символ (имеется в виду второе вхождение знака " = " в формулу).

Его можно записать также в виде аксиомы

(2) $x = y . \equiv . \varphi x \supset_{\varphi} \varphi y$,

где знак " ≡ " означает эквивалентность.

В первом случае сочетание символов "$x = y$" есть метасимвол, сокращающий предложение "$\varphi x \supset_{\varphi} \varphi y$"; во втором - это же сочетание является предложением теории с новым символом " = ".

3. Статус определений в логике Пеано

Какой же из указанных точек зрения на определения в формальной системе придерживался Дж.Пеано? На этот вопрос мы можем дать достаточно точный ответ. В основной серии своих логических работ до 1908 г. Дж.Пеано понимал определения как сокращенную запись, т.е. разделял точку зрения, сформулированную позднее в "**Principia Mathematica** ". В этом он был солидарен в целым рядом своих современников, в частности с Г.Фреге (см. [4. С. 36 ; 5. С. 207-208]) и Л.Кутюра (см. [6. С. 211-212]). Высказывания Дж.Пеано об определениях разбросаны по многим работам. Но собранные вместе, они вполне однозначно характеризуют его подход. Практически по каждой позиции из резюме Ч.Лейевского мы находим соответствующее утверждение у Дж.Пеано. Процитируем наиболее характерные из них.

"Под символическим определением нового знака x понимается соглашение называть именем x группу знаков, уже имеющих известное значение" [7. С. 204].

---

[1] Два объекта отождествляются тогда и только тогда, когда один из них обладает всеми свойствами другого.

"Всякое определение выражает сокращение, которое теоретически не является необходимым" [7. С. 368] .

"Определение не нуждается в доказательстве. Оно есть результат нашего желания представить группу символов посредством простого выражения" [7. С. 173] .

"Среди неопределяемых идей содержится также идея определения. Хотя знак и " = " и "Df. " записаны отдельно ... они тем не менее образуют один символ" [7. С. 327–328] .

У нас есть также интересное историческое свидетельство. В одном из писем Б.Рассела к Г.Фреге (1904 г.) мы находим обсуждение лейбницевского принципа равенства как сокращенной записи с указанием на то, что подобное понимание определений является характерной чертой логики Дж.Пеано.

Б.Рассел писал:

"На возражение о том, что знак равенства, нуждающийся в определении, уже содержится в формуле как известный [2], я вслед за Пеано отвечаю, что " = Df. " понимается как один символ. Определение на самом деле не является частью теории, а есть лишь соглашение о записи. " = ... Df. " не содержится среди неопределяемых идей математики, а возникает в результате моего желания" [4. С. 169] .

Однако, несмотря на несомненную близость позиций, было бы все же неверно отождествлять точку зрения Б.Рассела с подходом Дж.Пеано. Дело в том, что, во-первых, Дж.Пеано в отличие от Б.Рассела включает связку " = ... Df. " в число неопределяемых символов теории. При этом новый символ становится символом языка-объекта, а определение – предложением теории со связкой " = ... Df. ", высказывающимся об этом термине. Поэтому мы не можем считать определения у Пеано чисто метатеоретической процедурой. Это скорее пара, состоящая из особого предложения теории и специального правила замены, позволяющего замещать определяемое определяющим в каждом контексте. Эта особенность подхода Дж.Пеано связана с общей его установкой считать объектами теории не только значения символов, но и сами эти символы [3].

Во-вторых, как мы уже отмечали, Дж.Пеано не всегда последователен в своих высказываниях. В частности, это проявляется в трактовке так называемых "возможных определений". Этот термин, введенный Пеано в 1897 г., соответствует современному понятию определимости. Он служит для выделения класса тех теорем, которые имеют вид равенства или эквивалентности, в левой части содержащих символ, отсутствующий в правой.

При обсуждении "возможных определений" Дж.Пеано обычно отступает от строгого различения определений как сокращений и определений как аксиом. Типичным высказыванием здесь является утверждение о том, что "возможные определения" при ином выборе неопределяемых понятий можно было бы брать в качестве определений. Но, строго говоря, тогда они уже не могут рассматриваться

---

[2] Речь здесь идет соответственно о первом и втором вхождениях знака " = " в формулу. У Пеано то же определение записано в виде

$$x = y . = : a \in Cls . x \in a \supset_a y \in a \quad Df.$$

"$x = y$" $\rightleftharpoons$ " y принадлежит каждому классу a , в котором содержится x ".

[3] Смешение теоретического и метатеоретического уровней частично прослеживается и в логике Б.Рассела.

как сокращения, а являются аксиомами. Трудно сказать, являются ли эти высказывания Дж.Пеано небрежностью речи или же свидетельством иного подхода. Заметим, что Фреге, также писавший на эту тему в 1914 г., предельно точен в трактовке указанного различия:

"Но лучше все же избегать слова "определение" в этом случае, так как то, что мы склонны называть здесь определением, на самом деле следует рассматривать как аксиому" [5. С. 210] [4].

И все же мы должны согласиться с тем, что подход Пеано, вплоть до последнего тома "Формуляра", в целом соответствует пониманию определений как сокращений.

Однако совершенно неожиданно (Пеано уже отошел к этому времени от активных занятий логикой) мы встречаем следующее короткое замечание, сделанное им в обзоре Ф.Журдена в 1912 г. [5]:

"Теперь, - пишет Пеано, - я думаю, что " = ... Df " совпадает со знаком " = " , который следует рассматривать вместе с соглашением о том, что это равенство надо взять в качестве определения" [8. С. 302] .

Но это замечание означает не что иное, как фактическое признание аксиоматического подхода к определениям. Действительно, понимая связку как равенство, мы тем самым считаем определение предложением теории. А "соглашение о том, что это равенство надо взять в качестве определения" придает этому предложению статус аксиомы (так как предполагает его истинность без доказательства).

В серии статей 1915-1918 гг. [7. С. 402-422] Дж.Пеано, обращаясь вновь к понятию определения, кажется, уже целиком стоит на аксиоматической точке зрения. Об этом можно судить по тому, что он отказывается от своего прежнего принятия принципа Лейбница в качестве определения понятия " = ". Возражением при этом служит тот факт, что в указанном принципе знак " = ", который нуждается в определении, уже присутствует в предложении в качестве известного, т.е. Пеано критикует указанный принцип с позиции аксиоматического подхода.

Представляется интересным вопрос о том, с чем было связано изменение точки зрения Дж.Пеано. Для его решения нам необходимо конкретнее обсудить те виды определений, которые Дж.Пеано использует в своей системе.

4. Типы определений у Дж.Пеано

В логике Дж.Пеано допускаются следующие пять типов определений: номинальные определения, условные определения [6] (в терминологии Дж.Пеано - "определения группы символов"), "определения через абстракцию", "определения через постулаты" и индуктивные определения. Указанные типы определений не то-

---

[4] Для возможных определений Фреге употребляет термин "аналитическое определение".

[5] В обзоре Журдена есть раздел, посвященный изложению логики Пеано. Перед публикацией этот раздел был просмотрен Пеано, который сделал к нему ряд подстрочных замечаний.

[6] Часто условные определения у Пеано являются также и контекстуальными.

лько используются в"практике" построения теории, но и служат объектом анализа. Первые три типа в явной форме обсуждаются Дж.Пеано в 1894 г.[7] (см. [7] С. 166–169] . Через два года в письме к Фреге Дж.Пеано присоединяет к ним "определения через постулаты" [4. С. 123–124] . Индуктивные определения Дж.Пеано, вообще говоря, не учитывал в своей классификации и впервые рассмотрел их отдельно только в 1921 г. . Хотя он их и использовал начиная с 1889 г., со своей знаменитой работы о началах арифметики.

Первые три типа определений представляют собой равенства.

Номинальные определения – это выражения вида $x = a\ \mathrm{Df}$, где x – новый символ, a – группа символов, имеющих известное значение (см.: [7. С. 166]).

Условные определения – это, строго говоря, импликации вида $h \supset . x = a\ \mathrm{Df}$. , где h – гипотеза, x – вводимый символ, или группа символов, среди которых есть новые, a – группа символов, имеющих значение (см. [7. С. 167]).

"Определения через абстракцию" – это импликации вида $h_{u,v} \supset : \varphi u = \varphi v . = P_{u,v}\ \mathrm{Df}$. , где $h_{u,v}$ – гипотеза, о переменных u, v , φ – вводимый функциональный символ (φu служит для указания на "абстрактный" объект, являющийся значением функции φ от переменной u , а $P_{u,v}$ – двуместный предикат, представляющий отношение эквивалентности (см. [7. С. 167–169]).

"Определения через постулаты" в отличие от первых трех типов определений не служат для указания на вновь вводимый объект, а лишь фиксируют ряд свойств базисных неопределяемых символов теории.

Индуктивные определения являются, по существу, аксиомными схемами.

Важным вопросом всякой теории определений является вопрос о том, обеспечивают ли соответствующие процедуры введения устранимость новых символов [8]. Надо сказать, что Дж.Пеано достаточно ясно осознавал проблему. В его работах есть множество замечаний о том, что правильные определения необходимо должны обеспечивать редукцию каждого символа теории к неопределяемым. Вместе с тем, те конкретные типы определений, которые он использует в логике, за исключением номинальных, являются неустранимыми. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Неустранимость условных определений первым отметил Г.Фреге. В ряде своих работ, а также в переписке с Дж.Пеано, он настаивал на исключении условных определений из числа законных способов введения новых терминов (см. [4. С. 125 ; 5. С. 161–164]). Реакция Дж.Пеано была не совсем обычной. Он отказался от обсуждения вопроса существу, т.е. с логической точки зрения, а сослался на обстоятельства исторического, практического и педагогического характера. Это вызвало резкий протест Г.Фреге (см. [9. С. 161]).

Рассел в своей первой работе, написанной в 1901 г. под влиянием логики Пеано [10] , свободно пользовался условными определениями. Но уже к 1904 г. он и А.Н.Уайтхед отказались от условных определений. Об этом свидетельствует

---

7 Трехчленная классификация определений была предложена в том же году Ч.Бурали-Форти. Дж.Пеано заимствовал у него эту классификацию.

8 В современной логике говорят об условиях переводимости и некреативности. Эти понятия были введены Ст.Лесневским в начале 20-х гг.,и Дж.Пеано не был с ними знаком.

одно замечание Б.Рассела из письма к Ф.Журдену (см. [11. С. 30]), где содержится также критика условных определений [9].

Рассел был также одним из первых, кто отметил неустранимость "определений через абстракцию" (см. [12]). Впрочем, надо отдать должное и самому Пеано. Когда он писал об этом типе определений, то всегда особенно подчеркивал тот факт, что значение придается не термину φu , а целой фразе, состоящей из равенства $\varphi u = \varphi v$ (см. [13. С. 15]). Интересно отметить, что условные определения не вызывали возражений в кругу итальянских логиков, сотрудничавших с Пеано. Другое дело, - "определения через абстракцию". Они стали предметом оживленной полемики, в которой в роли оппонентов Дж.Пеано выступили Ч.Бурали-Форти, Э.Маккаферри, М.Пиери, А.Падоа и др. В числе сторонников определений через абстракцию были в основном философы - Дж.Вайлати и Ф.Энриквес, обсуждавшие, правда, не столько логическую обоснованность этого метода введения новых понятий, сколько его методологическое значение. Сам Дж.Пеано - и это довольно типично для него - занимал нейтральную позицию, но, несомненно, был достаточно хорошо осведомлен о доводах тех, кто критиковал эти определения за отсутствие устранимости.

Что же касается определений через постулаты, то Дж.Пеано уже и сам указывал на проблематичность их устранимости (см. [7. С. 339]). По отношению к символам, входящим в аксиомы, он чаще пользуется не глаголом **definire**, а его синонимами **determinare**, **fissare valore** и т.п.

Содержательного обсуждения вопроса об устранимости вводимого индуктивными определениями функционального термина во времена Дж.Пеано не было. Он вряд ли мог быть даже поставлен из-за отсутствия понятия рекурсивной функции. Значительно позднее ряд математиков подвергли критике этот тип определений, предложив считать их аксиомами (см. [14]).

Теперь мы попытаемся ответить на вопрос, почему Дж.Пеано отказался от понимания определений как графических сокращений и перешел на аксиоматическую точку зрения. По нашему мнению, это произошло потому, что Дж.Пеано в отличие от Б.Рассела не считал возможным принести в жертву логической строгости исторически сложившиеся типы определений. Он не мог также согласиться с тем, чтобы в его системе, скажем, кардинальные и натуральные числа рассматривались как классы классов. Поэтому он предпочитал вводить эти понятия "через абстракцию" или "через постулаты". Но указанные типы определений в отличие от графических сокращений не являются устранимыми. Понимание и признание этого обстоятельства, по-видимому, и сыграло решающую роль в переходе Дж.Пеано на аксиоматическую точку зрения. Это позволило ему считать неустранимые типы определений обычными аксиомами, не претендующими на обеспечение редукции вводимых символов к неопределяемым. Полностью этот факт был осознан Дж.Пеано после 1905 г., хотя некоторые моменты, как мы уже говорили, присутствуют в его работах начиная с 1897 г. Возможно, что на формирование новой точки зрения оказали влияние также работы Д.Гильберта.

Неустранимые определения - характерная особенность логики Пеано. Обычно структура формальной системы задана изначально перечислением неопределяе-

---

[9] Перестройка условных определений в номинальные - один из важнейших мотивов расселовской работы на пути к созданию

мых понятий, аксиом и правил вывода. При введении новых терминов существенного расширения теории не происходит. У Пеано же каждое новое понятие, введенное неноминальным определением, существенно расширяет теорию за счет вводимого символа и определения-аксиомы. В этом отношении систему Дж.Пеано можно сравнить с онтологией Ст.Лесневского, в которой неустранимые определения-аксиомы носят креативный, творческий характер. Отметим, что мотивом творчества обоих логиков было стремление приблизить формально-логические исчисления к интуитивным нормам естественного языка, отражающего исторически сложившиеся традиции. Обе попытки, по нашему мнению, чрезвычайно интересное явление в истории математической логики.

5. Заключение

В конце XIX - начале XX в. точка зрения на определения как сокращения была представлена в основном в работах тех исследователей, которые в своих философских взглядах придерживались или симпатизировали логистическому тезису. Это - Г.Фреге, Л.Кутюра, А.Н.Уайтхед и Б.Рассел. И это не случайно. Определения как сокращения вводят в рассмотрение некоторый новый символ, который служит для указания на сочетание символов, а не на объект теории. Такое понимание определений хорошо согласуется с логистической трактовкой (в первую очередь у Б.Рассела) математических объектов. В частности, в "**Principia Mathematica** " классы, числа и т.д. обладают, вообще говоря, статусом "квазивещей" (термин Б.Рассела) в отличие от "вещей", т.е. индивидов и пропозициональных функций, и определения - сокращения являются техникой введения новых символов, адекватной этой онтологии. Логицист в принципе не может признать аксиоматического подхода к определениям математических понятий, потому что, признав его, он будет вынужден говорить уже не о квазисуществовании, а о существовании математических объектов. (Речь, конечно, идет не о реальном существовании, а об онтологических обязательствах теории.)

Если говорить о Дж.Пеано, то его логическая система, и в частности теория определений, содержит в себе ряд чисто технических идей, допускающих интерпретацию в духе логистического тезиса. Прежде всего, это наличие операторов абстракции и дескрипции, позволяющих строить классы и индивиды, исходя из пропозициональных функций. Но Пеано тем не менее не был логицистом ни в своих философских установках [10], ни в "практике" построения символического исчисления. Наряду с "логистическими" ему принадлежат и чисто аксиоматические конструкции: формальная арифметика и ряд формально-геометрических систем. Но Дж.Пеано не был и формалистом. Об этом, в частности, говорит тот факт, что он не придавал значения доказательству непротиворечивости (речь идет об арифметике). Дж.Пеано считал, что основанием для принятия аксиом арифметики служит практика обращения с натуральными числами. Отметим также, что в 1923 г., т.е. уже перейдя на аксиоматическую точку зрения на определения, Дж.Пеано тем не менее возражал против формального понимания предмета математики. Он писал: "Математика находится между логикой и эксперименталь-

---

[10] Подробнее см.: [15;16 С. 395-406] .

ными науками. Она есть чистая логика; все ее предложения имеют вид "Если предположить А, то В истинно". Но эти логические конструкции не следует создавать лишь для удовольствия от работы с ними. Объект, изучаемый ими, дается экспериментальными науками; они должны иметь практическую цель (цит. по: [15. С. 405]).

Поэтому будет ошибкой считать, что изменение позиции Пеано по вопросам определений есть свидетельство его симпатий к формалистской концепции. Его взгляды на философские проблемы оснований математики, строго говоря, не вписываются ни в одну из распространенных в конце XIX - начале XX в. "философий" математики. У нас, к сожалению, нет сведений о том, каковы были в действительности философские взгляды Пеано. Сам он тщательно избегал высказываться по общим вопросам и даже отрицал свою компетентность в них. Это затрудняет реконструкцию его логической системы.

Единственно, что мы можем предположить в качестве гипотезы, это то, что его взгляды в какой-то степени нашли отражение в итальянском прагматизме, видным представителем которого был ученик и сотрудник Дж.Пеано по "Формуляру" Дж.Вайлати (1863-1909) [11]. Сам Дж.Вайлати неоднократно подчеркивал то влияние, которое оказала логика Дж.Пеано на формирование его философской позиции [17. С. 193] . К сожалению, нам также ничего не известно об отношении самого Дж.Пеано к итальянскому прагматизму. Этот вопрос требует дополнительного исследования с привлечением архивных материалов, публикация которых, по существу, еще очень незначительна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitehead A.N., Russell B. Principia Mathematica. Cambridge, 1910. Vol. 1.
2. Lejemski C. On implication definitions // Studia Logica. 1958. N 8. P. 189-211.
3. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. М., 1979. Т. I.
4. Frege G. Philosophical and mathematical correspondance. Chicago, 1980.
5. Frege G. Posthumous writings. Chicago, 1979.
6. Кутюра Л. Философские принципы математики. СПб., 1913.
7. Peano G. Opere scelte di Giuseppe Peano. Roma, 1958. T. 2.
8. Jourdain Ph. The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1912. Vol. 43. P. 270-314.
9. Frege G. Translations from philosophical writing of G. Frege. Oxford, 1960.
10. Russell B. La logique des rèlations // Riv. mat. 1900-1901. Vol 7. P. 115-148.
11. Grattan-Guiness I. Dear Jourdain. L., 1977.
12. Russell B.Principles of mathematics. L., 1937.

---

[11] Прагматизм в Италии практически не имел точек соприкосновения с американским прагматизмом У.Джеймса и Дж.Дьюи. Это была, скорее, одна из первых попыток создания философии лингвистического анализа.

13. Peano G. Formulario Mathematico. Roma, 1960. T. 5.
14. Cassina U. Sulla critica di Granjot all'aritmetioa di Peano // Critioa dei principii di matematica e questioni di Logica. Roma, 1961
15. Kennedy H.C. The mathematical philosophy of G. Peano // Philos. Sci. 1963. Vol. 30. P. 262-266.
16. Kennedy H.C. Peano's concept of number Hist. Math. // 1974. N 1. P. 387-408.
17. Vailati G. Il metodo della filosofia. Bari, 1967.

А.В.Бессонов, В.В.Петров

ТЕОРИЯ ОБЪЕКТОВ МЕЙНОНГА И ОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ ЛОГИКИ

Алексиус Мейнонг - известный австрийский психолог и философ-идеалист конца XIX - начала XX в. По образованию - историк, как и Э.Гуссерль, он был учеником Ф.Брентано. Теория объектов Мейнонга, развитая им для анализа таких феноменов, как мышление и восприятие, оказала значительное влияние на формирование логико-семантических взглядов его современника Б.Рассела. Многие особенности расселовских теорий собственных имен и дескрипций, а следовательно, и всей идущей от Рассела влиятельнейшей по настоящее время логико-семантической традиции могут быть поняты и оценены лишь в контексте критики теории объектов Мейнонга.

Мейнонговская теория объектов имеет сложную историю. Угасший в результате расселовской критики почти на полвека интерес к ней возрождается в 60-х гг. (см. [12]). И хотя негативное отношение к этой теории было распространенным и позднее, с середины 70-х гг. происходит ее резкая переоценка. Целый ряд работ посвящается опровержению расселовской критики, предпринимаются попытки построения формально-удовлетворительных реконструкций некоторых аспектов теории Мейнонга (см. [7] , [9]). Чем же обусловлен этот интерес? Что нового или хорошо забытого старого может дать теория Мейнонга современной логике? Для того чтобы ответить на поставленные вопросы, рассмотрим, не претендуя на полноту изложения, основные аспекты этой теории.

Мейнонг исходит из принципа, воспринятого им от Брентано, согласно которому все акты суждения характеризуются направленностью на некий объект. "Читатель допустит без оговорок, по крайней мере, относительно тех аспектов психологии, с которыми мы здесь имеем дело, что существенным для всякого психического является то, что он имеет некий объект, поскольку никто не сомневается, что мы не можем иметь какую-либо идею без того, чтобы иметь идею чего-либо, а также мы не можем рассуждать без того, чтобы рассуждать о чем-либо [8. С. 141] . Таким образом, в качестве объектов рассматривается все, на что может быть направлена мысль.

Понятие объекта у Мейнонга - наиболее общее понятие, включающее физические тела, вызываемые ими ощущения, конкретные предметы и абстрактные свойства: объекты могут быть существующими и несуществующими, возможными и невозможными. Для того чтобы пояснить, что он понимает под объектами, Мейнонг противопоставляет объект мысли содержанию мысли. Содержание и объект схожи в том отношении, что как нет никакой идеи или суждения без объекта, так нет идеи или суждения без содержания. Но содержание мысли, по Мейнонгу, реально всегда настолько, насколько реальна сама мысль, и, следовательно, всегда принадлежит области психического. Отсюда если имеется идея физической вещи, то различие между объектом и содержанием очевидно. Объект в данном случае обладает характеристиками (размер, цвет и т.п.), которые неприменимы к содержанию мысли. С другой стороны, содержание идеи существует (в том смысле, в каком существует сама мысль), даже если объект идеи не существует.

При переходе в область лингвистического значения отмеченный тезис интенциональности мысли трансформируется в тезис объективности языковых выражений. Благодаря тому факту, что язык есть "выражение", он проявляет идеи говорящего лица. И он проявляет не только наличие идей вообще, но также их контент-детерминации. Однако то, что говорящее лицо желает "сказать", или, более точно, то, о чем хочет говорить, не является тем, что выражают слова, а является тем, что они обозначают. Тогда то, что выражено словом, есть не содержание, а объект идеи [8. С. 143] . Таким образом, мы приходим к первому ключевому тезису теории Мейнонга: каждый термин языка соотносится с некоторым объектом.

Мейнонг полагает, что все объекты имеют независимый от сознания статус. В отличие от Гуссерля он не строит их как "объекты мысли", порождаемые сознанием. Если Гуссерль рассматривает направленность акта сознания - ноэму - как первичное, а объект мысли как вторичное - по отношению к ноэме, то у Мейнонга объект, представленный в акте, первичен и независим от представления. Даже в том случае, когда имеется в виду несуществующий реально объект, он рассматривается как независимый от сознания. Например, даже "круглый квадрат" рассматривается в качестве независимого от сознания, поскольку он может служить точкой направленности акта суждения, как, например, в предложении: "Некто воображает круглый квадрат". И даже если бы никто и никогда не думал о круглом квадрате, то все равно было бы истиной, что "круглый квадрат не существует". Согласно Мейнонгу, "круглый квадрат" не нуждается в мысли о нем, для того чтобы он мог существовать.

Вторым ключевым тезисом теории Мейнонга, таким образом, является допущение несуществующих объектов. "Нет ничего более обыкновенного, чем идея или суждение о том, что не существует. Несуществование чего-либо может иметь различные причины: это может быть противоречие, как в случае круглого квадрата, может быть только фактическое несуществование, как в случае золотой горы. Может быть нечто, несуществующее по самой своей природе, потому что оно нереально. Равенство между 3 и 3, различие между красным и зеленым может быть ... но оно не может существовать, как, например, существует дом или дерево. Наконец, нечто может быть реальным, но существовавшим ранее или потенциально существующим, но не существующем в настоящем" [8. С. 141] . Введение в рассмотрение несуществующих объектов Мейнонг основывает на том, что они необходимы для адекватного объяснения психологических актов (и этим он чрезвычайно близок современной когнитивной психологии) и для построения корректной общей теории истины. При этом он отвергает два важных философских принципа, восходящих к еще доаристотелевским временам. Согласно первому принципу, множество объектов совпадает с множеством существующих предметов, согласно второму - то, что не существует, не имеет свойств.

Нарушение первого принципа как раз и связано со вторым ключевым тезисом Мейнонга. Нарушение второго принципа есть третий ключевой тезис его теории: несуществующие объекты могут быть субъектами истинной предикации. "Другой аспект представлен ранее уже подразумеваемым контрастом между реальным и идеальным, где эти два термина должны быть понимаемы таким образом, что объекты называются реальными, когда они существуют или, по крайней мере, по своей природе могут существовать, как, например, лошадь, хронограф, книга и, естественно, аналогичные - цвет, звук, электричество и т.д. Этим они противопоставляются объектам, которые по своей собственной природе не могут корректно быть названными существующими, несмотря на то что мы должны принять утверждения о них" [8. С. 150] .

Таким образом, Мейнонг считает допустимыми утверждения, в которых предицируются свойства несуществующим объектам, и полагает, что предложения, подобные "Пегас летает", могут иметь значение истинности. Его уверенность основывается на том, что, во-первых, утверждение "Пегас летает" обладает такой же логической формой, что и утверждение "Аристотель хмурится", и, во-вторых, имени "Пегас" соответствует независимый объект. Отсюда в соответствии с корреспондентной теорией истины, которой Мейнонг последовательно придерживается, утверждению "Пегас летает" может быть приписано значение истинности, а именно истинное.

Третий тезис Мейнонга тесно связан с важным выводом о независимости существования объектов (**Sein**) от их природы, бытия в определенном качестве (**Sosein**). Действительно, так как каждый объект имеет **sein**, то в случае несуществующего объекта, который обладает качеством **p**, можно утверждать, что есть **p**, но нельзя утверждать, что он вообще существует. Например, "круглый квадрат" имеет **Sosein**, поскольку он и круглый и квадратный, но так как его **Sosein** противоречив, он является невозможным объектом и поэтому его не существует.

Несостоятельность теории объектов Мейнонга, если ее рассматривать как гносеологическую теорию, следует из общеизвестной критики идеализма вообще и его феноменологической разновидности в частности (идеализм Мейнонга состоит в признании объективности всех объектов мысли) (см. [27]). Она не может рассматриваться и в качестве адекватной теории существования. Действительно, несмотря на то что разделение объектов на существующие и несуществующие является центральной идеей теории Мейнонга, он нигде не уточняет используемое им понятие существования. В марксистской философии существование рассматривается как одна из предельно общих категорий: "Что и мысль, и материя "действительны", т.е. существуют, это верно" [1. С. 257] . Если же разделить существование на материальное и идеальное и сопоставить мейнонговскому понятию первое (что согласуется с приводимыми им примерами), то опять-таки неприемлемым является объективный статус идеальных объектов.

Рассмотрим теперь теорию объектов Мейнонга как логико-семантическую теорию. Именно в этом качестве ее критиковал Рассел. Первоначально положительно отнесясь к мейнонговской теории (см. [5]), он начиная с 1905 г. ("**On denoting**") стал выступать против допущения в логике несуществующих объектов, так как, по его мнению, они не могут быть введены логически последовательно. Действительно, в соответствии с концепцией Мейнонга, свойства таких объектов должны определяться из их внутренней природы. Так, если такой объект вводится термином, использующим свойство P, то естественно предположить, что свойство P составляет часть его внутренней природы. Отсюда термину "существующая золотая гора" соответствует объект, который существует и является золотой горой, что противоречит тому, что золотая гора не существует. Поэтому Рассел делает вывод: "Сильное чувство реальности необходимо при построении правильного анализа предложений о единорогах и золотых горах, круглых квадратах и других псевдообъектов. Подчиняясь чувству реальности, мы настаиваем на том, что в анализе предложений не может быть допущено ничего нереального" [13, с. 267] .

Почему же современная логика не следует этому завету Рассела? Ведь одной из наиболее популярных логико-семантических теорий сейчас является семантика "возможных миров", а в ней самым широким образом используются нереальные объекты. Более того, не выглядят шокирующими уже и "невозможные возможные миры" (см. [11]). Для ответа на этот вопрос полезно проанализировать обсуждаемую проблему с методологической точки зрения. А именно: какую роль и в решении каких задач логики играют понятия объекта и существования? Общеизвестно, что основной проблемой дедуктивной логики является проблема вывода. Логика призвана описать, систематизировать и обосновать всевозможные правильные способы рассуждений. В решении задачи обоснования вывода главная роль отводится логической семантике. Именно логическая семантика прежде всего дает обоснование той или иной системе способов рассуждения. И наоборот - главной задачей семантики в логике, очевидно, является задача обоснования вывода.

Еще со времен Фреге в логике правильным способом рассуждения считается такой, который никогда не приводит от истинных посылок к ложным заключениям. Это безусловно необходимое (хотя, на наш взгляд, не являющееся достаточным) требование и вводит в соприкосновение логику как теорию вывода с семантикой, к концептуальному аппарату которой традиционно относится используемое при оценке суждений понятие истины. Стандартная стратегия семантического обоснования логического вывода, развитая в работах позднего Фреге, Рассела, Карнапа и Тарского, исходит из объективных референциальных отношений между терминами и внелингвистическими объектами, предикатами и множествами объектов, на основании чего определяются условия истинности предложений. Именно при определении условий истинности предложений и вводится обычно в логический аппарат понятие объекта.

Такого рода введение почти всегда сопровождается обсуждением проблем существования объектов. Но какой смысл имеет их онтологизация в решении задачи обоснования логического вывода? Можно выделить три главных мотива. Это, во-первых, отождествление понятия истины, используемого при определении правильного вывода, с классической аристотелевской концепцией истины (истина -соответствие действительности). Во-вторых, метафизическое убеждение в существовании абсолютного обоснования законов логики, которое будто бы и достигается путем прямого соотнесения языковых единиц с реальностью объективно существующих объектов. И, в-третьих, господствовавшая долгое время исключительно экзистенциальная интерпретация кванторных выражений.

Что касается первого мотива, то в свете современных логических результатов становится все более очевидным, что логико-семантическое понятие истины, в сущности, очень слабо связано с какой-либо теоретико-познавательной концепцией истины. Как пишет Патнэм, "тот факт, что кто-либо принимает классическую логику, еще не показывает, что он понимает истину... реалистично" [10. с. 34] . Небезынтересно, что, по свидетельству Брэндома, Фреге вводит понятие истины как вспомогательное понятие: "Основной инструмент, который применяет Фреге - это то, что мы можем назвать семантическим принципом. А именно, что хороший вывод никогда не приводит из посылок, которые являются истинными, к заключениям, которые не являются истинными. Истина вводится как технически вспомогательное понятие, роль которого состоит в том, чтобы помогать систематизировать такие выводы" [4. с. 639] .

Развитие логики все более показывает несостоятельность и второго мотива онтологизации логических объектов. Так, Дэвидсон показал, что стандартное логико-семантическое понятие соотнесения (референции) следует рассматривать не как объективное отношение, но как теоретический конструкт (см. [6]). Отсюда сопоставление объектов выражениям языка при его интерпретации вовсе не приводит язык в соприкосновение в реальностью, не означает автоматически его онтологизации и уж никак не может служить абсолютным обоснованием истин логики.

Абсолютного обоснования логики вообще не существует в рамках ее собственного предмета. Если же ставить задачу относительного обоснования, то сразу возникает проблема выбора понятий, в которых возможно обосновать логический вывод. Такие понятия, конечно, должны обладать более фундаментальным статусом по сравнению с понятием логического вывода. Анализ показывает, что логико-семантическое понятие истины по отношению к понятию логического вывода отнюдь не является первичным (см. [3]). Не способствует решению задачи обоснования вывода и введение фундаментального, но чрезвычайно многозначного понятия существования. Отсюда можно сделать вывод, что данные понятия не являются необходимыми элементами обоснования логического вывода.

Конечно, логическая семантика не концентрируется исключительно вокруг задачи обоснования вывода. Она используется также для решения задач экспликации реальных рассуждений, для уточнения как понятий естественного языка, так и отношений между понятиями. Поэтому привлечение понятия объекта оправдано в тех случаях, когда эксплицируемый контекст естественного языка достаточно определенно выражает отношение языка к внеязыковой действительности. В этом случае объекты используются для построения модели внешнего мира.

Однако, кроме конкретных прикладных использований логики, существует гораздо более глубокая причина, по которой логика связана с понятием объекта. Дело в том, что применение символической логики, начиная от аристотелевской силлогистики и до современных формальных систем, основывается на предпосылке, согласно которой лингвистические выражения в процессе всего рассуждения не изменяют своего значения. У Аристотеля эта предпосылка зафиксирована в одном из его четырех логических законов - законе тождества ("А есть А"), в современной логике данная предпосылка относится не к логическим, а скорее к теоретико-познавательным и методологическим принципам. Нарушение этого принципа приводит к тому, что правильный с формально-логической точки зрения вывод может привести к неприемлемым заключениям.

Но в таком случае применение символической логики связано с ответом на вопрос: что такое значение лингвистических выражений или по крайней мере, что такое "одно и то же значение"? Именно в этом пункте логика оказывается связанной с философией языка, зависимой от решения проблем значения или, по крайней мере, от проблемы идентификации значений. Именно здесь в логике и возникает необходимость обращения к объектам - идентифицируемым значениям лингвистических выражений.

Если согласиться с тем, что понятие объекта возникает в логике именно в связи с задачей обеспечения однозначности языковых выражений в процессе вывода, то естественным образом возникает проблема построения теории таких объектов. А эта проблема, если учесть, что сегодня логика открыто ориентируется на естественный язык, по существу эквивалентна проблеме значения в самой общей ее постановке. Даже если ограничиться вопросом об идентификации значений, то и тогда проблема выглядит совершенно безбрежной. А то, что она не может быть окончательно решена чисто логическими или близкими к ним средствами, подчеркивается тем обстоятельством, что формальный аппарат не фиксирует значения даже логических операций. Действительно, об этом свидетельствует, например, проведенная Патнэмом интуиционистская переориентация классических пропозициональных связок (см. [10]).

Что же в таком случае остается логической семантике, если она ориентируется на выявление принципов идентификации значений выражений естественного языка и связей между ними? Остается один путь - экспликация, уточнение сложнейшего понятия лингвистического значения, руководствуясь теми или иными теоретико-познавательными принципами. Но тут, как и всегда, когда речь идет об экспликации, вступают в силу две противоречивые тенденции: стремление к ясности, простоте, точности экспликата, с одной стороны, и направленность на более полное, адекватное представление экспликандума - с другой.

Применительно к нашему случаю первая тенденция реализуется в уточнении фразы "одно и то же значение", а вторая - в стремлении дополнить эту фразу словами: "каково бы оно ни было". Коллизия между двумя тенденциями явно проявляется при сопоставлении стандартной концепции референции и теории объектов Мейнонга. Действительно, в концепции референции вопрос о природе значения получает достаточно простой ответ: "значить нечто суть обозначать нечто". Все слова обладают значением в том простом смысле, что они представляют собой символы, которые замещают что-то, не являющееся ими самими (см. [14. С. 47]). Допущение в качестве обозначаемых лишь "грубо реальных" объектов имеет цель обеспечить относительно простые критерии идентификации значений. Однако эта простота приводит к тому, что в рамках стандартной концепции референции невозможно сформулировать адекватную семантику, например, для модальных рассуждений. Не случайно, что периоды оживления интереса к теории объектов Мейнонга совпали (с некоторым запаздыванием) с периодами актуализации проблем модальной логики.

Теория Мейнонга, напротив, в состоянии выразить модальные, да и многие другие различия, поскольку она буквально следует за естественным языком. В то же время вопрос о критериях идентификации, скажем, несуществующих объектов в этой теории не может быть разрешен рациональным образом, поскольку она основана на неверной предпосылке об объективности всех без исключения объектов.

Заметим, что в вопросе об объективности идентифицируемых значений позиции Рассела и Мейнонга совпадают: как тот, так и другой полагают логические объекты,абсолютно независимыми от сознания. Такой подход объясняется стремлением дать абсолютное обоснование истин логики. Но эти попытки оказались бесплодными.

Из сказанного следует, что вопрос о применимости логики к контексту, содержащему некоторый термин, не имеет отношения к тому, обозначает или нет этот термин реальный, чувственно воспринимаемый предмет. Достаточно, на наш взгляд, чтобы этот термин обладал интерсубъективно идентифицируемым значением. И конечно, такие термины, как "Пегас", "единорог" и т.п., подобным значением обладают. С этим согласился бы и Рассел, поскольку использование этих терминов в языке явно основано на том, что и он сам, и читатель придают буквосочетанию "единорог" одно и то же значение.

Что касается возможности истинной оценки утверждений с "пустыми" терминами, то этот вопрос требует более подробного рассмотрения. Прежде всего вспомним, что понятие истины, используемое в логике как теории правильного вывода, является весьма неопределенным. Как уже было сказано, оно не сводится к классической концепции истины и тем более к тому ее варианту, когда рассматривается соответствие чувственно-воспринимаемому положению дел. Анализируя объекты в логике как идентифицируемые значения лингвистических выражений, мы можем теперь уточнить и логико-семантическое понятие истины. Оно в данном случае сводится к логической правильности, т.е. к употреблению терминов в заранее фиксированном значении с фиксированной же связью значений терминов различных семантических категорий. С этой точки зрения, например, предложение "трава - белая" ложно только в силу того, что идентифицируемые значения терминов "трава" и "белый", принадлежащих различным семантическим категориям, по тем или иным причинам заранее не связаны.

Но по тем же основаниям мы можем оценить как истинное, т.е. как правильное, соединение терминов "Пегас" и "летает", предложение "Пегас летает" и как ложное, т.е. как неправильное соединение терминов "Пегас" и "ползает", утверждение "Пегас ползает".

С представленной точки зрения всякое предложение, все структурные единицы которого обладают идентифицируемым значением, и при условии, что связь значений лингвистических выражений заранее установлена, может быть оценено как (логико-семантически) истинное или ложное. А поскольку в логике используется именно логико-семантическое понятие истины как характеристика предложений, инвариантная относительно вывода, всякое предложение, удовлетворяющее перечисленным свойствам, допустимо в логическом анализе.

Конечно, представленная здесь точка зрения не столько завершает анализ, сколько ориентирует на дальнейшее исследование. Речь идет о поиске новых средств систематизации идентифицируемых значений, способных отразить многообразие связей между значениями терминов естественного языка. В этом плане теорию объектов Мейнонга, хотя она не является ни достаточно разработанной, ни свободной от явных недостатков, следует рассматривать как определенную идейную базу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленин В.И. Полн. собр. соч. Т. 18.

2. Бабушкин В.У. Феноменологическая философия науки. М., 1985.
3. Бессонов А.В. Предметная область в логической семантике. Новосибирск, 1985.
4. Brandom R. Asserting // Noûs. 1983. N 4.
5. Cochiarella N. Meinong Reconstructed versus Early Russel Reconstructed // J. Philos. Logic. 1982. N 1.
6. Davidson D. Reality without Reference // Reference, Truth and Reality. L., 1980.
7. Lambert K. Meinong and the Principle of Independence. N.Y., 1983.
8. Meinong A. On Objects of Higher Order and Husserl's Phenomenology. Hague, 1978.
9. Parsons T. Nonexistent Objects. New Haven, 1980.
10. Putnam H. Meaning and Moral Sciences. Boston, 1978.
11. Rescher N., Brandom R. The Logic of Inconsistency. Oxford, 1980.
12. Routley R. Exploring Meinong's Jungle and Beyond. Canberra, 1980.
13. Russell B. Introduction to Mathematical Philosophy. L., 1919.
14. Russell B. Principles of Mathematics. Cambridge, 1903.

Д.Фоллесдаль

ПОНЯТИЕ НОЭМЫ В ФЕНОМЕНОЛОГИИ ГУССЕРЛЯ

Главной темой феноменологии, по Гуссерлю, является интенциональность, т.е. особенность сознания, состоящая в том, чтобы быть сознанием чего-либо (см.: [1. С. 203, 204, 257]). Интерес к интенциональности Гуссерль унаследовал от своего учителя, Брентано. Согласно Брентано, "всякий ментальный феномен характеризуется тем, что схоласты средневековья называли интенциональным (а также ментальным) небытием объекта и что мы могли бы назвать, хотя и не совсем недвусмысленным образом, референцией к содержанию, направленностью на объект" [2. С. 50] .

Принцип интенциональности может показаться совершенно очевидным, однако он приводит к трудностям, когда, к примеру, мы пытаемся применить его к человеку, который воспринимает галлюцинацию, или к человеку, который думает о Кентавре. Брентано считает, что даже в этих случаях наша ментальная активность - наше размышление или наше чувственное восприятие - направлена на некоторый объект. Направленность сознания, по его мнению, не имеет никакого отношения к реальному существованию объектов; объект внутренне присущ нашей ментальной активности, "интенциональность" содержится в нем.

Однако если допущение, что объекты актов сознания реальны, ведет к трудностям в случае кентавров и галлюцинаций, то допущение, что объекты нереальны, что бы это ни означало, ведет к трудностям в случае многих других актов, например актов обычного чувственного восприятия: при таком допущении

---

[1] Follesdal D. Husserl's notion // J. Philos. 1969. Vol. 66 P. 680-687.
Пер. с англ. В.Н. Переверзев

оказывается, что то, что мы видим, когда смотрим на некоторое дерево, есть не реальное дерево, находящееся перед нами, а нечто такое, что мы бы видели и в том случае, если бы воспринимали галлюцинацию.

Таким образом, мы сталкиваемся с дилеммой. Гуссерль устранил эту дилемму, положив, что, хотя всякий акт является направленным, это не значит, что всегда существует объект, на который акт направлен. По Гуссерлю, имеется связанная с каждым актом ноэма, посредством которой акт направлен на свой объект, если таковой вообще существует. Когда мы размышляем о Кентавре, наш акт размышления имеет ноэму, но не имеет объекта; в этом случае не существует объекта, о котором мы думаем. Однако благодаря ноэме даже такой акт сознания является направленным. Быть направленным - значит не что иное, как иметь ноэму.

Понятие ноэмы является, следовательно, ключевым понятием теории интенциональности и тем самым всей феноменологии Гуссерля. По Гуссерлю, правильное понимание дистинкций, связанных с ноэмой, "является наиболее важным для феноменологии и имеет решающее значение для придания ей надлежащего основания" [1. С. 239] .

В данной статье я представлю несколько тезисов, касающихся ноэмы, и обосную их с помощью содержательных доводов и текстуальных выдержек из работ Гуссерля. Я попытаюсь охарактеризовать понятие ноэмы с той точностью и полнотой, которая возможна с учетом соответствующих высказываний Гуссерля, содержащихся в различных опубликованных и неопубликованных его работах.

Моим основным тезисом является следующее положение:

1. Ноэма есть интенсиональная сущность, обобщение понятия значения (смысла).

Данный тезис и его следствия идут вразрез с обычной интерпретацией Гуссерля, однако они хорошо согласуются с тем, что писал сам Гуссерль. В третьем томе **Ideen** Гуссерль утверждает: "Ноэма есть не что иное, как обобщение идеи значения (смысла) на область всех актов" [3. С. 89] . Кроме того, и во многих других своих работах Гуссерль высказывает подобный взгляд. В первом томе **Ideen** он говорит: "Первоначально эти слова ("Означать" и "Значение") относились только к области лингвистики. Однако необходимо и вместе с тем важно расширить значение этих слов и модифицировать их таким образом, чтобы они оказались применимыми ко всей ноэтико-ноэматической области: то есть ко всем актам, независимо от того, связаны они с лингвистическими актами или нет" [1. С. 304] . Гуссерль характеризует полную ноэму как "смысл (в наиболее широком смысле)" [1. С. 233] (см. также [1. С. 219, 223]).

Следует учитывать двусмысленность использования Гуссерлем слова "смысл" применительно к ноэме. Иногда он имеет в виду полную ноэму, а иногда только часть ее, часть, которая может быть той же самой в актах различных видов, например в актах восприятия, воспоминания, воображения и т.д. Нашим вторым тезисом является поэтому следующее положение:

2. Ноэма имеет две компоненты: (1) компонента, общая для всех направленных на один и тот же объект актов, имеющих одни и те же свойства, ориентированных одним и тем же образом, и т.д. независимо от "тетического" ("**thetic** ") характера этих актов, т.е. от того, являются они актами чувственного восприятия, воспоминания, воображения и т.д., и (2) компонента, которая различна в актах различного тетического характера.

Первую из этих компонент Гуссерль называет "ноэматическим смыслом" ("**Noematischer Sinn** "), [1. С. 321]), а также "предметным смыслом" ("**gegenständlischer**", [1. С. 249, 250, 322]). Вторую компоненту он называет "ноэматическим коррелятом" способа данности объекта [1. С. 323, 250] или "способа, которым объект осознается" [2]. Важной частью "способа данности" является тетический характер акта (см. [1. С. 325 , **NuS** . С. 6]).

Другой частью "способа данности" является образное представление. Как и следовало ожидать, Гуссерль утверждает, что вторую компоненту, так же как и первую, можно рассматривать как компоненту смысла в его расширенном понимании (см. [1. С. 223]). В "Логических исследованиях" (§20-21) Гуссерль называет первую компоненту "**Materie**", вторую "**Qualität** ", а обе компоненты вместе - "**Sinn** ". В **Ideen** Гуссерль обычно использует "Смысл" ("**Sinn** ") для первой компоненты, а "Ноэма" (" **Noema**") для двух компонент вместе.

Третьим тезисом является следующее положение:

3. Ноэматический смысл есть то, посредством чего сознание соотносится с объектом.

Данный тезис также хорошо подтверждается высказываниями Гуссерля: "Сознание соотносится посредством этого смысла со своим объектом"; "Всякий интенциональный опыт имеет ноэму, а вместе с ней и смысл, посредством которого она соотносит данный опыт с объектом" [1. С. 329] (см. также [1. С. 316, 318]).

Ключевым пунктом феноменологии Гуссерля является следующее положение:

4. Ноэма акта не является объектом данного акта (т.е. объектом, на который данный акт направлен).

В этом состоит решающее различие между Гуссерлем и Брентано: дилемма, отмеченная в нашей статье, возникает из-за того, что, как считает Брентано, объект, придающий акту его направленность, есть объект, на который направлен данный акт. На протяжении всей своей жизни Брентано стремился сделать более ясным отношение акта к своему объекту, но он так и не мог добиться успеха.

Объект акта является функцией от ноэматического смысла акта, в том смысле, что:

5. Одной и той же ноэме соответствует только один объект.

Фактически Гуссерль даже утверждает, что "смысловое тождество имеет место только тогда, когда объект, помимо того, что он является одним и тем же, имеет "один и тот же смысл", т.е. имеет одни и те же свойства и т.д. [**NuS** . С. 4] (см. также [1. С. 328]).

Однако обратное неверно:

6. Одному и тому же объекту может соответствовать несколько различных ноэм.

Данный тезис является тривиально истинным ввиду тезиса 2, ибо две ноэмы, имеющие один и тот же ноэматический смысл, могут тем не менее иметь различный тетический характер, и, таким образом, быть различными ноэмами. В силу этого, к примеру, акты восприятия, воспоминания и т.д. могут иметь один и тот же объект. Вместе с тем более сильным вариантом тезиса 6 можно считать тезис:

---

[2] См. Неопубликованную рукопись "Ноэма и смысл" (**Noema und Sinn**). С. 6. В дальнейшем эту рукопись будем обозначать как "**NuS** " с указанием соответствующих номеров ее страниц.

6.* Одному и тому же объекту может соответствовать несколько различных ноэматических смыслов.

Данный тезис вытекает фактически из цитаты, которую мы только что привели в поддержку тезиса 5: объектного тождества недостаточно, чтобы гарантировать смысловое тождество; мы должны, кроме прочего, потребовать, чтобы объект был дан в одном и том же отношении с одними и теми же свойствами и т.д. (см. [1. С. 321]).

Ноэмы являются средством индивидуализации актов, в том смысле, что:

7. Всякий акт имеет одну, и только одну ноэму.

Как отмечает Гуссерль, "всякий акт имеет свою ноэму в качестве своей индивидуальной характеристики" [NuS. С. 2] .

Следует отметить, что обратное неверно: одной и той же ноэме может соответствовать несколько различных актов. Такие акты будут подобны друг другу; они будут направлены на один и тот же объект, иметь одни и те же свойства и ориентированы одним и тем же образом; и они будут иметь один и тот же тетический характер. И все же они могут быть различными актами; они могут, например, иметь различные временные координаты.

Как и следовало ожидать, ноэмы почти во всех отношениях подобны лингвистическим значениям (смыслам). Так, следует отметить следующее важное следствие тезиса 1:

8. Ноэмы являются абстрактными сущностями.

В пользу данного тезиса свидетельствуют следующие слова Гуссерля: "Данное дерево, данная вещь в природе, ни в коем случае не является тем воспринимаемым деревом, которое всецело принадлежит восприятию в качестве перцептуального смысла. Данное дерево может гореть, может распасться на свои химические элементы и т.д. Однако данный смысл - смысл данного восприятия, который необходимо относится к его сущности - не может гореть, он не может иметь ни химических элементов, ни физических характеристик, ни реальных свойств" [1. С. 222] . В NuS Гуссерль отмечает: "Смыслы суть нереальные объекты, они не являются объектами, существующими во времени"; "Смысл не обладает реальным существованием, он соотносится с временным интервалом через посредство акта, в котором имеет место, но сам по себе он реально не существует, не имеет непосредственной связи с временем и длительностью" [NuS. С. 109, 114] .

Здесь Гуссерль говорит о ноэматическом смысле, но поскольку другие компоненты ноэмы также являются "смысловыми" компонентами (см. [1. С. 223] , то же самое, по-видимому, верно и для них и тем самым для ноэмы в целом. Гуссерль отмечает, что и ноэматические смыслы и ноэмы в целом относятся к сущностям одной и той же разновидности (см. [1. С. 314]). То, что ноэма не является пространственным объектом, ясно из Ideen [1. С. 97] , где Гуссерль отмечает, что пространственные объекты могут быть даны в опыте только посредством ментальной перспективы (ментального поля зрения). Поскольку ноэмы в принципе не воспринимаются посредством ментальной перспективы, они не являются пространственными объектами.

Со сказанным тесно связано следующее положение, отличающееся от большинства современных точек зрения на суть ноэмы:

9. Ноэмы не воспринимаются посредством наших органов чувств.

Эта точка зрения не сформулирована в явной форме в каких-либо опубликованных работах Гуссерля. Однако она является непосредственным следствием тезиса 8, и если допустить, что она ложна, то тезис 8 и ряд других наших тезисов оказались бы ложными вместе с ней. Поэтому важно выяснить, существует ли в работах Гуссерля свидетельство "за" или "против" тезиса 9. Наиболее ясно Гуссерль выражает свой взгляд по этому вопросу в **Ideen**, где он отмечает, что все видимые объекты могут быть даны в опыте только посредством ментальной перспективы (см. [1. С. 97]). Поскольку ноэмы, как только что было отмечено, не даны в опыте посредством ментальной перспективы, они, следовательно, не являются видимыми объектами. По-видимому, они не воспринимаются и какими-либо другими органами чувств.

Однако в неопубликованной работе **Noema und Sinn**, на которую я ссылался выше, Гуссерль более ясно высказывается по этому вопросу. В длинном пассаже, который я цитирую полностью, он говорит: "Данное восприятие есть "восприятие" этого смысла, но не таким образом, каким данное восприятие есть восприятие этого дома. Данное восприятие "имеет" смысл, но этот смысл не воспринимается. Вместе с тем я полагаю в отношении данного восприятия, что оно имеет этот смысл и что оно соответственно (в соответствии со своим смыслом) характеризуется как восприятие здания периода Ренессанса, фасад которого имеет колонны из песчаника и т.д. Если я закрываю глаза и имею это здание данным соответственно мне в памяти, то я говорю снова, что это есть память о том же самом смысле, в нем посредством памяти представлена та же самая вещь, которая ранее была воспринята. И если я описываю чистую фантазию, то я говорю снова, что в соответствии с ее смыслом, это есть фантазия о ... и возможно, что фантазия имеет точно тот же самый смысл, что и восприятие" [**NuS**. С. 4]. Здесь Гуссерль опять говорит о ноэматическом смысле, но, как было отмечено выше, сказанное применимо ко всем компонентам ноэмы.

Кто-нибудь может спросить, как в таком случае он может что-либо узнать о ноэме. Ответ Гуссерля заключается в следующем:

10. Ноэмы известны посредством специальной рефлексии, феноменологической рефлексии.

Наши предыдущие тезисы о ноэме теперь помогут нам установить, чем эта рефлексия является и чем она не является. Она есть понимание смысла. Цитируем Гуссерля: "На этот смысл ... кто-либо всегда может направить собственную рефлексию, и только то, что понимается с ее помощью, есть основа феноменологического суждения" [1. С. 222]. В **Noema und Sinn** Гуссерль также подчеркивает, что "рефлектирующее суждение феноменологии и логики направлено на смысл и, следовательно, не направлено на то, что является объектом нерефлектирующего суждения" [**NuS**. С. 99-100]. То, что рефлектируется не только ноэматический смысл, но и ноэма в целом, ясно из ряда мест в работах Гуссерля (см., например, [1. С. 369]).

Феноменологическая рефлексия не является, следовательно, каким-либо специальным способом наблюдения или использования наших ощущений; объекты феноменологической рефлексии являются, как мы уже отметили в предшествующих тезисах, абстрактными и чувственно невоспринимаемыми.

По Гуссерлю:

11. Феноменологическая рефлексия может повторяться.

т.е. "смысл, соответствующий объекту, есть, в свою очередь, объект ... он может быть объектом суждения... Как таковой он имеет смысл второго уровня: смысл смысла,... следовательно мы приходим к бесконечному регрессу, поскольку смысл смысла может, в свою очередь, быть взят в качестве объекта и затем снова иметь смысл и т.д." [Nus. С. 107-108] . Как отмечает Гуссерль, это снова имеет то следствие, что "смысл не может быть реальной составной частью объекта" [Nus. С. 108] . В этом заключается одно из наиболее поразительных совпадений между гуссерлевским понятием ноэмы и фрегевским понятием смысла. Однако имеются также и важные различия. Так, если Фреге считает, что в контекстах типа "думает, что" термины обозначают не их обычные референты, а их обычный смысл, то Гуссерль считает, как мы видели (тезис 4), что акты сознания обычно направлены на обычные объекты и не направлены на смыслы или ноэмы таких объектов. Это приводит к основным различиям и в их анализе контекстов актов сознания.

Хотелось бы узнать гораздо больше и подробнее о том, что есть суть ноэмы. Как и Фреге, Гуссерль мало может в этом помочь. Одно из замечаний, данных Фреге относительно смыслов, заключалось в том, что они служат для прояснения аспектов референции. В некоторой степени это соответствует ноэмам в том отношении, что акты с одним и тем же объектом, но различными ноэмами, можно сказать, концентрируют внимание на различных аспектах объекта, охватывают его с различных точек зрения. Кроме того, Гуссерль, так же как и Фреге, считает, что всякий физический объект имеет бесконечное число соответствующих ему ноэм и смыслов, и они никогда не могут исчерпать его сущность. Физические объекты являются "трансцендентными", если использовать гуссерлевский термин (см. [1. С. 11, 228]).

Гуссерль дает и еще некоторые пояснения. В соответствии с тезисом 3, ноэма или, более точно, ноэматический смысл есть то, посредством чего сознание соотносится с объектом. Возьмем в качестве примера видение. То, что видение интенционально, объектно-направленно, означает, что та ближайшая сторона вещи, которую мы имеем перед собой, рассматривается только как сторона вещи, и что эта видимая нами вещь имеет другие стороны и признаки, которые подразумеваются в такой мере, что вещь в целом рассматривается как нечто большее, чем одна сторона. Эти признаки не являются перцептуально наполненными; они представлены более или менее смутно, и ведут нас к дальнейшим перцептуальным процессам, которые делают невидимое видимым.

Ноэма есть сложная система таких признаков (см. [1. С. 93]), которая делает множество визуальных, осязательных и других данных феноменами одного объекта (см. [1. С. 173-174]). Цитируем Гуссерля: "Чистые перцептуальные данные ... сами по себе не являются относящимися к ментальному полю зрения, но они становятся таковыми посредством того, что мы называем пониманием, т.е. тем, что придает им субъективную функцию быть феноменами реальной действительности" [1. С. 163] .

Таким образом, посредством ментальной перспективы мы воспринимаем объекты. Пока дальнейшее течение нашего опыта соответствует, более или менее смутно, предустановленной схеме, мы продолжаем воспринимать тот же самый объект и приобретаем в отношении него более "многосторонний" опыт в рамках этой схемы, которая совершенствуется вместе с нашим опытом об этом объекте так, чтобы она могла вместить в себя какие-либо новые, еще не обнаруженные в опыте признаки. Иногда данные нашего опыта не соответствуют предустановленной схеме, тогда мы имеем "вспышку" ноэмы и новую ноэму нового объекта. Мы находились, что вполне возможно, в состоянии ошибочного восприятия, в плену иллюзии или галлюцинации, и мы говорим, что первоначальный акт сознания не имеет своим объектом тот объект, на который, как нам казалось, он был направлен.

12. Эта система признаков вместе со способом данности объекта и есть ноэма.

Мои двенадцать тезисов, касающихся понятия ноэмы, не исчерпывают предмет рассмотрения; они лишь побуждают нас задавать вопросы типа: если феноменология есть наука о значении в расширенном смысле, то какой свет проливает она на те вопросы, касающиеся значения, которые играли главную роль в период становления философии науки и которые представляют основной интерес для столь многих современных философов? Действительно ли феноменология преодолевает те трудности, которые являются камнем преткновения для многих старых и новых теорий значения? Тщательное изучение работ Гуссерля позволит, я думаю, в какой-то мере ответить на эти вопросы. И даже если ответы на них окажутся отрицательными, я надеюсь, что такое изучение будет способствовать лучшему пониманию того, в чем эти трудности заключаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Husserl E. Ideen zu einer Phänomenologie und Phänomenologischen Philosophie.** Hague, 1950. Vol. 1.
2. Brentano F. Psychologie vom empirischen Standpunkt. // Realism and the Backgrovnd of Phenomenology. Clencoe, 1960. Vol. 1, b. 2, chap. 1.
3. **Husserl E. Ideen zu einer Phänomenologie und Phänomenologischen Philosophie.** Hague, 1950. Vol. III.

В.Н.Переверзев

НОЭМЫ КАК ОБЪЕКТ ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКОГО АНАЛИЗА

(Послесловие к статье Д.Фоллесдаля "Понятие ноэмы в феноменологии Гуссерля")

До последнего времени в отечественной литературе теоретическое наследие Эдмунда Гуссерля - одного из крупнейших аналитических философов XX столетия - было предметом главным образом историко-философского рассмотрения, ориентированного преимущественно на критику идеалистических установок и общефилософских умозрений философа (см., например, [1], [2], [3]). Вместе с тем теория Гуссерля, являющаяся, помимо прочего, достаточно масштабной и глубокой попыткой абстрактно-феноменологического осмысления гносеологических структур и механизмов сознания, заслуживает не только историко-философского, но и тщательного логико-семантического и методологического анализа.

В настоящее время уже не вызывает сомнения тот факт, что проблема интенциональности - центральная проблема феноменологии - является "одной из важнейших, и притом крайне сложных, научных проблем" [4. С. 32] и в той или иной форме имеет отношение к целому ряду конкретных проблем в области логической семантики, когнитивной психологии, машинного моделирования познавательных процессов человека и т.д. Более того, становится очевидной и актуальность логической реконструкции важнейших понятий феноменологии - понятия ноэмы, ноэзиса, горизонта, эпохе и др. - и феноменологического метода Гуссерля в целом.

В этом отношении несомненный интерес представляет статья Д.Фоллесдаля, посвященная центральному понятию феноменологии - понятию ноэмы. В советской логико-философской науке понятие ноэмы, как и вообще логическая концепция Гуссерля, еще не стало предметом всестороннего рассмотрения. Ввиду этого представляется целесообразным сделать несколько замечаний по поводу содержания публикуемой статьи.

Статьи Фоллесдаля представляет собой краткий и достаточно содержательный комментарий к важнейшим аспектам понятия ноэмы. Автор стремится показать, в каком смысле ноэмы являются, по Гуссерлю, абстрактными (идеальными) сущностями (тезисы I, 8). Прежде всего это означает, что ноэмы не являются чувственно-воспринимаемыми объектами (тезис 9). Следует подчеркнуть, что под чувственно-воспринимаемыми объектами имеются в виду не только чувственно воспринимаемые объекты внешнего мира, но и объекты внутреннего чувственного восприятия (образы, галлюцинации, эмоции и т.п.). Таким образом, можно сказать, что Гуссерль рассматривает ноэмы как абстрактные сущности, не тождественные ни физическим объектам, ни ментальным феноменам (см. подробнее [5. С. 74-76]). В связи с этим возникает вопрос: (1) являются ли вообще ноэмы объектами? Фоллесдаль показывает, что, по сути дела, Гуссерль отвечает на этот вопрос положительно: ноэмы суть объекты, которые даны человеку не посредством чувственного восприятия, а посредством феноменологической рефлексии (тезис 10), т.е., проще говоря, посредством абстрактного (мысленного) восприятия, посредством мышления, направленного непосредственно не на объекты интенциональных актов сознания, а на понятийное содержание этих объектов, в частности, на понятийное содержание материальных объектов. Таким образом, ясно, что ноэмы, по Гуссерлю, суть не просто объекты, но абстрактные объекты.

Отсюда вытекает, в свою очередь, еще два немаловажных вопроса: если ноэмы - абстрактные объекты, то (2) какие это абстрактные объекты, в чем их отличие от других абстрактных объектов, как, например, смыслы, логические отношения, натуральные числа и т.п.? (3) какова их роль в познавательном процессе?

Ответ на вопрос (2) состоит отчасти в том, что понятие ноэмы - обобщение лингвистического значения (смысла) на область всех возможных актов сознания (тезис 1). От смыслов мы переходим к абстрактным объектам более сложной структуры, в которые смыслы входят в качестве абстрактной "компоненты": всякая ноэма разделяется на ноэматический смысл, являющийся понятийным отображением объекта интенции, и ноэматический коррелят, характеризующий конкретный "способ данности" объекта интенции сознанию. Скажем, если объектом интенционального акта является некий материальный объект, то ноэмой этого акта является абстрактный объект, являющийся понятийным отображением (разумеется, лишь частичным, неполным), с одной стороны, объекта интенции, а с другой - индивидуальной "специфики" самого интенционального акта. Причем если объектом некоторого интенционального акта A_2 является ноэма некоторого акта A_1, то ноэма акта A_2 является понятийным отображением ноэмы акта A_1 и "специфики" акта A_2. Аналогичным образом ноэма акта A_2 может рассматриваться в качестве объекта интенционального акта A_3 и т.д. до бесконечности (тезис II). Таким образом, как отмечает Фоллесдаль, Гуссерль получает такую же бесконечную иерархию уровней для ноэм, как Фреге - для смыслов.

Ясно, что ответ на вопрос (2) не исчерпывается сказанным выше. Предложенная Гуссерлем абстрактно-феноменологическая структура интенциональных актов сознания требует дальнейших уточнений и корректировок, ибо более или менее полно ответить на вопрос (2) - значит раскрыть логическую структуру ноэм (смыслов) как некоторых абстрактных объектов, соотносящих сознание человека с объектами его внешнего и внутреннего чувственного восприятия.

Во-первых, нуждается в уточнении понятие ноэматического коррелята. Конечно, учитывать индивидуальную "специфику" интенциональных актов необходимо. Однако для этого, по-видимому, не требуется проводить онтологическое различие между ноэматическими смыслами и ноэматическими коррелятами. Как отмечает Фоллесдаль, Гуссерль относит и ноэматические смыслы, и ноэмы в целом (а следовательно, и ноэматические корреляты) к объектам одного и того же рода, часто используя слово "смысл" и применительно к ноэматическому смыслу, и применительно к ноэме в целом. Можно предположить, что в концепции Гуссерля ноэматический коррелят, по существу, есть не что иное, как определенная разновидность ноэматического смысла, а именно такого ноэматического смысла, который является понятийным отображением не объекта некоторого интенционального акта, а самой "специфики" данного интенционального акта, взятой в качестве объекта некоторого другого интенционального акта.

Во-вторых, в плане унификации онтологии представляется целесообразным редуцировать бесконечную иерархию уровней ноэм к той или иной конечной иерархии, скажем к иерархии из трех бесконечных (открытых) областей: материальных объектов; их свойств (качеств); n-местных отношений. В этом случае логическая структура ноэм могла бы быть более-менее стандартным образом представлена в виде структуры отношений, заданных на свойствах.

Что касается вопроса (3), то ответ на него отчасти явно, отчасти имплицитно содержится в тезисах Фоллесдаля: роль ноэм именно в том, что они соотносят сознание с объектами (тезис 3), конституируют объекты объективной реальности в качестве объектов субъективной реальности сознания; благодаря ноэмам акты сознания оказываются "сфокусированными" на различных аспектах реального объекта интенции, "охватывая" его с различных точек зрения; причем в силу неоднозначности соответствия между ноэмами и реальными объектами интенциональных актов (тезисы 5-7) всякая конкретная ноэма допускает возможность дальнейшего осуществления познавательного процесса. В конечном счете ноэмы образуют ноэматическое поле, обеспечивающее целостную, концептуальную взаимосвязь сознания человека с объективной действительностью. Таким образом, вполне можно сказать, что "для научно-теоретического мышления роль ноэмы очень существенна, так как именно в ноэме концентрируются итоги познавательной деятельности, совокупность же ноэм образует тот идеальный мир научного знания, который дает возможность ученым понимать друг друга" [4. С. 36] . Изучение и адекватное гносеологическое обоснование этого "идеального мира научного знания" - одна из актуальных задач современной логико-философской науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мотрошилова Н.В. Принципы и противоречия феноменологической философии. М., 1968.
2. Критика феноменологического направления современной буржуазной философии. Рига, 1981.
3. Философия Э.Гуссерля и ее критика. М., 1983.
4. Бабушкин В.У. Феноменологическая философия науки. М., 1985.
5. Петров В.В. Истоки логической концепции значения: от Фреге к Расселу // Соотношение частнонаучных методов и методологии в филологической науке. М., 1986.

А.И.Панченко

О ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ ИМРЕ ЛАКАТОСА

Имре Лакатос (Лакатош, а еще точнее - Липшиц) родился в Венгрии (в Будапеште) в 1922 г., а умер в Англии (в Лондоне) в 1974 г. С 1960 г. до конца жизни работал в Лондонской школе экономических и политических наук, а несколько последних лет был главным редактором журнала "**The British Journal for the Philosophy of Science**" ("Британский журнал философии науки"). Широко известен своими работами по истории и философии математики и, помимо этого, как автор специфической методологии научно-исследовательских программ. В своем историко-научном и философско-методологическом творчестве испытал значительное влияние идей Г.В.Ф.Гегеля и К.Р.Поппера.

Настоящая статья преследует цель показать связь философии математики И.Лакатоса с более общей философско-методологической концепцией критического рационализма К.Поппера, и даже зависимость первой от последней. Для этого мы последовательно рассмотрим: 1) суть концепции Поппера; 2) содержание методологии научно-исследовательских программ Лакатоса; 3) интерпретацию Лакатосом природы и развития математического знания в соответствии с его методологией и концепцией Поппера. Кроме того, приведем аргументы, показывающие возможность материалистической интерпретации философии математики Лакатоса.

1. Суть критико-рационалистической концепции Поппера

Современная западная философия нередко отождествляет себя с наукой, а в рамках такого отождествления часто подразумевает предметом своего исследования результаты и процессы познания. Именно так поступает К.Поппер, который пишет следующее: "...имеется, по крайней мере, одна философская проблема, которой интересуется любой мыслящий человек... Это... проблема познания мира, включая нас самих (и наше знание) как часть этого мира" [1. С. 35] .

Теория познания К.Поппера относится к течениям эпистемологического реализма, ибо Поппер доказывает, что существует "знание в объективном смысле", которое "есть знание без того, кто знает, оно есть знание без познающего субъекта" [1. С. 442-443] . "Знание в объективном смысле" - это так называемый "третий мир" Поппера (еще двумя мирами он признает соответственно обычный физический мир и мир "субъективных состояний сознания"; первым миром занимаются науки о природе, вторым - психология). "Обитателями" "третьего мира" являются "теоретические системы", "проблемы и проблемные ситуации", "критические рассуждения" и т.п. [1. С. 440-441] .

Поппер полагает, что "центральной проблемой эпистемологии всегда была и до сих пор остается проблема роста знаний", что наилучшим способом изучения этого роста является "изучение роста научного знания" и что наилучшим способом самого роста оказывается "метод любой рациональной дискуссии", заключающийся в "ясной, четкой формулировке обсуждаемой проблемы и критическом исследовании различных ее решений" [1. С. 35-36] .

Такая постановка вопроса о критичности и рациональности метода науки (и философии) определяется у Поппера целым рядом обстоятельств.

1. Поппер, познакомившись с достижениями современной ему психологии, обнаружил, что "мы мыслим не образами, а проблемами и их временными решениями" [2. С. 76] . Данное открытие убедило его в том, что содержание человеческих мыслей, вопреки надеждам позитивистов, несводимо к содержанию чувственных восприятий. Отсюда вытекает (хотя это не единственное основание) отвержение Поппером известного позитивистского принципа верификации.

2. Обнаружение проблемности и необразности мышления связано у Поппера с обнаружением новой функции языка - аргументативной (ранее были известны выразительная, сигнальная и дескриптивная). Сосредоточившись на анализе аргументативной функции, Поппер пришел к установке критицизма.

3. Дополнительным (и органичным) основанием установки критицизма стал для Поппера тезис фаллибилизма, или убеждение в неустранимости заблуждений и ошибок из когнитивных образований. Такое убеждение само имеет ряд оснований: отказ от рассмотрения субъектно-объектных отношений и принципа отражения (из-за наивной его трактовки как соответствия образов сознания объективной реальности); признание недетерминированности будущего и открытости развития новым непредсказуемым возможностям; вера в абстрактную свободу воли. Фаллибилизм органически сочетается с критицизмом, ибо обеспечивает почву для критики: поскольку наши знания всегда ошибочны, постольку они заведомо могут быть подвергнуты критике.

Выражая суть тезиса фаллибилизма, Поппер писал: "Ни наблюдение, ни разум не являются авторитетами. Более существенны интеллектуальная интуиция и воображение, но ненадежны и они" [3. С. 28] . Но как же тогда возможны "рост научного знания", да и познание вообще?

4. Возможность познания гарантируется тем, что существует "третий мир", или "знание в объективном смысле". Возможность же "роста знания" требует для своего обоснования дополнительных принципов. Одним из таких является принцип эволюции, заимствованный у Ч.Дарвина. Поппер полагает, что развитие знания является продолжением биологической эволюции, в которой биологические мутации заменяются "процедурами проб и ошибок", а естественный отбор - "контролем над мутациями посредством элиминации ошибок" [4. С. 242] .

5. Но все же, как это ясно уже из пункта 4, "рост знания" – это не биологическая эволюция. Этот "рост" контролируется "элиминацией ошибок". Функцию контролирующего принципа выполняет у Поппера известный принцип фальсификации. Развитие познания в схеме Поппера не может обойтись без этого принципа, поскольку развитие это невозможно вне взаимодействия "первого" и "третьего" миров (это очевидно) и поскольку любое наше знание заведомо таит в себе ошибки. Поппер пишет в этой связи, что "наши теории активно производятся нашим сознанием, а не внушаются нам реальностью... И все же я настаиваю, что фальсификация может быть столкновением с реальностью. Я интерпретирую доктрину Канта о невозможности познания вещей в себе как отвечающую прежде всего гипотетическому характеру наших теорий" [2. С. 82] .

Таким образом, столкновение "третьего мира" с объективной реальностью имеет своим результатом разве что опровержение предположений субъекта об устройстве этой реальности.

6. Конечно, такие опровержения развивают наше знание. Но каковы гарантии того, что данное развитие прогрессивно? Чтобы опеспечить такие гарантии, Поппер обращается к понятию истины. Его понимание истины отличается от традиционного (согласно которому истина есть соответствие знаний объективной реальности). Поппер рассматривает истину как регулятивную, т.е. скорее этическую, чем гносеологическую, категорию. Стремление к истине регулирует "рост знания", т.е. определяет познавательный прогресс. А истина есть соответствие знаний действительности, но только под действительностью понимается опять же "третий мир".

В итоге схема развития научного знания выглядит у Поппера следующим образом:

P TT EE P ,

где P – исходная познавательная проблема, TT – ее временное решение (или совокупность таких решений, конкурирующих между собой), EE – процедура элиминации ошибок (попытки опровержения решений), а P – новая проблема, возникающая в результате фальсификации TT. Данная схема представляет элементарную ячейку развития науки, которое формируется бесконечной совокупностью таких ячеек.

Для последующего изложения нам важно акцентировать внимание на основных принципах попперовской критико-рационалистической концепции. Это – принцип фаллибилизма, принцип фальсификации, принцип развития и принцип стремления к истине.

2. Методология научно-исследовательских программ Лакатоса

К своей методологии Лакатос приходит, исходя из критики попперовской доктрины фальсификационизма, которую он определяет как вариант конвенционализма. В отличие от других вариантов эта доктрина принимает конвенциональность не универсальных высказываний науки (т.е. законоподобных высказываний), а единичных, или базисных, предложений, относящихся к опытным явлениям. Истинность таких предложений не доказывается и не обосновывается, а устанавливается конвенционально, т.е. путем соглашения ученых.

Докрина фальсификационизма Поппера использует несколько типов конвенций, которые необходимы хотя бы для того, чтобы отделить проверяемые теории от исходного знания. Это конвенции: 1) определяющие "эмпирический" статус теории (наличие у нее так называемых "потенциальных фальсификаторов"); 2) определяющие. инстинностные значения базисных предложений: "Если теория опровергнута, то доказана ее ложность: если она "фальсифицирована", то она еще может быть истинной". [5. С. 108] ; 3) определяющее отличие статистики от вероятности (для теорий, использующих понятие вероятности); 4) необходимые для вынесения решений о фальсификации, когда проверяется конъюнкция теории с некоторой вспомогательной гипотезой, вводимой для объяснения "аномальных" данных наблюдений и экспериментов; 5) определяющие "синтаксически метафизические" теории вроде теорий, построенных на высказываниях "все - некоторые".

Лакатос подчеркивает, что этими конвенциями "покупается возможность прогресса" [5. С. 112] . Но история научного знания показывает, что опровержение (фальсификация) теории не есть ее отвержение, как того хотел бы Поппер. Фальсификация, если она ведет к отвержению, может устранить истинную теорию и принять взамен ее ложную. С точки зрения фальсификационизма "ученые часто поступали иррационально медленно, например они 85 лет колебались, считать ли перигелий Меркурия аномалией или же фальсификацией теории Ньютона, несмотря на то что изолированная гипотеза была хорошо подтверждена"[1]. Вместе с тем, ученые часто поступали иррационально быстро: например, Галилей и его последователи приняли гелиоцентрическую систему Коперника, несмотря на изобилие опытных данных против вращения Земли; или же Бор и его последователи приняли теорию излучения света,несмотря на то что она была направлена против хорошо подтвержденной теории Максвелла" [5. С. 115] .

Лакатос предлагает так называемый "усовершенствованный методологический фальсификационизм". Суть его в том, что теория считается "научной", если она обладает "подтвержденным избытком эмпирического содержания по сравнению с ее предшественницей (или соперницей), т.е. если она ведет к открытию новых факторов" [5. С. 116] . Усовершенствованный методологический фальсификационизм рассматривает научную теорию Т как фальсифицированную, "если,и только если была предложена другая теория Т , обладающая следующими характеристиками: 1) Т имеет избыток эмпирического содержания по сравнению с Т, т.е. она предсказывает новые факты, которые невероятны или даже запрещены с точки зрения Т; 2) Т объясняет предыдущие достижения Т, т.е. все неопровергнутое содержание Т содержится (с точностью до ошибок наблюдения) в содержании Т ; определенная часть избытка содержания Т подтверждается" [5. С. 116] . Отсюда очевидно, что до появления Т нельзя говорить о фальсификации Т.

Итак, методология научно-исследовательских программ (или "усовершенствованный методологический фальсификационизм") возникла в контексте доктрины фальсификационизма как результат осмысления Лакатосом следующих двух наблюдений. Во-первых, Лакатос убедился, что попперовский принцип фальсификации может быть сохранен,несмотря на то что истории науки известны такие "аномальные" с точки зрения этого принципа случаи, когда экспериментальное

[1] По аналогии с открытием планеты Нептун здесь имеется в виду гипотеза о возмущении движения планеты Меркурий гравитационным воздействием гипотетической, еще не открытой планеты (примеч. автора).

"опровержение" теории не вело к ее отвержению и теория продолжала развиваться. Во-вторых, Лакатос, наученный опытом своих исследований по истории математики и находившийся одно время под влиянием философии Гегеля, допустил также и рациональность анализа проблематики научного открытия (в то время как для Поппера первостепенной задачей методологического анализа развития научного знания является логическое исследование контекста оправдания знания). Тем самым Лакатос расширил попперовское представление о рациональности. Это стало возможным благодаря тому, что Лакатос отказался рассматривать в качестве базисной единицы развития отдельную научную теорию (или гипотезу), введя в рассмотрение в качестве таковой научно-исследовательскую программу, охватывающую собой целую историческую последовательность теорий или гипотез. Как и теории в схеме Поппера, исследовательские программы Лакатоса предназначены для того, чтобы решать научные проблемы. Однако решение проблем необязательно сопровождается сменой программ, может изменяться только "защитный пояс" программы.

Развитие науки представляется Лакатосу ареной борьбы нескольких научно-исследовательских программ. Если последовательность теорий некоторой программы не предсказывает ничего нового, а каждая новая в ней теория способна лишь ассимилировать достижения теорий соперничающей программы – такую программу следует считать "регрессивной". У "прогрессирующей" же программы: 1) каждая новая теория должна иметь избыток эмпирического содержания над содержанием своей предшественницы; 2) какая-то часть этого избыточного содержания должна быть подтверждена.

Лакатос в статье "Почему программа Коперника превзошла программу Птолемея?" [6] , написанной в соавторстве со своим учеником Э.Захаром, пытается ответить на поставленный в названии статьи вопрос, опираясь на свою методологию. Авторы статьи показывают, что обе программы имели своим источником пифагорейско-платоновскую астрономическую программу. Последняя признавала "совершенным" равномерное круговое движение небесных тел. Эта эвристическая посылка сохранялась в программах Птолемея и Коперника, но у них различались "твердые ядра": Птолемей считал неподвижным центром Вселенной Землю, а Коперник поместил этот центр в сферу звезд; У Птолемея звездная сфера движется вокруг Земли и, кроме того, неравномерно вращается вокруг центра эклиптики, у Коперника все движения небесных тел оказываются круговыми и равномерными. Таким образом, заключают отсюда Лакатос и Захар, программа Коперника отвечала эвристике пифагорейско-платоновской программы в большей степени, нежели программа Птолемея. И при этом коперниковская программа обладала "несомненной теоретической прогрессивностью, ибо она предсказывала новые, никогда ранее не наблюдавшиеся явления, например фазы Венеры и звездный параллакс" [6. С. 183] . В этой связи процесс перехода от программы Птолемея к программе Коперника следует расценивать как "прогрессивный сдвиг проблемы" в рамках развития пифагорейско-платоновской научно-исследовательской программы.

В последних своих работах Лакатос писал о возможностях сравнения различных нормативных методологий науки на основе осуществляемых ими "рациональных реконструкций" истории науки. "Этот метаметодологический подход, – комментирует Дж.Уоррел, – синтезирует, по Лакатосу, априористский подход к методологии (утверждающий существование общих, неизменных, априорных правил оценки науки) и антитеоретический подход к методологии (утверждающий существование общих стандартов оценки и нацеливающий на учет инстинктивных решений научной элиты в конкретных случаях)" [7. С. 7] . Лакатос еще дальше, чем Поппер, релятивизирует методологию науки: если Поппер соотносит ее с нормативными и якобы чисто логическими конвенциями, то Лакатос видит их корни в "решениях научной элиты".

3. Интерпретация Лакатосом природы и развития математического знания

В своих работах по истории и философии математики, в том числе в изданной на русском языке книге "Доказательства и опровержения" [8] , Лакатос утверждает, что развитие математики происходит не кумулятивно, т.е. не путем поступательного накопления не подвергающихся сомнению истин, но в процессах: 1) выдвижения догадок и гипотез, затем 2) доказательства этих предложений (посредством сведения их к другим, считающихся уже доказанными утверждениям), и, наконец, 3) критики теорем и различных шагов в их доказательствах, осуществляемой через построение контрпримеров. Критический анализ доказательств осуществляется, однако, не на основе проб и ошибок, а на основе определенной математической эвристики, которая может быть рационально реконструирована в исследованиях исторических примеров. Как уже отмечалось, именно в этом аспекте рационального реконструирования эвристических принципов развития науки, опираясь на ее историю, Лакатос и расходится с попперовской "логикой научного открытия", считающей проблематику открытия не подлежащей рациональному философскому анализу.

В своих работах по философии математики Лакатос предпринял попытку выйти за рамки классических или, как он говорит, "евклидовских" программ обоснования математики - логицизма и формализма. На наш взгляд, в наиболее концентрированном виде взгляды Лакатоса на природу и развитие математического знания изложены в его статье "Возрождение эмпиризма в современной философии математики" [9] , написанной в 1967 г., но впервые опубликованной уже после его смерти, в 1976 г. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением ее содержания.

В указанной статье Лакатос доказывает, что и логицизм и формализм в конечном счете апеллируют к некоторым необсуждаемым в рамках этих программ "первым принципам", формулируемым в "кристально чистых" терминах, из которых (принципов) затем выводится при помощи правил дедуктивной логики все здание математической науки. Однако, считает он, возможность подобного обоснования математического знания весьма сомнительна, поскольку не только в естественных науках, но и в математике не существует никаких неревизуемых истин, "первых принципов". Не только к естественнонаучным, но и к математическим теориям можно применить принципы фаллибилизма, критицизма и фальсификации, посредством чего и реализуется развитие математического знания. Иначе говоря, математическое знание имеет "квазиэмпирическую" природу, а "эмпиризм и индуктивизм распространены в математике (в отношении не только ее генезиса или метода, но и ее обоснования) в гораздо большей степени, чем это многим кажется" [9. С. 205] . Мы здесь не будем обсуждать детальную справедливость отдельных тезисов лакатосовской статьи, ибо нам важно показать ее основную интенцию, состоящую, как представляется, в том, чтобы уложить развитие математики в схему, предложенную Поппером для описания эволюции естественных наук.

Лакатос полагает, что классическая эпистемология (теория научного познания) на протяжении свыше двух тысячелетий принимала в качестве идеала научной теории евклидову геометрию (вспомним, что даже философскую методологию Декарт строил по образцу системы Евклида; так же строилась и ньютоновская механика). Такая идеальная теория представляет собой дедуктивную систему с конечным числом безусловно истинных ("самоочевидных") аксиом на "вершине" (если уподобить эту систему пирамиде), "так что истина, стекая с вершины по сохраняющим ее в первозданном виде каналам достоверных выводов, наполняет собой всю систему" [9. С. 205] . Однако в XX в. выяснилось, в чем, несомненно, велика заслуга К.Поппера, что истинность дедуктивных систем науки задается вовсе не в "вершине" пирамиды научного знания, а в ее "основаниях", определяемых практикой. Коль скоро речь пойдет о математике, то такими "основаниями" являются теоремы. Вместе с тем стало ясным также то, что в реальных ("квазиэмпирических") системах науки логический "поток" образуется вовсе не движением истины от "вершины" к "основаниям", а обратным движением ложности от "оснований" к "вершине". Ведь, в самом деле, логика гласит, что если заключения (или "основания") ложны, то посылки ("вершина") не могут быть истинными (инверсия правила "из истины нельзя вывести ложь").

Все дедуктивные системы, вторит Попперу Лакатос, принимают множество конвенций, призванных регулировать процедуры определения истинностных значений для лежащих в "основании" систем предложений (базисных предложений). Если "евклидовская" дедуктивная система истинна по определению, поскольку она представляет собой дедуктивное замыкание подмножества "истинных базисных предложений", то"квазиэмпирические" системы в отличие от нее являются в лучшем случае только хорошо подтвержденными и непременно гипотетическими. Если в "евклидовских" системах аксиомы доказывают все остальные утверждения, то в "квазиэмпирических" - истинные базисные предложения объясняются (т.е. обосновываются) остатком системы. Независимо от конвенций, определяющих истинностные значения базисных предложений (здесь Лакатос следует Попперу, а не социологам знания), линия демаркации "евклидовских" и "квазиэмпирических" систем проходит в логической плоскости: логикой первых является органон доказательства, логикой последних - критицизм. Далее, если основным регулятивным принципом развития "евклидовской" науки служит поиск самоочевидных аксиом, "первых принципов", то "квазиэмпирическая" наука руководствуется требованием выдвижения "смелых" гипотез, обладающих все более обширными объясняющими и эвристическими возможностями. И наконец, развитие "евклидовской" теории проходит три стадии: 1) наивную, преднаучную стадию проб и ошибок; 2) стадию обоснования, реорганизующего теорию, оформляющего ее границы, устанавливающего дедуктивную схему ее "твердого ядра"; 3) стадию решения проблем внутренними средствами теоретической системы путем построения доказательств и опровержений предположений (при этом открытие алгоритма доказательств может положить конец развитию теории). Развитие же "квазиэмпирической" теории начинается с постановки проблемы, для которой затем предлагаются смелые решения, далее эти решения подвергаются строгим испытаниям и в конце концов опровергаются.

Как мы видим, эта схема развития научного ("квазиэмпирического") знания вполне повторяет схему Поппера. "Двигатель прогресса, - пишет Лакатос, - это смелые спекуляции, критицизм, соперничество теорий, проблемные сдвиги. Лозунги здесь – рост знания и постоянная революция, а вовсе не обоснование и накопление вечных истин" [9. С. 207] . Если в "евклидовской" науке основным образом критицизма является сомнение в строгости и безошибочности доказательства, то в "квазиэмпирической" – умножение гипотез и теорий и их опровержение.

Сторонники "евклидовского" идеала развития и природы математического знания, пишет далее Лакатос, полагают, что центральной их задачей является окончательное обоснование несомненности методов математики. Так, логицизм Фреге – Рассела стремился с помощью "прямых определений" вынести все математические истины из безусловно истинных логических аксиом. Однако оказалось, что некоторые логические (или, точнее, теоретико-множественные) аксиомы, вводимые для устранения парадоксов наивной теории множеств, вовсе не являются безусловно истинными. Выяснилось, что для них "решающей поддержкой было то, что с их помощью может быть объяснена – но определенно не доказана – классическая математика" [9. С. 208] . И потому многие математики, в том числе Рассел, Френкель и Куайн, даже независимо от результатов Геделя, осознавали, что их системы носят "квазиэмпирический" характер. Так, Чёрч оценивал свою логическую теорию, основанную на смягченном законе исключенного третьего, в духе "квазиэмпирицизма". И кстати, позже С.Клини и Дж.Россер показали противоречивость теории Чёрча. В общем, "евклидовский" идеал теории в математике нельзя опровергнуть – ведь даже если постулируется весьма спекулятивная аксиома, можно надеяться вывести ее в конце концов из некоторых более глубоких и самоочевидных оснований. Но тем не менее "нельзя доказать истинность или хотя бы непротиворечивость **grandes logiques**; доказаны могут быть только их ложность или даже противоречивость" [9. С. 209] .

Далее, формализм (программа Д.Гильберта) предложил определенную модификацию "евклидовского" идеала науки. Гильберт исходил из того, что классический математический анализ содержит абсолютно истинное "евклидовское" ядро и не истинные абсолютно "идеальные элементы". Это тоже, по мнению Лакатоса, можно расценивать как свидетельство приверженности Гильберта к "квазиэмпирицизму". Но Гильберт полагал, что если существует "евклидовское" метатеоретическое доказательство непротиворечивости теории, состоящей из "истинного ядра" и "идеальных элементов", как в случае математического анализа, то такое доказательство показывает отсутствие опровержений теории. Невыполнимость гильбертовской программы продемонстрировали теоремы Геделя. Гильберт реагировал на доказательство неполноты формальной системы арифметики предложением пересмотреть представления о финитных и априорных методах математики – он включил в класс таких методов трансфинитную индукцию. В обоснованности такого расширения существуют сомнения, но даже те, кто допускал безошибочность трансфинитной индукции, сомневались в законности расширения представлений о нефальсифицируемости до такой степени, чтобы ими можно было охватить доказательства непротиворечивости более строгих теорий.

Доказательства теорем о неполноте арифметики, проведенные Геделем и Тарским, еще больше снизили шансы на успех программы формализма: если существующая арифметика не может быть доказана на основе первоначальных гильбертовских стандартов, то тем более доказательства теорий, расширяющих арифметику, могут быть достигнуты только на основе еще более подверженных ошибкам методов. "Это значит, что развитие арифметики только увеличивает степень ее фальсифицируемости" [9. С. 211].

Итак, организация и движение и математического, и естественнонаучного знания проявляют определенное методологическое единство. Решающее различие между этими двумя видами научного знания заключается, по Лакатосу, в природе их базисных предложений, или "потенциальных фальсификаторов". В естественных науках истинностные значения таких предложений определяются главным образом решениями экспериментаторов. Математика же имеет среди своих "потенциальных фальсификаторов" прежде всего логические предложения формы "р и не-р". Но вместе с тем в ней есть нечто подобное "установленным фактам" естествознания: Если мы примем, что формальная аксиоматическая система неявно определяет свое содержание, то тогда не должно быть иных математических фальсификаторов, кроме логических. Но если мы настаиваем, что формальная теория должна быть формализацией некоторой неформальной теории, то тогда первая может считаться "опровергнутой", если одна из ее теорем отрицается соответствующей теоремой последней. Такую неформальную теорему можно назвать эвристическим фальсификатором формальной теории [9. С. 213-214].

Как это возможно на деле? Поясняя ситуацию, Лакатос приводит следующий пример. Пусть в рамках формальной теории множеств ЭВМ доказывает формулу, подразумеваемое значение которой состоит в утверждении существования четных негольдбаховских чисел [2]. В то же время в теории чисел неформально может быть доказано, что все четные числа суть гольдбаховские. Если последнее доказательство можно формализовать в рамках нашей формальной теории множеств, то эта теория окажется противоречивой. Если же формализация невозможна, то формальная теория будет не противоречивой, а ложной теорией арифметики. Неформально доказанная теорема Гольдбаха как раз и является здесь эвристическим фальсификатором, что означает, что формальная теория ложна по отношению к неформальному экспликандуму, который она намеревалась объяснить.

Кстати, в этой связи программу Гильберта можно истолковать как программу сведения всех возможных математических фальсификаторов лишь к логическим фальсификаторам (а также сведения истины к непротиворечивости). Она была выполнена лишь при помощи весьма узкого (финитистского) определения базисных арифметических предложений. Аксиоматические теории множеств имеют, однако, не только арифметические фальсификаторы: они могут быть опровергнуты также и теоремами или аксиомами наивной (канторовской) теории множеств. Лакатос пишет в этой связи, что "накопление интуитивной очевидности против континуум-гипотезы может привести к отвержению строгих теорий множеств, которые ее подразумевают" [9. С. 217].

Теперь посмотрим, каково отношение Лакатоса к интуиционизму. Лакатос отмечает, что Гедель предложил расширить область (осмысленных и истинных) базисных предложений в математике до высказываний с кванторами, а область доказательства их истинности - до широкого класса интуиционистских методов. "Это методологическое средство, отличавшее непротиворечивость от истины, вводило новые виды предложений и опровержений, основанные на арифметической фальсификации: оно принимало в расчет, что смелые спекулятивные теории с очень богатой аксиоматикой могут критиковаться извне на базе неформальных те-

[2] Проблема Гольдбаха в теории чисел заключается в доказательстве того, что всякое число (целое), большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.

орий с бедными аксиомами" [9. С. 215] . Интуиционизм использовался здесь не для обоснования, а для фальсификации. Ведь и финитные фальсификаторы имеют большие возможности в смысле проверки теорий множеств, например сильные аксиомы бесконечности проверяемы в поле диафантовых уравнений [3].

Признание "квазиэмпирического" характера математических теорий ставит ряд проблем. Среди них Лакатос выделяет, в частности, проблему демаркации между проверяемыми и непроверяемыми ("метафизическими") математическими теориями по отношению к заданному множеству базисных предложений. Другая проблема связана с зыбкостью самой концепции "потенциальных (эвристических) фальсификаторов", поскольку они (как и в эмпирических науках) суть конкурирующие гипотезы. Но именно этот факт не смущает Лакатоса, поскольку он только сближает математику и естественные науки: как и в случае эмпирических опровержений, "главной функцией эвристических фальсификаций является сдвиг проблемы, стимуляция развития теоретических рамок, включающих в себя все большее содержание" [9. С. 218] . Вообще большая часть опровержений в истории науки имела эвристический характер и,в частности, "соперничество между математическими теориями чаще всего разрешалось на основе сравнения их объясняющих возможностей" [9. С. 218] .

Ответ на вопрос о природе математического знания Лакатос связывает в ответом на вопрос о природе его "потенциальных фальсификаторов". Придется ли тогда сказать, как считали Г.Вейль, Дж.фон Нейман, А.Мостовский и другие математики, что математическое познание носит опосредованный эмпирический характер? Или же только конструкции являются источником истины базисных математических высказываний? Или же платонистская интуиция? Или - конвенции? Лакатос считает, что "ответ едва ли будет однозначным. Тщательное историко-критическое исследование вопроса приведет, вероятно, к софистическому и сложному решению" [9. С. 218] . Но ясно, однако, что это решение не будет классическим, т.е. идущим в плоскости статического разделения понятий на априорные и апостериорные, аналитические и синтетические, как это имело место в пределах "евклидовского" идеала научного знания.

Заключение

Мы так подробно изложили одну из работ Лакатоса по философии математики, чтобы установить единство его методологической позиции с критико-рационалистической концепцией развития научного знания Поппера. По сути дела, Лакатос стремится распространить методологический арсенал попперовской концепции, приспособленный к анализу естественнонаучного (эмпирического) знания, на область, казалось бы, далекую от какой-либо эмпирии математики.

Связь между критическим рационализмом Поппера и "квазиэмпирицистским" образом математического знания Лакатоса легко прослеживается в используемых этими учеными методологических принципах и понятиях (критицизма, фаллибилизма, фальсификации, развития). Но в этом заключении нам хотелось бы обратить

---

[3] Диафантовы уравнения - системы уравнений с рациональными коэффициентами, решения которых ищутся в целых или рациональных числах.

внимание на иную сторону дела, а именно на то, что, независимо от состоятельности (или несостоятельности) самой концепции Поппера и лакатосовской попытки переноса этой концепции на описание природы и развития математического знания, полученный Лакатосом образ математики допускает возможность его материалистической интерпретации.

Как известно, Ф.Энгельс в "Анти-Дюринге", выступив против распространенного в XIX в. кантианского априористского понимания природы математического знания [4], определил математику как науку о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира. "Как и все другие науки, - писал он, - математика возникла из практических потребностей людей..." [13. С. 37]. Конечно, это определение может показаться недостаточным для объектов современной математики (абстракций и идеализаций), которые имеют самостоятельное значение, однако последнее не отменяет справедливость материалистического решения вопроса о происхождении, об объективных источниках математического познания. Очевидно, что только такое решение позволяет вразумительно объяснить вигнеровскую "непостижимую эффективность математики в естественных науках" (см. [11]). Другое дело - как нам конкретно связать абстрактные математические концепции с реальным миром. Как представляется, лакатосовский образ математики указывает на такие связи, усматривая их в самой математической практике.

В самом деле, Лакатос сводит вопрос о природе математики к вопросу о природе ее "потенциальных фальсификаторов", которые ищутся в неформальных математических теориях. И именно это примечательное наблюдение лакатосовской философии математики обусловливает возможность ее интерпретации в рамках материализма (хотя сам Лакатос предпочитает идти по пути попперовского критического рационализма). Ведь утверждение о том, что формальные (абстрактные) математические теории могут быть проверены на истинность при помощи неформальных (конкретных) теорий (т.е. о том, что первые обладают "эвристическими фальсификаторами"), указывает на связь математических теорий и практики, формального и содержательного, абстрактного математического знания (через менее абстрактные, более конкретные "квазиэмпирические" математические теори) с объективной реальностью, с действительным миром. И хотя сам Лакатос считает, что понятие "потенциального (эвристического) фальсификатора" зыбко в математике, так как может включать в свое содержание и "платонистскую интуицию", и конструкции, и конвенции, это следует приписать на счет влияния попперовской философии, согласно которой сознанию даны не объективно-реальные вещи, а их логическая сущность и в которой отсутствуют представления о практике как критерии истины, основе и цели познания.

ЛИТЕРАТУРА

I. Поппер К. Логика и рост научного знания. М., 1983.

[4] Приверженцем такого понимания был и Е.Дюринг, которого Ф.Энгельс подверг критике и который считал, например, становление неевклидовых геометрий проявлением "развала и загнивания математики" (Славков С. Енгелс и Някои философски проблеми на математиката//Филос. мисъл. 1985. Г. 4I. Кн. 8. С. 54.

2. Popper K.R. Unended Quest: An Intellectual Autobiography. Glasgow, 1976.
3. Popper K.R. Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge. L., 1963.
4. Popper K.R. Objective Knowledge: An Evolutionary Approach. L., 1963.
5. Lakatos I. Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes // Criticism and the Growth of Knowledge. Cambridge, 1970.
6. Lakatos I., Zahar E. Why did Copernicus's Programm Supersede Ptolemy's // Lakatos I. The Methodology of Scientific Research Programmes: Philos. Pap. Cambridge, 1978. Vol. 1.
7. Worrall J. Imre Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics a. Philosopher of Science // Boston Stud. Philos. Sci., 1976. Vol. 39.
8. Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1978.
9. Lakatos I. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Science. Aberdeen, 1976.
10. Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 20.
11. Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971.

А.Ф.Грязнов

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ Л.ВИТГЕНШТЕЙНА

Концепция австрийского философа Людвига Витгенштейна (1889–1951) представляет собой одно из самых сложных и противоречивых явлений буржуазной философской мысли XX столетия. В ней сфокусированы различные и часто разнонаправленные идейные тенденции. Вместе с тем вполне обоснованно говорить о наличии определенного инвариантного содержания данной концепции на всем протяжении ее эволюции. Такое содержание относится к области того, что может быть обозначено как "философия языка", т.е. философское осмысление проблем отношения языка и действительности, места и роли языка в системе практики, определение самой возможности человеческой коммуникации с помощью языка, обладающего значением, выявление и критика того, что препятствует этому процессу. Подобную направленность на критику языка [1] как на главное средство критики различных явлений западной культуры, Витгенштейн сохраняет в течение всей жизни. При этом, несмотря на значительную модификацию трактовки языка в различные периоды его творчества, именно в лингвистической сфере австрийский философ будет стремиться находить источник возникновения всех проблем и одновременно самые радикальные способы их решения. В этом плане, на примере деятельности Витгенштейна, пожалуй, наиболее выразительно проявляется характерный для буржуазной философии XX столетия "поворот к языку".

Помимо того значительного влияния, которое оказала на становление позиции Витгенштейна австрийская литературно-эстетическая критика начала века

[1] Понимание "критики" Витгенштейном имеет и некоторый кантианский оттенок, а именно, установление возможности и пределов какой-либо познавательной способности или практической активности (в данном случае – языка).

(К.Краус и др.), а также экспрессионистские явления в искусстве, необходимо учитывать и, так сказать, "сциентистскую" составляющую его взглядов. Во-первых, это инженерный, конструктивный подход к научной деятельности, в основе которого лежит солидная подготовка, полученная им в высших технических учебных заведениях Линца, Берлина и Манчестера. Во-вторых, это ориентация на теоретическое естествознание и математику с их сложной системой идеализаций и абстракций (что, в частности, выразилось как в увлечении понятием "модели" в интерпретации физика Г.Герца, которое он перенес в свою логическую теорию, так и проблемами оснований математики). Именно в возникавшей тогда математической логике Витгенштейн увидел наиболее подходящее средство для понимания и критики языка как главного механизма коммуникации. В этом плане для него было важно непосредственное общение с такими учеными, как Г.Фреге и Б.Рассел. Если на первом этапе деятельности Витгенштейна (10-е – 20-е гг.) данная ориентация преобладает, то во второй период, как нам представляется, в полной мере реализуется отмеченная выше "конструктивистская" тенденция.

По своим результатам научная деятельность Витгенштейна существенно отличается от того, что типично для многих других западных философов и ученых, имеющих отношение к университетской, академической среде, а именно большое число опубликованных статей и монографий, выступлений на конгрессах и симпозиумах. При жизни были опубликованы лишь две его работы – "Логико-философский трактат" (1921) и небольшая статья "Заметки о логической форме" (1929). Но сохранился обширный рукописный архив философа, включающий как тексты, очевидно готовившиеся к публикации, так и всевозможные дневники, записные книжки, письма и т.п. Сохранились также записи лекций, которые он читал в 30-е гг. как преподаватель, а затем профессор Кембриджского университета. Часть этих материалов была опубликована владельцами его рукописного наследия в 50-е – 80-е гг. Публикация витгенштейновского наследия продолжается до сих пор.

Характер этого наследия, сам стиль, которым написаны тексты, создают немалые трудности исследователям его творчества. Помимо того, что это в основном незавершенные, фрагментарные материалы, есть и специфические особенности, которые в равной степени проявляются и в "отредактированном" "Трактате", и в совершенно "сырых" рукописях. Отметим лишь две из них. Во-первых, это глубокая афористичность и метафоричность витгенштейновского текста. На небольшом текстуальном пространстве ему удается выразить тот или иной смысл, не прибегая к подробным, развернутым рассуждениям. Это же делает Витгенштейна как бы "неуязвимым" для критики, пытающейся обнаружить у него логические изъяны, обычно встречающиеся в распространенных формах научной аргументации. Во-вторых, в витгенштейновских текстах та или иная идея не столько формулируется, выражается в явной форме, сколько демонстрируется огромным числом примеров, находящихся в определенной, "несущностной" связи (так называемое "семейное сходство"). Еще из своих ранних занятий собственно эстетической проблематикой Витгенштейн уяснил мысль о том, что критика должна действовать не путем прямых опровержений и разоблачений "неподлинных" явлений искусства, но как бы выставляя критикуемое явление в особом, "непривычном" для него свете, в новом, "остраняющем" контексте. В "Трактате" этот критический прием трансформируется в концепцию, построенную на различении "выразимого" в языке и того, что может быть лишь "показано". В поздних же текстах встречается понятие "очевидного представления", к которому он стремится вернуть философов и ученых (прежде всего математиков), запутавшихся из-за "неестественных ограничений, наложенных на повседневный язык (составляющий концептуальный каркас любых "строгих" языков науки). Показ различных нюансов и способов употребления слов и словосочетаний должен, по мнению Витгенштейна, без каких-либо дополнительных указаний создавать такое "очевидное представление" естественности одних и искусственности других лингвистических конструкций, вырабатывать критерий различения осмысленного и неосмысленного.

Взгляды Витгенштейна оказали широкое и разнообразное воздействие на западную философию и культуру. Но и различные периоды характер этого воздействия существенно менялся. Проследим вкратце, как это происходило. До публикации "Трактата" Витгенштейн по вполне понятной причине был неизвестен широкой философской и научной общественности. Оригинальность намечавшегося подхода молодого австрийского ученого к решению тех или иных проблем логико-математического знания сумели до Первой мировой войны подметить лишь некоторые его старшие коллеги по Кембриджу. В частности, известно, что выдвижение Витгенштейном в его спорах с Расселом новой "образной" (модельной) теории предложения даже послужило причиной отказа знаменитого английского философа от завершения своего фундаментального труда по теории познания. Трактат быстро завоевал популярность в британских университетах, а в конце 20-х гг. на родине автора был использован представителями Венского кружка при создании доктрины логического позитивизма. Осуществленный Витгенштейном на рубеже 30-х гг. пересмотр ряда принципов своего раннего подхода долгое время оставался для многих загадочным. И хотя делались попытки популяризации его взглядов, все они заканчивались ничем из-за противодействия самого Витгенштейна. Философ ничего не публиковал, а свои университетские занятия проводил с небольшими группами преданных ему учеников. Некоторые из этих учеников впоследствии становятся ведущими западными философами, развивая идеи своего учителя в духе так называемой лингвистической философии. Основное влияние этой философии в англосаксонском мире отмечается с начала 40-х до середины 60-х гг. Особую роль при этом сыграл появившийся посмертно (1953 г.) главный поздний текст Витгенштейна "Философские исследования". Несмотря на то что лингвистическая философия затем выходит из моды, интерес к наследию Витгенштейна нисколько не ослабевает. Издание его текстов, осуществленное в последние 20 лет, служит катализатором для разработки ряда тем, прежде не характерных для англо-американской аналитической философии.

Математические мотивы представляют постоянную тему как раннего, так и позднего творчества Витгенштейна. Свое отношение к математике в тексте "Трактата" он излагает уже после обоснования логической концепции предложения. Напомним, что, будучи "образом" реальности [2], предложение, по Витгенштейну, имеет с ней одну "логическую форму", т.е. разделяет те структурные свойства,

---

[2] Витгенштейн предельно логизирует "реальность". Онтологическую основу его "мира" составляют бескачественные "объекты", выступающие элементарными семантическими значениями элементарных знаков - имен. В координации друг с другом объекты составляют "факты", а имена объединяются в предложения, которые в этом смысле тоже "факты" (при этом возможны как элементарные, так и сложные предложения, являющиеся функциями истинности элементарных). Таким образом, устанавливается соответствие двух видов фактов и выявляется его главное условие - наличие общей им "логической формы".

которые абсолютно необходимы для выражений любого содержательного языка. Однако сама эта "форма" уже не может быть выражена в языке, ибо "для того чтобы можно было бы изображать логическую форму, мы должны были бы быть в состоянии поставить себя вместе с предложениями вне логики, то есть вне мира" [2. 4. 121.] [3]. Невыразимость "логической формы", как считал Витгенштейн, свидетельствует о том, что она непосредственно показывается в правильной логической символике. С идеей "показывания" как некоторой наглядной интуиции связана и его ранняя трактовка математики.

"Логику мира, которую предложения логики показывают в тавтологиях, математика показывает в уравнениях" [2. 6. 22] . Поэтому математические предложения, содержащие равенства, не являются для Витгенштейна настоящими предложениями-образами вроде предложений естествознания. Два выражения математики равны не потому, что об этом говорит знак равенства, но сам этот знак возможен в силу равенства выражений. Равенство мы постигаем непосредственно из самих выражений [4].

В "Трактате" мы встречаем определение математики как метода вычисления, производства подстановок в уравнениях, причем "...взаимозаменяемость двух выражений характеризует их логическую форму" [2. 6. 23.] . Это отличает математический метод от собственно логического, сводящегося к преобразованиям на основе логических тавтологий, т.е. всегда истинных формул. Поэтому математика у Витгенштейна фактически обладает определенной независимостью по отношению к логике, несмотря на его заявления типа: "Математика есть логический метод" [2. 6. 2.] . Даже учитывая влияние, оказанное на него классическими логицистскими теориями Фреге и Рассела, самого Витгенштейна едва ли можно однозначно характеризовать как логициста. Так, он, в частности, писал: "Не существует "логических объектов". Аналогично, конечно, и для всех знаков, выражающих то же самое, что и схемы "И" и "Л" [2. 4. 441.] . Витгенштейн также не признавал "привилегированного" статуса аксиом по сравнению с другими предложениями теории. Еще более важно то, что уже в "Трактате", где отдается предпочтение рекурсивным процедурам, можно обнаружить истоки будущего конструктивистского подхода. В этом плане обращают на себя внимание афоризмы [5.22 - 5.32], в которых говорится о понятии "операции"; [5.5 - 5.51] и [6. - 6.03] в которых говорится об "общей форме" предложения и конструктивном образовании

---

[3] Л.Витгенштейн. Логико-философский трактат. М., 1958. Афоризм 4.121. В дальнейшем в тексте приводятся номера цитируемых или упоминаемых афоризмов.

[4] Витгенштейн отмечал: Мы не должны говорить: комплексный знак "**aRb**" означает, что **a** находится в отношении **R** к **b**, но должны говорить: "то, что "**a**" стоит в определенном отношении к "**b**", означает, что **aRb** [2. 3.1432] . Первое объяснение попросту излишне, ибо самого расположения символов достаточно для показа этого отношения. Витгенштейн надеялся на чисто синтаксическое решение проблем, поднятых Расселом, подчеркивая при этом бесполезность иерархической теории типов. "Правильный" символизм сам устанавливает границы своей применимости, и в силу этого парадоксальные предложения оказываются невозможными. Например, в обозначении **F(F)** знаки внешней и внутренней функции различаются по смыслу, категориально. Согласно Витгенштейну, в логической теории складывается уникальная система внутренних отношений ("логическое пространство") и потому, например, даже введение третьего истинностного значения в двухвалентную логику неизбежно придает иной смысл "истине" и "лжи".

чисел. Числа, согласно Витгенштейну, являются ступенями, этапами в цепи операций над знаками: "Число есть показатель операции" (2. 6.021.). А "общая форма" операции (2. 6.01.) дает правило перехода. Числа поэтому не обозначают никаких объектов, а математические предложения ничего не описывают в мире – они чисто формальны. Кстати, мотив критики идеи "математической реальности" (в любом ее возможном истолковании) Витгенштейн развил в работах позднего периода.

В конце 20-х гг. Витгенштейном осуществляется переоценка своего прежнего понимания логики. Он начинает подчеркивать лишь ограниченную применимость ее законов, а строгий ("идеальный") язык формально-логической теории квалифицирует как одну из бесчисленного количества "языковых игр". Все внимание теперь обращается на многообразие употреблений слов и словосочетаний естественного языка, обладающих значением лишь в определенных контекстах. Такой подход, казалось бы, должен отдалить Витгенштейна от рассмотрения математических проблем, начатого в ранние годы. На деле, однако, получилось по-иному. Именно знакомство с некоторыми новыми идеями в обосновании математики послужило ему одним из стимулов для пересмотра ранней концепции значения языковых выражений. Мы имеем в виду интуиционистскую математику, которая импонировала Витгенштейну своей конструктивной направленностью. Как отмечают знавшие его люди, особенно на него повлияла наиболее радикальная версия интуиционизма, с которой он познакомился в 1928 г. в Вене на знаменитом докладе Л.Брауэра "Математика, наука, язык" [6] . Предполагают даже, что после доклада между ними состоялась продолжительная беседа. Витгенштейн воспринял критическое отношение интуиционистов к гильбертовскому формализму, к метаматематическим исследованиям. В то же время у него не обнаруживается влияние "философии интуиционистов", которая никак не согласуется с его антименталистскими настроениями. А вот новый более широкий подход Витгенштейна к языку, рассматриваемому как деятельность, был довольно близок интуиционистскому взгляду на математику как сферу субъективного творчества ученого. Правда, и тут нелишне напомнить, что сам Брауэр недооценивал роль естественного языка, полагая, что язык построен на неконструктивных законах классической логики.

С 1937 по 1945 г. Витгенштейн вел несколько тетрадей, посвященных философским проблемам математики. Это он делал параллельно с подготовкой "Философских исследований", рассматривая свою работу как нечто единое. Извлечения из пяти "математических" тетрадей были опубликованы в 1956 г. под названием "Заметки по основаниям математики" [8] . Через 20 лет вышла новая публикация на эту тему, в которой на основе сохранившихся записей четырех его учеников были более или менее адекватно восстановлены тексты 31 лекции, прочитанных Витгенштейном в Кембридже в 1939 году [10] . Кстати, в этом тексте приводится полемика Витгенштейна с А.М.Тьюрингом, присутствовавшим на его лекциях. В целом данное издание проливает дополнительный свет на основную тенденцию и мотивы поздних исследований Витгенштейна по философии математики.

Хотя темой своих лекций Витгенштейн и объявил основания математики, он при этом с самого начала поставил вопрос о том, насколько вообще правомерно заниматься этим предметом нематиматику, философу. Ведь многие из "философов математики", как это часто происходит, пытаются делать всевозможные предсказания относительно путей развития математики, давать рекомендации профессиональным математикам. Поэтому Витгенштейн специально подчеркнул, что будет стремиться избегать такого подхода и не станет вмешиваться в конкретные дела математиков. "Я собираюсь говорить об интерпретации математических символов, но я не предложу новой интерпретации" [10. С. 13] . Возможно, все же, отмечал он, при этом окажутся выдвинутыми какие-то новые интерпретации, но это будет сделано лишь для того, чтобы поставить их рядом со старыми интерпретациями и путем сравнения показать неабсолютный характер и тех и других. Философ только в том случае получает право рассуждать о математике, если его занимают проблемы, возникающие в связи с употреблением таких слов и выражений естественного языка, как "доказательство", "последовательность", "и так далее", "число", "порядок" и некоторые другие. Эти концептуальные затруднения и головоломки удобнее всего могут быть проиллюстрированы на примерах из элементарной математики [5]. Кроме того, Витгенштейн предупреждал, что в своем курсе он не собирается рассуждать об основаниях математики как особом разделе математической науки. Скорее, он будет говорить о роли слова "основания" во фразе "основания математики", ибо "мы делаем математику с помощью понятий" [8. С. 138] .

В целом философ математики должен как бы уподобиться "лингвистическому философу" и быть максимально внимательным к различным нюансам употреблений понятий математики, критически реагировать на заблуждения, порожденные недооценкой роли языка в математическом рассуждении. Особенность установки Витгенштейна заключается в том, что он подходит к математике прежде всего как к творческой человеческой деятельности, особой "форме жизни". Многие абстрактные математические идеи при этом рассматриваются им сугубо антропологически. В математической "языковой игре", подчеркивал он, вопрос об истинности тех или иных положений может даже и не вставать. Куда важнее их полезность или применимость.

Источник заблуждений в математике - смешение выражений, выполняющих в ее языке разные функции. Это, к примеру, происходит с понятием "числа", все употребления которого зачастую трактуются единообразно. "Поэтому, - отмечает Витгенштейн, - я сделаю ударение на различии там, где обычно делают ударение на сходствах..." [10. С. 15] . Философия математики должна привлекать внимание к хорошо известным, а иногда даже к тривиальным фактам, которые мы часто не замечаем.

При этом Витгенштейн терпимо относится к возможности противоречий в математических системах. Распространенный среди математиков (особенно среди "формалистов") страх перед противоречиями он квалифицирует как предрассудок. Вот типичный образец одного из его рассуждений по этому вопросу: "Подобно тому, как мы спрашиваем: "доказуемо" в какой системе? , также мы должны спрашивать: "истинно" в какой системе? "Истинно в расселовской системе" означает: доказано в расселовской системе, а "ложно в расселовской системе" означает: противоположное доказано в расселовской системе... Допустим, что я доказываю недоказуемость (в расселовской системе) P. Затем с помощью этого доказательства я доказал P. Поэтому, если бы это доказательство принадлежало

---

[5] Некоторые критики Витгенштейна на этом основании ошибочно заключают, что он вообще ограничивает математическую сферу элементарным уровнем. Однако справедливо замечание, что концепция Витгенштейна не способствует установлению единства различных областей математического знания.

расселовской системе, то в этом случае я бы сразу доказал, что оно одновременно принадлежало и не принадлежало расселовской системе. Вот что получается в результате построения таких предложений. - Да, здесь противоречие. А разве оно приносит здесь какой-либо вред?" [8. С. 51] .

Итак, непротиворечивость не есть главное достоинство, а противоречие отнюдь не вредно (это Витгенштейн показывает, ссылаясь на придуманные им доказательства, основанные на картинках и диаграммах). Более того, он даже считает полезными такие математические системы, в которых противоречие служило бы инструментом, расширяющим наши возможности [6]. Правда, эта интересная идея ослабляется у него психологизацией самой проблемы. В основном в текстах Витгенштейна преобладает субъективный подход к противоречиям, когда ценность последних усматривается в том, что они наиболее четко сигнализируют математикам о "мучительных проблемах", порождаемых языком.

Центральной темой витгенштейновской философии математики является понимание специфики математического доказательства. С лингвистической точки зрения доказательство для Витгенштейна есть последовательность предложений, с помощью которых мы получаем образ того или иного "математического эксперимента". Отсюда действующим математикам уместно использовать схемы и диаграммы. Из своих ранних занятий инженерным делом Витгенштейн вынес твердое убеждение в важности наглядности математических построений. Фигуры, которые иллюстрируют те или иные решения, как бы устраняют нашу слепоту, демонстрируют (ср. с ранней идеей "показывания") новые измерения пространства. Это похоже на то, "как если бы мухе указали путь из мухоловки" [8. С. 17] . Убедительность доказательства - в его наглядности, однако абстрактные доказательства в стиле математического платонизма, по мнению Витгенштейна, лишены такого свойства.

Осуществление математических доказательств и согласие с их результатами трактуются им как некоторый обычай или ритуал, как факт нашей "естественной истории". Доказательство - это творческий процесс по созданию новой парадигмы вычисления (в этом смысле математика для Витгенштейна "нормативна") [7]. В математике как бы экспериментируют с различными "образами" вычислений, отдельные из которых становятся парадигматическими и (временно) приемлемыми в силу своей полезности.

Витгенштейн предупреждал, что когда спорят о доказуемости или недоказуемости некоторого положения, то следует устанавливать, в какой математической системе это происходит. И речь идет не об учете разных уровней или "типов", а о разграничении математических систем как различных и не связанных существенным образом областей активности математиков. При этом предполагается, что для каждой такой области имеются свои собственные "правила игры". Доказательство само показывает, что именно следует принимать в качестве критерия доказуемости. Оно обязательно является частью определенной системы ("игры"), в которой используются входящие в него предложения. Неспособность

[6] "Но вы не можете допустить противоречие! - Почему бы и нет? Порой в нашей речи мы используем эту форму, хотя, конечно, и нечасто; однако можно придумать некоторую языковую технику, в которой она служила бы постоянным инструментом" [8. С. 166] .

[7] То, что я говорю, сводится к тому, что математика нормативна. Но "норма" не означает то же самое, что "идеал" [8. С. 190] .

многих математиков понять это, неумение воспринять более широкую точку зрения есть причина характерной узости их мышления.

Как уже отмечалось, доказательства употребимы (а следовательно, обладают значением) только в том случае, если они имеют парадигматический характер. Доказательство должно быть эталоном правильности, и оно перестает быть таковым, когда в нем начинают сомневаться. Это нечто вроде "кинематографического образа", демонстрирующего, как что-либо происходит. Доказательство есть также модель, показывающая результат конструктивной процедуры, причем оно должно показывать свой результат с необходимостью [8]. Вычисление "3 + 3 = 6" дает закрепленное практикой правило (или стандарт, норму) арифметического рассуждения. Принятие результата доказательства есть свидетельство того, что мы твердо убеждены в нем, т.е. "следуем правилу". Если доказанное математическое положение внешне фиксирует какую-либо внешнюю ему реальность, это на самом деле будет лишь показателем принятия нового измерения.

По Витгенштейну, главное заключается в том, как именно доказательство конструирует то или иное математическое положение. Оно заставляет одну структуру порождать другую, выявляет концептуальные отношения между ними. В силу этого доказательство выступает как инструмент языка. Даже если лишить математику ее конкретного содержания, то и тогда можно будет конструировать одни знаки из других по определенным "правилам". "Я хочу сказать, - отмечал Витгенштейн, - что принять предложение в качестве непоколебимо очевидного - значит использовать его в качестве грамматического (т.е. языкового. - А.Г.) правила: это устраняет неопределенность в его отношении [8. С. 81] [9]. Сталкиваясь с математической парадигмой, мы обычно следуем ее правилам, хотя всегда имеется возможность их нарушения [10]. При этом требуется временный консенсус конкретного математического сообщества, т.е. взаимопонимание всех участвующих в языковой игре с теми или иными знаками [11].

В противовес платонистам Витгенштейн отмечал: "Говорят о математических открытиях. Я же снова и снова пытаюсь показать, что то, что называется математическим открытием, намного правильнее было бы назвать математическим изобретением [10. С. 22] . Более того, доказательства творят математические понятия. Конструктивное доказательство всегда есть принципиально новое и непредсказуемое построение, новый синтез. Подчеркивая это обстоятельство, австрийский философ, однако, обходит трудный для него вопрос о том, как же в таком случае могут соотноситься различные виды доказательств, приводящие к одинаковому результату.

Доказательства, по Витгенштейну, должно быть эксплицитным и ясным. Но язык **"Principia Mathematica"** не соответствует данному требованию, ибо в

---

8 ..."необходимость" соответствует пути, который я прокладываю в языке [8. С. 78] .

9 Надо сказать, что витгенштейновское понятие "следование правилу", разработанное прежде всего на материале математического доказательства, англо-американские философы-аналитики 70 - 80-х гг. пытаются использовать в качестве универсального принципа философского объяснения (см., напр., [9]).

10. Поздний Витгенштейн отвергал взгляд на математику как сферу аналитического **a priori.**

11. "Согласование апробаций есть предварительное условие нашей языковой игры и оно утверждается в ней самой" [8. С. 164] .

этой системе творческая природа доказательства не выявлена: "Расселовские знаки вплоть до неузнаваемости скрывают важные формы доказательства, подобно тому как скрывается очертание человека, завернутого во множество одежд" 8. С. 76 . Поэтому в поздний период Витгенштейн настойчиво отрицает то, что логика может лежать в основании математики; убедительность логического доказательства для него теперь полностью зависит от "геометрической убедительности", наглядности. Причем, по его мнению, в математике вообще можно обойтись без собственно логических доказательств, ибо эта наука вырабатывает свою "грамматику", свои уникальные правила употребления и преобразования знаков, основанные на специфической математической практике.

Полемизируя с логицистами, Витгенштейн отрицал, что закон исключенного третьего абсолютно необходим для математики. По его мнению, неограниченно использовать данный закон - это все равно что требовать нас выбирать между двумя картинками. А что, если эти картинки в какой-то системе вообще не применимы? Поэтому когда формулируют некоторую альтернативу, в действительности используют не закон исключенного третьего, а просто "следуют правилу". "В отношении закона исключенного третьего мы полагаем, что имеем нечто твердое, то, что в любом случае не может быть подвергнуто сомнению. Тогда как на самом деле эта тавтология имеет столь же шаткий смысл... что и вопрос о том, p или $\sim p$ имеет место" [8. С. 140] . Некритическое увлечение логическими законами и логической техникой может только отучить от собственно математической техники и математических правил, оно оказывает сковывающее воздействие на математическое творчество. Законы логики - это лишь правила, описывающие способы употребления символов (например, закон двойного отрицания объясняет, как должен использоваться закон отрицания). Забвение этого обстоятельства будет равносильно тому, что сказать, "будто столярничание заключается в склеивании". Но и манипулирования со знаками в стиле математического формализма тоже далеки от адекватного "грамматического" подхода к употреблению знаков. Математическую деятельность нельзя отождествлять и с вычислением с помощью машины.

Когда логическому обозначению отдается приоритет, тогда оно как бы подавляет внутреннюю структуру языка, те "языковые игры", в которых "живут" математические предложения. Правила математических "языковых игр" специфичны и не могут быть редуцированы к правилам других "игр". Так, к примеру, "общее в математике не находится в том же отношении к математическому единичному, что и общее и единичное в других областях" [8. С. 146] . К тому же можно последовательно применять математическое доказательство и не знать, что именно доказывается. Есть и немало других особенностей математического доказательства. Правда, Витгенштейн признавал, что правила математических "игр" связаны с фактами повседневного опыта, с нашими практическими действиями. Исходным условием таких "игр" оказывается согласие в понимании некоторых понятий разными математиками. Но это отнюдь не означает, как это утверждает М.Даммит (см.: [3] , а также [11]), будто Витгенштейн принял крайнюю версию конвенционализма, согласно которой в математике "все позволено", поскольку на каждом этапе математического доказательства мы как бы заново договариваемся о дальнейшем пути. Витгенштейн всегда подчеркивал особый статус предложений математики, их тесную взаимосвязь друг с другом в пределах той или иной системы. Поэтому замена некоторого предложения или доказательства другим неизбежно вызывает изменение во всей системе, что может иметь очевидные практические последствия. Предложения математики обладают, так сказать, наибольшей устойчивостью в языке, поскольку они играют парадигматическую роль. Кроме того, конвенциональный подход, как известно, связан с истолкованием математических понятий, согласно которому их значение аналитически обусловлено принятыми определениями. Для Витгенштейна же было важно показать, как возникают значения математических понятий в процессе конструктивных доказательств.

Позиция Витгенштейна в поздний период его творчества была особенно далека от какой-либо формы математического платонизма. Взгляд на процесс вычисления как на экспериментальную процедуру, а на математические положения - как на высказывания относительно специфической человеческой активности, противостоял "статичным" платонистским установкам. Математическая "языковая игра" для него есть целостная "форма жизни", которую можно постигнуть, только непосредственно участвуя в ней. Витгенштейн критиковал неконструктивный характер некоторых платонистских доказательств "существования", основанных на понятии "бесконечности" (в том числе доказательства Г.Кантора).

Но это не дает оснований относить его к "финистам". В рукописи "Понятие "бесконечности" в математике" (1931) есть слова: "Если вы говорите о понятии "бесконечности", то должны помнить, что это слово имеет много различных значений, и хорошо осознавать, о каком из них мы собираемся говорить в настоящий момент. Например, что это бесконечность последовательности чисел, кардинальных чисел, в частности" [7. С. 304] . И в другом месте: " Если мы хотим сказать, что бесконечность есть атрибут возможности, а не действительности, или, что слово "бесконечный" всегда употребляется со словом "возможный" и т.п., то это все равно, что сказать: слово "бесконечный" всегда есть элемент некоторого <u>правила</u> " [7. С. 313] . Таким образом, он хотел лишь подчеркнуть относительный характер "бесконечного" в рамках той или иной математической системы и опасность навязывания все математикам одного образа "бесконечности" (вне зависимости от того, будет ли это актуальная или потенциальная бесконечность). "Следует ли избегать слов "бесконечное в математике"? - спрашивает Витгенштейн. - Да, тогда, когда они как бы придают некоторое значение исчислению, вместо того чтобы получать таковое от него" [8. С. 63] [12].

Известно, что Витгенштейна очень раздражала мысль о том, будто математика нуждается в каком-либо обосновании, в особенности логическом обосновании. В действительности, доказывал он, никакая "языковая игра", в том числе и математическая, не нуждается в обосновании, ибо она коренится в самой человеческой активности. Поэтому он осуждал те оторванные от практики теории "чистой математики", которые внутренне соотносятся лишь в другими частями математики, а также критиковал традиционное деление на теоретическую и прикладную математику.

Долгое время "философия математики" Витгенштейна, однако, рассматривалась исключительно в русле исследований по основаниям математики, что и поро-

---

[12] То же следует сказать и в отношении его подхода к закону исключенного третьего, к которому Витгенштейн относится скорее как "лингвистический философ", нежели как математик-интуиционист. Аналогичная ситуация сложилась и при истолковании им теоремы Геделя, которую он отнюдь не отвергал, а лишь критиковал попытки ее неограниченного применения (поэтому неправ А.Р.Андерсон, приписывающий Витгенштейну полное непонимание теоремы о "неполноте" (см. [1. С. 489]).

дило целый ряд неадекватных ее оценок. Эту концепцию пытались "пристегнуть" то к интуиционизму, то к конвенционализму, то к математическому эмпиризму или психологизму [13]. Своеобразны были и реакции математиков-профессионалов. Так, Г.Крайзел свою статью о Витгенштейне фактически посвятил защите гильбертовского формализма. Он считает, что витгенштейновская критика математического формализма затрагивает лишь самые уязвимые положения и может быть легко отброшена в случае приведения более точных формулировок. Крайзел упрекает Витгенштейна в ограниченности "предметной области", которую тот выделяет математике: "...витгенштейновская философия оставляет место для различных **Lebensformen** ...значительно меньше места - для различных форм мышления и вообще едва ли какое-либо место для различных **Seinformen**, т.е. различных видов сущностей, подобных тем, которые изучаются в математике" [5. С. 170] .

Если Крайзел счел витгенштейновскую концепцию наглядности доказательства незначительной, то П.Бернайс признал оригинальность подхода Витгенштейна, который для подтверждения своей позиции приводит целые "семьи" необычных примеров и рисунков. Но общее методологическое и философское значение такого подхода не было выявлено Бернайсом, который сосредоточился на разборе отдельных примеров.

Следует сказать, что в последние годы рассмотренная позиция австрийского философа все чаще начинает интерпретироваться как своеобразный кодекс "лингвистического поведения" математиков, не сводящийся к той или иной программе обоснования математического знания. Несогласие Витгенштейна с большинством разработанных в его время программ объясняется убеждением в ошибочности использованной в них "традиционной" (референтной) концепции значения языковых выражений, непонимании функциональной роли значения. В сфере математики это, на его взгляд, породило запутывающие нас образы особой "математической реальности" (в качестве таковой могут выступать и платонистские "миры чисел", и интуиционистская сфера ментального, и формалистское знаковое написание), отдаляющие от настоящей математической деятельности как творческого, конструктивного процесса, вплетенного в другие формы человеческой деятельности. Только в таком критико-методологическом аспекте и возможно, по нашему мнению, наиболее адекватное восприятие позиции австрийского философа по вопросам математики. В случае же превращения ее в законченную, систематическую программу лингвистического обоснования математики мы будем иметь дело с еще одним запутывающим нас образом, против которых предостерегал сам Витгенштейн. "Философия математики" - неотъемлемая часть его общей философской концепции, разделяющая с ней все ее достоинства и недостатки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Anderson A.R. Mathematics and the "Language Game" // Philosophy of Mathematics. N.Y., 1964.**
2. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М., 1958.

---

[13] Следует отметить, что лишь в работе Кленка была впервые более или менее адекватно выражена специфика витгенштейновского подхода к математике (см. [4]).

3. Dummett M. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics // Philosophy of Mathematics. N.Y., 1964.
4. Klenk V.H. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. Hague, 1976.
5. Kreisel G. Der Unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik // Essays on Wittgenstein in Honour of G.H.von Wright. Amsterdam, 1976.
6. Monatshefte für die Mathematik und Physik. 1939. Bd. 36.
7. Wittgenstein L. Philosophical Remarks. Oxford, 1975.
8. Wittgenstein L. Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford, 1956.
9. Wittgenstein L. To Follow a Rule. L., 1981.
10. Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics. N.Y., 1976.
11. Wright C. Wittgenstein on the Foundations of Mathematics. L., 1980.

А.Н.Нысанбаев

ВЗАИМОСВЯЗЬ ОСНОВАНИЙ И РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

В последнее время возрос интерес ученых к философским и социологическим проблемам оснований математики. Об этом свидетельствует огромный поток литературы, издаваемой как у нас, так и на Западе. В работах, например, англо-американских философов математики (и науки вообще) наблюдается переход от логики обоснования ставшей научной теории к методологии научного открытия и поиска, к логике возникновения и развития нового научного знания (см. [1]). Возникает важный вопрос: каково подлинное соотношение оснований и развития математики как феномена человеческой культуры?

Математика, как и другие науки, в своем развитии двигается от абстрактного знания к конкретному. Все абстрактные формально-общие концепции математического знания, представленные в свое время логицизмом, интуиционизмом и формализмом, являются частными случаями целостной марксистско-ленинской деятельностной концепции математики. В известной степени такая точка зрения получила абстрактное выражение сначала в интуиционистской концепции (см. [2]), а затем в конструктивной концепции математики (см. [3 , 4]), в теории категорий и теории топосов.

Одной из центральных логико-методологических проблем современной математики является проблема ее логического обоснования. В этой связи необходимо подчеркнуть большую роль оснований математики в возникновении, функционировании и развитии математической надстройки. В математике можно выделить две взаимосвязанные и взаимодействующие стороны - основания и развитие. При этом определяющей стороной служит поступательное развитие математического знания, но надо отметить активное воздействие самих оснований на движение познания к новым результатам. Само исследование философских оснований и социокультурных предпосылок математики служит своеобразной формой ее развития и конкретизации.

Парадоксы теории множеств обнаружили трудности обоснования математики с ее помощью. Именно с ними связывается кризисная ситуация в основаниях математики, поскольку эти парадоксы поставили под сомнение истинность исходных понятий и методов формальной логики, которую многие математики считают единственной логико-методологической основой математического познания. И хотя со времени обнаружения парадоксов различными школами обоснования математики проделана значительная работа в плане поиска надежных оснований математики, в частности созданы аксиоматические системы теории множеств и переопределены основные понятия этой теории с тем расчетом, чтобы избежать подобных парадоксов, все же в глазах многих математиков результаты этой работы не выглядят удовлетворительными. Они считают, что возведенный таким образом фундамент современной математики не является логически убедительным и надежным. Так, например, Р.Петер пишет: "Антиномии теории множеств можно бы устранить путем ограничения наивного понятия множества, но это не гарантирует от возникновения противоречий ни в такой ограниченной теоретико-множественной системе, ни в других областях математики" [5. С. 213] .

Вообще следует заметить, что кризисные ситуации в развитии математики возникали тогда, когда в логической структуре фундаментальных понятий математического познания, таких, как, в частности, понятие бесконечности, обнаруживались противоречия. Столкнувшись с противоречиями в теории, поняв их как проявление внутренних, имманентных противоречий понятий, исследователь обращается к основаниям математической теории. В этом случае он выступает как методолог. Насколько же успешным будет анализ ее оснований, зависит от сознательной логико-методологической позиции математика.

Поскольку математика есть развивающаяся система знаний, то и ее основания должны быть такими же. Именно тогда развивающийся базис может быть прочным основанием развивающейся математической надстройки. "Противоречия в пограничных частях математики, - писал Г.Вейль, - следует рассматривать как симптомы некоторого неблагополучия всей этой науки, в противоречиях этих открыто выступает то, что скрывается внешне блестящим и крепким видом математического здания, - выступает именно внутренняя непрочность фундамента, на котором покоится вся надстройка" [6. С. 92] .

Новый кризис оснований математики, о котором пишет Г.Вейль в связи с обнаружением логико-семантических парадоксов теории множеств, был кризисом формально-логических оснований классической математики, т.е. кризисом старого понимания оснований теории как системы формально-логических принципов (принцип исключенного третьего, принцип "целое больше части" и т.д.), которые в совокупности составляют основание классической математики.

Но сложность создавшегося положения состоит в том, что математики пришли к парадоксам не в результате какой-то ошибки рассуждения или логической небрежности. Наоборот, все их действия были формально-логически законными: исходили из надежных теоретико-множественных понятий в соответствии с канонами формальной логики. А результат - явное противоречие.

Трудности, возникшие после обнаружения парадоксов теории множеств, были осознаны крупнейшими математиками как имеющие логико-методологический характер. Это значит, что суть кризиса оснований математики состоит не в нарушении той гармоничной целостности, которое явилось результатом выявления антиномий теории множеств, а в том, что "даже само математическое мышление дает осечку", т.е. методы "образования понятий" и "ход умозаключений" не являются гарантами истинности и надежности. Парадоксы теории множеств предстали перед математиками как некий айсберг, незначительная (математическая) часть которого возвышается над поверхностью воды, в то время как основная (логико-методологическая, гносеологическая) часть скрыта под водой.

Где же искать выход из тупика, какими средствами можнс разрешить антиномии? Старые средства себя дискредитировали, совершенно естественно возникла необходимость создания новых. "Мы полагаем, - пишут Френкель и Бар-Хиллел, - что любые попытки выйти из положения с помощью традиционных (т.е. имевших хождение до XX столетия) способов мышления, до сих пор неизменно проваливавшиеся, заведомо недостаточны для этой цели. Некоторый отход от привычных способов мышления явно необходим, хотя место этого отхода заранее неизвестно" [7. С. 17] .

Способом мышления, позволяющим дать верное логико-методологическое обоснование математическим методам разрешения теоретико-множественных парадоксов, является диалектический способ мышления. Любая научная проблема может быть правильно понята и, следовательно, разрешена, только тогда, когда она определит свой удельный вес во всеобщем, т.е. когда будет выяснена ее логическая, категориальная структура. Подобную задачу может решить лишь диалектико-материалистическая логика.

Абстрактно-общие программы обоснования математики (логицизм, интуиционизм и формализм) возникли как попытки разрешения парадоксов теории множеств на формально-логическом уровне методологического анализа. Поскольку парадокс математический (или формально-логический) решили математики, то и средства его разрешения должны быть соответствующими. Логицизм, формализм и интуиционизм явились теми "способами мышления" (в узком частно-математическом смысле слова), с помощью которых должны были справиться с антиномиями. Однако ни один из этих абстрактных, формальных "способов мышления" не дал верного пути выхода из кризиса оснований математики. Ибо основания математики представляют собой единство формальных и содержательных принципов, выполняющих интегративную функцию.

Разумеется, само по себе понимание логических основ теоретико-множественных парадоксов не означает, что автоматически будут построены математические методы, с помощью которых их можно будет преодолеть. Разрешение парадоксов - это дело математиков. Но без адекватной логико-методологической платформы эту задачу не осилить.

Парадоксы теории множеств - это кризис не только собственных оснований математики, но и кризис формально-логической методологии, которая опирается на фундаментальные математические понятия. Но формально-логическая методология не видит и не способна видеть, что на самом деле в парадоксах теории множеств заключена идея о переходе формально-логического определения понятий в определение содержательно-логическое. Канторовское определение множества как простое объединение в одно целое хорошо различаемых объектов нашей мысли, по существу, есть абстрактное представление, термин, имя для обозначения класса "объектов". Это определение очень удобно для формальной логики, предметом которой являются законы употребления терминов, а не движения понятий. Впрочем, она не подозревала о том противоречии, которое таится в этом абстрактном определении в форме диалектического единства конечного и бесконечного.

Столкнувшись с парадоксами теории множеств, к которым пришли математикики, не нарушая канонов формальной логики, они начали искать выход из этого положения и допущенную ошибку. И такая "ошибка" была найдена. Ею оказалось канторовское определение множества. Сразу же стали предприниматься попытки "исправить", "уточнить" это определение. Так появилась теория типов Рассела - Уайтхеда, аксиоматические системы Геделя - Бернайса и Цермело - Френкеля и т.д.

Следует отметить, что даже на этом пути "уточнения", "исправления" основных понятий теории множеств, математическая логика достигла большого прогресса, возникли различные логические системы, которые существенно расширили наше представление о методах формальной логики по сравнению с методами традиционной логики. Однако все они не привели к разрешению парадоксов теории множеств. В данном случае в развитии науки вообще, и математики в частности, сложилась ситуация, когда проблемы конкретно-научные (математические) переросли в проблемы общелогические.

Третий кризис оснований математики показал принципиальную ограниченность возможностей формальной логики как методологической концепции математики. Анализ ситуации, связанной с парадоксами теории множеств, выдвигает перед математиками задачу коренного пересмотра основных принципов формальной логики (в частности, принципа противоречия) и сознательного овладения диалектико-логической методологией и применением ее фундаментальных принципов, в том числе и принципа диалектического противоречия, в своей познавательной деятельности. Диалектико-логический анализ адекватен природе парадоксов в основаниях математики.

История науки показывает, что в процессе развития теории наступает такой момент, когда в ее структуре вскрываются взаимоисключающие положения, которые приходят в противоречие с первоначальным представлением об объекте. Мы говорим в таком случае, что в развитии теории наступила кризисная ситуация, наступил кризис оснований этой теории. Именно с таким положением столкнулись математики в конце XIX - начале XX в., когда были обнаружены многочисленные парадоксы теории множеств. Кризисная ситуация в развитии математики возникает тогда, когда исходные представления об объекте математической теории приходят в противоречие с вновь открытыми фактами, которые не вписываются в данную теорию. Эта ситуация означает, что математик реально сталкивается с объективной противоречивостью исследуемого им посредством теории предмета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рузавин Г.И. Логика и методология научного поиска (обзор англо-американской литературы). М., 1986.
2. Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. М., 1984.
3. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теории алгоритмов. М., 1984.
4. Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. М., 1983.
5. Петер Р. Рекурсивные функции. М., 1954.
6. Вейль Г. О философии математики. М.; Л., 1934.
7. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966.

Раздел II. ТРИЛЕММА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ: ФОРМАЛИЗМ, ИНТУИЦИОНИЗМ, КОНСТРУКТИВИЗМ

Д.Гильберт

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ *

Любое государство развивается успешно, - впрочем, это относится и к жизни любого отдельного человека, - если дела идут хорошо и у его соседей; жизнь наук в этом отношении аналогична жизни государств, и их преуспеяние зависит от порядка как в них самих, так и в их отношениях с другими науками. Ясно понимая это, наиболее известные представители математики всегда высказывали большой интерес к поддержанию закона и порядка в соседних науках и для пользы самой математики развивали отношения с этими соседними науками, в частности с физикой и философией. Сущность этих отношений и основа их плодотворности могут быть показаны более отчетливо, если коротко обрисовать тот общий метод исследования, который занимает все более и более важное место в современной математике,- я имею в виду аксиоматический метод.

Если соединять факты некоторой специфической области более или менее исчерпывающим образом, то мы быстро убедимся, что эти факты могут быть выстроены в определенном порядке. Этот порядок устанавливается неизменно с помощью некоторой понятийной структуры такой, в которой существует связь между индивидуальными объектами данной области знания и понятиями структуры и между теми же фактами в данной области знания и логическими отношениями среди понятий. Понятийная структура есть не что иное, как теория данной области знания.

Именно таким образом геометрические факты организуются в геометрию, арифметические факты - теорию чисел, статические, механические, электродинамические факты - в теорию статики, механики, электродинамики, а факты из области физики газов - в теорию газа. То же самое верно для областей знания термодинамики, геометрической оптики, элементарной теории излучения, передачи тепла или даже для теории вероятности и для теории множеств. Также хорошо это подтверждается в таких специфических областях чистой математики, как теория поверхностей, теория уравнений Галуа, теория простых чисел и даже в не-

---

* Hilbert D. Axiomatic Thinking // Philosophia Mathematica. Chicago, 1970. Vol. 7, N 1-12. Пер. с англ. А.Г. Барабашева.

которых областях знания, лишь отдаленно связанных с математикой, таких, как определенные разделы психофизики или экономики.

Если мы рассмотрим имеющиеся теории более тщательно, то во всех случаях увидим, что в основании их понятийной структуры лежат именно те несколько предположений о данной области знания, которые достаточны для построения из них полной структуры знания в этой области в соответствии с логическими принципами.

Утверждение линейности уравнения плоскости, таким образом, является достаточным в геометрии, а то, что ортогональное преобразование координат точек достаточно для получения полноты обширного знания в геометрии евклидова пространства, показывается исключительно посредством анализа. Аналогично законы и правила вычисления для целых чисел достаточны для задания теории чисел. Такая же роль придается закону параллелограмма сил в статике, нечто подобное можно сказать и о дифференциальных уравнениях движения Лагранжа в механике; в свою очередь, уравнения Максвелла в электродинамике учитывают условия поведения электронов. Термодинамика полностью построена посредством задания понятия функции энергии и определения температуры и давления как проистекающих из их измерения, энтропии и объема. В центре элементарной теории излучения находится закон Кирхгоффа об отношении между излучением и поглощением; сходную роль играет закон Гаусса при вычислении вероятности, теорема энтропии как отрицательный логарифм вероятности событий в теории газа, представление элемента дуги квадратичной дифференциальной формой, теорема существования корней в теории уравнений, теорема распределения и частоты нулей дзета-функции Римана, являющаяся фундаментальной теоремой в теории простых чисел.

Рассматриваемые с обозначенных позиций, такие теоремы могут быть рассмотрены как аксиомы отдельных областей знания. Это означает, что успешное развитие отдельных областей знания основывается на значительном возрастании полноты понятийной структуры. Эти исходные позиции выделения теорем и методов как аксиом доминируют в чистой математике, и именно благодаря им столь мощно развились геометрия, арифметика, теория функций и анализ в целом.

В упомянутых случаях проблема построения отдельных областей знания получила свое решение, однако это решение было, так сказать, пробным (приблизительным). Но по мере дальнейшего развития любой науки становится все более необходимым целенаправленное выделение ее основополагающих предположений в чистом виде, осознания их в качестве аксиом и "помещение" их в "фундамент" данной области знания. Так произошло с "доказательствами" линейности уравнения плоскости и ортогональности преобразования, выражающего движение, с законами арифметических вычислений, с параллелограммом сил, с уравнениями движения Лагранжа и с законами Кирхгоффа излучения и поглощения, с принципом энтропии и с теоремой о существовании корней уравнения.

Но критическое рассмотрение этих "доказательств" заставляет прийти к выводу, что это еще не доказательства в собственном смысле слова, а скорее этапы продвижения к более глубинным предположениям (утверждениям), которые, в свою очередь, могут быть рассмотрены как аксиомы более основополагающие, чем те предположения (утверждения), которые имелись первоначально. Таковы, в частности, современные аксиомы геометрии, арифметики, статики, механики, теории излучения и термодинамики. Эти аксиомы есть "более глубоко лежащий пласт", чем предшествующие, непредумышленно найденные (первые) основания отдельных областей знания. Механизм аксиоматического метода приводит к более глубоким основаниям знания, ибо это действительно необходимо для более совершенного его построения.

Если теоретическая основа конкретной науки - это представляющая ее понятийная структура, то для упорядочивания и развития исходной области знания ей необходимо соответствовать двум основным требованиям: она должна, во-первых, предлагать общий взгляд на зависимость или независимость утверждений теории и, во-вторых, гарантировать непротиворечивость всех утверждений теории. Эти пункты обязательны для аксиом каждой теории. Рассмотрим вначале первый из них.

Аксиома параллельности в геометрии является классическим примером исследования независимости аксиом. Евклид отрицательно ответил на вопрос о том, является ли утверждение о параллельности зависимым от других аксиом, поскольку он поместил его среди аксиом. Евклидов метод исследования стал типичным для представителей аксиоматического исследования, и со времен Евклида геометрия стала модельным примером аксиоматической науки в целом.

Классическая механика предоставляет другой пример исследования независимости аксиом. Лагранжево уравнение движения, как оно всегда рассматривается, способно действовать как аксиома механики - до тех пор, пока это бесспорно не делает механику более полной при общей формулировке произвольных сил и произвольных вторичных состояний. Более тщательное рассмотрение показывает, однако, что произвольные силы, как, впрочем, и произвольные вторичные состояния, не необходимы для конструирования механики и что, следовательно, система предположений может быть сокращена. Это понимание ведет, с одной стороны, к аксиоматической системе Больцмана, который предполагал только силы, а именно центральные силы, а с другой - к аксиоматической системе Герца, который отрицал силы и считал достаточными только вторичные свойства, а именно фиксированные взаимосвязи. Эти две аксиоматические системы формируются на глубинном уровне аксиоматизации механики.

Сходный случай возникает, если представить как аксиому теорему о нулях дзета-функции Римана в теории простых чисел. Доказательство этой теоремы будет необходимым для движения к более глубинному уровню чисто арифметических аксиом, что будет лучшей гарантией сохранности важнейших следствий.

Специальный интерес для аксиоматического осмысления представляет вопрос о зависимости утверждений в области действия аксиомы непрерывности.

В теории действительных чисел показано, что аксиома измерения, так называемая аксиома Архимеда, независима от всех остальных аксиом арифметики. Как хорошо известно, этот факт существенно значим для геометрии, но мне представляется, что не меньший интерес он представляет и для физики, ибо ведет нас к следующему результату: к рассмотрению измерений и досягаемости небесных тел возможно подходить посредством соединения вместе земных досягаемостей, измерения небесных расстояний земными мерами, и в то же время можно расстояния внутри атомов выражать в терминах метрического измерения. Данное положение можно понять не только как логическое следствие утверждений о конгруентности треугольников и геометрических конфигураций, но и как результат реальной деятельности. Действительность аксиомы Архимеда в реальности в том смысле, в каком это было сейчас отмечено, нуждается в экспериментальном подтверждении точно так же, как утверждение о сумме углов треугольника в обычном смысле. В общем, я хотел бы сформулировать аксиому непрерывности в физике следующим образом: "Если данному физическому утверждению предписана некоторая произвольная степень точности, то затем может быть установлен малый диапазон, в пределах которого предположения, предшествующие исходному утверждению, могут свободно изменяться таким образом, что отклонения от утверждения не превысят предписанного уровня точности". Эта аксиома ценна лишь тем, что вытекает из самой сущности эксперимента; и она всегда принималась физиками, хотя никогда и не формулировалась ими прямо.

Если кто-то выведет, примерно так же, как Планк, вторую теорему Хита из аксиомы невозможности построения машины перпетуум мобиле второго рода, то эта сформулированная мною аксиома непрерывности будет им необходимо употреблена.

Гамель очень интересным способом показал, что в соответствии с принципом вполне упорядочиваемости континуума аксиома непрерывности необходима для доказательства закона параллельных сил в основаниях статфизики по крайней мере для удобного выбора других аксиом.

Аксиомы классической механики могут быть сформулированы более глубоко, если предположить непрерывное движение и использовать аксиому непрерывности в последовательном коротком едином прямолинейном разбитом на куски импульсом движении, а затем использовать принцип максимума Бертрана как добавочную механическую аксиому; в соответствии с ней реально совершающееся движение после каждого толчка (удара) происходит таким образом, что кинетическая энергия системы максимально противоположна всем движениям, совместимым с принципом сохранения энергии.

В новейших способах обоснования физики, особенно в электродинамике, появляется не что иное, как теория континуума сама по себе, и соответственно берется непрерывность в широком пространстве, которое я не могу представлять здесь, так как соответствующие исследования еще не завершены.

Теперь займемся анализом второй из названных выше проблем, а именно требованием непротиворечивости аксиом. Это требование огромной значимости, поскольку существование противоречия в теории является проявлением ее нестабильности.

Понимание внутренней непротиворечивости сопряжено с трудностями даже в давно принятых и процветающих теориях. Я подразумеваю "**Umkehr** " и "**Wieder - kehreinwand** " * в кинетической теории газов. Часто случается так, что внутренняя непротиворечивость теории достаточна для ее объяснения до тех пор, пока глубокое математическое развитие необходимо для доказательств. Например, возьмем проблему из элементарной теории теплообмена, точнее, распределение температуры внутри однородного тела, поверхность которого хорошо сохраняет внутри температуру, варьирующуюся от места к месту. Тогда требование существования температурного равновесия содержится в факте, не противоречащем теории. Для того, однако, чтобы это понять, необходимо доказать, что хорошо известная проблема определения граничных значений в теории потенциала всегда разрешима, ибо эта проблема показывает, что распределение температур, удовлетворяющее уравнению теплообмена, возможно вообще.

Конечно, всего этого для физики вообще недостаточно, однако, если ут-

---

* Аргументы против больцмановской Н-теоремы, принадлежащие Лошмидту и Цермело. - прим. перев.

верждения теории находятся в гармонии друг с другом, то тогда они еще могут встретиться с требованием не противоречить утверждениям соседних областей знания.

Так же как было показано выше, аксиомы элементарной теории излучения добавляют к фундаментальному закону излучения и поглощения Кирхгоффа еще один специальный закон отражения и преломления простых световых лучей, а именно закон того, что если два луча естественного света равной энергии падают со стороны на пространство, разделенное двумя посредниками в таких направлениях, что один луч после испускания, а другой после отражения принимают общее направление, то луч, получившийся после их объединения, опять представляет луч натурального света той же энергии. Этот закон, как фактически ясно, не противоречит оптике, но он может быть выведен как следствие из электромагнитной теории света.

Результаты кинетической теории газов, как хорошо известно, находятся в полном соответствии с термодинамикой.

Таким же образом электромагнитная инерция и эйнштейновская гравитация совместимы с соответствующими понятиями в классической механике постольку, поскольку они предполагаются пограничными случаями в более общих понятиях.

С другой стороны, современная теория кванторов и возникающее знание внутренней структуры атомов ведут к закону, который решительно противостоит электродинамике в том виде, в котором она была построена с помощью уравнений Максвелла; и необходимо признать, что современная электродинамика требует качественно новых оснований.

Можно понять, что устранение противоречий в физических теориях всегда осуществляется путем селекции аксиом, и сложность заключается в подборе ситуации, где все известные физические законы должны быть логически выводимы.

Положение, однако, изменяется, когда противоречия имеют место в чисто теоретических областях знания. Теория множеств предоставляет классический пример такого случая, например парадокс множества всех множеств, который восходит к самому Кантору. Этот парадокс столь серьезен, что такие выдающиеся математики, как Кронекер и Пуанкаре, пришли к отрицанию теории множеств в целом (отрицанию одного из наиболее плодотворных и могущественных разделов математики) и любого оправдания ее существования.

Аксиоматический метод тем не менее находит средство для устранения таких опасных обстоятельств. Поскольку он выдвигает подходящие аксиомы, ограничивающие, с одной стороны, произвол в определениях множеств самих по себе и, с другой допустимость использования их элементов специфическим образом, Цермело удалось развить теорию множеств таким образом, что указанный парадокс был устранен и посредством ограничений смысл и приложимость теории множеств остались прежними.

Во всех упомянутых случаях проблема состояла в противоречиях, которые были выявлены в процессе развития теории, и их устранение обусловило потребность в модификации аксиоматических систем. Однако, для того чтобы избежать противоречий, недостаточно просто восстановить пошатнувшуюся репутацию математики как наиболее строгой науки. Принципиальное требование аксиоматики должно быть направлено в будущее, а именно на установление того обстоятельства, что противоречия вообще не могут быть возможны в области знания, базирующейся на установленной системе аксиом.

Исходя из этого требования, в "Основаниях геометрии" я доказал совместимость выделенных аксиом, для которых, как показано, каждое противоречие в дедукции из геометрических аксиом необходимо сказывалось бы также и в системе арифметики действительных чисел.

Не вызывает сомнений, что для областей физического знания внутренняя совместимость также редуцируется к совместимости аксиом арифметики. Аналогично совместимость аксиом элементарной теории излучения отражена в конструировании аксиоматической системы для теории с аналитически независимыми частями, где совместимость анализа является одной из предпосылок.

Вполне приемлемо, чтобы такие же допущения принимались при построении математической теории в целом. Если мы примем за аксиому, например, теорему существования корней в теории уравнений Галуа или же теорему о существовании нулевых точек дзета-функции Римана в теории простых чисел, то доказательство непротиворечивости аксиоматической системы, состоит только в аналитическом доказательстве теоремы существования корней или теоремы дзета-функции – и на первое время безопасность теории обеспечена.

Таким же образом вопрос непротиворечивости аксиоматической системы действительных чисел сводится путем использования понятий теории множеств к тому же вопросу для целых чисел. Это сведение является заслугой теории иррациональных чисел, созданной Вейерштрассом и Дедекиндом.

Только в двух случаях, а именно в случае аксиоматики целых чисел и в случае оснований теории множеств, эта попытка сведения к другой специфической области знания невыполнима, так как за логикой "не стоит" дисциплины, к которой можно было бы обратиться.

Однако, поскольку доказательство непротиворечивости является задачей, которая не может быть отменена, становится необходимым аксиоматически построить саму логику, а затем установить, что теория чисел и теория множеств являются только частями логики.

По этому пути, подготавливаемому долгое время, и не в последнюю очередь глубокими исследованиями Фреге, в конце концов стремительно продвинулся великий математик и логик Рассел, в результате им была создана аксиоматика логики, которая увенчала собой работу по созданию теории аксиоматизации в целом.

Тем не менее ее завершение потребовало многих новых работ. При ближайшем рассмотрении мы в настоящее время видим, что вопросы о непротиворечивости теории целых чисел и теории множеств не являются изолированными, а входят в огромный массив наиболее трудных эпистемологических вопросов, имеющих специальную математическую окраску. Характеризуя состав этого массива, я упомяну проблему принципиальной решаемости каждого математического вопроса, проблему дополнительной проверки результатов математического исследования, вопрос критериев простоты математических доказательств, вопрос взаимоотношений содержания и формализма в математике и логике и, наконец, проблему разрешимости произвольных математических проблем с помощью конечного числа операций.

До тех пор пока все вопросы такого типа не будут поняты и объяснены, невозможно удовлетвориться достигнутым уровнем аксиоматизации логики.

Последний из указанных вопросов, а именно вопрос о разрешимости с помощью конечного числа операций, является наиболее хорошо известным и часто обсуждаемым, ибо он глубоко затрагивает сущность математического мышления. Я хотел бы сейчас обратить на него внимание и рассмотреть несколько частных математических проблем, в которых он играет существенную роль.

В теории алгебраических инвариантов фундаментальная теорема гласит, что существует конечное количество (рациональных) целых инвариантов, с помощью которых могут быть представлены все остальные инварианты. Первое общее доказательство, данное мною, удовлетворяет, я уверен, нашим требованиям и действительно обладает ясностью и простотой. Однако это доказательство невозможно модифицировать таким образом, чтобы получить в точно очерченном и ограниченном процессе конкретный полный набор инвариантов данной системы или даже продвинуться в конкретном его получении. Скорее, здесь нужен совершенно другой вид исследования и новые принципы для того, чтобы понять, что строение полной системы инвариантов требует только тех операций, количество которых конечно и которые допускают конечное нахождение с помощью вычислений.

Аналогичная ситуация наблюдается в теории поверхностей. В геометрии четырехмерных поверхностей фундаментальным вопросом является то, каково максимальное количество попарно пересекающихся выпуклых поверхностей может в них содержаться.

Первое, что тут можно ответить, это сформулировать утверждение, что таких случаев может быть только конечное количество; это может быть легко обосновано с помощью теории функций, например, так: предположим, что таких покрытий бесконечное количество, и тогда выберем момент времени, когда эта часть пространства будет покрыта. Объединение этого бесконечного количества выбранных точек даст точку такую странную, что она не будет принадлежать алгебраической поверхности.

Это использование теории функций, без сомнения, ведет к заданию ограничений для количества покрытий, однако здесь невозможно найти количество пересечений и в конце концов показать, что количество покрытий не может быть более чем 12.

Второй метод, полностью отличный от первого, в противоположность ему не является "прикладным" и не может быть модифицирован таким образом, чтобы показать, возможно ли покрытие четырехмерной поверхности 12 различными типами покрытий.

Поскольку четырехмерная четвертичная форма имеет 35 однородных коэффициентов, то мы можем ее представить как специальную четырехмерную поверхность в 34-мерном проективном пространстве. Дискриминант четырехмерной четвертичной формы в своих собственных коэффициентах обладает степенью 108; если его приравнять нулю, то он представляет поверхность порядка 108 в 34-мерном пространстве. Поскольку коэффициенты дискриминанта сами по себе – специального вида целые числа, то топологический характер поверхности, описываемой дискриминантом, очевидно определяется в соответствии с правилами, которые хорошо известны для двух- и трехмерного пространства, так что мы можем быть точно осведомлены о природе и значении отдельных секций, на которые поверхность дискриминанта разделяет 34-мерное пространство. Итак, все четырехмерные поверхности представлены точками этих секций, которые действительно обладают равным числом покрытий, и теперь возможно определить посредством конечного количества сложных и хлопотных вычислений, где существует и где не существует четырехмерная поверхность с покрытием меньшим или равным 12.

Геометрическое рассмотрение дает нам третий путь поиска ответа на вопрос нахождения максимального количества покрытий четырехмерной поверхности, доказывая возможность разрешения вопроса через конечное количество операций. Аналогичным образом к проблеме такого же ранга сводится задача определения десятичного выражения числа с точностью до $10^{10^{10}}$ степени – задача, которая может быть, без сомнения, решена, однако решение которой до сих пор неизвестно.

Для того чтобы понять, что 11 покрытий для четырехмерной поверхности невозможны, а 10 покрытий действительно имеют место, вероятно, необходимо проницательное и глубокое исследование в области алгебраической геометрии, произведенное Рохом. Данный (четвертый) метод, возможно, предоставит полное решение проблемы.

Эти специальные исследования показывают, сколь различными могут быть методы доказательства, приложенные к одной и той же проблеме; они также предполагают необходимость изучения сущности математического доказательства самого по себе для последующего решения вопросов вроде того, разрешима ли проблема с помощью конечного количества операций вообще.

Поставленные вопросы заключают в себе принципы, о которых я говорил выше, и из которых только последний из числа названных был связан с проблемой разрешимости с помощью конечного числа операций. Это свидетельствует о несомненной важности и достижимости для нас нового поля исследований; приступить к освоению данного поля мы должны, по моему мнению сделав концепцию математического доказательства самостоятельным объектом исследования, точно так же как астроном должен принимать в расчет свое местоположение, физик – рассматривать используемый в теории аппарат, а философ – отвергать метафизические представления о причинности в отрыве от реальных причинно-следственных отношений. Осуществление этой программы, конечно, является делом будущего.

В заключение я хотел бы суммировать мое общее понимание аксиоматического метода в нескольких строках. Я уверен: все, что может быть объектом научного исследования в целом, и постольку, поскольку оно созревает для оформления в теорию, прибегает к аксиоматическому методу и через него косвенно к математике. Обращаясь вперед, по направлению к более глубокому пласту аксиом, в дополнительном понимании мы достигаем более глубокого проникновения в сущность научного мышления и еще более ясно осознаем единство нашего знания. В свидетельствах аксиоматического метода, как представляется, математика призвана играть лидирующую роль в науке в целом.

С.С.Демидов

О РАБОТЕ Д.ГИЛЬБЕРТА "АКСИОМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ"

Предлагаемая вниманию читателей работа Д.Гильберта "Аксиоматическое мышление" представляет собой текст доклада, прочитанного великим математиком в сентябре 1917 года в Цюрихе собранию Швейцарского математического общества. Уже три года в Европе бушевала война. Здесь же, в нейтральной Швейцарии, все спокойно. И лишь настрой вступительных фраз гильбертовского доклада вносит в мирную обстановку математического заседания ощущение причастности к событиям военного времени.

Гильберту 55 лет. Он в зените славы. Крупнейший математик мира, выдающийся специалист в ее основаниях.

Еще в 1899 году вышли первые издания "Основания геометрии", составившие эпоху в основаниях математики и истории аксиоматического метода. Предложенная им система аксиом геометрии, естественным образом распределенных по группам, проясняла всю логическую структуру геометрии. Такое распределение позволяло исследовать вопрос о пределах, до которых можно развивать геометрию, основанную на тех или иных группах аксиом. Вопрос о непротиворечивости предложенной системы аксиом был сведен Гильбертом к вопросу о непротиворечивости арифметики действительных чисел.

В 1900 году Гильберт опубликовал работу "О понятии числа", в которой предложил аксиоматику арифметики действительных чисел. В том же году он выступил в Париже на II Международном конгрессе математиков со знаменитым докладом "Математические проблемы", в котором под номером два сформулировал проблему доказательства непротиворечивости аксиоматики арифметики действительных чисел. "Когда речь идет о том, чтобы исследовать основания какой-нибудь науки, то следует установить систему аксиом, содержащих точное и полное описание тех соотношений, которые существуют между элементарными понятиями этой науки. Эти аксиомы являются одновременно определениями этих элементарных понятий, и мы считаем правильными только такие высказывания в области науки, основания которой мы исследуем, какие получаются из установленных аксиом с помощью конечного числа логических умозаключений" - такими словами [1. С. 25] Гильберт предварил формулировку проблемы. Далее он высказал требования, предъявляемые к системе аксиом математической науки: независимость и непротиворечивость.

В том же докладе под номером шесть Гильберт сформулировал задачу "об аксиоматическом построении по этому же образцу (по образцу геометрии. - С.Д.) тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика" [1. С. 34].

Таким образом, уже к 1900 году у Гильберта сложилась, как можно видеть из приведенных его высказываний, обширная программа аксиоматизации математики и, шире, математического естествознания: выделения естественных аксиоматик соответствующих теорий, а также доказательства их независимости и непротиворечивости.

Однако с реализацией этой программы сам Гильберт не торопился. Его собственные исследования по основаниям геометрии, мало-помалу уступали новому увлечению - теории интегральных уравнений, которая стала основным предметом его занятий вплоть до 1912 года. Но чем бы ни занимался Гильберт, проблемы оснований математики оставались объектом его пристального внимания и постоянных размышлений. И когда в основаниях математики разразился скандал, связанный с открытием парадоксов теории множеств, Гильберт отозвался на него большим докладом на III Международном конгрессе математиков, проходившем в Гейдельберге в 1904 году.

"Я придерживаюсь того мнения, - говорил тогда Гильберт [2. С.], - что все затронутые трудности (связанные с теоретико-множественными парадоксами. - С.Д.) могут быть преодолены и что можно притти к строгому и вполне удовлетворительному обоснованию понятия числа и притом с помощью метода, который я называю аксиоматическим; основную его идею я хотел бы обрисовать в данном докладе; строгое и последовательное проведение и развитие этого метода я оставляю на будущее".

Если до открытия парадоксов теории множеств Гильберт полагал получить доказательство непротиворечивости аксиоматики арифметики на пути усовершенствования методов рассуждений теории действительных чисел, то теперь он видел путь в разработке теории самих доказательств.

Однако для работы по построению такой теории Гильберт был еще не готов. Его увлечение интегральными уравнениями мало-помалу уступало интересам в области физики, которые сосредоточивались на комплексе задач, составляющих содержание шестой его проблемы проблемы аксиоматизации физики. Он разрабатывает аксиоматические системы кинетической теории газов и элементарной теории излучения.

Именно на пересечении двух линий интересов Гильберта - распространения аксиоматического подхода на физику и обоснования непротиворечивости аксиоматических систем арифметики теории множеств на пути построения теории доказательств - лежит публикуемый нами его доклад.

В докладе Гильберт так определяет сущность своего понимания аксиоматического метода: "Я верю, что все, что может быть объектом научного исследования и достигшее уровня зрелости, достаточного для включения в некоторую теорию, подвластно аксиоматическому методу и через него косвенно математике. Обращаясь к более глубокому пласту аксиом... мы достигаем более глубокого проникновения в сущность научного мышления и еще яснее осознаем единство нашего знания. В проявлениях аксиоматического метода математика, как представляется, призвана играть лидирующую роль в науке в целом".

Главные требования, которые Гильберт ставит перед аксиоматизированной теорией, как мы уже говорили, это независимость ее аксиом и их непротиворечивость. Он обсуждает эти требования применительно к аксиоматикам теоретических областей, таких,как теория множеств, и прикладных вроде отдельных разделов физики. Наибольшие сложности таит в себе проблема непротиворечивости. До сих пор она решалась сведением к аналогичной проблеме для другой области, непротиворечивость которой на интуитивном уровне не вызывала сомнений вроде арифметики. Пример этому дал сам Гильберт, сведя проблему непротиворечивости аксиоматики геометрии к непротиворечивости арифметики действительных чисел. "Только в двух случаях, - пишет Гильберт, - а именно в случае аксиоматики целых чисел, а также в случае оснований теории множеств, эта попытка сведения к другой специфической области знания невыполнима, так как за логикой нет далее дисциплины, к которой можно было бы обратиться". Ссылки на интуицию ввиду открывшихся парадоксов теории множеств выглядели неубедительно. Нужно было изыскивать иные подходы к доказательству непротиворечивости. Такие подходы Гильберт видел в построении аксиоматизации самой логики и в построении теории доказательств.

Проблемы непротиворечивости арифметики целых чисел и теории множеств Гильберт рассматривает как частные в обширной области наиболее трудных эпистемологических проблем, связанных с математикой. Гильберт формулирует пять таких проблем:

1. Проблему принципиальной разрешимости каждой математической задачи.

2. Проблему контролируемости результатов математического исследования.
3. Проблему критериев простоты математических доказательств.
4. Проблему соотношения содержательного и формального в математике и логике.
5. Проблему разрешимости произвольных математических задач с помощью конечной процедуры.

По каждой из этих проблем (проблем Гильберта в философии математики) Гильберт оставил интересные мысли, разбросанные по различным его работам. Особенно много думал он над первой и последней проблемами. Эти размышления во многом определили специфику теории доказательств, к разработке которой он приступил вскоре после произнесения доклада.

Доклад "Аксиоматическое мышление" стал первым симптомом начавшейся "болезни" Гильберта основаниями математики. Весной того же года он пригласил к себе в качестве ассистента молодого математика из Цюриха П.Бернайса, с которым приступил к работе по созданию теории доказательств.

И хотя программа, поставленная Гильбертом, в полном объеме оказалась принципиально нереализуемой - результаты К.Геделя 1930 года развеяли надежды на возможность доказательств непротиворечивости арифметики финитными средствами, - эта теория определила дальнейшее направление исследований по основаниям математики вплоть до сегодняшнего дня. Аксиоматическое же мышление, проповеданное Гильбертом, давшим совместно со своими учениками и последователями блестящие его образцы, во многом определило характер математики и его приложений в нынешнем столетии. Достаточно упомянуть деятельность Э.Нётер, Э.Артина и их учеников по аксиоматизации алгебры и созданию "современной алгебры". С их деятельностью были связаны первые шаги будущей школы Н.Бурбаки, предпринятые накануне Второй мировой войны. Таким образом, выделение понятия структуры и понимание математики как теории структур, сам дух бурбакизма, паривший в математике вплоть до недавнего времени, являются ни чем иным, как новой стадией в развитии аксиоматического мышления.

Сегодня математика вступила в новую фазу своего развития. Дух бурбакизма утрачивает свое былое влияние и сам аксиоматический метод уже не является доминантой в математике, уступая лидерство генетическим конструкциям порождения нового знания, истоки которого вновь обнаруживаются в физике и механике [1]. Но сколько бы ни длилось это положение вещей, можно быть уверенным в том, что придет время, когда найденные новые результаты и построенные эффективные теории потребуют своего осмысления, которое возможно лишь на базе аксиоматического мышления - такова диалектика развития математического знания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы Гильберта. Сборник / Под ред. П.С. Александрова. М., 1969.
2. Гильберт Д. Основания геометрии. М., Л., 1948.
3. Арнольд В.И. Математика с человеческим лицом // Природа. 1988. № 3. С. 117-119.

[1] Выражение крайней оппозиции к принципам аксиоматического мышления читатель найдет в рецензии В.И.Арнольда [3] на книгу И.Р.Шафаревича "Основные понятия алгебры". М.: ВИНИТИ, 1986.

Г.И.Рузавин

ГИЛЬБЕРТОВСКАЯ ПРОГРАММА И ФОРМАЛИСТИЧЕСКАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Введение

Парадоксы, возникшие в канторовской теории множеств, заставили многих математиков серьезно задуматься над принципами и методами обоснования своей науки. Одни из них видели выход из трудностей в полном отказе от канторовской теории и лежащей в ее основе концепции актуальной бесконечности, другие стремились справиться с трудностями путем реформы логики. Большинство же ученых считал , что парадоксы не затрагивают содержания конкретных математических дисциплин, являются довольно искусственными конструкциями и потому о них не следует особенно беспокоиться.

Однако наиболее проницательные математики понимали, что так просто отмахнуться от парадоксов нельзя, тем более что число их со временем росло, а средства для их разрешения, оказывались неэффективными. В связи с этим нападки на канторовскую теорию множеств усилились. С особенно резкой критикой выступали математики, объединившиеся вокруг голландского ученого Л.Э.Я.Брауэра и называвшие себя интуиционистами. Еще до этого, когда теория множеств только входила в математику, против нее выступил известный немецкий математик Л.Кронекер, стремившийся ограничить обоснование математики целыми числами.

Д.Гильберт всегда отрицательно относился к попыткам ограничения математики рамками устоявшихся методов и выступал в защиту свободы творчества в математике. Естественно поэтому, что он как раз резко реагировал на стремление интуиционистов полностью отказаться от канторовской теории множеств, а вместе с ней и от наиболее ценных результатов развитой на ее основе математики. Попытка интуиционистов, писал Гильберт в 1922 г., "есть не что иное, как возрождение идей Кронекера! Они стремятся спасти математику, выбрасывая за борт все, что причиняет беспокойство... Они крошат и рубят науку. Если бы приняли такую реформу, которую они предлагают, то подверглись бы риску потерять большую часть наших самых ценных сокровищ" (цит. по [6. С. 202]).

В противоположность интуиционистам Гильберт предлагает такую программу спасения математики, которая сохранила бы в целости всю теоретико-множественную, или классическую, математику, но в то же время доказала бы, что никакие парадоксы или противоречия в ней не могут возникнуть. Свои основные идеи обоснования математики он изложил в ряде докладов, с которыми выступал на математических конгрессах и конференциях. Переводы их на русский язык помещены в качестве добавления к его книге "Основания геометрии" [4. С. 322-399] .

В настоящей статье мы сначала кратко рассмотрим гильбертовскую программу обоснования математики. Затем обсудим, какой удар нанесли ей знаменитые теоремы Гёделя, и на этой основе покажем, в каком направлении были предприняты исследования по обобщению математических идей Гильберта. В заключение мы дадим общую оценку формалистической философии математики.

2. Гильбертовская программа обоснования математики

Свою программу обоснования математики Гильберт намеревался осуществить в два этапа. На первом этапе необходимо было представить в виде формализованных аксиоматических систем содержательные математические теории вместе с формальными системами логики. "Основная мысль моей теории доказательства, - указывал Гильберт, - такова: все высказывания, которые составляют вместе математику, превращаются в формулы, так что сама математика превращается в совокупность формул... Некоторые определенные формулы, которые служат фундаментом этого формального построения математики, называют аксиомами. Доказательство есть фигура, которая должна наглядно предстать перед нами... Доказуемые теоремы, т.е. формулы, получившиеся при этом способе, являются отображением мыслей, которые образуют обычную до сих пор математику" [4. С. 366].

Для превращения содержательных математических рассуждений в чисто формальные Гильберт и его последователи воспользовались теми аксиоматическими системами, которые уже существовали в математике. Однако эти системы необходимо было представить в символической форме, т.е. в виде совокупности формул, небольшая часть которых принималась в качестве аксиом, а все другие получались как теоремы. Кроме того, поскольку в формализованной таким способом математике нельзя было обращаться к обычной, содержательной, логике, то последняя должна быть также преобразована в формальную логическую систему. Подобные системы для других целей уже были созданы Г.Фреге, Б.Расселом и А.Н.Уайтхедом. Поэтому Гильберту пришлось видоизменить их и построить свою систему.

Второй этап реализации программы Гильберта был связан с доказательством непротиворечивости систем, полученных формализацией содержательных математических теорий на первом этапе исследования. Существовавшие в математике доказательства непротиворечивости теорий с помощью построения моделей из объектов другой теории не годились для этой цели.

Теория, с помощью которой Гильберт пытался решить проблему, была названа им метаматематикой, или теорией доказательств. Ее предметом является исследование формальных систем математики. Такое исследование не может быть чисто формальным, и поэтому в метаматематике все рассуждения должны иметь содержательный и интуитивно убедительный характер. Если, например, в рамках формальной арифметики нам нет необходимости вникать в содержание и смысл преобразований, производимых над формулами, то в математических исследованиях необходимо обращаться к содержательным рассуждениям. Термин "теория доказательств" подчеркивает, что в метаматематике речь идет об исследовании самих доказательств, применение которых гарантирует непротиворечивость математики.

В качестве средства достижения своей цели Гильберт допускает в своей математике только финитные методы рассуждений, имеющих дело лишь с конечными процессами. Это так называемая конечная установка играет существенную роль в философских взглядах Гильберта и во многом предопределяет его программу обоснования математики. Поскольку бесконечность выходит за пределы непосредственного опыта, постольку Гильберт рассматривает ее вслед за Кантом как идею, существующую только в человеческом представлении. Поэтому он считал, что "оперирование с бесконечным может стать надежным только через конечное" [4. С. 366]. Именно с этих позиций он рассматривает понятие актуальной бесконечности, лежащее в основе канторовской теории множеств. Гильберт относит все высказывания, в которых встречается это понятие, к идеальным высказываниям теории, которые получают реальный смысл вместе с содержательными конечными высказываниями. По его мнению, всю классическую математику можно рассматривать как определенную совокупность формул, "во-первых, таких, которые соответствуют содержательным соотношениям конечных высказываний... и, во-вторых, других формул, которые сами по себе никакого значения не имеют и которые являются идеальными образами нашей теории" [4. С. 358].

Такой подход, вообще говоря, не превращает математику в своеобразную игру с формулами, как в этом упрекали Гильберта его противники – интуиционисты. Во-первых, в гильбертовской программе формальная математика имеет своим дополнением метаматематику, утверждения которой не только содержательны, но и основываются на финитных методах. Во-вторых, сама формализация математики осуществляется для достижения конечной цели программы – доказательства непротиворечивости классической математики. На это обстоятельство справедливо обращает внимание венгерский математик Л.Кальмар, указавший, что "трактовка математических теорий как цепочек символов только временно жертвует их содержанием... После кратковременного пребывания в чистилище доказательства непротиворечивости математики могут приписывать значение своим формулам и использовать любые правила умозаключений, непротиворечивость которых была установлена" [9. С. 191]. В-третьих, в отличие от интуиционизма в гильбертовской метаматематике опираются только на финитные методы рассуждений, тогда как интуиционисты, отвергая актуальную бесконечность, допускают использование в математике потенциальной бесконечности. Наконец, в-четвертых, в противоположность логицистам Гильберт считает математику совершенно самостоятельной наукой и не пытается свести ее к логике, даже если последняя рассматривается в виде символической математической системы, или исчисления.

Однако программа Гильберта была слишком амбициозной, чтобы быть реализованной. Ведь с помощью формализации содержательной математики и применения в математике только финитных методов рассуждений он пытался найти полное и окончательное обоснование всей классической, или теоретико-множественной, математики. "...Я хотел бы, – указывал он в Гамбурге в 1928 г., – окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающееся конкретному показу, строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуются математики, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимыми и все же давали бы картину всей науки" [4. С. 365]. Но эта надежда оказалась неосуществимой, что стало очевидным после опубликования знаменитых теорем К.Гёделя.

3. Теоремы Гёделя и их влияние на гильбертовскую программу обоснования математики

Результаты Гёделя впервые полностью были опубликованы в 1931 году в статье «О формально неразрешимых предложениях "Principia Mathematica" и родственных систем» [8. С. 592-617]. Формальная система "Principia Mathematica", о которой говорится в заголовке этой статьи, была построена Б.Расселом и А.Н.Уайтхедом в их трехтомном труде под тем же названием и предназначалась для доказательства тезиса о сводимости математики к логике. Однако, как подчеркивает сам Гёдель, его выводы применимы ко всякой достаточно богатой формальной системе математики, которая содержит в своем составе по крайней мере формальную арифметику. В этих системах доказательство теорем сводится к логическому выводу их из некоторых аксиом. Отсюда, казалось, можно было предположить, что аксиомы и правила вывода логики достаточны, чтобы разрешить любую математическую проблему, которую можно сформулировать с помощью средств данной достаточно богатой формальной системы. Но это предположение оказалось неверным. Как указывает Гедель, в таких системах существуют сравнительно простые проблемы в области формальной арифметики, которые нельзя разрешить с помощью аксиом [8. С. 597] . Действительно, в них всегда можно построить формулу, которую нельзя ни доказать, ни опровергнуть, а это означает, что данная формальная система является неполной.

Само доказательство теоремы Гёделя было весьма громоздко, но оно отвечало всем требованиям финитной установки Гильберта. Из нее в качестве следствия вытекает, что если формальная арифметическая система непротиворечива, то не существует доказательства этой непротиворечивости с помощью средств, формализуемых в этой системе. Какие же выводы методологического характера можно сделать из теорем Геделя относительно программы обоснования математики Гильберта?

Во-первых, на основании первой теоремы о неполноте формализованной арифметики можно заключить, что первая часть программы Гильберта о полной формализации всей содержательной математики не может быть принципиально реализована. На философском языке это означает, что содержательное математическое знание нельзя полностью отобразить с помощью формальных систем.

Во-вторых, поскольку из аксиом достаточно богатых математических теорий нельзя полностью получить все ее истинные предложения в силу принципиальной их неполноты, постольку становится ясным, что истинность в математике не совпадает с доказуемостью. Стало быть, прежнее широко распространенное мнение о математике как чисто дедуктивной науке, все предложения которой могут быть логически выведены из небольшого числа аксиом, оказывается явно несостоятельным. Вместе с этим рушится и абсолютное противопоставление математики естественным и фактуальным наукам.

В-третьих, из второй теоремы Гёделя можно сделать вывод, что любая попытка доказать раз и навсегда формальную непротиворечивость математики обречена на неудачу. Действительно, непротиворечивость достаточно богатой формальной системы математики нельзя доказать с помощью средств, формализуемых в данной системе. Но можно, конечно, построить еще более мощную формальную систему, в которой эти средства будут формализованы, и тем самым непротиворечивость первой системы будет доказана. Однако для доказательства непротиворечивости второй системы необходимо построить еще более мощную формальную систему и т.д. Таким образом, процесс доказательства непротиворечивости нельзя считать окончательным и завершенным и поэтому невозможно надеяться на осуществление конечной цели гильбертовской программы - доказательства непротиворечивости классической математики, тем более с помощью ограниченных финитных методов гильбертовской математики.

В-четвертых, все вышесказанное позволяет утверждать, что между содержательным и формальным в математике существует диалектическая взаимосвязь и взаимодействие. Формализация способствует уточнению, систематизации и логической организации содержательного знания. Но такая формализация никогда не бывает полной и к тому же всегда опирается на определенные содержательные предпосылки. Противоречие между формальным и содержательным, невозможность исчерпывающей формализации математического знания на исходном историческом этапе его развития служит мощным стимулом для поиска новых средств и методов формализации, а также математических средств их анализа.

Подтверждением этого тезиса являются дальнейшие исследования, предпринятые по преодолению ограничений программы Гильберта, ее обобщению и развитию. Хотя в первое время из открытий Геделя делались крайне пессимистические выводы, тем не менее со временем выяснилось, что они не затрагивают фундаментальной идеи, лежащей в основе гильбертовской программы. Эта идея, как мы видим, заключается в том, чтобы присоединить к реальным высказываниям классической математики идеальные высказывания, подобные актуальной бесконечности, представить их в виде формализованных систем и в конечном счете доказать их непротиворечивость строго финитными средствами. Однако требование ограничить математические рассуждения только финитными средствами оказалось чрезмерно сильным. Можно было поэтому попытаться ослабить это требование и использовать в метаматематике такие нефинитные методы рассуждений, которые по своей силе превосходят финитные, но не вызывают такие сомнения и возражения, как другие нефинитные.

По такому пути как раз и пошел Г.Генцен, которому удалось доказать непротиворечивость формальной арифметики с помощью трансфинитной индукции до некоторого порядкового числа. Обращение к нефинитным методам рассуждений дает возможность лучше понять структуру математических доказательств, которые используются в рамках более широких математических теорий, чем те, которые имел в виду Гильберт. В своей метаматематике он ориентировался на реальную часть арифметики, и поэтому именно последняя придавала самой его метаматематике арифметический характер. Другой подход, разработанный после Гильберта, заключается в том, чтобы рассматривать совокупность формул некоторой системы как алгебру с бесконечными операциями. Таким путем исследование свойств формальной системы сводится к изучению их алгебр в метаматематике, в результате чего последняя приобретает алгебраический характер.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что хотя гильбертовская программа в своем первоначальном виде оказалась несостоятельной, но важнейшая ее идея о связи между реальными и идеальными высказываниями математики, о необходимости обоснования последних первыми, о выявлении более надежных методов доказательств продолжает играть важную роль в современных исследованиях по основаниям математики. На это обращает внимание сам К.Гёдель, открытия которого нанесли сильнейший удар по реализации прежней гильбертовской программы. Он подчеркивал, что принципы оснований математики Гильберта "остаются чрезвычайно интересными и важными, несмотря на мои отрицательные результаты" [6. С. 281].

Гильберт в ходе обоснования своей программы выдвинул также ряд философских идей, которые были разработаны его учениками и последователями. На этих идеях нередко спекулировали представители неопозитивистского направления, стремившиеся свести обоснование математики к анализу ее языка.

4. Формалистическая философия математики

В основе этой философии лежит понятие о формальной системе, а сама математика в ней рассматривается как наука о формальных системах. Такой подход, однако, не исключает различий внутри формалистической философии. В то время как самому Гильберту и некоторым его последователям формалистический взгляд был необходим прежде всего для обоснования классической, или теоретико-множественной, математики, ее защиты от разрушительной критики интуиционизма, сторонники широко распространенной на Западе в 30-50-х гг. неопозитивистской философии пытались найти в гильбертовской программе аргументы в пользу своей доктрины о чисто дедуктивном характере математики, утверждения которой якобы представляют собой простые тавтологии, лишенные реального содержания.

Такая точка зрения на математику встречается и среди представителей других направлений ее обоснования, а нередко также у работающих математиков, которые приходят к ней из некритической оценки непосредственной своей деятельности. В самом деле, современный математик имеет дело прежде всего с различными аксиоматическими системами, представленными в полуформализованном или полностью формализованном виде. Как возникли эти системы в ходе исторического развития, какие причины внешнего и внутреннего характера послужили толчком для их возникновения, каким образом происходил процесс преобразования конкретных, содержательных аксиоматических систем в абстрактные и формализованные системы? - все эти вопросы лежат вне поля зрения современного математика. Он исследует лишь готовые формальные системы, доказывает новые теоремы на основе известных аксиом и теорем. Даже когда речь заходит о применении математики для решения конкретных задач науки и практики, ученый исходит из существующих аксиоматических систем математики и пытается интерпретировать их в понятиях и утверждениях конкретно поставленной задачи. Отсюда легко возникает иллюзия независимого, самостоятельного и априорного характера формальных систем и математики в целом.

Корни подобного рода иллюзий раскрыл К.Маркс в "Математических рукописях" на примере возникновения и дальнейшего применения понятий и принципов дифференциального исчисления. В ходе математического познания конечный его результат, выражающийся в разработке некоторого исчисления, каким является, в частности, дифференциальное исчисление, превращается в начало последующего этапа его развития и применения. Этот процесс Маркс называет оборачиванием метода. Именно благодаря этому дифференциальное исчисление выступает как некое специфическое исчисление, которое оперирует уже самостоятельно на собственной почве [3. С. 55-57].

Аналогично обстоит дело и с формальными аксиоматическими системами современной математики. Работая с ними, ученый действует на их собственной почве, и поэтому он использует все методы, которые разработаны для их исследования. Но при этом он не должен забывать исторического генезиса формальных систем, их связи с реальным миром. В противном случае может возникнуть представление об их априорности и независимости от действительности, а тем самым и идеалистический взгляд на математику. Критикуя такой взгляд, Энгельс указывал, что в математике "как и во всех областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразовываться" [2. С. 28].

Эти основополагающие принципы диалектического материализма дают возможность критически подойти к формалистической философии математики, выявить ее некоторые позитивные моменты и отбросить идеалистические и метафизические положения.

Мы ограничимся обсуждением взглядов сторонников формализма по трем основным вопросам. Имеется ли у математики самостоятельный предмет исследования и в чем он состоит? Относятся ли математические утверждения к определенной реальности и приложим ли к ним критерий истинности? Является ли этот критерий внешним по отношению к математическому знанию или же он определяется внутренней природой самих формальных систем? Большинство формалистов признает, что у математики есть свой особый предмет исследования. Поэтому сущность математики не сводится к ее методу, как считают многие математики. Равным образом они выступают против попыток свести всю "чистую" математику к логике, как настаивают на этом сторонники логицизма во главе с Б.Расселом. "Математика, как и любая другая наука, - указывал Гильберт, не может быть основана на логике; наоборот, в качестве предварительного условия применения логических умозаключений и приведения в действие логических операций нам в нашем представлении уже должно быть дано нечто, а именно определенные внелогические конкретные объекты, которые существуют наглядно в качестве непосредственных переживаний до какого бы то ни было мышления" [4. С. 365-366]. Разумеется, нельзя признать, что объектом изучения математики являются "непосредственные переживания", но такого рода выражения не характерны для общего взгляда Гильберта на математику. Будучи великим математиком, он никогда не сомневался в реальной ценности математики и объективном содержании ее понятий и теорий. В связи с этим нам бы хотелось обратить внимание на иногда встречающееся в нашей философской литературе отождествление его общих взглядов на математику и формалистическую программу ее обоснования. Эта программа, как мы видим, строилась вовсе не для того, чтобы доказать, что математика лишена какого-то содержания и сводится к формальным системам как таковым. Формализация была необходима для обоснования содержательной классической математики и ее защиты от нападок интуиционистов.

С предметом математики непосредственно связан вопрос об истинности ее утверждений и теорий. Этот вопрос сторонники формалистической философии рассматривают в двух аспектах. Во-первых, истинность может анализироваться в рамках той формальной системы, куда входит некоторое высказывание. По мнению ученика Гильберта Х.Б.Харли, автора "Очерков по формалистической философии математики", рядовой математик основывает идею истинности на строгости доказательства. Другими словами, он считает утверждение истинным, если оно чисто логическое, т.е. без обращения к внелогическим факторам, подобным, например, интуиции, опыту, и т.п. выводится из истинных посылок. В качестве таких посылок могут выступать аксиомы или ранее доказанные теоремы.

Возникает, однако, вопрос: каков объективный критерий истины? По мнению формалистов, необходимо иметь объективный критерий истинности, свободный от каких бы то ни было философских допущений. Такой критерий Карри видит в доказуемости утверждений в формальной системе, т.е. выводимости его из аксиом. "Для каждого такого утверждения, не содержащего внешних рассмотрений, - пишет он, - мы имеем объективный критерий в том смысле, что предъявленное доказательство может быть проверено объективно" [7. С. 154] . Действительно, формальное доказательство представляет собой конечную последовательность формул, каждая из которых либо есть аксиома, либо получается из доказанных формул по правилам вывода. Его всегда можно проверить, и в настоящее время эту проверку может осуществить даже компьютер. Бесспорно, что доказуемость есть важный критерий истинности, поэтому не зря рядовой математик ориентируется на него в своей непосредственной деятельности.

Нельзя, однако, не заметить, что этот критерий является вспомогательным, поскольку он основывается на логической выводимости теорем из аксиом. Вопрос же об истинности самих аксиом в рамках формальной системы не рассматривается. Они предполагаются истинными, а из истинных посылок по правилам дедуктивной логики могут быть получены только истинные заключения. Следовательно, критерий доказуемости является логическим по своему характеру. Он не касается содержания посылок, которые могут оказаться и ложными. Кроме того, теперь, после открытий Гёделя, мы знаем, что не все истинные утверждения могут быть логически выведены из аксиом формальной системы.

Все это доказывает, что проблему истины в математике нельзя свести только к истинности утверждений в рамках аксиоматических систем как формального, так и содержательного характера. Это обстоятельство учитывают и сторонники формалистической философии, и поэтому наряду с критерием доказуемости они обращаются к так называемой квазиистинности. Под ней Карри, например, понимает приемлемость формальной системы для решения каких-либо задач, ее полезность для достижения определенных целей может варьироваться, и поэтому для ее оценки существуют различные критерии. Так, например, при применении классической математики к физике, указывает Карри, можно руководствоваться критериями: (1) интуитивной очевидности, (2) непротиворечивости, и (3) полезностью системы в целом [7. С. 155] . Критерий интуитивной очевидности занимает центральное место в философии интуиционизма. Хотя нельзя отрицать важность этого критерия для математики, однако при ее применении в эмпирических науках он не играет сколь-нибудь существенной роли, так как такое применение опирается на опыт, с помощью которого как раз и проверяется соответствие математических систем действительности. Критерий непротиворечивости, имеющий немалое значение в математике и игравший такую существенную роль в программе Гильберта, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и доказуемость. Поэтому Карри, например, считает, что доказательства непротиворечивости не являются ни необходимыми, ни достаточными условиями для принятия теории [7. С. 155] . Непротиворечивость не является достаточной для принятия теории потому, что последняя может оказаться совершенно бесполезной для решения каких-либо задач. Наоборот, противоречивые системы могут быть весьма полезными для науки, как об этом свидетельствует история возникновения анализа бесконечно малых. Хотя само понятие бесконечно малой величины оказалось формально противоречивым и привело к ряду парадоксальных результатов, но впоследствии это противоречие было устранено и математический анализ получил мощный импульс для дальнейшего развития.

В результате этого наиболее заслуживающим внимания остается у Карри критерий полезности системы для достижения определенных целей. Но сама полезность требует дальнейшего философского анализа. Ведь ее можно рассматривать как успех, основанный на чисто объективных основаниях. Именно такова точка зрения прагматизма. С другой стороны, если успех или полезность основывается на соответствии наших знаний объективной действительности, подтверждаемом опытом и практикой, тогда действительно полезность опирается на истинность, вытекает из нее. А отсюда следует, что окончательным критерием истинности любого знания является именно практика. "В практике, - писал Маркс, - должен доказать человек истинность, т.е. действительность и посюсторонность своего мышления" [1. С. 1] .

Многие сторонники формализма, конечно, хорошо сознают, что плодотворность и истинность математики обусловлена прежде всего ее практической применимостью для решения разнообразных конкретных задач. Однако формалисты, как мы видели, считают подлинно объективными критериями истинности именно такие внутриматематические критерии, как непротиворечивость и доказуемость. Более того, они противопоставляют применимость математики ее истинности, расценивая это как квазиистинность. Между тем исходным и окончательным критерием истинности, на котором основываются вспомогательные математические и логические критерии, является именно практическая применимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркс К., Энгельс Ф. Соч., 2-е изд. Т. 3.
2. Маркс К., Энгельс Ф. Соч., 2-е изд. Т. 20.
3. Маркс К. Математические рукописи. М., 1968.
4. Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., 1948.
5. Клини С.К. Введение в метаматематику. М., 1957.
6. Рид К. Гильберт. М., 1977.
7. **Curry H.B. Remarkes on the definition and nature of mathematics // Philosophy of mathematics. Amsterdam, 1968.**
8. **Gödel K. On formally indecidable propositions of "Principia Mathematica" and related systems // From Frege to Gödel. Cambridge, 1967.**
9. **Kalmar L. Foundations of Mathematics... // Problems in the philosophy of mathematics. Amsterdam, 1968.**

М.И.Панов

ОБ ОДНОМ ПЕРИОДЕ В ТВОРЧЕСТВЕ Л.Э.Я.БРАУЭРА (НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ПО ПОВОДУ КНИГИ "ЖИЗНЬ, ИСКУССТВО, МИСТИЦИЗМ")

В этой статье речь пойдет об одном мало известном эпизоде в деятельности выдающегося голландского ученого, математика, логика, основоположника интуиционизма Лейтзена Эгбертуса Яна Брауэра (1881-1966). Революционное значение идей Брауэра в области оснований математики и развития неклассической логики широко известно (более того, приобретает все более широкую известность), а вот вклад голландского ученого в разработку философии, особенно философию культуры, отражен в литературе гораздо меньше.

В 1905 г. Брауэр в высшей технической школе в Дельфте выступил с серией лекций. Эти лекции объединены общим названием "Жизнь, искусство, мистицизм" [1]. Возникает вопрос, на который нет ответа: почему (по крайней мере некоторые) ученики, последователи, сторонники Брауэра, "адепты" интуиционизма препятствовали изучению книги "Жизнь, искусство, мистицизм", не допустив ее переиздания? Познакомиться с содержанием этой книги очень не просто. В библиотеках нашей страны ее нет. Естественно, скажет читатель: работа опубликована в 1905 г. в Нидерландах на голландском (т.е. достаточно редком) языке; как же она могла попасть в наши библиотеки? Однако, докторская диссертация Брауэра [2], изданная в 1907 г. (т.е. через два года после выхода в свет "Жизни, искусства, мистицизма") на том же голландском, имеется в Государственной библиотеке им. В.И.Ленина. Единственное исключение составляют небольшие отрывки, включенные (в переводе на английский) учеником и последователем Брауэра Арендом Гейтингом в первый том трудов Брауэра. Причем, как подчеркивает голландский ученый Дирк ван Дален, "Гейтинг был вынужден убеждать включить хотя бы самые безобидные фрагменты" [3. С. 294] в эту публикацию. Ситуация более чем удивительная! Каково содержание этой книги? Названия разделов "дают ключ" к пониманию содержания почти любой книги. В работе Брауэра они таковы: I. Печаль мира; II. Интроспекция, III. Упадок, вызванный интеллектом; V. Язык; VI. Имманентная правда; VII. Трансцендентная правда; VIII. Освобожденная жизнь; IX. Экономика. Эта монография, как отмечает ван Дален, "систематически просматривалась и другом, и недругом" [3. С. 294] . В известной биографии Брауэра Георг Крайзель говорит о ней, как об онтологии поэзии [4. С. 39].

Итак, чему же на самом деле посвящена эта книга? Вот оценки наиболее квалифицированных биографов Брауэра (таких, как ван Дален) и специалистов, получивших наиболее интересные и нестандартные результаты в разработке его теоретического наследия (таких, как Хеяйерман и Шмитц). Согласно мнению Хеяйермана, в книге "Жизнь, искусство, мистицизм" содержится важный ключ ко "второму плану" докторской диссертации Брауэра (посвященной основаниям математики), плану философскому [5] . Наиболее пространную характеристику брауэровской монографии дает ван Дален. Он пишет с иронией, что материал этой книги является "слегка затруднительным для адептов интуиционизма", поэтому некоторые из них боятся, что работа Брауэра "Жизнь, искусство, мистицизм" может "дискредитировать сам интуиционизм" [3. С. 294] . Книга не содержит математического материала, в ней Брауэр излагает свои взгляды на мир, язык, жизнь, религию, экономику, женщин и т.д. "И как предполагает название, - пишет ван Дален, - она наполнена сильным мистицизмом. Читатель найдет длинные цитаты из Мастера Экхарта [1] и Бхагавадгиты" [3. С. 294] .

Напомню, что обширные отрывки из "Бхагавадгиты", философской основы индуизма, Брауэр приводит в своем докладе на X Международном философском конгрессе в Амстердаме (август 1948 г.). На это следует обратить особое внимание, так как эта работа - одна из программных для концепции интуиционизма. В докладе "Сознание, философия и математика", Брауэр анализирует три стадии, ко-

[1] Трудно удержаться, чтобы не напомнить о цитатах из Мастера Экхарта в книге другого голладского ученого - историка Йохана Хёйзинги "Осень Средневековья" 6. С.244,247,249 .Но Брауэр опубликовал свою работу в 1905 г., а Хёйзинга - в 1919.

торые, по его мнению, "сознание должно пройти в своем переходе от глубочайшей внутренней сферы к высшему миру, в котором мы взаимодействуем и ищем взаимопонимания" [7. С. 1235] . Здесь же выдвигается концепция "идеального математика", или "мыслящего (творящего) субъекта", основанная на методе интроспекции (самонаблюдения), пространно излагаются взгляды на происхождение сознания, рассматривается взаимоотношение языка и мышления, что должно, по его мысли, служить своего рода философским фундаментом для критики классической логики. Кроме философских вопросов математики, в докладе много внимания уделяется логике, в частности, проблемам, связанным с применимостью закона исключенного третьего в математике. Подчеркну еще раз, что в столь принципиальном для концепции интуиционизма докладе был высказан ряд идей, касающихся жизни человека и человечества в этом беспокойном мире: предотвращение опасности конфликтов, устранение насилия, осуждение попыток ограничивать свободу действий других народов. Эти идеи подкреплялись обширными выдержками из "Бхагавадгиты" как, например:"Человек не должен ненавидеть какое-либо живое существо. Пусть человек будет дружественным и сострадательным ко всему"[7. С. 1235] . Причем, Брауэр писал об этих отрывках, что они и в переводе сохраняют свою чарующую силу и красоту. Все это может свидетельствовать об определенной преемственности идей Брауэра "доинтуиционистской" эпохи (времени написания книги "Жизнь, искусство, мистицизм") и собственно "интуиционистского" периода в его творчестве. Возможно и другое предположение: между этими периодами есть более глубокая внутренняя связь, которая в настоящее время просто не изучена.

У Брауэра по поводу "Жизни, искусства, мистицизма" состоялась очень резкая дискуссия с кортвегом, математиком-прикладником, наиболее известным из математиков среди преподавателей Амстердамского университета, обучавших Брауэра в его студенческие годы. Вот мнение об этой книге, которое высказывал учитель и друго Брауэра один из основателей Общества сигнифики голландский лингвист Геррит Маннури. Это мнение имеет тем большую ценность, так как основано на архивных материалах, введенных в оборот Шмитцем. Кстати, сам Шмитц считает, что этот "тощий том" содержит анализ философии языка, независимый от позиции Маннури [8. С. 42] . А вот теперь оценка книги Брауэра "Жизнь, искусство, мистицизм", высказанная Маннури в письме от 28 декабря 1925 г. (т.е. через 20 лет после публикации работы) к Фредерику ван Эйдену, одному из организаторов Общества сигнифики. Маннури писал: "Да, замысел Брауэра действительно революционен и значим более чем в одном смысле, здесь Вы совершенно правы; но большинство современников даже не обратят на это внимание" (цит. по: [8. С. 42]). Шмитц, приведя этот отрывок из письма Маннури, восклицает: "Сколь дальновидно было это замечание" (цит. по [86. С. 42]). Только чрез 75 лет эта небольшая книжка вызвала у некоторых возмущение и негодование (имеется в виду Руди Каусбрук), но и попытки задуматься (речь идет о ван Далене и Хеяйермане). Но и по прошествии столь длительного срока,с грустью констатирует Шмитц, переиздать эту книгу Брауэра не удалось [8. С. 42].

Вот каким образом представлялась мне ситуация, о чем я писал в двух работах [9 , 10] ; об этом же шла речь в докладе в рамках коллоквиума "Брауэр и Гильберт: великое противостояние", который был организован на II Всесоюзном симпозиуме по закономерностям и современным тенденциям развития математики

(Обнинск, сентябрь 1987 г.). И вот ксерокс книги Брауэра у меня в руках [2]. В верхнем правом углу оттиск - "Архив Брауэра".

Далее приводятся несколько отрывков из этой книги Брауэра. Эти цитаты, разумеется, не могут полностью передать содержание этого необычного произведения, но должны создать определенный настрой (подобно тому, как "по когтям узнают льва"), ощущение ее атмосферы. Итак, слово Брауэру: " Интеллект совершает в жизни ученого дьявольскую службу - это некая связь между двумя фантазиями... Действие, которое определяется изыскиванием средства, почти всегда попадает в цель: средство имеет направленность (на результат. - М.П.) и, несмотря на потаенные места, достигает цели. Однако, продолжает привлекать внимание и та деятельность (которая не сводится исключительно к поискам цели), деятельность, открытая истине: так может быть обнаружено солнце, покрытое облаками. Но у того, кто теряет интерес к всеобщему и выискивает в скорбном мире только средство, интеллект (в силу страха и научной дрессировки) создает лишь копию и тогда не видится цель движения человечества" [1. С. 20] .

Далее идут раздумья о непростых взаимоотношениях науки и культуры в современном мире. Брауэр подчеркивает: "Наука - это и последний цветок, и тормоз культуры" [1. С. 22] . Роль культуры в широком смысле в становлении человечества, столь остро обсуждаемые сейчас аспекты взаимодействия человека и окружающей среды Брауэр пытался осмыслить уже в 1905 г.: "Необходимо понимать, что через культуру человечество получило сферу обитания, (изменившуюся. - М.П.) по сравнению с первоначально данной. Более того, достигнуто это не за счет чьих-либо услуг: каждый индивидуум оставляет шлейф своей жизни в окружающей среде. Следует также осознавать, что окружающая среда в первоначально девственной природе обнажает непорочность человека" [1. С. 22] .

Вновь размышления о роли культуры, но уже через "призму" взаимоотношений народов: "Народы шлифуют друг друга своими культурами. Именно в культуре заключается победа. Неизвестно, что может восторжествовать: изнеженность и трусливый расчет или героизм" [1. С. 22-23] . Далее Брауэр задается вопросом: Чем является мужество - окружено ли оно крепкими границами извечной истины "Цель оправдывает средства!", либо это вековой подвиг интеллекта по сравнению с вечным кувырканием в рамках дилеммы "цель - средства"? [1. С.23]. Брауэр размышляет о "самобытной цели", противоположной "силе интеллектуальных усложнений", которая порождает (из которой "внезапно выпадает") то или иное "ремесло науки". Этот пассаж может показаться туманным, но он идет в контексте рассуждений Брауэра о перепетиях англо-бурской войны: буры "не хватаются за средства современной войны, но достигают большего, чем англичане" [1. С. 23] . Напомню, что речь идет о книге, изданной в 1905 г. Героическое (и долгое время - успешное!) сопротивление буров (потомков голландских колонистов) многократно превосходящей по численности и технической оснащенности армии английских колонизаторов придает вполне определенное звучание словам Брауэра. Так и представляешь 24-летнего молодого человека, готового сражаться за правое дело своих братьев по крови со старинным голландским "роером" в руках, хотя победа и недостижима!

Вновь размышления о различных контекстах взаимоотношений науки и искус-

---

[2] Выражаю искреннюю благодарность Николаю Николаевичу Непейводе, который любезно позволил мне познакомиться с этой работой Брауэра.

ства. Брауэр пишет: "В музыке отступают в большом чувственном восприятии размер и мотив. Особенности языка, из которого изгоняется поэзия, становятся как бы приниженными. То, что приносит наслаждение и страх всем ученым, порождает новое наслаждение необъяснимым (подобно тому, как красота чудесных цветов, созданных природой, и женская красота не затмевают друг друга" [1. С. 24] . Завершается этот пассаж, посвященный ученым, такой мыслью: "Девственное восхищение должно быть привнесено в культуру" [1. С. 24] .

Завершая эти разрозненные заметки, хочу все-таки попытаться навязать читателю одну гипотезу. Ценность теоретического наследия Брауэра не сводится только к созданию интуиционизма, к революционному перевороту в математическом мышлении и выдвижению идеи логического плюрализма. Ценность идей голландского ученого (причем, ценность особенно возрастающая в наши дни!) заключается в том, что он видел науку естественным образом вписанную в контекст человеческой культуры. Эти его мысли особенно актуальны сегодня, когда перед учеными с особой остротой стоит вопрос о социальной ответственности, о необходимости борьбы с бездуховностью, порожденной технократическим мышлением. Неслучайно Гейтинг подчеркивал: "Кроме теории познания, в философских работах Брауэра излагается начало теории ценностей. Эти работы основаны на позитивной оценке гипотетической "глубочайшей сферы сознания", которое играет роль желанной Нирваны. Это начало связано с решительно подчеркиваемыми терминами, как "красота", "мудрость", "религия". В этой связи он цитирует отрывки Бхагавадгиты" [11. С. 312] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Brouwer L.E.J. Leven, Kunst en Mystiek. Delft, 1905.
2. Brouwer L.E.J. Over de Grondslagen der Wiskunde. Amsterdam; Leipsig, 1907.
3. Dalen D., van. Brouwer: The genesis of his intuitionism // Dialectica. Lousanna, 1978. Vol. 32, N 3-4.
4. Kreisel G., Newman M.H.A. Luitzen Egbertus Jan Brouwer // Biographical memoirs of fellows of the Royal Society. London, 1969. Vol. 15.
5. Heijerman E. E. Intuition and the intellect. On the relation between mathematics, philosophy and mysticism in the work of L.E.J.Brouwer, including a comparison with Nicholes of Cusa. Utrecht: Univ. Utrecht. Preprint N 208, September 1981.
6. Хейзинга ... Осень Средневековья: Исследование форм жизненного уклада и форм мышления в XIУ и XУ веках во Франции и Нидерландах. М., 1988.
7. Brouwer L.E.J. Consciousness, Philosophy and mathematics // Proceeding of the Tehth International congress of philosophy (Amsterdam, 1948), Amsterdam, 1949. Vol. 1.
8. Schmitz H.W. Mannoury and Brouwer: Aspects of their relationship and cooperation // Methodology and Science. Haarlem, 1987. Vol. 20, N 1.
9. Панов М.И. Можно ли считать Л.Э.Я.Брауэра основателем конструктивистской философии математики? // Методологический анализ математических теорий. М., 1987.
10. Панов М.И. Несколько размышлений о противоречиях в творчестве Брауэра // Диалектика и научное мышление. М., 1988.
11. Heiting A. L.E.J. Btouwer (1881-1966) // Contemporary Philosophy. Firenze, 1968. Vol. 1.

Б.А.Кушнер

АРЕНД ГЕЙТИНГ: КРАТКИЙ ОЧЕРК ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВА

Среди блестящего созвездия имен, связанных с бурными дискуссиями по основаниям и философии математики [1], начавшимися на пороге нашего столетия и не исчерпанными полностью по сей день, имя Гейтинга занимает особое место. В течение полувека звучал его спокойный, полный достоинства голос; и неизменное уважение соратников и оппонентов всегда окружало этого человека. Сейчас особенно ясно, сколь нелегкой была его миссия, какой силы духа требовала ее реализация и с какой полнотой он исполнил свой долг. Совсем молодым человеком Гейтинг оказался в центре чрезвычайно эмоциональной полемики между крупнейшими математиками своего времени. Особенно непримиримые разногласия разделяли Гильберта и Брауэра. Оба великих мыслителя, воодушевленные беспредельной преданностью своей науке и убеждением в собственной правоте, с огромным темпераментом отстаивали занимаемые ими позиции [2]. Здесь не место углубляться в изучение интереснейшего феномена, состоящего в совершенно разном ощущении истины безусловно честными и одаренными людьми. Является ли это отражением многообразия проявлений самой истины или так выражается существенная неоднозначность восприятия ее человеческим духом - трудно сказать. Можно лишь заметить, что история полна случаев, когда в ходе полемики конкурирующие начала заострялись и преувеличивались, и только последующее развитие приводило к спокойному и ясному пониманию того общего, что было потеряно в разгаре борьбы и что отражало несомненное эсхатологическое единство истины. Достоин удивления и восхищения тот факт, что голос молодого ученого, не обладавшего ни авторитетом, ни мощью своих великих коллег, и к тому же совершенно однозначно отдавшего свои личные симпатии одному из противоборствующих лагерей, не затерялся в потоке обвинений и контробвинений, а был услышан всеми сторонами. Причина этого еще более удивительна: именно молодой ученик Брауэра смог внести в дискуссию те черты ясности, мудрости, понимания общности окончательных интересов, которые обычно приносит с собою только время.

Аренд Гейтинг [3] родился 9 мая 1898 г. в Амстердаме в семье школьных учителей (предки его отца были фермерами). После окончания начальной школы он поступил в школу второй ступени. Школа эта, однако, не давала таких элементов классического образования, как греческий и латинский языки, и, видимо, поэтому ее диплом позволял поступить лишь в учительские и инженерные учебные заведения, но не в университет. Вместе с тем к моменту окончания (с блестящими отметками) школы первоначальное намерение Аренда стать инженером сменилось увлечением математикой. В 1916 г., сдав дополнительный государственный

---

[1] Мы коротко остановимся на содержании этих дискуссий ниже. Интересное обсуждение и обширную библиографию по данному кругу вопросов можно найти, например, в [1].

[2] К сожалению, полемика не всегда ограничивалась академическими рамками: в 1928 г. Брауэр был фактически изгнан из состава редколлегии журнала "Mathematishe Annalen".

[3] Мы употребляем укоренившуюся в русскоязычной литературе транскрипцию. Более правильное произношение - Хайтинг. В качестве биографического источника мы использовали [2 и 3]. Полная библиография работ Гейтинга опубликована в [4].

экзамен, Гейтинг добился своей цели и поступил в Амстердамский университет. Среди университетской профессуры в те годы выделялась исключительная по оригинальности и творческой силе фигура Л.Э.Я.Брауэра (1881–1966). Снискав мировую известность своими основополагающими результатами в области топологии, Брауэр уже в 1912 г. получил в Амстердамском университете специально созданную для него кафедру теории множеств, теории функций и аксиоматике. Событие это, учитывая возраст ученого и традиции университетской жизни в Голландии, было совершенно необычайным и выражало безусловное признание его научного авторитета. Занятия топологией не мешали Брауэру проявлять пристальный интерес к основаниям математики – уже его докторские тезисы (1907 г.) были полностью посвящены этому предмету, что вызвало изумление коллег; высказанные в этой работе идеи (до сих пор привлекающие внимание исследователей) явились отправной точкой нового математического течения, с которым с тех пор неотрывно стало связано имя Брауэра, – интуиционизма. Для связности дальнейшего изложения мы должны хотя бы в нескольких словах очертить ситуацию, возникшую в те годы в математике. Ситуацию эту с полным правом называют кризисом оснований математики, ибо выявившиеся принципиальные разногласия (отражавшие столь же принципиальные трудности) касались самых первоначальных понятий математической науки и непосредственно угрожали ее с таким трудом возведенному и казавшемуся непоколебимым зданию. Коротко говоря, вдруг оказалось неясным, что собой представляют математические понятия и объекты, каков статус их существования и какими доказательными средствами может распоряжаться математик. Созданная Г.Кантором теория множеств открыла дорогу математической бесконечности. Объявив математические объекты существующими независимо от человеческой деятельности и бытия, она предоставила математику необычайную свободу образования понятий и оперирования ими. Поразительные результаты, полученные на этом пути, несомненно, составляют одно из высших достижений человеческого духа. Однако и цена, которую пришлось уплатить за этот взлет, была велика. Обнаруженные в теории множеств парадоксы (в особенности парадокс Рассела (1903 г.) вызвали всеобщее отрезвление. В то же время вновь стало привлекать внимание идущее от античности и поддерживавшееся в XIX в. такими авторитетами, как Гаусс, Коши и Кронекер, критическое отношение к самой идее актуальной (завершенной) бесконечности. С этой тенденцией была тесно связана идея ограничения математических рассмотрений теми или иными конструктивными рамками. Указанные вопросы, в частности, энергично обсуждались французскими математиками – Борелем, Лебегом, Бэром и Пуанкаре. Бореля и Пуанкаре можно считать непосредственными предшественниками брауэровского интуиционизма. Помимо конструктивной тенденции, оформившейся в интуиционистское течение, кризис оснований математики породил еще два значительных направления: логицизм (Фреге, Рассел, Уайтхед и др.) и формализм (Гильберт). Основной замысел сторонников логицизма состоял в сведении математических понятий (включая понятие натурального числа) к понятиям логики. Таким образом, получение математических теорем также свелось бы к чисто логической дедукции на основе аксиом, принятие которых опиралось бы на своеобразный акт веры (отметим, что некоторые из этих аксиом, а также интуитивных предпосылок, необходимых для развития теории, явно предполагали идею актуальной бесконечности). Совершенно неожиданный и оригинальный способ "спасения" теоретико-множественной (классической) математики предложил Д.Гильберт. Признавая ([5]), что идея актуальной бесконечности выходит за рамки нашего непосредственного опыта и что, тем самым, оперирующие с нею математические утверждения лишены ясного интуитивного смысла, Гильберт предлагал придать им статус идеальных высказываний, назначение которых состоит в обогащении дедуктивных и структурных возможностей математических теорий. Чрезвычайная плодотворность метода идеальных элементов хорошо известна (здесь можно упомянуть комплексные числа, проективную геометрию и т.д.). В рассматриваемом случае введение идеальных элементов позволяет сохранить весьма удобные для оперирования правила аристотелевской логики. Задача теперь состоит в том, чтобы убедиться, что математические теории, употребляющие такие идеальные элементы, приводят в области реально воспринимаемых суждений к тем же результатам, что и более скромные конструктивные теории. Вопрос этот тесно связан с проблемой установления непротиворечивости соответствующих "идеальных" теорий. С этой целью Гильберт предлагает произвести полную синтаксическую формализацию изучаемой теории: ее утверждения формулируются на совершенно однозначно заданном формальном языке, сами эти формулировки рассматриваются как чисто графические фигуры без всякого упоминания их смысла, такой же статус имеют и логические законы, а также правила вывода, опять-таки состоящие в чисто синтаксическом преобразовании одних графем в другие. Исходная содержательная теория имитируется, таким образом, вполне обозримым механизмом игры в символы, чем-то вроде шахмат. Сама эта игра становится далее объектом исследования: соответствующая теория, называемая метаматематикой, изучает уже совсем простые объекты – конечные символьные образования (слова), и, следовательно, возникает надежда найти вполне убедительное, конструктивное доказательство непротиворечивости формализованной части содержательной математики, поскольку непротиворечивость означает теперь не более, как невозможность получить в ходе формальной игры две фигуры определенного графического вида (например, $\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{A}$; в большинстве аксиоматических теорий достаточно даже установить невыводимость какой-нибудь одной фигуры, скажем $0=1$). К описанной замечательной идее Гильберт пришел в результате развития своей концепции аксиоматического построения математики. Еще ранее он сделал решительный шаг, состоявший в отказе от идущего из античности представления о том, что аксиоматике должно предшествовать интуитивное восприятие соответствующих объектов. Например, аксиоматика Эвклида описывала свойства геометрических объектов – точек, прямых и т.д., непосредственно предстоящих нашей интуиции. Согласно же Гильберту, в качестве реализации аксиоматической геометрии могла выступать совокупность любых объектов совершенно произвольной природы – лишь бы на этой совокупности удавалось построить структуру, удовлетворяющую всем аксиомам. Сам вопрос существования, связанный с данной аксиоматикой, Гильберт отождествлял с проблемой непротиворечивости (математическое понятие, объект и т.д. "существует", если его употребление заведомо не ведет к противоречию; близкой точки зрения придерживался и А.Пуанкаре). В частности, существование действительного числового континуума было бы установлено, если бы удалось доказать непротиворечивость соответствующей хорошо известной системы аксиом. Однако употреблявшийся до Гильберта метод установления непротиворечивости посредством интерпретации (построение модели) оказывался в данном случае уязвимым, поскольку включал в себя разделы теории множеств, предполагающие концепцию актуальной бесконечности, надежность которых как раз и подлежала обоснованию. Финитная гильбертова метаматематика предлагала удивительную возможность оправдать бесконечное через конечное. Описанный только что (весьма схематично) подход имел огромное воздействие на развитие математики в XX в., однако связанным с ним надеждам, как показал Гёдель, не было суждено полностью осуществиться.

Поступив в университет, Гейтинг стал учеником и последователем интуициониста Брауэра. Это решение требовало значительного мужества, ибо Брауэр был одинок, а путь, лежавший впереди, отнюдь не был усыпан розами. Идея конструктивного построения математики была прекрасна, однако рыцарское служение ей требовало мучительных жертв, и Брауэр оказался первым математиком, полностью, не взирая на последствия, отдавшим себя этой идее. Новая концепция математики, постепенно развивавшаяся Брауэром, была весьма своеобразна. В этой концепции демократическая, ориентированная на реальные возможности реального человека конструктивистская установка облекалась в одежды крайнего философского индивидуализма. Согласно Брауэру, предметом математики являются умственные построения, протекающие в рамках творческой деятельности идеализированного субъекта с потенциально неограниченной памятью и опирающиеся на его первоначальную интуицию, создающую уверенность в корректности упомянутых построений. Математика является, следовательно, частью внутренней творческой жизни субъекта и язык оказывается всего лишь не очень надежным средством коммуникации, посредством которого данный субъект может пытаться передать свои умственные построения другим индивидам. Актуальная бесконечность подлежит безоговорочному изгнанию, а единственный способ существования математического объекта, суждения и т.д. состоит в проведении соответствующей умственной конструкции (в частности, экзистенциальные высказывания могут быть доказаны только предъявлением потенциально выполнимого построения требуемого объекта). Такой подход непосредственно приводит к отказу от закона исключенного третьего (мы не располагаем никаким построением, позволяющим для каждого математического суждения найти конструкцию, подтверждающую его, или, напротив, конструкцию, опровергающую это суждение). Отказ от закона исключенного третьего был провозглашен Брауэром уже в 1908 году. Поступок этот приводил к необозримым последствиям: в пересмотре нуждались теперь не только экзотические области трансфинитов, но и самые начальные разделы математики, в частности и в особенности математического анализа. Под угрозой оказались многие достижения, которыми справедливо гордилась наука. По-видимому, именно эти обстоятельства вызвали весьма эмоциональную реакцию большинства математиков - особенно непримиримую позицию занял Д.Гильберт. Студенческие годы А.Гейтинга пришлись как раз на то время, когда его Учитель непосредственно приступил к осуществлению объявленной им программы интуиционистского построения математики. Эта работа проходила в полном одиночестве и резкой полемике с остальным математическим миром [4]. Гейтинг оказался первым ученым, пришедшим Брауэру на помощь. Говоря об университетских годах Гейтинга, необходимо сказать, что трудности принятия решения, определившего его нелегкий жизненный путь, отнюдь не были единственными. В тяжелые военные и послевоенные времена стипен-

[4] Исключение составил Г.Вейль, который хотя и не принял непосредственного участия в разработке интуиционистской программы, с большой симпатией относился к идеям Брауэра, а в начале 20-х г. даже активно пропагандировал их (см., например, сборник переводов статей Вейля [6]).

дий для особо одаренных студентов в Голландии не существовало – между тем родители Гейтинга находились в затруднительных материальных обстоятельствах (Аренд был первенцем, за которым последовало еще четверо детей – два сына и две дочери). Необходимые средства добывались вечерними уроками, которые давали Аренд и его отец. В 1922 г. Гейтинг окончил университет, сдав с отличием свой докторский экзамен. Уже в 1921 г. он начал преподавание в школе второй ступени в Хилверсюме, а в 1922 г. занял место учителя математики в двух школах второй ступени в Энсхеде, промышленном городе на юго-востоке Голландии. Здесь, в отрыве от университетских центров, в свободные от утомительной работы минуты Гейтинг начинает свои самостоятельные математические изыскания. Их тема – интуиционистская трактовка аксиоматики проективной геометрии – была предложена Брауэром. Итогом этих исследований были докторские тезисы, с отличием защищенные в 1925 г., а также две статьи ([7], [8]) в **Mathematishe Annalen**, вышедшие в 1927 г. (в первой из этих статей излагались также вопросы интуиционистской алгебры, в частности, теории определителей). Работа, выполненная Гейтингом, была первым вкладом в программу Брауэра, сделанным не им самим. Тогда же, в 1927 г. Гейтинг начал исследования, принесшие ему мировую известность. Сюжет их на сей раз был подсказан другим выдающимся профессором Амстердамского университета, оказавшим огромное влияние на Гейтинга, – Г.Маннури (1867–1956). Яркий мыслитель и математик-самоучка, Маннури читал лекции в Амстердамском университете с 1903 года. Именно благодаря ему в Голландии стали известны работы Рассела и Пеано, что положило начало голландской школе в основаниях математики и математической логике. Маннури был также основателем и главою своеобразного философского направления (так называемой сигнифики), имевшего своей основной целью изучение языка как социального и коммуникативного феномена. Брауэр, учившийся у Маннури, впоследствии стал его коллегой и другом; их взгляды на начальные аспекты функционирования математического языка имели значительное сходство, хотя дальнейшие следствия из этих начальных позиций извлекались ими совсем по-разному. Считая интуиционизм большим достижением, Маннури отклонял его абсолютистские притязания, и если Брауэр утверждал, что математические построения происходят в сознании творческого субъекта и в принципе не зависят от употребления языка, то Маннури говорил: "Не думайте, что математика есть нечто необычайное. Это просто один из языков, которыми пользуются люди" (цит. по [9. С. 6]). Различая в языке эмоциональную и индикативную компоненты, Маннури считал, что взаимопонимание можно улучшить за счет увеличения индикативной составляющей. С этой точки зрения формализация представлялась чрезвычайно подходящим средством, и неудивительно, что в 1927 г. Маннури предложил через Голландскую математическую ассоциацию в качестве конкурсной темы проблему формализации интуиционистской математики. Задача соискателей представлялась отнюдь не легкой, особенно ввиду неразработанности и отсутствия ясных изложений предмета. Высказывались даже мнения, что и интуиционистская логика противоречива. Гейтинг блестяще справился с проблемой и в начале 1928 г. был удостоен приза Ассоциации. Расширенная версия конкурсной работы вышла в свет (при содействии Брауэра) в 1930 г. в виде трех статей ([10], [11], [12]), привлекших к себе внимание математической общественности. Исследования Гейтинга имели особое значение во многих отношениях. Во-первых, в них были введены формализмы, получившие впоследствии широкое распространение (интуиционистские исчисления высказываний и предикатов, интуиционистская арифметика (часто называемая арифметикой Гейтинга)). При этом выявилась удивительная подробность, состоящая в том, что классические логические исчисления могут быть получены из одноименных интуиционистских простым добавлением закона исключенного третьего. Данное наблюдение, несомненно, оказалось существенным стимулом для многочисленных дальнейших исследований, посвященных сравнению классических и интуиционистских формализмов. Особый интерес с точки зрения финитного обоснования традиционной математики представляют построенные впоследствии интерпретации многих важных классических формальных теорий в одноименные интуиционистские. Во-вторых, была продемонстрирована сама возможность формализации интуиционистской математики, что у многих вызывало сомнение. В последней из рассматриваемых статей формализации (хотя, по-видимому, еще и не вполне удачной) подверглись такие неприступные брауэровские построения, как теории потоков, видов (множеств) и свободно становящихся последовательностей. Здесь же впервые четко сформулирован один из вариантов важнейшего для интуиционистского анализа принципа непрерывности. В-третьих, огромное значение имел чисто психологический эффект, состоявший в том, что математики-не интуиционисты поняли, что с интуиционистской проблематикой можно иметь дело и что она не сводится к чисто философским или негативным аспектам, а представляет самостоятельный математический интерес. Формализованные интуиционистские теории были доступны также и тем математикам (а их было большинство), которые не хотели погружаться в философские дебри. Впоследствии огромный вклад в развитие интуиционистской математики был внесен учеными, не являвшимися интуиционистами (см., например, [13] , а также [14] , где приведена соответствующая библиография). Возможно, в этом пункте, в сущности, решался вопрос о жизни или смерти интуиционистского направления, поскольку убежденные интуиционисты всегда составляли столь малочисленную (и до работ Гейтинга изолированную) группу, что их, говоря современным языком, следовало бы занести в Красную книгу. Конечно, в успеке был и привкус опасности: оперирование формальными системами грозило подменить и вытеснить живую интуиционистскую математику, чего, разумеется, Гейтинг отнюдь не хотел. Некоторые симптомы этой болезни можно наблюдать и сейчас, но они совсем не кажутся опасными. Сам Гейтинг уже в первой статье цикла [10. С. 42] предостерегал от переоценки возможностей формализации: "Интуиционистская математика является мыслительным процессом, и любой язык, включая язык формализации, есть только некоторая опора для коммуникации. В принципе невозможно построить систему формул, эквивалентную интуиционистской математике, поскольку возможности мышления не могут быть сведены к конечному числу заранее построенных правил". Симптоматично отношение Брауэра к аксиоматическим наклонностям своего ученика (проявившимся уже в его докторских тезисах). Вопрос этот, как можно предположить, был для Брауэра не очень прост, ибо речь шла совсем не о стилистическом своеобразии. Сам Брауэр избегал аксиоматики и развитой символики, поскольку они не очень соответствовали его главным философским доктринам. Возможно, на его работы отбрасывала тень полемика с Гильбертом, эмоциональный накал которой заставлял держаться на большом расстоянии от методов, хоть сколько-нибудь напоминающих формалистские. Так или иначе, фактом остается не только доброжелательное отношение Брауэра к несколько еретическим трудам ученика, но и прямая поддержка, этим трудам оказанная. Нам хочется процитировать здесь (по [3.

С. 17]) письмо Брауэра к Гейтингу от 17.7.1928, где речь идет о конкурсной работе: "Ваш манускрипт заинтересовал меня чрезвычайно, и я сожалею, что должен теперь его спешно вернуть. ... Я научился ценить Вашу работу так высоко, что хотел бы просить Вас переработать и переписать ее по немецки (желательно подробнее)...". Возможно, в этой позиции проявлялось молчаливое признание значения замечательных идей Д.Гильберта, признание, на которое великий немецкий ученый также молчаливо отвечал фактическим принятием интуиционистской критики и интуиционистской конструктивной установки в своей концепции финитной метаматематики. Наметившиеся таким образом слабые пока признаки примирения или хотя бы желания понять друг друга нашли выражение на симпозиуме по основаниям математики, состоявшемся в сентябре 1930 г. в Кёнигсберге. Здесь впервые встретились представители трех основных направлений: логицизма, формализма и интуиционизма. Точку зрения логицистов представлял Карнап, формалистов – фон Нейман, интуиционистов – Гейтинг. С этого момента начинается энергичная деятельность Гейтинга, посвященная распространению и разъяснению интуиционистских концепций. Он получает регулярные приглашения участвовать в конференциях и читать лекции в европейских университетах. Его кристально ясная, лишенная всяких признаков агрессивности, полная уважения к читателю или собеседнику манера изложения производит сильное впечатление. В июне 1931 г. издатель известной серии "**Egrebnisse der Mathematik** " О.Нойгебауэр приглашает Гейтинга в Гёттинген и делает ему предложение написать обзор по основаниям математики. Предложение это Гейтинг принимает, но просит найти соавтора для освещения точки зрения логицизма, поскольку не чувствует себя компетентным в данной области. Согласие написать такую совместную книгу дает Курт Гедель. Между двумя учеными происходит обмен письмами, в которых обсуждается план будущей книги. Ввиду задержки с поступлением рукописи Геделя издание неоднократно откладывается; в конце концов в начале 1934 г. издатель публикует в виде отдельной книги ([15]) материал, написанный Гейтингом и касающийся только интуиционизма и формализма (теории доказательств). Предполагалось, что Гедель закончит свою работу позже, но, к сожалению, этого так и не произошло. Книга Гейтинга содержала, в частности, сжатое и отчетливое изложение интуиционизма, первое в мировой монографической литературе. Отметим также, что русский перевод этой книги, появившийся в 1936 г. сыграл заметную роль в ознакомлении математической общественности нашей страны с вопросами философии и оснований математики.

В это же время Гейтинг размышляет над вопросами семантики интуиционистской логики, в частности, вырабатывает свою (ныне широко известную) трактовку логических операторов. Согласно Гейтингу, математические высказывания выражают собою проблемы, или, точнее, намерения решить некоторые проблемы. Соответственно математическое утверждение $\mathcal{A}$ считается осмысленным, если мы в состоянии объяснить, что значит дать доказательство $\mathcal{A}$. Последнее предполагает также нашу способность уверенно опознавать, является данная конструкция P доказательством $\mathcal{A}$ или нет. Логические операции объясняются с помощью упомянутого отношения " P есть доказательство $\mathcal{A}$ " посредством перехода к логическим составляющим $\mathcal{A}$, имеющим меньшую сложность. В конечном счете этот процесс должен привести к элементарным, неразложимым высказываниям, смысл которых самоочевиден. Например, " P есть доказательство $\mathcal{C}\&\mathcal{D}$ " означает: P является парой $\langle P_1, P_2\rangle$, причем выполняется " P_1 есть доказательство

C ", " p_2 есть доказательство $\mathcal{D}$ ". Особый интерес представляет трактовка импликации. Языковая форма "если $\mathcal{A}$, то B ", выражающая трудно уловимую связь между $\mathcal{A}$ и B , всегда доставляла проблемы при попытках ее точной логической реализации. Согласно Гейтингу, доказать импликацию $\mathcal{A} \supset B$ означает указать конструкцию, преобразующую каждое доказательство $\mathcal{A}$ в некоторое доказательство B . Эта интерпретация очевидным образом распространяется на случай отрицания, поскольку $\neg\mathcal{A}$ можно рассматривать как импликацию от $\mathcal{A}$ к какому-нибудь заведомо ложному суждению (скажем, $0=1$). К этой своей концепции Гейтинг пришел в конце 1930 г. в ходе переписки по данному кругу проблем с Фройденталем; публикация, к сожалению, задержалась до 1934 г. ([15]). Тем временем очень близкие результаты получил А.Н.Колмогоров, опубликовавший в 1932 г. свою замечательную статью [16] , содержащую интерпретацию интуиционистской логики высказываний как исчисления задач. Большой интерес представляла высказанная в этой статье неожиданная мысль о том, что интуиционистская логика имеет статус, независимый от интуиционистской философии и вполне понятный классически ориентированному математику – она кодифицирует математическую идеологию, связанную со способами решения составных задач. Аналогичную мысль высказывал позже и Гейтинг [17] , характеризовавший интуиционистскую логику как логику знания (умения), в отличие от классической логики, являющейся логикой математического бытия [5]. Впоследствии идеи Гейтинга – Колмогорова были существенно развиты С.К.Клини в его концепции рекурсивной реализуемости, оказавшейся одним из важнейших семантических инструментов современной логики.

В начале 30-х гг. начались тесные дружеские отношения Гейтинга с Х.Шольцем из Мюнстера, занимавшем единственную в ту пору в Германии кафедру математической логики. Во время работы над книгой Гейтинг при любой возможности выезжал по субботам в Мюнстер, где Шольц предоставлял в его распоряжение свою великолепную библиотеку. Условия для творческой деятельности в Энсхеде трудно было назвать благоприятными, много сил отнимала и тяжелая работа школьного учителя. Хотя Гейтинг и не был лишен интереса к проблемам школьного преподавания и даже посвятил этим вопросам несколько публикаций, необходимость получения университетского места становилась все более настоятельной. К сожалению, такие возможности в Голландии в те времена были крайне скудны. В результате ученый с мировым именем был допущен к чтению лекций в Амстердамском университете в качестве приват-доцента (неоплачиваемая должность) лишь в 1936 г. В 1937 г., после отставки Маннури, Гейтинг получает, наконец, твердую позицию в университете: так называемую должность лектора, в которую из соображений экономии амстердамский магистрат преобразовал профессорскую кафедру Маннури. С тех пор начинается блестящая педагогическая деятельность Гейтинга, сочетавшаяся с интенсивными научными исследованиями. Его внимание привлекают вопросы интуиционистской аксиоматики алгебры, и в 1941 г. появляется его пионерская работа в данной области ([18]), содержавшая, в частности, разделы теории полей, делимости пониномов и т.д. В 1942 г. Королевская Академия Наук

[5] Способность интуиционистской логики кодифицировать конструктивные способности человека и объясняет ее приложения в теоретическом программировании.

Голландии избирает Гейтинга своим членом, однако, ввиду условий военного времени, утверждения этого избрания королевой приходится ждать до 1946 г. В 1948 г. – за один год до отставки Брауэра – Гейтинг получает должность полного профессора в Амстердамском университете. Поскольку еще раньше (в 1946 г.) известный ученый Э.Бет занял вновь созданную кафедру математической логики, голландская логическая и интуиционистская школа получила твердые материальные основания для своего развития. Научные интересы Гейтинга в эти годы обращены к интуиционистской теории гильбертовых пространств, которую он разрабатывает на аксиоматической основе и со свойственной ему тщательностью. Однако главной своей задачей он считает разъяснение математическому миру интуиционистских концепций, в особенности идей Брауэра. Этой цели служили его выступления на ряде международных симпозиумов и конференций. Важным событием в этом отношении было появление в 1956 г. новой книги Гейтинга, посвященной интуиционистской математике. Гейтинговское "Введение в интуиционизм" [19] остается непревзойденным по ясности и изяществу изложения предмета, адресованным самому широкому кругу математиков. Нельзя не отметить неожиданную и блестящую литературную форму, которую придал Гейтинг своему сочинению – книга построена как непринужденная, остроумная беседа персонажей, представляющих различные точки зрения (Инт, Клас, Форм и т.д.). Выпуклость и живость, с которой очерчен каждый персонаж, их индивидуальности, проявляющиеся почти в каждой реплике, вызывают восхищение. В русском переводе (1965 г.) к беседе присоединяется новый остроумный участник – Кон, представляющий точку зрения советского конструктивного направления. Своим существованием Кон обязан редактору русского перевода, основателю советской конструктивной школы А.А.Маркову.

Значительным событием математической жизни становится и организованный Гейтингом (совместно с Бетом) в 1957 г. в Амстердаме международный коллоквиум "Конструктивность в математике", на котором были представлены самые разнообразные версии конструктивизма. Это обстоятельство соответствовало постоянно выражаемому желанию Гейтинга перейти от полемики к поискам взаимопонимания. Именно к таким поискам и направлена вся его деятельность, в частности, длительная поздка в США в 1957–1958 гг., участие (1967 г.) в организации III Международного конгресса по логике, методологии и философии математики в Амстердаме и т.д. В 1966 г. Гейтинг принимает участие в работе Московского международного конгресса математиков. В 1967 году, отдавая должное выдающимся заслугам ученого, королева награждает Гейтинга орденом Нидерландского Льва, тем самым возводя его в рыцарское достоинство.

После своей отставки в 1968 г. Гейтинг сохраняет научную активность; большое внимание уделяет он, в частности, изданию I-го тома трудов Брауэра (который и выходит в свет в 1975 г.). Однако здоровье его ухудшается – в 1975 г. он испытывает серьезный сердечный приступ, быстро прогрессирует ослабление зрения. В 1978 г. Гейтинг переносит удачную операцию на глазах, в значительной мере возвратившую ему краски и радость окружающего мира. Ученый работает, делая заметки о солипсизме, возможно, собираясь написать своего рода эссе по данному предмету. Сделать это, однако, он не успел: во время отпуска в Лугано (Швейцария) Гейтинг заболел пневмонией и 9 июля 1980 г. скончался. К моменту, когда он уходил из жизни, его любимое детище – интуиционизм – уже миновал свои главные опасности, и дело, которому Гейтинг себя целиком посвятил, оставалось в крепких руках его учеников, среди которых находились такие известные ученые, как ван Дален и Трулстра. Разобранные после кончины Гейтинга бумаги подчеркивали разнообразие этого удивительного человека, в сферу интересов которого входили музыка, литература, лингвистика, астрономия, ботаника и т.д. В его архиве был найден даже фантастический рассказ ("Разум и материя на Марсе"), в котором Гейтинг выражал некоторые из своих взглядов на общество и философию. По свидетельству Трулстры [3], Гейтинг был скромным, застенчивым человеком, чуждым всего внешнего, показного. При первом взгляде он мог показаться несколько формальным, хотя доброжелательным и любезным. В результате мало кто за пределами его ближайшего окружения и семьи (Гейтинг был дважды женат, одиннадцать детей пережили своего отца) хорошо знал его. Но хотя Гейтинг редко обнаруживал свои эмоции, он серьезно заботился о своих друзьях и учениках. Демократичность и любезность Гейтинга автору довелось испытать самому, когда еще студентом он отправил голландскому ученому свою первую работу. Гейтинг быстро ответил приветливым, доброжелательным письмом, написанным на ... хорошем русском языке. Он, в частности, выражал свой интерес к советскому конструктивному направлению - впоследствии Гейтинг выдвинул идею написания книги о математическом анализе, построенном в соответствии с советской конструктивной установкой. Идею эту автору в конце концов удалось осуществить.

Научный вклад А.Гейтинга состоит из двух основных компонентов: его собственных результатов по развитию интуиционистской математики и деятельности, направленной на объяснение и распространение интуиционистских концепций. В обоих случаях добившись выдающихся успехов, Гейтинг все же выше ценил свою миссию как представителя и защитника интуиционизма. Недаром он со смешанными чувствами воспринимал громадный (и, добавим, вполне заслуженный успех) своих работ 30-го года по формализации. В 1978 г. Гейтинг пишет по данному поводу ([9. С. 15]): "Я сожалею, что сегодня мое имя известно в основном в связи с этими статьями, которые были очень несовершенны и содержали много ошибок. Они мало помогли мне в борьбе, которой я посвятил мою жизнь, а именно - лучшему пониманию и признанию идей Брауэра. Они отвлекали внимание от подразумеваемых идей к формальным системам самим по себе". Звучащие в этих словах скромность и самоотречение голландского ученого не могут не вызвать уважения. Действительно, отношения, сложившиеся между Брауэром и Гейтингом, напоминало известную библейскую ситуацию. Одаренный пророческой мощью и темпераментом Брауэр не находил адекватных слов для выражения переполнявших его идей [6], его полемический огонь ошеломлял и отталкивал многих. Для окружающего математического мира именно Гейтинг стал устами Брауэра, именно благодаря ему в глазах этого мира интуиционистские концепции стали принимать обозримые и все более четкие очертания. Вместе с тем деятельность Гейтинга, разумеется, не сводилась к "простому" пересказу (лучше сказать, переводу с брауэровского языка на общепонятный). В этой деятельности ясно проявлялась и собственная оригинальная творческая личность ученого. Горячо разделяя с Брауэром основные интуиционистские принципы, Гейтинг был гораздо более реалистичен. Его мало увлекали концепции философского индивидуализма, в частности, беспредель-

[6] Возможно, он и не стремился к тому, чтобы быть вполне ясным. Такая позиция вполне соответствовала его соллипсистским философским установкам, отрицающим, в частности, принципиальную зависимость математики от языка.

ный скепсис Брауэра в отношении языка. Для выяснения существующих здесь различий достаточно сравнить следующие два высказывания. В 1933 г. Брауэр пишет (цит. по [3. С. 10–11]): "Таким образом, для человеческого ума, снабженного неограниченной памятью, чистая математика, практикуемая в одиночестве и без употребления лингвистических знаков, была бы точной. Однако эта точность была бы утрачена в математическом общении между человеческими существами с неограниченной памятью, поскольку они в конце концов вынуждены были бы прибегнуть к языку как средству взаимопонимания". С другой стороны, Гейтинг в 1947 году писал (цит. по [2. С. 7]): "Таким образом, интуиционист ищет строгость не в языке, а в математической мысли самой по себе. В то же время мне кажется противоречащим реальности утверждать, что интуиционистская математика в своей чистой форме состоит лишь из мысленных конструкций индивидуальных математиков, конструкций, которые существуют независимо друг от друга и между которыми язык обеспечивает всего лишь очень расплывчатую связь. Для этого математики слишком сильно воздействуют друг на друга и понимают один другого слишком хорошо. ... Мы должны отдавать себе отчет в фикции математика с совершенной памятью, который был бы в состоянии обходиться без поддержки языка. В реальном математическом исследовании язык существенно вовлекается с самого начала; математика, представляющаяся нам облаченной в лингвистические выражения, предшествуется не фазой, полностью свободной от языка, а всего лишь фазой, в которой роль языка много менее значительна, чем в коммуникации". Не разделял Гейтинг и почти религиозного отношения к интуиции. Уже с своем инаугурационном адресе (1949 г.) от различает различные степени интуитивной убедительности принципов, принятых в интуиционистской математике, что, несомненно, не вполне согласуется с подходом Брауэра. В 1960 г. Гейтинг даже афористично замечает, ([20]), что "понятие интуитивной ясности в математике само не является интуитивно ясным".

Еще одно из характерных расхождений между Гейтингом и Брауэром было связано с так называемыми "историческими аргументами" Брауэра (в другой терминологии речь идет о "последовательностях, зависящих от решения проблем", теории "творческого субъекта" и т.п.). Соответствующие способы рассуждения были явно высказаны Брауэром в докладе 1948 г. ([21]), хотя, как отмечает сам докладчик, встречались в его работах и ранее.

Суть дела состоит в допущении последовательностей математических объектов, развитие которых связано с непредсказуемой творческой активностью "творящего субъекта": выбор очередного значения такой последовательности может, в частности, зависеть от того, решил ли упомянутый субъект к данному моменту времени некоторую математическую проблему. Рассмотрим, например, следующую ситуацию. Пусть x – корректно заданное действительное число, и опровергнуто утверждение "$x = 0$". Следует ли отсюда, что x удалено от 0 ($x \# 0$), т.е., что существует n такое, что $|x| > 2^{-n}$. "Исторические аргументы" позволяют обнаружить ситуацию, когда $x \neq 0$ естественно считать установленным, а для утверждения, что x удалено от 0, никаких оснований нет. Тем самым подкрепляется интуитивное ощущение, что из двух утверждений $x \neq 0$ и $x \# 0$ второе существенно сильнее. Рассмотрим упомянутую ситуацию несколько ближе. Пусть $\langle P \rangle$ – некоторая нерешенная математическая проблема, состоящая в том, что надо доказать или опровергнуть соответствующее суждение P (это может быть, скажем, теорема Ферма, гипотеза о существовании нечетного числа, проблема близнецов и т.д.). Представим себе идеализированного математика M , лишенного печальных сомнений, касающихся ограниченности его существования и памяти. Представим себе также, что творческая активность этого математика наблюдается в дискретные моменты времени и что активность эта включает в себя, в частности, попытки решить упомянутую математическую проблему, т.е. доказать или опровергнуть P . Развернем параллельно деятельности M последовательность десятичных разрядов некоторого действительного числа a_P . Именно, целую часть a_P положим равной 0, n-й разряд a_P полагаем равным 0, если до данного момента времени включительно M не решил проблему $\langle P \rangle$ (т.е. не установил и не опроверг утверждение P). Если же к данному моменту времени n проблема $\langle P \rangle$ решена, n -й разряд a_P полагается равным I (и, очевидно, все дальнейшие разряды тоже окажутся равными I). Допустим теперь, что $a_P = 0$. Тогда в любой момент деятельности M утверждение P не будет установлено. Поскольку с точки зрения эпистемологии Брауэра математика протекает в рамках умственной активности творческого субъекта, и единственный статус существования математической истины состоит в обнаружении ее этим субъектом, принципиальная невозможность установить когда-либо P означает, что в мире M утверждение P не имеет места, т.е. выполняется $\neg P$. Этому рассуждению можно придать и более привычную форму. Предположим, что $a_P = 0$ и, вместе с тем, имеет место P . Последнее с интуиционистской точки зрения означает, что M установил P на некотором этапе своей деятельности, а это противоречит допущению $a_P = 0$. Следовательно, P опровергнуто и выполняется $\neg P$. Совершенно аналогично гипотеза $a_P = 0$ позволяет заключить, что M никогда не опровергнет P, т.е. никогда не установит $\neg P$ и, следовательно, в его мире выполняется $\neg\neg P$. Полученное противоречие приводит к выводу, что $a_P \neq 0$. Вместе с тем утверждать, что $a_P \# 0$ нет никаких оснований, поскольку это означало бы знание момента деятельности M , к которому будет решена проблема $\langle P \rangle$, последним же знанием можно располагать только тогда, когда эта проблема действительно решена. Несколько сильнее будет утверждение, что импликация $x \neq 0 \supset x \# 0$ есть по существу то же самое, что и наличие возможности решения любой корректно поставленной математической проблемы. Интуиционистская концепция решительно отклоняет такую метафизическую уверенность [7] как источник математической истины. В приведенной выше конструкции a_P и связанных с нею рассуждениях наиболее поразительным является, по мнению автора, конкретное математическое употребление чисто соллипсистских философских концепций. Естественно, "исторические аргументы" Брауэра вызвали бурные дискуссии, касающиеся в основном вопроса о допустимости введения в математику таких непривычных аргументов. Для общей реалистической позиции Гейтинга характерно сдержанное, чтобы не сказать больше, отношение к теории творческого субъекта. В частности, математический статус a_P представляется ему сомнительным; точка зрения Гейтинга, как всегда ясно и спокойно, изложена, в частности, в разделе 8 его книги 19 , выразительно озаглавленном "спорные вопросы". Следует заметить, что, как это часто бывало с поразительными по новизне идеями Брауэра, в дискуссии вокруг теории творческого субъекта по-своему правыми оказались все стороны. По мнению ав-

---

[7] Убеждение в человеческой способности решить любую правильно поставленную задачу горячо отстаивал Д.Гильберт.

тора, хотя сомнения в статусе a_p вполне понятны, категорическое отклонение брауэровских соображений может также оказаться поспешным. Научная реальность приводит нас к ситуациям, сходным с описанной выше, гораздо чаще и гораздо ближе, чем принято думать. Например, представление о действительных числах, употребляемых в теоретической физике, как об элементах математического континуума, весьма условно. Скажем, теория относительности оперирует со скоростью света c как с действительной константой, несомненно, во всех соответствующих конструкциях с c обращаются как с обычным фиксированным действительным числом. Вместе с тем, вполне разумный для любого конкретного математического действительного числа вопрос об арифметической природе c (является ли c иррациональным, трансцендентным и т.д.) поражает своей очевидной бессмысленностью. Дело, конечно, заключается в том, что c не является действительным числом в классическом смысле этого слова, поскольку мы в принципе не располагаем математическим законом, задающим соответствующую фундаментальную последовательность. Зато c вполне укладывается в рамки теории Брауэра: последовательность десятичных разрядов c развивается в зависимости от исторических событий – в особенности от деятельности творческих субъектов, измеряющих скорость света. В каждый момент времени нам доступна лишь информация о некотором начальном отрезке c, тогда как само c в целом является принципиально незавершаемым объектом. Такая ситуация привычна и естественна для интуиционистского математического анализа, специально ориентированного на обращение с незавершенными объектами.

Следует также отметить, что казавшиеся вначале неуловимыми исторические "аргументы" Брауэра впоследствии удалось в значительной мере формализовать (хотя, разумеется, эти формализации оказались совсем не однозначными). Указанным вопросам были посвящены работы ван Дангцига, Крайзела, Майхолла, Трулстры, ван Роотселаара, ван Далена и др. [8] Одна из наиболее удачных формализаций связана с так называемой схемой Крипке, на чем мы сейчас не можем останавливаться. Трудно, однако, удержаться от соблазна и не упомянуть об одной драматической подробности: схема Крипке, породившая чрезвычайно интересные и плодотворные исследования, оказалась несовместимой с одной из самых разработанных и признанных формализаций интуиционистского анализа, предложенной Клини и Весли ([13]). По мнению автора, эта острая ситуация, с одной стороны, указывает на принципиальные ограничения, лежащие в самой идее синтаксической формализации и не позволяющие поместить в прокрустово ложе знаковой реализации все сложности интуиционистского математического мира, а с другой стороны, еще раз подтверждает неоднократно высказывавшийся выше тезис о том, что существуют дискуссии (и, в сущности, все нетривиальные дискуссии таковы), в которых все стороны по своему правы. И одной из важнейших человеческих и научных заслуг Гейтинга является, как мы думаем, его вклад в создание нынешней ситуации в основаниях математики, ситуации, когда антагонизм сменился доброжелательством, а претензии на исключительность – уважением к достижениям коллег. Каждое из существующих направлений обогатило науку новыми концепциями и результатами, а их взаимодействие позволило ясно выделить и очертить области действия тех или иных методологически различных эле-

---

[8] Библиографические указания можно найти в [19 и 14].

ментов. Современный математик имеет уникальную возможность ощущать, на какой почве он в данный момент работает, какой эффективный или коструктивный смысл могут иметь его результаты или, напротив, насколько далеко углубился он в область чисто экзистенциальных, платонистских построений. Значение такой возможности трудно переоценить.

Автору хочется закончить этот очерк, посвященный замечательному ученому и человеку Аренду Гейтингу, словами его выдающегося ученика А.Трулстры ([3. С. 9]): Он (Гейтинг. - Б.К.) сделал важный оригинальный вклад в интуиционизм..., однако исторически его репрезентативная деятельность была по меньшей мере столь же важна: его усилия уберегали интуиционизм от забвения и пренебрежения, и если сегодня интуиционизм все еще полон жизни, что это не в последнюю очередь благодаря ему. Вполне можно себе представить, что без усилий Гейтинга "интуиционистская революция" угасла бы, а брауэровские идеи были бы погребены в мавзолее математической истории .

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель А.А., Бар-Хиллел. Основания теории множеств. М., 1966.
2. Troelstra A.S. The scientific work of A.Heyting // Compositio Mathematica. 1968. N 20. P. 3-12.
3. Troelstra A.S. Arend Heyting and his contribution to intuitionism // Nieuw Archief voor Wiskunde (3). 1981. N 29. P. 1-23.
4. Niekus V., van Riemsdijk H., Troelstra A.S. Bibliography of A.Heyting // Ibid. P. 24-35.
5. Hilbert D. Über das Unendliche // Math. Ann. 1925. N 95. S.161-190.
   Русский перевод сокращенного варианта этой статьи помещен в: Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948. (добавление 8).
6. Вейль Г. О философии математики. М.; Л., 1934.
7. Heyting A. Die Nheorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nicht kommutativer Multiplikation // Math. Ann. 1927. N 98. S. 465-490.
8. Heyting A. Zur intuitionestischen Axiomatik der projektiven Geometrie // Ibid. S. 491-538.
9. Heyting A. History of the foundation of mathematics // Noeuw Archief voor Wiskunde (3). 1978. N 26. P. 1-21.
10. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. 1930. S. 42-56.
11. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematic II. // Ibid S. 57-71.
12. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik III. // Ibid. S. 158-169.
13. Клини С. Весли Р. Основания интуиционистской математики. М., 1978.
14. Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.
15. Гейтинг А. Обзор исследований по основаниям математики. М.; Л., 1936.

16. Колмогоров А.Н. К толкованию интуиционистской логики // Колмогоров А.Н. Математика и механика. М., 1985.
17. Heyting A. La conception intuitionniste de la logoque // les etudes philosophiques 1956. N 11. P. 226-233.
18. Heyting A. Untersuchungen über intuitionistische Algebra // Verhandelinger der Nederlandsch Akademie van Wrtenschappen, afdeling Natuurkunde. 1941. N 18. Vol. 2.
19. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М., 1965.
20. Гейтинг А. Тридцать лет спустя // Математическая логика и ее применения. М., 1965. С. 224-228.

Лейла Пюга, Ньютон Да Коста

О ВООБРАЖАЕМОЙ ЛОГИКЕ Н.А.ВАСИЛЬЕВА *

Н.А.Васильев (1880-1940) был русским логиком, уроженцем Казани. В Казанском университете он изучал медицину и преподавал философию. Под влиянием идей Н.Лобачевского он предпринял попытку построить воображаему логику, в определенном смысле аналогичную воображаемой геометрии Лобачевского. Как известно, геометрия Лобачевского - вид неевклидовой геометрии, в которой отвергается постулат Евклида о параллельных линиях; также и в воображаемой логике Васильева отвергаются некоторые основопологающие законы аристотелевой логики.

Свои исследования Васильев начал с традиционной - аристотелевой - логики, поскольку он, скорее всего, не был в курсе перемен, происходивших в логике в тот период. Кроме того, его идеи в некоторых местах изложены не совсем ясно, и поэтому понимание их затруднено. Тем не менее основные положения логики Васильева очерчены достаточно четко.

Заметим, что наша статья не является ни исторической, ни разъясняющей идеи Васильева. В ней мы лишь намерены представить в соответствии с принятыми ныне канонами строгости новую систему логики, призванную в формализованном виде воспроизвести некоторые наиболее важные содержательные соображения Васильева, его интуитивное понимание логики. Мы обозначим эту систему через V^*, и она будет являться логикой первого порядка с равенством, основу которой составляет пропозициональная логика V.

V^* входит в категорию паранепротиворечивых логик (см.: [3]), также как в класс параполных логик (см.: [9]). Таким образом, в V^* в общем случае не выполняются законы (не)противоречия и исключенного третьего. Хотя мы надеемся, что V^* поможет лучше понять содержательные замыслы Васильева, V^* интересна сама по себе, вне зависимости от ее исторических предпосылок.

Первая часть нашей статьи посвящена описанию логической концепции Васильева, - такому описанию, которое содержало бы центральные моменты воображаемой логики. Далее мы изучаем V и V^*. Мы покажем, что V^* может быть

---

* Статья получена в рукописи. Перевод с английского В.А.Бажанова.

расширена до логики высокого (более, чем первого) порядка или до теории множеств.

1. Логические взгляды Н.А.Васильева

В течение 1910-1913 гг. Васильев опубликовал четыре статьи, отражавшие результаты всех его исследований в русле воображаемых (неаристотелевых) логик. Лишь в 1925 г. он опубликовал еще одну, уже очень короткую заметку (тезисы) по воображаемой логике (см.: [2 , 4], а также статьи В.А.Смирнова и Дж.Клайна, упомянутые Аррудой).

Комей [1] описывает систему Васильева следующим образом. Васильев оценивал свою работу как попытку сделать с аристотелевой логикой то же самое, что другой профессор из Казани Николай Лобачевский сделал с евклидовой геометрией; Васильев стремился узнать, какие логические постулаты могут быть изменены или даже элиминированы из логики, но последняя не переставала бы быть логикой. Так, он отказался от закона исключенного третьего и от закона противоречия, который он понимал в кантовской формулировке: "Ни один объект не может иметь свойства, которые ему противоречат". Васильев отличал закон противоречия от того, что он называл законом несамопротиворечия: "Одно и то же суждение не может быть одновременно истинным и ложным". Васильев полагал, что это два разных закона: последний принадлежит системе, названной Васильевым металогикой, т.е. множеством законов, обязательных для любого мыслящего существа, которые не могут быть убраны из логики без того, чтобы она не перестала быть логикой. Закон противоречия, с другой стороны, - один из логических законов, которые определяются природой реальности, устройством мира. Следовательно, для различных миров характерны различные логические системы и законы.

Итак, Васильев был убежден, что логика слагается из постоянного, абсолютно необходимого ядра законов металогики и, кроме того, изменяющейся совокупности логических законов, которые зависимы от свойств познаваемых вещей. Закон противоречия попадает в последнюю группу; он лишь утверждает, что противоречия в нашем мире и среди его предметов недопустимы. Поскольку Васильев верил, что противоречия в реальном мире не существует, он развивал идею о мире "осуществленного противоречия", т.е. мире, в котором не действуют законы противоречия и исключенного третьего. Соответствующую логику он называл "воображаемой". Подобно тому, как аристотелевская логика состоит из металогики, дополненной некоторыми онтологическими принципами, также и воображаемая логика включает металогику и иные онтологические принципы. Одна из систем, построенная асильевым, представляла собой аристотелеву логику без онтологического закона исключенного третьего.

Васильев рассуждал о мире, в котором некоторые вещи имеют свойство А, другие же не-А, а третья группа вещей одновременно обладает свойствами А и не-А. Следовательно, существуют три вида суждений, характеризующих этот мир:

---

[1] Автор реферата статьи В.А.Смирнова "Логические взгляды Н.А.Васильева (см.: Очерки по истории логики в России. М., 1962). - прим.перев.

" S' есть A", " S' есть не-А", " S' есть А и не-А". Четвертая форма суждений невозможна, так как законы металогики имеют силу и для воображаемого мира, а по закону несамопротиворечия только одно из трех суждений истинно по отношению к S'. Эту ситуацию Васильев выразил при помощи "треугольника противоположностей", и, уже исходя из анализа "треугольника противоположностей", сформулировал закон исключенного четвертого, который должен был заместить закон исключенного третьего" (см.: [5. С. 368–369]).

Отсюда видно, что Васильев был одним из идейных предшественников не только многозначной (см.: [10]), но также и паранепротиворечивой логики (см.: [3]). Хотя данные утверждения могут быть развиты и уточнены, это увело бы нас в сторону от главных целей. Для их достижения нам достаточно принять, что в целом позиция Васильева будет "схвачена" в следующих четырех пунктах (это обосновано в статьях Арруды [2 , 4] и в работах самого Васильева, проанализированных в этих статьях).

1. Существует два вида отрицания: одно *de dicto* , другое – *de re* , которые, вообще говоря, можно обозначить одним символом $\sim$. Первое отрицание относится к сложным высказываниям, или, точнее, к формулам, которые не являются атомными. Второе отрицание связано с отрицанием предикатов, одноместных или n-местных ($n > 1$). Это отрицание в общем случае не удовлетворяет законам противоречия и исключенного третьего. В то же время отрицание *de dicto* имеет классический характер.

2. В принципе возможны несколько вариантов системы категорий логики, так же, как и геометрии. Однако для того, чтобы некоторая система могла быть названа логикой, она должна содержать инвариантное ядро принципов, независимых от природы отрицания вообще и законов, управляющих отрицаниями сложных высказываний, в частности,васильевская металогика. Естественно предположить, что это ядро состоит из классической позитивной логики.

3. Воображаемая логика устроена таким образом, что когда отрицание *de re* применяется классически, мы получаем классическую логику.

4. В случае пропозиционального исчисления отрицание *de re* является отрицанием пропозициональных переменных, т.е. атомных формул. В противном случае мы имеем отрицание *de dicto*. Отсюда можно заключить, что на уровне высказываний исчисление $\mathcal{B}_0$ (см.:[8]) можно рассматривать как хорошее основание для построения логической системы, которая обладала бы главными признаками логики Васильева (мы на этом подробнее остановимся ниже). Более того, $\mathcal{B}_0$ тесно связано с исчислением, введенным Аррудой в 1977 г. (см.:[2]). Мы обозначим $\mathcal{B}_0$ через V и приступим к его изучению в следующем разделе статьи.

2. Пропозициональное исчисление V

Основные символы исчисления V следующие:
1) логические связки: $\rightarrow$ (импликация, $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\sim$ (отрицание), $\leftrightarrow$ (эквиваленция) определяются как обычно; 2) Счетное множество пропозициональных переменных; 3) вспомогательные символы: (,) – скобки.

Постулаты V , т.е. схемы аксиом и основные правила вывода, следующие:

$\to 1$: $A \to (B \to A)$,
$\to 2$: $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$,
$\to 3$: $\frac{A, A \to B}{B}$,
$\to 4$: $((A \to B) \to A) \to A$,
$\wedge 1$: $(A \wedge B) \to A$,
$\wedge 2$: $(A \wedge B) \to B$,
$\wedge 3$: $A \to (B \to (A \wedge B))$,
$\vee 1$: $A \to (A \vee B)$,
$\vee 2$: $B \to (A \vee B)$,
$\vee 3$: $(A \to C) \to ((B - C) \to ((A \vee B) \to C))$,
~ 1: $(\sim A \to B) \to ((\sim A \to \sim B) \to A)$.

Ограниченные в постулате $\sim$I, А и В не являются атомными.

Аксиомы V, таким образом, являются аксиомами классической позитивной логики, дополненными аксиомой $\sim$I. Если с последней аксиомы снять упомянутое выше ограничение, то мы получим классическое пропозициональное исчисление, т.е. V является определенным его обобщением.

Стандартные синтаксические понятия, например, формальная выводимость, обозначаемая символом $\vdash$, вводятся по Клини (см.: [1]).

Основные результаты этого раздела также могут быть найдены в работе 9.

Теорема 1. Для каждой молекулярной формулы А в V имеет место:
$\vdash A \leftrightarrow \sim\sim A$.

Доказательство. 1). $\vdash \sim\sim A \to A$: имеем $\sim\sim A \vdash \sim A \to \sim\sim A$ и $\vdash \sim A \to \sim A$ в силу позитивной логики. Используя постулат ~ 1, $\sim\sim A \vdash A$ и, по теореме дедукции, $\vdash \sim\sim A \to A$.

2). $\vdash A \to \sim\sim A$: имеем $A \vdash \sim\sim\sim A \to A$ в силу позитивной логики, и $\vdash \sim\sim\sim A \to \sim A$ следует из пункта I). Следовательно, $A \vdash \sim\sim A$ и $\vdash A \to \sim\sim A$.

Теорема 2. Если А и В молекулярные формулы, то в V имеем:
$\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$.

Доказательство. Если В молекулярная формула, то выполняется схема аксиом $(\sim\sim A \to B) \to ((\sim\sim A \to \sim B) \to \sim A)$. В силу предшествующей теоремы имеем в V : $\vdash A \leftrightarrow \sim\sim A$ для неатомной формулы А. С помощью подстановки для молекулярных формул А и В получаем: $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$

Теорема 3. Если снять ограничение с аксиомы $\sim$I, то получается классическое пропозициональное исчисление.

Доказательство. Клини показал в I, что классическое пропозициональное исчисление задается аксиомами с $\to$I до $\vee$3. плюс схемы $\sim\sim A \to A$ и $(A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$. Принимая во внимание доказанные выше теоремы, видно, что, если снять ограничение с аксиомы $\sim$I, мы получаем классическое пропозициональное исчисление.

Теорема 4. Для молекулярной формулы А в V имеем:
$\vdash \sim(A \wedge \sim A)$, $\vdash (A \vee \sim A)$, $\vdash A \to (\sim A \to B)$.

Доказательство. (См.: [1]).

Теорема 5. Если p и q пропозициональные переменные, то следующие формулы доказуемы в V.

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim(q \vee p),\ \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(q \wedge p),$$
$$\sim p \vee \sim\sim p,\ \sim(\sim p \wedge \sim\sim p),\ \sim\sim\sim p \leftrightarrow \sim p.$$

Определение 1. Пусть F – множество формул системы V. Функция v : $F \to \{0, 1\}$ является оценкой (valuation) в V тогда и только тогда, когда

1) $v(A \to B) = 1$ если и только если $v(A) = 0$ или $v(B) = 1$;

2) $v(A \wedge B) = 1$ если и только если $v(A) = v(B) = 1$;

3) $v(A \vee B) = 1$ если и только если $v(A) = 1$ или $v(B) = 1$;

4) $v(\sim A) = 1$ если и только если $v(A) = 0$ для каждой молекулярной формулы A.

Определение 2. Оценка v является моделью множества формул Δ, если $v(A = 1)$ для каждой A в Δ. Будем называть A семантическим следствием множества формул Δ (и обозначать $\Delta \models A$), если каждая модель Δ также является моделью $\{A\}$.

Теорема 6. Если $\Delta \cup \{A\}$ множество формул из V, тогда $\Delta \vdash A$ только если $\Delta \models A$.

Доказательство приведено в 8.

Теорема 7. Если принять сокращение $\sim (A \vee A) = \sim^* A$, тогда $\to, \wedge, \vee, \sim^*$ удовлетворяют аксиомам классического пропозиционального исчисления.

Доказательство приведено в 8.

Теорема 8. Следующие формулы в системе не являются теоремами (где p пропозициональная переменная).

$\sim(p \wedge \sim p)$, $p \vee \sim p$, $p \leftrightarrow \sim\sim p$

Доказательство проводится применением теоремы 6.

Для V можно предложить не только изложенную выше семантику оценок, но также и четырех-валентную истинностно-функциональную семантику. На самом деле, пусть $M = \langle \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}, \{1\}, \to, \wedge, \vee, \sim \rangle$ – матрица со множеством значений $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$, допускающих фиксированную истинностную характеристику I; функции $\to, \wedge, \vee, \sim$ задаются таблицами:

$\sim$	
0	I
I	0
$\bar{0}$	0
$\bar{\text{I}}$	I

$\to$	0	I	$\bar{0}$	$\bar{\text{I}}$
0	I	I	I	I
I	0	I	0	I
$\bar{0}$	I	I	I	I
$\bar{\text{I}}$	0	I	0	I

$\wedge$	0	I	$\bar{0}$	$\bar{\text{I}}$
0	0	0	0	0
I	0	I	0	I
$\bar{0}$	0	0	0	0
$\bar{\text{I}}$	0	I	0	I

$\vee$	0	I	$\bar{0}$	$\bar{\text{I}}$
0	0	I	0	I
I	I	I	I	I
$\bar{0}$	0	I	0	I
$\bar{\text{I}}$	I	I	I	I

Через $\models_M A$ обозначим формулу A системы V, которая является M – тавтологией. Тогда имеем:

Теорема 9. Если A – формула системы V, то $\models_M A$ тогда и только тогда, когда $\vdash A$ в V.

Доказательство. 1) Тот факт, что $\vdash A$ влечет $\models_M A$ по длине данного доказательства формулы A в V.

2) Доказательство того, что $\models_M A$ влечет $\vdash A$; V семантически непротиворечиво и полно по отношению к семантике оценок. Таким образом $\models A$ тогда и только тогда, когда $\vdash A$. Однако, нетрудно проверить, что $\models_M A$ влечет $\models A$. Это означает, что $\models_M A$ влечет $\vdash A$.

Доказанная теорема важна тем, что истинностные значения имеют наглядную интуитивную интерпретацию:

I означает "классически истинно",

0 означает "классически ложно",

$\bar{\text{I}}$ означает "истинно, но не удовлетворяет закону противоречия",

$\bar{0}$ означает "ложно, но не удовлетворяет закону исключенного третьего".

Более того, M проясняет два смысла отрицания: отрицание *de re* функционирует неклассически, тогда как отрицание *de dicto* – классически. Нетрудно заметить, что V удовлетворяет всем четырем условиям, приведенным в конце первого раздела статьи. Следовательно, эта система может быть принята в качестве адекватного базиса логики, наследующей дух васильевской концепции.

3. Исчисление предикатов V^*

Язык V^* – это язык логики первого порядка. Его основные символы – логические связки ($\to, \wedge, \vee, \sim$), кванторы ($\forall$) – общности и ($\exists$) существования, предикатные символы (например, равенство $=$), индивидные переменные, постоянные скобки. Основные синтаксические понятия, скажем, понятие формулы, вводятся как и в случае классического исчисления предикатов (см.: [1]).

Постулаты V^* включают постулаты V ($\sim_1$ с тем же самым ограничением), а также:

$$\forall_1 : \forall x A(x) \to A(t)\ ; \ \forall_2 : \frac{A \to B(x)}{A \to \forall x B(x)} ,$$

$$\exists_1 : A(t) \to \exists x A(x)\ ; \ \exists_2 : \frac{A(x) \to B}{\exists x A(x) \to B} ,$$

$$=_1 : \forall x (x = x)\ ; \ =_2 : x = y \to (A(x) \to A(y))$$

с обычными для них ограничениями.

Понятие синтаксического следования $\vdash$ вводится обычным образом.

Теорема 10. V^* существенно сильнее, чем классическая позитивная логика с равенством.

Доказательство очевидно.

Теорема 11. Пусть P – одноместный предикат (t – терм). Тогда следующие формулы недоказуемы в V^*.

$$\sim(p(t) \wedge \sim p(t)),\ p(t) \vee \sim p(t),\ p(t) \leftrightarrow \sim\sim p(t)$$

Однако, в V^* мы имеем: $\vdash \sim(\sim p(t) \wedge \sim\sim p(t))$, $\vdash \sim p(t) \vee \sim\sim p(t)$, $\vdash \sim p(t) \leftrightarrow \sim\sim\sim p(t)$

Доказательство очевидно.

Теорема 12. Пусть F – формула системы V^* с одним предикатным символом P_i (P_i ранга n_i, $1 \le i \le k$). Предположим, что знак равенства не встречается в F. Если A_i, $1 \le i \le k$ семейство неатомных молекул, то мы обозначим через $\tilde{F}$ формулу, которая получается из F подстановкой A_i вместо P_i, $1 \le i \le k$ (при учете обычных ограничений). Тогда $\tilde{F}$ доказуема в V^* несмотря на то, что F классически общезначима (valid).

Доказательство приведено в [1].

Обе семантики V могут быть распространены и на V^*. Для V^* также могут быть доказаны семантическая непротиворечивость и полнота.

Теория, в основе которой лежит V^*, задается так же, как в случае классического исчисления предикатов с равенством. Теория T называется противоречивой, если имеется формула A, такая, что A и $\sim$A являются теоремами T; в противном случае T непротиворечива. T называется тривиальной, если все формулы V^* являются теоремами в T; в противном случае T называется нетривиальной.

Теория T называется неполной, если существует такая замкнутая формула A, что ни A, ни $\sim$ A не являются теоремами T. Логику L, лежащую в основе противоречивых, но нетривиальных теорий, мы называем паранепротиворечивой. Когда L лежит в основе неполных, но максимальных теорий, мы ее называем паранеполной.

Теорема 13. V^* паранепротиворечивая и параполная логика.
Доказательство следует из ранее полученных результатов и введенных определений.

Нетрудно проверить, что V^* удовлетворяет условиям, приведенным в конце первого раздела, переосмысленным для уровня предикатов. Таким образом, достаточно уверенно можно считать, что V^* является логикой, которая воссоздает основные моменты концепции Васильева.

Теорема 14. V^* существенно слабее классического исчисления предикатов с равенством.
Доказательство очевидно.

Следствие. V^* непротиворечива.

Теорема 15. В системе V^* символы $\rightarrow, \wedge, \vee, \sim^*, \forall, \exists, =$ обладают всеми свойствами соответствующих классических символов.

4. Перспективы дальнейших исследований

Отталкиваясь от V^* в духе подхода Васильева, возможно построить высокопорядковые логики. Соответственно можно формализовать теорию множеств, в основе которой лежит V^*. Обе эти возможности вполне реальны, и в своей будущей работе мы покажем, как они могут быть осуществлены.

Интересно также заметить, что V^* может быть применено и в трух других сферах: 1) Все результаты работ [6 и 7] могут быть получены, если использовать V и V^* в качестве базисных логик; иначе говоря, V и V^* могут использоваться с целью формализации диалектики; 2) Исследованные нами логики приложимы к изучению "размытых" понятий (см., например, [11] ; 3) Метод построения V^* может быть также использован по отношению к деонтическим операторам, открывая тем самым путь для создания таких систем деонтической логики, в которых эти операторы интерпретируются как операторы *de re* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С. Введение в метаматематику. М., 1957.
2. Arruda A.I. On the Imagionary Logic of N.A.Vasiliev // Nonclassical Logics, Model Theory and Computability. Amsterdam, 1977, P. 3-24.
3. Arruda A.I. A Survey of Paraconsistent Logic // Mathematical Logic in Latin America. Dordrecht, 1980. P. 1-41.
4. Arruda A.I. N.A.Vasiliev: a Forerunner of Paraconsistent Logic // Philosophia Naturalis, 1984. Vol. 21. P. 472-491.
5. Comey D.D. Review of a Paper by V.A.Smirnov // The Journal of Symbolic Logic. 1965. Vol. 30. P. 368-370.
6. Da Costa N.C.A., Wolf R.G. Studies in Paraconsistent Logic I // Philosophia, 1980. Vol. 9. P. 189-217.

7. Da Costa N.C.A., Wolf R.G. Studies in Paraconsistent Logic II // Revista Colombiana de Mathematicas, 1985. Vol. 19. P. 59-67.
8. Loparic A., da Costa N.C.A. Paraconsistency, Paracompleteness and Valuation // Logique et Analyse, 1984. Vol. 106. P. 119-131.
9. Loparic A., da Costa N.C.A. Paraconsistency, Paracompleteness, and Induction // Logiqul et Analyse (to Appear).
10. Rescher N. Many-valued Logic. McGraw-Hill, 1968.
11. Rolf B. Topics on Vagueness, Lund, 1981.

В.А.Бажанов

О ПОПЫТКАХ ФОРМАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ "ВООБРАЖАЕМОЙ" ЛОГИКИ Н.А.ВАСИЛЬЕВА (НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Л.ПЮГА И Н.ДА КОСТА)

В истории науки нередки случаи, когда, казалось бы, заново родившиеся идеи и концепции находят своих идейных предшественников в прошлом, порой далеком. Так произошло и с многими разделами современной неклассической логики. Ныне выясняется, что ряд краеугольных замыслов в высшей степени оригинальных систем неклассической логики предвосхищены в работах профессора кафедры философии Казанского университета Николая Александровича Васильева. Действительно, в его "воображаемой" логике, разработка которой восходит к началу XX века., находятся зерна многих плодотворных идей, впоследствии – не одно десятилетие спустя их открытия – давших обильные научные всходы.

"Воображаемая" логика Н.А.Васильева считается предтечей многозначной логики. Критика Н.А.Васильевым закона исключенного третьего и провозглашенный им еще в 1910 г. отказ от этого закона придает его работам содержание, которое можно оценить как предвосхищение фундаментальных положений интуиционистской и конструктивной логики (см.: [13. С. 228]). Выдвижение концепции металогики как науки, которая описывает общие структуры и свойства всех возможных логик, сам синтетический характер его подхода к анализу аристотелевой логики подводит к мысли, что в работах Васильева содержались элементы метатеоретических исследований, оформившихся в самостоятельное направление в теории доказательств Д.Гильберта.

Однако наиболее революционный интеллектуальный "прорыв" в развитии логики Васильев сделал благодаря критике и отказу от закона (не)противоречия. Не может не поражать небывалая интеллектуальная дерзость ученого, своим отказом от закона (не)противоречия посягнувшего на "святую святых" не только логики и математики, но и всей классической науки – принцип непротиворечивости знания. Ведь непротиворечивость знания – даже не идеал, а норма его научного построения и развития. До недавней поры считалось, что противоречивая система тривиальна, что в ней доказуемо "все, что угодно".В противоречивой, а, стало быть, тривиальной логико-математической теории все формулы являются теоремами. Единственной концептуальной системой, не только допускавшей противоречия, но и созданной для изучения противоречий в самой сущности предметов, являлась диалектика, которая отвергалась позитивизмом как раз на том основании, что признание противоречия ее якобы тривиализирует.

Между тем, в середине XX в. были предложены формальные системы (Ст.Яськовским в 1948 г. и Н.Да Коста в 1954 г.), которые, будучи противоречивыми, нетривиальны. В 1976 г. М.Кесада назвал их паранепротиворечивыми, они представляют собой, по-видимому наиболее необычный, можно сказать, революционный класс логик (общая характеристика паранепротиворечивых логик содержится в [8]; краткие биографические сведения с Н.Да Косте и круге его научных интересов приведены в [10]. Их интенсивное исследование началось примерно в середине 1960-х – начале 1970 гг. и ведется, как утверждают представители паранепротиворечивой логики, в рамках "диалектической традиции". Тогда же выяснилось, что у паранепротиворечивой логики имеется предшественник – профессор Н.А.Васильев, высказавший и развивавший идеи логики без закона (не)-противоречия в 1910–1913 гг. [1]. С идеями Васильева логики Запада познакомились по реферату статьи В.А.Смирнова [12] в "Журнале символической логики" в 1965 г., который написал Д.Комей. В этим рефератом и краткими тезисами Васильева, опубликованными в 1925 г. на английском языке в материалах Y Международного философского конгресса в Неаполе, познакомился Н.Да Коста, который "был поражен тем, что русский логик высказал близкие ему идеи раньше" (письмо Да Коста автору от 22 сентября 1986 г.). Таким образом, долгое время работы Васильева не находили резонанс в среде логиков. Концептуальное богатство "воображаемой" логики раскрывалось постепенно.

Сначала привлекло внимание содержание, связанное с критикой закона исключенного третьего и, значит, становлением интуиционизма (см.: [11. С. 80]). В этом плане очень знаменателен "Отзыв на работы по математической логике Н.А.Васильева", составленный еще в 1927 г. академиком (тогда еще членом-корреспондентом) Н.Н.Лузиным (см.: [2]). Затем обратили внимание на то, что к традиционным утвердительным и отрицательным суждениям Васильев добавил индифферентное (и вообще, он допускал сколько угодно большое количество качественно различных суждений) и, таким образом, предвосхитил многозначную логику (см.: [9]). Помимо предвосхищения конкретных логических теорий, Васильев высказал исключительно важные идеи о множественности логических систем, о наличии эмпирических элементов в логике, о необходимости аксиоматизации логики и т.д. Думается, что концептуальное богатство "воображаемой" логики еще полностью не исчерпано. Следует также подчеркнуть, что кроме логики, Васильев занимался философией, психологией, историей, этикой. Ему принадлежат интересные поэтические произведения в духе символизма, переводы поэзии Э.Верхарна, П.Верлена, О.Суинберна и т.д. Без учета этих – нелогических – интересов ученого нельзя правильно понять мотивы его логических изысканий. Какой бы области ни касался Васильев, всюду он оставлял след энциклопедического, в высшей степени оригинального мышления (подробнее творческая биография изложена в [1] ; полная история жизни и деятельности Н.А.Васильева, оценка значения его работ для современной науки содержатся в [4]).

Итак, идеи Васильева, связанные с отказом от закона (не)противоречия, заново были высказаны полвека спустя – Ньютоном Да Костой. Профессор университета г.Сан-Пауло (Бразилия), он является ведущим ученым и создателем латиноамериканской школы паранепротиворечивой логики, человеком, который не

---

[1] Первые формальные системы многозначной логики были построены Я.Лукасевичем и Э.Постом в 1920–1921 гг.

только отдает должное своему русскому идейному предшественнику - Н.А.Васильеву, но и с большой симпатией относящимся к Советскому Союзу, поклонником русской, советской культуры. Мы надеемся, что публикация статьи Н.Да Коста и Л.Пюга, в которой предпринимается попытка формализовать некоторые содержательные идеи Васильева, будет служить стимулом к дальнейшему изучению научного наследия казанского ученого и к более широкому участию советских логиков и математиков в исследованиях в русле паранепротиворечивой логики и математики. Характеризуя эту статью, мы хотим отметить, что исследования паранепротиворечивых систем лишь начинаются, что стадию, на которой они находятся (хотя уже построены теория множеств, теория моделей и ряд других паранепротиворечивых теорий), образно выражаясь, в младенческом возрасте (см.: [3]). Однако, уже сейчас достаточно уверенно можно сказать, что эти исследования окажут значительно большее воздействие на всю архитектуру математики и применяемые в ней методы, нежели то, которое можно было бы ожидать со стороны пусть качественно новой логики, но исходящей из тех же основоположений, что и другие формальные системы, концептуального требования непротиворечивости. Например, в области паранепротиворечивых логик, толерантных к противоречию, по-видимому, должны быть пересмотрены приемы доказательства таких фундаментальных результатов, как теоремы Геделя и, скорее всего, даже смысл этих теорем (см.: [17. С. 16]). Кроме того, по своим выразительным и дедуктивным возможностям паранепротиворечивые системы значительно превосходят те, в которых действует принцип непротиворечивости.

В процессе перевода статьи Л.Пюга и Н.Да Коста у нас возник ряд соображений, которые, возможно, позволят лучше понять и оценить ее основной замысел.

I. Любая формализация (достаточно сложных) содержательных рассуждений вряд ли может быть исчерпывающей. Какие-то "ньюансы", или даже важные составляющие этих рассуждений, остаются "за бортом" формальной системы, претендующей на воссоздание богатства содержательной интуиции. В случае формализации "воображаемой" логики Васильева, на наш взгляд, складывается ситуация в определенном смысле аналогичная той, которая характерна для формализации принципиальных соображений интуиционизма. Как известно, последовательные интуиционисты придерживаются мнения, что "никакое представление на языке символической логики в силу его статического характера в принципе не пригодно для точного описания динамической и никогда не оканчивающейся сферы математической деятельности; любое описание такого рода может претендовать лишь на то, чтобы быть приблизительной характеристикой запаса операций, приводящих к допустимым конструкциям" [14. С. 275] . Думается, что с некоторыми оговорками мысль, выраженная в данном высказывании, может быть принята: формальные методы лишь приблизительно воссоздают богатство (достаточно сложных) содержательных) систем знания. Так, содержание системы (канторовской) теории множеств по своей глубине превосходит те, которые задаются едва ли не любой аксиоматикой. Это справедливо и по отношению к "воображаемой" логике Васильева и, уже тем более, по отношению к фрагментам диалектической логики, которые стремятся формализовать представители паранепротиворечивого направления

Смеем заверить читателя статьи, что содержание "воображаемой" логики много богаче и сложнее, чем то, которое изложено в реферате Комея, и не может быть "стянуто" в те четыре пункта, от которых отталкиваются Л.Пюга и

Н.Да Коста. Достаточно, видимо, сказать, что Васильев писал о целом множестве "воображаемых" логик, весьма различных по своим свойствам, по характеру принятых в них отрицаний и т.д. Васильев различал следующие виды логик: аристотелеву логику (логику двух "измерений"), "воображаемую" логику без закона противоречия (логика трех "измерений"), вообще логики к-измерений, "воображаемую" логику мира, в которой все предикаты совместимы, "воображаемую" логику с абсолютно ложным отрицанием, металогику, математическую логику, индуктивную логику. Кроме того, Васильев писал и о логике "содержания" (в отличие от вышеупомянутых логик, построенных на "объемном" принципе). Понятие "воображаемой" логики, следовательно, носило у Васильева собирательный характер. Каждый вид "воображаемой" логики предполагает свой особый базис основополагающих принципов, для формализации которых требуются особые системы.

Васильев смело вводил в рассмотрение те или иные онтологические принципы, которые, собственно, и определяли тот "воображаемый" мир, который описывается той или иной "воображаемой" логикой. Всякая онтология предполагает особое психологическое устройство гипотетически мыслящего существа, от которого, в частности, зависит характер отрицания в данном "воображаемом" мире. Осуществляя "психологический" подход к логике как дисциплине, напрямую определяемой познавательными способностями потенциальных субъектов логического рассуждения, Васильев тем самым еще более увеличивал концептуальное содержательное богатство своей системы.

2. Л.Пюга и Н.Да Коста отмечают, что Васильева вдохновлял пример Лобачевского. В возможности иной, нежели аристотелева, логики, Васильева действительно убеждает возможность иной, нежели евклидова, геометрии. Но не только факт возможности "иной" геометрии вдохновлял и придавал силы ученому. В геометрии он находил нечто большее. "Воображаемая логика построена методом воображаемой геометрии... Для этого мне пришлось изучить неевклидову геометрию... Из всех систем неевклидовой геометрии я больше пристально занимался геометрией Лобачевского. которую штудировал по его сочинениям..." - писал Васильев [7. С. 20-21] . В аналогии названий своей логики и геометрии Лобаческого Васильев усматривал и наличие внутренней аналогии между ними, обусловленной логическим тождеством методов их построения (см.:[5. С. 208]). Подобно тому, как исходным пунктом геометрии Лобачевского являлся отказ от попытки доказать знаменитый пятый постулат Евклида,и Лобачевский строил геометрию, свободную от этого постулата,так и отправной точкой логики Васильева выступает отбрасывание одного из важнейших положений аристотелевой логики, которое принималось как постулат, - закона противоречия, и построение логики, свободной от этого закона. Именно единством метода и объясняются "поразительные аналогии между неевклидовой геометрией и ... воображаемой (неаристотелевой) логикой" [6. С. 5] . Васильев также замечал, что "не только неаристотелева логика является приложением к логике метода неевклидовой геометрии; можно сказать, что и неевклидова геометрия является частным случаем, приложением метода неаристотелевой логики" [7. С. 21]. Очевидно, природа идейной взаимосвязи "воображаемой" геометрии Лобачевского и "воображаемой" логики Васильева глубже, чем это кажется с первого взгляда.

3. Л.Пюга и Н.Да Коста заблуждаются, когда считают, что Васильев не знал о переменах, проиходивших в логике в тот период. Впрочем, авторы статьи, знакомые с идеями Васильева по реферативным материалам, в процессе ее напи-

сания не были информированы о том, что в недавно найденном нами "Отчете за 1911-1912 гг." Васильев специально затрагивает вопрос о математической логике и пишет, что он "основательно" занимается математической логикой. Стимулом к этим занятиям, в частности, служит убеждение в том, что "при помощи математической логики можно дать особое доказательство возможности воображаемой логики", которое со временем ученый намеревался опубликовать [7. С. 24].

Математическую логику Васильев изучал по монументальному труду Э.Шредера "Лекции по алгебре логики" ([19]), который оценил как "самую совершенную" форму математической логики на тот момент. В списке книг, возвращенных Васильевым в библиотеку Казанского университета значится еще одна работа Э.Шредера ([20]), а также Б.Рассела ([18]). В собственных статьях и рукописях Васильева упоминаются многие видные представители математической логики. Васильев считал поучительным и процесс становления математической логики, историю которого он изучал по книге А.Ширмана "Развитие символической логики" ([21]). Таким образом, хотя Васильев и придерживался содержательного подхода к логике, он достаточно хорошо был осведомлен о положении дел в области интенсивно развивавшейся в то время математической логики.

4. Л.Пюга и Н.Да Коста замечают, что идеи Васильева в некоторых пунктах изложены неясно (хотя общая концепция представлена достаточно отчетливо). Дело, на наш взгляд, во-первых, в том, что васильевские идеи известны им, что называется, не "из первых рук", в переложениях, а во-вторых, нельзя сбрасывать со счетов и то обстоятельство, что работы Васильева отстоят от нас почти на 80 лет и выполнены они в непривычной ныне логической традиции, что их отличает иная манера рассуждения, не говоря уж об индивидуальности стиля Васильева, открывавшего новые пути в логике. С такого рода "неясностями", вероятно, сталкивается всякий, кто обращается к историко-научным материалам. Если бы возникла возможность перевода трудов Васильева на иностранный (например, английский) язык в полном объеме, то, надо думать, снялись бы многие вопросы, пока "неясные" и "непонятные".

5. Стоит особо подчеркнуть, что принципиальное отличие паранепротиворечивой логики от других логических систем имеет результатом и принципиально отличный от принятых в последних тип рассуждений, к которому, как неоднократно обращали внимание исследователи, трудно привыкнуть. Требуется усилие (и, разумеется, желание терпеливо совершать это усилие) для того, чтобы освоить стиль паранепротиворечивого вывода. В этом опять-таки нет ничего удивительного: любая область знания, а уж тем более столь революционно новая, естественным образом требует перестройки мышления, которая, как учит история науки, далеко не всегда оказывается возможной (для тех, кто слишком "сжился" с общезначимыми стереотипами мышления).

6. Наконец, необходимо отметить, что очень много для возрождения и развития идей Н.А.Васильева на Западе сделала Аида Арруда, ученица Ньютона Да Коста, также весьма крупный латиноамериканский логик и математик, занявшаяся изучением логического наследия Васильева по совету своего учителя. Ее перу принадлежит серия статей, посвященных "воображаемой" логике Васильева и остающейся пока (насколько нам известно) единственным обстоятельным обзором истории и современного состояния паранепротиворечивой логики ([16]). Безвременная кончина в 1983 г. оборвала активную деятельность Аиды Арруда, но ее имя также вписано в историю паранепротиворечивой логики (см.: [15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бажанов В.А. Становление и развитие логических идей Н.А.Васильева // Философские науки, 1986. № 3.
2. Бажанов В.А. Н.А.Васильев и оценка его идей Н.Н.Лузиным // Вопросы истории естествознания и техники, 1987. № 2.
3. Бажанов В.А. Геракл в колыбели: значение логических идей Н.А.Васильева для современной логики // Современная математика: методслогические и мировоззренческие проблемы. Ч. II. 1987.
4. Бажанов В.А. Николай Александрович Васильев. М., 1988.
5. Васильев Н.А.Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал Министерства народного просвещения. Новая серия, 1912, август.
6. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Конспект лекции. Казань, 1912.
7. Васильев Н.А. Отчет приват-доцента по кафедре философии о ходе его научных занятий с 1 июля 1911 г. по 1 июля 1912 г. // Научная библиотека КГУ, ОРРК, рук. № 6217.
8. Да Коста Н. Философское значение паранепротиворечивой логики // Философские науки, 1982. № 4.
9. Мальцев А.И. Избр. труды. М., 1976. Т. 1.
10. Нарский И.С. Проблема философского истолкования паранепротиворечивых логик (по поводу статьи проф. Ньютона Да Коста) // Философские науки, 1982, № 4.
11. Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. М., 1984.
12. Смирнов В.А. О логических взглядах Н.А.Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962.
13. Смирнов В., Стяжкин Н. Н.А.Васильев // Философская энциклопедия. М.,1960. Т. 1.
14. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966.
15. Да Коста Н.К.А., Алкънтара Л.П. Науное дело на А.И.Аруда // Философска мисль, 1986. Кн. 6.
16. Arruda A.I. A Survey of Paraconsistent Logic // Mathematical Logic in Latin America. Amsterdam; N.Y.; Oxford. 1980.
17. Priest G., Routly R. Introduction: Paraconsistent Logics // Studia Logica. 1984. Vol. 36. N 1-2.
18. Russel B. The Principles of Mathematics. L., 1903.
19. Schröder E. Vorlesungen uber die Algebra der Logik. Bd 1-3. Lpz., 1890-1905.
20. Schröder E. Abriss der Algebra der Logic. Tl. 1-2. Lpz., 8, 1909-1910.
21. Shearmen A.T. The Development of Symbolic Logic. L., 1906.

С.Мак-Лейн

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА - НИ ОСНОВАНИЯ, НИ ФИЛОСОФИЯ *

1. Введение

Математическая логика с момента своего выделения в качестве самостоятельной дисциплины в 30-х гг. была тесно связана с проблемами философии математики. Эта связь основывалась на желании с помощью математической логики избежать различные парадоксы, возникающие при использовании множеств, и понять природу и назначение математики.

С течением времени связи между логикой и основаниями математики становились все слабее и слабее вплоть до полного их исчезновения. Вместо этого логика в том виде, как она существует сейчас, оказалась связанной с весьма развитыми техническими достижениями, во многих случаях весьма замечательными и важными. Некоторые из них представляют интерес с точки зрения оснований математики, например, результаты Г.Крейзела, Х.Фридмана и других об относительной дедуктивной силе важных математических теорем и результаты Дрейка, Д.А.Мартина, Вудина и других об иерархии больших квадратных чисел. Но эти результаты очень специальны и не охватывают общего вопроса об основаниях математики во всей полноте. Другие блестящие средства логики вовсе не имеют никакого отношения к основаниям или философии математики. Пример - рекурсивная логика, выделившаяся как ветвь в общем исследовании вопросов оснований математики в связи с теоремой Геделя о неполноте и служащая сейчас для демонстрации технических приемов решения сложных задач.

Мой тезис состоит в том, что вопросы оснований математики все еще занимают значительное место в философии математики, что некоторые из этих вопросов имеют важные для развития логики или ее построений следствия и что существуют эффективные подходы к решению этих вопросов.

2. Основания

Первый вопрос об основаниях - это вопрос об уверенности в их правильности. Математика - по сравнению с другими науками - имеет некую трансцендентную уверенность в правильности. Основания в частности, связаны с ответом на вопрос: откуда эта уверенность? В это включается и вопрос о правильности доказательств.

Этот аспект может быть назван "локальной" уверенностью в корректности. Она дается путем введения какого-либо варианта формализма, после чего доказательство считается правильным, если оно может быть написано на языке этого формализма. Примером такого формализма служит теория множеств Цермело - Френ-

---

* Maclane S. Mathematical Logic is Neuther Foundations Nor Philosophy // Philosophia Mathematica, Second Series. 1986. Vol. 1. N 1-2. P. 3-14. Перевод с английского А.А.Кириллова-младшего.

келя с добавлением аксиомы выбора, сформулированная на подходящем языке исчисления предикатов первого порядка со стандартными правилами. Такой формализм еще не обеспечивает отсутствия противоречий (так как программа Гильберта, ставящая это своей целью, еще не осуществлена). Однако он дает возможность утверждать, что достижения основываются на принятых соглашениях и потому столь же надежны, как и все предшествующее развитие математики.

Разумеется, выбор формализма не единственен. Другие могут использовать интуиционистскую теорию множеств с соответствующей интуиционистской логикой или какие-либо еще версии теории множеств. Одна из них есть недавно возникшая теория топосов, как одна из альтернатив оснований (почти) всей математики. Эти и другие варианты не были достаточно изучены.

Есть также весьма сложные вопросы "глобального" характера об основаниях математики. Например: "Действительно ли данная часть математики является математикой, т.е. совместима ли она с природой математики?" Этот вопрос относится к основаниям, так как математика в целом корректна: не потому, что это следует из аксиом теории множеств Цермело – Френкеля, но потому, что она основывается на анализе различных математических форм и их реализаций в приложениях.

Иначе говоря, математика правильна, и причина этого не в том, что она удовлетворяет "локальной корректности", что проверяется формальными логическими законами, а в том, что имеется глобальная корректность; математические утверждения тесно связаны со всей математикой в целом, с другими науками и человеческой деятельностью вообще. Еще раз, другими словами: объекты, изучаемые математикой, весьма тесно связаны многими разнообразными и запутанными способами с насущными проблемами научного знания и человеческой деятельности.

В силу этого вопрос об основаниях математики должен исходить из того, что математика в действительности есть исследование закономерных связей различных дисциплин и их взаимоотношений с другими областями человеческого знания. Изучение этих черт математики – вопрос не формальной логики, а глубокого исследования природы математики и взаимосвязей ее частей.

3. Философия математики

Для философии математики типичен вопрос: "Какова природа математики и что отличает математику от других областей человеческого знания?"

По этому вопросу существует множество мнений, значительная часть которых спекулятивна и необоснованна, поскольку она не опирается на рассмотрение самой математики. По моему мнению, осмысленные ответы могут быть получены только изучением математики во всей ее общности, во всех ее взаимосвязях. Сейчас я завершил работу над книгой, в которой проводится такое рассмотрение основных разделов математики: арифметики; геометрии, евклидовой и неевклидовой; вещественных чисел, функций и групп; анализа и линейной алгебры; дифференциальной геометрии и механики; комплексного анализа и топологии; теории множеств, категорий и логики.

Эти области и задачи становятся математическими, когда мы их фомализуем – например, формальные правила сложения и умножения целых чисел или уравнения движения тела в механике. Эти формы постоянно расширяются и обосновываются, так, теорема Пифагора выводится из более базисных геометрических фактов, а правила арифметики десятичных чисел доказываются из аксиом Пеано. В конце это развитие приводит к созданию законченных аксиоматических теорий, объединяющихся в развитые системы.

В этом смысле математика может быть сделана строго формальной. Причем эти формы были извлечены из многообразных проблем человеческой деятельности, научных вопросов и математических головоломок (например: как распределены простые числа среди всех целых?). Именно эти связи и дают то, что можно назвать "глобальными" основаниями математики.

Тем самым, математические формы происходят из фактов, обычно через предположительные идеи, которые скорее туманны и неясны, чем четки и ясно выражены. Изучение математики показывает, что одна такая идея может иметь несколько формальных реализаций. К примеру, понятие "следующий" может привести к аксиоматике Пеано, к ординальным числам, к деревьям. Идея "гладкости" может привести к понятиям непрерывности, дифференциоуемости, аналитичности. Идея "композиции двух операций" приводит к теории групп, полугрупп, категориям, умножениям матриц. Идея объединения сложных объектов множества ведет к различным формализациям теории множеств. И так далее: ведущие идеи существенны для развития математики, но они неясны и расплывчаты, поэтому они должны быть записаны в точной математической форме, уже без всякой неопределенности.

Эти соображения о природе математики могут быть выражены следующей диаграммой:

Человеческая деятельность; научные вопросы.	Способы; задачи.	– идеи –	правила определения аксиомы; доказательства.	–	Системы формальных теорий.

Такой взгляд на математику совершенно отличен от существующих вариантов философии математики, большей частью восходящих еще к первым годам XX в., которые с тех пор не сильно изменились и не очень прояснили ситуацию. Это – эмпиризм, формализм, логицизм, интуиционизм и др. Одной из прочих выделяющихся теорий является доктрина платонизма: абстрактные объекты существуют независимо от нас, и утверждения о них имеют абсолютное значение. Наиболее заметным представителем этой доктрины сегодня является теоретико-множественный платонизм. Абстрактные множества существуют, каждое утверждение о них истинно или ложно – например, континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна – но никто не знает, какова именно.

По-видимому, вера в теоретико-множественный платонизм появилась, когда выяснилось, что значительная часть математики может быть выражена на языке аксиом Цермело – Френкеля с добавлением аксиомы выбора. Отсюда появилась философская доктрина, согласно которой математика работает с действительным миром реальных множеств, и мы хорошо с ними знакомы. Это "эпистемологический платонизм", как он описан в недавней книге Михаила Резника "Фреге и философия математики" в качестве одного из вариантов платонизма. Понятие теоретико-множественного платонизма вдохновляет многих математиков, особенно специалистов по теории множеств.

Мое мнение, однако, состоит в том, что идея реального мира множеств – это миф, хоть и удобный, но все же миф. Дело в том, что математикам в своих исследованиях удобнее считать, что используемые ими понятия действительно описывают некоторую реальность, что делает дедуктивные заключения более конкретными и убедительными. Однако, нет никаких математических или философских свидетельств существования такой реальности. Простые примеры конечных множеств или наборов предметов, или даже хитроумных множеств точек, весьма далеки от той воображаемой реальности, о которой говорит платоновский миф о реальности мира множеств Цермело – Френкеля. Эффективность теоретико-множественного формализма (если он действительно эффективен) не может служить доводом в пользу существования платоновской реальности.

4. Множества

К настоящему времени развиты разнообразные интуитивные представления предлагаемого реального мира множеств. Типичная картина изображает мир множеств диаграммой в форме буквы V , где одна линия представляет ординальные числа; сами же множества откладываются по другой, опираясь на ординальное число, отвечающее их "величине". Эта схематическая картинка, очень удобна для рисования на доске, есть просто графическое изображение так называемой иерархии множеств.

В ней мы, исходя из простейшего, т.е. пустого множества, многократно применяем операцию образования всех подмножеств и операцию объединения для последовательного образования все более полной картины. Интуитивное описание этим ограничивается. По необходимости оно расплывчато; оно не может дать точного описания какого-либо реального объекта. Это служит хорошей иллюстрацией того, как математика образуется из исходных идей и их последующей формализации; в данном случае, например, формальной теории множеств Цермело – Френкеля.

Примером, проясняющим необходимую расплывчатость исходных идей, служит использование операции "образование множества всех подмножеств" при построении иерархии множеств. Исходя из данного множества S , мы можем построить множество всех его подмножеств $P(S)$; но это не дает строгого определения, какие подмножества могут быть построены или вообще считаются допустимыми.

В аксиоматической теории Цермело – Френкеля подмножества описываются с помощью аксиомы выделения, которая утверждает, что для данного множества S и свойства P элементов этого множества можно образовать подмножество множества S , состоящее из тех и только тех элементов S , которые обладают свойством P . Чтобы убедиться в том, что это является строгой формулировкой в языке аксиоматической теории множеств, необходимо уметь описывать, что такое "свойство"; свойством считают то, что может быть выражено в исчислении предикатов первого порядка с использованием языка теории множеств, понятий принадлежности и равенства. При этом в исчисление предикатов включаются два квантора: "существует" и "для каждого". Обычно подразумевается применение этих кванторов ко всему универсуму теории множеств; "существует множество x " или "для каждого множества x ".

Такое использование кванторов типично для общих утверждений теории множеств. Но эти утверждения бессмысленны, так как они не соответствуют реальным нуждам математики: в действительности квантор применяется всегда к элементам какого-то конкретного множества; "для всех вещественных чисел", или "для всех целых чисел", или "для всех элементов данного функционального пространства". Это наблюдение об использовании кванторов в практике математики ставит вопрос: является ли теория Цермело – Френкеля действительно подходящей для математики? Вполне может быть, что более пригодным для использования окажется на самом деле другой вариант аксиом, в котором свойство определяется как формула исчисления предикатов, в которой каждый квантор на самом деле ограничен на некоторое множество X.

Это описание – только один пример того, что в некоторых отношениях теории множеств допускают различные варианты аксиоматизации. Аксиоматика Цермело – Френкеля с добавлением аксиомы выбора была воспринята с таким энтузиазмом, что другие возможные варианты, такие, как приведенный выше, с измененной аксиомой выбора выделения (и, возможно, также аксиомой подстановки), использующей только кванторы по какому-то множеству, не были должным образом изучены. Близкие идеи сейчас появляются в неразветвленной теории типов и теории множеств Крипке – Платека. Последняя сейчас применяется главным образом как техническое средство в теории моделей, а не как вариант теории для оснований математики.

С другой точки зрения, возможность выбора им аксиоматики теории множеств, также отвечающей нуждам всей (или большей части) математики, порождает серьезные сомнения в реальности этого предполагаемого мира множеств. Аналогичные сомнения вызывают недавние результаты о независимости в теории множеств, где строится много возможных моделей, и где есть самые разные допущения о больших кардинальных числах, дающих различные модели теории множеств – в зависимости от того, насколько большими предполагаются кардинальные числа. Другими словами, интуитивное восприятие теории множеств, безусловно, неоднозначно; соответственно, могут существовать и разные формализации.

Вопрос об основаниях математики должен включать в себя более внимательное изучение различных формализаций и не отдавать слепого предпочтения теории Цермело – Френкеля. На самом деле основным понятием не обязательно должно быть понятие множества: таковым может быть также понятие функции, как в предложенной Лаувером аксиоматизации категории множеств (подробнее см. [6]).

5. Изучение математики

Ввиду этих и других доводов, можно утверждать, что сейчас существуют большие возможности для более точного и обширного изучения природы математики и того, как эта природа освещает вопросы оснований и философии математики. Надо не просто исследовать аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля, но то, что действительно существует в математике и как взаимосвязаны части математики.

Я убежден в том, что такое феноменологическое изучение покажет, что математика есть ряд весьма разнообразных форм; простых, как, например, правила вычислений, и более развитых, как аксиомы теории множеств. Эти формы есть количественные выражения идей, извлеченных из разнообразных источников, в частности - из практической деятельности, из многочисленных научных проблем. Эти формы объединяются в развитые системы: иногда в виде простых правил, иногда в виде формальных определений, иногда в виде простых аксиоматических систем, иногда в виде более обширных; все это ведет к четким теоремам и обширным результатам с аккуратными доказательствами. Эти многочисленные формы могут по-разному соединяться.

Итак, более коротко, математика есть предмет, который ставит своей целью понимание всех возможных формальных аспектов мира путем извлечения форм из практики, развития и использования их, и последующего применения их к тем аспектам мира, которые действительно формальны. Эта точка зрения на математику была изложена в моей книге "Математика: форма и функция". Эти взгляды могут быть названы доктриной формального функционализма.

ЛИТЕРАТУРА

Здесь мы приводим список некоторых (из множества) книг.

1. Barwise J. Admissible Sets and Structures, Perspectives in Mathematical Logic (-Group) B.; N.Y.; Heidelberg, 1975.
2. Drake F.L. How recent work in Mathematical Logic relates to the Foundations of Mathematics // The Mathematical Intelligencer, 1975. Vol. 7. N 4. P. 27-35.
3. Feferman S. Working Foundations // Synthese, 1985. N 62. P. 229-254.
4. Harrington L.A., Morley M.D. Harvey Fridman's Research on the Foundations of Mathematics // Studies in Logic and the Foudations of Mathematics, 1985. Vol. 117.
5. Hatcher W.S. The Logical Foundations of Mathematics. Oxford; N.Y., 1983.
6. Lawvere F.M. Continuosly Variable Sets: Algebraic Geometry // Geometric Logic; Proceedings of A.S.L. Logic Colloquium, at Bristol, 1973. Amsterdam; N.Y.; Oxford, 1975. P. 135-136.
7. Mac Lane S. Mathematics, From and Function. N.Y.; B.; Heidelberg, Tokyo, 1985.
8. Resnik M.S. Frege and the Philosophy of Mathematics, Ithaca (N.Y.), 1980.

А.А.Кириллов

КОММЕНТАРИИ К СТАТЬЕ С.МАК-ЛЕЙНА "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА - НИ ОСНОВАНИЯ, НИ ФИЛОСОФИЯ"

Сандерс Мак-Лейн - выдающийся американский математик, член Национальной Академии Наук США - скоро отметит свое восьмидесятилетие. Его математическая деятельность связана с возникновением в математике нового, категорного, подхода в противоположность старому, теоретико-множественному, царившему со времен Г.Кантора.

Язык теории категорий сейчас используются почти во всех областях математики, а в современной алгебре, алгебраической топологии и алгебраической геометрии он является основным. Выразительная характеристика этого языка дана Ю.И.Маниным: "Язык категорий воплощает "социологический" подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных"

Здесь не место описывать более подробно основные понятия теории категорий. Скажем лишь, что сам термин "категория" был введен в математику С.Мак-Лейном и С.Эйленбергом в 1945 г., а наиболее доступным и полезным для неспециалиста введением в теорию категорий является книга С.Мак-Лейна "Категории для действующего математика" (Maclane S. Categories for working Mathematician. Beringer, 1971).

Хорошо известен также курс алгебры С.Мак-Лейна и Г.Биркгофа, по которому учились несколько поколений американских математиков.

Советским математикам С.Мак-Лейн знаком по переводу его книги "Гомология" (М., 1966), ставшей одним из основных руководств по гомологической алгебре.

Л.Г.Бирюкова

ПЕРВЫЙ ОПЫТ КОНСТРУКТИВНОГО ПОДХОДА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Конструктивистские представления в дедуктивной логике ныне прочно – и вполне по праву – связываются с именем Л.Э.Я.Брауэра. Голландский математик, основоположник "неоинтуиционизма", решительно порвал с многовековой философско-логико-математической традицией, отвергнув логику в качестве основы математики. Брауэр положил начало противоположной традиции, развив воззрение, согласно которому логика следует за математикой и имеет отношение не столько к мышлению, сколько к языку как способу фиксации результатов умственного конструирования (построения) – конструирования, которое он считал непосредственным предметом математики.

Поскольку математические суждения при брауэровском подходе трактуются как возникающие на основе математического построения, теряет смысл классический, восходящий к Аристотелю, принцип двузначности суждений (согласно которому каждое суждение либо истинно, либо ложно, и только одно из двух), так как конкретная математическая конструкция, подразумеваемая в некотором данном суждении, может, так сказать, еще не состояться (или даже вообще быть в принципе невозможной). Но отказ от принципа двузначности означает отвержение всеобщности закона исключенного третьего и тесно связанного с ним закона снятия двойного отрицания. Оба эти закона сохраняют силу, по Брауэру, только для конечных совокупностей объектов, поскольку для такого рода образований путем непосредственной "переборной" – элемент за элементом – проверки в принципе всегда можно решить, верно ли по отношению к любому из входящих в него объектов рассматриваемое суждение или нет.

Классическая логика, считал Брауэр, пригодна именно для изложения результатов умственного конструирования, относящегося к конечным совокупностям; она не приложима к совокупностям бесконечным – бесконечным потенциально, так как никакой иной бесконечности, кроме потенциальной, он не признавал. В работе "Интуиционистская теория множеств" Брауэр следующим образом объясняет происхождение "веры" в закон исключенного третьего. Исторически сложившаяся, классическая логика возникла путем абстракции от свойств конечных множеств; в последующем этой логике было "приписано существование, не зависящее от математики, и в конце концов на основании этой мнимой априорности она была незаконно применена к математике бесконечных множеств" [1. С. 203] .

В нашу задачу не входит рассмотрение брауэровской концепции логического, получившей первое явное представление в формализмах В.И.Гливенко [2, 3] и А.Гейтинга [4], которые были разработаны лишь в конце 30-х гг. Для нас существенно отметить следующие три периода.

Первое. Интуиционистская (и конструктивная) логика, поскольку она надстраивается над интуиционистской (конструктивной) математикой, развертывается - как и последняя - с помощью индуктивно-рекурсивных процедур, покоящихся в конечном счете либо на интуиции целого положительного числа (интуиционизм), либо на абстракции конструктивного объекта и конструктивного процесса (см.: [5]).

Второе. Для конечной предметной области (областей) подобное построение логики не требует пересмотра принципов классической логики, как это и подразумевалось Брауэром. В этом случае, конечно, "проходит" и гильбертовский финитизм, причем в его самом узком смысле.

Третье. Интуиционистская (конструктивная) логика в своих приложениях к математике предполагает определенную интуиционистскую или конструктивистскую семантику как совокупность способов истолкования смысла (математических) суждений.

Ниже мы покажем, что эти три пункта в той или иной мере были предвосхищены в логической теории, разработанной Германом и Робертом Грассманами, теории, которая впервые излагалась последним в работе 1872 г. Логика строилась Грассманом индуктивно-рекурсивно; объемы понятий - а в соответствии с немецкой философской традицией логика понималась ими как "учение о понятиях" - предполагались конечными; подразумевавшаяся при этом семантика заключалась в понимании объемов как конечных "сумм" элементов.

Одна из ветвей "общей теории форм" или, как предпочитал говорить Р.Грассман, "учение о величинах" [1], была, по свидетельству последнего, в своей основе разработана братьями Грассманами в 1855-56 гг., однако ее изложение было опубликовано Робертом лишь спустя 16 лет в небольшой книжке [9]. В 1890 г. им было выпущено более подробное изложение логики в двух вариантах: в качестве составной части многотомного труда "Здание знания" [10] и в форме отдельной большой книги [11]. Однако в целом основы грассмановской математико-логической теории при этом не менялись, и мы в нашем анализе будем ориентироваться прежде всего на труд 1872 г., лишь в некоторых случаях привлекая более поздние изложения.

Теория величин Р.Грассмана строится индуктивно-рекурсивно, т.е. конструктивно. Теория величин, точнее, общая теория величин, выступает как часть учения о мышлении и как таковая им и излагается.

Обратные операции теории величин Р.Грассмана, подобно прямым операциям,

---

[1] О теории величин Р.Грассмана см.: [6 : 7 ; 8].

тоже позволяют осуществлять соответствующие рекурсивные процедуры; однако определяются эти операции в терминах соответствующих прямых операций контекстуально – с помощью равенств (уравнений), делающих возможным эффективное вычисление их результатов. Так, в предположении однозначности бинарной ассоциативной операции – она обозначается Р.Грассманом не знаком $\cap$, которым пользовался его брат (см.: [6]), а символом $\circ$, которым мы ниже и воспользуемся, – обратная ей операция, обозначаемая (на этот раз в соответствии с тем, как поступал Г.Грассман в труде 1844 г. 44) знаком $\cup$, задается равенством $a = a \cup b \circ b$. Это равенство, вместе с вытекающим из него равенством $a = a \circ b \cup b$ (см.: [8]) делает возможной – в силу рекурсивности определения операции $\circ$ – рекурсивную же процедуру определения "разности" $a \cup b$.

Введение обратных операций не затрагивает, по Грассману, математической логики, на чем мы скоре остановимся особо. Пока же отметим следующее. Согласно грассмановской концепции, все математические и логические науки возникают в результате ветвления общей теории величин. Однако взгляды Р.Грассмана на характер тех наук, которые возникают в результате этого ветвления, претерпели определенные изменения. В пяти книгах, выпущенных в 1879 г. ([9 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16]), все четыре выделявшихся им ветви – логика, учение о соединениях, арифметика и учение о протяженностях – считаются относящимися к математике как "общему учению о формах", а в труде 1890 г. ([10]) впервые две причисляются к "стволу" логических наук, остальные же – к "стволу" наук математических; при этом оба названных "ствола" образуют – вместе с общей частью теории величин – то, что Р.Грассман, начиная с труда 1875 г.[17], именует "учением о мышлении". Однако это учение, по Р.Грассману, должно развертываться в формулах, и быть, таким образом, по своему методу подобным математике.

В труде 1872 г. [12] предполагается, что задан набор элементарных величин ("штифтов") e_1, e_2 ..., совокупность которых может сводиться к единственному "штифту", а может быть неограниченно большим. Разветвление же теории производится следующим образом. В качестве основания подразделения выступает вопрос о том, что собой представляет результат сочленения двух одинаковых штифтов – совпадает ли он с ними или от них отличен; если имеет место первое, то целесообразность, состоящая из сочленения сколь угодно многих e есть то же самое e ; если имеет место второе, то сочленение равных постоянно порождает все новые и новые величины ([12. С. 12]). Первый случай, по Р.Грассману, соответствует связи представлений в мышлении, где два одинаковых представления или понятия, сливаясь вместе, образуют представление, совпадающее с исходным, поэтому сочленение, которое обладает свойством такой, если можно так выразиться, "штифтовой идемпотентности", получает название внутренней связи – в отличие от связи внешней, соответствующей сочленению вещей во внешнем мире, где две одинаковые вещи, соединяясь сместе, никогда не составляют вещь, занимающую в пространстве место того же размера, что и одна из них. И внутреннее,и внешнее сочленения могут выступать и как суммирование, и как умножение, что дает четыре варианта; в двух из них мы имеем дело с "представлениями в нашей голове, со связью представлений или понятий" [12. С. 12] . Так получаются пооперации внутреннего и внешнего сложения + (они представляют собой спецификации операции общей теории величин), а также внутреннего и внешнего умножения; отличительные свойства этих операций + и. задаются, соответственно, равенствами (I) $l+l=l$, (2) $l+l\neq l$, (3) $ll=l$, (4) $ll\neq l$, определяющими четыре ветви теории величин. Равенства (1) и (3) являются характеристическими для учения о понятиях, или логики, равенства (1) и (4) – для учения о соединениях, или комбинаторики, равенства (2) и (3) – для учения о числах, или арифметики, а равенства (2) и (4) – для "учения о внешнем", или учения о протяженностях. Каждому из этих "учений" в серии изданий 1872 г. посвящена отдельная книга.

Итак, для (математической) логики характеристическими являются равенства (1) и (3). Р.Грассман показывает, что из них следует идемпотентность сложения и умножения любых величин. Величинами в логике являются понятия, и названные операции истолковываются, говоря в современных терминах, как, соответственно, объединение и пересечение их объемов (т.е. классов, множеств).

Согласно определению Р.Грассмана, объем понятия есть сумма его штифтов; в соответствии с этим устанавливается, что сумма двух понятий есть сумма всех различных штифтов, содержащихся в обоих понятиях, и что произведение двух понятий есть сумма всех штифтов, которые являются общими для обоих понятий (см.: [9. С. 5–6, 10–11]). Но тогда, поскольку для понятий в логической теории Р.Грассмана из определения отношения отрицания одного понятия другим следует то, что обычно называют законом исключенного третьего, в данном случае в формулировке (см.: [9. С. 16]) $a+\bar{a}=T$ (для любого a), где $\bar{a}$ есть отрицание понятия a , а T – "всеобщность" (All), или "тотальность" (Totalität), получается, что либо объемы всех понятий должны быть конечными, либо, в противном случае, закон исключенного третьего без каких-либо ограничений оказывается распространенным на бесконечные классы (совокупности).

Первая возможность закрывает путь применениям логики к математике, поскольку подавляющее большинство математических понятий имеют бесконечный объем – в той или иной форме задают или подразумевают бесконечные множества. Вторая возможность объективно означает выход за рамки конструктивистско-финитистской установки: бесконечные множества, по Р.Грассману, должны были бы мыслиться в виде бесконечных сумм штифтов – сумм, какого-либо эффективного способа построения которых (и обращения с которыми) логическая концепция Р.Гроссмана не предусматривает.

Логическая теория, изложенная в трудах Р.Грассмана [9] и [11], изучалась Г.И.Малыхиной [18. Гл. II и III]. Наша же задача состоит в том, чтобы взглянуть на гроссмановскую логическую теорию с точки зрения применявшейся в ней методологии.

Внешне логика, как она изложена в названных выше работах Р.Грассмана (в частности, в работе 1872 г.), выглядит аналогично логике традиционной, подразделяясь на три части: 1. "Образование понятий", 2. Образование суждений" и 3. "Образование умозаключений". В части 1 грассмановской логической теории строится булева алгебра, причем так, что сначала выводятся все законы, определяющие дистибутивную решетку, и лишь после этого производится ее сужение до булевой алгебры.

Приведем основные определения Р.Грассмана, с помощью которых он распространяет на логику все, что было установлено в его теории величин. Понятиями в логике называются "штифтовые величины", т.е. величины, образованные путем последовательного суммирования элементарных величин – штифтов. При перемножении понятий, порождающем понятие же, сомножители истолковываются как признаки, или определяющие черты (*Bestimmingen*), данного понятия-произведения. Совокупность всех попарно различных штифтов, образующих данное понятие, составляет его объем, т.е. для произвольного понятия выписывается: $a=e_1+e_2+\dots+e_n$, где $e_i \neq e_j$; $i,j = 1,2, \dots, n$. Таким образом, Р.Грассман фактически отождествляет (отдельно рассматриваемое) понятие с его объемом, т.е. становится в логике на экстенсиональную позицию. Однако когда понятие представляет собой произведение нескольких понятий, последние берутся уже со стороны содержания.

Чтобы привести логический формализм в соответствие с интуитивно очевидными представлениями о понятиях и с правилами оперирования (конечными) множествами, Р.Грассман устанавливает – в качестве специфических для логики – три равенства [2]: п. 4 – для любых штифтов e, e_1, e_2

$$e+e=e,\ ee=e \quad \text{и} \quad e_1e_2=0, \text{ где } e_1\neq e_2 \qquad (1)$$

При сложении двух понятий, учитывая, что сумма одинаковых штифтов дает тот же самый штифт, объем суммы окажется состоящим из всех различных штифтов, содержащихся в обоих понятиях. При вычислении произведения ab остается сумма всех штифтов, общих обоим понятиям; поэтому число штифтов в понятии ab не может быть большим, чем в каждом из понятий a, b. Так как объемы понятий a и b мыслятся в виде конечных сумм, вводимые Р.Грассманом операции + и • непосредственно не совпадают с операциями объединения и пересечения двух (даже конечных) множеств. Булева алгебра, как она присутствовала в работах [9]; [1], была булевой алгеброй именно такого рода штифтовых сумм. Мы увидим ниже, что это – решающий пункт, позволяющий Р.Грассману последовательно провести финитную – в самом узком смысле, а значит и конструктивную – точку зрения.

Теперь обратимся к алгебро-логической стороне теории Р.Грассмана и покажем, что в его теории понятий на отдельном этапе ее развертывания содержалась система постулатов дистрибутивной решетки (см. рис.2 в работе [8]). Понятие дистрибутивной решетки, как известно, может быть определено на основе как отношения =, так и отношения $\leqslant$ (или $\geqslant$). Поскольку у Р.Грассмана особую роль играет свойство идемпотентности операций + и •, мы изберем следующую систему постулатов этой алгебраической структуры, используя сигнатуру $\langle T, =, +, \cdot \rangle$ где T – "тотальность":

P1 $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$;

P2 $a+b=b+a$, $ab=ba$;

P3 $a+a=a$, $aa=a$;

P4 $ab=a \vdash b+a=b$, $b+a=b \vdash ab=a$

Операция умножения дистрибутивна относительно сложения – этот закон, так же как и законы P1 и P2, являются общими для всех ветвей учения о величинах.

Р.Грассман доказывает в качестве теоремы закон поглощения (п.10 $a+ab=a$, второй закон поглощения $a(a+b)=a$ без труда получается в его системе на основе первого закона, свойства идемпотентности умножения и его дистрибутивности относительно сложения: $a(a+b)=aa+ab=a+ab=a$. В "Логике"

[2] Ниже, если не оговорено противное, пунктами определений и теорем Р.Грассмана называются предложения работы 1872 г. [9].

1890 г. это доказательство приводится в п.80. Таким образом, в теории понятий Р.Грассмана присутствует и другая, более привычная система постулатов дистрибутивной решетки, когда вместо идемпотентностей и правила Р4 используются оба закона поглощения.

В системе Р.Грассмана определено и отношение $\leq$ неравенства (подчинения) между понятиями: $a \leq b$ имеют силу тогда, когда a является слагаемым для b ; понятия, находящиеся в этом отношении, называются инцидентными, причем a - более узким, подчиненным понятием, а b - более широким, подчиняющим. Отношение $\leq$ определяется у Р.Грассмана через отношение =, причем обоими ныне хорошо известными способами: в п.15 доказывается, что $a \leq b \equiv b = a+b$ а в п.19 - что $a \leq b \equiv a + ab$, где $\equiv$ означает равносильность формул. В п.21 показано, что в **грассмановской** теории понятий $a = b \equiv a \leq b \,\&\, b \leq a$.

Естественно поэтому, что в теории понятий Р.Грассмана присутствует и такое определение решетки, когда операции + и • понимаются, соответственно, как взятие точной верхней и точной нижней граней любых двух ее элементов, однако мы не будем здесь на этом останавливаться.

Характерной чертой описываемой части логической теории Р.Грассмана является то, что в ней четко разделяются предложения (равенства, определения, равносильности, выводимости), относящиеся только к дистрибутивной решетке (пп.1-26), от предложений, относящихся к более узкой, но более богатой свойствами структуре булевой алгебры. Такой переход совершается после определения "тотальности" и "нуля" (пп.24-26) и введения дополнений к понятиям (пп.27-45). Делается это вполне аналогично тому, как поступают в современной литературе на данную тему.

Как мы уже говорили, отличительной особенностью логической теории Р.Грассмана является то, что классы - объемы понятий в ней (включая "тотальность", T) - являются конечными. В этом убеждает не только грассмановское представление (объемов) понятий в виде конечных сумм штифтов (элементарных величин - *Einfache*), вытекающее из самого вида их записи, но и из "штифтового" представления операций сложения и умножения понятий, а также осуществляемых на этой основе индуктивных доказательств, о которых речь пойдет ниже. Подтверждают это и используемые Р.Грассманом примеры, представляющие собой понятия с конечным объемом ("человек", "млекопитающее", "необразованные и безнравственные люди", "художники, которые являются поэтами" и пр.) [3]. Тем самым задается специфическая семантика суждений, поскольку последние, по Р.Грассману, строятся из понятий в хорошо известном стиле традиционной логики.

То, что Р.Грассман имеет дело именно с конечными объемами, отчетливо видно на примере определения двух непустых понятий a, b , находящихся в отношении пересечения (обозначение $a \times b$), п.109 "Логики" 1890 г.

Доказательства теорем в логике Р.Грассмана носят финитный характер. Это вытекает из того, что логическая часть теории понятий полностью получается после присоединения свойств "штифтовой идемпотентности" операции + и • . На

---

[3] Понятия, бесконечные по объему, встречаются в примерах лишь в виде исключений (таковы, например, математические понятия "квадрат", "прямоугольник" и некоторые другие аналогичные, приводимые в умозаключениях, фигурирующих в самом конце грассмановской теории дедукции), и их следует отнести, по-видимому, на счет недостаточной продуманности изложения.

этой основе доказываются не только идемпотентности $a+a=a$ и $aa=a$ для произвольного понятия a, но и свойства суммы и произведения понятий, составляющие булеву алгебру. Вот какой вид, например, имеет доказательство (п.5) теоремы $aa=a$:

Пусть $a = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$,

тогда $aa = (e_1 + e_2 + \ldots e_n)(e_1 + e_2 + \ldots e_n)$ (раскрытие скобок по дистрибутивности относительно +)

$= e_1 e_1 + e_1 e_2 + \ldots + e_1 e_n$

$+ e_2 e_1 + e_2 e_2 + \ldots + e_2 e_n$ (используется последнее из трех равенств (1))

$- - - - - - - -$

$e_n e_1 + e_n e_2 + \ldots + e_n e_n$ (по штифтовой идемпотентности умножения)

$= e_1 e_1 + e_2 + e_2 + \ldots e_n e_n$

$= e_1 + e_2 + \ldots e_n$

$= a$

Нетрудно убедиться, что это фактически индуктивное доказательство: (1) Базис индукции: $ee = e$, (2) Индуктивный переход: пусть теорема верна для понятия b , объем которого содержит $n-1$ штифт; тогда она верна и для $b \underset{df}{=} b + e_n$

Доказательство: $aa = (b+e_n)(b+e_n) = bb + e_n b + b e_n + e_n e_n = b + e_n = a$ (здесь используется ранее доказанная в п.5а теорема $a+a=a$ и равенства (1); при переходе от $e_n e_n$ к e_n применяется базис индукции).

В правильности подобной реконструкции логики Р.Грассмана убеждает и приводимое в "Логике" 1890 г. (16, п. 34, п.72 ; 15, п.373, п. 907) доказательство обобщенной идемпотентности (т.е. формулы $a = \underset{1,n}{\mathcal{P}} a \underset{df}{=} aa \ldots a$, где a повторяется n раз), индуктивное, как говорит Р.Грассман, относительно $\underset{1,n}{\mathcal{P}} a$. Оно имеет вид: 1) $a = \underset{1,n}{\mathcal{P}} a$ в силу теоремы (п.71) $aa=a$ (базис индукции); 2) если равенство $a = \underset{1,n}{\mathcal{P}} a$ верно для n сомножителей (индуктивное допущение), то утверждение теоремы верно и для $n+1$ сомножителя; ибо $\underset{1,n}{\mathcal{P}} aa = a$ (согласно п.71), следовательно, констатирует Р.Грассман в третьей части индуктивного рассуждения, теорема верна при любом n .

Если не предполагать предварительное финитное доказательство теоремы $aa=a$, то какой смысл может иметь доказательство п.72? Ведь истолкование понятия a как бесконечной суммы штифтов лишает силы описанные доказательства.

Аналогичный, т.е. фактически индуктивный и, значит, конструктивный, финитный, характер носят доказательства таких теорем, как (п.7): $ab=0$, если a и b не имеют общих штифтов (эту теорему Р.Грассман называет законом противоречия); п.8: "Сумма двух понятий есть сумма всех различных штифтов..., по мере увеличения запаса доказуемых равенств, однако, отпадает необходимость обращения к индукциям и доказательства теорем, имеющих вид равенств (или неравенств) проводятся путем тождественных преобразований. Так обосновывается, например: $\bar{T} = 0$, $\bar{0} = T$ (п.29); "закон исключенного среднего" (*Satz des ausgeschlossenen Mittels*) (п.84, 1890 г.): если $a+c = b+c$ и $ac = bc$, то $a = b$, тоже доказывается посредством тождественных преобразований. Использование метода индукции не требуется Р.Грассману и при доказательстве теорем, представляющих собой равносильности: $au = 0 \equiv u \leq \bar{a}$, $au = 0 \equiv a \leq u$ (п.33); $a = u \equiv \bar{a} = \bar{u}$, $a < u \equiv \bar{u} < \bar{a}$ (п.35); $(a \leq u \,\&\, a \leq \bar{u}) \equiv a = 0$ (п.39) и других. В этом случае замена равным касается не только знака =, но и знака ·

$\approxeq$ (тождественные преобразования цепочек равенств либо неравенств, связанных знаком $\approxeq$, были обоснованы Р.Грассманом в теории величин).

Подводя итог, заметим, что грассмановское понятие классов – объемов понятий – как конечных сумм может быть оформлено в виде индуктивного определения, в котором фигурирует понятие штифта (элемента), констант 0 и Т, а также операции умножения и сложения. Тогда логика понятий конечного объема, а также теория соответствующих суждений и умозаключений получает у Р.Грассмана завершенный характер. Только финитное истолкование объемов понятий делает безупречными построения, осуществляемые в [9 ; 11], а допущение бесконечных сумм штифтов нарушает всю систему грассмановских доказательств.

Два достижения Р.Грассмана выделяют его работы из общего русла алгебро-логических исследований прошлого века. Первое касается его вклада в теорию решеток и булевых алгебр, второе – обоснования логики на основе финитной установки. Как одно, так и другое, насколько нам известно, еще не отмечалось в историко-математической и историко-логической литературе.

Вопрос о возникновении булевой алгебры достаточно сложен. Элементы этой алгебры можно найти уже в античной (стоики) и средневековой схоластической логике. В [19] отмечается, что булева алгебра была построена А.Де Морганом: в своей обобщенной теории силлогизмов он использовал систему, названную впоследствии "алгеброй Буля" (у самого же Буля "булевой алгебры" в собственном смысле не было).

Что же своеобразного было у Р.Грассмана, независимо от других логиков и математиков построившего булеву алгебру? Это своеобразие заключалось в том, что Р.Грассман строит булеву алгебру в два этапа: сначала появляется дистрибутивная решетка, а потом, после введения дополнений, – булева алгебра, единицей которой была "тотальность", а нулем – пустой класс, обладающий свойствами: $a+\bar{a}=1, a\bar{a}=0; a+1=1, a0=0$. Это напоминает современные алгебро-логические построения, но отличается не только от подхода Ч.Джевонса, но и Э.Шредера, опиравшегося на работы Р.Грассмана: оба они вводят дополнения (т.е. отрицания понятий) на раннем этапе логического формализма, и тем закрывают путь к построению и изучению решеток безотносительно к булевой алгебре.

Здесь уместно отметить один принципиальный пункт разногласий, имевших место между Р.Грассманом и Э.Шредером. Он касался метода построения математической логики. Р.Грассман видел дефект подхода Шредера [20] в том, что, говоря современным языком, он недостаточно конструктивен. Что для Р.Грассмана означало "доказать", мы теперь хорошо понимаем: свести к рекурсивно-индуктивным "штифтовым" доказательствам.

Но именно с этим-то и не был согласен Шредер, который, поняв установку Р.Грассмана, выдвинул против нее возражение, подобное тем, которые много лет спустя математики-"классики" адресовали "конструктивистам". "По сути дела Р.Грассман со своим методом, – писал Шредер, – должен слишком часто оперировать ограниченными (begrenzten) суммами, вследствие чего доказательства многих простых теорем принимают в какой-то мере неудобоваримый вид" [21. С. 455].

Шредер не видел необходимости основывать математическую логику на "доказательствах относительно индивидов". Он высказывал убеждение, что "можно поступить проще и, так же как и Пирс, основывать все только на понятии субсумции (отношение подчинения понятий по объему. – Л.Б.), и лишь исходя из этого отношения определять, что такое индивид" [21. С. 455].

Как представляется, было бы неоправданным оценивать позиции Р.Грассмана и Э.Шредера в терминах правоты и неправоты. Последующее развитие математической логики показало возможность обоих путей: и пути рекурсивно-индуктивного развертывания формализованной логической теории, и пути ее алгебро-аксиоматического задания, отстаивавшегося Шредером.

Итак, Р.Грассман как логик интересен совсем не теми сторонами своего творчества, какие мы ценим, скажем, у Дж.Буля и Э.Шредера. Он интересен именно тем, что развивал такой подход в алгебре логики, который был в его время явным исключением. Вместо обычного аксиоматического (или близкого к таковому) задания набора постулатов, из которых извлекались дальнейшие равенства и неравенства "логической алгебры", он базировал математическую логику в конечном счете на рекурсивных определениях и доказательствах по индукции, не применяя даже доказательств от противного. На этом пути Р.Грассман обосновывал то, что другие представители алгебры логики принимали аксиоматически. Данный подход был собственным изобретением братьев Грассманов – изобретением, не имевшим аналогов ни в предшествующих алгебро-логических исследованиях XIX в.

В свете изложенного, на конструктивистскую установку Г. и Р.Грассманов в математике – она подробно проанализирована в статье [7] – мы теперь можем взглянуть с учетом их подхода к математической логике. Подход этот показывает, сколь последовательно старались они проводить свою индуктивно-рекурсивную концепцию "строгого знания". Это делало их логические построения единственными в своем роде не только в прошлом столетии. Математики XX в. долго не помышляли о том, чтобы построить логику специально для конечных множеств, хотя подобная идея была бы естественной после выдвижения Л.Э.Я.Брауэром в 1907 г. (см.: [22]) идеи о существенном различии логик конечного и бесконечного.

Только А.А.Марков, насколько нам известно, по сути дела возродил подход Р.Грассмана, когда в своих лекциях по математической логике, читанных в Московском университете (60–70-е гг.), желал продемонстрировать механизм классической логики предикатов и вместе с тем не нарушить принципов конструктивизма, вводил конечную область определения предметных переменных [23]. Это влекло за собой конечность множеств как объемов, т.е., по терминологии Р.Грассмана (и всей современной ему математической логики), понятий. В этом – одна из существенных линий, связывающих Роберта (и Германа) Грассмана с "неклассической" математикой наших дней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brouwer L.E.J. Intuitionistische Mengenlehre // Jahresbericgte berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 28, 1919.
2. Glivenko V.I. Sur la Logique de M.Brouwer // Acad.Roy de Belgiqoe, Bull. de la Cl. des Sc., Ser. 5. T. 14.
3. Glivenko V.I. Sur quelques de la logique de M.Brouwer // Ibid. T. 15.
4. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen logik // Sitzungsberichte der Preubischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. Jg. 1930. B. Kl II.

5. Нагорный Н.М. Конструктивный объект // Математическая энциклопедия. М., 1979. Т. 2.
6. Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г. "Учение о формах (величинах)" Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. I. // Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982.
7. Бирюкова Л.Г. "Учение о формах (величинах)" Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. II. // Вопросы кибернетики: Кибернетика и математическая логика в историко-методологическом аспекте. М., 1984.
8. Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В. Алгоритмические проблемы XX века и становление фундаментальных алгебраических структур: вклад Германа Грассмана // Наст. изд.
9. Grassmann R. Die Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik. Stettin, 1872.
10. Grassman R. Das Gebäude des Wissens. Bd. I, Hälfte 2: Die Denklehre. Stettin, 1890.
11. Grassmann R. Die Logik und die andern logischen Wissenschaften. Stettin, 1890.
12. Grassmann R. Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin, 1872.
13. Grassmann H. Lehrbuch der Arithmetik ... B., 1861.
14. Grassmann R. Die Bindelehre oder Combinationslehre. Drittes Buch der Formerlehre oder Mathematik. Stettin, 1872.
15. Grassmann R. Die Zahlenlehre oder Arithmetik. Viertes Buch der Formenlehre oder Mathematik. Stettin, 1872.
16. Grassmann R. Die Ausenlehre oder Ausdehnunfslehre. Fünftes Buch der Formenlehre oder Mathematik Stettin. 1872.
17. Grassman R. Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Thl. 1: Die Denklehre. Stettin, 1875.
18. Малыхина Г.И. Логические исследования Роберта Грассмана. Дисс. канд. филос. наук. Л., 1981.
19. Кузичева З.А. Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982.
20. Schröder E. Der Operationskeis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877.
21. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Bd. II, Abt. 1. Leipzig, 1891.
22. Brouwer L.E.J. Over de grondslagen der wiskunde. Amsterdam; Leipzig, 1907.
23. Марков А.А. Элементы математической логики. М., 1984.

Л.Г.Бирюкова, Б.В.Бирюков

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ XX В. И СТАНОВЛЕНИЕ АКСИОМАТИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ВКЛАД ГЕРМАНА И РОБЕРТА ГРАССМАНОВ

Связи конструктивного направления в математике и логике с теорией алгоритмов и концепцией эффективной вычислимости хорошо известны, более того, на них всегда обращают особое внимание. Известны и связи этого направления с алгеброй. Но если исторические корни первого рода связей достаточно освещены в литературе, то этого нельзя сказать о связях второго рода. Между тем выявление их немаловажно, так как значительная часть результатов, относящихся к алгоритмической неразрешимости, была получена – и получается до сих пор – в применении к тем или иным алгебраическим структурам. Более того, сам генезис отечественного конструктивизма, неотделимого от имени Андрея Андреевича Маркова, имеет прямое отношение к изучению алгебраических объектов: теория нормальных алгоритмов во многом выросла из проблематики разрешимости – неразрешимости ассоциативных исчислений, а значит, полугрупп. Более общее понимание группы также служило материалом для оттачивания конструктивистско-алгоритмических концепций.

Возникает естественный вопрос: как начали складываться связи между рассмотрениями таких исходных структур алгебры, как полугруппа, квазигруппа, группа (и "надстраивающимися" над ними структурами кольца и поля), а также решетка и булева алгебра, рассмотрениями, которые проводились, по сути дела, уже в XIX в., и идеями генетико-конструктивистского характера, появившимися примерно тогда же. В этой статье будет показано, что такого рода связи имели место уже в прошлом веке, что воплотились они в алгебраических и математико-логических работах Германа и Роберта Грассманов, выдвинувших генетически-конструктивистскую программу построения математики и вместе с тем сформулировавших системы постулатов, задающих многие из вышеназванных алгебраических структур.

1. Конструктивное направление и алгоритмические проблемы математики XX в.: использование фундаментальных структур алгебры

Конструктивное направление в математике оформилось, как известно, лишь после возникновения точного понятия алгоритма: алгоритмический подход является одной из главных черт, отличающих конструктивистские математику и логику от интуиционистских. Для развития упомянутого подхода в нашем столетии решающую роль сыграло обнаружение неразрешимых массовых проблем, относящихся к бесконечному классу индивидуальных задач, различающихся значениями некоторого параметра (параметров), который входит в условие (условия), определяющее данную массовую проблему. Считается, что массовая проблема имеет решение, если каждая индивидуальная задача, возникающая в результате выбора какого-либо значения (значений) параметра (параметров) массовой проблемы, может быть – в предположении того, что называют абстракцией потенциальной осуществимости (см.:[1. С. 15 ; 2. С. 3]), – решена путем применения единообразного метода, приводящего за конечное число шагов к требуемому результату. Метод этот должен быть, как говорят, эффективным, т.е. перерабатывающим конструктивные объекты (грубо говоря, объекты, однозначно различаемые и отождествляемые), детерминированным, т.е. не оставляющим произвола в работе "исполнительного устройства", реализующего метод, и целенаправленным, т.е. дающим решение исследуемой индивидуальной задачи, если таковое принципиально возможно для выбранного значения параметра (параметров). Понятие алгоритма как "точного предписания, определяющего вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату" [1. С. 3] и служит уяснению представлений о таком методе. Массовая проблема разрешима (или, как иначе говорят, алгоритмически разрешима), если такого рода метод - алгоритм решения проблемы - существует, и неразрешима в противном случае; массовая проблема поэтому называется также алгоритмической проблемой.

Уточнения понятия алгоритма, в различных вариантах разработанные в 30-х - 40-х гг. нашего века разными математиками, но оказавшиеся, тем не менее, родственными ("эквивалентными"), т.е. характеризующими, по сути дела, один и тот же процесс - процесс эффективного вычисления, эффективного математического построения либо дедуктивного доказательства и т.п., - были реакцией математики на обнаружение в ней неразрешимых массовых проблем. Первые такого рода проблемы были найдены в математической логике. Так, в 1936 г. А.Черчем была установлена неразрешимость массовой проблемы определения того, является ли произвольная формула исчисления предикатов первого порядка (то есть без кванторов по предикатам) доказуемой (или нет). После появления (тоже в середине 30-х гг.) теории алгоритмов - то есть теории, в которой рассматриваются уточнения понятия алгоритма, - неразрешенные массовые проблемы были обнаружены в самой этой теории; наиболее известная из них - неразрешимая алгоритмическая проблема распознавания того, применим ли произвольный алгоритм данного вида (например, нормальный алгоритм Маркова) к самому себе как некоторому конструктивному объекту или нет.

Математическая логика и теория алгоритмов, однако, являются в некотором смысле "экзотическими" дисциплинами математики. Естественно возникал вопрос, не служит ли феномен алгоритмической неразрешимости как раз выражением этой "экзотичности". Существуют ли в "обычных" математических теориях такие массовые проблемы, для которых невозможен решающий их алгоритм? Более десяти лет этот вопрос оставался без ответа, пока, наконец, А.А.Марков и Э.Пост - в одном и том же 1947 г. и независимо друг от друга - не дали на него утвердительного ответа.

Проблема, которой они занимались, была поставлена А.Туэ в 1914 г. (см.: [3]); она относилась к теории полугрупп и состояла в решении для нее так называемой проблемы тождества слов. В связи с данной проблемой Марковым было сформулировано понятие ассоциативного исчисления - исчисления, служащего для задания конечно определенных полугрупп. Ассоциативное исчисление задается (конечным) алфавитом знаков (букв) и конечным списком подстановок (под)слов в слова, т. есть правилами вида: в слове $\mathcal{P}Q_1R$ (где $\mathcal{P}, Q_1$ и R суть какие-то слова в заданном алфавите, и поэтому $\mathcal{P}Q_1R$ - тоже слово в этом алфавите; слова $\mathcal{P}$ и R могут быть пустыми, то есть не содержащими букв), (под)слово Q_1 может быть заменено (под)словом Q_2 (в том же алфавите), а в слове $\mathcal{P}Q_2R$ (под)слово Q_2 - (под)словом Q_1. Так, если задан алфавит A (скажем, состоящий из всех строчных букв латинского алфавита) и определенный список подстановок (например, $ac \Leftrightarrow ca$, $ad \Leftrightarrow da$, $bc \Leftrightarrow cb$, $bd \Leftrightarrow db$, $eca \Leftrightarrow ce$, $edb \Leftrightarrow de$, $cca \Leftrightarrow ccae$), любая из которых может быть применена к некоторому данному слову, если в нем содержится (под)слово, входящее в ее левую либо правую часть, то тем самым определено некоторое ассоциативное исчисление, и на множестве слов в алфавите A задано отношение типа равенства (тождества, эквивалентности): два слова S и T тождественны тогда и только тогда, когда они графически совпадают или одно из них может быть получено из другого с помощью формул подстановок, примененных конечное число раз. Это отношение разбивает все множество слов в данном алфавите на классы эквивалентности, которые и составляют элементы полугруппы, соответствующей рассматриваемому ассоциативному исчислению; полугрупповой операцией при этом является приписывание слова к слову – конкатенация слов.

Проблема тождества для полугрупп (ассициативных исчислений) состояла в нахождении алгоритма, позволяющего по двум данным произвольным словам в заданном ассоциативном исчислении решить вопрос, равны ли они или нет (в смысле описанного выше отношения равенства слов). Марков и Пост решили эту проблему отрицательно, построив конкретные полугруппы, для которых проблема тождества неразрешима (см.: [4 ; 5]).

Еще до того, как А.Туэ поставил проблему, названную его именем, аналогичную проблему тождества слов – но только для групп – сформулировал в 1912 г. М.Ден (см.: [6]). Она была решена лишь в 1952 г. – отрицательно – П.С.Новиковым, построившим группу, для которой проблема тождества неразрешима [7]. Затем последовала серия аналогичных результатов; в частности, А.А.Марков доказал неразрешимость проблемы изоморфизма для групп: оказалось, что не существует алгоритма, который по двум произвольным группам Γ_1 и Γ_2 устанавливал бы, изоморфны они или нет; им же было дано отрицательное решение проблемы гомеоморфии для топологических пространств (n-мерных многообразий) и получены другие аналогичные результаты.

Опыт исследования всех этих проблем приводит к ряду важных в методологическом отношении выводов. Обнаруживается, что алгоритмическая неразрешимость – общематематическое и общелогическое явление, так как неразрешимые массовые проблемы встречаются в самых различных разделах математического и логического знания: в дедуктивной логике, теории алгоритмов, алгебре, топологии и др. Оказывается, что многие из них связаны с таким первичным логическим отношением, как отношение типа равенства (тождество слов, изоморфизм, геометрия и т.п.). Выясняется, что источником удобных "модельных объектов" для изучения алгоритмической неразрешимости являются алгебраические структуры, причем объекты эти могут быть (с точки зрения как их задания, так и набора присущих им свойств) достаточно простыми – быть группой и даже полугруппой. При этом, однако, решение массовой проблемы, связанной с такого рода объектом, может оказаться достаточно трудным делом, причем не только в случае положительного решения: для некоторых классов полугрупп и групп положительные решения проблемы тождества были получены только в 40-х гг. Наконец, последнее: хотя проблематика разрешимости – неразрешимости не составляет какую-то "монополию" конструктивного направления, она, тем не менее, как показывает история оснований математики, особенно интересует именно конструктивистов (Марков), математиков и логиков, придерживающихся финитной установки, и "классиков", стремящихся переосмыслить конструктивистские результаты (см.: [8]).

В свете сказанного представляет интерес проследить генезис аксиоматик упомянутых выше алгебраических "модельных" структур в математике XIX в. и связи соответствующих разработок с генетически-конструктивистской установкой в математическом мышлении того времени. Такая постановка вопроса естественным образом приводит нас к фигурам Германа и Роберта Грассманов, вклад которых в названную установку освещен в статье [9]. Наша последующая задача в этой работе будет состоять в анализе соответствующих сторон алгебраического наследия Г.Грассмана.

2. "Общее учение о формах" Германа Грассмана

Алгебраические структуры, ныне принадлежащие к фундаментальным, были описаны Германом Грассманом в труде 1844 г. "Учение о линейных протяженностях" [11], а именно, в "Очерке общего учения о формах", следующем непосредственно после "Введения" к этой книге.

"Очерк" состоит из двадцати параграфов, первые шесть носят следующие названия: §I."Понятие равенства", §2."Понятие сочленения", §3."Совместимость", §4."Перестановочность", §5."Синтетическое и аналитическое сочленение", §6."Однозначность анализа"; сложение и вычитание". В этом разделе книги Грассмана мы обнаруживаем основные идеи, нашедшие продолжение в "Учебнике арифметики" 1861 г. [12], а впоследствии систематически и детально разработанные в "Общем учении о величинах" Роберта Грассмана, вышедшем в 1872 г. [13].

Предметом "общего учения о формах" Г.Грассмана являются только "формальные" понятия равенства и сочленения (связывания), рассматриваемые, соответственно, как бинарное отношение между формами (величинами в широком смысле) и как бинарная операция над формами, - понятия, обладающие весьма ограниченным набором средств. А именно, равенство понимается как обычно - "по Лейбницу" (без ссылки на последнего), т.е. как отношение через взаимозаменяемость (ср.: [14 ; 15 ; 16]): равными являются те формы, о которых всегда может быть высказано одно и то же, или более общо: такие (формы), "которые в каждом суждении заменяемы одна другой" [11. С. 20 ; 17. С. 34]. Иначе говоря, равенство - логическая основа правила замены равным, позволяющего производить тождественные преобразования.

Примечательно, что Г.Грассман формулирует определение отношения равенства также и в "генетических" терминах: "то, что из одинакового порождено одним и тем же способом, в свою очередь одинаково"; это определение вполне в духе последующих ассоциативных исчислений как порождающих процессов.

Вместе с отношением равенства форм вводится понятие о сочленении (связывании) - о некоторой бинарной операции, обозначаемой знаком $\frown$, которая из двух форм порождает в общем случае новую форму. В записи $a \frown b$ буква a обозначает предшествующий, b - последующий член сочленения.

3. Начала теории групп

Внимательное ознакомление с "Очерком общего учения о формах" убеждает в том, что Г.Грассман стоит у истоков абстрактных формулировок таких фундаментальных алгебраических структур, как группа и кольцо. Однако этот факт известен мало. Даже в исследованиях, непосредственно посвященным работам Г.Грассмана (см.: [18 ; 19 ; 20]), не говоря уже об общих работах по истории и методологии математики XIX в. и такого важного его раздела, как алгебра (см., например: [21 ; 22]), на эту сторону дела не обращали должного внимания. Так, в статье [23], посвященной роли Г.Грассмана в создании линейной алгебры, мы читаем: "Характерной чертой труда Грассмана, далеко опередившего свое время, является стремление использовать неявное определение – такое, что математическая структура характеризуется скорее путем указания ее формальных свойств, нежели ее явного построения. Например, в Ausdehnungslehre в 1844 г. он действительно близко подходит к абстрактному понятию (не обязательно ассоциативного) кольца; что отсутствовало у него – так это язык теории множеств <...> . Между прочим, первое формальное определение кольца было дано Френкелем в 1915 г.". Автор статьи не упоминает о месте Грассмана в истории теории групп, утверждение его же о том, что Г.Грассман лишь "близко подходит" к абстрактному понятию кольца, которое было в явном виде сформулировано лишь в 1915 г., может просто ввести в заблуждение. Так возникает задача адекватной реконструкции соответствующих достижений Грассмана.

Известно, что история групп уходит в глубь столетий: уже в арифметике целых чисел содержится групповая структура (например, по операции сложения). В XVIII – первой половине XIX вв. появляются систематические описания конкретных групп (конечных групп различного порядка, групп симметрии, групп подстановок). Поворотным пунктом в возникновении теории групп считается 1846 г. – год публикации основных работ Э.Галуа [21. С. 64], выполненных еще на рубеже 20–30-х гг. В этих работах, посвященных теории уравнений, рассматривались конкретные теоретико-групповые вопросы. Заслуга Галуа, как мы знаем, состоит не только в том, что он свел изучение алгебраических уравнений к рассмотрению групп перестановок, которые подверг специальному изучению, но и в исследовании других групп, обладающих определенными свойствами. Однако общее определение группы, им, по-видимому, сформулировано не было. Считается, что первое определение "абстрактной" группы и соответствующие исследования были выполнены А.Кэли (1854 г.). Вряд ли, однако, это справедливо, так как Кэли работал скорее с конкретными группами. Как вытекает из изучения "Очерка общего учения о формах", понятие об абстрактной группе было сформулировано именно Г.Грассманом – в работе 1844 г., т.е. за 10 лет до Кэли.

В заключительных параграфах "Очерка общего учения о формах" Г.Грассман вводит практически алгебраическую структуру, которая ныне называется кольцом и близко подходит к понятию поля. А именно, на множестве всех форм он определяет бинарную операцию, обозначаемую $\frown$, относительно которой указанное множество является замкнутым. Относительно этой операции не утверждается ее ассоциативность, и в явном виде оговаривается, в общем случае, ее некоммутативность – обстоятельство, существенное для применения общей теории форм к известному грассмановскому учению о протяженностях, составляющему главное содержание его труда 1844 г., рассмотрение которого выходит за рамки данной статьи.

4. Операции учения о протяженностях в свете общего учения о формах

В конце "Очерка общего учения о формах" Грассман возвращается к идее генетического построения математики, высказанной им во "Введении" к труду 1844 г. А именно, сочленение форм посредством синтетической операции, обладающей свойствами ассоциативности и коммутативности (простой синтез), он считает возможным рассматривать как процесс порождения все более сложных форм, состоящих из положительных (вида $\cap a$) и отрицательных (вида $\cup a$) величин, которые в §8 он называет однородными. Переход к рассмотрению способа порождения величин (форм) для него означает выход за рамки "общего учения о формах", переход к реальным операциям, т.е. операциям над величинами, способ порождения которых задан. Этот переход, согласно Грассману, фактически имеет место только тогда, когда возникает вопрос об ассоциативности и (или) коммутативности умножения. Некоммутативное и неассоциативное умножение, и тем более сложение, как они и обратные им операции рассматривались до §12, трактуются как формальные процедуры над объектами, природа которых не определена. Он пишет, что "этому формальному понятию, если задана природа подлежащих сочленению величин, соответствует реальное понятие, выражающее способ порождения произведения из его сомножителей".

Одним из способов перехода к "реальным" операциям может быть способ, который он впоследствии применил к арифметике (см.: [12]). Другой же был развернут в учении о протяженностях и излагается в последующих параграфах и разделах книги 1844 г., где Грассман показывает, что в этом учении могут быть введены "виды умножения, для которых не имеет места по крайней мере перестановочность сомножителей, но к которым тем не менее полностью приложимы все до сих пор установленные предложения (предложения "общей теории форм". – Л.Б., Б.В.)" [11. С. 13].

В самом деле, в "Учении о протяженностях" мы имеем дело, с одной стороны, с операциями, удовлетворяющими общей теории форм, а с другой – с процедурами, выражающими "генетическую" спецификацию порождения рассматриваемых в ней величин.

Как показано в статье [25], Г.Грассман понимал математику как науку об умственных построениях – построениях, находящихся в определенных отношениях к реальности; связи математики с прикладными областями, согласно его взгляду, осуществляется через науки, основанные на "исходном созерцании" (Grund-Anschauung) пространства и времени (а благодаря последним – и движения), – через геометрию и механику. Последующее рассмотрение (в разделе "Введения") способов умственного построения – "становления благодаря мышлению", как выражался Г.Грассман, – приводит его к понятиям непрерывной и дискретной форм; в последнем случае имеет место двойной акт: полагания (установления) чего-то мышлением и связывания (сочленения) установленного:

для непрерывной формы полагание и сочленение сливаются. Применение к этим двум формам понятий об одинаковом (равном) и различном приводит к понятию о четырех типах форм (и к соответствующим ветвям "чистого учения о формах").

А именно, сначала дискретная форма разделяется на число и комбинацию (соединение – Gebinde). Число есть алгебраическая форма, т.е. объединение того, что полагаемо как одинаковое; комбинация есть комбинаторная дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как различное. Наука о дискретном, стало быть, это учение о числах и учение о комбинациях (учение о соединениях (Verbindungslehre)) (см.: [11. С. XXIII–XXIV; 17. С. 25]).

Изучение подхода Грассмана, как это явствует не только из "Учения о протяженностях" 1844 [11], но из переработанного его варианта 1862 г. [24], показывает, что его естественно истолковать следующим образом. Числа (для определенности ограничимся целыми положительными числами) суть формы, возникающие из единственного элемента e с помощью операции "+", т.е. объекты вида $e+e+\dots e_n$, где одна и та же элементарная форма e входит в сочленение n раз ($n = 1, 2, 3, \dots$), а комбинации соединения суть формы, возникающие из различных величин $a_1 + a_2 + \dots + a_k$, где в общем случае $a_i \neq a_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Что касается непрерывности форм, то они разделяются на интенсивные и экстенсивные величины или протяженности, возникающие "посредством созидания различного".

Мы не станем анализировать это не очень понятное "философское" высказывание Г.Грассмана. Отметим только, что согласно его взгляду, с каждым протяженным образованием связано некоторое ему противоположное, но только взятое в обратном порядке его возникновения (...), если с помощью некоторого изменения из (точки) a получается (точка) b, то противоположное изменение состоит в том, что из b получается a. И тут же он поясняет, что так же как в геометрии путем перемещения некоторой точки сначала возникает линия, пространственные же образования более высоких ступеней могут возникать лишь потом, после того, как полученное образование снова приводят в движение, так и в нашей науке путем непрерывных изменений порождающего элемента возникает протяженное образование первой ступени.

В учении о протяженностях рассматриваются величины вида $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots$, где $e_1, e_2, \dots e_n$ – направленные отрезки (независимые "единицы", полученные движением точки как порождающего элемента), а $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ – вещественные коэффициеты. На написанную выше сумму можно смотреть как на комплексное число по Грассману, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ суть компоненты комплексного числа. Сумма и разность двух комплексных чисел определяется путем сложения и, соответственно, вычитания соответствующих компонентов (т.е. на самом деле выражает сумму и разность векторов); вместе с тем сумма и разность высших комплексных чисел следуют тем же формальным законам, что и сумма и разность действительных чисел.

Дать такое определение произведению высших комплексных чисел, при котором и оно следовало бы формальным законам арифметики действительных чисел, не удавалось. В разрешении этой задачи Г.Грассман и У.Р.Гамильтон (они оба почти одновременно построили алгебру высших комплексных чисел) шли совершенно различными путями: Грассман двигался по линии "экстенсивной алгебры", в которой произведение двух комплексных чисел является комплексным числом более высокого порядка; Гамильтон же шел в направлении "интенсивной алгебры", в которой произведение есть комплексное число, составленное из тех же независимых единиц, что и сомножители.

Что касается умножения в геометрии, то, как указывает сам Г.Грассман, соответствующую идею он заимствовал у отца; об этом Грассман говорит в сноске к одной из своих ранних работ, называя книги Ю.Г.Грассмана "Учение о пространстве" (1828) и "Тригонометрия". Как отмечает Грассман, его отец в первой из указанных книг высказал взгляд, что треугольник является на самом деле геометрическим произведением, а его построение представляет собой геометрическое умножение; Ю.Г.Грассман также писал, что умножение есть лишь только построение высшего порядка, и как линия получается из точки, так треугольник получается из линии.

Итак, Г.Грассман допускает, что формы, первоначально не имеющие реального содержания, могут принимать различные значения - быть точками, векторами, ориентированными площадками и т.д.; более того, он вводит 16 видов операций умножения. Однако все эти формы и операции понимаются в терминах законов, введенных Грассманом во вступительном "Очерке" к труду [11].

В первой главе первой части книги 1844 г. в центре внимания Грассмана находится система различных порядков. Если взять элемент из одной системы и подвергнуть его изменению, то получится элемент из новой системы. Если, например, линия движется в некотором (прямолинейном) направлении, то получается плоскость - система второго порядка. Согласно Грассману, этот процесс может быть продолжен до получения систем любого порядка, следовательно, пространства любой размерности. В своей работе Грассман вводит направленные отрезки (векторы), доказывает, что они подчиняются ранее установленным в "теории форм" законам сложения и вычитания; он объясняет при этот смысл операции их сложения. Кроме того, он доказывает теоремы о наличии у получаемых им систем различных алгебраических свойств.

* * *

Подводя итог, можно сказать, что в трудах создателя "учения о протяженностях" нашли одну из первых формулировок те "модельные объекты" алгебры, которые в XX в. сыграли такую важную роль в разработке проблематики алгоритмической разрешимости - неразрешимости, а также - добавим мы теперь - и в развитие математико-логической теории моделей, тесно связанной как с "классическими", так и "неклассическими" - интуиционистскими и конструктивистскими - построениями в логике и основаниях математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков А.А. Теория алгорифмов // Тр. Матем. ин-та, М.; Л., 1954.
2. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгорифмов. М., 1984.
3. Thue A. Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegenbenen Regeln Skrifter utigt av Videnskapsselskapet i Kristiania, 1. // Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse, 1914. N 10.
4. Марков А.А. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем // Доклады АН СССР. 1947. Т. 55.
5. Post E.L. Recursive unsolvability of a problem of Thue // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 12. N 1.
6. Dehn M. Über unendliche diskontinuirliche // Mathematische Annalen. Bd. 71.
7. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества // Доклады АН СССР. Т. 85. № 4.
8. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., 1977.
9. Бирюков Б.В., Нуцубидзе Н.Н. У истоков математического конструктивизма: XIX столетие // Методологический анализ математических теорий. М., 1987.
10. Бирюкова Л.Г. Первый опыт конструктивного подхода к математической логике // Наст. изд.
11. Grassmann H. Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Thl. 1: Die Lineare Ausdehnungeslehre. Leipzig, 1844.
12. Grassman H. Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Berlin, 1861.
13. Grassman R. Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin, 1872.
14. Яновская С.А. Равенство (в логике и математике) // Философская энциклопедия. М., 1967. Т. 4.
15. Донченко В. Правило замены равным // Философская энциклопедия. М., 1967. Т. 4.
16. Бирюков Б.В. Грассман Роберт // Философская энциклопедия. М., 1960. Т. 1.
17. Grassman H. Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. 1. Thl. 1: Die Ausdehnungslehre von 1844 Geometrische Analyse. B., 1894.
18. Sarton G. Grassmann - 1844 // Isis, 1944. Vol. XXXV. N 102.
19. Crowe J.M. A History of Vector Analtsis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System // Notre-Dame; London, 1967.
20. Heath A.E. Hermann Grassmann. The neglect of the work of H.Grassmann. The Geometrical Analysis of Grassmann and its connection With Leibniz' Characteristic // Monist. 1917. Vol. XXV11.
21. Математика XIX века: математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1978.
22. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л., 1937. Ч. I.

23. Fearnley-Sander D. Hermann Grassmann and Creation of linear Algebra // American Mathematical Monthly. 1979. Vol. 86. N 10.

24. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre. Vollständig und strenger From Bearbeitet. Berlin, 1862.

25. Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г. "Учение о формах (величинах)" Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. I // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Научное издание

Методологический анализ оснований математики

*Утверждено к печати
Центральным советом
философских (методологических) семинаров
при Президиуме АН СССР*

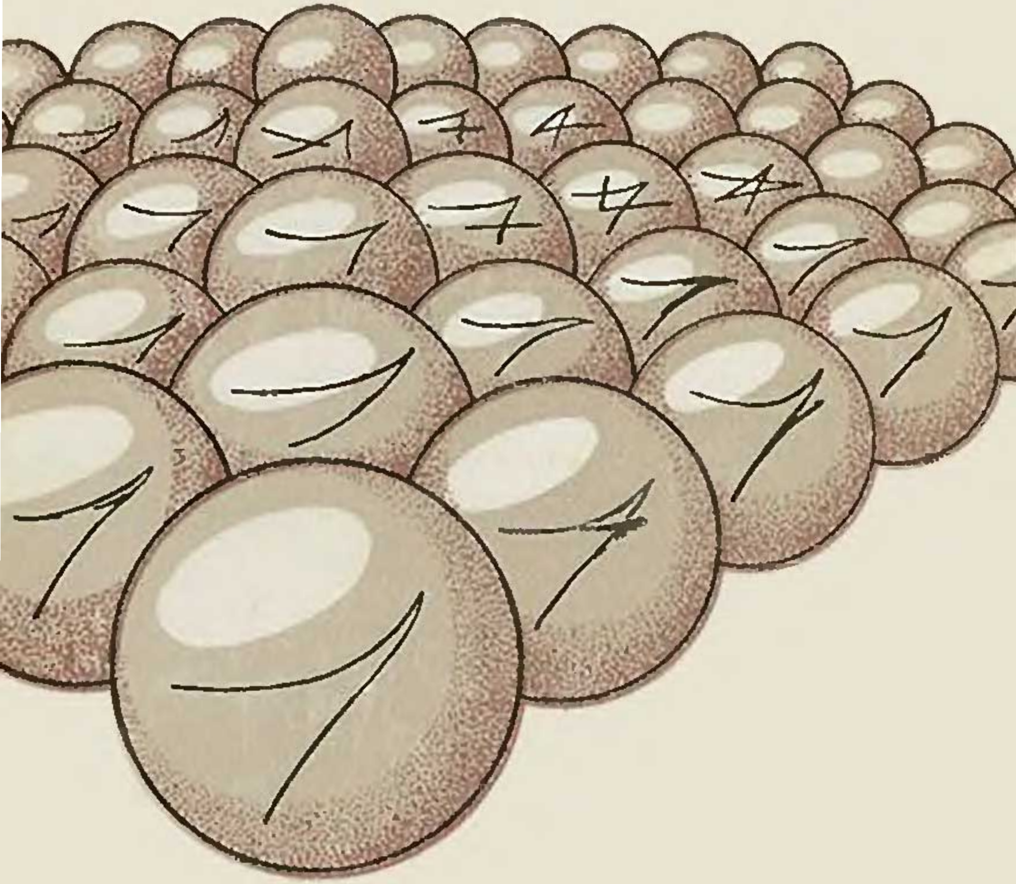
Редактор А.А. Осовцов
Художник Л.А. Григорян
Художественный редактор М.Л. Храмцов

ИБ № 39397

Подписано к печати 25.11.88. Формат 60 X 90 1/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл.печ.л. 11,0. Усл.кр.-отт 11,4. Уч.-изд.л. 15,4
Тираж 2200 экз. Тип. Зак. 1034. Цена 2 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
1-я типография издательства "Наука"
199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12



Методологический анализ оснований МАТЕМАТИКИ

« НАУКА »